1° turno
Parte A [punti 9]

1) Dato un sistema dinamico Σ con funzione di trasferimento $T(s) = \dfrac{\left[(s+1)^2+9\right]^2}{\left[(s-1)^2+16\right]^3}$ scrivere i modi di Σ :

$\{\text{modi di } \Sigma\} =$

2) Scrivere l'approssimante di Padé del primo ordine del ritardo finito e^{-4s} :

3) Dato un sistema Σ con funzione di trasferimento $T(s) = \dfrac{s^2+3s+1}{s^3+s^2+s+1}$ stabilire (vero = V, falso = F):

a) Σ è asintoticamente stabile:
b) Σ è semplicemente stabile:
c) Σ è instabile:
d) Σ è a fase minima:
e) Σ è stabile ingresso-limitato uscita limitata:

4) Ad un sistema con funzione di trasferimento $\dfrac{5}{(s+1)^2}$ ed in quiete nell'intervallo $(-\infty, 0)$ viene applicato l'ingresso $u(t) = 3\sin(t) \;\; t \geq 0$. Determinare la corrispondente uscita $y(t)$ per $t \to \infty$:

5) Determinare il coefficiente di smorzamento e la pulsazione naturale dei poli dominanti del sistema con funzione di trasferimento $\dfrac{10}{s^2+3s+9}$: $\delta =$ $\omega_n =$

6) Il diagramma polare associato alla funzione di trasferimento $L(s) = \dfrac{s+2}{s(s+1)^3}$ presenta un asintoto verticale parallelo all'asse immaginario. Determinare l'ascissa reale σ_a di tale asintoto: $\sigma_a =$

7) Determinare il segnale $f(t)$ nota la sua trasformata di Laplace $F(s) = \dfrac{1}{(s+2)^3}$: $f(t) =$

8) Determinare la risposta al gradino unitario del sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{3}{s^2}$:

$g_s(t) =$

9) Un sistema dinamico Σ sia descritto dall'eq. diff. $Dy + 2y = u$ dove u è l'ingresso e y l'uscita. Determinare la risposta all'impulso di Σ : $g(t) =$

10) Sia dato il luogo delle radici di equazione caratteristica $1 + K_1 \dfrac{1}{(s+4)^5} = 0$ con $K_1 > 0$.

a) Determinare il centro della stella degli asintoti: $\sigma_a =$.

b) Le radici dell'eq. caratteristica sono tutte a parte reale negativa $\forall K_1 \in (0, +\infty)$ (vero = V, falso = F, I = non è possibile stabilirlo):

11) Dato il segnale a tempo discreto $x(k)$, $k \in \mathbb{Z}$ determinare la trasformata zeta del segnale ritardato $x(k-4)$ in funzione delle condizioni iniziali del segnale: $\mathcal{Z}[x(k-4)] =$

12) Determinare la trasformata zeta del segnale $k2^k$, ovvero $\mathcal{Z}[k2^k] =$

13) Discretizzare il controllore a tempo continuo $C(s) = \frac{10}{s}$ con il metodo di Eulero in avanti (il tempo di campionamento è $T = 0.01$ sec.): $C_d(z) =$

14) Sia dato il sistema a tempo discreto $H(z) = \frac{1}{z-\frac{1}{2}}$.

a) Determinarne il guadagno statico del sistema:
b) Determinarne la risposta all'impulso:

15) Determinare la seguente antitrasformata zeta $\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-j} + \frac{z}{z+j}\right] =$

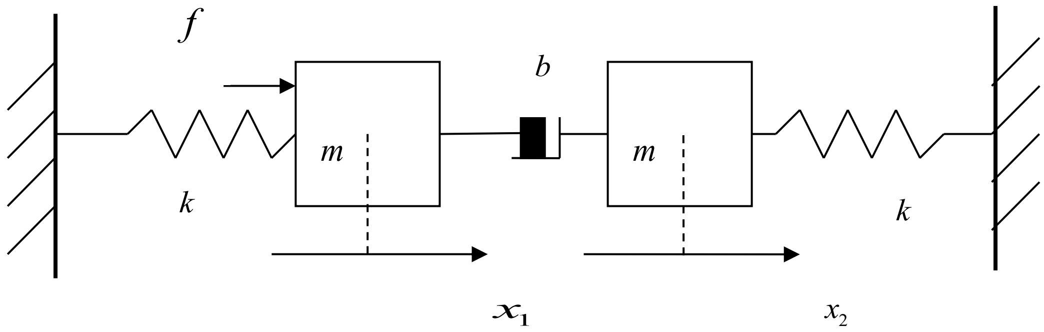
16) Sia dato il sistema $G(s) = \frac{1+\frac{1}{2}s}{(s+6)(s+2)}$ a cui si applica all'ingresso il gradino $5 \cdot 1(t)$ a partire da condizioni iniziali tutte nulle.
a) Determinare il tempo di assestamento della risposta: $T_a =$
b) Determinare la sovraelongazione della risposta: $S =$

17) Dato il polinomio $a(s) = s^3 + 2s^2 + s + 4$ determinare il segno della parte reale delle sue radici:
$n_+(a) =$
$n_-(a) =$
$n_0(a) =$

18) Sia dato il controllore $C(s) = \frac{10+5s}{50s+10}$. Stabilirne il tipo di rete correttrice e determinare i suoi parametri caratteristici:

Parte B

1. [punti 4,5] Sia assegnato il sistema meccanico vibrante di figura



caratterizzato da due molle di costante elastica k e due corpi di massa m accoppiati da uno smorzatore viscoso di coefficiente b. Il corpo di sinistra sia soggetto ad una forza f e le posizioni delle due masse siano descritte dalle variabili x_1 e x_2 (quando il sistema è in quiete $x_1 = x_2 = 0$).

a) Determinare le equazioni differenziali che descrivono il moto delle due masse.
b) Determinare la funzione di trasferimento del sistema orientato dall'ingresso f all'uscita x_1.

2. [punti 4,5] Determinare l'evoluzione forzata $y(t)$ in risposta alla rampa $u(t) = 2t \cdot 1(t)$ di un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{1}{(s+1)^4}$. Determinare inoltre il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$.

Parte C

3. [punti 4,5] Dato un sistema retroazionato con guadagno di anello

$$L(s) = 50\frac{(s+1)^2}{s^3(s+10)}$$

1. Tracciare il diagramma polare di $L(j\omega)$ determinando le eventuali intersezioni con l'asse reale.
2. Studiare la stabilità del sistema retroazionato con il Criterio di Nyquist.

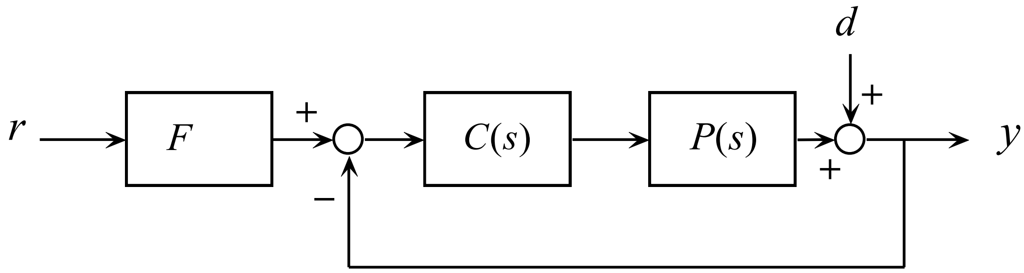
4. [punti 4,5] Si tracci il luogo delle radici della seguente equazione caratteristica:

$$1 + K_1\frac{s-1}{s\left(s+2\right)^4} = 0$$

per $K_1 > 0$ (luogo diretto) e per $K_1 < 0$ (luogo inverso) determinando in entrambi i casi gli angoli di partenza del luogo, gli asintoti e le eventuali radici doppie.

Parte D

5. [punti 4,5] Sia dato lo schema di sistema di controllo di figura



dove $P(s) = \dfrac{4}{s+2}$. Determinare un controllore $C(s)$ di ordine minimo ed il blocco algebrico $F \in \mathbb{R}$ affinché il sistema di controllo soddisfi le seguenti specifiche:

1. reiezione infinita asintotica al disturbo sinusoidale $d(t) = 4\sin(3t)$,
2. sistema retroazionato con poli dominanti in $-2 \pm j$,
3. costante di posizione $K_p = 4$,
4. in condizioni nominali l'errore a regime in risposta ad un gradino del riferimento sia nullo.

6. [punti 4,5] Sia dato il sistema a tempo discreto definito dall'equazione

$$16y(k+13) - 12y(k+12) + y(k+10) = 16u(k+11) + 16u(k+10),\ k \in \mathbb{Z}$$

ed orientato da $u(k)$ (ingresso) a $y(k)$ (uscita).

1) Determinare la funzione di trasferimento del sistema.

2) Studiare la stabilità alle perturbazioni del sistema.

SOLUZIONI – 1° turno
Parte A

1) $\{\text{modi di } \Sigma\} = \{e^t \sin(4t+\varphi_1),\ te^t \sin(4t+\varphi_2),\ \ t^2e^t \sin(4t+\varphi_3)\ \ \}$

2) $G_1(s) = \dfrac{1-2s}{1+2s}$

3)
a) Σ è asintoticamente stabile: F
b) Σ è semplicemente stabile: V
c) Σ è instabile: F
d) Σ è a fase minima: V
e) Σ è stabile ingresso-limitato uscita limitata: F

4) $y(t) = \dfrac{15}{2}\sin\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)$

5) $\delta = 1/2$ $\qquad \omega_n = 3$ rad/s

6) $\sigma_a = -5$

7) $f(t) = \dfrac{1}{2}t^2 e^{-2t}$

8) $g_s(t) = \dfrac{3}{2}t^2 \cdot 1(t)$

9) $g(t) = e^{-2t} \cdot 1(t)$

10)
a) $\sigma_a = -4$.
b) F

11) $\mathcal{Z}[x(k-4)] = z^{-4}\mathcal{Z}[x(k)] + x(-4) + x(-3)z^{-1} + x(-2)z^{-2} + x(-1)z^{-3}$

12) $\mathcal{Z}[k2^k] = \frac{2z}{(z-2)^2}$

13) $C_d(z) = \frac{0.1}{z-1}$

14) a) $H(1) = 2$
b) $h(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot 1(k-1)$

15) $2cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)$

16)
a) $T_a = 0.5$ sec.
b) $S = 0\%$

17) $n_+(a) = 2 \qquad n_-(a) = 1 \qquad n_0(a) = 0$

18) Rete ritardatrice, $\tau = 5$ sec., $\alpha = 0.1$

Parte B

1.

a) Dall'equazione della dinamica otteniamo

$$\begin{cases} mD^2 x_1 = f - kx_1 + b(Dx_2 - Dx_1) \\ mD^2 x_2 = -b(Dx_2 - Dx_1) - kx_2 \end{cases}$$

b.1) Dalle equazioni precedenti trasformando secondo Laplace con condizioni iniziali tutte nulle otteniamo:

$$\begin{cases} ms^2 X_1 = F - kX_1 + b(sX_2 - sX_1) \\ ms^2 X_2 = -b(sX_2 - sX_1) - kX_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ms^2 X_1 = F - kX_1 + b(sX_2 - sX_1) \\ (ms^2 + bs + k) X_2 = bsX_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2 = \dfrac{bsX_1}{(ms^2 + bs + k)} \\ (ms^2 + bs + k) X_1 = F + bsX_2 \end{cases}$$

$$(ms^2 + bs + k) X_1 = F + bs \frac{bsX_1}{(ms^2 + bs + k)}$$

$$G(s) := \frac{X_1}{F} = \frac{ms^2 + bs + k}{(ms^2 + bs + k)^2 - b^2 s^2} =$$

$$= \frac{ms^2 + bs + k}{m^2 s^4 + 2mbs^3 + 2mks^2 + 2bks + k^2}$$

b.2) In alternativa, operando nel dominio del tempo si ottiene

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = f - K x_1 + b(D x_2 - D x_1) \\ m D^2 x_2 = -b(D x_2 - D x_1) - K x_2 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} (m D^2 + bD + K) x_1 - f = bD x_2 \\ bD x_1 = (m D^2 + bD + K) x_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (m D^2 + bD + K)^2 x_1 - (m D^2 + bD + K) f = (bD)(m D^2 + bD + K) x_2 \\ (bD)^2 x_1 = (bD)(m D^2 + bD + K) x_2 \end{cases}$$

PRENDENDO LA DIFFERENZA DELLE 2 EQ.:

$$(m D^2 + bD + K)^2 x_1 - (m D^2 + bD + K) f = (bD)^2 x_1 \iff$$

$$m^2 D^4 x_1 + 2mbD^3 x_1 + 2mKD^2 x_1 + 2bKD x_1 + K^2 x_1 = mD^2 f + bD f + K f$$

DA CUI SI OTTIENE:

$$\boxed{G(s) := \frac{X_1(s)}{F(s)} = \frac{m s^2 + b s + K}{m^2 s^4 + 2mb s^3 + 2mK s^2 + 2bK s + K^2}}$$

2.

$$u(t) = 2t\cdot 1(t) \qquad U(s) = \frac{2}{s^2}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2}{s^2(s+1)^4}$$

$$Y(s) = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1)^4} + \frac{K_{22}}{(s+1)^3} + \frac{K_{23}}{(s+1)^2} + \frac{K_{24}}{s+1}$$

$$K_{11} = \left.\frac{2}{(s+1)^4}\right|_{s=0} = 2 \qquad K_{21} = \left.\frac{2}{s^2}\right|_{s=-1} = 2$$

$$K_{12} = D\left[\frac{2}{(s+1)^4}\right]_{s=0} = -2\cdot\left.\frac{4(s+1)^{\cancel{3}0}}{(s+1)^{\cancel{8}5}}\right|_{s=0} = -8$$

$$K_{12} + K_{24} = 0 \implies K_{24} = -K_{12} = 8$$

$$K_{22} = D\left[\frac{2}{s^2}\right]_{s=-1} = -2\cdot\left.\frac{2\cancel{s}}{s^{\cancel{4}3}}\right|_{s=-1} = 4$$

$$K_{23} = \frac{1}{2}D^2\left[\frac{2}{s^2}\right]_{s=-1} = \frac{1}{2}(-4)\cdot D\left[\frac{1}{s^3}\right]_{s=-1} = -2\cdot(-1)\left.\frac{3\cdot s^2}{s^6}\right|_{s=-1} =$$

$$= 2\cdot\left.\frac{3}{s^4}\right|_{s=-1} = 6$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{8}{s} + \frac{2}{(s+1)^4} + \frac{4}{(s+1)^3} + \frac{6}{(s+1)^2} + \frac{8}{s+1}$$

$$y(t) = 2t - 8 + 2\cdot\frac{1}{3!}t^3e^{-t} + 4\cdot\frac{1}{2!}\cdot t^2\cdot e^{-t} + 6\cdot t\cdot e^{-t} + 8\cdot e^{-t}$$

$$y(t) = 2t - 8 + \frac{1}{3}t^3e^{-t} + 2t^2e^{-t} + 6te^{-t} + 8\cdot e^{-t}$$

Si nota che $u(t) \in \overline{C^{0,\infty}}$ ed il grado relativo di $G(s)$ è $\rho = 4$.

Quindi $u(t) \in \overline{C^{0,\infty}} \iff y(t) \in \overline{C^{4,\infty}}$.

Pertanto il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$ è 4.

Parte C

3.

1)

$$L(j\omega) = \frac{5(1+j\omega)^2}{(j\omega)^3\left(1+\frac{j\omega}{10}\right)}$$

$$|L(j\omega)| = \frac{5(1+\omega^2)}{\omega^3\left(1+\frac{\omega^2}{100}\right)^{1/2}}$$

$$arg\, L\,(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi - arctg0.1\omega + 2arctg\omega$$

Studio del diagramma polare di $L(j\omega)$:

Comportamento per $\omega \to 0^+$:
Il diagramma polare parte da un punto all'infinito

$$\lim_{\omega\to 0+} |L(j\omega)| = \infty$$

$$\lim_{\omega\to 0^+} \arg L(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi$$

Data la presenza del polo triplo nell'origine, il d.p. parte adiacente ad un ramo della cubica di equazione $y^2 = -\frac{1}{k\tau_a^3}x^3$dove $k = 5, \tau_a = 1 + 1 - \frac{1}{10} = \frac{19}{10}$. Inoltre, essendo il termine $-\frac{1}{k\tau_a^3} < 0$, il diagramma polare parte dal secondo quadrante.

Comportamento per $\omega \to \infty$:
Il diagramma termina nell'origine tangente a uno degli assi coordinati, essendo

$$\lim_{\omega\to\infty} |L(j\omega)| = 0$$

$$\lim_{\omega\to\infty} \arg L(j\omega) = -\pi$$

Calcolo dell'intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo:

$$\arg L(j\omega_p) = -\pi$$

$$-\frac{3}{2}\pi - arctg0.1\omega + 2arctg\omega = -\pi$$

$$-arctg0.1\omega + 2arctg\omega = \frac{\pi}{2}$$

$$1 + tg(2arctg\omega)\cdot 0.1\omega = 0$$

$$1 + \frac{2\omega}{1-\omega^2}\cdot\frac{\omega}{10} = 0$$

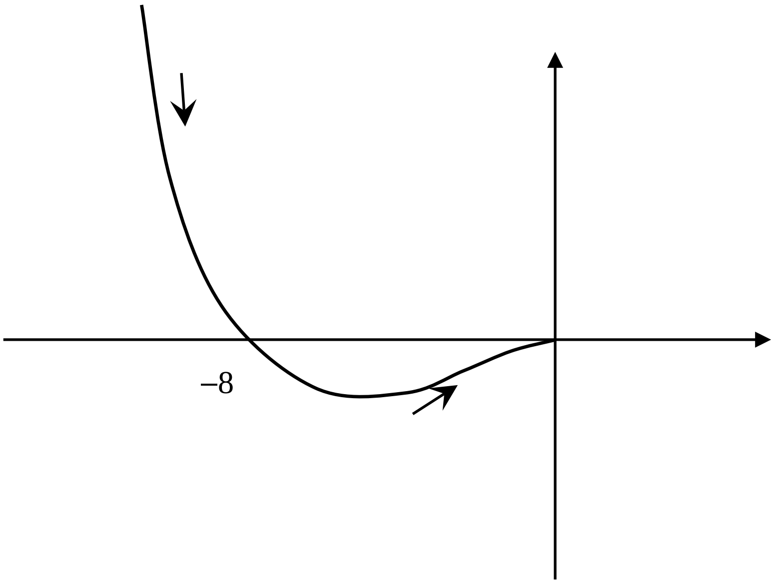
$$\omega_p = \sqrt{5/4} \simeq 1.118 rad/\sec$$

$$|L(j\omega_p)| = 8$$

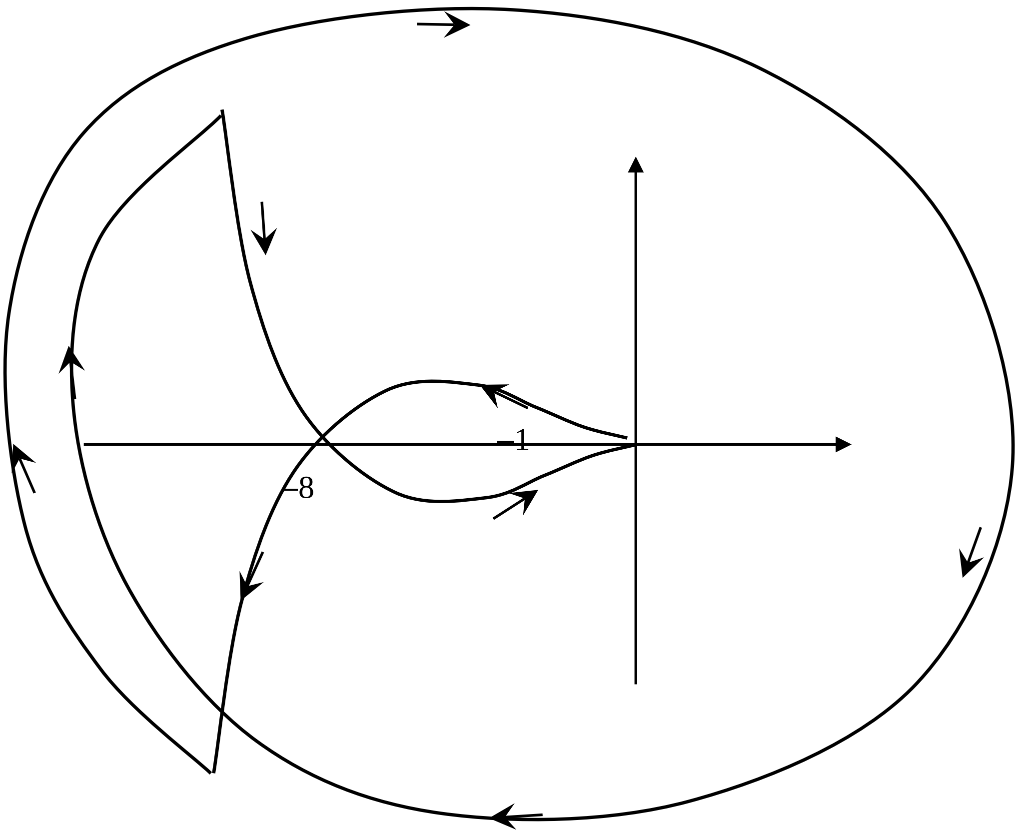
$$L(j\omega_p) = -8$$

Il diagramma polare del guadagno di anello risulta pertanto:

4.



2) Il diagramma polare completo è:



Si può concludere che per il criterio di Nyquist il sistema retroazionato è **asintoticamente stabile**. Infatti considerato che non ci sono poli a parte reale positiva del guadagno di anello, il numero totale di giri del diagramma polare completo attorno al punto critico -1 è nullo.

4.

5.

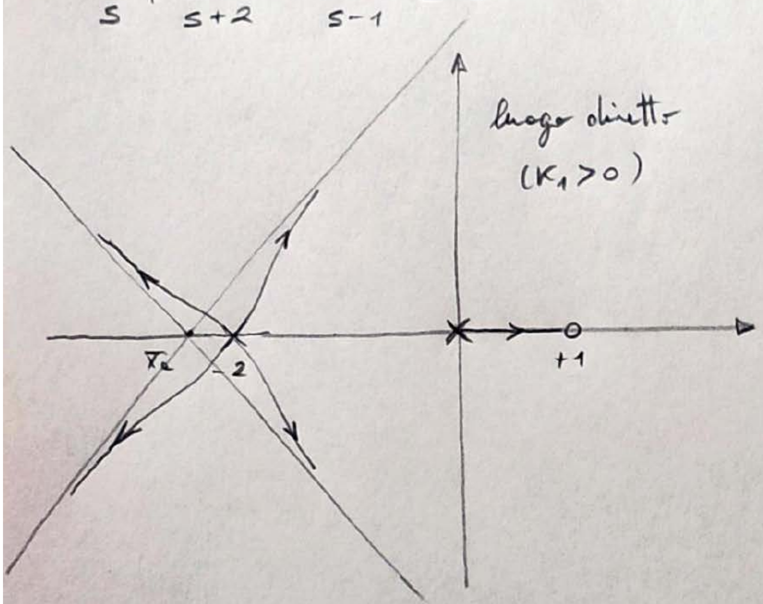
Luogo delle radici di $1 + K_1 \dfrac{s-1}{s(s+2)^4} = 0$

Sono presenti 4 asintoti con centro in $\sigma_a = \dfrac{\sum_i p_i - \sum_i z_i}{n-m} = \dfrac{-8-(1)}{4}$

$= -2.25$

Calcolo delle radici doppie

$\dfrac{1}{s} + \dfrac{4}{s+2} - \dfrac{1}{s-1} = 0 \qquad 4s^2 - 5s - 2 = 0 \qquad s_{1,2} = \begin{cases} -0.3187 \\ +1.5687 \end{cases}$

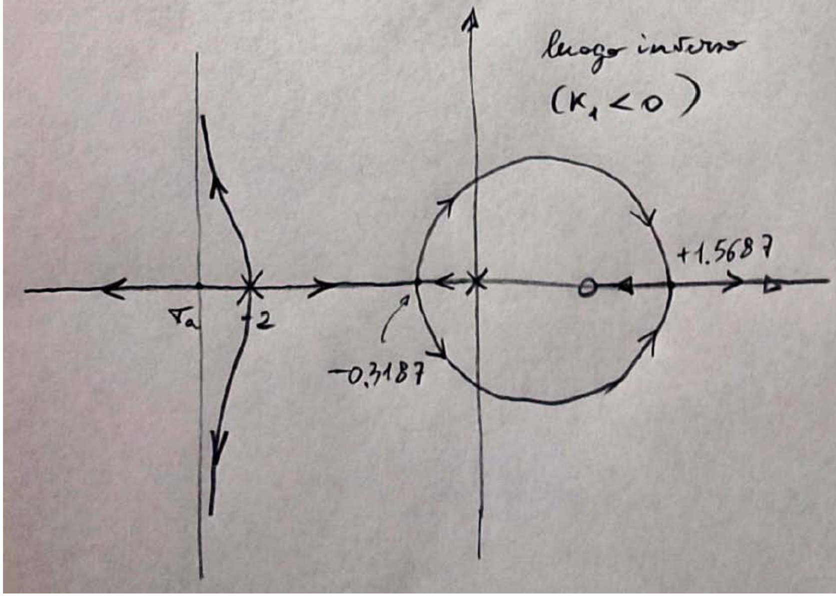


angoli di partenza da −2:

$4\varphi = \pi + \cancel{(\pi)} - \cancel{(\pi)} \mod 2\pi$

$\varphi_1 = \dfrac{\pi}{4} \quad \varphi_2 = -\dfrac{\pi}{4}$

$\varphi_3 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}\ , \ \varphi_4 = -\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{2}$



angoli di partenza da −2:

$4\varphi = \cancel{(\pi)} - \cancel{(\pi)} \mod 2\pi$

$\varphi_1 = 0$

$\varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$

$\varphi_3 = -\dfrac{\pi}{2}$

$\varphi_4 = \pi$

Parte D

(5) Il controllore di ordine minimo può avere la struttura.

$$C(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + 9}$$

$$L(s) = C(s)\,P(s) = \frac{4(b_2 s^2 + b_1 s + b_0)}{(s^2+9)(s+2)}$$

$$K_p = \frac{4 b_0}{9 \cdot 2} = 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b_0 = 18}$$

$$1 + L(s) = 0 \qquad 1 + \frac{4(b_2 s^2 + b_1 s + 18)}{s^3 + 2s^2 + 9s + 18} = 0$$

$$s^3 + 2s^2 + 9s + 18 + 4 b_2 s^2 + 4 b_1 s + 72 = 0$$

$$s^3 + (2 + 4 b_2) s^2 + (9 + 4 b_1) s + 90 = 0$$

$$\boxed{P_c(s) = s^3 + (2 + 4 b_2) s^2 + (9 + 4 b_1) s + 90}$$

Il polinomio caratteristico desiderato è

$$P_d(s) = (s + 2 - j)(s + 2 + j)(s + c)$$

dove $c >> 2$

$$P_d(s) = \left[(s+2)^2+1\right](s+c) =$$
$$= (s^2+4s+5)(s+c) =$$
$$= s^3+4s^2+5s +$$
$$+ cs^2+4cs+5c =$$

$$\boxed{P_d(s) = s^3+(4+c)s^2+(5+4c)s+5c}$$

Imponiamo

$$P_d(s) \equiv P_c(s)$$

$$\begin{cases} 2+4b_2 = 4+c \\ 9+4b_1 = 5+4c \\ 90 = 5c \end{cases}$$

È un sistema di tre eq. lineari in tre incognite.

$$\boxed{c = 18}$$

$$4b_2 = 20 \Rightarrow \boxed{b_2 = 5}$$

$$4b_1 = -4+72 = 68 \Rightarrow \boxed{b_1 = 17}$$

$$c >> 2$$

$$\boxed{C(s) = \frac{5s^2+17s+18}{s^2+9}}$$

$$C(s) = 5\,\frac{(s+1{,}7+j0{,}8426)(s+1{,}7-j0{,}8426)}{(s+3j)(s-3j)}$$

Calcolo di F :

$$\cancel{r(t) = r_0 1(t)} \quad T_{ry}(s) = F \cdot \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

Imponiamo $T_{ry}(0) = 1$

$$F\,\frac{L(0)}{1+L(0)} = 1 \quad ; \quad k_p = L(0) = 4$$

$$F\,\frac{4}{1+4} = 1 \Rightarrow \boxed{F = \frac{5}{4} = 1{,}25}$$

6.

8) Si effettua la sostituzione $k-13 \to k$,
l'eq. diventa

$$16\, y(k) - 12\, y(k-1) + y(k-3)$$
$$= 16\, u(k-2) + 16\, u(k-3)$$

Quindi la f.d.t. risulta

$$H(z) = \frac{16 z + 16}{16 z^3 - 12 z^2 + 1}$$

Il polinomio caratteristico è $16 z^3 - 12 z^2 + 1$.

$a(z) \triangleq a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$

Condizione necessaria affinché tutte le radici di $a(z)$ abbiano modulo minore di uno:

1. $a(1) > 0$ cioè $16 - 12 + 1 = 5 > 0$ ok!
2. $(-1)^3 a(-1) > 0$ cioè $-a(-1) > 0$
   $-[-16 - 12 + 1] = -[-27] = 27 > 0$ ok!
3. $|a_0| < a_n$ cioè $|1| < 16$ ok!

Costruiamo la tabella di Jury

	z^0	z^1	z^2	z^3
1	1	0	-12	16
2	16	-12	0	1
3	-255	192	-12	

Dall'ultima riga della tabella otteniamo una questa condizione

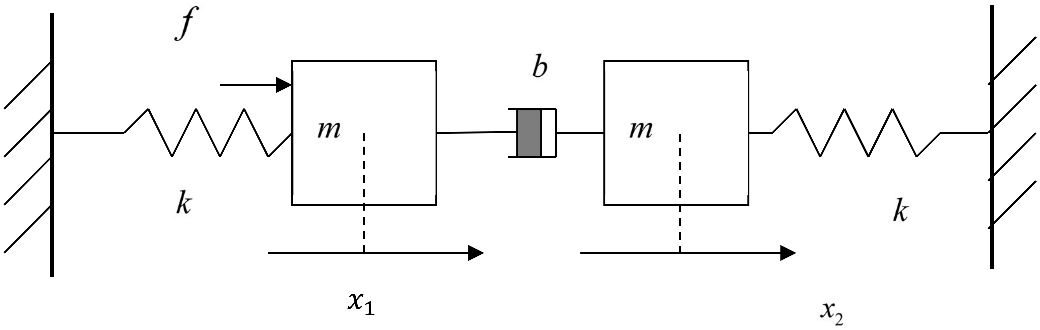
4. $|-255| > |-12|$ ok!

Quindi per il criterio di Jury il sistema è asintoticamente stabile.

Parte A

1. [punti 4,5] Si presentino e si dimostrino le formule di inversione per la sintesi in frequenza delle reti correttrici. Si esponga inoltre come utilizzare tali formule per la sintesi della rete **anticipatrice** con imposizione del **margine di fase** M_F .

2. [punti 4,5] Sia assegnato il sistema meccanico vibrante di figura



caratterizzato da due molle di costante elastica k e due corpi di massa m accoppiati da uno smorzatore viscoso di coefficiente b . Il corpo di sinistra sia soggetto ad una forza f e le posizioni delle due masse siano descritte dalle variabili x_1 e x_2 (quando il sistema è in quiete $x_1 = x_2 = 0$).

a) Determinare le equazioni differenziali che descrivono il moto delle due masse.
b) Determinare l'equazione differenziale che caratterizza il sistema vibrante (denominato Σ) orientato dall'ingresso f all'uscita x_2 .
c) Scrivere il polinomio caratteristico e la funzione di trasferimento di Σ .
d) Dimostrare con i metodi e teoremi della tabella di Routh che Σ è **semplicemente stabile** per qualsivoglia valore dei parametri m,k,b (tutti positivi).
e) Giustificare con un ragionamento fisico il motivo per cui Σ , nonostante la presenza di un elemento dissipativo (lo smorzatore viscoso), **non è asintoticamente stabile**.

3. [punti 4,5] Determinare l'evoluzione forzata $y(t)$ in risposta alla rampa $u(t) = 2t \cdot 1(t)$ di un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{1}{(s+2)^3(s+1)}$. Determinare inoltre il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$.

4. [punti 4,5] Data un generico segnale a tempo discreto $x(k)$, $k \in \mathbb{Z}$ determinare le trasformate zeta dei segnali ritardati e anticipati di n passi ($n \in \mathbb{N}$), $\mathcal{Z}[x(k-n)]$ e $\mathcal{Z}[x(k+n)]$.

Parte B

5. [punti 4,5] Tracciare i diagrammi di Bode asintotici (diagramma dei moduli e diagramma delle fasi della risposta armonica) associati alla funzione di trasferimento

$$P(s) = 100\frac{1+s}{(s+2)(s+10)}$$

Suggerimenti:

i) per una decade delle pulsazioni si assegnino 10 quadretti del foglio protocollo;

ii) si riportano per comodità dello studente i logaritmi in base 10 degli interi da 2 a 9: $\log_{10} 2 \cong 0,30$, $\log_{10} 3 \cong 0,48$, $\log_{10} 4 \cong 0,60$, $\log_{10} 5 \cong 0,70$, $\log_{10} 6 \cong 0,78$, $\log_{10} 7 \cong 0,85$, $\log_{10} 8 \cong 0,90$, $\log_{10} 9 \cong 0,95$;

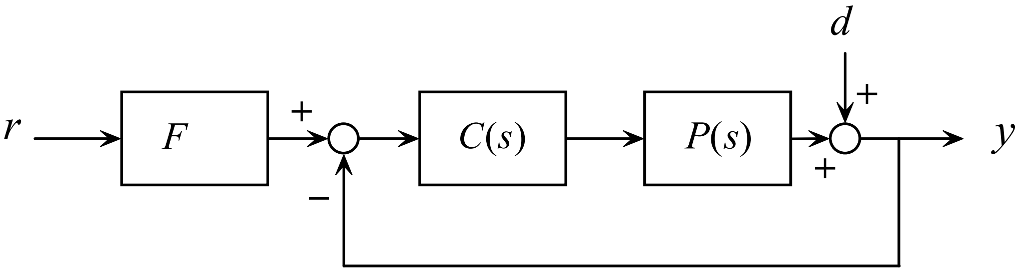
iii) i diagrammi richiesti si ottengono dalla somma dei diagrammi elementari…

6. [punti 4,5] Si tracci il luogo delle radici della seguente equazione caratteristica:

$$1 + K\frac{(s+2)^2}{(s+3)^4} = 0$$

per $K \in [0, +\infty)$, determinandone in particolare gli asintoti.

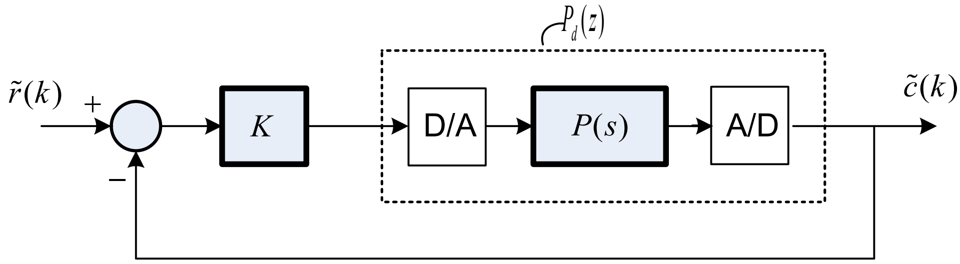
7. [punti 4,5] Sia dato lo schema di sistema di controllo di figura



dove $P(s) = \dfrac{1}{s+4}$. Determinare un controllore $C(s)$ di ordine 4 (quattro) ed il blocco algebrico $F \in \mathbb{R}$ affinché il sistema di controllo soddisfi le seguenti specifiche:

1. reiezione infinita asintotica al disturbo $d(t) = 7\sin(2t) + 9\sin(t+5)$;
2. sistema retroazionato con poli dislocati in $-1, -2, -3, -5, -6$;
3. in condizioni nominali l'errore a regime in risposta ad un gradino del riferimento sia nullo.

8. [punti 4,5] Determinare i valori di $K \in \mathbb{R}$ che assicurano la stabilità asintotica del sistema di controllo in figura. Il periodo di campionamento è $T = 0.02$ s e $P(s) = \frac{16}{(s+2)(s+4)}$.



Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense dell'insegnamento.

2.
a) Dall'equazione della dinamica otteniamo

$$\begin{cases} mD^2x_1 = f - kx_1 - b(Dx_1 - Dx_2) \\ mD^2x_2 = -kx_2 + b(Dx_1 - Dx_2) \end{cases}$$

b) Dall'espressione precedente otteniamo

$$\begin{cases} (mD^2 + bD + k)x_1 = f + bDx_2 \\ bDx_1 = mD^2x_2 + kx_2 + bDx_2 \end{cases}$$

applicando l'operatore $MD^2 + BD + k$ ad entrambi i membri della seconda equazione e BD a entrambi i membri della prima otteniamo

$$\begin{cases} bD(MD^2 + bD + k)x_1 = bD(f + bDx_2) \\ (mD^2 + bD + k)bDx_1 = (mD^2 + bD + k)(mD^2x_2 + kx_2 + bDx_2) \end{cases}$$

sottraendo membro a membro le due equazioni eliminiamo x_1 dal sistema e otteniamo

$$bD(f + bDx_2) = (mD^2 + bD + k)(mD^2x_2 + kx_2 + bDx_2)$$

da cui

$$m^2D^4x_2 + 2mbD^3x_2 + 2mkD^2x_2 + 2bkDx_2 + k^2x_2 = bDf$$

c) La funzione di trasferimento e'

$$T(s) = \frac{bs}{m^2s^4 + 2mbs^3 + 2mks^2 + 2bks + k^2}$$

e il polinomio caratteristico

$$p(s) = m^2s^4 + 2mbs^3 + 2mks^2 + 2bks + k^2$$

d)

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & m^2 & 2mk & k^2 \\ 3 & 2mb & 2bk & 0 \\ 2 & mk & k^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

l'ultima riga della tabella di Routh e' tutta nulla, si ottiene l'equazione ausiliaria

$$ms^2 + k = 0$$

da cui $s = \pm j\sqrt{\frac{k}{m}}$, la prima parte della tabella ha due permanenze di segno, quindi il sistema e' semplicemente stabile.

E) Quando il sistema è in evoluzione libera (f=0), a causa della simmetria del sistema vibrante, è possibile il moto armonico non smorzato delle due masse per il quale $x_1(t) \equiv x_2(t)$.
Conseguentemente lo smorzatore viscoso non dissipa energia in quanto $D(x_1 - x_2) \equiv 0$ (è come se, virtualmente, le due masse fossero connesse da un braccio rigido). Questo comportamento corrisponde ad un sistema semplicemente stabile.
Si osservi che con $f(t) \equiv 0$ la soluzione particolare

$$x_1(t) = x_2(t) = \varepsilon \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

soddisfa il sistema di equazioni differenziali del punto a).

3.

$$U(s) = \mathcal{L}[2t \cdot 1(t)] = \frac{2}{s^2}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2}{s^2(s+2)^3(s+1)}$$

$$Y(s) = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_{21}}{(s+2)^3} + \frac{K_{22}}{(s+2)^2} + \frac{K_{23}}{s+2} + \frac{K_3}{s+1}$$

$$K_{11} = \left.\frac{2}{(s+2)^3(s+1)}\right|_{s=0} = \frac{1}{4}$$

$$K_{21} = \left.\frac{2}{s^2(s+1)}\right|_{s=-2} = -\frac{1}{2} \qquad K_3 = \left.\frac{2}{s^2(s+2)^3}\right|_{s=-1} = 2$$

$$K_{12} = D\left[\frac{2}{(s+2)^3(s+1)}\right]_{s=0} = -\frac{5}{8}$$

$$K_{22} = D\left[\frac{2}{s^2(s+1)}\right]_{s=-2} = -1$$

$$K_{12} + K_{23} + K_3 = 0 \implies K_{23} = -\frac{11}{8}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{4}t - \frac{5}{8} - \frac{1}{4}t^2e^{-2t} - te^{-2t} - \frac{11}{8}e^{-2t} + 2e^{-t}$$

per $t > 0$

Si noti che $u(t) \in \overline{C^{0,\infty}}$ ed il grado relativo di $G(s)$ è $\rho = 4$. Dalla nota proprietà

$$u(t) \in \overline{C^{0,\infty}} \iff y(t) \in \overline{C^{4,\infty}}$$

Quindi il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$ è 4.

4.
vedi dispense dell'insegnamento

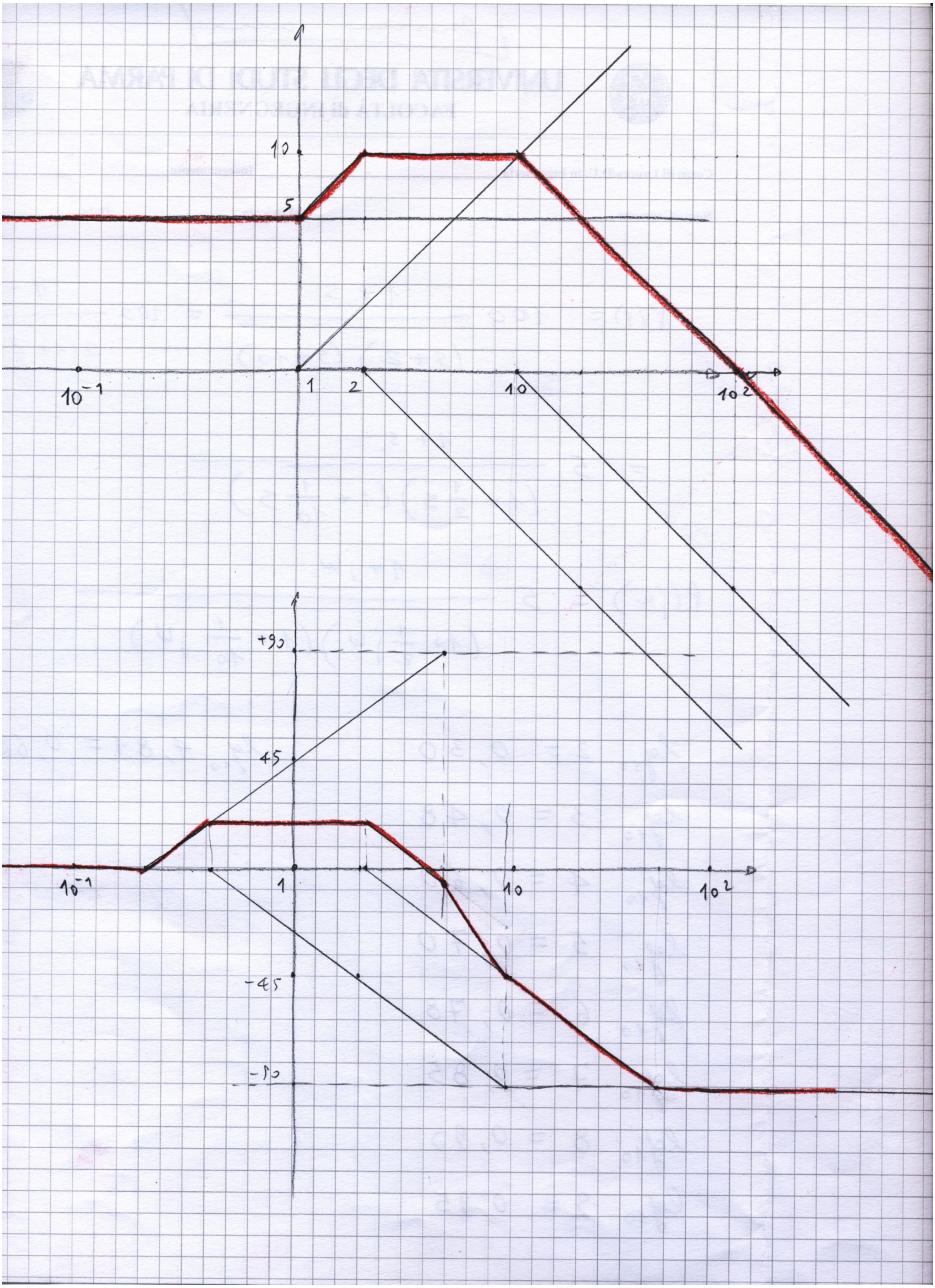
5.
Si riscrive la funzione di trasferimento nella forma standard con le costanti di tempo:

$$P(s) = 5\frac{1+s}{(1+\frac{1}{2}s)(1+\frac{1}{10}s)}$$

da cui la risposta armonica

$$P(j\omega) = 5\frac{1+j\omega}{(1+\frac{1}{2}j\omega)(1+\frac{1}{10}j\omega)}$$

I diagrammi di Bode asintotici sono riportati in figura:


10
5
1
2
10
10^{-1}
10^{2}
+90
45
-45
-90
1
10
10^{-1}
10^{2}

6.

