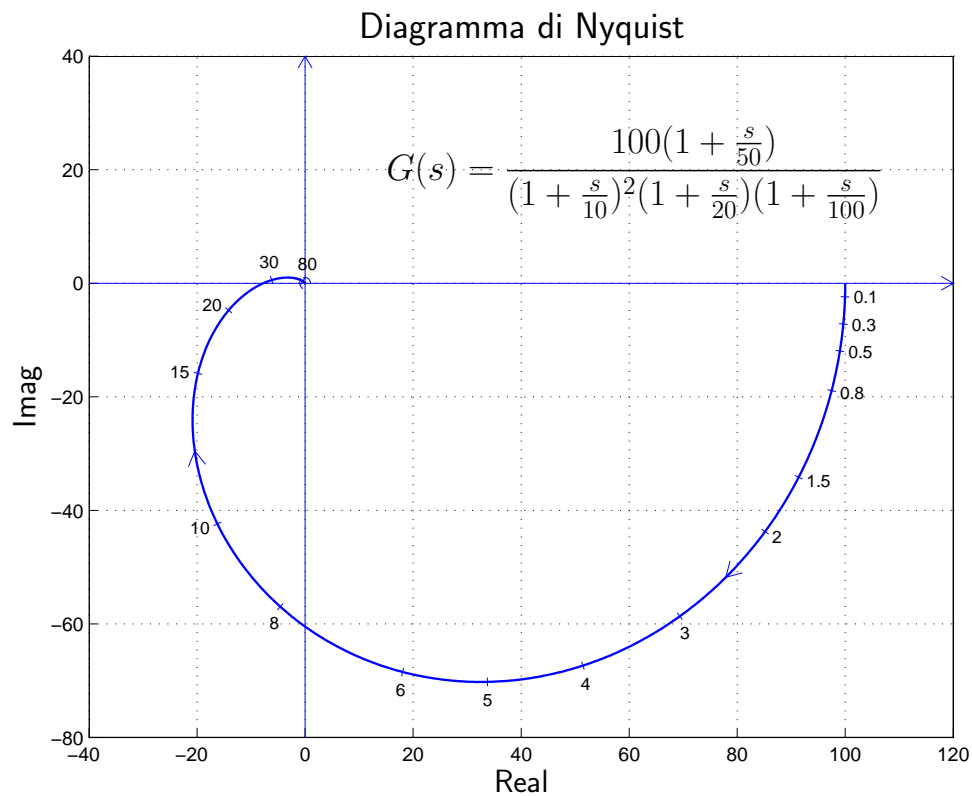
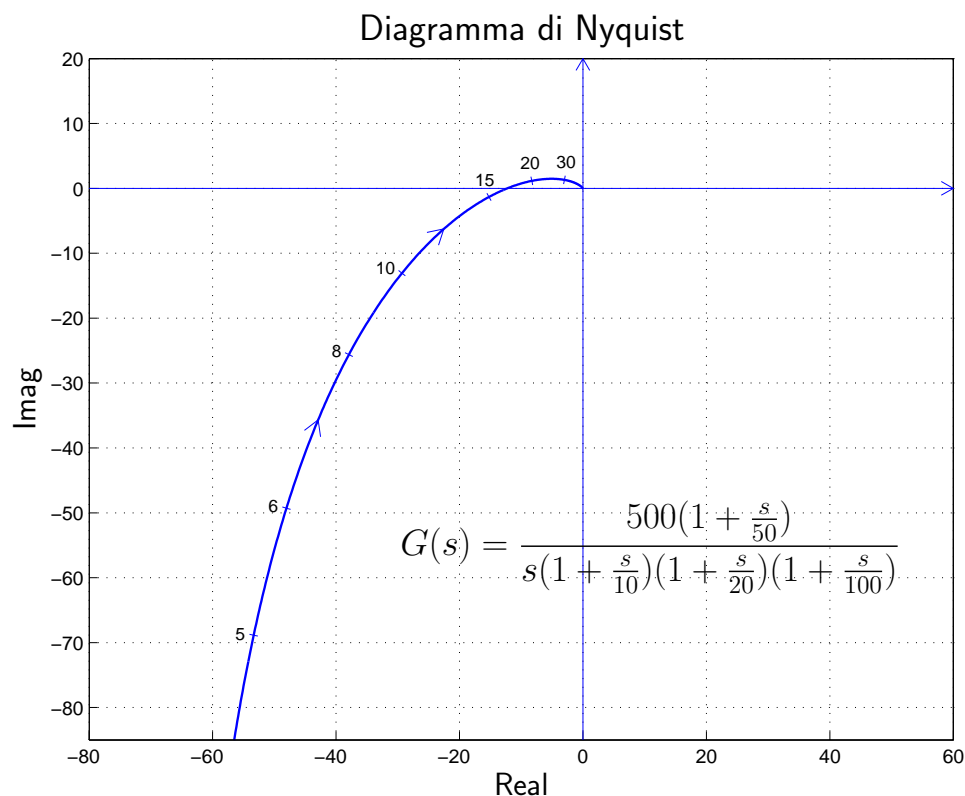


