Esame di Applicazioni Industriali Elettriche

Appello I: 16/06/2020

Note

Il tempo massimo per l'esecuzione della prova è di 90 minuti. Inserire di seguito la matricola per trovare i coefficienti da usare per determinare i parametri degli esercizi proposti.

Matricola:

k_6	k_5	k_4	k_3	k_2	k_1

Esercizio 1

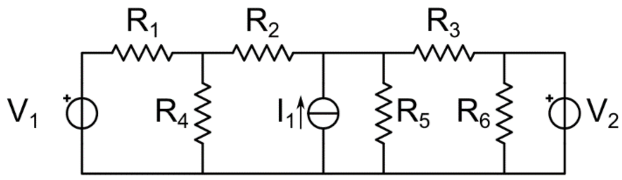
Dato il circuito in figura, si determinino le correnti sul generatore V_2, sulla resistenza R_2 e sulla resistenza R_4.

$V_1 = 10\ V$

$V_2 = (10 + k_1)\ V$

$I_1 = 1\ A$

$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 7\ \Omega$



Esercizio 2

Si rifasi completamente il carico resistivo-induttivo presente in figura, nell'ipotesi di inserire la capacità C di rifasamento in parallelo al carico e al generatore. Si consideri il circuito operante in stato stazionario sinusoidale.

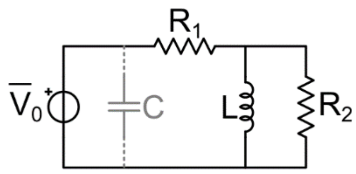
$\bar{V}_0 = (325\ \angle 30°)\ V$

$R_1 = 10\ \Omega$

$R_2 = 10\ \Omega$

$L\ =\ 1\ mH$

$\omega = (300 + 1000 \cdot k_2)\ rad/s$



Esercizio 3

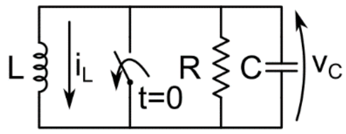
Il circuito in figura, in condizioni transitorie, è osservato a partire dall'istante $t = 0$, nel quale viene aperto l'interruttore. All'inizio del transitorio la corrente sull'induttore è I_0 e la tensione sul condensatore è nulla. Si determini il valore massimo raggiunto dalla tensione sul condensatore v_C.

$I_0 = (-1 - k_3)\ A$

$C\ =\ 10\ \mu F$

$L\ =\ 330\ \mu H$

$R = 2\ \Omega$



Soluzioni Appello I del 16/06/2020

Alessandro Soldati

23/06/2020

Esercizio 1

Si considerino le correnti su R_1, R_2 e R_3 orientate da sinistra a destra e quelle su R_4, R_5 e R_6 dall'alto verso il basso. Il nodo di riferimento è quello al terminale negativo di V_1 e V_2, mentre i nodi A, B e C si trovano rispettivamente fra R_1 e R_2, fra R_2 e R_3, fra R_3 e R_6.

Il circuito presenta cinque maglie indipendenti, ma solamente quattro nodi, di cui uno di riferimento e uno (C) banale in quanto $V_C = V_2$. Il metodo da scegliere è quindi quello dei nodi, che consente la soluzione del circuito attraverso un sistema ridotto di sole due incognite (V_A e V_B). Il sistema completo consta di dieci equazioni in dieci incognite, suddivise fra tre KCL (una per ciascun nodo non di riferimento), sei leggi di Ohm (una per ciascuna resistenza) e la tensione di V_C.

$$\begin{cases} I_{R_1} - I_{R_2} - I_{R_4} = 0 \\ I_{R_2} + I_1 - I_{R_3} - I_{R_5} = 0 \\ I_{R_3} + I_{V_2} - I_{R_6} = 0 \\ I_{R_1} = G_1(V_1 - V_A) \\ I_{R_2} = G_2(V_A - V_B) \\ I_{R_3} = G_3(V_B - V_C) \\ I_{R_4} = G_4 V_A \\ I_{R_5} = G_5 V_B \\ I_{R_6} = G_6 V_C \\ V_C = V_2 \end{cases} \tag{1}$$