Si osservi innanzitutto che si ha la seguente configurazione di poli e zeri:

- o uno zero per $s=-2$ con molteplicità 2
- o uno polo per $s=-4$ con molteplicità 4

Essendo $n-m=2$ il luogo presenta due asintoti che si intersecano in

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m} = -4$$

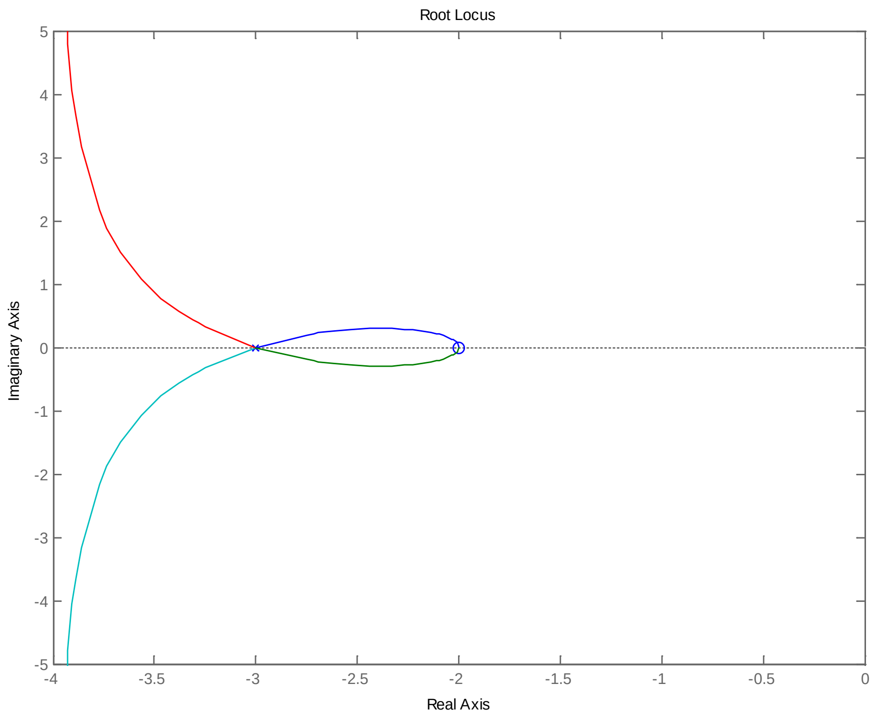
Tenendo conto delle seguenti osservazioni

- o un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zeri e di poli (luogo diretto).
- o il luogo delle radici ha 4 rami.
- o gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli

  $\theta_{a,0} = \frac{\pi}{2}$; $\theta_{a,1} = \frac{3}{2}\pi$

  al luogo non appartengono radici doppie.

si può dedurre che il luogo delle radici ha l'andamento riportato in figura:



7.

Il controllore (di ordine quattro) è del tipo

$$C(s) = \frac{b_4\, s^4 + b_3\, s^3 + b_2\, s^2 + b_1\, s + b_0}{(s^2+4)\,(s^2+1)}$$

in cui i quattro poli coniugati in $\pm j2$ e $\pm j1$ servono a rimuovere il disturbo $d(t)$.

Il guadagno ad anello è $L(s) = C(s)\,P(s)$ e dall'equazione $1 + L(s) = 0$ si ricava il polinomio caratteristico

$$\begin{aligned} p_c(s) &= (s^2+1)\,(s^2+4)\,(s+4) + b_4\, s^4 + b_3\, s^3 + b_2\, s^2 + b_1\, s + b_0 = \\ &= s^5 + (4+b_4)\, s^4 + (5+b_3)\, s^3 + (20+b_2)\, s^2 + (4+b_1)\, s + 16 + b_0 \end{aligned}$$

Dalle specifiche si ricava il polinomio desiderato

$$\begin{aligned} p_d(s) &= (s+1)(s+2)(s+3)(s+5)(s+6) = \\ &= s^5 + 17\, s^4 + 107\, s^3 + 307\, s^2 + 396\, s + 180 \end{aligned}$$

Impostando l'identità polinomiale $p_c(s) = p_d(s)$ si determina il seguente sistema

$$\begin{cases} b_4 + 4 = 17 \\ b_3 + 5 = 107 \\ b_2 + 20 = 307 \\ b_1 + 4 = 396 \\ b_0 + 16 = 180 \end{cases}$$

risolvendo il quale si ricava

$$b_4 = 13 \quad b_3 = 102 \quad b_2 = 287 \quad b_1 = 392 \quad b_0 = 164$$

Il controllore è quindi

$$C(s) = \frac{13\, s^4 + 102\, s^3 + 287\, s^2 + 392\, s + 164}{(s^2+4)\,(s^2+1)}$$

Perchè l'errore a regime in condizioni nominali sia nullo, si deve avere $T_{ry}(0) = 1$ da cui

$$F\,\frac{C(0)P(0)}{1 + C(0)\,P(0)} = F\,\frac{\frac{164}{4}\,\frac{1}{4}}{1 + \frac{164}{4}\,\frac{1}{4}} = F\,\frac{41}{45} = 1$$

Si impone quindi

$$F = \frac{45}{41} = 1.0976$$

8.

$$P_d(z) = \frac{z-1}{z}\,\mathcal{Z}\left[\frac{P(s)}{s}, T\right]$$

$$\frac{P(s)}{s} = \frac{16}{s(s+2)(s+4)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+8} = \frac{2}{s} - \frac{4}{s+2} + \frac{2}{s+4}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{s}\right] = 2 - 4e^{-2t} + 2e^{-4t} := P_s(t)$$

$$\mathcal{Z}\left[P_s(kT)\right] = \mathcal{Z}\left[2 - 4e^{-2\cdot k\cdot 0.02} + 2e^{-4\cdot k\cdot 0.02}\right] = \mathcal{Z}\left[2 - 4\left(e^{-0.04}\right)^k + 2\left(e^{-0.08}\right)^k\right]$$

$$= 2\frac{z}{z-1} - 4\cdot\frac{z}{z-0.9608} + 2\frac{z}{z-0.9231}$$

$$P_d(z) = \frac{z-1}{z}\,\mathcal{Z}\left[P_s(kT)\right] = 2 - 4\frac{z-1}{z-0.9608} + 2\frac{z-1}{z-0.9231} = \frac{0.003000\cdot z + 0.00302896}{(z-0.9608)(z-0.9231)}$$

$$T_{\tilde{r}\tilde{c}}(z) = \frac{L(z)}{1+L(z)}, \quad L(z) = k\,P_d(z)$$

$$1 + k\frac{0.003\cdot z + 0.00302896}{(z-0.9608)(z-0.9231)} = 0 \qquad z^2 - 1.8839\cdot z + 0.88691448 + 0.003\cdot k\cdot z + 0.00302896k = 0$$

$$z^2 + (0.003\cdot k - 1.8839)z + 0.00302896\cdot k + 0.88691448 = 0 \qquad a(z) = 0$$

1) $a(1) > 0$, $0.00301448 + 0.00602896\cdot k > 0$ $\quad k > -0.5$

2) $(-1)^2 a(-1) > 0$, $3.77081448 + 0.00002896\cdot k > 0$ $\quad k > -130207.68$

3) $|a_0| < a_2$ $\quad |0.00302896\cdot k + 0.88691448| < 1$ $\quad \begin{cases} k < 37.33 \\ k > -622.96 \end{cases}$

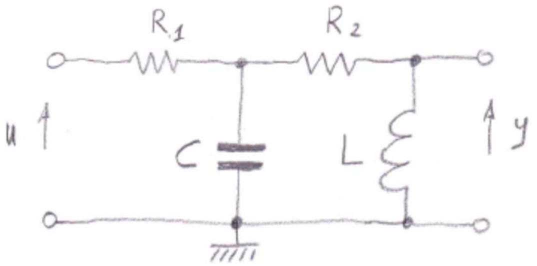
$-0.00302896\cdot k - 0.88691448 < 1$

$$\boxed{-0.5 < k < 37.33}$$

Parte A

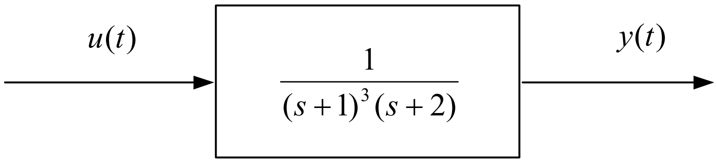
1. [punti 4,5] Si presentino e si dimostrino le formule di inversione per la sintesi in frequenza delle reti correttrici. Si esponga inoltre come utilizzare tali formule per la sintesi della rete **ritardatrice** con imposizione del **margine di fase** M_F.

2. [punti 4,5] Il circuito elettrico di figura definisca un sistema dinamico orientato da u (tensione elettrica) ad y (tensione elettrica).



Determinare per questo sistema:
1. la funzione di trasferimento;
2. l'equazione differenziale;
3. il guadagno statico.

3. [punti 4,5] Sia dato il sistema di figura con funzione di trasferimento $P(s) = \dfrac{1}{(s+1)^3(s+2)}$.

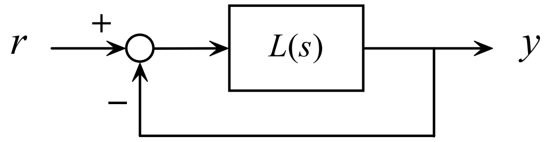


Determinare l'evoluzione forzata $y(t)$ del sistema in risposta al gradino unitario $u(t) = 1(t)$.

4. [punti 4,5] Sia Σ_d un sistema a tempo discreto descritto dalla funzione di trasferimento $H(z) = \dfrac{b(z)}{a(z)}$ con $a(z)$ e $b(z)$ polinomi coprimi fra loro. Presentare e dimostrare una condizione necessaria e sufficiente (in relazione ai poli del sistema) che assicuri la stabilità asintotica di Σ_d.

Parte B

5. [punti 4,5] Sia dato il sistema retroazionato di figura dove $L(s)=\dfrac{(1-s)^2}{s(1+s)^2(s+4)}$.



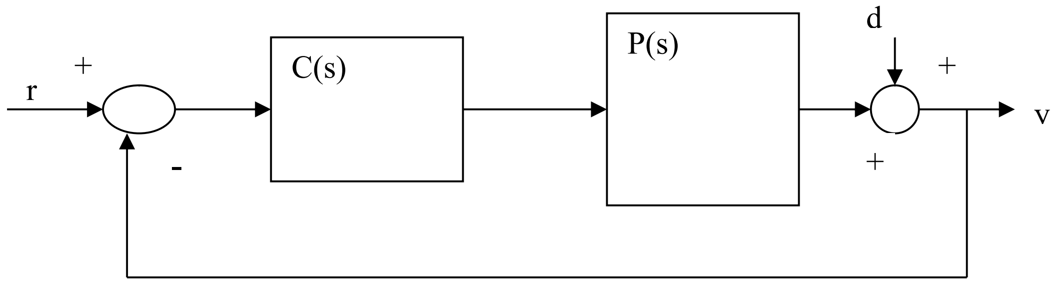
a. Tracciare il diagramma polare della risposta armonica $L(j\omega)$ determinando in particolare l'asintoto e l'intersezione del diagramma con l'asse reale negativo.
b. Utilizzando il criterio di Nyquist dimostrare che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
c. Determinare il margine di ampiezza M_A.

6. [punti 4,5] Si traccino i luoghi delle radici della seguente equazione caratteristica:

$$1+K_1\frac{s(s-4)}{(s+4)^5}=0$$

per $K_1>0$ (luogo diretto) e per $K_1<0$ (luogo inverso). In entrambi i luoghi si determinino gli asintoti, le radici doppie e gli angoli di partenza del luogo.

7. [punti 4,5] Sia dato il seguente sistema retroazionato



dove $P(s)=\dfrac{10}{s+5}$. Progettare un controllore C(s) proprio affinché:

a) Il sistema sull'uscita controllata y abbia reiezione infinita (asintoticamente) del disturbo armonico $d(t)=3{,}5\ \mathrm{sen}(2t)$.
b) Il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile con poli dominanti $-10\pm j2$.

8. [punti 4,5] Dato il sistema a tempo discreto definito dall'equazione

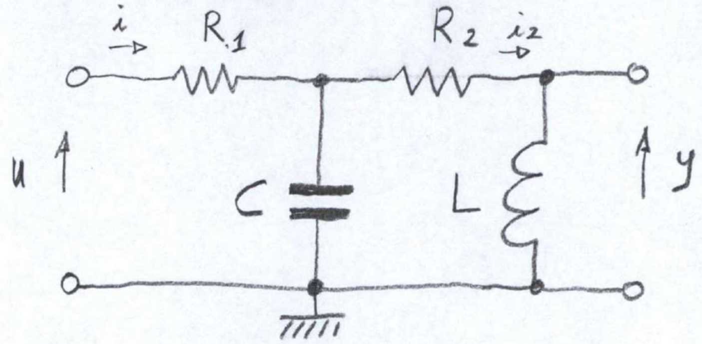
$$y(k)+0.5y(k-1)+0.5y(k-2)+0.5y(k-3)=u(k-3)$$

ed orientato da $u(k)$ (ingresso) a $y(k)$ (uscita) se ne studi la stabilità alle perturbazioni.

Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense dell'insegnamento.

2.



$$Z(s) = R_1 + \frac{\frac{1}{sC}(R_2 + Ls)}{\frac{1}{sC} + R_2 + Ls} \qquad I(s) = \frac{U(s)}{Z(s)}$$

$$I_2 = I \cdot \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC} + R_2 + Ls} \; ; \qquad Y = Ls \cdot I_2$$

$$Y(s) = \frac{Ls}{LR_1Cs^2 + (L + R_1R_2C)s + R_1 + R_2} \cdot U(s) \triangleq G(s)U(s)$$

f. d. t. $$G(s) = \frac{Ls}{LR_1Cs^2 + (L + R_1R_2C)s + R_1 + R_2}$$

eq. diff. $$LR_1C\,D^2y(t) + (L + R_1R_2C)\,Dy(t) + (R_1 + R_2)\,y(t) = $$
$$= L\,Du(t)$$

guadagno statico $G(0) = 0$.

3.

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)^3(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1)^3} + \frac{K_{22}}{(s+1)^2} + \frac{K_{23}}{s+1} + \frac{K_3}{s+2}$$

$$K_1 = \left.\frac{1}{(s+1)^3(s+2)}\right|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$K_{21} = \left.\frac{1}{s(s+2)}\right|_{s=-1} = \frac{1}{(-1)(1)} = -1$$

$$K_3 = \left.\frac{1}{s(s+1)}\right|_{s=-2} = \frac{1}{(-2)(-1)} = \frac{1}{2}$$

$$K_1 + K_{23} + K_3 = 0 \qquad K_{23} = -K_1 - K_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

$$K_{22} = \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s(s+2)}\right)\right|_{s=-1} = -\left.\frac{s+2+s}{s^2(s+2)^2}\right|_{s=-1} = 0$$

$$Y(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2e^{-t} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \qquad t \geq 0}$$

4.
Vedi dispense dell'insegnamento

5.

a)

$$L(s)=\frac{1}{4}\cdot\frac{(1-s)^2}{s(1+s)^2\left(1+\frac{1}{4}s\right)}$$

$$L(j\omega)=\frac{1}{4}\cdot\frac{(1-j\omega)^2}{j\omega(1+j\omega)^2\left(1+\frac{1}{4}j\omega\right)}$$

$$\arg L(j\omega)=-\frac{\pi}{2}-4\arctan\omega-\arctan\frac{\omega}{4}$$

ascissa dell'asintoto verticale: $\sigma_a=\frac{1}{4}\left(-1-1-1-1-\frac{1}{4}\right)=-\frac{17}{16}\cong-1,06$

Calcolo dell'intersezione con l'asse reale negativo:

$$\arg L(j\omega)=-\pi\Leftrightarrow 4\arctan\omega+\arctan\frac{\omega}{4}=\frac{\pi}{2}$$

$$1-\frac{\omega}{4}\tan\left(4\arctan\omega\right)=0$$

sviluppando questa equazione e definendo $x:=\omega^2$ si ottiene

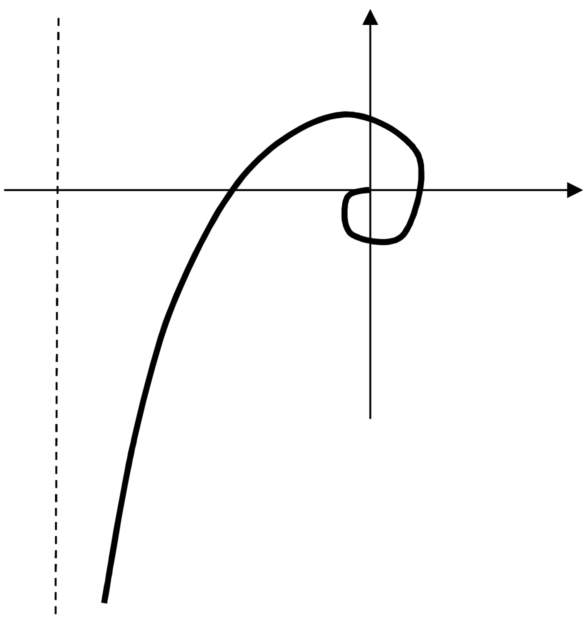
$$2x^2-7x+1=0$$

$$x_{1,2}=0{,}1492\quad 3{,}3508\qquad\Rightarrow\quad \omega_1=0{,}3863\quad \omega_2=1{,}8305$$

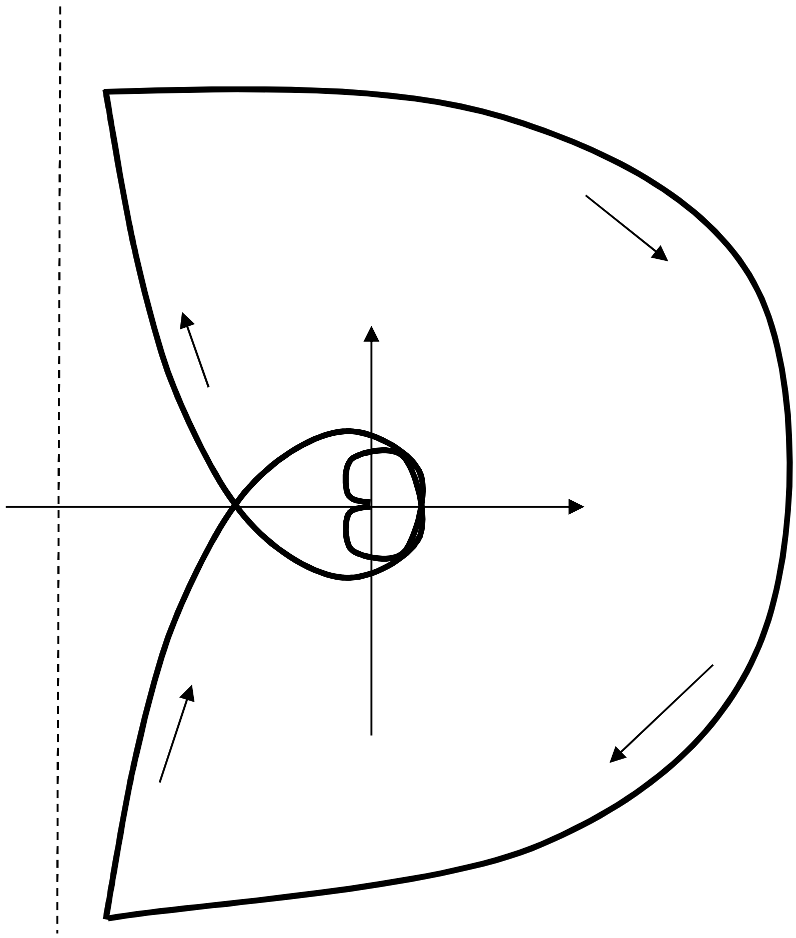
$$\arg L(j\omega_1)=-3{,}1416\qquad \arg L(j\omega_2)=-6{,}2832$$

si scarta la seconda soluzione (che corrisponde all'intersezione del diagramma con l'asse reale positivo) e si ottiene:

$$L(j\omega_1)=-0{,}6442$$



b) Si traccia il diagramma polare completo:



Il guadagno di anello non ha poli a parte reale negativa ed il d.p.c. non tocca né circonda il punto critico – 1. Ne consegue, per il criterio di Nyquist, che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

c)

$$M_A = \frac{1}{\left|L(j\omega_1)\right|} = \frac{1}{0{,}6442} = 1{,}55$$

6.

Si osservi innanzitutto che si ha la seguente configurazione di poli e zeri:

- uno zero per $s = 0$ con molteplicità 1
- uno zero per $s = 4$ con molteplicità 1
- uno polo per $s = -4$ con molteplicità 5

Essendo $n - m = 3$ il luogo (sia diretto che inverso) presenta tre asintoti.
Tali asintoti formano una stella di raggi con centro nel punto dell'asse reale di ascissa

$$\sigma_a = \frac{1}{3}((-4-4-4-4-4)-4) = -8$$

LUOGO DIRETTO ($K_1 \in [0, +\infty)$ **):**

- un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zeri e di poli.
- il luogo delle radici ha 5 rami.
- gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli
  $\theta_{a,0} = \frac{\pi}{3}$; $\theta_{a,1} = \pi$; $\theta_{a,2} = \frac{5}{2}\pi$
- le radici doppie sono individuate dalle soluzioni della seguente equazione
  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s-4} - \frac{5}{s+4} = 0$
  cioè
  $3s^2 - 24s + 16 = 0$
  e risultano essere
  $s_1 = \frac{12+\sqrt{96}}{3} \approx 7.27$; $s_2 = \frac{12-\sqrt{96}}{3} \approx 0.734$
  si nota subito che la prima soluzione non appartiene al luogo diretto delle radici, per cui si può concludere che l'unica radice doppia si ha nel punto di ascissa s_2.
  Gli angoli di partenza dal polo -4 con molteplicità 5 si deducono dalla congruenza:

$$5\varphi = \pi + (\pi + \pi)$$

Le soluzioni della congruenza sono: $\varphi_1 = 108°$, $\varphi_2 = 108° + 72° = 180°$, $\varphi_3 = 108° - 72° = 36°$ $\varphi_4 = -108°$, $\varphi_5 = -36°$.

Da quanto sopra riportato si deduce che il luogo delle radici (per $K_1 > 0$) ha l'andamento riportato in figura 1.

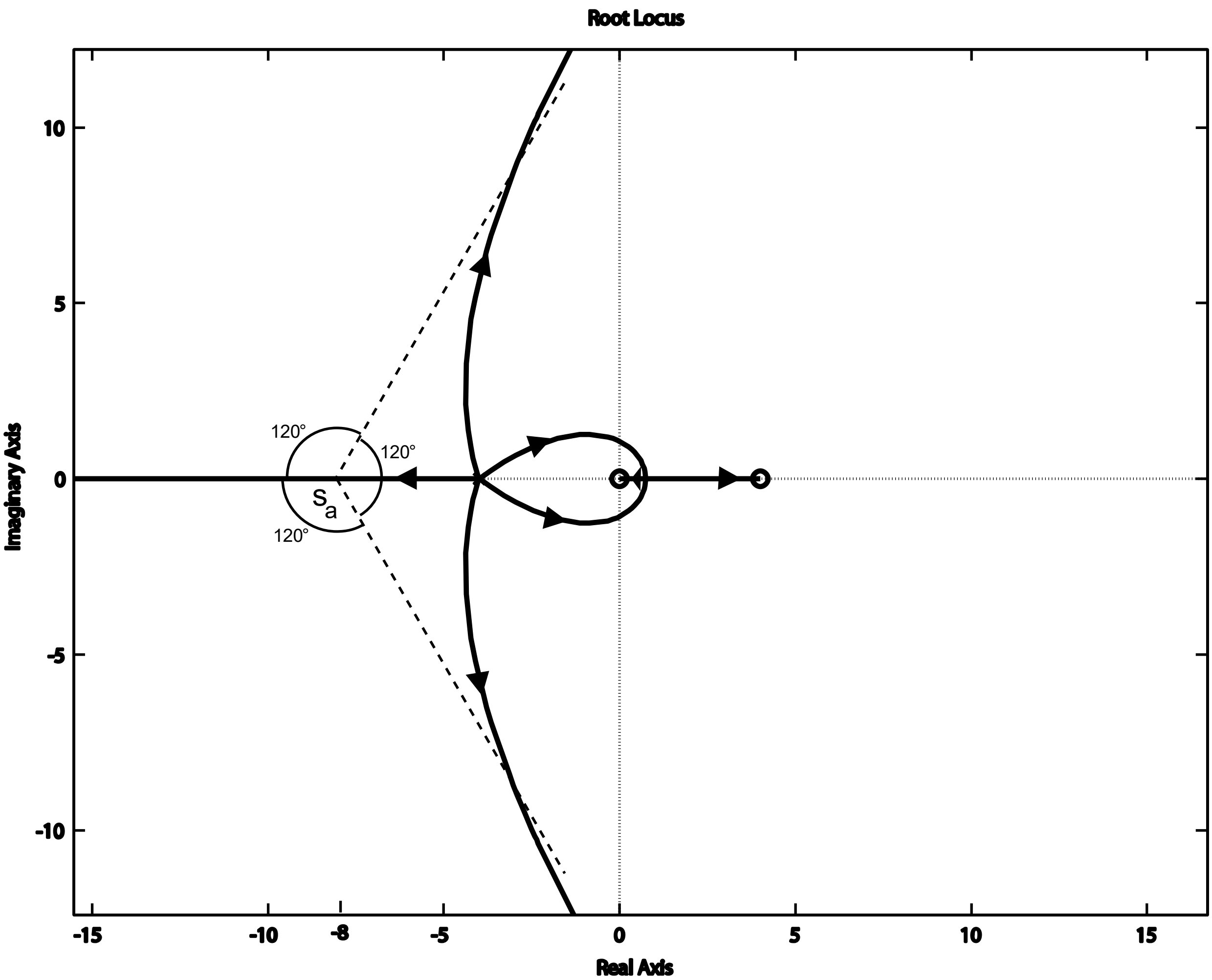


Figura 1. Luogo diretto

LUOGO INVERSO ($K_1 \in (-\infty, 0]$):

- un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale pari di zeri e di poli.
- il luogo delle radici ha 5 rami.
- gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli

  $\theta_{a,0} = 0$; $\theta_{a,1} = \dfrac{2}{3}\pi$; $\theta_{a,2} = \dfrac{4}{3}\pi$
- le radici doppie sono individuate dalle soluzioni della seguente equazione

  $$\frac{1}{s} + \frac{1}{s-4} - \frac{5}{s+4} = 0$$

  cioè

  $$3s^2 - 24s + 16 = 0$$

  e risultano essere

  $$s_1 = \frac{12+\sqrt{96}}{3} \approx 7.27\,; \quad s_2 = \frac{12-\sqrt{96}}{3} \approx 0.734$$

  si nota subito che la seconda soluzione non appartiene al luogo diretto delle radici, per cui si può concludere che l'unica radice doppia si ha nel punto di ascissa s_1.

  Gli angoli di partenza dal polo -4 con molteplicità 5 si deducono dalla congruenza:

  $$5\varphi = (\pi + \pi)$$

Le soluzioni della congruenza sono: $\varphi_1 = 72°$, $\varphi_2 = -72°$, $\varphi_3 = 144°$, $\varphi_4 = 0°$, $\varphi_5 = -144°$.

Da quanto sopra riportato si deduce che il luogo delle radici (per $K_1 < 0$) ha l'andamento riportato in figura 2.

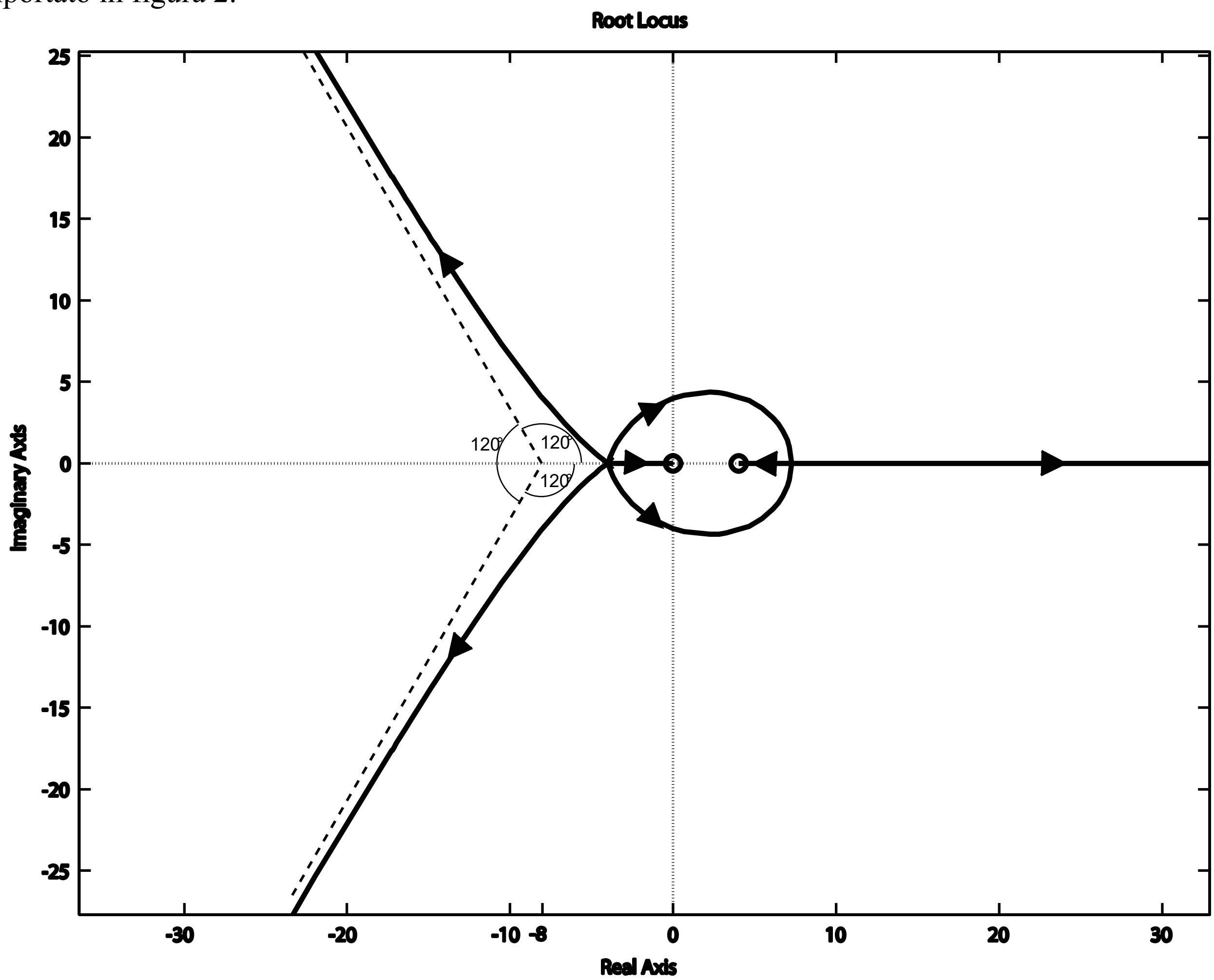


Figura 2. Luogo inverso

7.

$$T_{dy}(s) = \frac{1}{1 + C(s)P(s)}$$

$$T_{dy}(j\omega) = \frac{1}{1 + C(j\omega)P(j\omega)}$$

$$T_{dy}(j2) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad C(j2) = +\infty$$

$$\Rightarrow \quad C(s) := \frac{y(s)}{(s^2+4)x(s)} \quad \text{controllore di ordine } l \text{ biproprio}$$

$$y(s) := y_0 s^l + y_1 s^{l-1} + \cdots + y_l$$

$$x(s) := s^{l-2} + x_1 s^{l-3} + \cdots + x_{l-2}$$

$$P(s) := \frac{b(s)}{a(s)}$$

equazione caratteristica:

$$1 + C(s)P(s) = 0$$

$$x(s)(s^2+4)a(s) + y(s)b(s) = 0$$

Quindi il polinomio caratteristico associato alla struttura scelta per il controllore è un polinomio monico di grado $l+1$:

$$(s^2+4)(s+5)x(s)+10y(s)$$

Sia d(s) il polinomio caratteristico desiderato (polinomio monico di grado $l+1$). Imponendo che d(s) coincida col pol. caratteristico sopra si ottengono $l+1$ equazioni (lineari) con $l+1+(l-2)=2l-1$ incognite . Richiedendo che $l+1=2l-1$ si ottiene $l=2$.

Scelta di d(s):

$$d(s):=[(s+10)^2+4](s+30)=s^3+50s^2+704s+3120$$

Polinomio caratteristico associato al controllore:

$$s^3+(5+10y_0)s^2+(4+10y_1)s+20+10y_2$$

Quindi

$$\begin{cases} 5+10y_0=50 & \Rightarrow y_0=4,5 \\ 4+10y_1=704 & \Rightarrow y_1=70 \\ 20+10y_2=3120 & \Rightarrow y_2=310 \end{cases}$$

In conclusione: $C(s)=\dfrac{4,5s^2+70s+310}{s^2+4}$.

8.

La funzione di trasferimento del sistema a tempo discreto è

$$H(z) = \frac{1}{z^3 + 0.5\,z^2 + 0.5\,z + 0.5}$$

La stabilità alle perturbazioni è determinata dalle radici del polinomio $a(z) \triangleq z^3 + 0.5\,z^2 + 0.5\,z + 0.5$ per il quale si applica il Criterio di Jury

1) $a(1) > 0$ ok!

2) $(-1)^3\, a(-1) > 0$

$$(-1)\left(-1 + \cancel{0.5} - \cancel{0.5} + 0.5\right) > 0 \quad \text{ok!}$$

3) $|a_0| < a_n$

$$|0.5| < 1 \quad \text{ok!}$$

4) $|b_0| > |b_{n-1}|$

1	0.5	0.5	0.5	1
2	1	0.5	0.5	0.5
3	−0.75	*	−0.25	

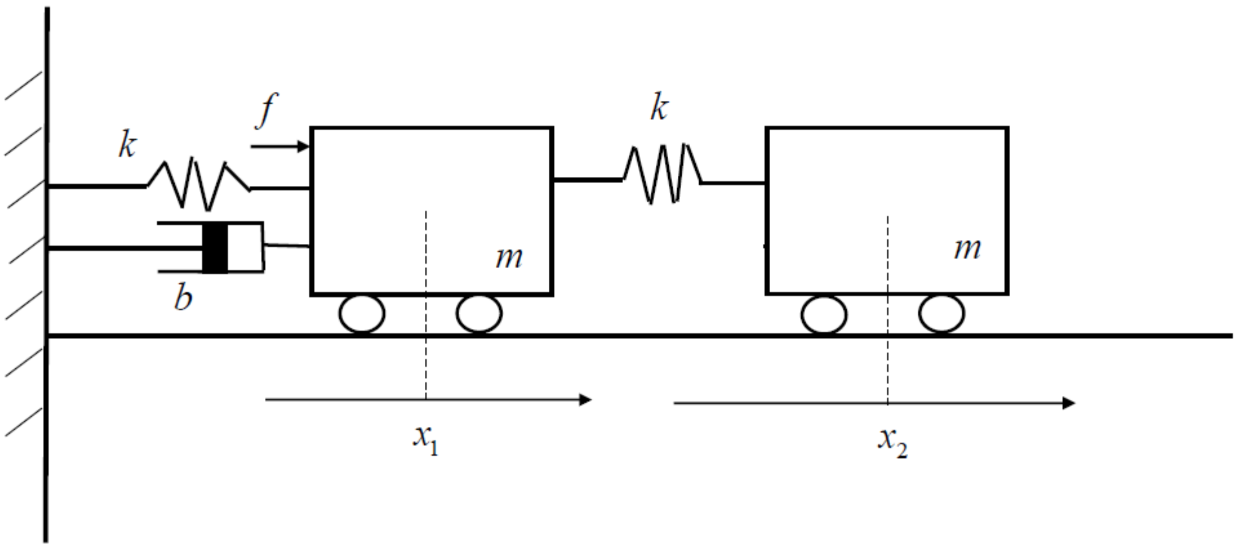
$$|-0.75| > |-0.25| \quad \text{ok!}$$

Il sistema è asintoticamente stabile.

Parte A

1. [punti 4,5]
Sia dato un sistema in retroazione unitaria con guadagno di anello $L(s)$. Si presenti e discuta l'analisi a regime della risposta ai segnali tipici del riferimento.

2. [punti 4,5]
Due carrelli di massa m collegati come mostrato in figura costituiscono un sistema dinamico Σ orientato da f (forza applicata al carrello di sinistra) ad x_1 (posizione del carrello di sinistra). In condizione di riposo delle molle sia $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$.



1. Determinare l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.
2. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ di Σ.
3. Determinare il guadagno statico e gli zeri di Σ.

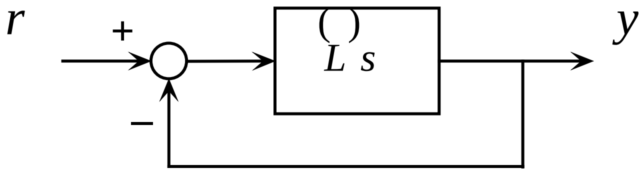
3. [punti 4,5]
Da una elaborazione di dati sperimentali su di un sistema dinamico è nota la risposta al gradino unitario $g_s(t) = \frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t}$.

a) Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema esprimendola nella forma standard con poli e zeri.

b) Determinare la risposta forzata $y(t),\ t \geq 0$ del sistema al segnale di ingresso $u(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1+t & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$.

Parte B

4. [punti 4,5]
Sia dato il seguente sistema retroazionato

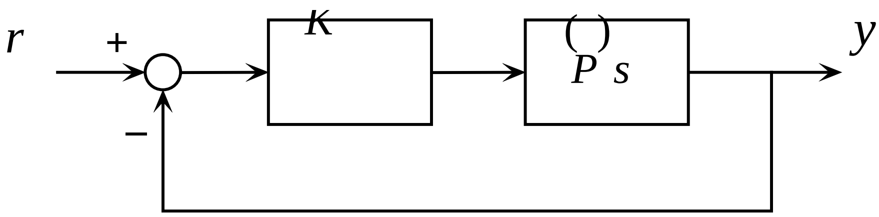


dove $L(s) = 8\dfrac{1-s}{(s+2)^3}$.

a) Tracciare il diagramma polare associato alla funzione di trasferimento $L(s)$ determinando in particolare l'intersezione con l'asse reale negativo.
b) Dimostrare mediante il criterio di Nyquist che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile e determinare il corrispondente margine di ampiezza M_A.

5. [punti 4,5]
Presentare il metodo di Tustin per la discretizzazione dei controllori a tempo continuo. Giustificare la corrispondente formula di Tustin che permette di determinare la funzione di trasferimento zeta nota la funzione di trasferimento a tempo continuo. Includere una discussione sulla stabilità del controllore a tempo discreto così determinato.

6. [punti 4,5]
Sia dato il sistema in retroazione di figura

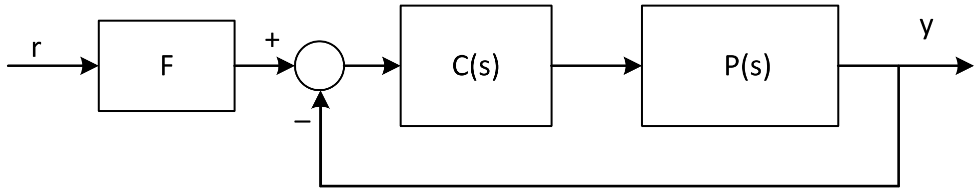


dove $P(s) = \dfrac{1}{s(s+4)^3}$.

a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K > 0$ determinando in particolare
   1. Asintoti del luogo.
   2. Eventuali radici doppie.
   3. Angoli di partenza del luogo.
b. Determinare i valori di $K \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Determinare inoltre le intersezioni del luogo delle radici dell'equazione caratteristica con l'asse immaginario del piano complesso.
c. Determinare il valore di K che massimizza il grado di stabilità del sistema retroazionato: $K^* = \arg\max_{K\in\mathbb{R}} G_S(K)$.

Parte C

7. [punti 4,5]
Sia dato il sistema di controllo schematizzato in figura



dove $P(s) = \dfrac{8}{(s+2)^4}$. Determinare un controllore con struttura di rete anticipatrice $C(s) = K\dfrac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}$ ed il blocco algebrico $F \in \mathbb{R}$ affinché le seguenti specifiche siano soddisfatte:

a) $K_p = 3{,}5$ (costante di posizione del sistema retroazionato);

b) $M_F = 30°$ (margine di fase del sistema retroazionato);

c) $e_r = 0$ (errore a regime in risposta ad un gradino del riferimento r).

8. [punti 4,5]
Determinare la risposta forzata $y(k)$ all'ingresso $u(k) = 1(k)$ (gradino unitario) di un sistema a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze

$$y(k) + y(k-2) = u(k-1) + u(k-2) \ .$$

Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso

2.

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = f - k x_1 - b D x_1 + k(x_2 - x_1) \\ m D^2 x_2 = -k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = f - 2k x_1 - b D x_1 + k x_2 \\ m D^2 x_2 = -k x_2 + k x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k x_2 = m D^2 x_1 + b D x_1 + 2k x_1 - f \\ m D^2 x_2 + k x_2 = k x_1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (mD^2+k) \\ k \end{array} \begin{cases} k x_2 = m D^2 x_1 + b D x_1 + 2k x_1 - f \\ (m D^2 + k) x_2 = k x_1 \end{cases}$$

$$(m D^2 + k)(m D^2 + b D + 2k) x_1 - (m D^2 + k) f = k^2 x_1$$

$$(m^2 D^4 + m b D^3 + 2 k m D^2 + k m D^2 + k b D + \cancel{2} k^2) x_1 - \cancel{k^2 x_1} =$$
$$= (m D^2 + k) f$$

eq. diff. $m^2 D^4 x_1 + m b D^3 x_1 + 3 k m D^2 x_1 + k b D x_1 + k^2 x_1 = m D^2 f + k f$

f.d.t. $G(s) = \dfrac{m s^2 + k}{m^2 s^4 + m b s^3 + 3 k m s^2 + k b s + k^2}$

3. Il guadagno statico è G(0)=1/k.

Gli zeri sono $z_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}}$

3.