Diagrammi di Nyquist o polari

- Esempio di diagramma polare senza poli nell'origine:



- Esempio di diagramma polare con un polo nell'origine:



- I diagrammi di Nyquist mostrano, sul piano complesso di Gauss, come varia il numero complesso $G(j\omega)$ al variare della pulsazione ω .

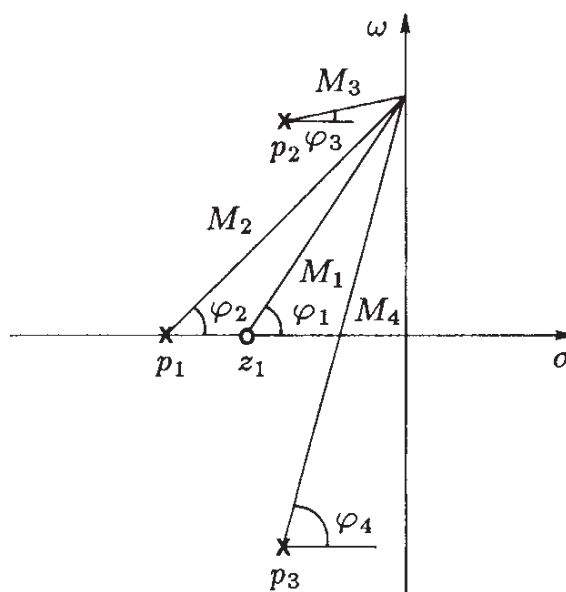
- I diagrammi di Nyquist sono graduati in funzione della pulsazione ω .
- I diagrammi polari sono di grande importanza per lo studio della stabilità dei sistemi in retroazione (criterio di Nyquist).
- Nota la funzione di trasferimento $G(s)$, il diagramma polare si può tracciare per punti separando le parti reale e immaginaria di $G(j\omega)$ e determinandone i valori corrispondenti a vari valori di ω .
- Se una funzione di trasferimento $G(s)$ è data in forma fattorizzata, la corrispondente funzione di risposta armonica è:

$$G(j\omega) = K_1 \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2) \dots (j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n)}$$

- Interpretazione grafica della funzione di risposta armonica (un esempio):

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= K_1 \frac{(j\omega - z_1)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)(j\omega - p_3)} \\ &= K_1 \frac{M_1}{M_2 M_3 M_4} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4)} \end{aligned}$$

I moduli M_1 , M_2 , M_3 , M_4 e le fasi φ_1 , φ_2 , φ_3 e φ_4 sono facilmente determinabili anche per via grafica.



- In molti casi, per lo studio della stabilità di un sistema retroazionato è sufficiente la conoscenza dell'andamento *qualitativo* del suo diagramma di Nyquist.

Funzione $G(s)$: forme canoniche

Si faccia riferimento alle seguenti forme canoniche di una funzione $G(s)$:

- Forma polinomiale:

$$G(s) = K_1 \frac{s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^h (s^{n-h} + a_{n-1} s^{n-h-1} + \dots + a_{h+1} s + a_h)}$$

- Forma fattorizzata a poli e zeri:

$$G(s) = K_1 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{s^h (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_{n-h})}$$

- Forma fattorizzata a costanti di tempo:

$$G(s) = K \frac{(1 + \tau'_1 s)(1 + \tau'_2 s) \dots \left(1 + 2\delta'_1 \frac{s}{\omega'_{n1}} + \frac{s^2}{\omega'^2_{n1}}\right) \dots}{s^h (1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \dots \left(1 + 2\delta_1 \frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega^2_{n1}}\right) \dots}$$

È facile dimostrare che valgono seguenti proprietà.

