Esame di Applicazioni Industriali Elettriche

Appello VI: 18/01/2021

Note

Il tempo per l'esecuzione della prova è di 90 minuti. Inserire di seguito la matricola per trovare i coefficienti da usare per determinare i parametri degli esercizi proposti.

Matricola:

k_6	k_5	k_4	k_3	k_2	k_1

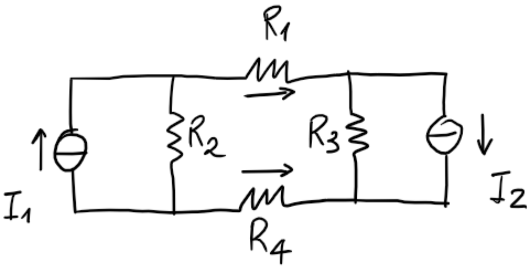
Esercizio 1

Si determini il valore delle correnti sulle resistenze R_1 e R_4 secondo i versi indicati in figura e considerando il circuito operante in **condizioni stazionarie in continua**.

$I_1 = (10 + k_1)\ A$

$I_2 = 10\ A$

$R_1 = R_2 = R_3 = R_4$



Esercizio 2

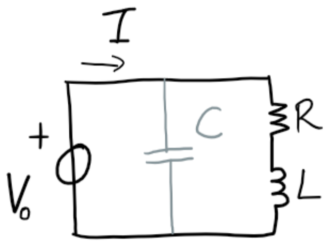
Il circuito in figura opera in **stato stazionario sinusoidale** alla pulsazione ω. C è il condensatore di rifasamento, tale da **rifasare completamente** il carico. Determinare il rapporto fra l'ampiezza della corrente nel caso di carico non rifasato (C assente) e nel caso di carico rifasato (C presente).

$V_0 = 325\ V$

$\omega = 100\pi\ rad/s$

$R = 3.1\ \Omega$

$L = (10 + k_2)\ mH$



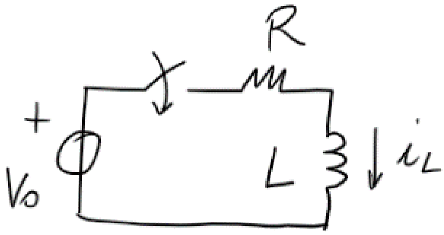
Esercizio 3

Il circuito in figura è osservato a partire dall'istante $t = 0$, momento in cui viene chiuso l'interruttore. Determinare il valore dell'induttore, noto il tempo T_a necessario alla corrente per raggiungere il 99.9% del suo valore di regime.

$R = 7\ \Omega$

$T_a = (k_3 + 1)\ ms$

$i_L(0) = 0$



Soluzioni Appello VI del 18/01/2021

Alessandro Soldati

18/01/2021

Esercizio 1

Il circuito, così come rappresentato in figura, presenta quattro nodi (di cui tre non banali) e tre maglie. Il circuito si può semplificare enormemente sostituendo il parallelo di I_1 e R_2 con il relativo equivalente di Thévenin, e analogamente per il parallelo di I_2 e R_3. Ne consegue lo schema semplificato di Fig. 1, che presenta una sola maglia. Applicando il teorema di Thévenin, si ha che $V_1 = R_2 I_1$ e $V_2 = R_3 I_2$. Si può quindi risolvere il quesito:

$$I_{R_1} = -I_{R_4} = \frac{V_1 + V_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{R_2 I_1 + R_3 I_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{I_1 + I_2}{4} \tag{1}$$

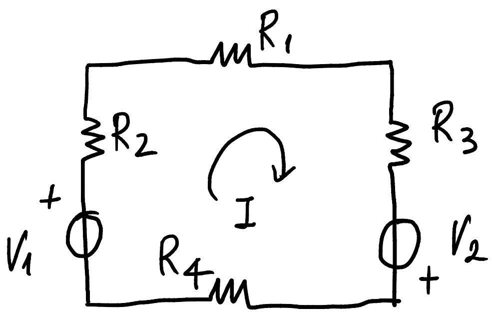


Figura 1: Schema circuitale dopo la trasformazione dei generatori di corrente con conduttanza applicando il teorema di Thévenin.