(5) a. $\mathcal{L}[g_s(t)] = G(s)\cdot\frac{1}{s}$

$$\mathcal{L}[g_s(t)] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s+2}$$

$$G(s) = \frac{1}{2} + \frac{s}{s+1} - \frac{3}{2}\cdot\frac{s}{s+2} = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)}$$

$$G(s) = 2\cdot\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+1)(s+2)}$$

b. $u(t) = 1(t) + t\cdot 1(t)$, $U(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$

$$Y(s) = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)}\cdot\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\right) = \frac{2s+1}{\cancel{(s+1)}(s+2)}\cdot\frac{\cancel{s+1}}{s^2}$$

$$= \frac{2s+1}{s^2(s+2)} = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_2}{s+2}$$

$$K_{11} = \left.\frac{2s+1}{s+2}\right|_{s=0} = \frac{1}{2} \qquad K_2 = \left.\frac{2s+1}{s^2}\right|_{s=-2} = -\frac{3}{4}$$

$$K_{12} + K_2 = 0 \implies K_{12} = \frac{3}{4}$$

$$Y(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s+2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \left(\frac{1}{2}t + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}e^{-2t}\right)\cdot 1(t)$$

4.

$$L(j\omega) = 8\,\frac{1-j\omega}{(j\omega+2)^3}$$

$$|L(j\omega)| = 8\,\frac{\sqrt{1+\omega^2}}{(\omega^2+4)^{3/2}}$$

$$\arg G(j\omega) = -\operatorname{arctg}\omega - 3\operatorname{arctg}\frac{\omega}{2}$$

$1+\alpha\,8\,\dfrac{1-s}{(s+2)^3} = 0$ abbia radici puramente immaginarie

$$1+\alpha L(\pm j\omega) = 0 \qquad L(\pm j\omega) = -\frac{1}{\alpha}$$

e quindi l'intersezione avviene in $-\dfrac{1}{\alpha}$

Si pone $k \triangleq 8\alpha$

$$1+k\,\frac{1-s}{(s+2)^3} = 0 \qquad (s+2)^3 + k(1-s) = 0$$

$$s^3+6s^2+12s+8+k-ks=0$$

$$s^3+6s^2+(12-k)s+8+k=0$$

$$\begin{array}{c|cccc}
3 & 1 & 12-k & 0 \\
2 & 6 & 8+k & 0 \\
1 & \# & &
\end{array}$$

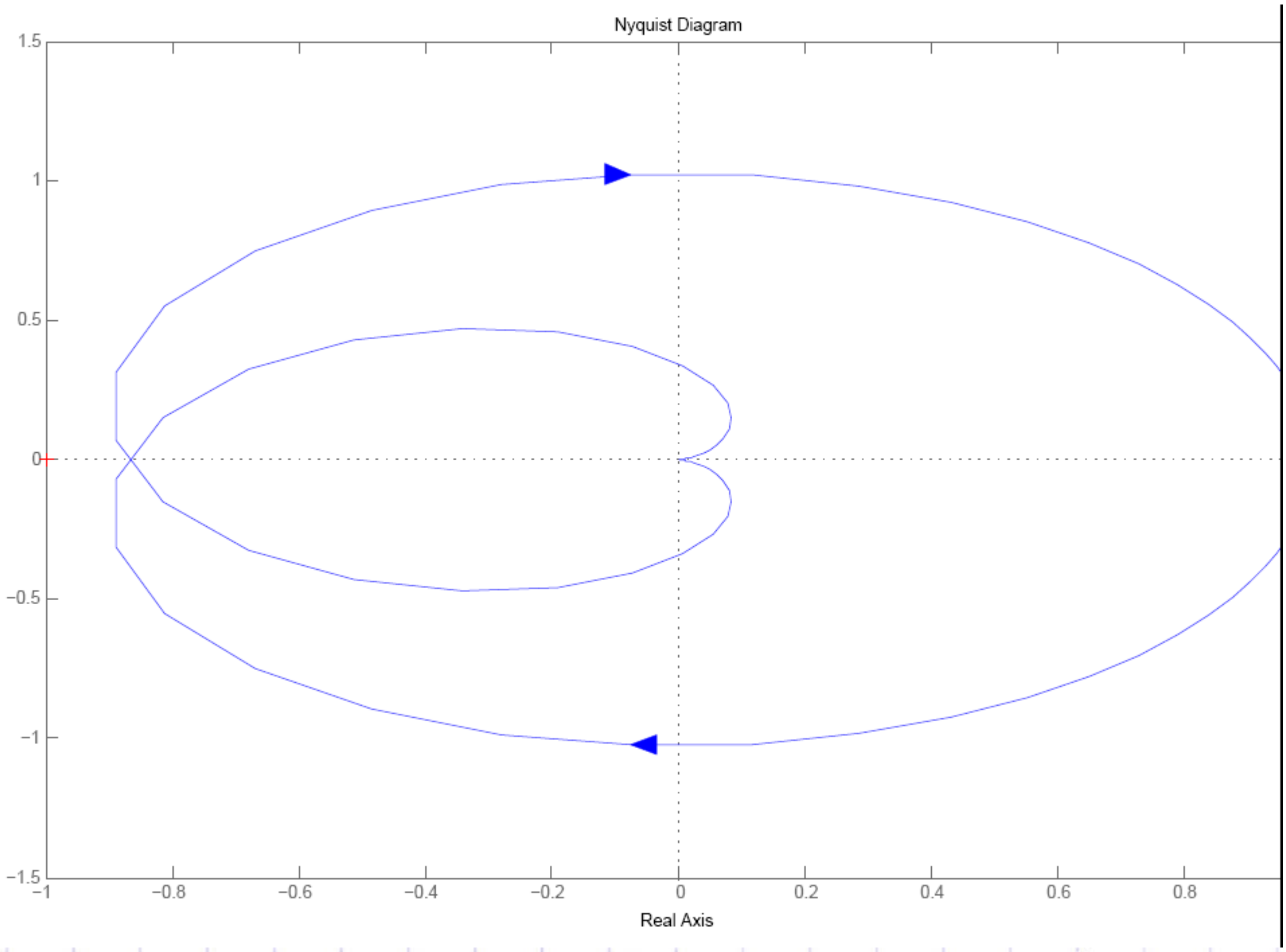
$$\# = 6(12-k)-8-k = 72-6k-8-k = -7k+64 = 0$$

$$7k = 64 \qquad k = \frac{64}{7}$$

$$8\alpha = \frac{64}{7} \Rightarrow \alpha = \frac{8}{7}$$

L'intersezione avviene in $-\dfrac{7}{8} \cong -0{,}875$

Il diagramma polare è quindi quello di figura:



. Per il C. di Ny. il sistema retr. è asint. stabile.

Il margine di ampiezza è

$$M_A = \frac{1}{\left|-\frac{7}{8}\right|} = \frac{8}{7} \simeq 1,14$$

5.
Vedi dispense dell'insegnamento

6.

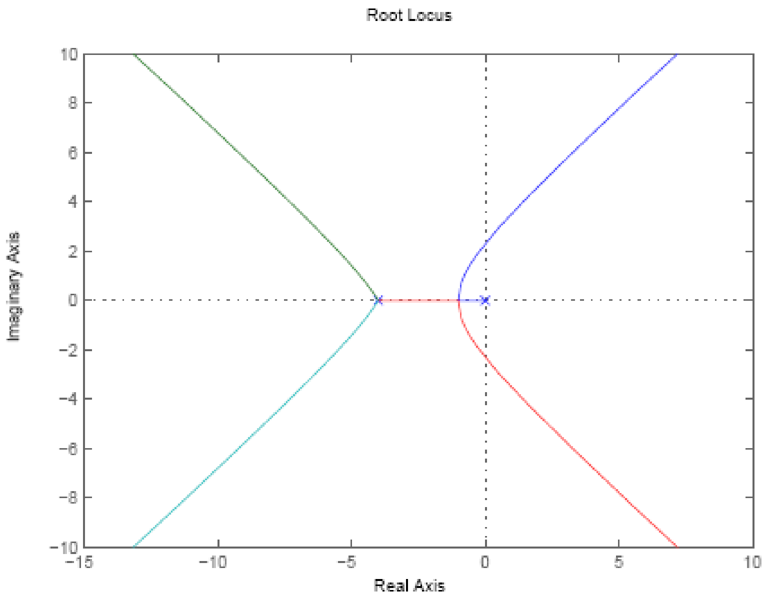
a) Intersezione degli asintoti:

$$\nabla_a = \frac{-4 \cdot 3 + 0}{4} = -3$$

Angoli deli asintoti: $+45°$, $-45°$, $+135°$, $-135°$
Angolo di partenza dal polo in 0: $+180°$
Angolo di partenza dal polo triplo in -4: $0°$, $+120°$, $-120°$
Radici doppie:

$$\frac{3}{s+4} + \frac{1}{s} = 0 \;\Rightarrow\; 4\,s + 4 = 0 \;\Rightarrow\; s = -1$$

Luogo delle radici:



b) Equazione caratteristica:

$$1 + K\,\frac{1}{s\,(s+4)^3} = 0 \;\Rightarrow\; s^4 + 12\,s^3 + 48\,s^2 + 64\,s + K = 0$$

Criterio di Routh:

$$\begin{array}{c|cccc}
\mathbf{4} & 1 & 48 & K & 0 \\
\mathbf{3} & 3 & 16 & 0 & 0 \\
\mathbf{2} & 128 & 3\,K & 0 & \\
\mathbf{1} & 128 \cdot 16 - 9\,K & 0 & & \\
\mathbf{0} & 3\,K & 0 & &
\end{array}$$

Condizione per la stabilità asintotica:

$$\begin{cases} 2048 - 9\,K > 0 \\ 3\,K > 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; K \in (0, 227.\bar{5})$$

Calcolo delle intersezoni:

$$128\,s^2 + 3 \cdot 227.\bar{5} = 0 \;\Rightarrow\; s = \pm j\,\sqrt{\frac{16}{3}} \simeq \pm j\,2.309$$

c) Grado di stabilità massimo nella radice doppia $s = -1$:

$$1 + K^*\,\frac{1}{s\,(s+4)^3}\bigg|_{s=-1} = 0 \;\Rightarrow\; K^* = 27$$

7.

$$L(s) = C(s)\,P(s) = k\,\frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}\cdot\frac{8}{(s+2)^4}$$

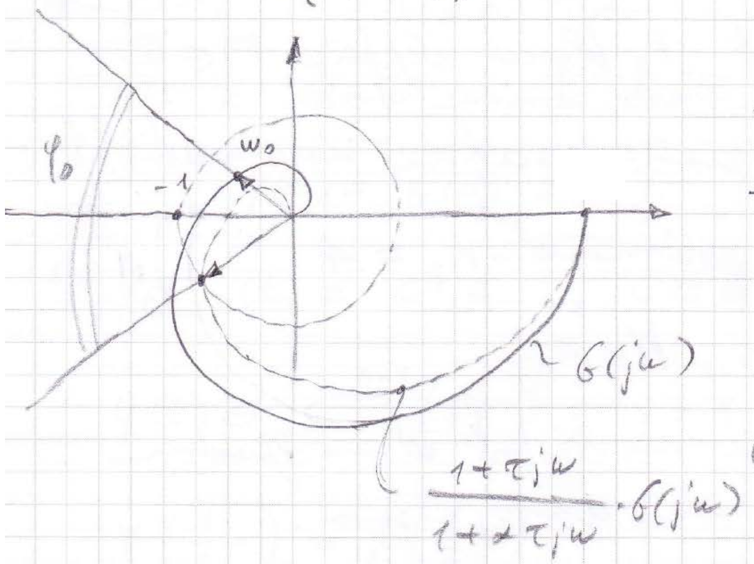
$$L(0) = k\cdot\frac{\cancel{8}\,1}{\cancel{16}\,2} = \frac{k}{2} \qquad K_p = L(0)$$

$$3{,}5 = \frac{k}{2} \Rightarrow k = 7$$

$$L(s) = \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}\cdot\frac{56}{(s+2)^4} \triangleq \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}\cdot G(s)$$

$$G(s) = \frac{56}{(s+2)^4} \qquad G(j\omega) = \frac{56}{(j\omega+2)^4}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{56}{(\omega^2+4)^2} \qquad \arg G(j\omega) = -4\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{2}$$



$$\arg G(j\omega) = -\pi$$

$$-4\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{2} = -\pi$$

$$\omega_p = 2 \text{ rad/sec}$$

$$|G(j\omega_p)| = 0{,}8750$$

$$G(j\omega_p) = -0.8750$$

Scelgo $\omega_0 = 2{,}5$ rad/sec

$$|G(j\omega_0)| = 0{,}5330 \qquad \varphi_0 = -\arg G(j\omega_0) - \pi + M_F =$$

$$= 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{2.5}{2} - \pi + \frac{30}{180}\cdot\pi = 0{,}9662 \text{ rad/sec}$$

$$\cos\varphi_0 > |G(j\omega_0)| \qquad 0{,}5684 > 0{,}5330 \quad \text{ok!}$$

$$M \triangleq \frac{1}{|G(j\omega_0)|} = 1,8761 \qquad \varphi \triangleq \varphi_0$$

$$\tau = \frac{M - \cos\varphi}{\omega_0 \sin\varphi} = \frac{1,8761 - 0,5684}{2,5 \cdot 0,8227} = 0,636 \text{ sec}$$

OK

$$\alpha = \frac{M\cos\varphi - 1}{M(M - \cos\varphi)} = \frac{1,8761 \cdot 0,5684 - 1}{1,8761 \cdot (1,8761 - 0,5684)} = 0,0271$$

Determinazione di F:

$$F \cdot \frac{L(0)}{1 + L(0)} = 1 \qquad F \cdot \frac{3,5}{1 + 3,5} = 1$$

$$F = \frac{1 + 3,5}{3,5} = \frac{4,5}{3,5} = 1,2857$$

8.

Funzione di trasferimento zeta

$$H(z) = \frac{z+1}{z^2+1}$$

$$U(z) = \frac{z}{z-1}, \qquad Y(z) = H(z)\,U(z)$$

$$Y(z) = \frac{z+1}{z^2+1} \cdot \frac{z}{z-1} = z \cdot \frac{z+1}{(z-1)(z^2+1)} =: z \cdot Y_1(z)$$

$$Y_1(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z^2+1)} = \frac{z+1}{(z-1)(z-j)(z+j)}$$

$$= \frac{K_1}{z-1} + \frac{K_2}{z-j} + \frac{\overline{K_2}}{z+j}$$

$$K_1 = \left.\frac{z+1}{z^2+1}\right|_{z=1} = 1 \qquad K_2 = \left.\frac{z+1}{(z-1)(z+j)}\right|_{z=j} = -\frac{1}{2}$$

$$\overline{K_2} = -\frac{1}{2}$$

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-j} - \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z+j}$$

Per $k \geq 0$

$$y(k) = 1 + 2 \cdot |j|^k \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \cos[\arg(j) \cdot k] - 0 \cdot \sin[\arg(j) \cdot k] \right\}$$

$$= 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot k\right)$$

Parte A

1. [punti 6] Enunciare il Criterio di Nyquist (sia il caso generale che quello particolare) avendo cura di definire i concetti e le premesse teoriche sui quali si basa. Riportare inoltre una dimostrazione di tale criterio.

2. [punti 7] Sia data la funzione di trasferimento $L(s) = \frac{10(s-1)}{s^2(s+10)}$.

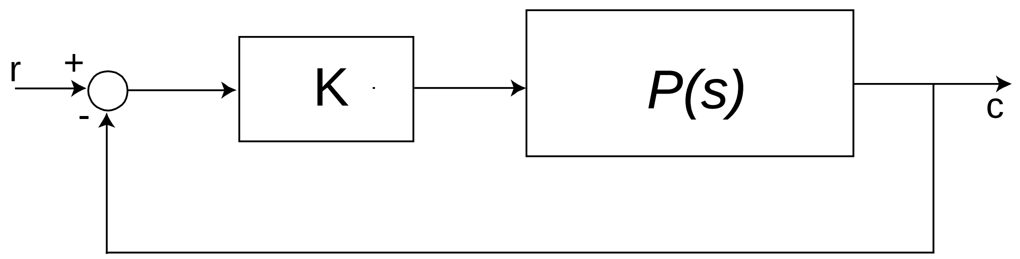
1) Determinare l'espressione analitica dell'argomento $arg(L(j\omega))$ e studiare gli andamenti asintotici di $L(j\omega)$ quando $\omega \to 0^+$ e $\omega \to +\infty$. A seguire, tracciare il diagramma di Nyquist di $L(j\omega)$.

2) Determinare per via grafica, applicando l'appropriata formulazione del teorema dell'indice logaritmico (la stessa che porta alla deduzione del criterio di Nyquist), il numero delle radici a parte reale positiva dell'equazione $1 + L(s) = 0$.

3) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici di $L(j\omega)$ (diagramma dei moduli e diagramma delle fasi).

[Suggerimento: si assegnino 10 quadretti del foglio protocollo per una decade delle pulsazioni. Si noti che: $\log_{10} 2 \cong 0,30$, $\log_{10} 3 \cong 0,48$, $\log_{10} 4 \cong 0,60$, $\log_{10} 5 \cong 0,70$, $\log_{10} 6 \cong 0,78$, $\log_{10} 7 \cong 0,85$, $\log_{10} 8 \cong 0,90$, $\log_{10} 9 \cong 0,95$.]

3. [punti 6] Sia dato il sistema retroazionato di figura



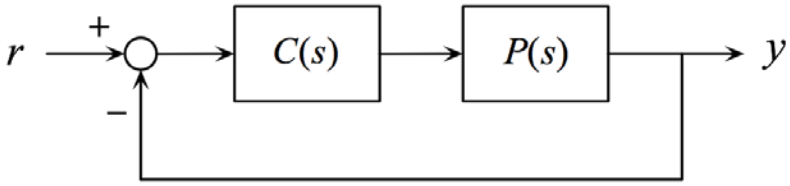
dove $P(s) = \dfrac{s(s^2+1)}{(s^2+4)(s+1)(s+2)}$.

1. Determinare i valori di K per i quali è assicurata la stabilità asintotica del sistema retroazionato.
2. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica associata al sistema retroazionato per $K \in [0,+\infty)$. Si determini l'angolo di partenza dal polo $+2j$ e l'angolo di arrivo sullo zero $+j$. Infine si determinino le eventuali intersezioni con l'asse immaginario $j\mathbb{R}$.

Parte B

4. [punti 5] Presentare e dedurre la funzione di trasferimento a tempo discreto $P_d(z)$ di un sistema a tempo continuo $P(s)$ con all'ingresso un mantenitore D/A di ordine zero e all'uscita un campionatore A/D sincronizzati con periodo T .

5. [punti 6] Sia dato il sistema di controllo con controllore PID



$C(s) = K_p\left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s}\right)$ ed un impianto controllato $P(s) = \frac{20}{(s+1)(s+2)^2}$. Posto $T_i = 4T_d$, progettare il controllore PID affinché il margine di fase del sistema sia $M_f = 45°$.
[Suggerimento: impostare una sintesi in frequenza, utilizzare una procedura numerica per tentativi se necessario (2 o 3 cifre significative esatte sono sufficienti).]

6. [punti 6] Un sistema a tempo discreto, con ingresso u ed uscita y, è descritto dalla seguente equazione alle differenze

$$y(k) - 0.5y(k-2) + 0.5y(k-3) + 0.06y(k-4) = u(k-1) \ .$$

a) Determinarne la funzione di trasferimento.
b) Verificarne la stabilità asintotica applicando il criterio di Jury.

Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

2.

1) $L(s) = \dfrac{10(s-1)}{s^2(s+10)} = \dfrac{-10(1-s)}{s^2 \cdot 10 \cdot (1+0{,}1s)} = -\dfrac{1-s}{s^2(1+0{,}1s)}$

$L(j\omega) = -\dfrac{1-j\omega}{(j\omega)^2(1+0{,}1j\omega)} = \dfrac{1-j\omega}{\omega^2 \cdot (1+0{,}1j\omega)}$

$\arg L(j\omega) = -\operatorname{arctg}(\omega) - \operatorname{arctg}(0{,}1\omega)$

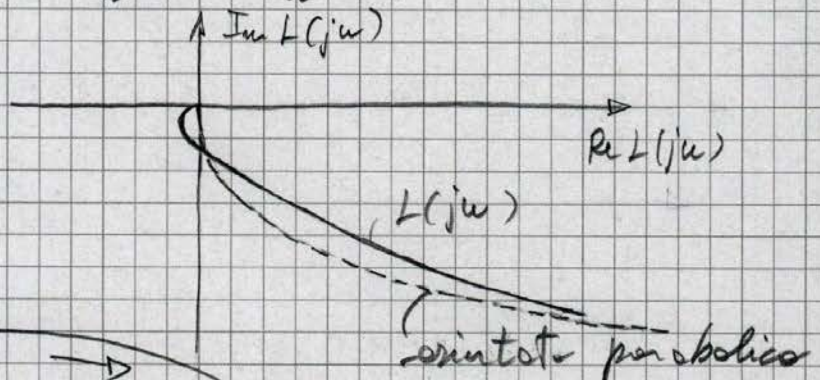
$\omega \to +\infty \qquad |L(j\omega)| \to 0\,,\ \arg L(j\omega) \to -\pi$

$\omega \to 0^+ \qquad L(j\omega) \to K\dfrac{1+j\omega\tau_\Sigma}{(j\omega)^2} = -\dfrac{K}{\omega^2} - j\dfrac{K\tau_\Sigma}{\omega}$

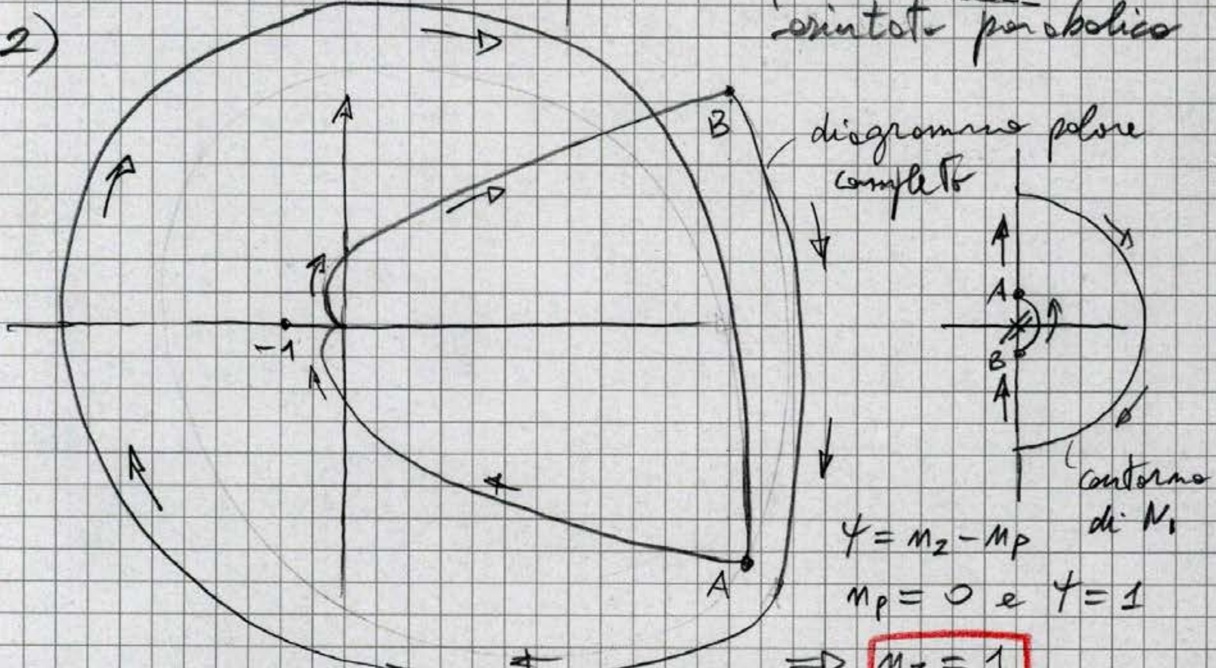
$K = -1$

$\tau_\Sigma = -1 - 0{,}1 = -1{,}1$

$L(j\omega) \to \dfrac{1}{\omega^2} - j\dfrac{1{,}1}{\omega}$



2)

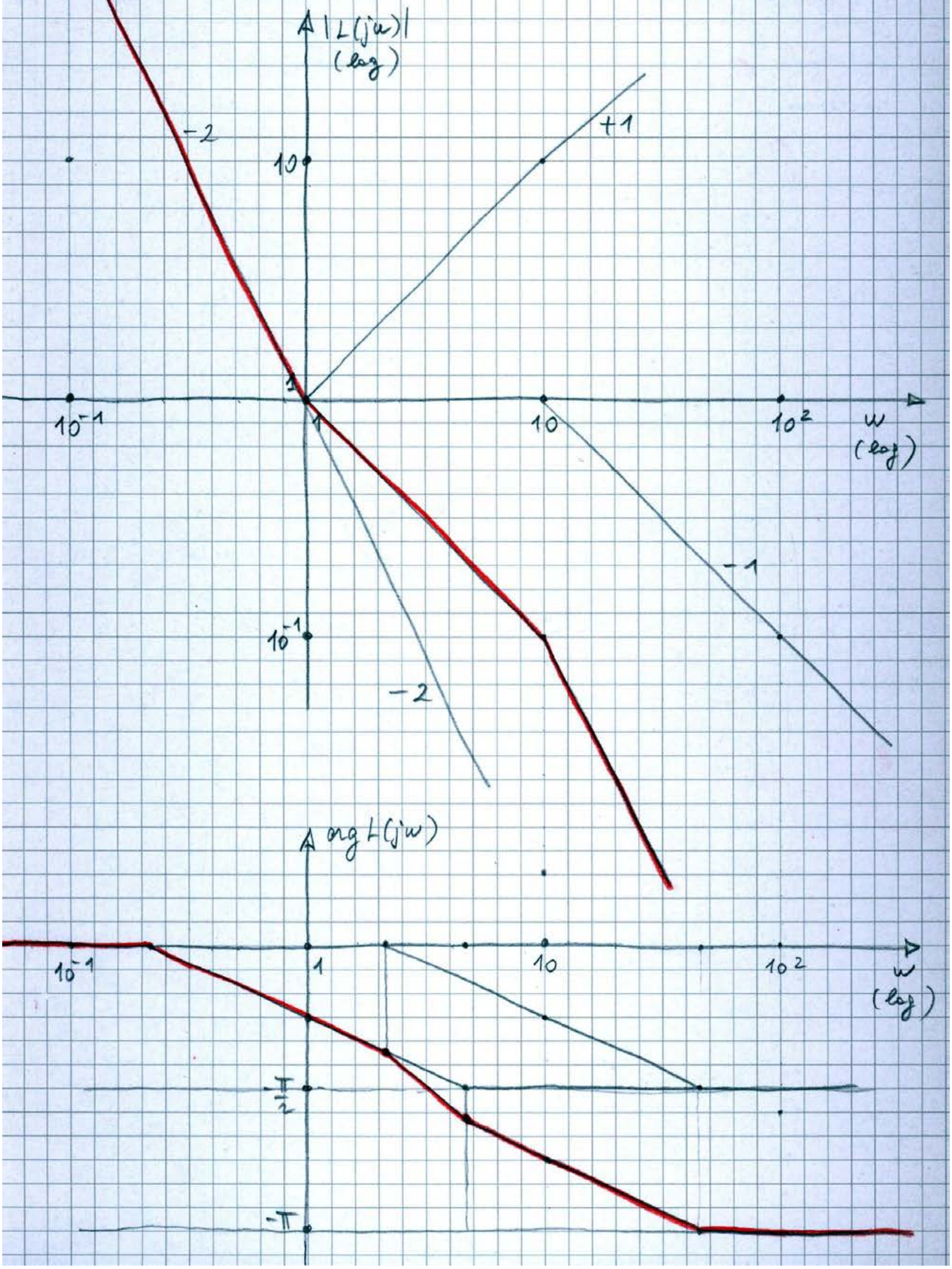


$\psi = n_z - n_p$

$n_p = 0$ e $\psi = 1$

$\Rightarrow \boxed{n_z = 1}$

3) $L(j\omega) = -\dfrac{1-j\omega}{(j\omega)^2(1+0{,}1j\omega)} = (-1)\dfrac{1-j\omega}{(j\omega)^2(1+0.1j\omega)}$



3.
L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + k\frac{s\left(s^2+1\right)}{\left(s^2+4\right)(s+1)(s+2)} = 0$$

$$s^4 + (3+k)s^3 + 6s^2 + (12+k)s + 8 = 0$$

I valori di k per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile sono quelli che che garantiscono la positività della prima colonna della tabella di Routh associata all'equazione caratteristica.

4	1 8	6
3	3+k 0	12+k
2	α(k) 0	24+8k
1	β(k)	0
0	24+8k	

$$\alpha\left(k\right) = 6\left(3+k\right) - 12 - k = 5k + 6$$
$$\beta\left(k\right) = \left(5k+6\right)\left(12+k\right) - \left(3+k\right)\left(24+8k\right) = -3k^2 + 18k$$

Il sistema di disequazioni risultante ha come soluzione $0 < k < 6$.

2) Si osservi innanzitutto che si ha la seguente configurazione di poli e zeri:

- uno zero per $s = 0$ con molteplicità 1
- uno zero per $s = +j$ con molteplicità 1
- uno zero per $s = -j$ con molteplicità 1
- uno polo per $s = -1$ con molteplicità 1
- uno polo per $s = -2$ con molteplicità 1
- uno polo per $s = -2j$ con molteplicità 1
- uno polo per $s = +2j$ con molteplicità 1

Essendo $n - m = 1$ il luogo presenta un asintoto.

Tenendo conto delle seguenti osservazioni (luogo diretto):

- un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zeri e di poli.
- il luogo delle radici ha 4 rami.
- Angolo di partenza del luogo dal polo +2j:

$$\{\text{angolo di p. da } p_i\} = \pi + \sum_{j=1}^{m} \arg(p_i - z_j) - \sum_{j\neq i} \arg(p_i - p_j)$$

$$\{\text{angolo di p. dal polo +2j}\} = \pi + \left[\arg(2j) + \arg(2j+j) + \arg(2j-j)\right] +$$

$$-\left[\arg(2j+2j) + \arg(2j+1) + \arg(2j+2)\right] =$$

$$\pi + \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} + arctg(2) + arctg(1)\right) = -108.43°$$

- Angolo di arrivo del luogo sullo zero 2j:

$$\{\text{angolo di a. su } z_i\} = \pi + \sum_{j=1}^{n} \arg(z_i - p_j) - \sum_{j\neq i} \arg(z_i - z_j)$$

$$\{\text{angolo di a. sullo zero +j}\} = \pi + \left[\arg(j+2j) + \arg(j-2j) + \arg(j+1) + \arg(j+2)\right] +$$

$$-\left[\arg(j+j) + \arg(j)\right] =$$

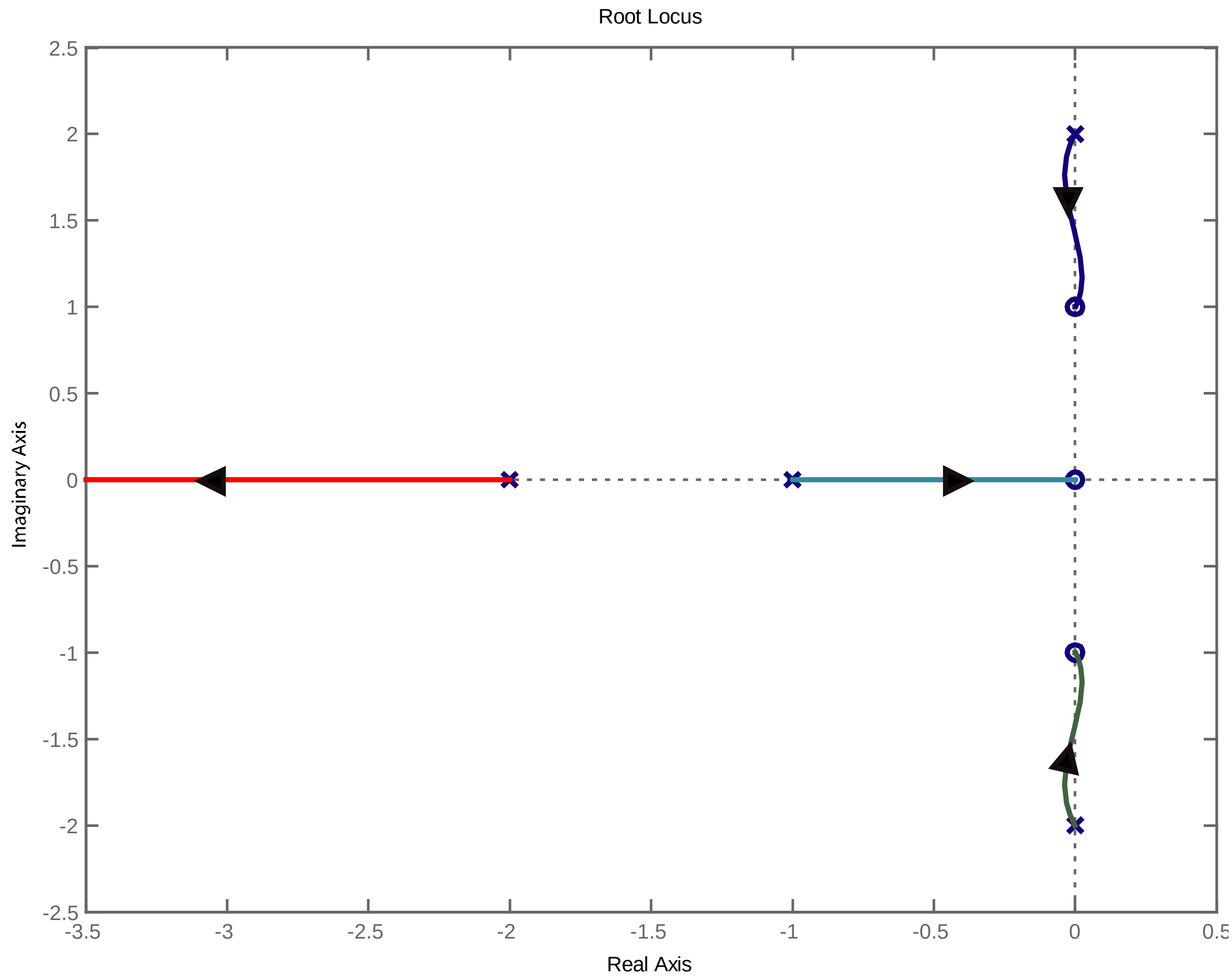
$$\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + arctg(1) + arctg(1/2)\right) - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 71.56°$$

- Intersezioni del luogo con l'asse immaginario
  Le intersezioni del luogo con l'asse immaginario si possono ottenere come soluzioni dell'equazione ausiliaria associata alla tabella di Routh in 1) per k=6:

$$(5 \cdot 6 + 6)s^2 + 24 + 8 \cdot 6 = 0$$

$$36s^2 + 72 = 0 \quad \rightarrow \quad s = \pm j\sqrt{2} = \pm\, j1.41$$

si può dedurre che il luogo delle radici per $K_1 > 0$ ha l'andamento riportato in figura:



4.
Vedi dispense dell’insegnamento.

5.

5) $P(j\omega) = \dfrac{20}{(j\omega+1)(j\omega+2)^2}$

1) ω_o soluzione di $\arg P(j\omega_o) = -\pi + M_f = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3}{4}\pi$

$-\operatorname{arctg}\omega_o - 2\operatorname{arctg}\frac{\omega_o}{2} = -\frac{3}{4}\pi$

$f(\omega_o) := \operatorname{arctg}\omega_o + 2\operatorname{arctg}\frac{\omega_o}{2} = \frac{3}{4}\pi = 2.3562$

ω_o	$f(\omega_o)$
1	1.7127
2	2.6779
1.6	2.3617
1.58	2.3438
1.59	2.3527

$\omega_o \simeq 1.59$ rad/s

2) $\boxed{K_p} = \dfrac{1}{|P(j\omega_o)|} = \dfrac{\sqrt{1+\omega_o^2}\cdot(4+\omega_o^2)}{20} = \underline{0.613}$

$K := T_i/T_d = 4$

$\boxed{T_i} = \dfrac{\sqrt{4}}{\omega_o} = \dfrac{2}{\omega_o} = \underline{1.26}$

$\boxed{T_d} = \dfrac{1}{\sqrt{4}\cdot\omega_o} = \dfrac{1}{2\cdot\omega_o} = \underline{0.314}$

6.

a) $H(z) = \dfrac{z^3}{z^4 - 0{,}5\,z^2 + 0{,}5\,z + 0{,}06} \triangleq \dfrac{b(z)}{a(z)}$

b) $a(z) = a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$

$\equiv z^4 - 0{,}5\,z^2 + 0{,}5\,z + 0{,}06$

Si applica il criterio di Jury

1) $a(1) > 0$, $1 - 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}06 = 1{,}06 > 0$ ok!

2) $(-1)^4 a(-1) > 0$, $1 - 0{,}5 - 0{,}5 + 0{,}06 = 0{,}06 > 0$ ok!

3) $|a_0| < a_4$, $0{,}06 < 1$ ok!

Tabella di Jury

1	0,06	0,5	−0,5	0	1
2	1	0	−0,5	0,5	0,06
3	−0,9964	0,03	0,47	−0,5	
4	−0,5	0,47	0,03	−0,9964	
5	0,7428	*	0,2051		

4) $|b_0| > |b_3|$ $\quad |-0{,}9964| > |-0{,}5|$ ok!

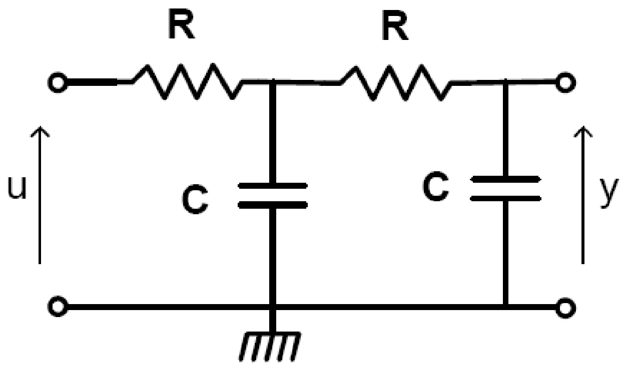
5) $|c_0| > |c_2|$ $\quad |0{,}7428| > |0{,}2051|$ ok!

Tutte le disuguaglianze sono soddisfatte: il sistema è asintoticamente stabile.

Parte A

1. [punti 4,5] Si presentino e si dimostrino le formule di inversione per la sintesi in frequenza delle reti correttrici. Si esponga inoltre come utilizzare tali formule per la sintesi della rete **anticipatrice** con imposizione del **margine di ampiezza** M_A**.**

2. [punti 4,5] La rete elettrica di figura definisce un sistema dinamico orientato da u (tensione all'ingresso) ad y (tensione all'uscita).

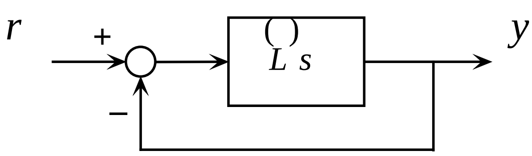


Di questo sistema si determini:
1. la funzione di trasferimento;
2. l'equazione differenziale;
3. gli zeri, i poli, i modi ed il guadagno statico.

3. [punti 4,5] Determinare l'evoluzione forzata $y(t)$ in risposta al gradino unitario $u(t)=1(t)$ di un sistema con funzione di trasferimento $G(s)=\dfrac{s-2}{(s+2)^3(s+1)}$.

Determinare inoltre il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$.

4. [punti 4,5] Sia dato il seguente sistema retroazionato



dove $L(s)=\dfrac{1}{(1+s)^8}$.

a) Tracciare il diagramma polare associato alla funzione di trasferimento $L(s)$ determinando in particolare tutte le intersezioni con l'asse reale.
b) Studiare la stabilità del sistema retroazionato utilizzando il Criterio di Nyquist.

Parte B

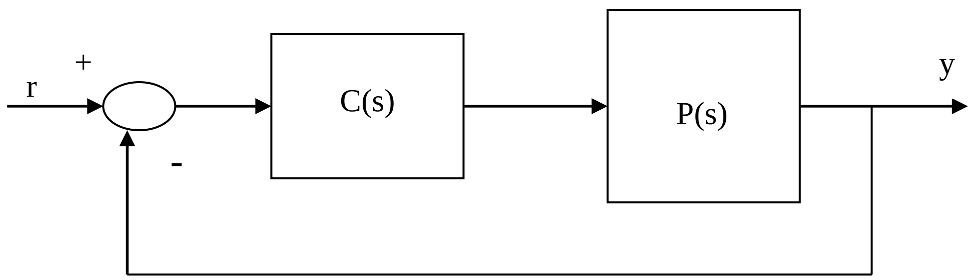
5. [punti 4,5]
a) Sia $x(k)$ un segnale a tempo discreto e $X(z)$ la sua trasformata zeta. Presenta e dimostra una relazione che esprime la derivata $\frac{dX}{dz}$.
b) Calcolare, riportando i passaggi algebrici necessari, la trasformata zeta della funzione armonica $\sin(\omega k)$, $k \in \mathbb{Z}$: $\mathcal{Z}\left[\sin(\omega k)\right]$.
Sia noto che $\mathcal{Z}\left[a^k\right] = \frac{z}{z-a}$.

6. [punti 4,5] Si tracci il luogo delle radici della seguente equazione caratteristica:

$$1 + K_1 \frac{(s-1)^2}{s^3(s+5)^2} = 0 \quad , \quad K_1 \in [0, +\infty)$$

determinando in particolare asintoti e radici doppie.

7. [punti 4,5] Si consideri il seguente sistema di controllo



dove $P(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$. Si progetti un controllore $C(s)$ proprio di ordine 2 affinché:

a) l'errore a regime in risposta ad un gradino di comando del set-point sia nullo.
b) La costante di velocità del sistema retroazionato K_v sia pari a 10 : $K_v = 10$.
c) I poli dominanti del sistema retroazionato siano -1 e -2 .

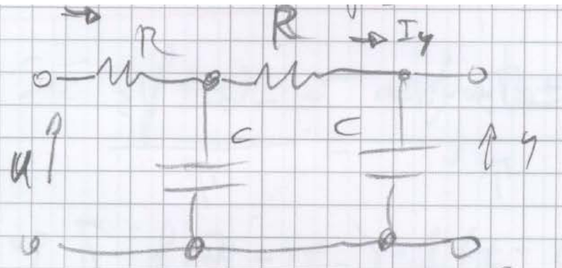
8. [punti 4,5] Determinare la risposta forzata $y(k)$ all'ingresso $u(k) = k \cdot 1(k)$ (rampa unitaria) di un sistema a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze

$$y(k) + y(k-1) + \frac{1}{4} y(k-2) = u(k) + 4u(k-1) + 4u(k-2) \ .$$

Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense dell'insegnamento.

2.



$$Z_t = R + \frac{\frac{1}{sC}\cdot\left(R+\frac{1}{sC}\right)}{\frac{1}{sC}+R+\frac{1}{sC}} = R + \frac{\frac{1}{sC}\cdot\left(R+\frac{1}{sC}\right)}{R+\frac{2}{sC}}$$

$$I = \frac{U}{Z_t} \qquad I_y = I\cdot\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{2}{sC}}$$

$$Y = \frac{1}{sC}\cdot I_y = \frac{1}{sC}\cdot\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{2}{sC}}\cdot I =$$

$$Y = \frac{1}{sC}\cdot\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{2}{sC}}\cdot\frac{U}{R+\frac{\frac{1}{sC}\left(R+\frac{1}{sC}\right)}{R+\frac{2}{sC}}} =$$

$$= \frac{1}{sC}\cdot\frac{\frac{1}{sC}\,U}{R^2+\frac{2R}{sC}+\frac{R}{sC}+\frac{1}{(sC)^2}} =$$

$$= \frac{U}{1+3R(sC)+R^2(sC)^2} = \frac{U}{(RC)^2 s^2+3RCs+1}$$

eq. diff. $(RC)^2 D^2 y + 3RC\, Dy + y = u$

zeri: assenti

poli $\quad T := RC \qquad T^2 s^2 + 3T s + 1 = 0$

$$p_{1,2} = \frac{-3T \pm \sqrt{9T^2 - 4T^2}}{T^2} =$$

$$= \frac{-3T \pm \sqrt{5}\cdot T}{T^2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{T}$$

$$\text{modi} = \left\{ e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{T}\cdot t},\ e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{T} t} \right\}$$

Guadagno statico: $G(0) = 1$

funzione di trasferimento $\quad (T := RC)$

$$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 3T s + 1}$$

Errata corrige: segnalo una svista nel calcolo dei poli. I due poli reali individuati vanno divisi per 2. Conseguentemente i due modi vanno corretti nei loro esponenti.

3.

$$Y(s) = \frac{s-2}{s(s+2)^3(s+1)}.$$

Dallo sviluppo in fratti semplici:

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+2)^3} + \frac{C}{(s+2)^2} + \frac{D}{s+2} + \frac{E}{s+1}$$

$$A = \left. \frac{s-2}{(s+2)^3(s+1)} \right|_{s=0} = -\frac{1}{4}$$

$$B = \left. \frac{s-2}{s(s+1)} \right|_{s=-2} = -2$$

$$E = \left. \frac{s-2}{s(s+2)^3} \right|_{s=-1} = 3$$

L'ordine relativo di Y(s) è maggiore di uno:

$$\Rightarrow A + D + E = 0 \Rightarrow D = -\frac{11}{4}$$

$$C = \left. \frac{d}{ds}\left[\frac{s-2}{s(s+1)} \right] \right|_{s=-2} = -\frac{5}{2}$$

Antitrasformando si ottiene:

$$y(t) = A + B\frac{1}{2}t^2 e^{-2t} + Cte^{-2t} + De^{-2t} + Ee^{-t} \quad \text{per} \ \ t \geq 0$$

$$y(t) = -\frac{1}{4} - t^2 e^{-2t} - \frac{5}{2}te^{-2t} - \frac{11}{4}e^{-2t} + 3e^{-t} \quad \text{per} \ \ t \geq 0$$

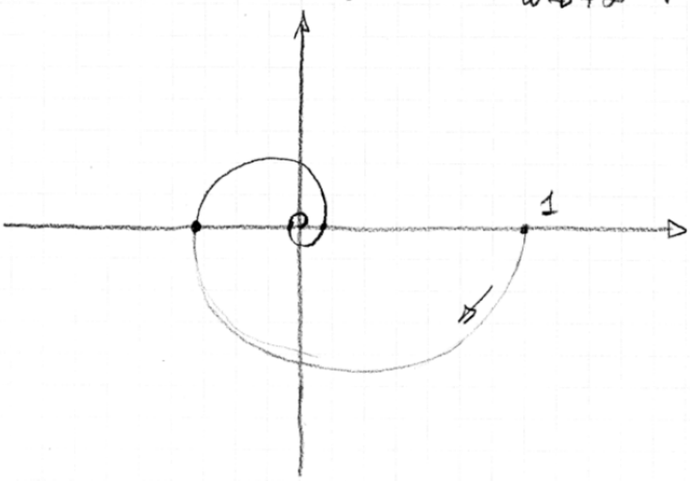
Il segnale in ingresso è discontinuo e $\rho = 3 \geq 1$, quindi $y(t) \in \overline{C^{\rho-1,\infty}}$, ovvero il grado massimo di continuità di $y(t)$ è 2.