Guadagni statici:

$$b_0 = \prod_{i=1}^m (-z_i), \quad a_h = \prod_{i=1}^{n-h} (-p_i), \quad K = K_1 \frac{b_0}{a_h}$$

Costanti di tempo:

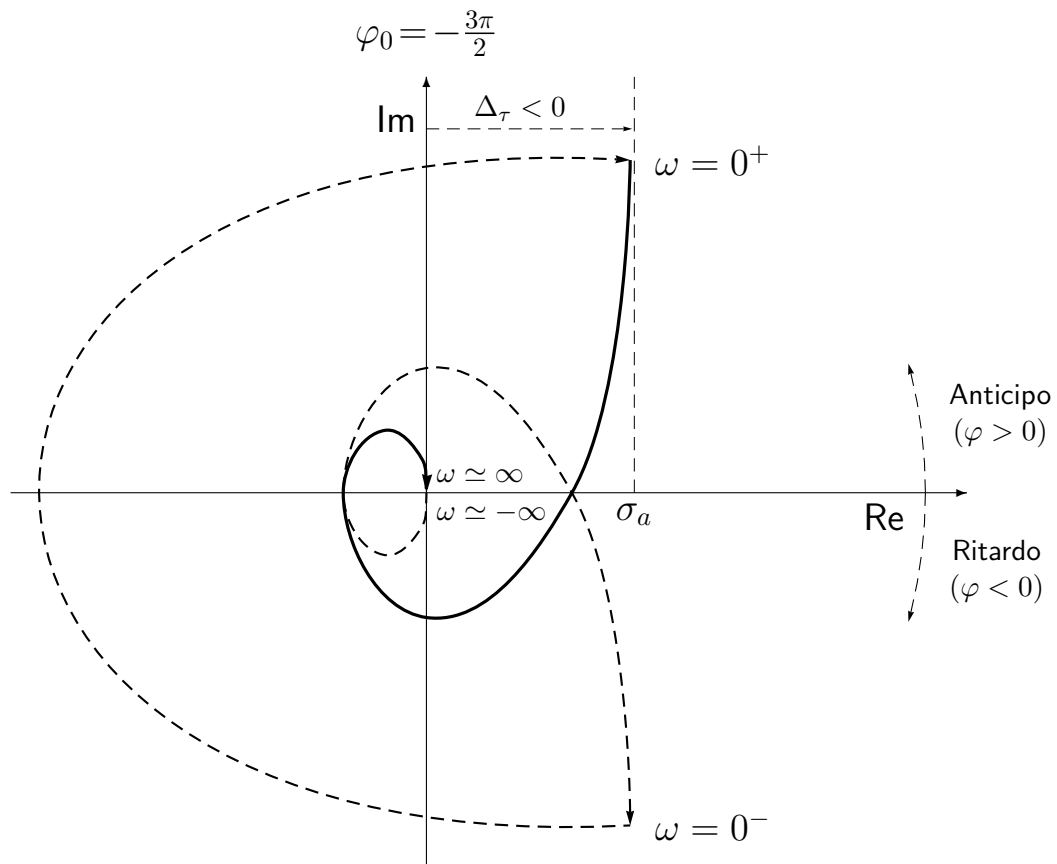
$$\begin{aligned} \frac{b_1}{b_0} &= - \sum_{i=1}^m \frac{1}{z_i} = \sum_{i=1}^m \tau'_i = \tau'_1 + \tau'_2 + \dots + \frac{2\delta'_1}{\omega'_{n1}} + \frac{2\delta'_2}{\omega'^2_{n2}} + \dots \\ \frac{a_{h+1}}{a_h} &= - \sum_{i=1}^{n-h} \frac{1}{p_i} = \sum_{i=1}^{n-h} \tau_i = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \frac{2\delta_1}{\omega_{n1}} + \frac{2\delta_2}{\omega_{n2}} + \dots \\ \Delta_\tau &= \sum_{i=1}^m \tau'_i - \sum_{i=1}^{n-h} \tau_i = \sum_{i=1}^{n-h} \frac{1}{p_i} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{z_i} = \frac{b_1}{b_0} - \frac{a_{h+1}}{a_h} \end{aligned}$$

Graficazione dei diagramma di Nyquist

Il procedimento che verrà ora descritto permette di ottenere una graficazione “rapida” e “qualitativamente corretta” del diagramma di Nyquist di una generica funzione $G(s)$. Nel seguito si farà riferimento al seguente esempio:

$$G(s) = \frac{10(s-1)}{s(s+1)(s^2+8s+25)}.$$

Graficazione qualitativa del diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$:



Il procedimento che si suggerisce di seguire è composto da sei passi:

1. Punto di partenza del diagramma di Nyquist. Si determina utilizzando la funzione approssimante $G_0(s)$ per $s \rightarrow 0$:

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) \simeq G_0(s) = \frac{K}{s^h} = \frac{-10}{25s} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_0 = \infty \\ \varphi_0 = -\frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

I simboli M_0 e φ_0 vengono utilizzati per indicare il modulo e la fase della funzione $G(s)$ per $s = j\omega \rightarrow 0$. La funzione approssimante $G_0(s)$ è

sempre il prodotto di una costante K (la costante moltiplicativa della $G(s)$ nella forma “a costanti di tempo”) e di un numero h di integratori pari al numero di poli della $G(s)$ nell'origine (“tipo”). Il modulo M_0 è funzione di h :

$$M_0 = \begin{cases} G(0) = G_0(0) & \text{se } h = 0 \\ \infty & \text{se } h \geq 1 \end{cases}$$

