

证明一致的启发式一定是可采纳的

A: 目标: 若 $h(n)$ 是一致启发式, 则 $h(n)$ 是可采纳的, 即 $\forall n, h(n) \leq h^*(n)$ 。

1. 基例

- 对于目标节点 goal, 有 $h(\text{goal}) = 0$ 。• 实际代价 $h^*(\text{goal}) = 0$, 因此 $h(\text{goal}) \leq h^*(\text{goal})$ 成立。

2. 归纳假设假设对于所有节点 n' (从目标节点出发经过 k 步可达的节点), 有 $h(n') \leq h^*(n')$ 。

3. 归纳步骤

- 考虑节点 n , 其到目标的最优路径为 $n \rightarrow n_1 \rightarrow n_2 \rightarrow \dots \rightarrow \text{goal}$, 总代价为 $h^*(n)$ 。
- 根据一致性条件, 对节点 n 及其直接后继 n_1 , 有:

$$h(n) \leq c(n, n_1) + h(n_1)$$

- 根据归纳假设, $h(n_1) \leq h^*(n_1)$, 代入得:

$$h(n) \leq c(n, n_1) + h^*(n_1)$$

- 由于 $h^*(n) = c(n, n_1) + h^*(n_1)$ (最优子路径性质), 因此:

$$h(n) \leq h^*(n)$$

4. 结论

由数学归纳法可知, 所有节点 n 均满足 $h(n) \leq h^*(n)$, 即 $h(n)$ 是可采纳的。

A* 算法的最优性

原句: A* of graph search is optimal with admissible heuristic.

答

1. A* 算法的基本性质:

- A* 算法是一种启发式搜索算法, 结合了 Dijkstra 算法的最优性和启发式函数的引导性。
- A* 算法的核心公式为:

$$f(n) = g(n) + h(n)$$

其中:

- $g(n)$ 是从起点到节点 n 的实际代价。
- $h(n)$ 是从节点 n 到目标节点的启发式估计代价。

2. A* 的最优性条件:

- 如果启发式函数 $h(n)$ 是 **可采纳的 (admissible)**, 即 $h(n) \leq h^*(n)$ ($h^*(n)$ 是从节点 n 到目标节点的实际最小代价), 则 A* 算法保证找到从起点到目标节点的最优路径。
- 如果启发式函数 $h(n)$ 是 **一致的 (consistent)** (也称为单调的), 即对于任意节点 n 和其直接后继节点 n' , 满足:

$$h(n) \leq c(n, n') + h(n')$$

则 A* 算法在 **图搜索 (graph search)** 中也是最优的。

结论

更准确的表述为:

A* 算法在图搜索 (graph search) 中保证最优性, 当且仅当启发式函数 $h(n)$ 是一致的 (consistent)。