Cognome:______________________________ Nome:______________________________

Esame di Applicazioni Industriali Elettriche / Elettronica

Appello VII: 11/02/2020

Note

Il tempo massimo per l'esecuzione della prova è di due ore. Inserire di seguito la matricola per trovare i coefficienti da usare per determinare i parametri degli esercizi proposti.

Matricola:

k_6	k_5	k_4	k_3	k_2	k_1

Esercizio 1 (Modulo 1 – Tutti)

Dato il circuito in figura, si determinino le potenze erogate dai due generatori.

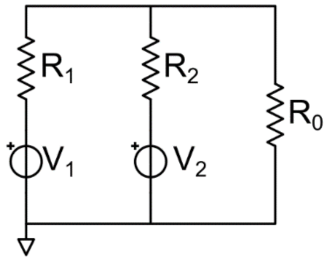
$V_1 = 12\ V$

$V_2 = 11\ V$

$R_1 = 150\ m\Omega$

$R_2 = (100 + 10 \cdot k_1)\ m\Omega$

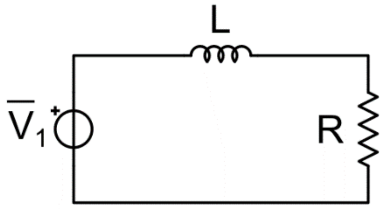
$R_0 = 4\ \Omega$



Esercizio 2 (Modulo 1 – Tutti)

L'induttore L del circuito in figura è realizzato su un nucleo ferromagnetico toroidale assunto lineare, con permeabilità magnetica relativa μ_r. La sezione del toroide è S mentre la lunghezza del percorso magnetico è l. Sul toroide sono avvolte N spire. Si determini la fase relativa fra la corrente dell'induttore e la tensione del generatore, supponendo che il circuito si trovi in regime stazionario sinusoidale alla frequenza f_0.

$\bar{V}_1 = (325\ \angle 30°)\ V$	$\mu_r = 2 \cdot 10^3$
$f_0 = 50\ Hz$	$S = 4 \cdot 10^{-4}\ m^2$
$R = 10\ \Omega$	$l = 15 \cdot 10^{-2}\ m$
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H/m}$	$N = (10 + k_2)$



Esercizio 3 (Modulo 1 – Tutti)

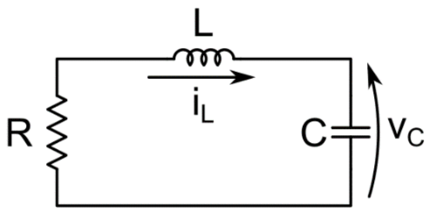
Il circuito in figura, in condizioni transitorie, è osservato a partire dall'istante $t = 0$, nel quale la corrente sull'induttore è I_0 e la tensione sul condensatore è nulla. Si determini il valore massimo raggiunto dalla tensione sul condensatore v_C.

$I_0 = 10\ A$

$C = 10\ \mu F$

$L = 1\ mH$

$R = (k_3 + 1) \cdot 100\ \Omega$



Soluzioni Appello VII del 11/02/2020

Alessandro Soldati

11/02/2020

Esercizio 1

Per il calcolo delle potenze è necessario ricavare le correnti che scorrono sui rami dei generatori. Per fare ciò, è necessario prima determinare la tensione V_0 ai capi della resistenza R_0. Applicando la *legge di Kirchhoff delle correnti (KCL)* o, alternativamente, il *teorema di Millman*, si ha:

$$\frac{V_1 - V_0}{R_1} + \frac{V_2 - V_0}{R_2} - \frac{V_0}{R_0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad G_1V_1 + G_2V_2 = (G_0 + G_1 + G_2)V_0 \quad \Leftrightarrow \quad V_0 = \frac{G_1V_1 + G_2V_2}{G_0 + G_1 + G_2} \tag{1}$$

Si possono quindi calcolare le potenze richieste:

$$P_1 = V_1I_1 = V_1(V_1 - V_0)G_1 \tag{2}$$
$$P_2 = V_2I_2 = V_2(V_2 - V_0)G_2 \tag{3}$$

Nel calcolo delle potenze non si devono introdurre né cambiamenti di segno né operazioni di valore assoluto. Avendo utilizzato per le correnti dei generatori la convenzione dei generatori, le potenze saranno positive per quei generatori che effettivamente forniscono potenza al circuito, mentre saranno negative per quei generatori che assorbono potenza (comportamento da carico).