4.

a) $L(s) = \dfrac{1}{(1+s)^8}$ $\qquad L(j\omega) = \dfrac{1}{(1+j\omega)^8}$

$$|L(j\omega)| = \frac{1}{(1+\omega^2)^4}$$

$\arg L(j\omega) = -8 \operatorname{arctg} \omega \qquad \lim_{\omega \to +\infty} \arg L(j\omega) = -4\pi$



$\arg L(j\omega_1) = -\pi \qquad -8 \operatorname{arctg} \omega_1 = -\pi \qquad \operatorname{arctg} \omega_1 = \dfrac{\pi}{8}$

$\omega_1 = 0{,}4142 \qquad |L(j\omega_1)| = 0{,}5308 \;,\; L(j\omega_1) = -0{,}5308$

$\arg L(j\omega_2) = -2\pi \qquad -8 \operatorname{arctg} \omega_2 = -2\pi \qquad \operatorname{arctg} \omega_2 = \dfrac{\pi}{4}$

$\omega_2 = 1 \qquad |L(j\omega_2)| = \dfrac{1}{16} = 0{,}0625 \;,\; L(j\omega_2) = 0{,}0625$

$\arg L(j\omega_3) = -3\pi \qquad -8 \operatorname{arctg} \omega_3 = -3\pi \qquad \operatorname{arctg} \omega_3 = \dfrac{3}{8}\pi$

$\omega_3 = 2{,}4142 \qquad |L(j\omega_3)| = 0{,}0004599$

$L(j\omega_3) = -0{,}0004599$

b) Il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto -1 e quindi per il Criterio di Nyquist il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. ($L(s)$ non ha poli a parte reale positiva).

5.
Vedi appunti dell'insegnamento

6.
Si nota che si ha:

- uno zero s=1 con molteplicità 2
- un polo s=0 con molteplicità 3
- un polo s=-5 con molteplicità 2

Essendo la $K_1 \in [0; +\infty)$ un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zero e di poli.

Essendo $n - m = 3$ il luogo delle radici presenta 3 asintoti.
Gli asintoti del luogo delle radici formano una stella di raggi con centro nel punto dell'asse reale di ascissa:

$$\sigma_a = \frac{1}{3}[-5-5-(1+1)] = -4$$

Gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli:

$$\theta_{a,0} = \frac{\pi}{3} \qquad \theta_{a,1} = \pi \quad \theta_{a,2} = \frac{5}{3}\pi$$

Per la determinazione delle radici doppie si ha:

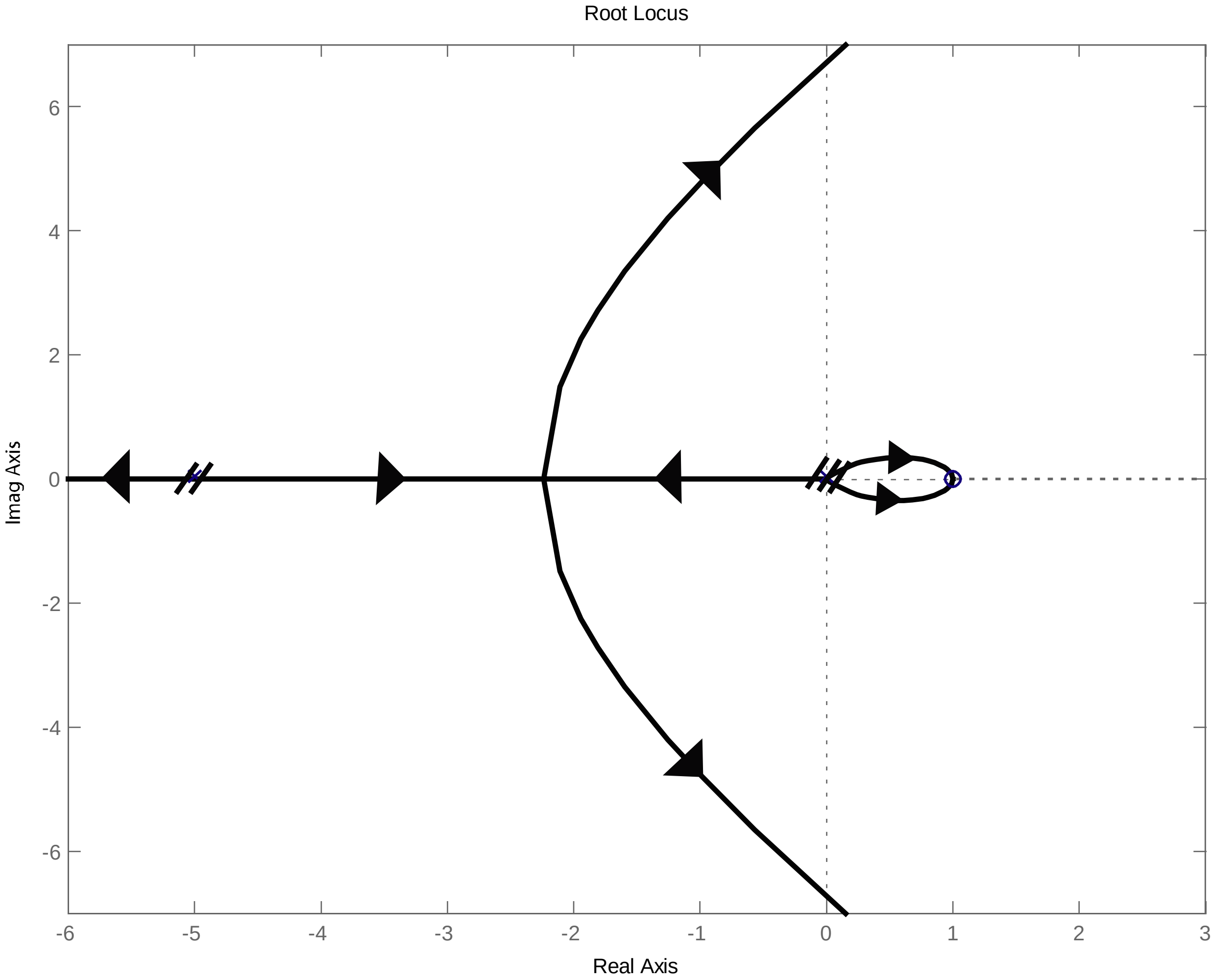
$$\frac{2}{s-1} - \frac{3}{s} - \frac{2}{s+5} = 0$$

Risolvendo l'equazione si ottiene:

$$3s^2 - 15 = 0 \Rightarrow s = \pm\sqrt{5} = \pm 2.236$$

Dalle considerazioni fatte sopra si osserva che solo $s = -2.236$ appartiene al luogo delle radici.

Di seguito è riportato il luogo delle radici.



7.
Scelta una funzione propria del secondo ordine per il controllore *C(s)* del tipo

$$C(s) = \frac{bs^2 + cs + d}{s(s+a)}$$

in modo che sia rispettata la specifica sull'errore a regime in risposta al gradino, il guadagno di anello risulta:

$$F(s) := \frac{bs^2 + cs + d}{s(s+a)} \cdot \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Dalla specifica su K_v si ricava

$$K_v = \lim_{s \to 0} sF(s) = \frac{d}{a} = 10.$$

Considerando l'equazione caratteristica:

$$1 + \frac{bs^2 + cs + d}{s(s+a)} \cdot \frac{1}{(s-1)^2} = 0$$

si ottiene il seguente polinomio caratteristico:

$$s^4 + (a-2)s^3 + (1-2a+b)s^2 + (a+c)s + d.$$

Il polinomio caratteristico desiderato può essere scelto come

$$(s+1)(s+2)(s+6)(s+e)=$$
$$s^4+(s+e)s^3+(9e+20)s^2+(20e+12)s+12e$$

Dal principio di identità dei polinomi e dalla specifica su K_v si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} a-2=9+e \\ 1-2a+b=9e+20 \\ a+c=20e+12 \\ d=12e \\ \dfrac{d}{a}=10 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} a=66 \\ b=646 \\ c=1046 \\ d=660 \\ e=55 \end{cases}$$

Si noti che il valore trovato per e fissa un ulteriore polo del sistema retroazionato in –55 e questo garantisce il rispetto della specifica sui poli dominanti.
Il controllore trovato è quindi:

$$C(s)=\frac{646s^2+1046s+660}{s(s+66)}$$

8.

$$\mathcal{Z}\left[k \cdot 1(k)\right] = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\mathcal{Z}\left[\binom{k}{n-1} a^{k-(n-1)} \cdot 1(k)\right] = \frac{z}{(z-a)^n}$$

$$H(z) = \frac{z^2 + 4z + 4}{z^2 + z + \frac{1}{4}} = \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$Y(z) = H(z)\,U(z) = \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} = z \cdot Y_1(z)$$

$$Y_1(z) = \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 (z-1)^2}$$

$$Y_1(z) = \frac{c_{11}}{(z-1)^2} + \frac{c_{12}}{z-1} + \frac{c_{21}}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{c_{22}}{z+\frac{1}{2}}$$

$$c_{11} = \left.\frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}\right|_{z=1} = \frac{3^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3^2}{\frac{3^2}{2^2}} = 4$$

$$c_{21} = \left.\frac{(z+2)^2}{(z-1)^2}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{\left(-\frac{1}{2}+2\right)^2}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{\left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\frac{3^2}{2^2}}{\frac{3^2}{2^2}} = 1$$

$$c_{12} + c_{22} = 0$$

$$C_{12} = \frac{d}{dz}\left[\frac{(z+2)^2}{(z+\frac{1}{2})^2}\right]_{|z=1} =$$

$$= \frac{2(z+2)(z+\frac{1}{2})^2 - (z+2)^2 2(z+\frac{1}{2})}{(z+\frac{1}{2})^4}\Big|_{z=1} =$$

$$= \frac{2\cdot 3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 - (3)^2\cdot 2\cdot\frac{3}{2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^4} =$$

$$= \frac{2\cdot 3\cdot\frac{3^2}{2^2} - 3^2\cdot 3}{\frac{3^4}{2^4}} = \frac{\frac{3^3}{2} - 3^3}{\frac{3^4}{2^4}} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{3}{2^4}} =$$

$$= \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)\cdot\frac{2^{\cancel{4}3}}{3} = -\frac{8}{3}$$

$$C_{22} = -C_{12} = \frac{8}{3}$$

$$Y(z) = 4\cdot\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{8}{3}\cdot\frac{z}{z-1} + \frac{z}{(z+\frac{1}{2})^2} + \frac{8}{3}\cdot\frac{z}{z+\frac{1}{2}}$$

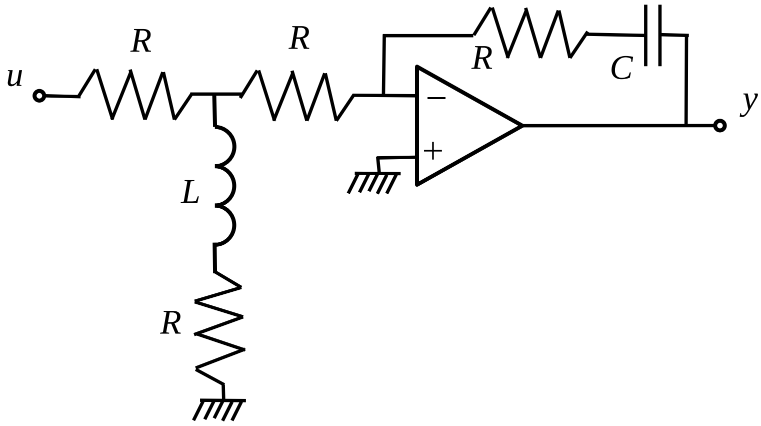
$$y(k) = 4k - \frac{8}{3} + k\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \frac{8}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= 4k - \frac{8}{3} + k\left(-\frac{1}{2}\right)^k\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} + \frac{8}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k =$$

$$= 4k - \frac{8}{3} - 2k\left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{8}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

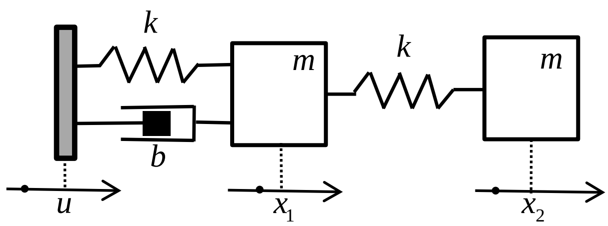
Parte A

1. [punti 6] L'amplificatore operazionale di figura definisce un sistema dinamico orientato da u (tensione all'ingresso) ad y (tensione all'uscita).



Di questo sistema si determini:
1. la funzione di trasferimento.
2. gli zeri e i modi.
3. l'equazione differenziale.

2. [punti 6] Un azionamento elettrico lineare che può imporre una posizione desiderata u viene utilizzato per movimentare due masse su di una guida rettilinea (vedi figura). Negli accoppiamenti fra le masse e con l'azionamento elettrico si considerino molle ideali con costante elastica k ed un ammortizzatore con coefficiente viscoso b. Le posizioni delle due masse sono descritte dalle variabili x_1 e x_2. Si vuole studiare la dinamica del sistema meccanico orientato da u (ingresso) ad x_2 (uscita) ipotizzando che in condizioni di quiete si abbia $u = 0$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. Di questo sistema si determini: 1) l'equazione differenziale e 2) la funzione di trasferimento.



Parte B

3. [punti 6] Dato un sistema dinamico con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad \omega_n > 0,\ \delta \in (0,1)$$

sia nota la risposta al gradino unitario

$$g_s(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta\omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} \cdot t + \varphi\right),\ \varphi := \arccos(\delta)\ .$$

Dedurre la formula che esprime la sovraelongazione S in funzione del coefficiente di smorzamento del sistema.

4. [punti 6] Dimostrare le seguenti proprietà della trasformata di Laplace:

1. $L[Df(t)] = sF(s) - f(0+)$;
2. $L\left[\int_0^t f(v)dv\right] = \frac{1}{s}F(s)$;
3. $L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$.

Parte C

5. [punti 6] Sia dato un sistema dinamico con funzione di trasferimento $G(s)=\dfrac{1}{s+1}$. Per $t<0$ i segnali di ingresso e uscita siano rispettivamente $u(t)=\sin(t)$ e $y(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

1) Verificare che la coppia $\left(\sin(t),\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ appartenga al behavior del sistema.

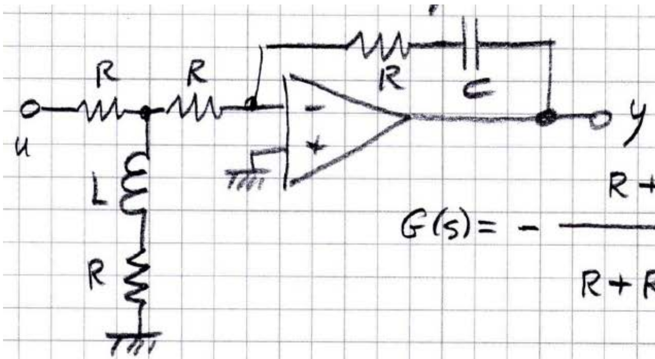
2) Per $t\geq 0$ l'ingresso diventa identicamente nullo: $u(t)=0$. Determinare la corrispondente uscita $y(t)$ per $t\geq 0$.

3) Stabilire il grado massimo di continuità del segnale d'uscita $y(t)$ su $(-\infty,+\infty)$.

6. [punti 6] Dato un sistema con funzione di trasferimento $G(s)=\dfrac{s+1}{(s+2)[(s+1)^2+4]}$ determinare la risposta forzata $y(t)$, $t\geq 0$ al segnale di ingresso $u(t)=t\cdot 1(t)$.

Tracce delle soluzioni

1.



1. f.d.t. $G(s) = -\dfrac{Z_f}{Z_{i,t}}$

$$G(s) = -\frac{R + \frac{1}{Cs}}{R + R + \frac{R^2}{Ls+R}} = -\frac{\frac{RCs+1}{Cs}}{\frac{2RLs+2R^2+R^2}{Ls+R}}$$

$$G(s) = -\frac{RCs+1}{Cs} \cdot \frac{Ls+R}{2RLs+3R^2} = -\frac{(RCs+1)(Ls+R)}{RC \cdot s \cdot (2Ls+3R)}$$

2. zeri: $z_1 = -\dfrac{1}{RC}$, $z_2 = -\dfrac{R}{L}$

poli: $p_1 = 0$, $p_2 = -\dfrac{3R}{2L} = -\dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{R}{L}$

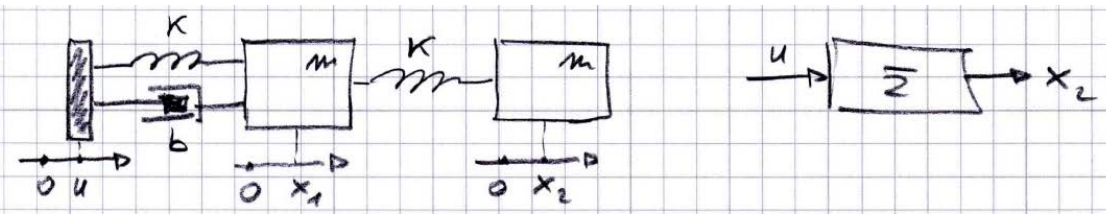
modi $= \left\{ 1, \exp\left\{ -\frac{3}{2} \cdot \frac{R}{L} t \right\} \right\}$

3. $$G(s) = -\frac{RCLs^2 + R^2Cs + Ls + R}{2RCL \cdot s^2 + 3R^2C \cdot s} = -\frac{RCLs^2 + (R^2C+L)s + R}{2RCL \cdot s^2 + 3R^2C \cdot s}$$

eq. diff. $2RCL\, D^2 y(t) + 3R^2C\, Dy(t) =$

$= -RCL\, D^2 u(t) - (R^2C+L)\, Du(t) - R\, u(t)$

2



$$\begin{cases} m D^2 x_1 = -k(x_1 - u) - b(D x_1 - D u) + k(x_2 - x_1) \\ m D^2 x_2 = -k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = -k x_1 + k u - b D x_1 + b D u + k x_2 - k x_1 \\ m D^2 x_2 = -k x_2 + k x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m D^2 x_1 + b D x_1 + 2k x_1 = k x_2 + b D u + k u \\ k x_1 = m D^2 x_2 + k x_2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} k \\ (mD^2 + bD + 2k) \end{array} \begin{cases} (mD^2 + bD + 2k) x_1 = k x_2 + (bD + k) u \\ k x_1 = (mD^2 + k) x_2 \end{cases}$$

$$(mD^2 + bD + 2k)(mD^2 + k) x_2 = k^2 x_2 + k(bD + k) u$$

$$(m^2 D^4 + km D^2 + bm D^3 + bk D + 2km D^2 + 2k^2 - k^2) x_2 = k(bD + k) u$$

$$\boxed{m^2 D^4 x_2 + bm D^3 x_2 + 3km D^2 x_2 + bk D x_2 + k^2 x_2 = kb D u + k^2 u}$$

f.d.t. $\boxed{G(s) = \dfrac{kbs + k^2}{m^2 s^4 + bm s^3 + 3km s^2 + bks + k^2}}$

3.
Vedi le dispense del corso.

4.
Vedi le dispense del corso.

5.

$G(s) = \frac{1}{s+1}$, $u(t) = \sin t$, $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$, $t<0$

eq. diff. $Dy(t) + y(t) = u(t)$

1) Per $t<0$:

$Dy(t)+y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos t \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \sin t \cdot \sin\frac{\pi}{4} \right]$

$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sin t \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \cos t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right]$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \right] + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t - \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t} \right]$

$= \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}\sin t = \sin t = u(t)$

2) Per qualsivoglia ingresso, $y(t) \in C^{\rho-1}$ dove ρ è il grado relativo del sistema. Nel nostro caso $\rho = 1$ e quindi $y \in C^0$.

$y(0^-) = y(0^+)$, $y(0^-) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

$y(t) = c\, e^{-t}$, $t \geq 0$ perché $u(t) = 0$ per $t \geq 0$.

$y(0^+) = c$, quindi $c = -\frac{1}{2}$

$y(t) = -\frac{1}{2} e^{-t}$, $t \geq 0$

3) $(u,y) \in \mathfrak{B}$ e $u(t)$ è continua su $\mathbb{R}$ ma non così la derivata prima di $u(t)$: $u \in \overline{C^0}$ (il grado massimo dell'ingresso è 0). Dalla proprietà $u \in \overline{C^\ell} \Leftrightarrow y \in \overline{C^{\rho+\ell}}$, $\ell \in \mathbb{N}$ segue che il grado massimo di continuità dell'uscita è 1.

6.

$$G(s)=\frac{s+1}{(s+2)\left[(s+1)^2+4\right]}\ ,\quad u(t)=t\,1(t)\ ,\quad U(s)=\frac{1}{s^2}$$

$$Y(s)=\frac{s+1}{s^2(s+2)\left[(s+1)^2+4\right]}=\frac{K_{11}}{s^2}+\frac{K_{12}}{s}+\frac{K_2}{s+2}+\frac{K_3}{s+1-j2}+\frac{\overline{K}_3}{s+1+j2}$$

$$K_{11}=\frac{s+1}{(s+2)\left[(s+1)^2+4\right]}\bigg|_{s=0}=\frac{1}{2\cdot 5}=\frac{1}{10}$$

$$K_2=\frac{s+1}{s^2\left[(s+1)^2+4\right]}\bigg|_{s=-2}=\frac{-1}{4\cdot[5]}=-\frac{1}{20}$$

$$K_3=\frac{s+1}{s^2(s+2)(s+1+j2)}\bigg|_{s=-1+j2}=\frac{\cancel{-1}+\cancel{j2}^{\,1}\cancel{+1}}{(-1+j2)^2(1+j2)(\cancel{j4}^{\,2})}=$$

$$=\frac{1}{(1-4-4j)(1+j2)\cdot 2}=\frac{1}{(-3-j4)(1+j2)\cdot 2}$$

$$=\frac{1}{(-3-j6-j4+8)\cdot 2}=\frac{1}{2(5-j10)}=\frac{1}{50}+j\frac{2}{50}$$

$$K_{12}+K_2+K_3+\overline{K}_3=0$$

$$K_{12}=\frac{1}{20}-\frac{1}{50}-\cancel{j\frac{2}{50}}-\frac{1}{50}+\cancel{j\frac{2}{50}}=\frac{1}{100}$$

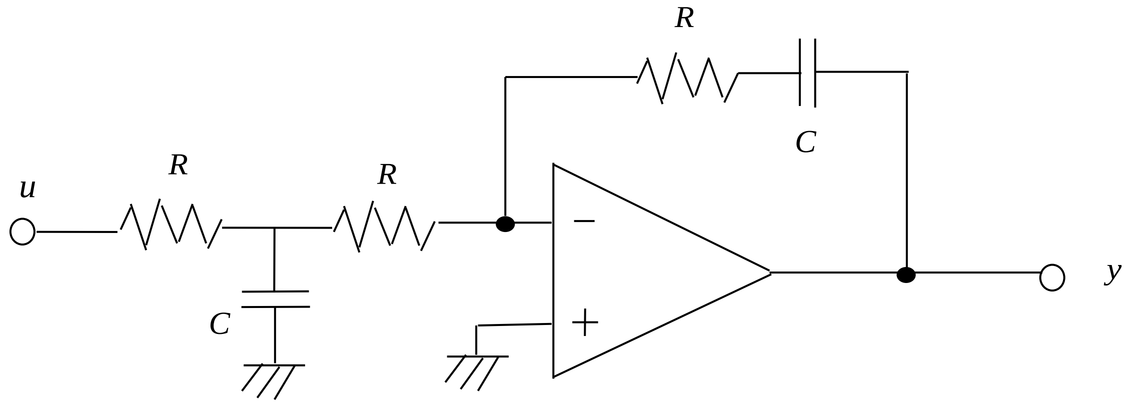
$$y(t)=\frac{1}{10}t+\frac{1}{100}-\frac{1}{20}e^{-2t}+2e^{-t}\left[\frac{1}{50}\cos(2t)-\frac{2}{50}\sin(2t)\right]$$

$$\boxed{y(t)=\frac{1}{100}+\frac{1}{10}t-\frac{1}{20}e^{-2t}+\frac{1}{25}e^{-t}\left[\cos(2t)-2\sin(2t)\right],\quad t\geq 0}$$

Parte A

1. [punti 4,5] Enunciare e dimostrare il teorema di analisi armonica per un sistema descritto da una funzione di trasferimento razionale.

2. [punti 4,5] Il seguente schema elettrico definisca un sistema dinamico Σ orientato da u (tensione di ingresso) ad y (tensione d'uscita).



Si assuma l'amplificatore operazionale come ideale e si introduca il parametro $T \triangleq RC$:

1. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema Σ.
2. Scrivere $G(s)$ nella forma standard con poli e zeri e disegnare la configurazione poli-zeri di Σ.
3. Determinare l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.

3. [punti 4,5] Dato un sistema di equazione $D^2y + 4Dy + 4y = D^2u + 2Du + u$ sia noto che per $t < 0$ ingresso ed uscita evolvono secondo le leggi: $u(t) = 2e^{-t}$, $y(t) = e^{-2t}$. All'istante $t = 0$ viene applicato il segnale $u(t) = 10,\ t \geq 0$:

1) verificare la correttezza dell'evoluzione del sistema per $t < 0$;
2) determinare l'uscita $y(t)$ del sistema per $t \geq 0$.

4. [punti 4,5] Presentare e dedurre la funzione di trasferimento a tempo discreto $P_d(z)$ di un sistema a tempo continuo $P(s)$ con all'ingresso un mantenitore D/A di ordine zero e all'uscita un campionatore A/D sincronizzati con periodo T.

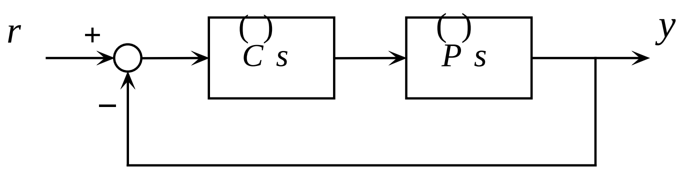
Parte B

5. [punti 4,5] Tracciare i diagrammi di Bode asintotici (diagramma dei moduli e diagramma delle fasi della risposta armonica) associati alla funzione di trasferimento $G(s)=40\dfrac{s+5}{(s+1)(s+20)}$. Suggerimenti:

i) per una decade delle pulsazioni si assegnino 10 quadretti del foglio protocollo;

ii) si riportano per comodità dello studente i logaritmi in base 10 degli interi da 2 a 9: $\log_{10}2\cong 0,30$, $\log_{10}3\cong 0,48$, $\log_{10}4\cong 0,60$, $\log_{10}5\cong 0,70$, $\log_{10}6\cong 0,78$, $\log_{10}7\cong 0,85$, $\log_{10}8\cong 0,90$, $\log_{10}9\cong 0,95$.

6. [punti 4,5] Sia dato il sistema in retroazione di figura dove $P(s)=\dfrac{1}{s\left[(s+2)^2+1\right]}$ e $C(s)=K\in\mathbb{R}$.



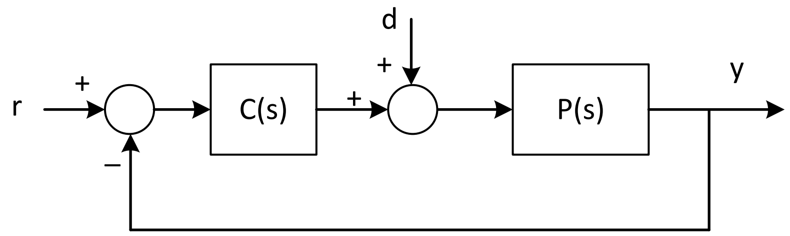
a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K>0$, determinando in particolare gli asintoti, le radici doppie e gli angoli di partenza del luogo.

b. Determinare il guadagno ottimo K^* del controllore affinché il grado di stabilità del sistema retroazionato sia massimo $\left[K^*=\arg\max_{K\in\mathbb{R}} G_s(K)\right]$.

c. Per il controllore progettato al punto b precedente $C(s)=K^*$ determinare l'errore a regime e_r in risposta alla rampa $r(t)=5\cdot t\cdot 1(t)$.

d. Per il controllore progettato al punto b precedente $C(s)=K^*$ tracciare il diagramma polare associato al guadagno di anello $L(s):=C(s)P(s)$ determinando l'asintoto verticale del diagramma. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_A del sistema retroazionato.

7. [punti 4,5] Si consideri il sistema di controllo di figura



dove $P(s)=\dfrac{10}{(s+2)^2}$. Progettare un controllore $C(s)$ di ordine minimo affinché si abbia

1) reiezione asintotica infinita di un disturbo costante all'ingresso dell'impianto controllato;

2) sovraelongazione $S=0$ e tempo di assestamento $T_a\simeq 3$ sec. in risposta ad un gradino del riferimento (S e T_a da valutarsi in assenza di disturbo all'ingresso dell'impianto).

Con il controllore così progettato si determinino:

a) il margine di ampiezza M_A e quello di fase M_F del sistema retroazionato;

b) l'errore a regime e_∞ in risposta ad un gradino del riferimento.

8. [punti 4,5] Dato il sistema a tempo discreto definito dall'equazione

$$y(k)+0.5y(k-1)+0.5y(k-2)+0.5y(k-3)=u(k-3)$$

ed orientato da $u(k)$ (ingresso) a $y(k)$ (uscita) se ne studi la stabilità alle perturbazioni.

Tracce delle soluzioni

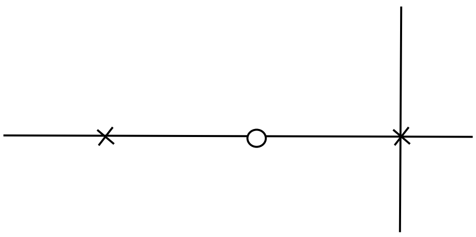
1.
vedi dispense del corso.

2.
1.

$$G(s) = -\frac{Z_f}{Z_{t,i}} = -\frac{R + \dfrac{1}{sC}}{2R + \dfrac{R^2}{\dfrac{1}{sC}}} = -\frac{1 + RCs}{2RCs + R^2C^2s^2} = -\frac{1 + Ts}{Ts(2 + Ts)}$$

2.

$$G(s) = \left(-\frac{1}{T}\right)\frac{s + \dfrac{1}{T}}{s\left(s + \dfrac{2}{T}\right)} \qquad \text{zeri: } z_1 = -\frac{1}{T}\ ;\quad \text{poli: } p_1 = 0\ ,\ p_2 = -\frac{2}{T}$$



3. $G(s) = \dfrac{-s - \dfrac{1}{T}}{Ts^2 + 2s} \qquad \Rightarrow \qquad TD^2y + 2Dy = -Du - \dfrac{1}{T}u$

3

1) $Du = -2e^{-t}$ $\quad D^2u = 2e^{-t}$ $\quad Dy = -2e^{-2t}$ $\quad D^2y = 4e^{-2t}$

$4e^{-2t} + 4(-2e^{-2t}) + 4(e^{-2t}) =$

$= 2e^{-t} + 2(-2e^{-t}) + 2e^{-t}$ $\quad$ OK! vero $\forall t < 0$

2) determinazione delle condizioni iniziali al tempo $t = 0-$.

$$y(t) = e^{-2t} \Rightarrow y(0-) = 1$$

$$Dy = -2e^{-2t} \Rightarrow Dy(0-) = -2$$

$$u(t) = 2e^{-t} \Rightarrow u(0-) = 2$$

$$Du(t) = -2e^{-t} \Rightarrow Du(0-) = -2$$

$$s^2 Y(s) - sy(0-) - Dy(0-) + 4\big(sY(s) - y(0-)\big) + 4Y(s) =$$

$$= s^2 U(s) - s\,u(0-) - Du(0-) + 2\big(sU(s) - u(0-)\big) + U(s)$$

$$s^2 Y(s) - s + 2 + 4\big(sY(s) - 1\big) + 4Y(s) =$$

$$= s^2 U(s) - 2s + 2 + 2\big(sU(s) - 2\big) + U(s)$$

$$(s^2 + 4s + 4)\,Y(s) - s - \cancel{2} =$$

$$= (s^2 + 2s + 1)\,U(s) - 2s - \cancel{2}$$

$$(s^2 + 4s + 4)\,Y(s) = (s^2 + 2s + 1)\,U(s) - s$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 + 4s + 4}\,U(s) - \frac{s}{s^2 + 4s + 4}$$

$$Y(s) = \frac{(s+1)^2}{(s+2)^2} \cdot \frac{10}{s} - \frac{s}{(s+2)^2}$$

$$= \frac{10(s+1)^2 - s^2}{s(s+2)^2} =$$

$$= \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{(s+2)^2} + \frac{K_{22}}{s+2}$$

$$K_1 = \left. \frac{10(s+1)^2 - s^2}{(s+2)^2} \right|_{s=0} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$K_{21} = \left. \frac{10(s+1)^2 - s^2}{s} \right|_{s=-2} = \frac{10-4}{-2} = -3$$

$$K_1 + K_{22} = 9 \implies K_{22} = 9 - \frac{5}{2} = \frac{18-5}{2} = \frac{13}{2}$$

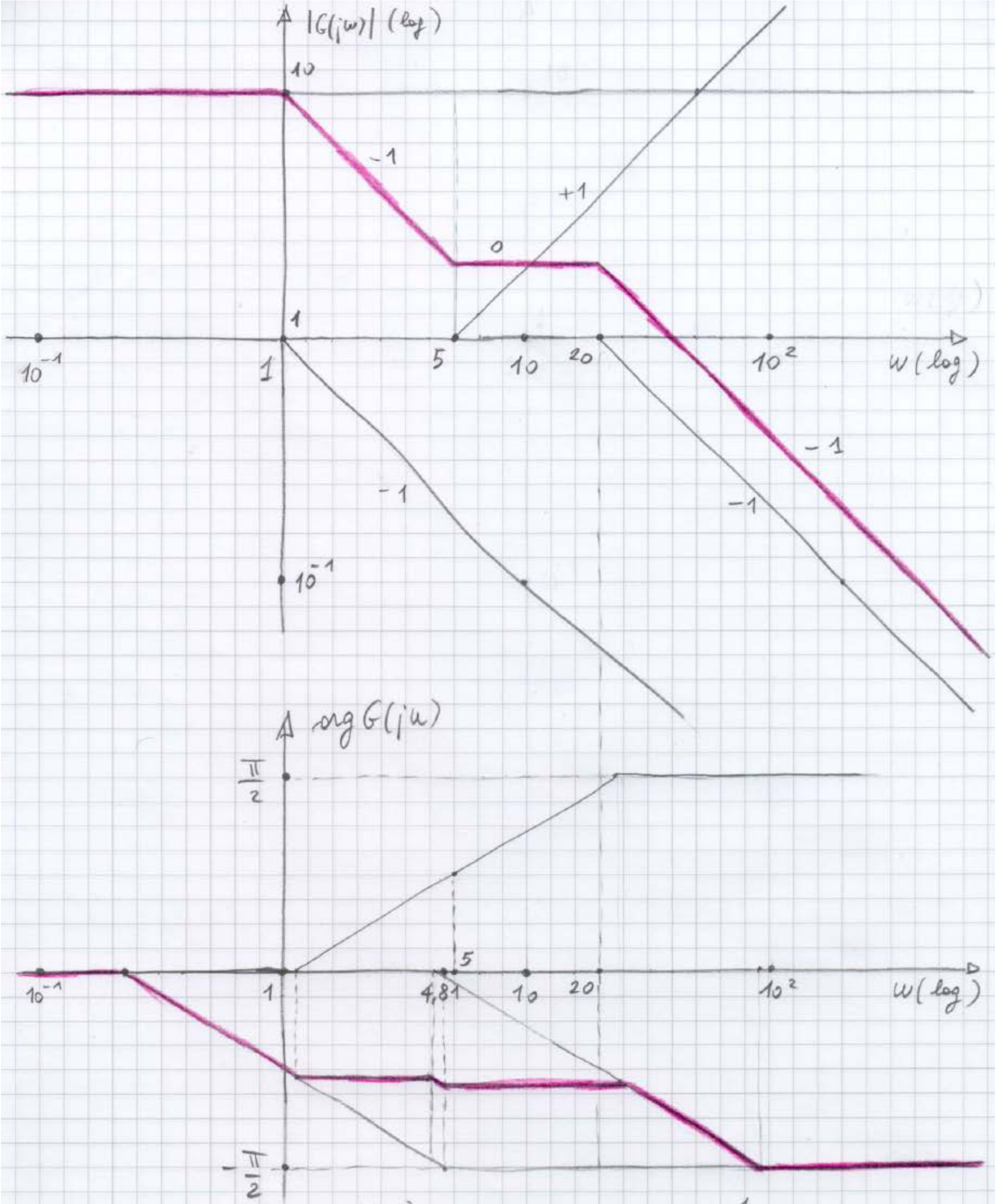
(OK! verificato con altro metodo)

$$Y(s) = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{s} - 3 \cdot \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{13}{2} \cdot \frac{1}{s+2}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{5}{2} - 3te^{-2t} + \frac{13}{2}e^{-2t}}$$

4.
Vedi dispense dell'insegnamento.

5.



$$G(s) = 40\,\frac{5\left(1+\frac{1}{5}s\right)}{(1+s)\,20\left(1+\frac{1}{20}s\right)} = 10\,\frac{1+\frac{1}{5}s}{(1+s)\left(1+\frac{1}{20}s\right)}$$

$$G(j\omega) = 10\,\frac{1+\frac{1}{5}j\omega}{(1+j\omega)\left(1+\frac{1}{20}j\omega\right)}$$

6.

7

a. $1 + K \dfrac{1}{s\left[(s+2)^2+1\right]} = 0$, $K>0$, poli: 0, $-2 \pm j$

Sono presenti tre asintoti con angoli $+60°$, $+180°$, $-60°$ e centro in $\sigma_a = -\frac{4}{3} = -1,\bar{3}$.

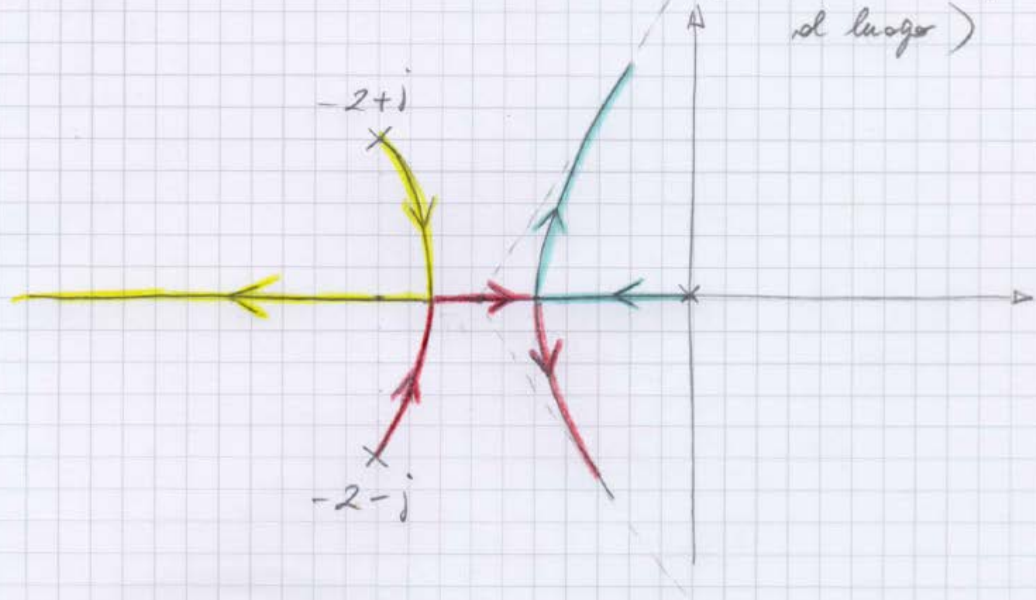
Il semiasse reale negativo appartiene al luogo. L'angolo di partenza dal polo 0 è $+180°$, l'angolo di partenza dal polo $-2+j$ è φ ∋

$$\varphi = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}\, 2\right) = -\mathrm{arctg}\, 2 = -63°{,}43$$

l'angolo di partenza dal polo $-2-j$ è $+63°{,}43$

Calcolo delle radici doppie: $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s+2+j} + \dfrac{1}{s+2-j} = 0$

da cui $3s^2+8s+5=0 \Rightarrow s_{1,2} = -1, -\frac{5}{3}$ (entrambi app. al luogo)



b. Dal luogo delle radici si evince che il guadagno ottimo K^* corrisponde alla radice doppia -1:

$$1 + K^* \frac{1}{s\left[(s+2)^2+1\right]}\Bigg|_{s=-1} = 0$$

$$\Rightarrow K^* = 2$$

c. $e_r = \dfrac{5}{K_r}$, $K_r = \lim\limits_{s\to 0} s \dfrac{K^*}{s\left[(s+2)^2+1\right]} = \dfrac{2}{5}$

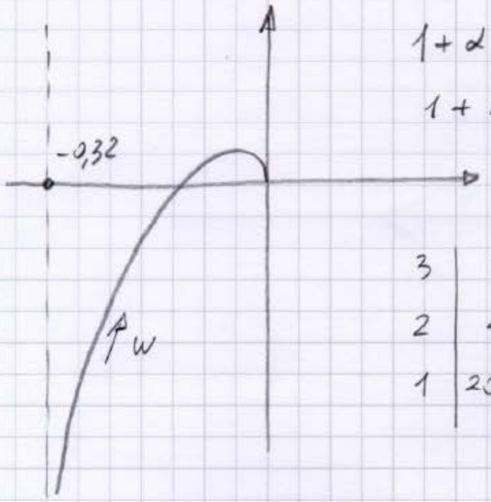
$$e_r = \frac{25}{2} = 12{,}5$$

d. $L(s) = \dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{s\left(1+\frac{4}{5}s+\frac{s^2}{5}\right)}$

$$L(j\omega) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{(j\omega)\left(1-\frac{\omega^2}{5}+j\frac{4}{5}\omega\right)}$$

$$\sigma_a = \frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{8}{25} = -0{,}32$$

$$\lim_{\omega\to+\infty} \arg L(j\omega) = -3\frac{\pi}{2}$$



$1+\alpha L(s) = 0$ abbia radici puram. immaginarie

$$1+\alpha\cdot\frac{2}{s\left[(s+2)^2+1\right]} = 0, \quad \beta \triangleq 2\alpha$$

$$s^3+4s^2+5s+\beta = 0$$

3	1	5	0
2	4	β	0
1	$20-\beta$	0	

$20-\beta = 0$ $\beta = 20$

$\Rightarrow \alpha = 10$

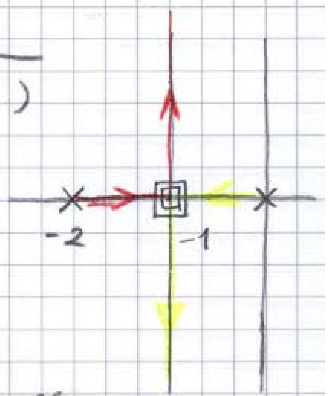
Intersezione in $-\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{10}$

$$\Rightarrow M_A = 10$$

7.

$C(s) = K\dfrac{s+\alpha}{s}$; α determinato con cancellazione polo-zero

$\alpha = 2 \Rightarrow L(s) = C(s)P(s) = K\dfrac{10}{s(s+2)}$



eq. caratteristica : $1 + K\dfrac{10}{s(s+2)} = 0$

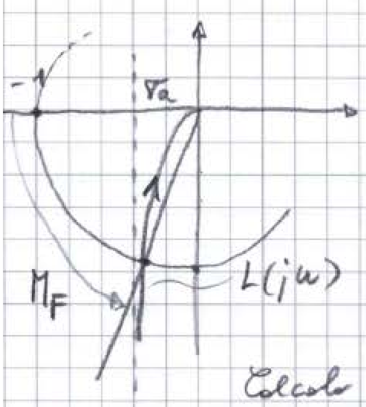
$T_a = \dfrac{3}{G_s}$, $T_a = 3 \Leftrightarrow G_s = 1$ rad/sec.

$G_s = 1$ quando il valore di K corrisponde alla radice doppia -1 :

$1 + K\dfrac{10}{(-1)\cdot(1)} = 0 \Rightarrow K = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$

$$\boxed{C(s) = 0{,}1\cdot\dfrac{s+2}{s}}$$

a) $L(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega(j\omega+2)} = \dfrac{0{,}5}{j\omega(1+0{,}5j\omega)}$



$M_A = +\infty$

$\sigma_a = 0{,}5\,(-0{,}5) = -0{,}25$

Calcolo approssimato di M_F : $0{,}25 = 1\cdot\cos M_F$

$M_F = \arccos 0{,}25 = 75{,}5°$

Calcolo esatto di M_F : $|L(j\omega)| = 1 \Rightarrow \omega = \sqrt{-2+\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \omega = 0{,}4859$ rad/sec è la pulsazione critica

$M_F = 180° + \arg L(j0{,}4859) = 180° - 90° - \operatorname{arctg}\dfrac{0{,}4859}{2}$

$= 90° - 13{,}66° = 76{,}34°$

b) $e_\infty = 0$ perché il sistema è di tipo 1.