2. Partenza in anticipo o in ritardo. Per $\omega = 0^+$ il diagramma di Nyquist parte in anticipo o in ritardo rispetto alla fase iniziale φ_0 in funzione del segno del seguente parametro:

$$\Delta_\tau = \sum_{i=1}^m \tau'_i - \sum_{j=1}^{n-h} \tau_j$$

dove con τ'_i e τ_j si sono indicate le costanti di tempo, rispettivamente, degli zeri e dei poli della funzione $G(s)$. Vale la seguente relazione:

$$\Delta_\tau = \begin{cases} \frac{b_1}{b_0} - \frac{a_{h+1}}{a_h} & \text{se } G(s) \text{ è in} \\ & \text{“forma polinomiale”} \\ \left(\begin{array}{l} +\tau'_1 + \tau'_2 + \dots + \frac{2\delta'_1}{\omega'_{n1}} + \dots \\ -\tau_1 - \tau_2 - \dots - \frac{2\delta_1}{\omega_{n1}} - \dots \end{array} \right) & \text{se } G(s) \text{ è in} \\ & \text{“forma a costanti di tempo”} \end{cases}$$

Se $\Delta_\tau > 0$ si parte in anticipo rispetto a φ_0 . Se $\Delta_\tau < 0$ si parte in ritardo rispetto a φ_0 . Nel caso in esame si ha:

$$\Delta_\tau = -1 - \left(1 + \frac{8}{25}\right) = -\frac{58}{25} < 0.$$

Si noti che la costante di tempo $\tau = 2\delta/\omega_n = 8/25$ che caratterizza la coppia di poli complessi coniugati ($s^2 + 8s + 25$) si ottiene trascurando il termine quadratico in s . La costante Δ_τ è negativa per cui il diagramma parte in ritardo rispetto alla fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{3}{2}\pi$. Il diagramma quindi parte all'infinito alla destra del semiasse immaginario.

3. Presenza di un eventuale asintoto. Il diagramma di Nyquist ha un asintoto solo se $h = 1$. L'asintoto, se esiste, è sempre verticale. L'ascissa σ_a dell'asintoto verticale si calcola nel seguente modo:

$$\sigma_a = K\Delta_\tau$$

dove K è la costante moltiplicativa della funzione $G(s)$ posta nella forma *fattorizzata a costanti di tempo*. Nel caso in esame si ha:

$$\sigma_a = \frac{-10}{25} \left(-1 - 1 - \frac{8}{25} \right) = \frac{116}{125} = 0.928.$$

Si noti che la posizione $\sigma_a > 0$ dell'asintoto rispetto all'asse immaginario è concorde con il risultato trovato al punto precedente secondo il quale il diagramma di Nyquist parte in "ritardo" rispetto alla fase iniziale φ_0 .

4. Punto di arrivo del diagramma di Nyquist. Si determina utilizzando la funzione approssimante $G_\infty(s)$ per $s \rightarrow \infty$:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) \simeq G_\infty(s) = \frac{K_1}{s^r} = \frac{10}{s^3} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_\infty = 0 \\ \varphi_\infty = -\frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

I simboli M_∞ e φ_∞ vengono utilizzati per indicare il modulo e la fase della funzione $G(s)$ per $s = j\omega \rightarrow \infty$. La funzione approssimante $G_\infty(s)$ è sempre il prodotto di una costante K_1 (la costante moltiplicativa della $G(s)$ nella forma "poli-zeri") e di un certo numero r di integratori pari al grado relativo della funzione: $r = n - m$. Se $r = 0$ il punto di arrivo della $G(j\omega)$ si trova sull'asse reale. Se $r > 0$ il punto di arrivo è nell'origine.

Per $\omega \rightarrow \infty$, il diagramma di Nyquist arriva in anticipo o in ritardo rispetto alla fase finale φ_∞ in funzione del segno del seguente parametro:

$$\Delta_p = \sum_{i=1}^m z_i - \sum_{j=1}^n p_j$$

dove con z_i e p_j si sono indicati, rispettivamente, gli zeri e i poli della funzione $G(s)$. Nel caso in esame si ha:

$$\Delta_p = 1 - (-1 - 8) = 10 > 0.$$

In questo caso la costante Δ_p è positiva per cui il diagramma polare arriva in anticipo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\frac{3}{2}\pi$, cioè il diagramma arriva a zero rimanendo alla sinistra del semiasse immaginario.