Esercizio 2

Ricordando la definizione di induttanza e la *legge di Ampère-Maxwell* ($H\ell = NI$), si può calcolare il valore di L a partire dai parametri geometrici e magnetici forniti:

$$L = \frac{\lambda}{I} = \frac{N\Phi}{I} = \frac{NBS}{I} = \frac{N\mu HS}{I} = \frac{N\mu_0\mu_r NIS}{I\ell} = \frac{\mu_0\mu_r N^2 S}{\ell} \tag{4}$$

Si ottiene quindi che la corrente fasoriale $\bar{I}$ che scorre nella maglia è

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_1}{R + j\omega L} \tag{5}$$

L'angolo richiesto è quindi

$$\varphi = \angle\bar{I} - \angle\bar{V}_1 = \angle\bar{V}_1 - \arctan_2(\omega L, R) - \angle\bar{V}_1 = -\arctan(\omega L/R). \tag{6}$$

Esercizio 3

Si studia il transitorio partendo dall'applicazione della *legge di Kirchhoff delle tensioni (KVL)* all'unica maglia presente, unitamente all'equazione costitutiva della capacità $i = C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}$ e dell'induttanza $v_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$:

$$v_R + v_L + v_C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + v_C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad LC\frac{\mathrm{d}^2v_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} + v_C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2v_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} + \frac{v_C}{LC} = 0 \tag{7}$$

L'equazione trovata è lineare, del second'ordine e omogenea. Come tale, la soluzione è nella forma

$$v_C(t) = A_1e^{\alpha_1 t} + A_2e^{\alpha_2 t} \tag{8}$$

dove A_1 e A_2 sono costanti da determinare imponendo le condizioni iniziali e α_1 e α_2 sono le soluzioni dell'equazione algebrica (9), associata alla (7):

$$\alpha^2 + \frac{R}{L}\alpha + \frac{1}{LC} = 0 \tag{9}$$

Risolvendo la (9), si ottiene

$$\alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2C}}\right) \tag{10}$$

Poiché, per tutti i valori di k_3 dati, si ha che $R > 2\sqrt{L/C}$, le soluzioni $\alpha_{1,2}$ sono reali, distinte e negative. Le costanti A_1 e A_2 si determinano imponendo le condizioni iniziali relative alla tensione sul condensatore e alla corrente sull'induttore (variabili di stato dei rispettivi componenti):

$$v_C(0) = A_1 + A_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_2 = -A_1 \tag{11}$$

$$i(0) = C\left.\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = C\left[A_1\alpha_1 e^{\alpha_1 t} + A_2\alpha_2 e^{\alpha_2 t}\right]_{t=0} = C(A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2) = CA_1(\alpha_1 - \alpha_2) = I_0 \tag{12}$$

che risultano in

$$A_1 = \frac{I_0}{C(\alpha_1 - \alpha_2)} \tag{13}$$

Si cercano quindi i punti stazionari della derivata di v_C, al fine di trovarne il massimo. Tale valore è assunto in corrispondenza del tempo t_A, per il quale

$$\left.\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_A} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_1\left[\alpha_1 e^{\alpha_1 t} - \alpha_2 e^{\alpha_2 t}\right]_{t=t_A} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 e^{\alpha_1 t_A} = \alpha_2 e^{\alpha_2 t_A} \quad \Leftrightarrow \quad e^{(\alpha_1-\alpha_2)t_A} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \tag{14}$$

Si ottiene infine che

$$t_A = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}\ln\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \tag{15}$$

È quindi evidente come vi sia un unico punto stazionario. Questo può essere solo un massimo, in quanto il verso iniziale della corrente è tale da portare ad una crescita della v_C, inizialmente nulla; inoltre $\lim_{t\to\infty} v_C(t) = 0$ in quanto il circuito studiato è autonomo (non sono presenti generatori forzanti). Si ha quindi che il valore massimo di v_C cercato è

$$\max v_C(t) = v_C(t_A). \tag{16}$$