Il sistema ridotto si ottiene tenendo le prime due equazioni (KCL relative ai nodi A e B) e sostituendovi le altre:

$$\begin{cases} G_1(V_1 - V_A) - G_2(V_A - V_B) - G_4 V_A = 0 \\ G_2(V_A - V_B) + I_1 - G_3(V_B - V_2) - G_5 V_B = 0 \end{cases} \tag{2}$$

che in forma matriciale diventa

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_4 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 + G_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 V_1 \\ I_1 + G_3 V_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Il sistema può essere facilmente risolto usando metodi noti dall'algebra lineare. Le incognite V_A e V_B richieste si trovano quindi come:

$$I_{V_2} = (G_3 + G_6)V_2 - G_3 V_B \tag{4}$$
$$I_{R_2} = G_2(V_A - V_B) \tag{5}$$
$$I_{R_4} = G_4 V_A \tag{6}$$

Esercizio 2

Si osserva che L e R_2 sono in parallelo, e questo è in serie alla R_1. L'impedenza di carico $\mathbf{Z}$ è quindi

$$\mathbf{Z} = R_1 + j\omega L \parallel R_2 = R_1 + \frac{j\omega L R_2}{R_2 + j\omega L} = \frac{R_1 R_2 + j\omega L(R_1 + R_2)}{R_2 + j\omega L} = Z e^{j\varphi} \tag{7}$$

Si possono quindi calcolare la potenza complessa $\mathbf{S}$ erogata dal generatore e la sua componente reattiva Q:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{V}_0\mathbf{I}^* = \frac{V_0^2}{2}\frac{1}{\mathbf{Z}^*} \tag{8}$$

$$Q = \Im\{\mathbf{S}\} = |\mathbf{S}|\sin\angle\mathbf{S} = \frac{V_0^2}{2Z}\sin\varphi \tag{9}$$

in quanto la fase di $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{S}$ coincidono e sono pari a φ.

Introducendo la capacità C in parallelo al carico, questa è in grado di assorbire potenza reattiva Q_C, che deve essere uguale ed opposta a Q al fine di avere rifasamento completo.

$$Q_C = \Im\left\{\frac{1}{2}\mathbf{V}_0(j\omega C\mathbf{V}_0)^*\right\} = \Im\left\{-j\frac{1}{2}\omega CV_0^2\right\} = -\frac{1}{2}\omega CV_0^2 = -Q = -\frac{V_0^2}{2Z}\sin\varphi \tag{10}$$

dalla quale si ottiene il valore di capacità richiesto

$$\frac{1}{2}\omega CV_0^2 = \frac{V_0^2}{2Z}\sin\varphi \quad\Leftrightarrow\quad C = \frac{\sin\varphi}{\omega Z} \tag{11}$$

Esercizio 3

Una volta aperto l'interruttore, il circuito è un RLC parallelo, in evoluzione autonoma, vista la corrente non nulla sull'induttore per $t = 0$. L'equazione di Kirchhoff delle correnti all'unico nodo non banale del circuito è

$$i_L + i_R + i_C = 0 \tag{12}$$

che si accompagna al fatto che i tre bipoli sono in parallelo, e quindi soggetti alla medesima tensione

$$v_C = v_L = v_R \tag{13}$$

Si osserva quindi che le correnti possono essere espresse tutte in funzione di i_L:

$$i_C = C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} = LC\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2} \tag{14}$$

$$i_R = \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \tag{15}$$

Si ottiene quindi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \frac{i_L}{LC} = 0 \\ i_L(0) = I_0 \\ v_C(0) = 0 \end{cases} \tag{16}$$

Risolvendo l'equazione algebrica associata

$$\lambda^2 + \frac{1}{RC}\lambda + \frac{1}{LC} = 0 \tag{17}$$

si ottengono due soluzioni reali e distinte in quanto, indipendentemente dal valore di k_3, $R < 1/2\cdot\sqrt{L/C}$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2RC}\left[-1 \pm \sqrt{1 - 4R^2\frac{C}{L}}\right] = \alpha_{1,2} \in \mathbb{R}^- \tag{18}$$

La soluzione sarà quindi nella forma

$$i_L(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} \tag{19}$$

Imponendo le condizioni iniziali, si ottiene

$$A_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}I_0 \tag{20}$$

$$A_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}I_0 \tag{21}$$

Si ottiene quindi la tensione sul condensatore per applicazione dell'equazione costitutiva dell'induttore

$$v_C(t) = v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = L\alpha_1 A_1 e^{\alpha_1 t} + L\alpha_2 A_2 e^{\alpha_2 t} \tag{22}$$

Derivando questa e cercandone gli zeri, si ottiene l'unico punto stazionario t_x

$$t_x = \frac{\ln\alpha_2 - \ln\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \tag{23}$$

Ottenendo infine il massimo $v_{C,\max} = v_C(t_x)$ richiesto.

Soluzioni equivalenti si ottengono scrivendo direttamente l'equazione differenziale in termini di v_C.