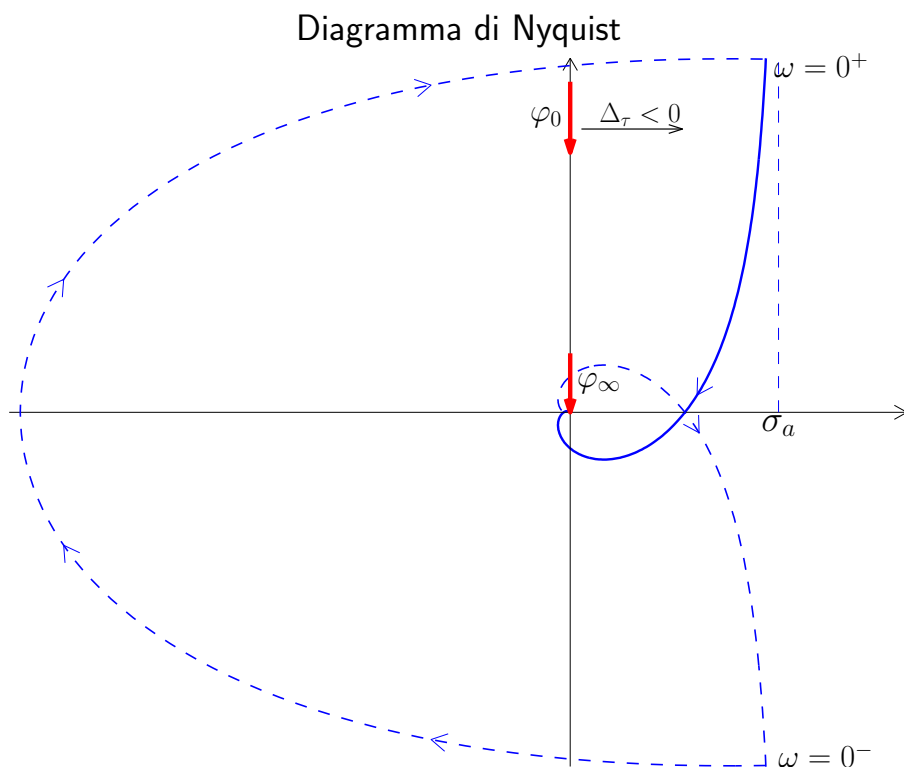
Tipicamente il calcolo di Δ_p viene fatto solamente quando $\varphi_\infty = 0$ oppure quando $\varphi_\infty = \pi$ per scoprire se esistono o meno eventuali intersezioni con l'asse reale.

5. Graficazione “al finito” del diagramma di Nyquist. Il punto di partenza $G(j0^+)$ del diagramma di Nyquist deve essere collegato al punto di arrivo $G(j\infty)$ tracciando una curva sul piano complesso che tenga conto, per $\omega \in]0, \infty[$, del seguente contributo di fase $\Delta\varphi$ dato dai poli e dagli zeri (stabili e instabili) della funzione $G(s)$:

$$\Delta\varphi = (Z_s + P_i - Z_i - P_s) \frac{\pi}{2}$$

Con Z_s , P_i , Z_i e P_s si è indicato, rispettivamente, il numero di zeri stabili, di poli instabili, di zeri instabili e di poli stabili della funzione $G(s)$. *In questo calcolo non vanno quindi considerati eventuali poli o zeri nell'origine della funzione $G(s)$.* Nel tracciare il diagramma di Nyquist si dovrà quindi collegare il punto iniziale $G(j0^+)$ al punto finale $G(j\infty)$ ruotando rispetto all'origine del piano complesso di una quantità angolare pari a $\Delta\varphi$. Nel caso in esame si ha $\Delta\varphi = -2\pi$.

6. Diagramma di Nyquist “completo”. Il diagramma di Nyquist per $\omega < 0$ si ottiene ribaltando rispetto all'asse reale il precedente diagramma ottenuto per $\omega > 0$. *Per $h \geq 1$ il diagramma di Nyquist “completo” si ottiene chiudendo il diagramma all'infinito: si parte da $G(j0^-)$, si arriva a $G(j0^+)$ e si tracciano all'infinito tante semi-circonferenze percorse in senso orario quanti sono i poli della funzione $G(s)$ nell'origine.*



Graficazione dei diagrammi di Nyquist: esempi.

Esempio. Tracciare il diagramma di Nyquist della seguente funzione:

$$G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+0.2)(s^2+15s+100)}$$

1. Punto di partenza. Funzione approssimante $G_0(s)$:

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) \simeq G_0(s) = \frac{3}{2s} = \frac{K}{s} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_0 = \infty \\ \varphi_0 = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

La fase iniziale del diagramma è $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$. Guadagno iniziale: $K = \frac{3}{2}$.