Un approccio alternativo, più generale, per determinare il controllore è il seguente:

$$C(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s} \quad \text{(imposizione specifica 1)}$$

$T_a = 3$ sec. $\Rightarrow \sigma_s = 1$ rad./sec.
$\delta = 0$
$\Big\}$ imposizione specifica 2

Quindi il polinomio caratteristico desiderato può essere descritto come

$$P_d(s) = (s+1)(s^2 + \alpha s + \beta)$$

radici $s_{1,2}$ del polinomio $s^2 + \alpha s + \beta$: $Re\, s_{1,2} < -1$

Sia $z = s+1$, $s = z-1$, $Re\, s < -1 \Leftrightarrow Re\, z < 0$

$$(z-1)^2 + \alpha(z-1) + \beta = 0$$

$$z^2 + (\alpha - 2) z + \beta - \alpha + 1 = 0$$

Quindi $\begin{cases} \alpha - 2 > 0 \\ \beta - \alpha + 1 > 0 \end{cases}$

$$P_d(s) = s^3 + (\alpha+1)s^2 + (\alpha+\beta)s + \beta$$

$$1 + \frac{b_1 s + b_0}{s} \cdot \frac{10}{(s+2)^2} = 0$$

$$s(s+2)^2 + 10 b_1 s + 10 b_0 = 0$$

$$P_c(s) = s^3 + 4s^2 + (4 + 10 b_1)s + 10 b_0$$

Si impone $\quad P_d(s) \equiv P_c(s)$

$$\begin{cases} \alpha + 1 = 4 & \Rightarrow \alpha = 3 \quad \text{ok!} \quad \beta > 2 \\ \alpha + \beta = 4 + 10 b_1 & \quad\;\; \beta = 1 + 10 b_1 \\ \beta = 10 b_0 & \quad\;\; \beta = 10 b_0 \end{cases}$$

I poli non dominanti sono $-1.5 \pm \frac{1}{2}\sqrt{9 - 4\beta}$

Scegliamo β : $9 - 4\beta = 0$, $\beta = \frac{9}{4}$ $(\beta > 2$ ok!$)$

$b_0 = \frac{9}{40} = 0.225 \qquad b_1 = \frac{5}{40} = 0.125 \qquad \boxed{C(s) = \frac{0.125 \cdot s + 0.225}{s}}$

a) $L(s) = C(s)P(s) = \frac{9}{16} \cdot \frac{1+\frac{5}{9}s}{s\left(1+\frac{1}{2}s\right)^2}$

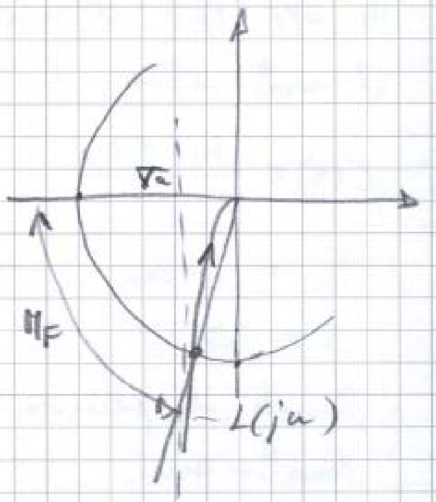
$L(j\omega) = \frac{9}{16} \cdot \frac{1+\frac{5}{9}j\omega}{j\omega\left(1+\frac{1}{2}j\omega\right)^2}$

$\sigma_a = \frac{9}{16}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \left(-\frac{5}{9}\right)\right) = -\frac{1}{4} = -0.25$

calcolo app. di M_F : $0{,}25 = 1 \cdot \cos M_F$

$M_F \simeq \arccos 0.25 = 75{,}5°$

$M_F = +\infty$



8.

La funzione di trasferimento del sistema a tempo discreto è

$$H(z) = \frac{1}{z^3 + 0.5\,z^2 + 0.5\,z + 0.5}$$

La stabilità alle perturbazioni è determinata dalle radici del polinomio $a(z) \triangleq z^3 + 0.5\,z^2 + 0.5\,z + 0.5$ per il quale si applica il Criterio di Jury

1) $a(1) > 0$ ok!

2) $(-1)^3\, a(-1) > 0$

$$(-1)\left(-1 + \cancel{0.5} - \cancel{0.5} + 0.5\right) > 0 \quad \text{ok!}$$

3) $|a_0| < a_n$

$$|0.5| < 1 \quad \text{ok!}$$

4) $|b_0| > |b_{n-1}|$

1	0.5	0.5	0.5	1
2	1	0.5	0.5	0.5
3	-0.75	*	-0.25	

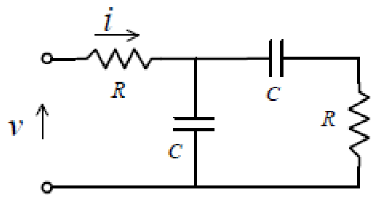
$$|-0.75| > |-0.25| \quad \text{ok!}$$

Il sistema è asintoticamente stabile.

Parte A

1. [punti 4,5] Si presentino e si dimostrino le formule di inversione per la sintesi in frequenza delle reti correttrici. Si esponga inoltre come utilizzare tali formule per la sintesi della rete **anticipatrice** con imposizione del **margine di fase** M_F .

2. [punti 4,5] La rete elettrica di figura definisca un sistema dinamico orientato dalla tensione v (ingresso) alla corrente i (uscita).



Di questo sistema si determini (con $T := RC$):
1) la funzione di trasferimento, 2) gli zeri, 3) i poli, 4) i modi, 5) il guadagno statico, 6) l'equazione differenziale.

3. [punti 4,5] Dato un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{1}{s+1}$, a partire da condizioni iniziali nulle, determinarne la risposta $y(t),\ t \in [0, +\infty)$ al segnale di ingresso così definito:

$$u(t) = \begin{cases} 1+2t & 0 \le t < 1 \\ t-1 & t \ge 1 \end{cases}$$

4. [punti 4,5] Presentare e dimostrare la formula di antitrasformazione zeta, ovvero l'espressione con l'integrale su curva chiusa del piano complesso che determina la sequenza a tempo discreto $x(k)$ nota che sia $X(z) \triangleq \mathcal{Z}[x(k)]$.

Parte B

5. [punti 4,5] Tracciare i diagrammi di Bode asintotici (diagramma dei moduli e diagramma delle fasi della risposta armonica) associati alla funzione di trasferimento

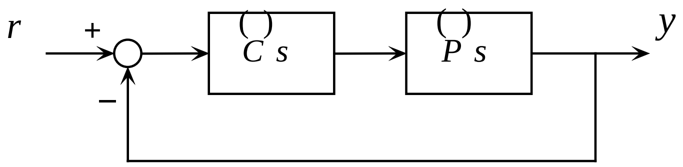
$$G(s) = 10^3 \frac{1-s}{(1+s)(s+10)^2}$$

Suggerimenti:

i) per una decade delle pulsazioni si assegnino 10 quadretti del foglio protocollo;

ii) si riportano per comodità dello studente i logaritmi in base 10 degli interi da 2 a 9: $\log_{10} 2 \cong 0,30$, $\log_{10} 3 \cong 0,48$, $\log_{10} 4 \cong 0,60$, $\log_{10} 5 \cong 0,70$, $\log_{10} 6 \cong 0,78$, $\log_{10} 7 \cong 0,85$, $\log_{10} 8 \cong 0,90$, $\log_{10} 9 \cong 0,95$.

6. [punti 4,5] Sia dato il sistema in retroazione di figura dove $P(s) = \dfrac{1}{s\left[(s+2)^2+1\right]}$ e $C(s) = K \in \mathbb{R}$.



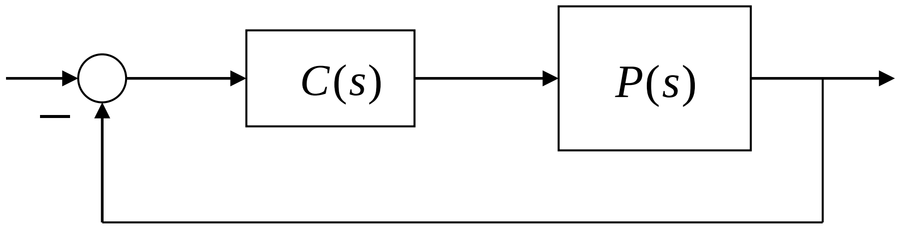
a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K > 0$, determinando in particolare gli asintoti, le radici doppie e gli angoli di partenza del luogo.

b. Determinare il guadagno ottimo K^* del controllore affinché il grado di stabilità del sistema retroazionato sia massimo $\left[K^* = \arg\max_{K\in\mathbb{R}} G_s(K)\right]$.

c. Per il controllore progettato al punto b precedente $C(s) = K^*$ determinare l'errore a regime e_r in risposta alla rampa $r(t) = 5 \cdot t \cdot 1(t)$.

d. Per il controllore progettato al punto b precedente $C(s) = K^*$ tracciare il diagramma polare associato al guadagno di anello $L(s) := C(s)P(s)$ determinando l'asintoto verticale del diagramma. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_A del sistema retroazionato.

7. [punti 4,5] Sia dato il sistema retroazionato di figura



dove $P(s) = \dfrac{1}{s(s+2)(s+4)}$ e $C(s) = K \in \mathbb{R}$ è un controllore proporzionale.

1. Determinare i valori di K per i quali è assicurata la stabilità asintotica del sistema retroazionato.
2. Determinare i valori di K per i quali il sistema retroazionato ammette $G_S \geq 0,2\ \text{s}^{-1}$ ($G_S \equiv$ grado di stabilità nel piano complesso).

8. [punti 4,5] Determinare la risposta forzata $y(k)$ all'ingresso $u(k) = 1(k)$ (gradino unitario) di un sistema a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze

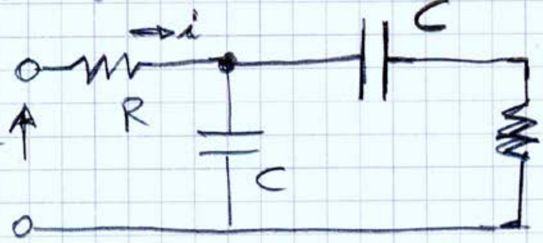
$$y(k) + y(k-1) + \frac{1}{4} y(k-2) = u(k) + 4u(k-1) + 4u(k-2)\ .$$

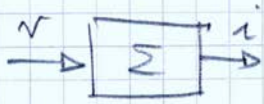
Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

2.

1) Circuito elettrico





$T := RC$

$$V = Z_{tot}\, I \qquad I = \frac{1}{Z_{tot}}\, V$$

$$\text{f.d.t.} \equiv G(s) = \frac{1}{Z_{tot}}$$

$$Z_{tot} = R + \frac{\frac{1}{Cs}\left(\frac{1}{Cs}+R\right)}{\frac{1}{Cs}+\frac{1}{Cs}+R} = R + \frac{\frac{1}{Cs}\cdot\frac{1+RCs}{Cs}}{\frac{2}{Cs}+R} =$$

$$= R + \frac{\frac{1+RCs}{(Cs)^2}}{\frac{2+RCs}{Cs}} = R + \frac{\frac{1+RCs}{Cs}}{2+RCs} =$$

$$= R + \frac{1+RCs}{Cs(2+RCs)} = \frac{RCs(2+RCs)+1+RCs}{Cs(2+RCs)} =$$

$$= \frac{2RCs+(RC)^2s^2+RCs+1}{Cs(RCs+2)} = \frac{(RC)^2s^2+3RCs+1}{Cs(RCs+2)}$$

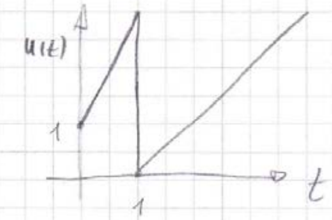
$$G(s) = \frac{Cs(RCs+2)}{(RC)^2s^2+3RCs+1} = \frac{Cs(Ts+2)}{T^2s^2+3Ts+1}$$

zeri: $z_1 = 0$, $z_2 = -\frac{2}{RC}$ poli: $p_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2T}$, $p_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2T}$

modi: $\left\{ \exp\left\{-\frac{3+\sqrt{5}}{2T}t\right\}, \exp\left\{-\frac{3-\sqrt{5}}{2T}t\right\}\right\}$, guadagno statico $G(0)=0$

eq. diff. $T^2D^2i(t) + 3TDi(t) + i(t) = CTD^2v(t) + 2CDv(t)$

3.



$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$u(t) = \begin{cases} 1+2t & t \in [0, 1) \\ t-1 & t \geqslant 1 \end{cases}$$

1° metodo

$$u(t) = 1+2t - (1+2t)\,1(t-1) + (t-1)\cdot 1(t-1)$$
$$= 1+2t - (t+2)\,1(t-1) = 1+2t - \left[(t-1)+3\right] 1(t-1)$$

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \qquad u(t) = 1 + 2t - [(t-1) + 3]\cdot 1(t-1)$$

$$U(s) = \frac{1}{s} + 2\cdot\frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + 3\cdot\frac{1}{s}\right)$$

$$= \frac{s+2}{s^2} - e^{-s}\cdot\frac{1+3s}{s^2}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s+1}\cdot\frac{s+2}{s^2} - e^{-s}\cdot\frac{1+3s}{s^2}\cdot\frac{1}{s+1} =$$

$$= \frac{s+2}{s^2(s+1)} - e^{-s}\cdot\frac{1+3s}{s^2(s+1)}$$

$$\frac{s+2}{s^2(s+1)} = \frac{c_{11}}{s^2} + \frac{c_{12}}{s} + \frac{c_2}{s+1} = \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

$$c_{11} = \left.\frac{s+2}{s+1}\right|_{s=0} = 2 \qquad c_2 = \left.\frac{s+2}{s^2}\right|_{s=-1} = 1$$

$$c_{12} + c_2 = 0 \qquad c_{12} = -c_2 = -1$$

$$\frac{1+3s}{s^2(s+1)} = \frac{c_{11}}{s^2} + \frac{c_{12}}{s} + \frac{c_2}{s+1} = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1}$$

$$c_{11} = \left.\frac{1+3s}{s+1}\right|_{s=0} = 1 \qquad c_2 = \left.\frac{1+3s}{s^2}\right|_{s=-1} = -2$$

$$c_{12} + c_2 = 0 \qquad c_{12} = 2$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1}\right)\right] =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1}\right](t-1)\cdot 1(t-1)$$

$$= 2t - 1 + e^{-t} - \left[(t-1) + 2 - 2e^{-(t-1)}\right]\cdot 1(t-1)$$

Se $t \in [0,1)$ $\quad y(t) = 2t - 1 + e^{-t}$

Se $t \in [1, +\infty)$

$$y(t) = 2t - 1 + e^{-t} - \left[t - 1 + 2 - 2\cdot e^{-(t-1)}\right]$$

$$= t - 2 + e^{-t} + 2e^{-(t-1)}$$

$$= t - 2 + e^{-t}(1 + 2e)$$

2° metodo

Per $t \in [0, 1)$ $\quad u(t) = 1 + 2t$

$$U(s) = \frac{1}{s} + 2 \cdot \frac{1}{s^2} \qquad Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s+2}{s^2(s+1)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{s^2(s+1)}\right] = 2t - 1 + e^{-t}$$

Per $t \in [1, +\infty)$:

$$y(t) = y_{for.}(t) + y_{lib.}(t)$$

La risposta forzata è causata dall'ingresso $u(t) = t - 1$

La risposta libera è determinata dalla condizione iniziale $y(1-)$

$$y(1-) = 2t - 1 + e^{-t}\Big|_{t=1} = 1 + e^{-1}$$

eq. diff. $\quad Dy(t) + y(t) = u(t)$

Cambio di variabile : $\quad \tau = t - 1$

$$y(\tau) = y_{for.}(\tau) + y_{lib.}(\tau)$$

eq. diff. $\quad D^* y(\tau) + y(\tau) = u(\tau)$

$$sY(s) - y(0-) + Y(s) = U(s)$$

$$(s+1)Y(s) - y(0-) = U(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+1}U(s) + \frac{y(0-)}{s+1} = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{y(0-)}{s+1}$$

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{c_{11}}{s^2} + \frac{c_{12}}{s} + \frac{c_2}{s+1} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

$$c_{11} = \frac{1}{s+1}\Big|_{s=0} = 1 \qquad c_2 = \frac{1}{s^2}\Big|_{s=-1} = 1$$

$$c_{12} + c_2 = 0 \qquad c_{12} = -1$$

$$y(\tau) = \tau - 1 + e^{-\tau} + (1 + e^{-1}) \cdot e^{-\tau}$$

$$y(t) = t - 1 - 1 + e^{-(t-1)} + (1 + e^{-1})e^{-(t-1)}$$

$$= t - 2 + e^{-t} \cdot e + (1 + e^{-1})e^{-t} \cdot e = t - 2 + e^{-t} \cdot e + (e+1)e^{-t}$$

$$= t - 2 + e^{-t}(e + e + 1) = t - 2 + e^{-t}(1 + 2e)$$

3° metodo

Per $t \in [0, 1)$ $\quad u(t) = 1 + 2t$

$U(s) = \frac{1}{s} + 2 \cdot \frac{1}{s^2}$ $\quad Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s+2}{s^2(s+1)}$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{s^2(s+1)}\right] = 2t - 1 + e^{-t}$$

Per $t \in [1, +\infty)$

Si effettua il cambio di variabile $\tau = t - 1$

$u(\tau) = \tau \implies y(\tau) = y_{for.}(\tau) + y_{lib.}(\tau)$

$$Y_{for.}(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{c_{11}}{s^2} + \frac{c_{12}}{s} + \frac{c_2}{s+1}$$

$c_{11} = 1$, $\quad c_2 = 1$, $\quad c_{12} + c_2 = 0 \implies c_{12} = -1$

$y_{for.}(\tau) = \tau - 1 + e^{-\tau}$ $\qquad y_{lib.}(\tau) = c_3 e^{-\tau}$

$$y(\tau) \in C^0(\mathbb{R}) \implies y(\tau)\Big|_{\tau=0^-} = y(\tau)\Big|_{\tau=0^+}$$

$$y(\tau)\Big|_{\tau=0^-} = y(t)\Big|_{t=1^-} = 1 + e^{-1}$$

$$y(\tau)\Big|_{\tau=0^+} = -1 + 1 + c_3 = c_3$$

Quindi $\quad c_3 = 1 + e^{-1}$

$$y(\tau) = \tau - 1 + e^{-\tau} + (1 + e^{-1})e^{-\tau} = \tau - 1 + (2 + e^{-1})e^{-\tau}$$

Ritornando alla variabile t:

$$y(t) = t - 2 + (2 + e^{-1})e^{-(t-1)} = t - 2 + (1 + 2 \cdot e)e^{-t}$$

4.
Vedi appunti del corso.

5.

6

$$G(s) = 10^3 \frac{1-s}{(1+s)(s+10)^2}$$

$$G(s) = \frac{10^{\cancel{3}}(1-s)}{(1+s)\,\cancel{10^2}\left(1+\frac{1}{10}s\right)^2} =$$

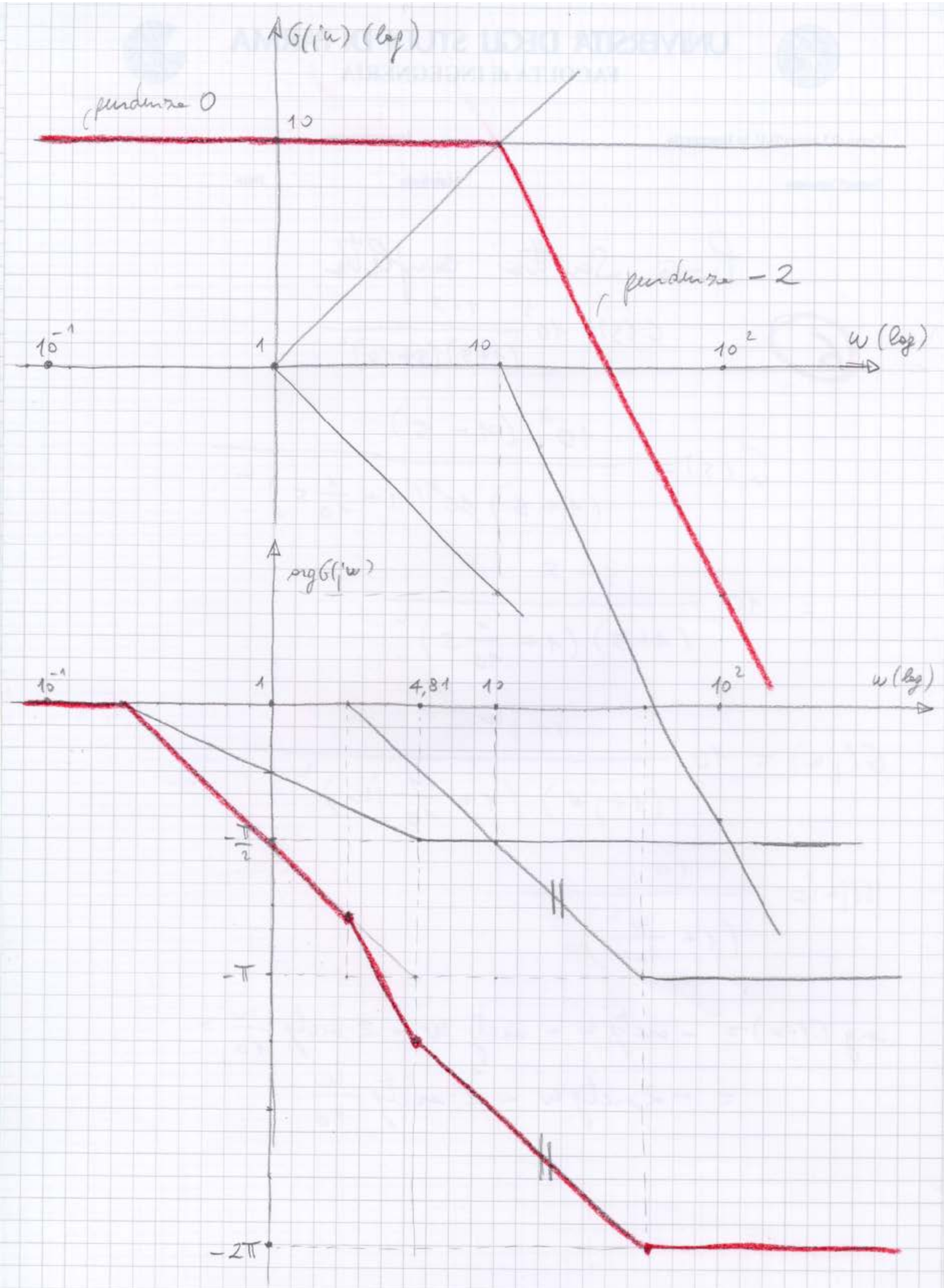
$$= 10\,\frac{1-s}{(1+s)\left(1+\frac{1}{10}s\right)^2}$$

$$G(j\omega) = 10\,\frac{1-j\omega}{(1+j\omega)\left(1+\frac{1}{10}j\omega\right)^2}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{10}{\left(1+\frac{\omega^2}{100}\right)}$$

$$\arg G(j\omega) = -\operatorname{arctg}\omega - \operatorname{arctg}\omega - 2\operatorname{arctg}\frac{\omega}{10} =$$

$$= -2\operatorname{arctg}\omega - 2\operatorname{arctg}\frac{\omega}{10}$$



G(jω) (log)
pendenza 0
10
pendenza −2
10^-1
1
10
10^2
ω (log)
arg G(jω)
10^-1
1
4,81
10
10^2
ω (log)
−π/2
−π
−2π

6.

7

a. $1 + K \dfrac{1}{s\left[(s+2)^2+1\right]} = 0$, $K>0$, poli: 0, $-2 \pm j$

Sono presenti tre asintoti con angoli $+60^\circ$, $+180^\circ$, -60° e centro in $\sigma_a = -\frac{4}{3} = -1,\bar{3}$.

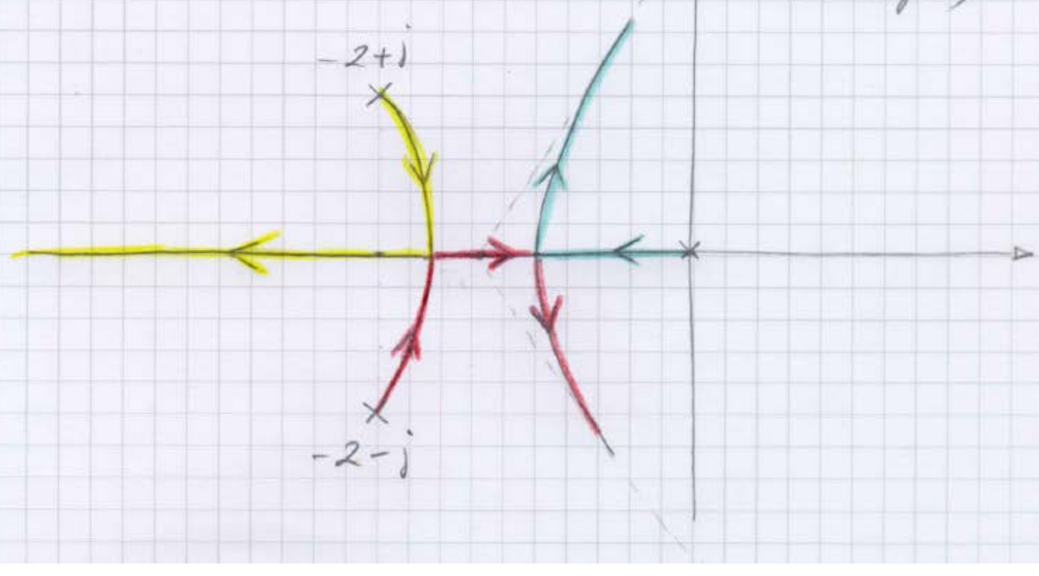
Il semiasse reale negativo appartiene al luogo. L'angolo di partenza dal polo 0 è $+180^\circ$, l'angolo di partenza dal polo $-2+j$ è φ:

$$\varphi = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}\, 2 \right) = -\mathrm{arctg}\, 2 = -63^\circ{,}43$$

l'angolo di partenza dal polo $-2-j$ è $+63^\circ{,}43$

Calcolo delle radici doppie: $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s+2+j} + \dfrac{1}{s+2-j} = 0$

da cui $3s^2 + 8s + 5 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -1, -\frac{5}{3}$ (entrambi app. al luogo)



b. Dal luogo delle radici si evince che il guadagno ottimo K^* corrisponde alla radice doppia -1:

$$1 + K^* \frac{1}{s\left[(s+2)^2+1\right]}\Bigg|_{s=-1} = 0$$

$$\Rightarrow K^* = 2$$

c. $e_r = \dfrac{5}{K_r}$, $K_r = \lim\limits_{s \to 0} s \dfrac{K^*}{s\left[(s+2)^2+1\right]} = \dfrac{2}{5}$

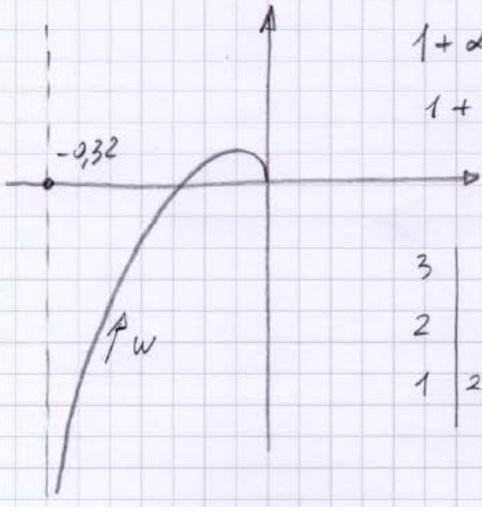
$$e_r = \frac{25}{2} = 12,5$$

d. $L(s) = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{s\left(1 + \frac{4}{5}s + \frac{s^2}{5}\right)}$

$$L(j\omega) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{(j\omega)\left(1 - \frac{\omega^2}{5} + j\frac{4}{5}\omega\right)}$$

$$\sigma_a = \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{8}{25} = -0,32$$

$$\lim_{\omega \to +\infty} \arg L(j\omega) = -3\frac{\pi}{2}$$



$1 + \alpha L(s) = 0$ abbia radici puram. immaginarie

$$1 + \alpha \cdot \frac{2}{s\left[(s+2)^2+1\right]} = 0, \quad \beta \triangleq 2\alpha$$

$$s^3 + 4s^2 + 5s + \beta = 0$$

3	1	5	0
2	4	β	0
1	$20-\beta$	0	

$20 - \beta = 0 \quad \beta = 20$

$\Rightarrow \alpha = 10$

Intersezione in $-\dfrac{1}{\alpha} = -\dfrac{1}{10}$

$$\Rightarrow M_A = 10$$

7. L'equazione caratteristica del sistema in retroazione è

$$s^3 + 6s^2 + 8s + k = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è:

3	1	8	0
2	6	k	0
1	48-k	0	
0	k		

Per la stabilità asintotica debbono valere le seguenti disequazioni:

$48 - k > 0$

$k > 0$

Il campo corrispondente alla stabilità asintotica asintotica del sistema è $k \in (0,\ 48)$.

1. Ricordando che il grado di stabilità (nel piano complesso) *Gs* di un sistema asintoticamente stabile è definito come

$G_s = -\max\{\operatorname{Re} p_1, \operatorname{Re} p_2, ..., \operatorname{Re} p_n\}$, i=1..n, dove i *pi* sono i poli del sistema

e rappresenta la distanza minima dei poli del sistema dall'asse immaginario, il problema può essere risolto effettuando la traslazione nel piano complesso $s = z - 0.2$.

Ponendo $s = z - 0.2$ si ottiene:

$$z^3 + 5.4z^2 + 5.72z - 1.368 + k = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è:

3	1	5.72	0
2	5.4	-1.368+k	0
1	30.888-(k-1.368)	0	
0	-1.368+k		

Per cui i valori di *k* per cui il sistema retroazionato ammette $G_s \geq 0.2s^{-1}$ sono quelli soddisfacenti il sistema di disequazioni:

$-1.368 + k > 0$

$30.888 - (k - 1.368) > 0$

cioè $k \in [1.368,\ 32.256]$.

8.

La funzione di trasferimento è $H(z) = \dfrac{z^2+4z+4}{z^2+z+\frac{1}{4}} = \dfrac{(z+2)^2}{(z+\frac{1}{2})^2}$

$$Y(z) = H(z)\,U(z) = \frac{(z+2)^2}{(z+\frac{1}{2})^2} \cdot \frac{z}{z-1} \triangleq z \cdot A(z)$$

$$A(z) = \frac{(z+2)^2}{(z-1)(z+\frac{1}{2})^2} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_{21}}{(z+\frac{1}{2})^2} + \frac{c_{22}}{z+\frac{1}{2}}$$

$$c_1 = \left.\frac{(z+2)^2}{(z+\frac{1}{2})^2}\right|_{z=1} = 4 \qquad c_{21} = \left.\frac{(z+2)^2}{z-1}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2}$$

$$c_1 + c_{22} = 1 \Rightarrow c_{22} = 1 - c_1 = 1 - 4 = -3$$

$$Y(z) = 4\frac{z}{z-1} - \frac{3}{2}\cdot\frac{z}{(z+\frac{1}{2})^2} - 3\frac{z}{z+\frac{1}{2}} \quad , k \geq 0$$

$$y(k) = 4 - \frac{3}{2}k\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^k =$$

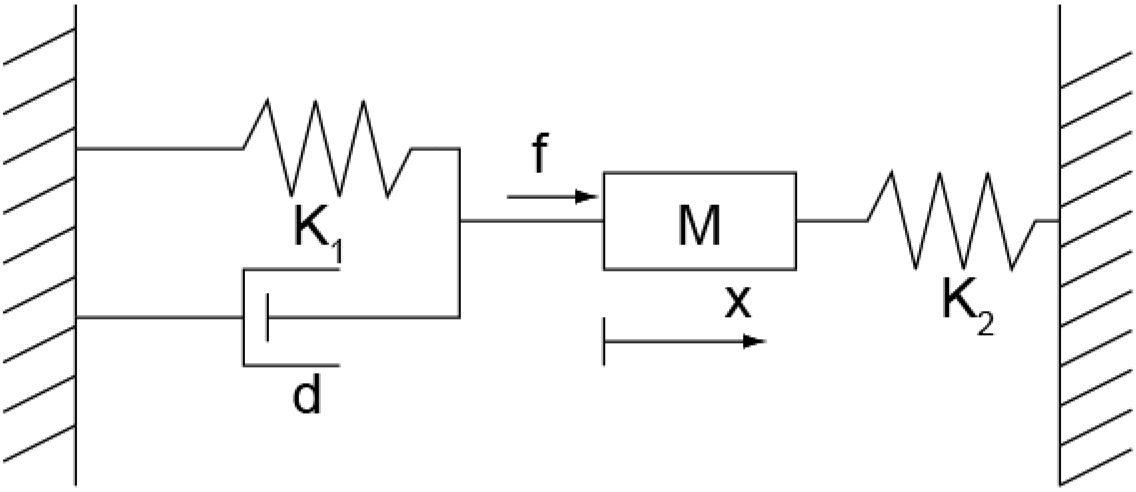
$$= 4 + 3k\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\boxed{y(k) = 4 + 3(k-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^k , k \geq 0}$$

Parte A

1. [punti 4,5] Enunciare il Criterio di Nyquist (sia il caso generale che quello particolare) avendo cura di definire i concetti e le premesse teoriche sui quali si basa. Riportare inoltre una dimostrazione di tale criterio.

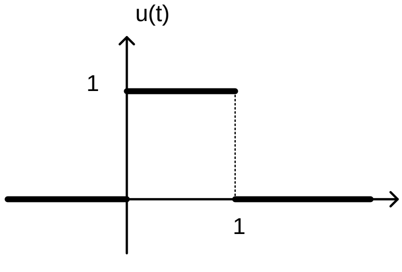
2. [punti 4,5] Sia dato il seguente sistema meccanico



dove x rappresenta la posizione della massa rispetto ad un sistema di riferimento orizzontale, scelto in modo tale che per x=0 il sistema si trovi in equilibrio, K_1 e K_2 sono le costanti delle due molle, d la constante dello smorzatore e f è una forza esterna agente sulla massa.

1) Determinare l'equazione differenziale che determina il moto della massa.
2) Determinare la funzione di trasferimento $P(s)$ tra la forza f e la posizione della massa x
3) Posto $m = 1\text{kg}$, $K_1 = K_2 = 5\text{N/m}$, $d = 2\text{Ns/m}$, tracciare i diagrammi di Bode (diagramma dei moduli e diagramma delle fasi) della risposta armonica di $P(s)$ e calcolare la pulsazione di risonanza del sistema.

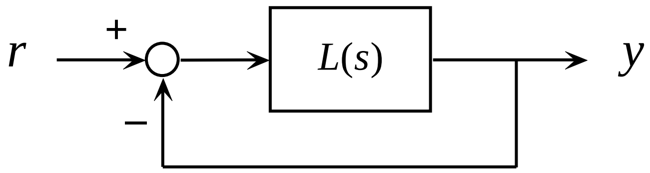
3. [punti 4,5] Dato un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{4}{(s+1)(s+2)}$ determinare la risposta forzata $y(t)$ al segnale di ingresso $u(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{per } t \ge 1 \end{cases}$ (vedi figura).



4. [punti 4,5] Data un generico segnale a tempo discreto $x(k)$, $k \in \mathbb{Z}$ determinare le trasformate zeta dei segnali ritardati e anticipati di n passi ($n \in \mathbb{N}$), $\mathcal{Z}[x(k-n)]$ e $\mathcal{Z}[x(k+n)]$.

Parte B

5. [punti 4,5] Sia dato il seguente sistema retroazionato



dove $L(s) = 16\dfrac{1-s}{(s+2)^4}$.

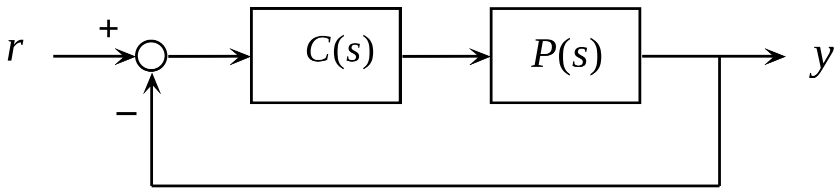
a) Tracciare il diagramma polare associato alla funzione di trasferimento $L(s)$ determinando in particolare l'intersezione con l'asse reale negativo.
b) Dimostrare mediante il criterio di Nyquist che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile e determinare il corrispondente margine di ampiezza M_A.

6. [punti 4,5] Si tracci il luogo delle radici della seguente equazione caratteristica:

$$1 + K_1 \frac{(s-1)^2}{s^3(s+5)^2} = 0 \quad , \quad K_1 \in [0, +\infty)$$

determinando in particolare asintoti e radici doppie.

7. [punti 4,5] Si consideri il seguente sistema di controllo



dove $P(s) = \dfrac{100(s+1)}{(s+2)^2(s+10)}$. Si chiede di progettare un controllore di struttura (rete ritardatrice)
$C(s) = K\dfrac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}$, $K \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0,1)$, $\tau > 0$ affinché:

a) l'errore a regime e_R in risposta ad un gradino unitario del set-point abbia valore assoluto pari a 0,02: $|e_R| = 0,02$.
b) Il margine di fase M_F sia pari a 50°: $M_F = 50^\circ$.

8. [punti 4,5] Determinare la risposta forzata $y(k)$ all'ingresso $u(k) = 1(k)$ (gradino unitario) di un sistema a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze

$$y(k) - \frac{1}{4}y(k-2) = u(k) + u(k-2) \ .$$

Tracce delle soluzioni

1.
vedi dispense del corso.

2.
L'equazione del sistema è

$$M\ddot{x} = -K_1 x - d\dot{x} - K_2 x + f$$

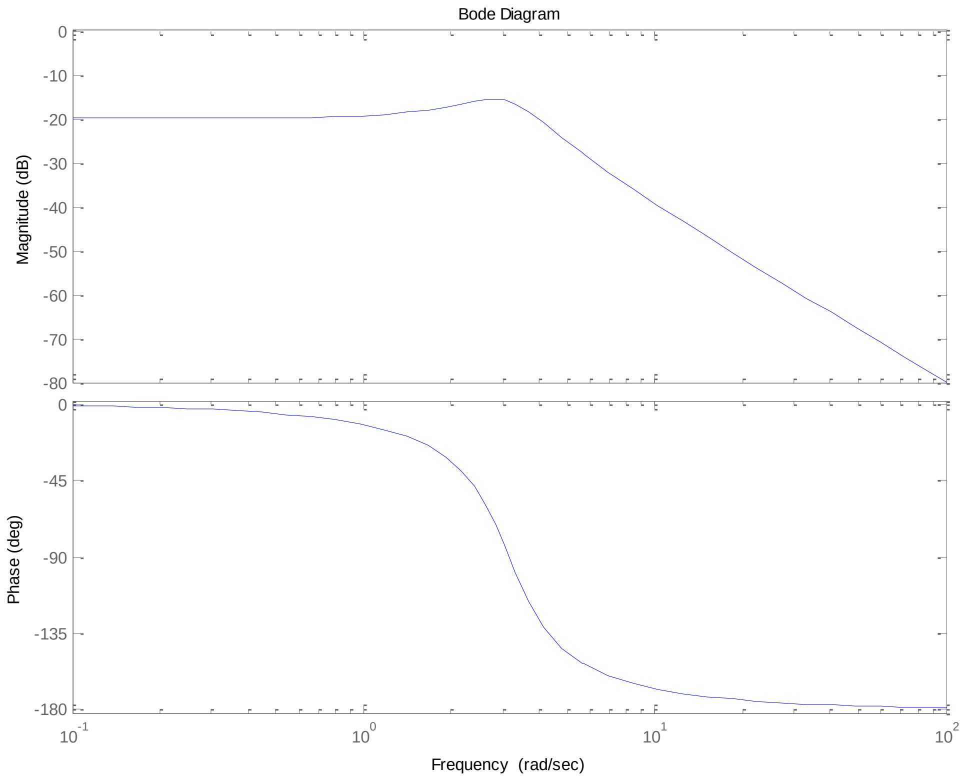
2)da cui la funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{1}{Ms^2 + ds + K_1 + K_2}$$

3)sostituendo i valori indicati otteniamo

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 10}$$

il diagramma di bode di questo sistema del secondo ordine è



$P(s)$ si può scrivere nella forma

$$P(s) = \frac{1}{10(\frac{s^2}{\omega_n{}^2} + \delta\frac{2s}{\omega_n} + 1)}$$

con $\omega_n = \sqrt{10}$ e $\delta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, la pulsazione di risonanza risulta

$$\omega_R = w_n\sqrt{1-2\delta^2} = \sqrt{10}\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \sqrt{8}\text{rad/s} \cong 2{,}828 \text{ rad/s}$$

3.

1° metodo :

Calcolo di $y(t)$ per $0 \le t < 1$:

$$u(t) = 1, \quad U(s) = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = G(s)U(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_3}{s+2};$$

$$k_1 = \left.\frac{4}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=0} = 2 \; ; \quad k_2 = \left.\frac{4}{s(s+2)}\right|_{s=-1} = -4 \; ; \quad k_3 = \left.\frac{4}{s(s+1)}\right|_{s=-2} = 2 \; ;$$

$$y(t) = 2 - 4e^{-t} + 2e^{-2t}$$

Calcolo di $y(t)$ per $t \ge 1$:

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

Considerato che $\rho = 2$ e $y \in \overline{C^{\rho-1,\infty}}(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad y \in \overline{C^{1,\infty}}(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(1-) = y(1+) \\ Dy(1-) = Dy(1+) \end{cases} ,$$

$Dy(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t}$ per $t \ge 1$; $\qquad Dy(t) = 4e^{-t} - 4e^{-2t}$ per $0 \le t < 1$

$$\begin{cases} 2 - 4e^{-1} + 2e^{-2} = c_1 e^{-1} + c_2 e^{-2} \\ 4e^{-1} - 4e^{-2} = -c_1 e^{-1} - 2c_2 e^{-2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 4e - 4 \; ; \; c_2 = 2 - 2e^2 \; ;$$

$$y(t) = 4(e-1) \cdot e^{-t} + 2(1 - e^2) \cdot e^{-2t}$$

2° metodo :

$$u(t) = 1(t) - 1(t-1),\quad U(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s}$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = G(s)U(s) = \frac{4}{(s+1)(s+2)}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s}\right]$$

$$Y(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+2)} - \frac{4}{s(s+1)(s+2)}e^{-s}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s(s+1)(s+2)}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s(s+1)(s+2)}e^{-s}\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s(s+1)(s+2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s} - \frac{4}{s+1} + \frac{2}{s+2}\right] = 2 - 4e^{-t} + 2e^{-2t} \quad \text{per } t \geq 0$$

Digressione: dal teorema di traslazione nel tempo

$$\mathcal{L}\left[f(t-t_0)\cdot 1(t-t_0)\right] = e^{-t_0 s}F(s)\ ;\quad F(s) := \mathcal{L}\left[f(t)\right]$$

$$\Rightarrow f(t-t_0)\cdot 1(t-t_0) = \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-t_0 s}F(s)\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s(s+1)(s+2)}e^{-s}\right] = \left[2 - 4e^{-(t-1)} + 2e^{-2(t-1)}\right]\cdot 1(t-1) \quad \text{per } t \geq 0$$

$$y(t) = 2 - 4e^{-t} + 2e^{-2t} - \left[2 - 4e^{-(t-1)} + 2e^{-2(t-1)}\right]\cdot 1(t-1)$$

da cui per $0 \leq t < 1$: $y(t) = 2 - 4e^{-t} + 2e^{-2t}$

e per $t \geq 1$: $y(t) = 2 - 4e^{-t} + 2e^{-2t} - \left[2 - 4e^{-(t-1)} + 2e^{-2(t-1)}\right] =$

$$= (-4+4e)e^{-t} + (2-2e^2)e^{-2t}$$

4.

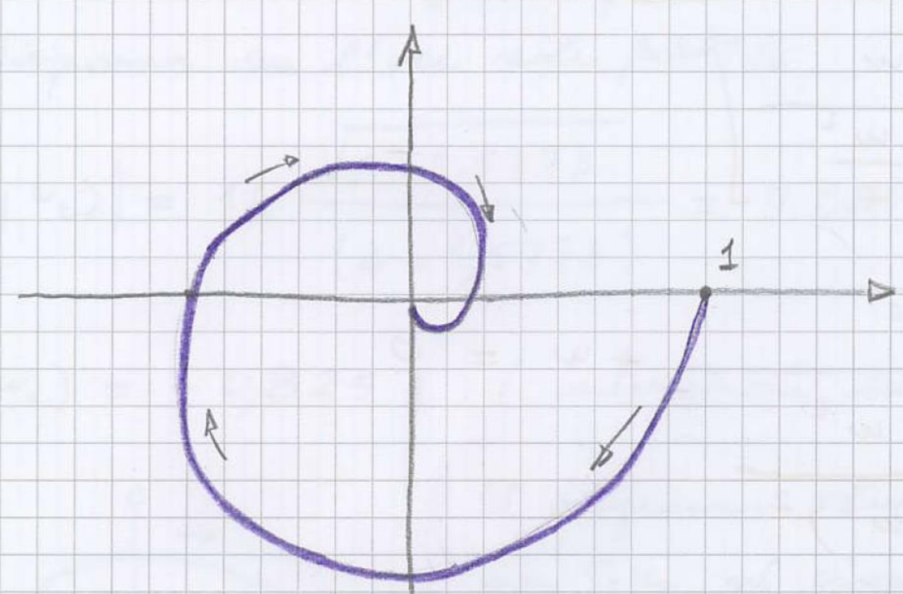
Vedi appunti del corso.