Esercizio 2

L'impedenza del carico non rifasato è

$$\mathbf{Z_L} = R + j\omega L \tag{2}$$

Rifasando, l'impedenza complessiva vista dal generatore è

$$\mathbf{Z_{LC}} = \frac{1}{j\omega C} \parallel \mathbf{Z_L} = \frac{R + j\omega L}{(1 - \omega^2 LC) + j\omega RC} \tag{3}$$

Per avere rifasamento completo occorre che la fase dell'impedenza vista dal generatore sia nulla:

$$\angle \mathbf{Z_{LC}} = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right) - \arctan\left(\frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC}\right) = 0 \tag{4}$$

Tale equazione trascendente può essere facilmente risolta in C, poiché la funzione arctan è monotona:

$$\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right) = \arctan\left(\frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\omega L}{R} = \frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC} \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2} \tag{5}$$

Si possono ora calcolare i moduli delle correnti I_L e I_{LC} erogate dal generatore nei due casi, rispettivamente con carico non rifasato e rifasato

$$I_L = |\mathbf{I_L}| = \left|\frac{\mathbf{V_0}}{\mathbf{Z_L}}\right|, \qquad I_{LC} = |\mathbf{I_{LC}}| = \left|\frac{\mathbf{V_0}}{\mathbf{Z_{LC}}}\right| \tag{6}$$

Il testo del problema richiede quindi il rapporto *fra i moduli di corrente nel caso non rifasato e in quello rifasato* (in quest'ordine!); occorre quindi calcolare tale rapporto r come

$$r = \frac{I_L}{I_{LC}} = \left|\frac{\mathbf{V_0}}{\mathbf{Z_L}}\right| \cdot \left|\frac{\mathbf{Z_{LC}}}{\mathbf{V_0}}\right| = \left|\frac{\mathbf{Z_{LC}}}{\mathbf{Z_L}}\right| = \sqrt{\frac{1}{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \tag{7}$$

Sostituendo il valore di C necessario per il rifasamento completo determinato in (5), si ottiene che il rapporto è

$$r = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}. \tag{8}$$

Si tratta di un risultato molto importante, in quanto dimostra semplicemente l'importanza pratica del rifasamento: un carico induttivo non rifasato comporta correnti con modulo *sempre* superiore al medesimo carico rifasato; poiché, nei due casi, la potenza attiva non cambia (il valore di R è sempre lo stesso), rifasare un carico consente di avere correnti inferiori sui conduttori che collegano la sorgente al carico stesso, ottenendo un trasporto più efficiente dell'energia elettrica. Si nota infatti che vale sempre $r \geq 1$.

Esercizio 3

Com'è noto da numerosi altri esempi simili già affrontati, l'equazione che descrive il transitorio del circuito rappresentato, in presenza di condizioni iniziali nulle, è

$$i_L(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \quad \tau = \frac{L}{R} \tag{9}$$

Il valore di regime del transitorio è quindi

$$I_{L\infty} = \lim_{t\to+\infty} i_L(t) = \frac{V_0}{R} \tag{10}$$

Dal testo del problema si sa quindi che

$$i_L(T_a) = (1-k)I_{L\infty} = (1-k)\frac{V_0}{R} = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-T_a/\tau}\right) \tag{11}$$

Con $1 - k = 0.999$, cioè $k = 1 \times 10^{-3}$ (il numero di decimali è importante, trattandosi di un problema esponenziale!). Semplificando e risolvendo, si ottiene

$$k = e^{-T_a/\tau} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{T_a}{\tau} = \ln k \quad \Leftrightarrow \quad \tau = \frac{L}{R} = -\frac{T_a}{\ln k} \quad \Leftrightarrow \quad L = \frac{RT_a}{\ln(1/k)} \tag{12}$$

Poiché, per la particolare scelta dei valori del testo, si ha che $-\ln k = \ln 1000 = 6.907755\cdots \approx 7$, la soluzione approssimata del problema è

$$L \approx \frac{RT_a}{7} = \frac{7\,\Omega \cdot (k_3+1)\mathrm{ms}}{7} = (k_3+1)\mathrm{mH} \tag{13}$$