2. Partenza in anticipo o in ritardo. Si calcola il seguente parametro:

$$\Delta_\tau = \sum_{i=1}^m \tau'_i - \sum_{j=1}^{n-h} \tau_j = \frac{1}{3} - \frac{1}{0.2} - \frac{15}{100} = -4.82 < 0$$

Il diagramma parte “in ritardo” rispetto alla fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$.

3. Eventuale asintoto. Il diagramma ha un asintoto verticale. L'ascissa σ_a dell'asintoto verticale è:

$$\sigma_a = K \Delta_\tau = \frac{3}{2}(-4.82) = -7.23$$

4. Punto di arrivo. Funzione approssimante $G_\infty(s)$:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) \simeq G_\infty(s) = \frac{10}{s^3} = \frac{K_1}{s^3} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_\infty = 0 \\ \varphi_\infty = -\frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

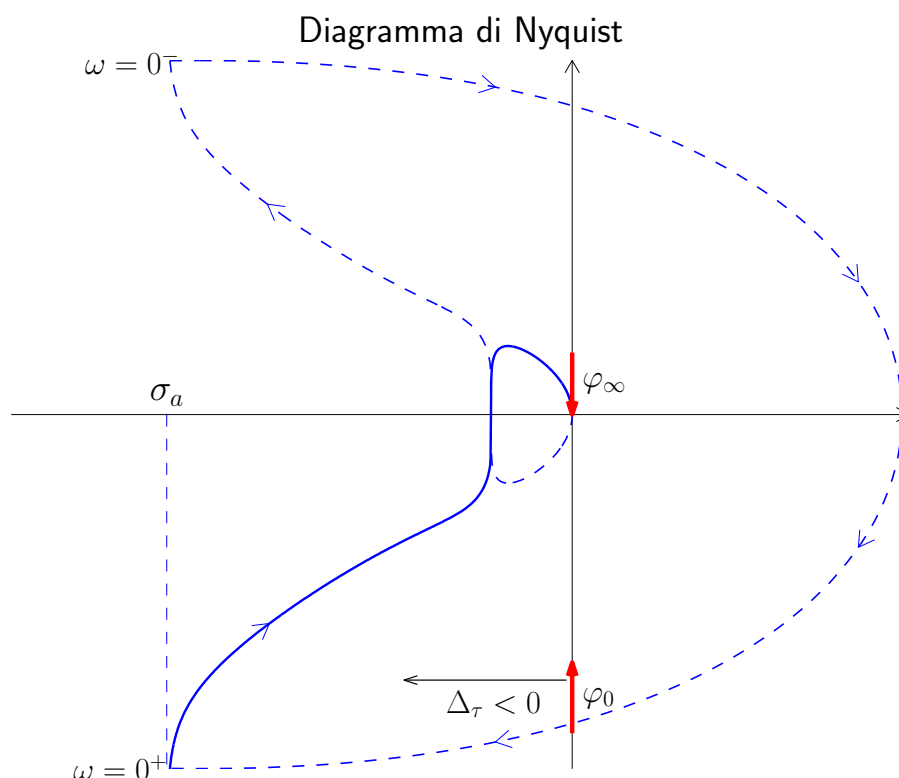
Il diagramma tende a zero con fase $\varphi_\infty = -\frac{3}{2}\pi$. Essendo $\Delta_p = -3 + 0.2 + 15 = 12.2 > 0$ il diagramma di Nyquist arriva in “anticipo” rispetto alla fase finale, cioè rimane a sinistra dell'asse immaginario.

5. Graficazione “al finito”. Variazione di fase al finito:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\pi$$

Nel passare da $G(j0^+)$ a $G(j\infty)$ si deve ruotare di π in senso orario.

6. Diagramma polare “completo”. Essendo $h = 1$ il diagramma di Nyquist va chiuso all'infinito con una semi-circonferenza percorsa in senso orario.



Esempio. Tracciare il diagramma di Nyquist della seguente funzione:

$$G(s) = \frac{10(1 + 2s)(s - 5)}{s^2(s^2 + 3s + 100)}$$

1. Punto di partenza. Funzione approssimante $G_0(s)$:

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) \simeq G_0(s) = -\frac{1}{2s^2} = \frac{K}{s^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_0 = \infty \\ \varphi_0 = -2\pi \end{cases}$$

La fase iniziale del diagramma è $\varphi_0 = -2\pi$.

2. Partenza in anticipo o in ritardo. Si calcola il seguente parametro:

$$\Delta_\tau = 2 - \frac{1}{5} - \frac{3}{100} = 1.77 > 0$$

Il diagramma parte “in anticipo” rispetto alla fase iniziale $\varphi_0 = -2\pi$.