5.

a) $L(j\omega) = 16 \dfrac{1 - j\omega}{(j\omega + 2)^4}$; $L(j0) = 1$

$$|L(j\omega)| = 16 \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{(4+\omega^2)^2}$$

$$\arg L(j\omega) = -4 \operatorname{arctg} \frac{\omega}{2} - \operatorname{arctg} \omega$$



$$\lim_{\omega \to +\infty} L(j\omega) = -5\frac{\pi}{2} = -2\pi - \frac{\pi}{2}$$

Calcolo intersezione con l'asse reale negativo:

$$\arg L(j\omega) = -\pi$$

$$+4\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{2} + \mathrm{arctg}\,\omega = +\pi$$

$$\mathrm{tg}\left(4\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{2}\right) + \omega = 0$$

$$\frac{2\,\mathrm{tg}\left(2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{2}\right)}{1-\left[\mathrm{tg}\left(2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{2}\right)\right]^2} + \omega = 0$$

$$\frac{2\left[\dfrac{\omega}{1-\frac{\omega^2}{4}}\right]}{1-\left[\dfrac{\omega}{1-\frac{\omega^2}{4}}\right]^2} + \omega = 0$$

$$\frac{2\,\dfrac{4\omega}{4-\omega^2}}{1-\dfrac{16\omega^2}{(4-\omega^2)^2}} + \omega = 0$$

$$\frac{\dfrac{8\omega}{\cancel{4-\omega^2}}}{\dfrac{(4-\omega^2)^2-16\omega^2}{(4-\omega^2)^{\cancel{2}}}} + \omega = 0$$

$$\frac{8w(4-w^2)}{(4-w^2)^2-16w^2}+w=0$$

Si scarta la soluzione $w=0$

$$8(4-w^2)+(4-w^2)^2-16w^2=0$$

$$x \triangleq w^2$$

$$8(4-x)+(4-x)^2-16x=0$$

$$32-8x+16+x^2-8x-16x=0$$

$$x^2-32x+48=0$$

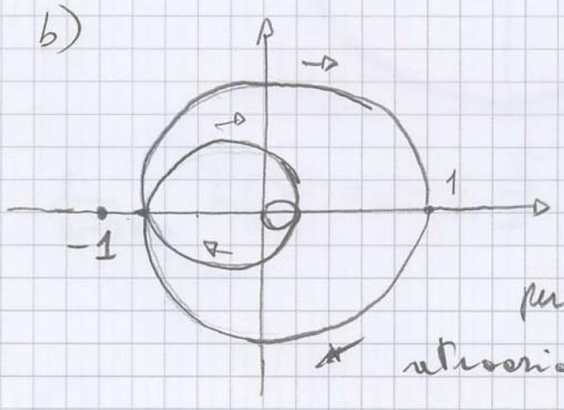
$$x_{1,2}=\begin{cases}30,4222\\1,5778\end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} w_1 = 5,5156 \text{ rad/sec} \\ w_2 = 1,2561 \text{ rad/sec}\end{array}$$

Si scarta la soluzione w_1 corrispondente all'intersezione del diagramma con l'asse reale positivo.

$$|L(jw_2)| = 16\,\frac{\sqrt{1+1,5778}}{(4+1,5778)} = 0,8257$$

$$L(jw_2) = -0,8257 \quad (\text{intersezione cercata})$$

b)



Il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto critico -1. Considerato che $L(s)$ non ha poli a parte reale positiva per il C. di Nyquist il sistema retroazionato è asin. stabile.

$$M_A = \frac{1}{0,8257} \simeq 1,21$$

6.
Si nota che si ha:

- uno zero s=1 con molteplicità 2
- un polo s=0 con molteplicità 3
- un polo s=-5 con molteplicità 2

Essendo la $K_1 \in [0; +\infty)$ un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zero e di poli.

Essendo $n - m = 3$ il luogo delle radici presenta 3 asintoti.
Gli asintoti del luogo delle radici formano una stella di raggi con centro nel punto dell'asse reale di ascissa:

$$\sigma_a = \frac{1}{3}[-5 - 5 - (1+1)] = -4$$

Gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli:

$$\theta_{a,0} = \frac{\pi}{3} \qquad \theta_{a,1} = \pi \quad \theta_{a,2} = \frac{5}{3}\pi$$

Per la determinazione delle radici doppie si ha:

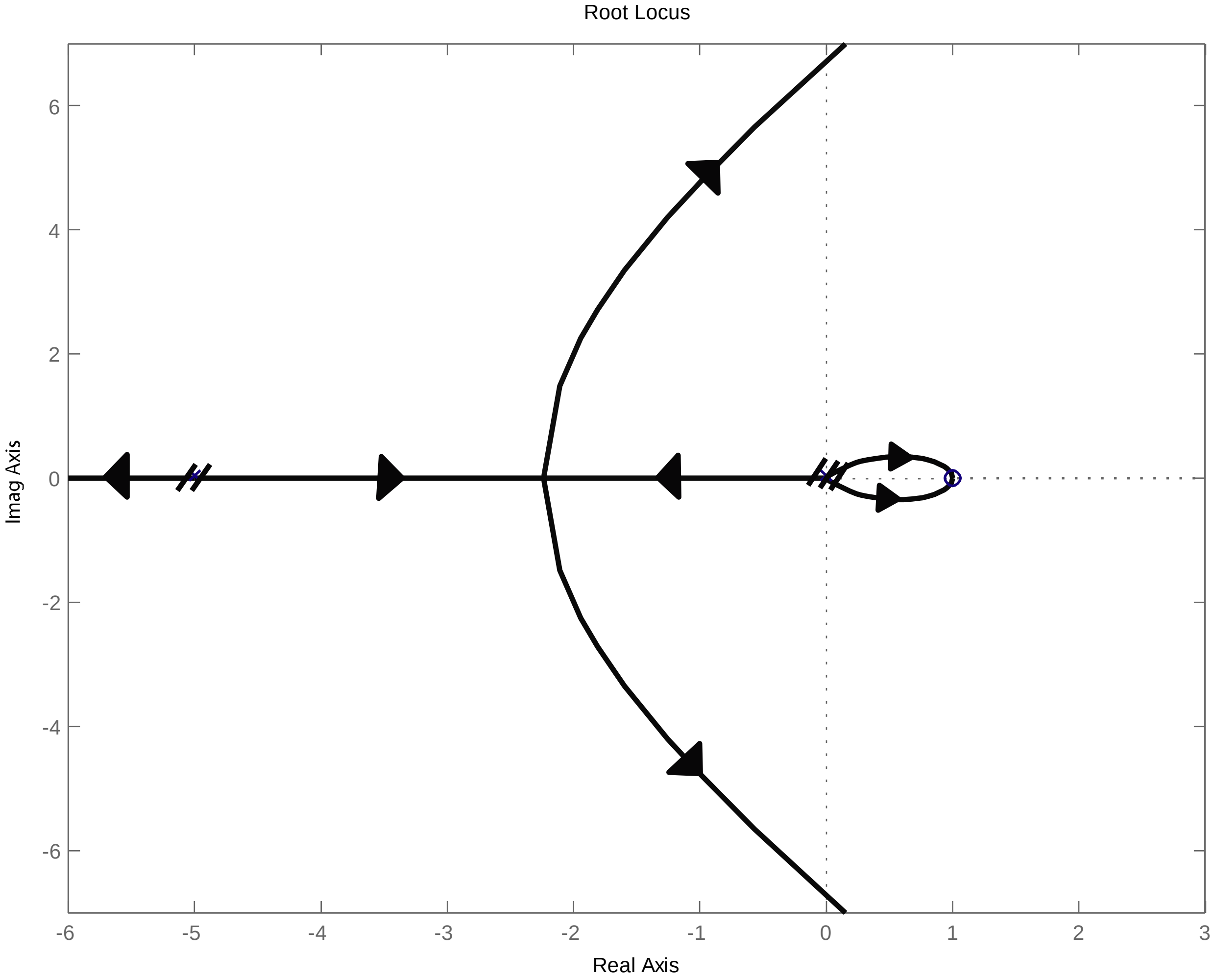
$$\frac{2}{s-1} - \frac{3}{s} - \frac{2}{s+5} = 0$$

Risolvendo l'equazione si ottiene:

$$3s^2 - 15 = 0 \Rightarrow s = \pm\sqrt{5} = \pm 2.236$$

Dalle considerazioni fatte sopra si osserva che solo $s = -2.236$ appartiene al luogo delle radici.

Di seguito è riportato il luogo delle radici.



7.

1) La specifica a) equivale a $\left|\dfrac{1}{1+K_p}\right| = \dfrac{1}{50} \quad \Leftrightarrow \quad K_p = 49$ oppure $K_p = -51$. Dato che $K_p = K\dfrac{5}{2}$ ed è opportuno scegliere $K > 0$ (al fine dell'ottenimento di una facile stabilizzabilità) si impone

$$K_p = 49 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{98}{5}$$

Definiamo

$$L(s) := KP(s) = 1960\frac{s+1}{(s+2)^2(s+10)}$$

$$L'(s) := C(s)P(s) = 1960\frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}\frac{s+1}{(s+2)^2(s+10)}$$

Si propone di progettare α e τ mediante le formule di inversione.

$$L(j\omega) = 1960 \frac{j\omega + 1}{(j\omega + 2)^2 (j\omega + 10)}$$

$$\arg L(j\omega) = \text{arctg } \omega - 2 \text{ arctg } \frac{\omega}{2} - \text{ arctg } \frac{\omega}{10}$$

$$|L(j\omega)| = 1960 \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{(4+\omega^2)\sqrt{100+\omega^2}}$$

Il diagramma polare di $L(j\omega)$ è riportato in figura.

Si determina (per tentativi) ω_0 (sarà la pulsazione critica di $L'(j\omega)$):

$\omega_0 = 10$ rad/s

$\arg L(j\omega_0) = -2{,}0611$ rad $\Rightarrow$ $\varphi_0 = 0{,}2079$ rad

$|L(j\omega_0)| = 13{,}393$

verifica validità di ω_0 : $\left(|L(j\omega_0)|, \varphi_0\right) \in C$?

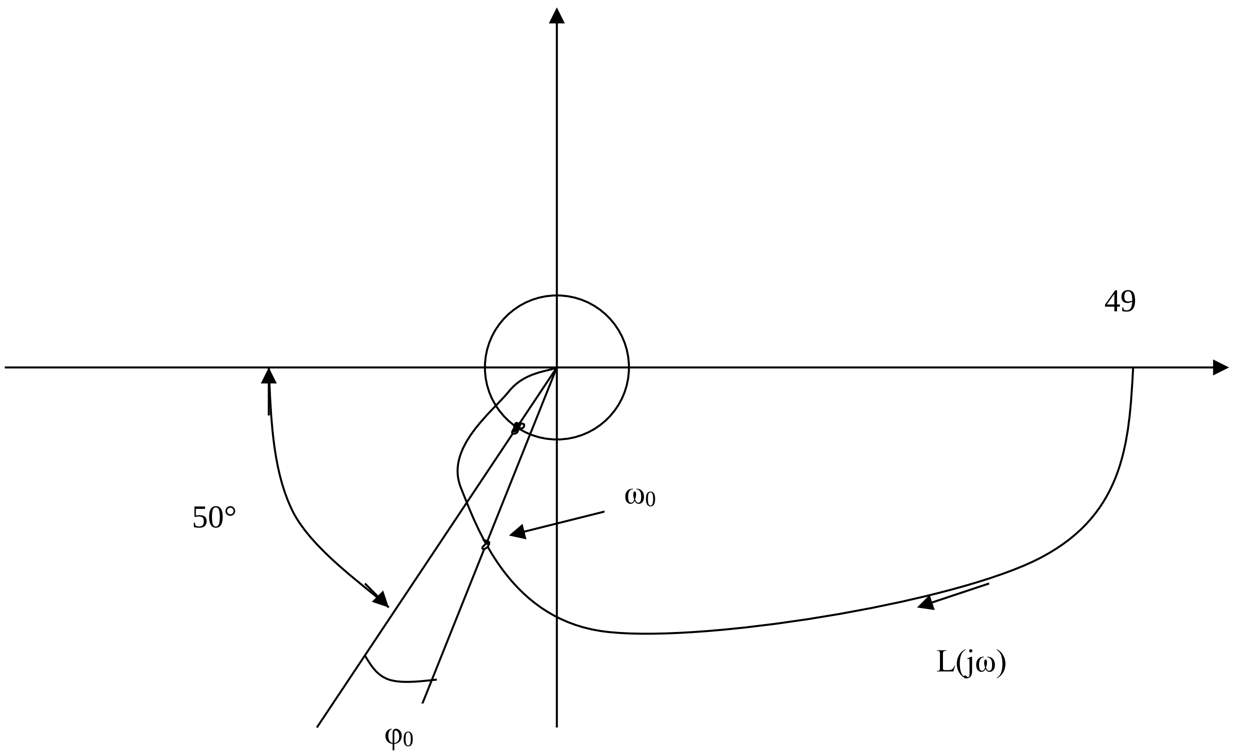
sì, perchè $\cos \varphi_0 > 1/|L(j\omega_0)|$: 0,9785 > 0,0747.

Si definisce $M := |L(j\omega)|$ e $\varphi := \varphi_0$ e si impone, mediante le formule di inversione, che

$$\frac{1}{M} e^{-j\varphi} = \frac{1 + \alpha\tau j\omega_0}{1 + \tau j\omega_0}$$

Quindi:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)} = 0{,}07280 \\ \tau = \dfrac{M - \cos \varphi}{\omega_0 \text{ sen } \varphi} = 6{,}016 \text{ s} \end{cases}$$



8.

La funzione di trasferimento è $H(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2-\frac{1}{4}} = \dfrac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{z}{z-1} = z \cdot A(z)$$

$$A(z) = \frac{z^2+1}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z+\frac{1}{2}} + \frac{c_3}{z-\frac{1}{2}}$$

$$c_1 = \left.\frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\right|_{z=1} = \frac{8}{3} \qquad c_2 = \left.\frac{z^2+1}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{5}{6}$$

$$c_3 = \left.\frac{z^2+1}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)}\right|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{5}{2}$$

$$Y(z) = \frac{8}{3} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{5}{6} \cdot \frac{z}{z+\frac{1}{2}} - \frac{5}{2} \cdot \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{y(k) = \frac{8}{3} + \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^k - \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k \geq 0}$$

Parte A

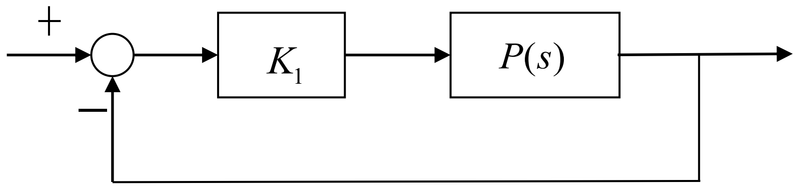
1. [punti 6] Si presentino e si dimostrino le formule di inversione per la sintesi in frequenza delle reti correttrici. Si esponga inoltre il metodo delle formule di inversione per la sintesi della rete **anticipatrice** con imposizione del **margine di ampiezza** M_A.

2. [punti 6] Data la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{100s}{(s+1)(s+10)^2}$ tracciarne 1) il diagramma di Nyquist determinando le tangenti al diagramma per $\omega \to 0^+$ e $\omega \to +\infty$ e l'eventuale intersezione con l'asse reale (positivo o negativo); 2) i diagrammi di Bode asintotici (diagramma dei moduli e diagramma delle fasi).
Suggerimento per il tracciamento dei diagrammi di Bode: si assegnino 10 quadretti del foglio protocollo per una decade delle pulsazioni. Si riportano per comodità dello studente i logaritmi in base 10 degli interi da 2 a 9: $\log_{10} 2 \cong 0{,}30$, $\log_{10} 3 \cong 0{,}48$, $\log_{10} 4 \cong 0{,}60$, $\log_{10} 5 \cong 0{,}70$, $\log_{10} 6 \cong 0{,}78$, $\log_{10} 7 \cong 0{,}85$, $\log_{10} 8 \cong 0{,}90$, $\log_{10} 9 \cong 0{,}95$.

3. [punti 6] Sia Σ_d un sistema a tempo discreto descritto dalla funzione di trasferimento $H(z) = \dfrac{b(z)}{a(z)}$ con $a(z)$ e $b(z)$ polinomi coprimi fra loro. Presentare e dimostrare una condizione necessaria e sufficiente (in relazione ai poli del sistema) che assicuri la stabilità asintotica di Σ_d.

Parte B

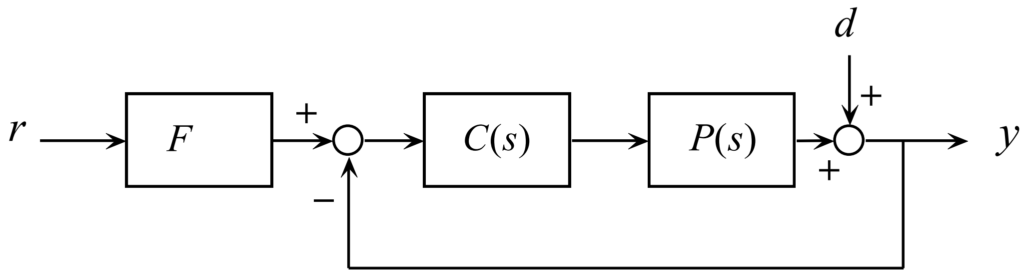
4. [punti 6] Sia dato il sistema retroazionato di figura:



dove K_1 è un parametro reale e $P(s) = \dfrac{s+1}{s^2(s+4)(s+8)}$.

1. Determinare l'insieme dei valori di K_1 per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
2. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica associata al sistema retroazionato per $K_1 \in (0,+\infty)$. Determinare in particolare gli asintoti del luogo e le intersezioni del luogo con l'asse immaginario del piano complesso.

5. [punti 6] Sia dato lo schema di sistema di controllo di figura



dove $P(s) = \dfrac{1}{s+4}$. Determinare un controllore $C(s)$ di ordine 4 (quattro) ed il blocco algebrico $F \in \mathbb{R}$ affinché il sistema di controllo soddisfi le seguenti specifiche:

1. reiezione infinita asintotica al disturbo $d(t) = 7\sin(2t) + 9\sin(t+5)$;
2. sistema retroazionato con poli dislocati in $-1,-2,-3,-5,-6$;
3. in condizioni nominali l'errore a regime in risposta ad un gradino del riferimento sia nullo.

6. [punti 6] Un sistema a tempo discreto, con ingresso u ed uscita y, è descritto dalla seguente equazione alle differenze

$$y(k) - 0.5y(k-2) + 0.06y(k-4) = u(k-1) \text{ .}$$

a) Determinarne la funzione di trasferimento.
b) Verificarne la stabilità asintotica applicando il criterio di Jury.

Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

2.

$$G(s)=\frac{100\,s}{(1+s)\,10^2\,(1+0.1\,s)^2}=\frac{s}{(1+s)(1+0.1\,s)^2}$$

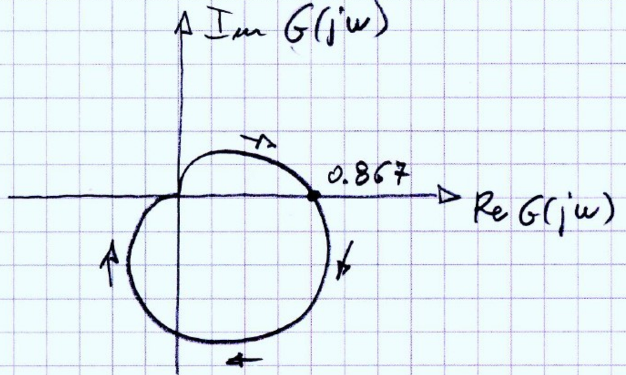
$$G(j\omega)=\frac{j\omega}{(1+j\omega)(1+0.1\,j\omega)^2}$$

$$\arg G(j\omega)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\omega-2\operatorname{arctg}0.1\,\omega$$

$$|G(j\omega)|=\frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}\cdot(1+0.01\cdot\omega^2)}$$

$\omega \to 0^+ \quad \arg G(j\omega)\to\frac{\pi}{2} \qquad |G(j\omega)|\to 0$

$\omega \to +\infty \quad \arg G(j\omega)\to -\pi \qquad |G(j\omega)|\to 0$



determinazione dell'intersezione con l'asse reale positivo:

$1+K\,G(s)=0$ abbia radici puramente immaginarie

$$1+K\frac{100\,s}{(s+1)(s+10)^2}=0 \qquad \text{sia } \eta := 100\,K$$

$$(s+1)(s+10)^2+\eta\, s=0 \qquad s^3+21\,s^2+(120+\eta)\,s+100=0$$

3	1	$120+\eta$	0
2	21	100	0
1	α		

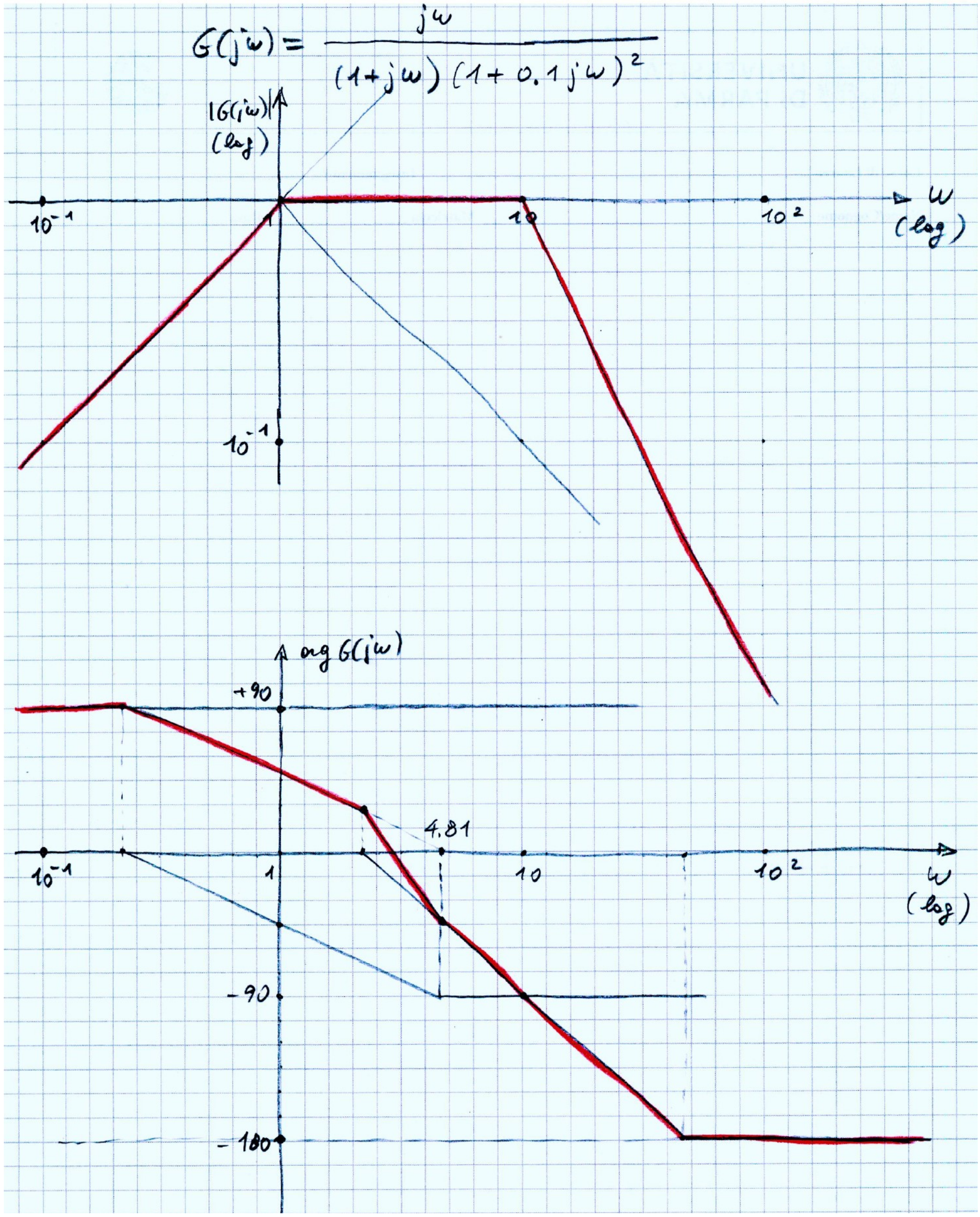
$$\alpha = 21\eta+2420=0$$

$$K=-\frac{2420}{2100}$$

$$1+K\,G(j\omega)=0 \qquad G(j\omega)=-\frac{1}{K}=\frac{2100}{2420}=0.867$$

eq. ausiliaria $21\,s^2+100=0$

$$s=\pm j\sqrt{\frac{100}{21}}=\pm j\,2.18\ , \quad \omega=2.18 \text{ rad/sec}$$



3.
Vedi dispese dell'insegnamento.

4.

1) L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1+K_1\frac{s+1}{s^2(s+4)(s+8)}=0$$

Questa in forma polinomiale diventa:

$$s^4+12s^3+32s^2+K_1 s+K_1=0$$

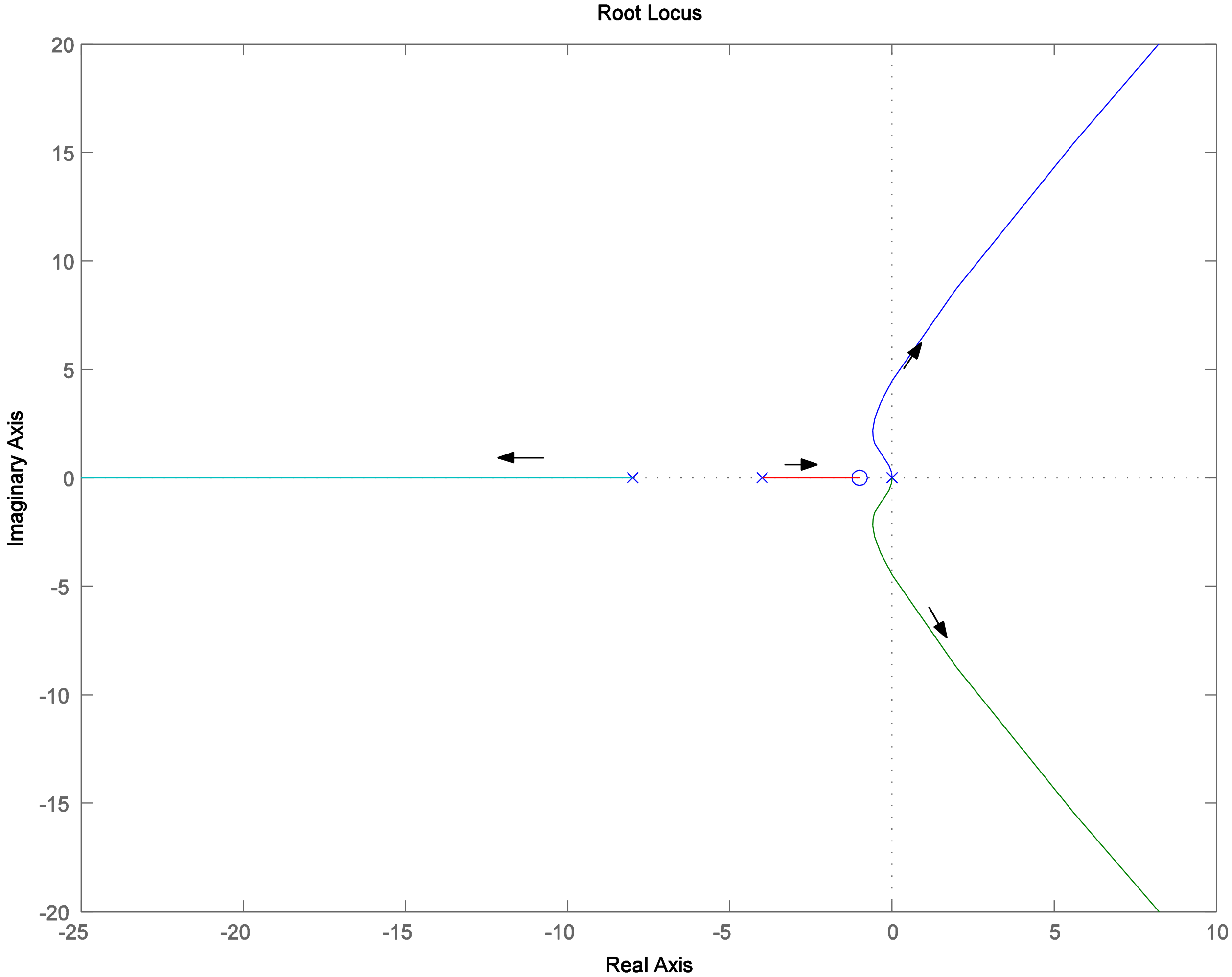
La tabella di Routh corrispondente è

$$\begin{array}{c|cccc}
4 & 1 & 32 & K_1 & 0 \\
3 & 12 & K_1 & 0 & 0 \\
2 & 384-K_1 & 12K_1 & 0 & \\
1 & K_1(240-K_1) & 0 & & \\
0 & 12K_1 & & &
\end{array}$$

Imponendo la positività degli elementi della prima colonna si ottiene $K_1 \in (0,\ 240)$, valori per i quali il sistema è asintoticamente stabile (Criterio di Routh).

2) Il luogo presenta tre asintoti rettilinei $\left(\vartheta_{a,1}=+60°,\ \vartheta_{a,2}=+180°,\ \vartheta_{a,3}=-60°\right)$ con centro in

$$\sigma_a=\frac{-4-8-(-1)}{3}=-\frac{11}{3}\cong -3,67$$



Le intersezioni del luogo si hanno in corrispondenza del valore limite di $K_1=240$. Per tale valore la tabella di Routh evidenzia l'equazione ausiliaria

$$(384-240)s^2+12\cdot 240=0$$
$$s^2+20=0$$
Quindi le intersezioni avvengono in $s=\pm j\sqrt{20}\cong \pm j4,47$.

5.

Il controllore (di ordine quattro) è del tipo

$$C(s)=\frac{b_4\,s^4+b_3\,s^3+b_2\,s^2+b_1\,s+b_0}{(s^2+4)\,(s^2+1)}$$

in cui i quattro poli coniugati in $\pm j2$ e $\pm j1$ servono a rimuovere il disturbo $d(t)$.

Il guadagno ad anello è $L(s)=C(s)\,P(s)$ e dall'equazione $1+L(s)=0$ si ricava il polinomio caratteristico

$$\begin{aligned} p_c(s) &= (s^2+1)\,(s^2+4)\,(s+4)+b_4\,s^4+b_3\,s^3+b_2\,s^2+b_1\,s+b_0 = \\ &= s^5+(4+b_4)\,s^4+(5+b_3)\,s^3+(20+b_2)\,s^2+(4+b_1)\,s+16+b_0 \end{aligned}$$

Dalle specifiche si ricava il polinomio desiderato

$$\begin{aligned} p_d(s) &= (s+1)(s+2)(s+3)(s+5)(s+6) = \\ &= s^5+17\,s^4+107\,s^3+307\,s^2+396\,s+180 \end{aligned}$$

Impostando l'identità polinomiale $p_c(s)=p_d(s)$ si determina il seguente sistema

$$\begin{cases} b_4+4=17 \\ b_3+5=107 \\ b_2+20=307 \\ b_1+4=396 \\ b_0+16=180 \end{cases}$$

risolvendo il quale si ricava

$$b_4=13 \quad b_3=102 \quad b_2=287 \quad b_1=392 \quad b_0=164$$

Il controllore è quindi

$$C(s)=\frac{13\,s^4+102\,s^3+287\,s^2+392\,s+164}{(s^2+4)\,(s^2+1)}$$

Perchè l'errore a regime in condizioni nominali sia nullo, si deve avere $T_{ry}(0)=1$ da cui

$$F\,\frac{C(0)P(0)}{1+C(0)\,P(0)}=F\,\frac{\frac{164}{4}\,\frac{1}{4}}{1+\frac{164}{4}\,\frac{1}{4}}=F\,\frac{41}{45}=1$$

Si impone quindi

$$F=\frac{45}{41}=1.0976$$

6.

a) $$H(z) = \frac{z^3}{z^4 - 0.5z^2 + 0.06} \triangleq \frac{b(z)}{a(z)}$$

b) $$a(z) = a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$
$$\equiv z^4 - 0.5 z^2 + 0.06$$

Si applica il Criterio di Jury

1) $a(1) > 0$, $a(1) = 1 - 0.5 + 0.06 > 0$ ok!

2) $(-1)^4 a(-1) > 0$, $a(-1) = 1 - 0.5 + 0.06 > 0$ ok!

3) $|a_0| < a_4$, $0.06 < 1$ ok!

4) $|b_0| > |b_3|$, $0.9964 > 0$ ok!

5) $|c_0| > |c_2|$, $0.99281 > 0.4683$ ok!

Tabella di Jury

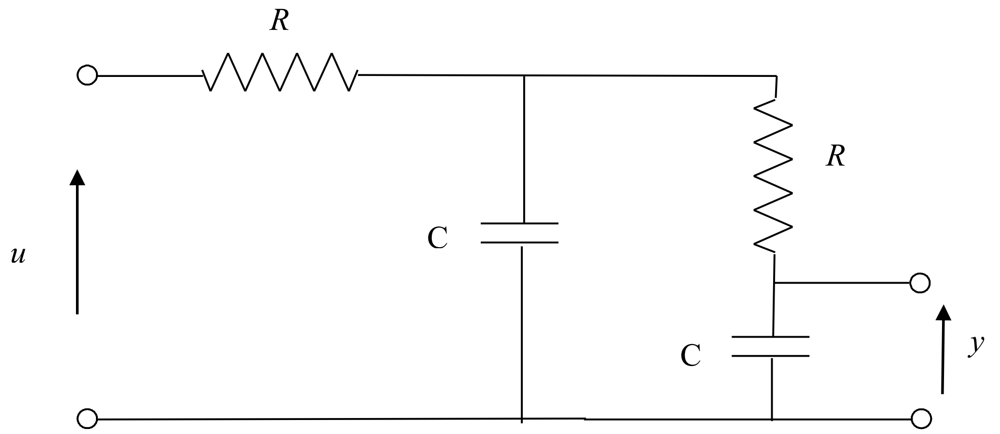
1	0.06	0	−0.5	0	1
2	1	0	−0.5	0	0.06
3	−0.9964	0	0.47	0	
4	0	0.47	0	−0.9964	
5	0.99281	*	−0.4683		

Tutte le diseguaglianze di Jury sono soddisfatte e quindi il sistema è asintoticamente stabile.

Parte A

1. [punti 4,5] Sia dato un sistema in retroazione unitaria con guadagno di anello L(s). Si presenti e discuta l'analisi a regime della risposta ai segnali tipici del riferimento.

2. [punti 4,5] La rete elettrica di figura definisca un sistema dinamico orientato dalla tensione u (ingresso) alla tensione y (uscita).



Di questo sistema si determini: 1) la funzione di trasferimento, 2) i modi, 3) l'equazione differenziale.

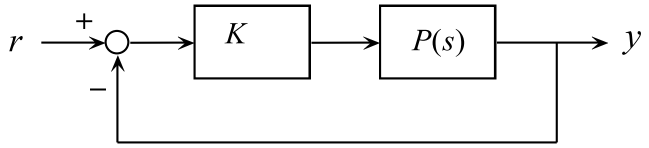
3. [punti 4,5] Un sistema dinamico ha funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}$. L'ingresso applicato è $u(t) = 0$ per ogni $t \geq 0$ e dell'uscita si conosce che $y(0+) = 0$ e $Dy(0+) = 1$. Determinare $y(t)$ per $t \geq 0$.

4. [punti 4,5] Presentare e dedurre la funzione di trasferimento a tempo discreto $P_d(z)$ di un sistema a tempo continuo $P(s)$ con all'ingresso un mantenitore D/A di ordine zero e all'uscita un campionatore A/D sincronizzati con periodo T .

Parte B

5. [punti 4,5] Tracciare i diagrammi di Bode asintotici (diagramma dei moduli e diagramma delle fasi della risposta armonica) associati alla funzione di trasferimento $G(s)=50\dfrac{s-4}{(s+1)(s+20)}$. Suggerimenti: a) per una decade delle pulsazioni si assegnino 10 quadretti del foglio protocollo; b) si riportano per comodità dello studente i logaritmi in base 10 degli interi da 2 a 9: $\log_{10}2\cong 0,30$, $\log_{10}3\cong 0,48$, $\log_{10}4\cong 0,60$, $\log_{10}5\cong 0,70$, $\log_{10}6\cong 0,78$, $\log_{10}7\cong 0,85$, $\log_{10}8\cong 0,90$, $\log_{10}9\cong 0,95$.

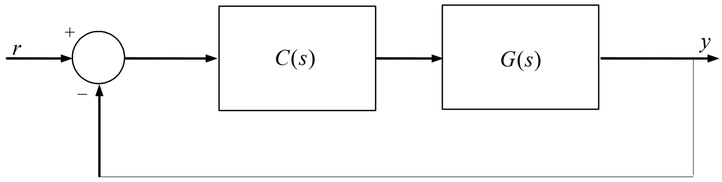
6. [punti 4,5] Sia dato il sistema in retroazione di figura



dove $P(s)=\dfrac{s+3}{s(s+2)^3}$.

a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K>0$ determinando in particolare 1. Asintoti del luogo. 2. Eventuali radici doppie. 3. Angoli di partenza del luogo.
b. Determinare i valori di $K\in\mathbb{R}$ per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Determinare inoltre le intersezioni del luogo delle radici dell'equazione caratteristica con l'asse immaginario del piano complesso.
c. Determinare il valore di K che massimizza il grado di stabilità del sistema retroazionato: $K^*=argmax_{K\in\mathbb{R}}G_S(K)$.

7. [punti 4,5] Sia dato il sistema in retroazione unitaria



dove $G(s)=\dfrac{10}{s(s+2)^2}$.

1) Posto $C(s)=1$ verificare la stabilità asintotica del sistema retroazionato con il criterio di Nyquist determinando il corrispondente margine di ampiezza M_A;

2) Progettare un controllore di struttura $C(s)=K_c\dfrac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}$, $K_c>0,\quad \tau>0,\quad \alpha\in(0,1)$

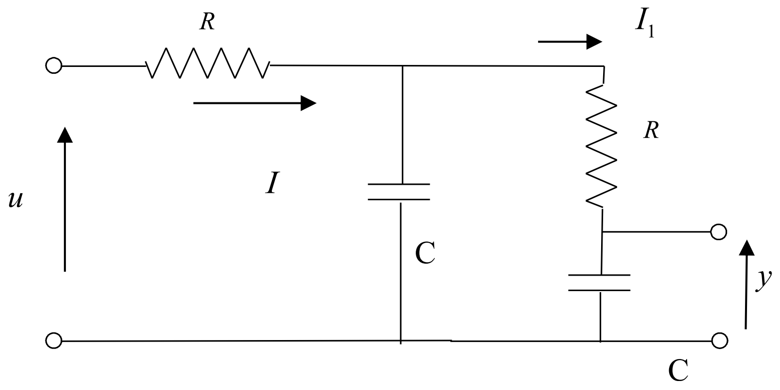
affinché il sistema retroazionato sia stabile con margine di ampiezza $M_A=5$ ed abbia la costante di velocità $K_v=10$.

8. [punti 4,5] Determinare la risposta forzata $y(k)$ all'ingresso $u(k)=2\cdot 1(k)$ di un sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento $H(z)=\dfrac{z^2+1}{(z+1)^2(2z+1)}$.

Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso

2.
1)



$$U = ZI$$

$$Z = R + \frac{RCs+1}{Cs(RCs+2)}$$

$$Y = \frac{1}{Cs}\cdot I_1 = \frac{1}{Cs}\cdot I\,\frac{\frac{1}{Cs}}{\frac{1}{Cs}+R+\frac{1}{Cs}} = \frac{1}{Cs}\cdot\frac{U}{Z}\,\frac{\frac{1}{Cs}}{\frac{1}{Cs}+R+\frac{1}{Cs}}$$

$$G(s) := \frac{Y}{U} = \frac{1}{T^2s^2+3Ts+1}$$

2) I poli del sistema sono $\frac{-3-\sqrt{5}}{2T}$, $\frac{-3+\sqrt{5}}{2T}$ e quindi i corrispondenti modi sono $\exp\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2T}\cdot t\right)$, $\exp\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2T}\cdot t\right)$.

3) L'equazione differenziale associata a G(s) è

$$T^2D^2y + 3TDy + y = u$$

3.

Soluzione

Metodo dei modi: $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$

$Dy(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t}$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 - 2c_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} c_2 = -c_1 \\ -c_1 - 2(-c_1) = 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} c_2 = -1 \\ c_1 = 1 \end{matrix}$$

Quindi $\boxed{y(t) = e^{-t} - e^{-2t}}$

Metodo dell'eq. differenziale: $G(s) = \dfrac{s+3}{s^2+3s+2}$

$D^2 y(t) + 3Dy(t) + 2y(t) = Du(t) + 3u(t)$

Applichiamo la Trasformata di Laplace

$s^2 Y - y(0+)s - Dy(0+) + 3(sY - y(0+)) + 2Y = 0$

$(s^2 + 3s + 2)Y - 1 = 0 \qquad Y = \dfrac{1}{s^2+3s+2}$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$K_1 = \left.\dfrac{1}{s+2}\right|_{s=-1} = 1 \qquad K_1 + K_2 = 0 \qquad K_2 = -1$

$$\boxed{y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = e^{-t} - e^{-2t}}$$

4.

Vedi dispense dell'insegnamento.

5.