3. Eventuale asintoto. Il sistema è di tipo 2 per cui non esiste nessun asintoto.

4. Punto di arrivo. Funzione approssimante $G_\infty(s)$:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) \simeq G_\infty(s) = \frac{20}{s^2} = \frac{K_1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_\infty = 0 \\ \varphi_\infty = -\pi \end{cases}$$

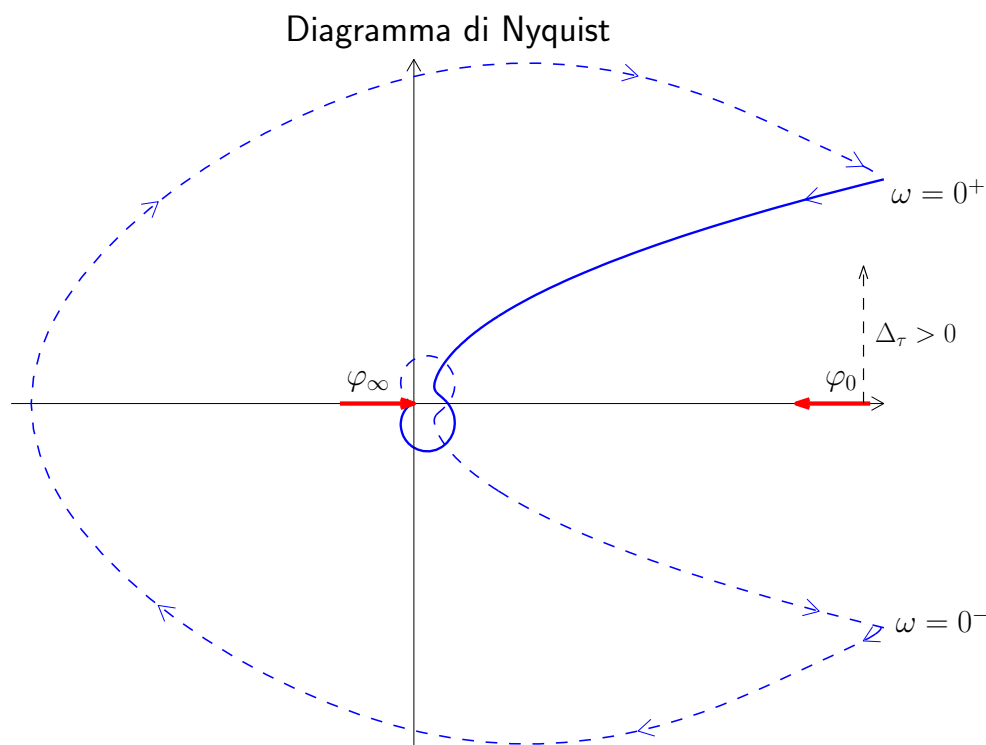
Il diagramma tende a zero con fase $\varphi_\infty = -\pi$. Essendo $\Delta_p = -0.5 + 5 - 3 = 1.5 > 0$ il diagramma di Nyquist arriva in “anticipo” rispetto alla fase finale, cioè rimane al di sotto dell'asse reale.

5. Graficazione “al finito”. Variazione di fase al finito:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \pi = -\pi$$

Nel passare da $G(j0^+)$ a $G(j\infty)$ si deve ruotare di π in senso orario.

6. Diagramma polare “completo”. Essendo $h = 2$ il diagramma di Nyquist va chiuso all'infinito con una circonferenza completa percorsa in senso orario.



Esempio. Tracciare il diagramma di Nyquist della seguente funzione:

$$G(s) = \frac{(1 + 5s)}{s(s + 5)(s^2 + s + 1)}$$

1. Punto di partenza. Funzione approssimante $G_0(s)$:

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) \simeq G_0(s) = \frac{1}{5s} = \frac{K}{s} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_0 = \infty \\ \varphi_0 = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

La fase iniziale del diagramma è $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$. Guadagno iniziale: $K = 0.2$.

2. Partenza in anticipo o in ritardo. Si calcola il seguente parametro:

$$\Delta_\tau = 5 - \frac{1}{5} - 1 = 3.8 > 0$$

Il diagramma parte “in anticipo” rispetto alla fase iniziale.