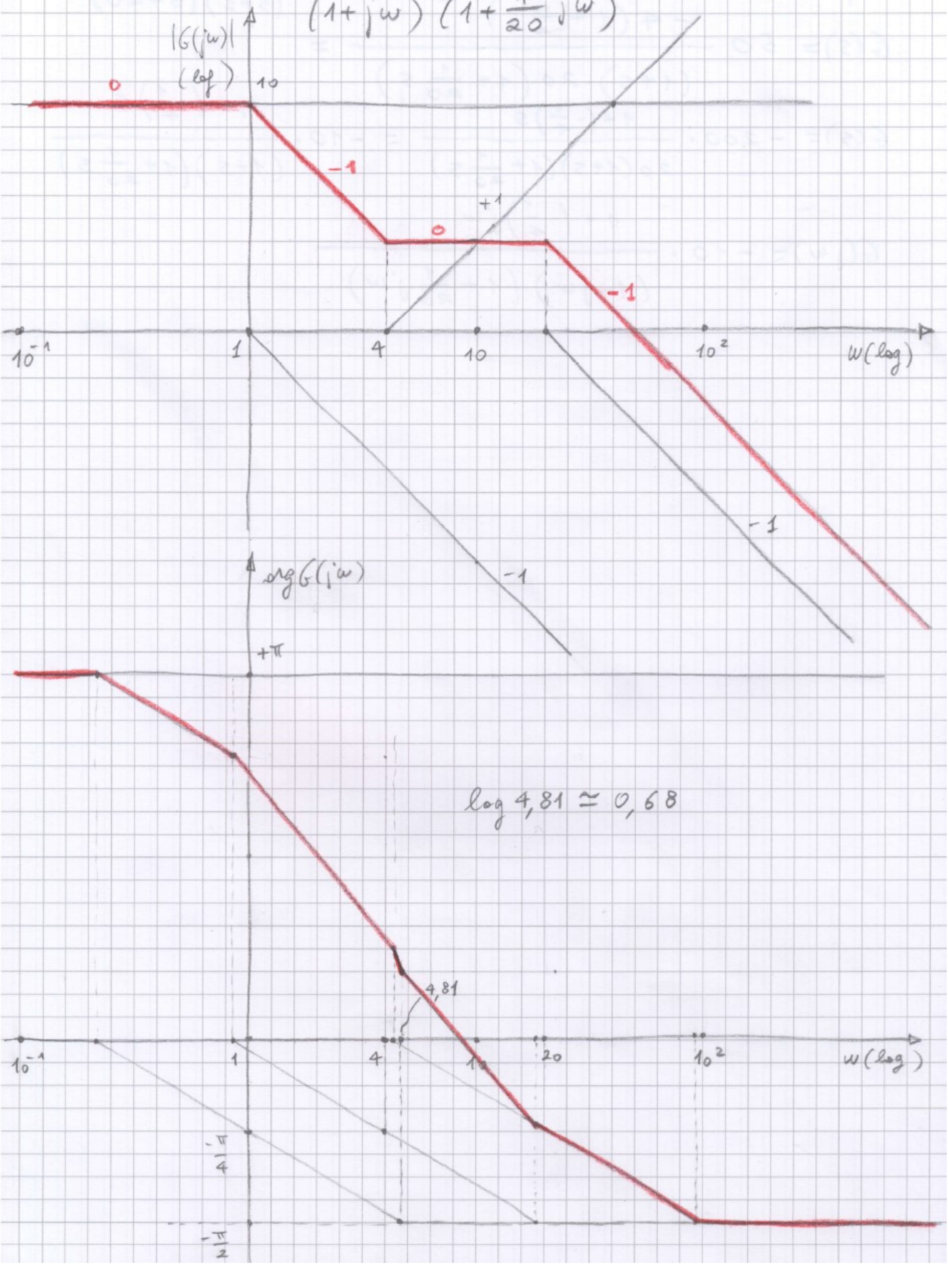
Diagrammi di Bode della f.d.t. $G(s) = 50\,\dfrac{s-4}{(s+1)(s+20)}$

$$G(s) = 50\,\frac{-4\left(1+\frac{1}{-4}s\right)}{(1+s)\cdot 20\cdot\left(1+\frac{1}{20}s\right)} =$$

$$G(s) = -200\cdot\frac{1+\left(-\frac{1}{4}\right)s}{20(1+s)\left(1+\frac{1}{20}s\right)} = -10\cdot\frac{1+\left(-\frac{1}{4}\right)s}{(1+s)\left(1+\frac{1}{20}s\right)}$$

$$G(j\omega) = -10\cdot\frac{1+\left(-\frac{1}{4}\right)j\omega}{(1+j\omega)\left(1+\frac{1}{20}j\omega\right)}$$

$$G(jw) = -10 \cdot \frac{1 + \left(-\frac{1}{4}\right) jw}{(1+jw)\left(1+\frac{1}{20} jw\right)}$$



6.

a) L'equazione caratteristica del sistema è data da $1 + L(s) = 0$ dove il guadagno di anello vale

$$L(s) = K\,\frac{s+3}{s\,(s+2)^3}$$

Il grado relativo è $\rho = 3$ e quindi avrò tre asintoti separati tra loro da angoli di 120° che si intersecano nel punto ∇_a che viene determinato nel modo seguente

$$\nabla_a = \frac{\sum_i p_i - \sum_i z_i}{\rho} = \frac{-2-2-2-0-(-3)}{3} = -1$$

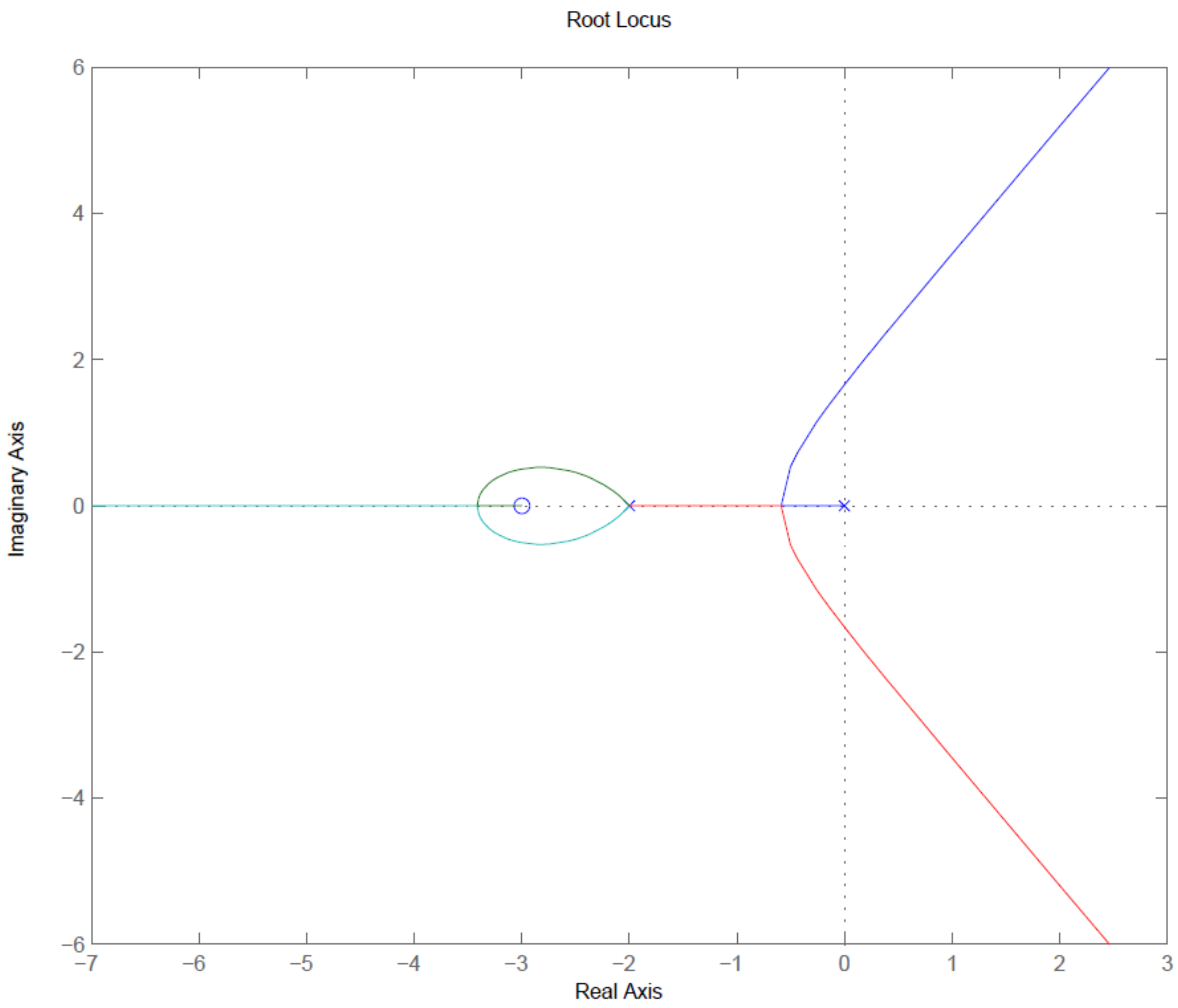
Si determinano le eventuali radici doppie come segue

$$\sum_i \frac{1}{s-p_i} - \sum_i \frac{1}{s-z_i} = \frac{1}{s} + \frac{3}{s+2} - \frac{1}{s+3} = 0$$

ottenendo l'equazione di secondo grado $s^2 + 4s + 2 = 0$ risolvendo la quale si ricava che le radici doppie sono in

$$s_1 = -0.5858 \qquad \text{e} \qquad s_2 = -3.4142$$

Per quanto riguarda gli angoli di partenza, è facile determinare che il polo nell'origine avrà angolo iniziale $\theta_1 = \pi$ mentre i tre poli in -2 avranno angoli di partenza $\theta_{1a} = 0$, $\theta_{1b} = \frac{2}{3}\,\pi$ e $\theta_{1b} = -\frac{2}{3}\,\pi$. Il luogo delle radici per $K > 0$ è quindi il seguente


Root Locus
Imaginary Axis
Real Axis
6
4
2
0
−2
−4
−6
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3

b) L'equazione caratteristica è la seguente

$$1 + K\,\frac{s+3}{s\,(s+2)^3} = 0$$

dalla quale viene determinato il polinomio caratteristico

$$p_c(s;K) = s^4 + 6\,s^3 + 12\,s^2 + (8+K)\,s + 3\,K$$

Applichiamo il Criterio di Routh e costruiamo la seguente tabella

$$\begin{array}{c|cccc}
\mathbf{4} & 1 & 12 & 3\,K & 0 \\
\mathbf{3} & 6 & 8+K & 0 & 0 \\
\mathbf{2} & \text{64-K} & \text{18K} & 0 & \\
\mathbf{1} & f(K) & 0 & & \\
\mathbf{0} & 18\,K & 0 & &
\end{array}$$

dove $f(K) = -K^2 - 52\,K + 512$. Perchè il sistema sia asintoticamente stabile devono quindi valere le condizioni

$$\begin{cases} -K^2 - 52\,K + 512 > 0 \\ 18\,K > 0 \end{cases}$$

Risolvendo la disequazione di secondo grado si ottiene che $f(K) > 0$ per $-60.4674 < K < 8.4674$, per cui, tenendo conto della seconda condizione ricavata dalla tabella di Routh, possiamo dire che il sistema è asintoticamaente stabile se

$$K \in (0, 8.4674)$$

Per determinare le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario, annulliamo la riga **1** della tabella di Routh, ponendo $f(K) = 0$ ed abbiamo che la tabella di Routh presenta una singolarità completa per $K = 8.4674$. Ora determino le radici del polinomio ausiliario

$$a_2(s;K) = (64 - K)\,s^2 + 18\,K$$

per $K = 8.4674$ ed ottengo che le intersezioni del luogo con l'asse immaginario sono in

$$s_{1,2} = \pm 1.6567$$

c) Dal luogo delle radici si nota facilmente che il grado di stabilità G_s è massimo nella radice doppia in -0.5858. Risolvendo l'equazione caratteristica $1 + K^* G(s) = 0$ in $s = -0.5858$ si ha che

$$K^* = -\frac{1}{G(-0.5858)}$$

e si ottiene che il guadagno K^* che massimizza G_s vale

$$K^* = 0.6863$$

7.

1) Sia $F(s) := C(s)G(s) = \dfrac{10}{s(s+2)^2}$

$$F(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\omega+2)^2}$$

$$|F(j\omega)| = \frac{10}{\omega(\omega^2+4)}$$

$$\arg F(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 2arctg\frac{\omega}{2}$$

Studio del diagramma polare di $F(j\omega)$:

Comportamento per $\omega \to 0^+$:
Il diagramma polare presenta un asintoto parallelo all'asse immaginario
$\sigma) = -2.5$

$$\lim_{\omega\to 0^+} \arg F(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

Comportamento per $\omega \to \infty$:
Il diagramma termina nell'origine tangente a uno degli assi coordinati, essendo

$$\lim_{\omega\to\infty} |F(j\omega)| = 0$$

$$\lim_{\omega\to\infty} \arg F(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi$$

La rotazione complessiva intorno all'origine per ω variabile da 0 a ∞ è di $-\pi$.

L'intersezione con l'asse reale negativo si può calcolare con il metodo della tabella di Routh, imponendo che l'equazione $F(s)+\eta$ abbia radici puramente immaginarie, con $\eta \in \mathbb{R}$.

$$\frac{10}{s(s+2)^2} + \eta = 0$$

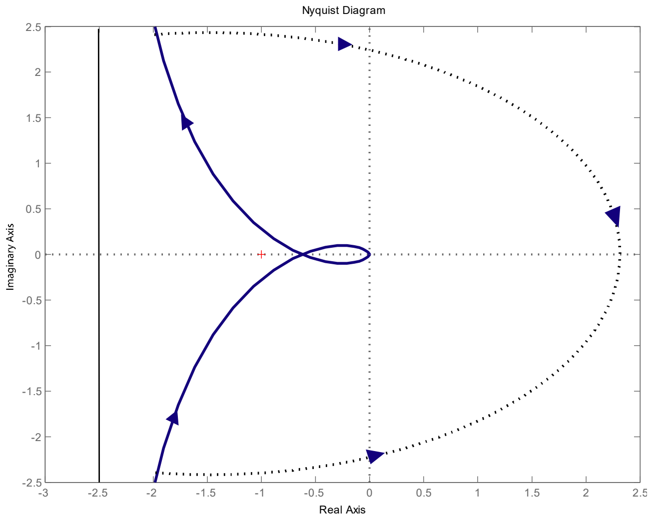
$$s^3 + 4s^2 + 4s + \frac{10}{\eta} = 0$$

3	1	4
2	2	$\frac{5}{\eta}$
1	$8-\frac{5}{\eta}$	0
0		

Si deve cercare la soluzione (con $\eta > 0$) tale che sia nulla la riga 1:

$$8 - \frac{5}{\eta} = 0 \Rightarrow \eta = \frac{5}{8}$$

L'attraversamento dell'asse reale avverrà nel punto $-5/8$.



Si può concludere che per il criterio di Nyquist il sistema retroazionato è stabile con margine di ampiezza $M_A = \frac{8}{5} = 1.6$, infatti il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto critico -1.

2) Si può progettare la rete anticipatrice per cancellazione polo-zero fissando $\tau = 0.5\sec$.

$$C(s) = K_c \frac{1+0.5s}{1+\alpha 0.5s} = K_c \frac{2+s}{2+\alpha s}$$

Posto

$$L(s) = C(s)F(s) = K_c \frac{2+s}{2+\alpha s} \cdot \frac{10}{s(s+2)^2} = K_c \frac{10}{s(2+\alpha s)(s+2)}$$

Dalla specifica sulla costante di velocità si ricava:

$$k_v = \lim_{s \to 0} sL(s) = \frac{10k_c}{4}$$

$$k_v = 10 \quad \Rightarrow \quad k_c = 4$$

e quindi

$$L(s) = \frac{40}{s(s+2)(\alpha s+2)}$$

Qualitativamente il diagramma polare di $L(j\omega)$ è dello stesso tipo di quello tracciato per $F(j\omega)$. La stabilità è assicurata con $M_A = 5$ se l'intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo avviene in $-1/5$.

Per fare in modo che ciò avvenga bisogna imporre che l'equazione $L(s)+\frac{1}{5}=0$ abbia radici puramente immaginarie.

$$\frac{40}{s(s+2)(\alpha s+2)}+\frac{1}{5}=0$$

$\alpha s^2+(2+2\alpha)s^2+4s+200=0$

3	α	4
2	$1+\alpha$	100
1	$4(1+\alpha)-100\alpha$	0
0		

Bisogna imporre $4(1+\alpha)-100\alpha=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha=\frac{4}{96}\simeq$ (soluzione ammissibile in quanto $\alpha\in(0,1)$).

In definitiva la rete correttrice cercata è

$$C(s)=4\frac{1+0.5s}{1+\frac{4}{96}\cdot 0.5s}$$

Il problema poteva essere risolto anche utilizzando le formule di inversione …….

8.

6. $u(k) = 2 \cdot 1(k) \qquad U(z) = 2 \cdot \dfrac{z}{z-1}$

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{z^2+1}{(z+1)^2(2z+1)} \cdot \frac{2 \cdot z}{z-1}$$

$$= \frac{(z^2+1)\cdot \cancel{2} \cdot z}{(z+1)^2 \cdot \cancel{2}\left(z+\frac{1}{2}\right)\cdot(z-1)} = \frac{z(z^2+1)}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z-1)(z+1)^2}$$

$$\frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z-1)(z+1)^2} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z+\frac{1}{2}} + \frac{c_{31}}{(z+1)^2} + \frac{c_{32}}{z+1}$$

$$c_1 = \left.\frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+1)^2}\right|_{z=1} = \frac{\cancel{2}}{\frac{3}{2}\cdot 2^{\cancel{2}}} = \frac{1}{3}$$

$$c_2 = \left.\frac{z^2+1}{(z-1)(z+1)^2}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}+1}{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{5}{\cancel{4}}}{-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}} = -5\cdot\frac{2}{3} = -\frac{10}{3}$$

$$c_{31} = \left.\frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z-1)}\right|_{z=-1} = \frac{2}{\left(-\frac{1}{2}\right)(-2)} = 2$$

$$c_1 + c_2 + c_{32} = 0 \qquad c_{32} = -c_1 - c_2 = -\frac{1}{3} + \frac{10}{3} = 3$$

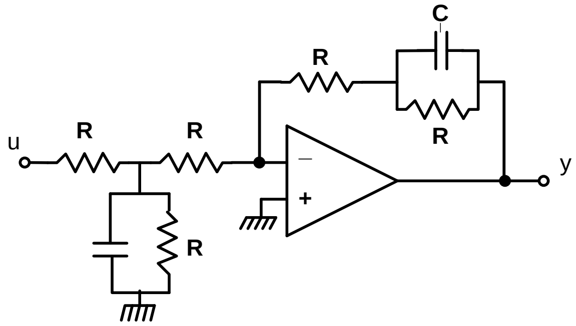
$$Y(z) = \frac{1}{3}\cdot\frac{z}{z-1} - \frac{10}{3}\cdot\frac{z}{z+\frac{1}{2}} + 2\cdot\frac{z}{(z+1)^2} + 3\,\frac{z}{z+1}$$

$$y(k) = \frac{1}{3} - \frac{10}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k + 2\cdot k\cdot(-1)^{k-1} + 3\cdot(-1)^k, \quad k \geq 0$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{10}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2\cdot k\cdot(-1)^k + 3\cdot(-1)^k, \quad k \geq 0$$

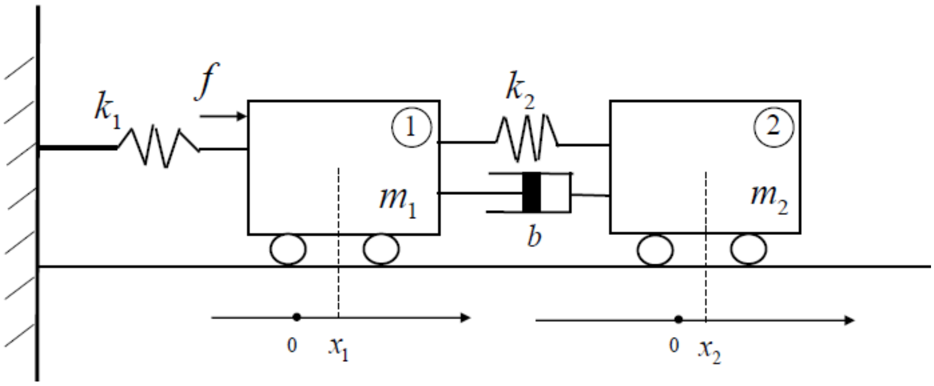
Parte A

1. [punti 6] L'amplificatore operazionale di figura definisce un sistema dinamico orientato da u (tensione all'ingresso) ad y (tensione all'uscita).



Di questo sistema si determinino: 1) la funzione di trasferimento; 2) l'equazione differenziale; 3) gli zeri, i poli e i modi.

2. [punti 6] Due carrelli di massa m_1 ed m_2 collegati come mostrato in figura costituiscono un sistema dinamico Σ orientato da f (forza applicata al carrello 1) ad x_2 (posizione del carrello 2). In condizione di riposo delle molle sia $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$.



1. Determinare l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.
2. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ di Σ.
3. Posto $m = m_1 = m_2$, $k = k_1 = k_2$ e $b = 0$ determinare poli e modi di Σ.

3. [punti 6] Sia dato un generico sistema dinamico orientato da u (ingresso) ad y (uscita) e descritto dall'equazione differenziale $\sum_{i=0}^{n} a_i D^i y(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i D^i u(t)$.

Note le condizioni iniziali al tempo $0-$ come $y_-, Dy_-, \ldots, D^{n-1}y_-$ e $u_-, Du_-, \ldots, D^{m-1}u_-$ e l'azione forzante $u(t),\ t \geq 0$, determinare la trasformata di Laplace della risposta $y(t),\ t \geq 0$. Interpretare e commentare il risultato ottenuto.

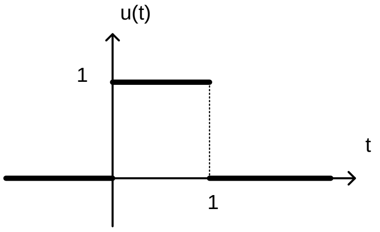
Nota: riportare i ragionamenti e i passaggi che permettono l'individuazione dell'espressione $Y(s)$ cercata.

Parte B

4. [punti 6] Determinare la risposta al gradino unitario $g_s(t)$ di un sistema con funzione di trasferimento

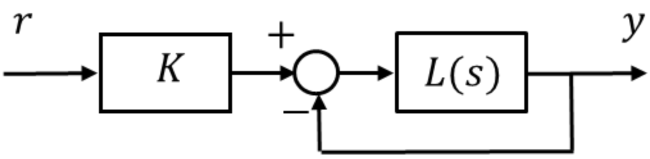
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad \omega_n > 0,\ \delta \in (0,1).$$

5. [punti 6] Un sistema dinamico abbia funzione di trasferimento $G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$. A partire da condizioni di quiete venga applicato l'ingresso $u(t)$ definito in figura. Determinare $y(t)$ per $t \geq 0$.



6. [punti 6] Dato il sistema retroazionato di figura con $L(s) = \frac{10}{(s+1)(s+5)}$ e $K = 1.5$ determinare:

1. la funzione di trasferimento e l'equazione differenziale del sistema orientato da r ad y.
2. il tempo di assestamento T_a, la sovraelongazione S e il tempo di salita T_s della risposta al comando in ingresso $r(t) = 1(t)$ (gradino unitario).



1.

$$T_{uy}(s) = -\frac{R + \dfrac{\frac{1}{sC}\cdot R}{\frac{1}{sC}+R}}{R+R+\dfrac{R^2}{\dfrac{\frac{1}{sC}\cdot R}{\frac{1}{sC}+R}}} = -\frac{R+\dfrac{R}{1+RCs}}{2R+\dfrac{R^2}{\dfrac{R}{1+RCs}}} =$$

$$= -\frac{2+RCs}{(1+RCs)(3+RCs)} = \frac{-RCs-2}{R^2C^2s^2+4RCs+3}$$

eq. diff. $\quad R^2C^2D^2y(t)+4RC\,Dy(t)+3y(t) = -RC\,Du(t)-2u(t)$

zeri: $z_1 = -\dfrac{2}{RC}$ $\quad$ poli: $p_1 = -\dfrac{1}{RC}$, $p_2 = -\dfrac{3}{RC}$

modi $= \left\{ \exp\left\{-\dfrac{1}{RC}t\right\}, \exp\left\{-\dfrac{3}{RC}\cdot t\right\} \right\}$

2.

1. $$\begin{cases} m_1 D^2 x_1 = f - k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) + b(Dx_2 - Dx_1) \\ m_2 D^2 x_2 = -k_2 (x_2 - x_1) - b(Dx_2 - Dx_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 D^2 x_1 = f - k_1 x_1 - k_2 x_1 - bDx_1 + k_2 x_2 + bDx_2 \\ m_2 D^2 x_2 = -k_2 x_2 - bDx_2 + k_2 x_1 + bDx_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 D^2 x_1 + bDx_1 + (k_1 + k_2) x_1 = f + (k_2 + bD) x_2 \\ (k_2 + bD) x_1 = m_2 D^2 x_2 + bDx_2 + k_2 x_2 \end{cases}$$

$$\left[m_1 D^2 + bD + (k_1 + k_2)\right](m_2 D^2 + bD + k_2) x_2 =$$

$$= (k_2 + bD)^2 x_2 + (k_2 + bD) f$$

$$\left[m_1 m_2 D^4 + m_1 b D^3 + m_1 k_2 D^2 + m_2 b D^3 + \cancel{b^2 D^2} + bk_2 D + m_2 (k_1 + k_2) D^2 + \right.$$
$$\left. + b(k_1 + k_2) D + k_2 (k_1 + \cancel{k_2})\right] x_2 = (\cancel{k_2^2} + 2k_2 bD + \cancel{b^2 D^2}) x_2$$
$$+ (k_2 + bD) f$$

$$\left[m_1 m_2 D^4 + (m_1 + m_2) b D^3 + (m_1 k_2 + m_2 k_1 + m_2 k_2) D^2 + k_1 b D + k_1 k_2\right] x_2 = (k_2 + bD) f$$

2.

$$G(s)=\frac{b s + k_2}{m_1 m_2 s^4 + (m_1+m_2) b s^3 + (m_1 k_2 + m_2 k_1 + m_2 k_2) s^2 + k_1 b s + k_1 k_2}$$

3.

$$m = m_1 = m_2 , \quad k = k_1 = k_2 \quad e \quad b = 0$$

$$G(s) = \frac{k}{m^2 s^4 + 3 m k s^2 + k^2}$$

$$m^2 s^4 + 3 m k s^2 + k^2 = 0 \qquad s^2 = \frac{-3 m k \pm \sqrt{9 m^2 k^2 - 4 m^2 k^2}}{2 m^2} =$$

$$= \frac{-3 m k \pm m k \sqrt{5}}{2 m^2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{k}{m}$$

poli di Σ:

$$p_{1,2} = \pm j \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{k}{m}} \qquad p_{3,4} = \pm j \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{k}{m}}$$

modi di Σ

$$\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{k}{m}} \cdot t + \varphi_1\right), \quad \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{k}{m}} \cdot t + \varphi_2\right)$$

anche esprimibili come

$$\operatorname{sen}\left(1{,}618 \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \varphi_1\right), \quad \operatorname{sen}\left(0{,}618 \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \varphi_2\right)$$

3.

Vedi le dispense del corso.

4.

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{\omega_n^2}{s\left(s + \delta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\right)\left(s + \delta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\right)}$$

$$= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + \delta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\delta^2}} + \frac{\overline{K}_2}{s + \delta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}$$

$$K_1 = \cancel{s}\, G(s)\frac{1}{\cancel{s}}\Big|_{s=0} = 1$$

$$K_2 = \frac{\omega_n^2}{s\left(s + \delta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\right)}\Bigg|_{s = -\delta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\delta^2}} =$$

$$= \frac{\omega_n^2}{\left(-\delta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\right)\left(2j\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\right)} = \frac{1}{\left(-\delta + j\sqrt{1-\delta^2}\right)2j\sqrt{1-\delta^2}}$$

$$= \frac{1}{2\left[-(1-\delta^2) - j\delta\sqrt{1-\delta^2}\right]}$$

$$|K_2| = \frac{1}{2\sqrt{1-\delta^2}} \qquad \arg K_2 = -\arg\left[-(1-\delta^2) - j\delta\sqrt{1-\delta^2}\right] =$$

$$= -\left(-\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}\right) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \arccos\delta$$

$$g_s(t) = 1 + 2|K_2|e^{-\delta\omega_n t}\cdot\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\cdot t + \arg K_2\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}e^{-\delta\omega_n t}\cdot\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\,t + \frac{\pi}{2} + \arccos\delta\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}e^{-\delta\omega_n t}\cdot\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\cdot t + \arccos\delta\right)$$

5.

1° metodo: $u(t) = 1(t) - 1(t-1)$

$$U(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s} \qquad Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s(s+1)^2} - \frac{1}{s(s+1)^2}e^{-s}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)^2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)^2}\cdot e^{-s}\right]$$

$$\frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1)^2} + \frac{K_{12}}{s+1}$$

$$K_1 = \left.\frac{1}{(s+1)^2}\right|_{s=0} = 1 \qquad K_{21} = \left.\frac{1}{s}\right|_{s=-1} = -1 \qquad K_1 + K_{12} = 0$$

$$K_{12} = -1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)^2}e^{-s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)^2}\right](t-1)\cdot 1(t-1)$$

$$y(t) = 1 - te^{-t} - e^{-t} - \left[1 - (t-1)e^{-(t-1)} - e^{-(t-1)}\right]\cdot 1(t-1)$$

Per $t \in [0,1)$ $\quad y(t) = 1 - te^{-t} - e^{-t}$

Per $t \in [1,+\infty)$ $\quad y(t) = \cancel{1} - te^{-t} - \cancel{e^{-t}} - \cancel{1} + (t-\cancel{1})e^{-t}\cdot e + \cancel{e^{-t}\cdot e}$

$$\boxed{y(t) = -e^{-t} + (e-1)te^{-t}}$$

2° metodo: Per $t \in [0,1)$ vale $u(t) = 1(t)$

e quindi $\quad y(t) = 1 - te^{-t} - e^{-t}$

Per $t \in [1,+\infty)$ $\quad y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 te^{-t}$

$u(t)$ è discontinua su $(-\infty,+\infty)$, quindi $y(t) \in C^{\varrho-1}(\mathbb{R})$

ovvero $y(t) \in C^1(\mathbb{R})$

$$\begin{cases} y(1-) = y(1+) \\ Dy(1-) = Dy(1+) \end{cases}$$

per $t \in [0,1)$ $\quad y(t) = 1 - te^{-t} - e^{-t}$

$Dy(t) = -e^{-t} + te^{-t} + e^{-t}$

per $t \in [1,+\infty)$ $\quad y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 te^{-t}$

$Dy(t) = -c_1 e^{-t} + c_2 (e^{-t} - te^{-t})$

$y(1-) = 1 - e^{-1} - e^{-1} = 1 - 2e^{-1}$

$Dy(1-) = -\cancel{e^{-1}} + \cancel{e^{-1}} + e^{-1} = e^{-1}$

$$\begin{cases} c_1 e^{-1} + c_2 e^{-1} = 1 - 2e^{-1} \\ -c_1 e^{-1} + c_2 (\cancel{e^{-1} - e^{-1}}) = e^{-1} \end{cases} \Rightarrow c_1 = -1$$

$-e^{-1} + c_2 e^{-1} = 1 - 2e^{-1}$ $\quad -1 + c_2 = e - 2$

$\Rightarrow c_2 = e - 1$

$$y(t) = -e^{-t} + (e-1)te^{-t}$$

6.

1. $$T_{ry}(s) = K\frac{L(s)}{1+L(s)} = 1.5\frac{\frac{10}{(s+1)(s+5)}}{1+\frac{10}{(s+1)(s+5)}} = 1.5\frac{10}{(s+1)(s+5)+10} = \frac{15}{s^2+6s+15}$$

eq. diff.: $D^2y(t) + 6Dy(t) + 15y(t) = 15r(t)$

2. Dal confronto $\dfrac{15}{s^2+6s+15} = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$

$\omega_n = \sqrt{15} = 3.873 \quad \Rightarrow \quad T_s \simeq \dfrac{1.8}{\omega_n} = 0.46$ sec.

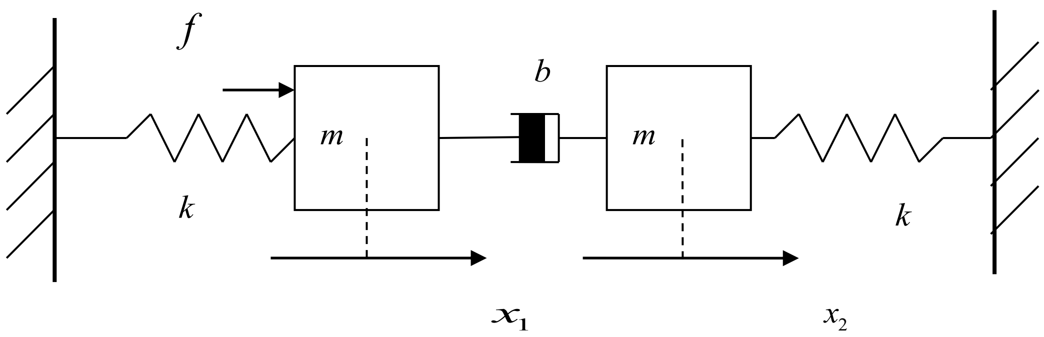
$2\delta\omega_n = 6 \;\Rightarrow\; \delta\omega_n = 3 \;\Rightarrow\; T_a = \dfrac{3}{\delta\omega_n} = 1$ sec.

$\delta = \dfrac{3}{\omega_n} = 0{,}7746 \quad \Rightarrow \quad S = 100\exp\left(-\dfrac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) \cong 2.1\%$

Parte A

1. [punti 4,5] Sia dato un sistema in retroazione unitaria con guadagno di anello L(s). Si presenti e discuta l'analisi a regime della risposta ai segnali tipici del riferimento.

2. [punti 4,5] Sia assegnato il sistema meccanico vibrante di figura



caratterizzato da due molle di costante elastica k e due corpi di massa m accoppiati da uno smorzatore viscoso di coefficiente b. Il corpo di sinistra sia soggetto ad una forza f e le posizioni delle due masse siano descritte dalle variabili x_1 e x_2 (quando il sistema è in quiete $x_1 = x_2 = 0$).

a) Determinare le equazioni differenziali che descrivono il moto delle due masse.
b) Determinare la funzione di trasferimento del sistema orientato dall'ingresso f all'uscita x_1.

3. [punti 4,5] Determinare l'evoluzione forzata $y(t)$ in risposta al gradino unitario $u(t) = 1(t)$ di un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{10}{(s+1)^4}$.
Determinare inoltre il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$.

4. [punti 4,5] Data un generico segnale a tempo discreto $x(k)$, $k \in \mathbb{Z}$ determinare le trasformate zeta dei segnali ritardati e anticipati di n passi ($n \in \mathbb{N}$), $\mathcal{Z}$)] e $\mathcal{Z}$)].

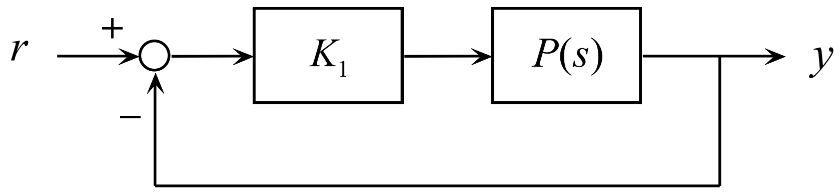
Parte B

5. [punti 4,5]
a) Tracciare il diagramma polare associato alla funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{10(1-s)^2}{s(s+1)^3}$$

determinando in particolare l'asintoto e l'intersezione con l'asse reale negativo.
b) Utilizzando il Criterio di Nyquist si studino le radici dell'equazione caratteristica $1+P(s)=0$ (quante a parte reale negativa, quante puramente immaginarie, quante a parte reale positiva).

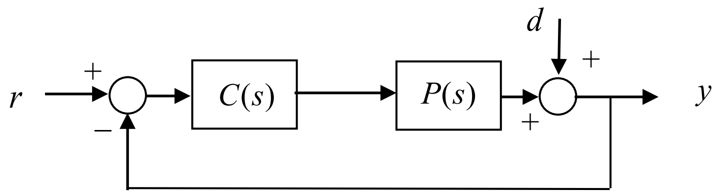
6. [punti 4,5] Sia dato il sistema in retroazione di figura



dove $P(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+5)(s+10)}$.

a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K_1 > 0$ determinando in particolare gli asintoti e le radici doppie.
b. Determinare i valori di $K_1 \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema retroazionato ha grado di stabilità $G_s \geq 2\ \mathrm{s}^{-1}$.
c. Determinare il valore di K_1 che massimizza il grado di stabilità del sistema retroazionato: $K_1^* = \arg\max_{K_1 \in \mathbb{R}} G_s(K_1)$.

7. [punti 4,5] Sia dato il seguente sistema



dove $P(s) = \dfrac{9}{s+5}$.

Determinare un controllore proprio di ordine minimo $C(s)$ affinché le seguenti specifiche siano soddisfatte:

1. reiezione infinita asintotica al disturbo composito $d(t) = 5 + 11\cdot\cos(3t+2)$;
2. costante di velocità $K_v = 4$;
3. sistema retroazionato asintoticamente stabile con tre poli dominanti in $-2, -2 \pm j$.

8. [punti 4,5] Un sistema a tempo discreto, orientato dall'ingresso u all'uscita y, è descritto dalla seguente equazione alle differenze

$$y(k) - 8y(k+2) + 16y(k+4) = 16u(k+4) + 16u(k+1)\ .$$

a) Determinare la funzione di trasferimento del sistema.
b) Verificare la stabilità asintotica del sistema applicando il criterio di Jury.

Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso

2.
a) Dall'equazione della dinamica otteniamo

$$\begin{cases} mD^2 x_1 = f - kx_1 + b(Dx_2 - Dx_1) \\ mD^2 x_2 = -b(Dx_2 - Dx_1) - kx_2 \end{cases}$$

b) Dalle equazioni precedenti trasformando secondo Laplace con condizioni iniziali tutte nulle otteniamo:

$$\begin{cases} ms^2 X_1 = F - kX_1 + b(sX_2 - sX_1) \\ ms^2 X_2 = -b(sX_2 - sX_1) - kX_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ms^2 X_1 = F - kX_1 + b(sX_2 - sX_1) \\ (ms^2 + bs + k)X_2 = bsX_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2 = \dfrac{bsX_1}{(ms^2 + bs + k)} \\ (ms^2 + bs + k)X_1 = F + bsX_2 \end{cases}$$

$$(ms^2 + bs + k)X_1 = F + bs\frac{bsX_1}{(ms^2 + bs + k)}$$

$$G(s) := \frac{X_1}{F} = \frac{ms^2 + bs + k}{(ms^2 + bs + k)^2 - b^2 s^2} =$$

$$= \frac{ms^2 + bs + k}{m^2 s^4 + 2mbs^3 + 2mks^2 + 2bks + k^2}$$

3.

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{10}{(s+1)^4}\cdot\frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1)^4} + \frac{K_{22}}{(s+1)^3} + \frac{K_{23}}{(s+1)^2} + \frac{K_{24}}{s+1}$$

$$K_1 = \left.\frac{10}{(s+1)^4}\right|_{s=0} = 10 \;, \quad K_{21} = \left.\frac{10}{s}\right|_{s=-1} = -10$$

$$K_1 + K_{24} = 0 \;\Rightarrow\; K_{24} = -K_1 = -10$$

$$K_{22} = \frac{1}{(2-1)!} D^{2-1}\left[\frac{10}{s}\right]_{|s=-1} = 10\left[-s^{-2}\right]_{|s=-1} = -10$$

$$K_{23} = \frac{1}{(3-1)!} D^{3-1}\left[\frac{10}{s}\right]_{|s=-1} = -10$$

$$Y(s) = \frac{10}{s} - \frac{10}{(s+1)^4} - \frac{10}{(s+1)^3} - \frac{10}{(s+1)^2} - \frac{10}{s+1}$$

$$y(t) = 10 - \frac{5}{3}t^3 e^{-t} - 5t^2 e^{-t} - 10\,t\,e^{-t} - 10\,e^{-t}, \quad t \geq 0$$

Il gradino è una funzione discontinua, quindi $y(t) \in \overline{C^{\rho-1}}$.

$\rho = 4 \Rightarrow y(t) \in \overline{C^3}$ (il grado massimo di continuità dell'uscita è pari a 3).

4.
Vedi appunti del corso.

5.

a)

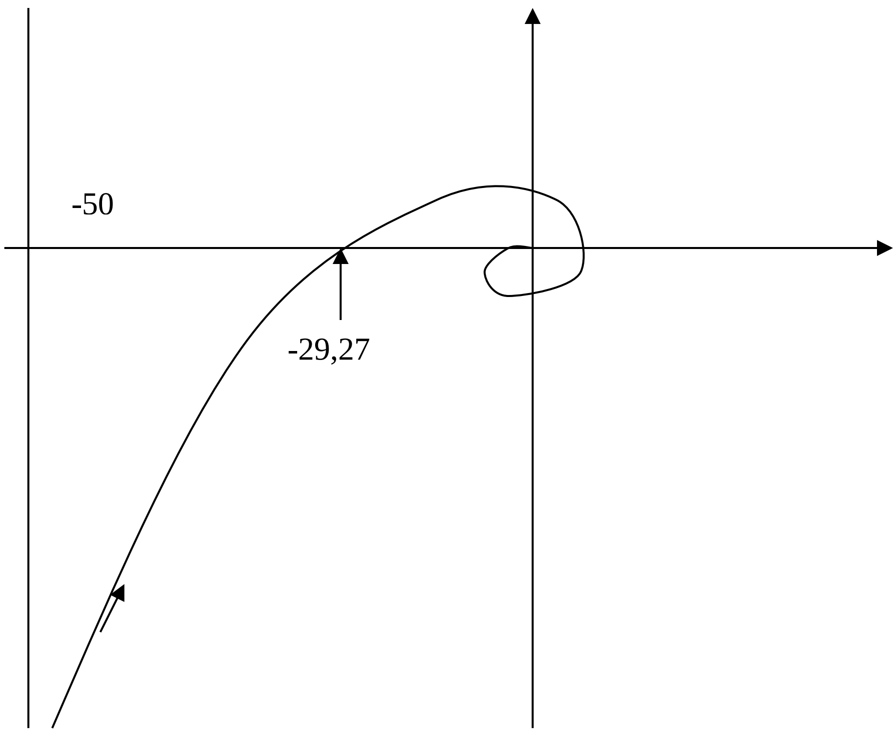
$$P(j\omega)=\frac{10(1-j\omega)^2}{(j\omega)(1+j\omega)^3}$$

$$\arg P(j\omega)=-\frac{\pi}{2}-5\ \text{arctg}\ \omega$$

$$\left|P(j\omega)\right|=\frac{10}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}$$

L'asintoto è verticale (il sistema è di tipo 2) e la sua ascissa è $\sigma_a=10[(-1-1)-(1+1+1)]=-50$.

$$\omega\to\infty \qquad \arg P(j\omega)\to-2\pi-\pi$$



Calcolo intersezione con l'asse reale negativo:

$$\arg P(j\omega_p)=-\pi$$

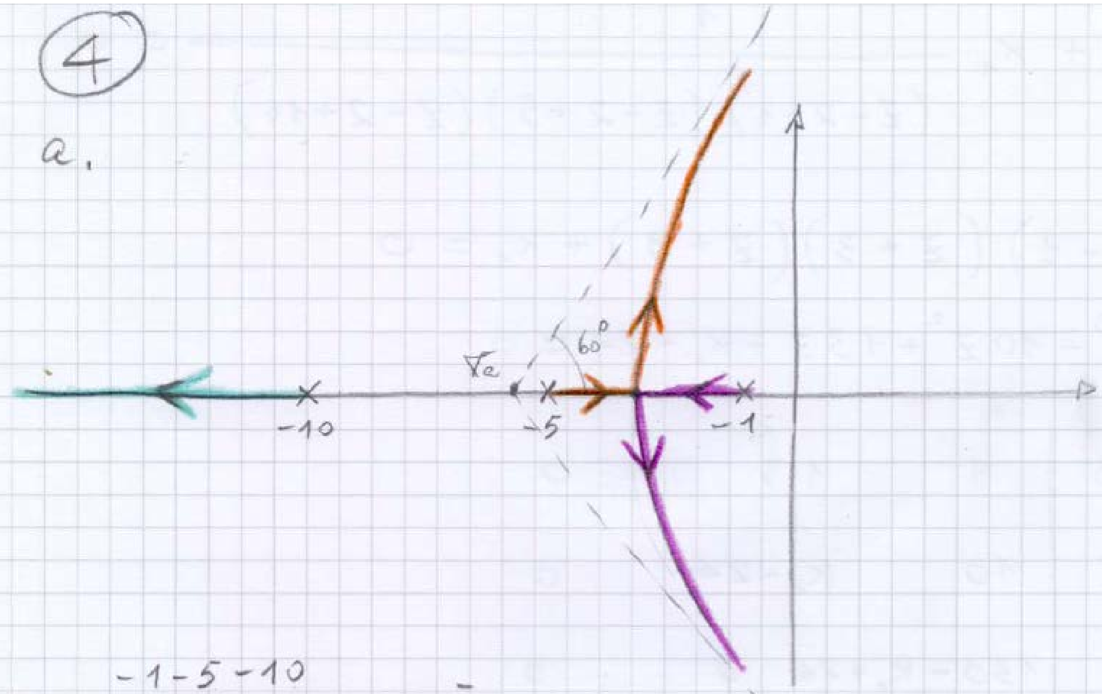
$$5\ \text{arctg}\ \omega_p=\frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad \omega_p=\ \text{tg}\ \frac{\pi}{10}=0{,}3249\ \ \text{rad}$$

$$\left|P(j\omega_p)\right|=29{,}27 \quad\Rightarrow\quad P(j\omega_p)=-29{,}27$$

b) Considerato che P(s) non ha poli a parte reale positiva, il caso particolare del Criterio di Nyquist afferma che l'eq. 1 + P(s) = 0 ha tutte le radici a parte reale negativa se e solo se il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto critico - 1. Dal diagramma sopra riportato risulta invece che il d.p.c. circonda 2 volte (in senso orario) il punto – 1. Si conclude quindi:

$$\text{numero radici } \in \mathbb{C}_+ = 2$$
$$\text{numero radici } \in j\mathbb{R} = 0$$
$$\text{numero radici } \in \mathbb{C}_- = 4 - 2 = 2$$

6.



$$\sigma_a = \frac{-1-5-10}{3} = -5,\bar{3}$$

$$\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+5} + \frac{1}{s+10} = 0$$

$$(s+5)(s+10) + (s+1)(s+10) + (s+1)(s+5) = 0$$

$$3s^2 + 32s + 65 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \begin{cases} -2,7299 \\ -7,9367 \text{ (da scartare)} \end{cases}$$

b. Cambio di variabile complessa $z = s + 2$

$s = z - 2$

$$1 + K_1 \frac{1}{(s+1)(s+5)(s+10)} = 0 \quad \text{eq. carat.}$$

$$1 + K_1 \cdot \frac{1}{(z-2+1)(z-2+5)(z-2+10)} = 0$$

$$(z-1)(z+3)(z+8) + k_1 = 0$$

$$z^3 + 10z^2 + 13z + k_1 - 24 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc}
3 & 1 & 13 & 0 \\
2 & 10 & k_1 - 24 & 0 \\
1 & 130 - k_1 + 24 & 0 & 0 \\
0 & k_1 - 24 & &
\end{array}$$

$$\begin{cases} 154 - k_1 > 0 & k_1 < 154 \\ k_1 - 24 > 0 & k_1 > 24 \end{cases}$$

Quindi $K_1 \in [24, 154]$

c.

$$1 + K_1 G_1(s) = 0$$

$$K_1^* \ni \quad 1 + K_1^* G_1(-2{,}7299) = 0$$

$$K_1^* = -\frac{1}{G_1(-2{,}7299)} =$$

$$= -(s+1)(s+5)(s+10)\Big|_{s=-2{,}7299} = 28{,}55$$

7.