3. Eventuale asintoto. L'ascissa σ_a dell'asintoto verticale ($h = 1$) è:

$$\sigma_a = K \Delta_\tau = 0.2 \cdot 3.8 = 0.76$$

4. Punto di arrivo. Funzione approssimante $G_\infty(s)$:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) \simeq G_\infty(s) = \frac{5}{s^3} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_\infty = 0 \\ \varphi_\infty = -\frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

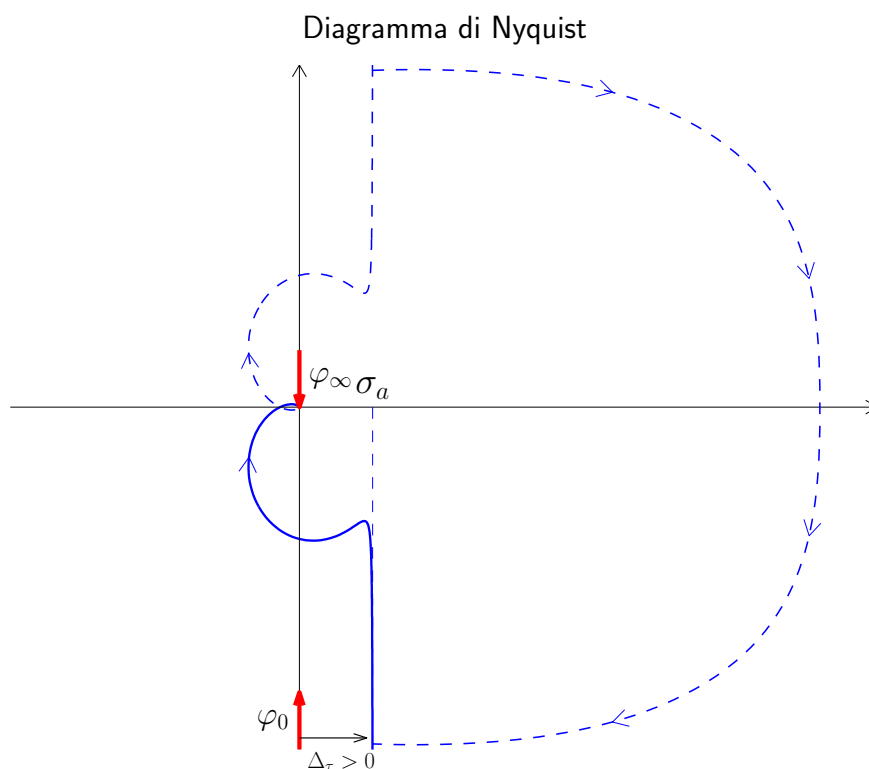
Il diagramma tende a zero con fase $\varphi_\infty = -\frac{3}{2}\pi$. Essendo $\Delta_p = -0.2 + 5 + 1 = 5.8 > 0$ il diagramma di Nyquist arriva in “anticipo” rispetto alla fase finale, cioè rimane a sinistra dell'asse immaginario.

5. Graficazione “al finito”. Variazione di fase al finito:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \pi = -\pi$$

Nel passare da $G(j0^+)$ a $G(j\infty)$ si deve ruotare di π in senso orario.

6. Diagramma polare “completo”. Essendo $h = 1$ il diagramma di Nyquist va chiuso all'infinito con una semi-circonferenza completa percorsa in senso orario.



Esempio. Tracciare il diagramma di Nyquist della seguente funzione:

$$G(s) = \frac{(s-1)(s-3000)}{s(s^2+12s+144)}$$

1. Punto di partenza. Funzione approssimante $G_0(s)$:

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) \simeq G_0(s) = \frac{250}{7s} = \frac{K}{s} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_0 = \infty \\ \varphi_0 = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

La fase iniziale del diagramma è $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$. Guadagno iniziale: $K = 20.83$.

2. Partenza in anticipo o in ritardo. Si calcola il seguente parametro:

$$\Delta_\tau = -1 - \frac{1}{3000} - \frac{12}{144} = -1.084 < 0$$

Il diagramma parte “in ritardo” rispetto alla fase iniziale.

3. Eventuale asintoto. L'ascissa σ_a dell'asintoto verticale ($h = 1$) è:

$$\sigma_a = K\Delta_\tau = 20.83(-1.084) = -22.58$$

4. Punto di arrivo. Funzione approssimante $G_\infty(s)$:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) \simeq G_\infty(s) = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_\infty = 0 \\ \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Il diagramma tende a zero con fase $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$. Essendo $\Delta_p = 1 + 3000 - 12 = 2989 > 0$ il diagramma di Nyquist arriva in “anticipo” rispetto alla fase finale, cioè rimane a destra dell’asse immaginario.

5. Graficazione “al finito”. Variazione di fase al finito:

$$\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \pi = -2\pi$$

Nel passare da $G(j0^+)$ a $G(j\infty)$ si deve ruotare di π in senso orario.

6. Diagramma polare “completo”. Essendo $h = 1$ il diagramma di Nyquist va chiuso all’infinito con una semi-circonferenza completa percorsa in senso orario.