Soluzione

$$C(s) = \frac{\gamma_3 s^3 + \gamma_2 s^2 + \gamma_1 s + \gamma_0}{s(s^2+9)}$$

$$L(s) = C\,P = \frac{9\cdot(\gamma_3 s^3 + \gamma_2 s^2 + \gamma_1 s + \gamma_0)}{s(s^2+9)(s+5)}$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\,L(s) = \frac{\cancel{9}\cdot\gamma_0}{\cancel{9}\cdot 5} = \frac{\gamma_0}{5} = 4$$

$\gamma_0 = 20$ ovvero $\dfrac{9\gamma_0}{9\cdot 5} = 4$

$1 + L(s) = 0$

$$s(s^2+9)\cdot(s+5) + 9(\gamma_3 s^3 + \gamma_2 s^2 + \gamma_1 s + \gamma_0)$$

$$((s+2)^2+1)(s+2)(s+c)$$

$9\gamma_3 + 5 = 6 + c$ $\quad 9\gamma_3 + 5 = 24 \quad 9\gamma_3 = 19 \quad \gamma_3 = \frac{19}{9}$

$9\gamma_2 + 9 = 13 + 6c$ $\quad 9\gamma_2 + 9 = 13 + 108 \quad 9\gamma_2 = 112 \quad \gamma_2 = \frac{112}{9}$

$9\gamma_1 + 45 = 10 + 13c$ $\quad 9\gamma_1 + 45 = 10 + 234 \quad 9\gamma_1 = 199 \quad \gamma_1 = \frac{199}{9}$

$180 = 10c \Rightarrow c = 18$ $\qquad c \gg 2$ ok!

$$C(s) = \frac{2{,}11 s^3 + 12{,}4 s^2 + 13{,}2 s + 20}{s(s^2+9)}$$

8.

La differenza massima fra gli argomenti della funzione $y(\cdot)$ è 4.
Quindi l'ordine del sistema è $n = 4$.
Si effettua la sostituzione $(k-4) \to k$:

$$y(k-4) - 8y(k-4+2) + 16y(k-4+4) = 16u(k-4+4) + 16u(k-4+1)$$

$$16y(k) - 8y(k-2) + y(k-4) = 16u(k) + 16u(k-3)$$

La funzione di trasferimento è

$$H(z) = \frac{16z^4 + 16z}{16z^4 - 8z^2 + 1} \triangleq \frac{b(z)}{a(z)}$$

Per un sistema del 4° ordine il criterio di Jury afferma:
Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia asintoticamente stabile è che le seguenti disuguaglianze siano soddisfatte:

1) $a(1) > 0$: $16 - 8 + 1 = 9 > 0$ ok!
2) $(-1)^4 a(-1) > 0$: $16 - 8 + 1 = 9 > 0$ ok!
3) $|a_0| < a_4$: $1 < 16$ ok!
4) $|b_0| > |b_3|$: $255 > 0$ ok!
5) $|c_0| > |c_2|$: $255^2 > 255 \cdot 120$ ok!

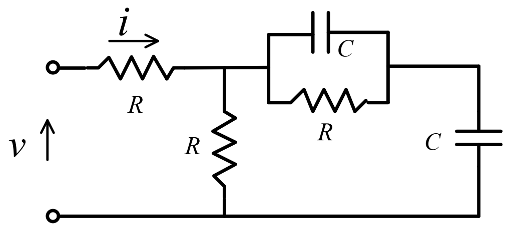
Tabella di Jury

1	1	0	-8	0	16
2	16	0	-8	0	1
3	-255	0	120	0	
4	0	120	0	-255	
5	255^2	0	$-255 \cdot 120$		

Parte A

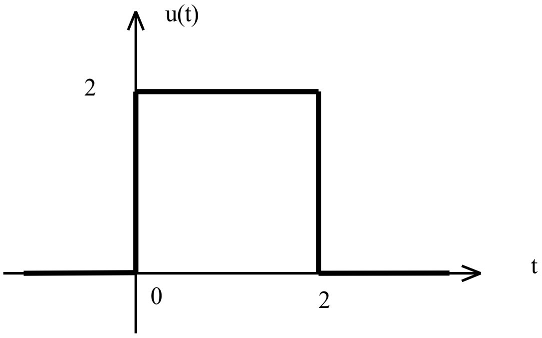
1. [punti 4,5] Esporre il metodo dell'equazione diofantea per la sintesi dei controllori nei sistemi di controllo in retroazione.

2. [punti 4,5] La rete elettrica di figura definisca un sistema dinamico orientato dalla tensione v (ingresso) alla corrente i (uscita).



Di tale sistema si determini (per semplicità si definisce $T := RC$):
1) la funzione di trasferimento, 2) gli zeri, 3) i modi, 4) l'equazione differenziale.

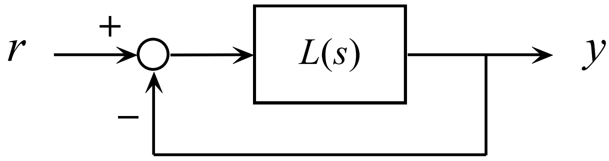
3. [punti 4,5] Dato un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{8}{(s+2)(s+4)}$ determinare la risposta forzata $y(t)$ (per $t > 0$) al segnale di ingresso definito in figura:



4. [punti 4,5] Presentare il metodo di Tustin per la discretizzazione dei controllori a tempo continuo. Includere una discussione sulla stabilità del controllore a tempo discreto così determinato.

Parte B

5. [punti 4,5] Sia dato il seguente sistema retroazionato



dove $L(s) = 2\dfrac{1+5s}{(1+s)^2(1+0,5s)^2}$.

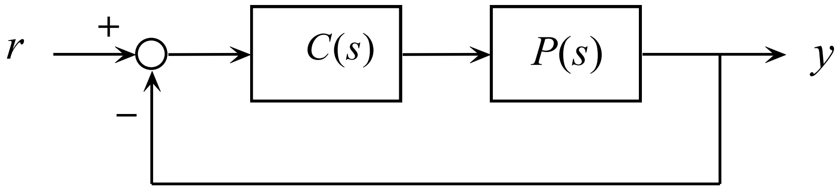
a) Tracciare il diagramma polare associato alla funzione di trasferimento $L(s)$ determinando in particolare le intersezioni con l'asse reale.
b) Studiare la stabilità del sistema retroazionato utilizzando il Criterio di Nyquist.

6. [punti 4,5] Si tracci il luogo delle radici della seguente equazione caratteristica

$$1 + K_1 \frac{s-1}{(s+1)^3(s+2)^2} = 0$$

per $K_1 \in [0, +\infty)$. In particolare si determinino gli asintoti e si dimostri che non esistono radici doppie sul luogo.

7. [punti 4,5] Sia dato il sistema in retroazione di figura



dove $P(s) = \dfrac{s-1}{s^2+2s+2}$. Progettare un controllore $C(s)$ di ordine minimo affinché in risposta ad un gradino del segnale di comando si abbia: 1) l'errore a regime nullo; 2) tempo di assestamento $T_a \simeq$ secondi ; 3) sovraelongazione $S \simeq$ %.

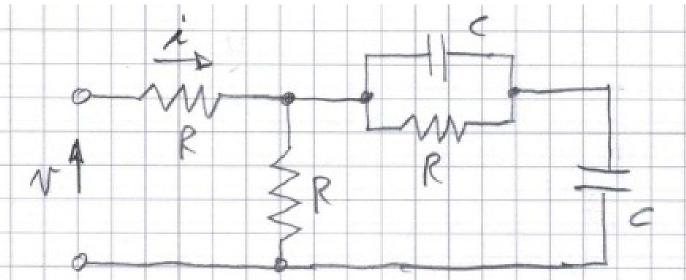
8. [punti 4,5] Determinare la risposta forzata $y(k)$ all'ingresso $u(k) = 1(k)$ (gradino unitario) di un sistema a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze

$$y(k) + \frac{1}{4}y(k-1) - \frac{1}{8}y(k-2) = u(k) + 4u(k-1) + 4u(k-2) \ .$$

Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

2.



$v \equiv$ tensione

$i \equiv$ corrente

$V(s) = Z_{tot} \cdot I(s)$

$I(s) = \dfrac{1}{Z_{tot}} \cdot V(s)$

$T := RC$

$$Z_{tot} = R + \frac{R \cdot \left(\frac{1}{Cs} + \frac{R \cdot \frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} \right)}{R + \frac{1}{Cs} + \frac{R \cdot \frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}}}$$

Quindi $Z_{tot}(s) = R \cdot \dfrac{R^2C^2s^2 + 5RCs + 2}{R^2C^2s^2 + 3RCs + 1} = R \cdot \dfrac{T^2s^2 + 5Ts + 2}{T^2s^2 + 3Ts + 1}$

La funzione di trasferimento è $G(s) := \dfrac{1}{Z_{tot}(s)}$

$$G(s) = \frac{T^2s^2 + 3Ts + 1}{R(T^2s^2 + 5Ts + 2)}$$

zeri: $T^2s^2 + 3Ts + 1 = 0 \Rightarrow z_1 = -\dfrac{3+\sqrt{5}}{2T}, \quad z_2 = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2T}$

poli: $T^2s^2 + 5Ts + 2 = 0 \Rightarrow p_1 = -\dfrac{5+\sqrt{17}}{2T}, \quad p_2 = \dfrac{-5+\sqrt{17}}{2T}$

modi: $\left\{ \exp\left(-\dfrac{5+\sqrt{17}}{2T} \cdot t\right), \exp\left(\dfrac{-5+\sqrt{17}}{2T} \cdot t\right) \right\}$

Eq. differenziale:

$$RT^2 D^2 i(t) + 5RTDi(t) + 2R \cdot i(t) = $$
$$= T^2 D^2 v(t) + 3TDv(t) + v(t)$$

3.

$$u(t) = 2 \cdot 1(t) - 2 \cdot 1(t-2)$$

$$U(s) = 2 \cdot \frac{1}{s} - 2 \cdot e^{-2s} \cdot \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{8}{(s+2)(s+4)} \left\{ 2 \cdot \frac{1}{s} - 2\, e^{-2s} \cdot \frac{1}{s} \right\} =$$

$$= \frac{16}{s(s+2)(s+4)} - e^{-2s} \cdot \frac{16}{s(s+2)(s+4)}$$

$$y_1(t) \triangleq \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{16}{s(s+2)(s+4)} \right]$$

$$Y(s) = Y_1(s) - e^{-2s}\, Y_1(s)$$

$$y(t) = y_1(t) - y_1(t-2)$$

Calcolo di $y_1(t)$:

$$\frac{16}{s(s+2)(s+4)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+2} + \frac{k_3}{s+4}$$

$$k_1 = \left. \frac{16}{(s+2)(s+4)} \right|_{s=0} = 2$$

$$k_2 = \left. \frac{16}{s(s+4)} \right|_{s=-2} = \frac{16}{(-2)\,2} = -4$$

$$k_3 = \left. \frac{16}{s(s+2)} \right|_{s=-4} = \frac{16}{(-4)(-2)} = 2$$

$$y_1(t) = \left[2 - 4\,e^{-2t} + 2\,e^{-4t} \right] \cdot 1(t)$$

$$y(t) = \left[2 - 4e^{-2t} + 2e^{-4t}\right] \cdot 1(t)$$
$$- \left[2 - 4e^{-2(t-2)} + 2e^{-4(t-2)}\right] \cdot 1(t-2)$$

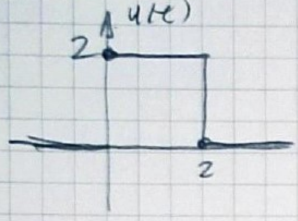
per $t \in (0, 2)$

$$y(t) = 2 - 4e^{-2t} + 2e^{-4t}$$

per $t \in [2, +\infty)$

$$y(t) = \cancel{2} - 4e^{-2t} + 2e^{-4t} - \cancel{2} + 4e^{-2(t-2)} - 2e^{-4(t-2)} =$$
$$= \left(e^{4} - 1\right) 4e^{-2t} + \left(1 - e^{8}\right) 2e^{-4t}$$

$$G(s) = \frac{8}{(s+2)(s+4)} \qquad \text{grado relativo } \rho = 2$$



$y(t)$?

$$Dy = 8e^{-2t} - 8e^{-4t}$$

per $t \in [0,2)$ $\quad y(t) = 2 - 4e^{-2t} + 2e^{-4t}$

per $t \geq 2$ $\quad y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t}$

$y(t)$ ha grado minimo di continuità pari a $\rho - 1 = 1$.

Quindi $y \in C^1$.

$$y(2^-) = y(2^+), \quad Dy(2^-) = Dy(2^+)$$

Se $t \geq 2$ $\quad Dy = -2c_1 e^{-2t} - 4c_2 e^{-4t}$

$$\begin{cases} c_1 e^{-4} + c_2 e^{-8} = 2 - 4e^{-4} + 2e^{-8} \\ -2c_1 e^{-4} - 4c_2 e^{-8} = 8e^{-4} - 8e^{-8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^4 c_1 + c_2 = 2e^8 - 4e^4 + 2 \\ -2e^4 c_1 - 4c_2 = 8e^4 - 8 \end{cases}$$

risolvendo il sistema (OK da Maple)

$$c_1 = 4e^4 - 4$$

$$c_2 = -2e^8 + 2$$

4.
Vedi dispense del corso.

5.

a)

$$L(j\omega) = 2\frac{1+5j\omega}{(1+j\omega)^2(1+0,5j\omega)^2}$$

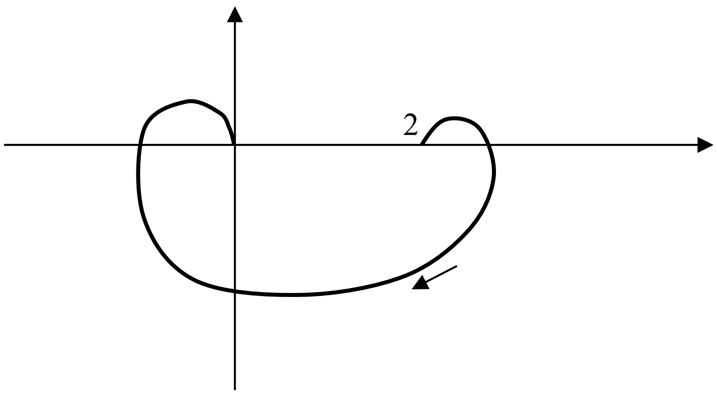
$$|L(j\omega)| = 2\frac{\sqrt{1+25\omega^2}}{(1+\omega^2)(1+\omega^2/4)}$$

$$\arg L(j\omega) = \arctan(5\omega) - 2\arctan(\omega) - 2\arctan(0,5\omega)$$

$$L(j0) = 2$$

$$\lim_{\omega\to\infty} |L(j\omega)| = 0 \qquad \lim_{\omega\to\infty} \arg L(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi$$

Per ω piccolo vale $\arg L(j\omega) \simeq \quad -2\cdot 0,5\omega = 2\omega > 0$ e $|L(j\omega)| > |L(j0)|$. Ne consegue quindi il seguente tracciamento qualitativo del diagramma polare:



Si prevedono quindi la presenza di due intersezioni del diagramma con l'asse reale (escluse quelle in 0 e 2). Le pulsazioni corrispondenti a tali intersezioni possono essere determinate risolvendo l'equazione

$$\arg L(j\omega) = 0 \quad (-\pi)$$

ovvero

$$\arctan(5\omega) + 0 \ (+\pi) = 2\arctan\omega + 2\arctan(0,5\omega)$$

Applicando la funzione $\tan(\cdot)$ ad entrambi i membri si ottiene:

$$5\omega = \frac{\dfrac{2\omega}{1-\omega^2} + \dfrac{\omega}{1-\frac{1}{4}\omega^2}}{1 - \dfrac{2\omega}{1-\omega^2}\,\dfrac{\omega}{1-\frac{1}{4}\omega^2}}$$

Eliminando la soluzione $\omega = 0$ e ponendo $x := \omega^2$ si giunge all'equazione algebrica di secondo grado

$$5x^2 - 59x + 8 = 0$$

da cui le soluzioni $x_1 = 0{,}137188$ e $x_2 = 11{,}6628$. Considerando le soluzioni positive di ω otteniamo

$$\begin{cases} \omega_1 = 0,37038 \quad \text{rad/sec} \\ \omega_2 = 3,41508 \quad \text{rad/sec} \end{cases}$$

Le intersezioni cercate sono quindi

$$\begin{cases} L(j\omega_1) = 3,5788 \\ L(j\omega_2) = -0,6899 \end{cases}$$

b)

Il guadagno di anello L(s) non ha poli a parte reale positiva ed il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto critico -1 . Per il Criterio di Nyquist il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Si noti che il margine di ampiezza associato è facilmente determinabile come

$$M_A = \frac{1}{|L(j\omega_2)|} \cong 1,45$$

6.

La configurazione dei poli e zeri è la seguente:

- uno zero in $s = 1$ con molteplicità 1
- un polo in $s = -1$ con molteplicità 3
- un polo in $s = -2$ con molteplicità 2

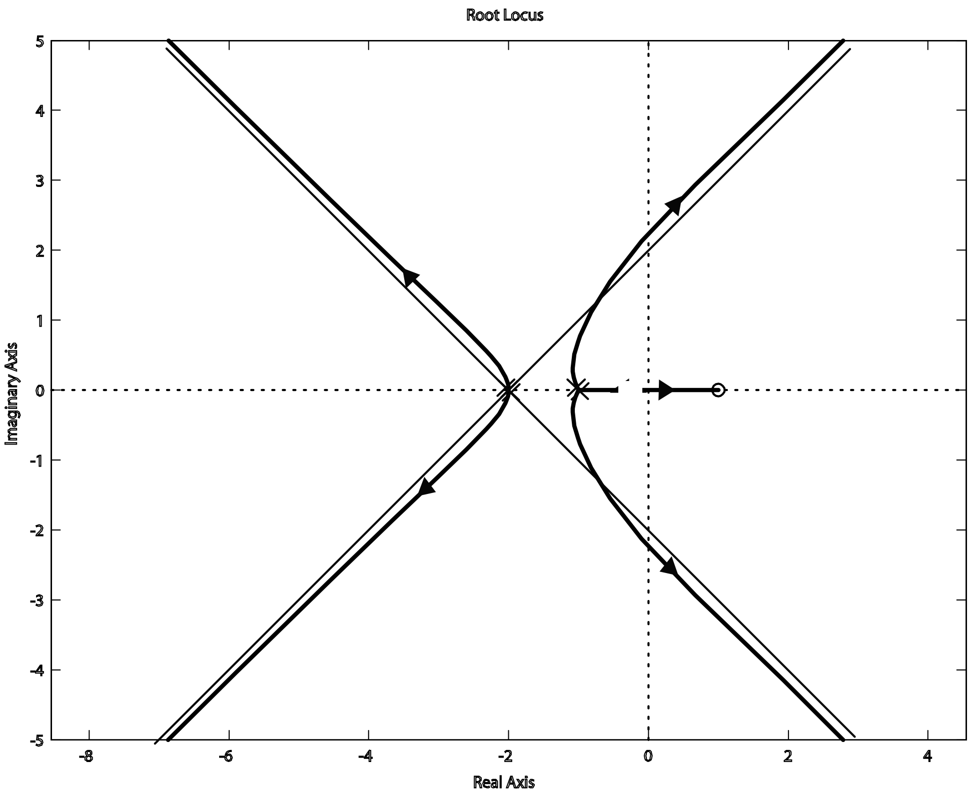
Essendo $n - m = 4$ il luogo presenta quattro asintoti.
Tali asintoti formano una stella di raggi con centro nel punto dell'asse reale di ascissa

$$\sigma_a = \frac{1}{4}((-1-1-1-2-2)-1) = -2$$

Tenendo conto delle seguenti osservazioni (luogo diretto):

- un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zeri e di poli.
- il luogo delle radici ha 5 rami.
- gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli
  $\theta_{a,0} = \frac{\pi}{4}$; $\theta_{a,1} = \frac{3}{4}\pi$; $\theta_{a,2} = \frac{5}{4}\pi$; $\theta_{a,3} = \frac{7}{4}\pi$
- le radici doppie, se esistono, sono individuate dalle soluzioni della seguente equazione
  $\frac{1}{s-1} - 3\frac{1}{s+1} - 2\frac{1}{s+2} = 0$
  cioè
  $4s^2 - 10 = 0$
  e risultano essere
  $s_1 = -\sqrt{5/2} \cong -1,58$; $s_2 = \sqrt{5/2} \cong 1,58$.
  Queste soluzioni non appartengono al luogo delle radici e quindi non esistono radici doppie sul luogo.

si può dedurre che il luogo delle radici per $K_1 > 0$ ha l'andamento riportato in figura:


Root Locus
Imaginary Axis
Real Axis
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-8
-6
-4
-2
0
2
4

7.

5. Tentativamente si cerca con un controllore di ordine 1 di soddisfare tutte le specifiche imposte:

$C(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s}$, $b_0, b_1 \in \mathbb{R}$ parametri di progetto

$1 + C(s)P(s) = 0 \iff s^3 + (b_1+2)s^2 + (b_0 - b_1 + 2)s - b_0 = 0$

$$\boxed{P_c(s) \triangleq s^3 + (b_1+2)s^2 + (b_0 - b_1 + 2)s - b_0}$$

$T_a = \frac{3}{G_s}$, da $T_a = 9$ sec. $\Rightarrow G_s = \frac{1}{3}$

Si sceglie un polinomio caratteristico desiderato che soddisfi le specifiche 2) e 3):

$P_d(s) = (s + \frac{1}{3})(s+\alpha)(s+\beta)$ con $\alpha, \beta > \frac{1}{3}$

$$\boxed{P_d(s) = s^3 + (\frac{1}{3} + \alpha + \beta)s^2 + (\alpha\beta + \frac{1}{3}(\alpha+\beta))s + \frac{1}{3}\alpha\beta}$$

Si impone $P_c(s) \equiv P_d(s)$

$$\begin{cases} b_1 + 2 = \frac{1}{3} + \alpha + \beta \\ b_0 - b_1 + 2 = \alpha\beta + \frac{1}{3}(\alpha+\beta) \\ -b_0 = \frac{1}{3}\alpha\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{11 - 4\beta}{4\beta + 4}$$

Scegliamo $\beta = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2} > \frac{1}{3}$. Quindi $\begin{cases} b_0 = -\frac{1}{4} \\ b_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$

$C(s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{s - \frac{3}{4}}{s}$ È un controllore di ordine minimo che soddisfa le specifiche richieste.

8.

La funzione di trasferimento è

$$H(z) = \frac{z^2 + 4z + 4}{z^2 + \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}} = \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

$$Y(z) = H(z)\,U(z) = \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)} \cdot \frac{z}{z-1}$$

$$Y(z) = z \cdot \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)(z-1)} = z \cdot \left(\frac{K_1}{z-1} + \frac{K_2}{z+\frac{1}{2}} + \frac{K_3}{z-\frac{1}{4}} \right)$$

$$K_1 = \left. \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)} \right|_{z=1} = 8$$

$$K_2 = \left. \frac{(z+2)^2}{\left(z-\frac{1}{4}\right)(z-1)} \right|_{z=-\frac{1}{2}} = 2$$

$$K_1 + K_2 + K_3 = 1 \Rightarrow K_3 = -9$$

$$Y(z) = 8\frac{z}{z-1} + 2\frac{z}{z+\frac{1}{2}} - 9\frac{z}{z-\frac{1}{4}}$$

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[Y(z)\right] = 8 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 9\left(\frac{1}{4}\right)^k, \quad k \geq 0$$

Parte A

1. [punti 6] Si presentino e si dimostrino le formule di inversione per la sintesi in frequenza delle reti correttrici. Si esponga inoltre come utilizzare tali formule per la sintesi della rete **ritardatrice** con imposizione del **margine di ampiezza** M_A.

2. [punti 6] Dato un sistema retroazionato con guadagno di anello

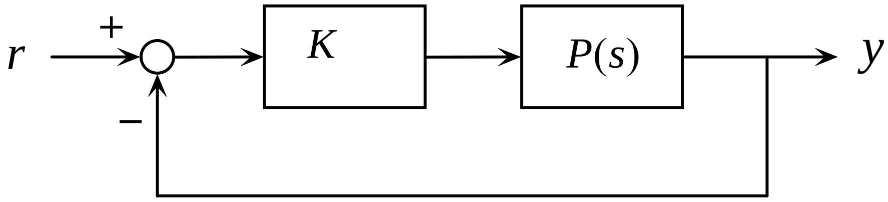
$$L(s) = 100\frac{(s+1)^2}{s^3(s+10)}$$

1. Tracciare il diagramma polare di $L(j\omega)$ determinando le eventuali intersezioni con l'asse reale.
2. Studiare la stabilità del sistema retroazionato con il Criterio di Nyquist.

3. [punti 6] Presentare e dedurre la funzione di trasferimento a tempo discreto $P_d(z)$ di un sistema a tempo continuo $P(s)$ con all'ingresso un mantenitore D/A di ordine zero e all'uscita un campionatore A/D sincronizzati con periodo T.

Parte B

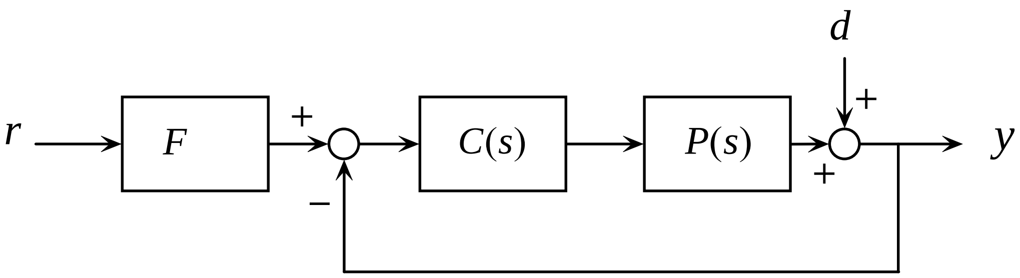
4. [punti 6] Sia dato il sistema in retroazione di figura



dove $P(s) = \dfrac{s+3}{s(s+2)^3}$.

a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K > 0$ determinando in particolare
   1. Asintoti del luogo.
   2. Eventuali radici doppie.
   3. Angoli di partenza del luogo.
b. Determinare i valori di $K \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Determinare inoltre le intersezioni del luogo delle radici dell'equazione caratteristica con l'asse immaginario del piano complesso.
c. Determinare il valore di K che massimizza il grado di stabilità del sistema retroazionato: $K^* = \arg\max_{K\in\mathbb{R}} G_S(K)$.

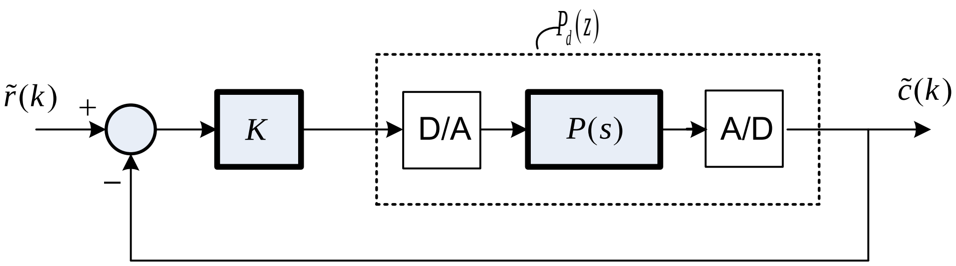
5. [punti 6] Sia dato lo schema di sistema di controllo di figura



dove $P(s) = \dfrac{4}{s+2}$. Determinare un controllore $C(s)$ di ordine minimo ed il blocco algebrico $F \in \mathbb{R}$ affinché il sistema di controllo soddisfi le seguenti specifiche:

1. reiezione infinita asintotica al disturbo sinusoidale $d(t) = 3\sin(2t+4)$;
2. sistema retroazionato con poli dominanti in $-2, \ -3$;
3. costante di posizione $K_p = 4$;
4. in condizioni nominali l'errore a regime in risposta ad un gradino del riferimento sia nullo.

6. [punti 6] Determinare i valori di $K \in \mathbb{R}$ che assicurano la stabilità asintotica del sistema di controllo in figura. Il periodo di campionamento è $T = 0.02$ s e $P(s) = \frac{10}{s(s+10)}$.



Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

2.

1) Sia $L(s) := \dfrac{100(s+1)^2}{s^3(s+10)}$

$$L(j\omega) = \frac{100(j\omega+1)^2}{(j\omega)^3(j\omega+10)}$$

$$|L(j\omega)| = \frac{100(1+\omega^2)}{\omega^3(100+\omega^2)^{1/2}}$$

$$\arg L(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi - arctg\,0.1\omega + 2arctg\,\omega$$

Studio del diagramma polare di $L(j\omega)$:

Comportamento per $\omega \to 0^+$:
Il diagramma polare parte da un punto all'infinito

$$\lim_{\omega\to\infty} |L(j\omega)| = \infty$$

$$\lim_{\omega\to 0^+} \arg L(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi$$

Comportamento per $\omega \to \infty$:
Il diagramma termina nell'origine tangente a uno degli assi coordinati, essendo

$$\lim_{\omega\to\infty} |L(j\omega)| = 0$$

$$\lim_{\omega\to\infty} \arg L(j\omega) = -\pi$$

La rotazione complessiva intorno all'origine per ω variabile da 0 a ∞ è di $-\pi$.

Calcolo dell'intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo:

$$\arg L(j\omega_p) = -\pi$$

$$-\frac{3}{2}\pi - arctg\,0.1\omega + 2arctg\,\omega = -\pi$$

$$-arctg\,0.1\omega + 2arctg\,\omega = \frac{\pi}{2}$$

$$1 + tg(2arctg\,\omega)\cdot 0.1\omega = 0$$

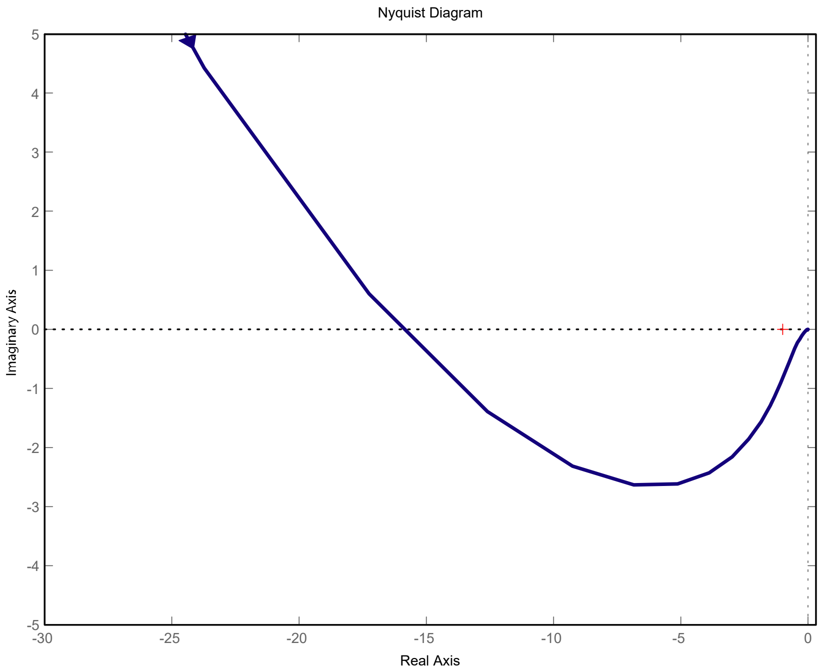
$$1 + \frac{2\omega}{1-\omega^2} - \frac{\omega}{10} = 0$$

$$\omega_p = \sqrt{5/4} \simeq 1.118 rad/\sec$$

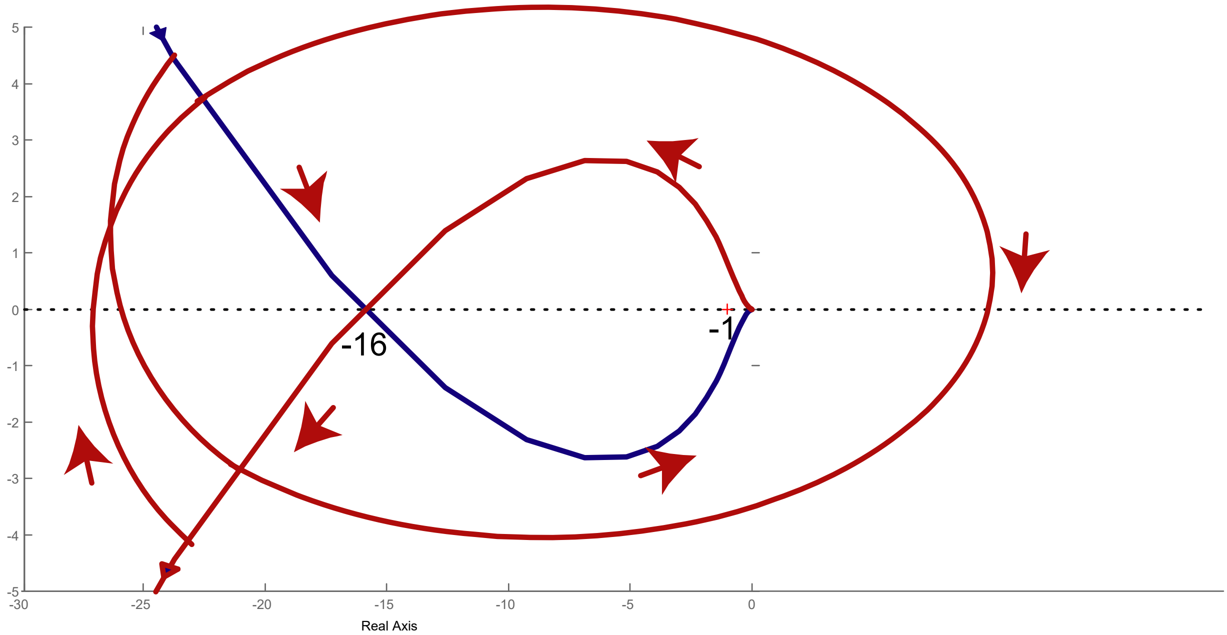
$$\left|L\left(j\omega_p\right)\right| = 16$$

$$L\left(j\omega_p\right) = -16$$

Il diagramma polare del guadagno di anello risulta pertanto:



2) Il diagramma polare completo è:



Si può concludere che per il criterio di Nyquist il sistema retroazionato è **asintoticamente stabile**, infatti il numero totale di giri del diagramma polare completo attorno al punto critico -1 è nullo.

3.
Vedi dispense dell'insegnamento.

4.

a) L'equazione caratteristica del sistema è data da $1 + L(s) = 0$ dove il guadagno di anello vale

$$L(s) = K\,\frac{s+3}{s\,(s+2)^3}$$

Il grado relativo è $\rho = 3$ e quindi avrò tre asintoti separati tra loro da angoli di $120°$ che si intersecano nel punto ∇_a che viene determinato nel modo seguente

$$\nabla_a = \frac{\sum_i p_i - \sum_i z_i}{\rho} = \frac{-2-2-2-0-(-3)}{3} = -1$$

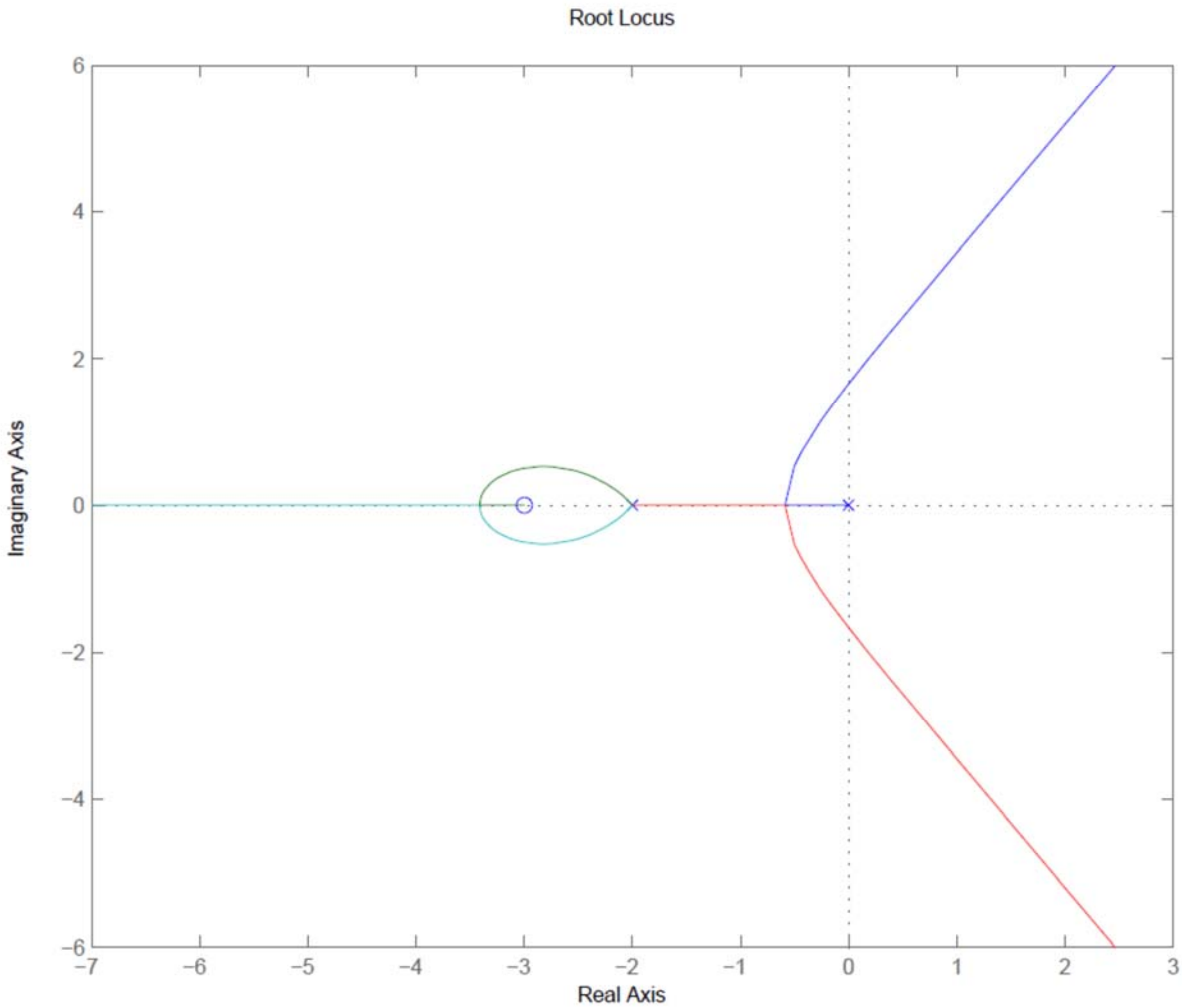
Si determinano le eventuali radici doppie come segue

$$\sum_i \frac{1}{s-p_i} - \sum_i \frac{1}{s-z_i} = \frac{1}{s} + \frac{3}{s+2} - \frac{1}{s+3} = 0$$

ottenendo l'equazione di secondo grado $s^2 + 4s + 2 = 0$ risolvendo la quale si ricava che le radici doppie sono in

$$s_1 = -0.5858 \qquad \text{e} \qquad s_2 = -3.4142$$

Per quanto riguarda gli angoli di partenza, è facile determinare che il polo nell'origine avrà angolo iniziale $\theta_1 = \pi$ mentre i tre poli in -2 avranno angoli di partenza $\theta_{1a} = 0$, $\theta_{1b} = \frac{2}{3}\,\pi$ e $\theta_{1b} = -\frac{2}{3}\,\pi$. Il luogo delle radici per $K > 0$ è quindi il seguente



b) L'equazione caratteristica è la seguente

$$1 + K\,\frac{s+3}{s\,(s+2)^3} = 0$$

dalla quale viene determinato il polinomio caratteristico

$$p_c(s;K) = s^4 + 6\,s^3 + 12\,s^2 + (8+K)\,s + 3\,K$$

Applichiamo il Criterio di Routh e costruiamo la seguente tabella

$$\begin{array}{c|cccc} \mathbf{4} & 1 & 12 & 3\,K & 0 \\ \mathbf{3} & 6 & 8+K & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & \text{64-K} & \text{18K} & 0 & \\ \mathbf{1} & f(K) & 0 & & \\ \mathbf{0} & 18\,K & 0 & & \end{array}$$

dove $f(K) = -K^2 - 52\,K + 512$. Perchè il sistema sia asintoticamente stabile devono quindi valere le condizioni

$$\begin{cases} -K^2 - 52\,K + 512 > 0 \\ 18\,K > 0 \end{cases}$$

Risolvendo la disequazione di secondo grado si ottiene che $f(K) > 0$ per $-60.4674 < K < 8.4674$, per cui, tenendo conto della seconda condizione ricavata dalla tabella di Routh, possiamo dire che il sistema è asintoticamaente stabile se

$$K \in (0, 8.4674)$$

Per determinare le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario, annulliamo la riga **1** della tabella di Routh, ponendo $f(K) = 0$ ed abbiamo che la tabella di Routh presenta una singolarità completa per $K = 8.4674$. Ora determino le radici del polinomio ausiliario

$$a_2(s;K) = (64 - K)\,s^2 + 18\,K$$

per $K = 8.4674$ ed ottengo che le intersezioni del luogo con l'asse immaginario sono in

$$s_{1,2} = \pm 1.6567$$

c) Dal luogo delle radici si nota facilmente che il grado di stabilità G_s è massimo nella radice doppia in -0.5858. Risolvendo l'equazione caratteristica $1 + K^* G(s) = 0$ in $s = -0.5858$ si ha che

$$K^* = -\frac{1}{G(-0.5858)}$$

e si ottiene che il guadagno K^* che massimizza G_s vale

$$K^* = 0.6863$$

5.

5) $C(s) = \dfrac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2+4}$

$L(s) \triangleq C(s)\,P(s) = \dfrac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2+4} \cdot \dfrac{4}{s+2}$; $L(0) = \dfrac{b_0}{2}$

$K_p = L(0) = \dfrac{b_0}{2}$. Da $K_p = 4 \Rightarrow b_0 = 8$

$1 + L(s) = 0 \qquad 1 + \dfrac{4(b_2 s^2 + b_1 s + 8)}{(s^2+4)(s+2)} = 0$

$(s^2+4)(s+2) + 4(b_2 s^2 + b_1 s + 8) = 0$

polinomio caratteristico associato al controllore:

$P_c(s) \triangleq s^3 + (4b_2+2)s^2 + (4b_1+4)s + 40$

Il polinomio caratteristico desiderato è

$P_d(s) \triangleq (s+2)(s+3)(s+c) = s^3 + (c+5)s^2 + (5c+6)s + 6c$

con $c >> 3$

Si impone $P_c(s) \equiv P_d(s)$

$$\begin{cases} 4b_2 + 2 = c+5 & \Rightarrow b_2 = \dfrac{29}{12} \\ 4b_1 + 4 = 5c+6 & \Rightarrow b_1 = \dfrac{53}{6} \\ 40 = 6c & \Rightarrow c = \dfrac{20}{3} >> 3 \quad \text{ok!} \end{cases}$$

$T_{ry}(0) = 1 \qquad F \cdot \dfrac{L(0)}{1+L(0)} = 1 \qquad F \cdot \dfrac{4}{1+4} = 1 \qquad F = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$

6.

1)

$$P(s) = \frac{10}{s(s+10)} \quad , T = 0.02 \text{ sec}$$

$$P_d(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[\frac{P(s)}{s}, T\right]$$

$$\frac{P(s)}{s} = \frac{10}{s^2(s+10)} = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_2}{s+10} = \frac{1}{s^2} - \frac{0.1}{s} + \frac{0.1}{s+10}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{s}\right] = t - 0.1 + 0.1 \cdot e^{-10 \cdot t} \quad , t \geq 0$$

$$\mathcal{Z}\left[\frac{P(s)}{s}, T\right] = \mathcal{Z}\left[P_s(kT)\right] = \mathcal{Z}\left[k \cdot 0.02 - 0.1 + 0.1 \cdot e^{-10 \cdot k \cdot 0.02}\right] =$$

$$= 0.02 \cdot \frac{z}{(z-1)^2} - 0.1 \frac{z}{z-1} + 0.1 \, \mathcal{Z}\left[\left(e^{-0.2}\right)^k\right] =$$

$$= 0.02 \frac{z}{(z-1)^2} - 0.1 \frac{z}{z-1} + 0.1 \frac{z}{z-0.8187}$$

$$P_d(z) = 0.02 \frac{1}{z-1} - 0.1 + 0.1 \frac{z-1}{z-0.8187} =$$

$$= \frac{0.02 \cdot (z-0.8187) - 0.1(z-1)(z-0.8187) + 0.1(z-1)^2}{(z-1)(z-0.8187)} =$$

$$= \frac{0.00187 \cdot z + 0.001756}{(z-1)(z-0.8187)}$$

$$T_{\tilde{z}\tilde{c}}(z) = \frac{L(z)}{1+L(z)} \quad ; \quad L(z) := k \, P_d(z)$$

eq. caratteristica : $1 + k \, P_d(z) = 0$

$$1 + k\,\frac{0{,}00187\cdot z + 0{,}001756}{(z-1)\,(z-0{,}8187)} = 0$$

$$(z-1)(z-0{,}8187) + k\,(0{,}00187\cdot z + 0{,}001756) = 0$$

$$z^2 + (0.00187\cdot k - 1{,}8187)\,z + 0{,}001756\cdot k + 0{,}8187 = 0$$

$$a(z) = 0$$

Condizioni di stabilità asintotica

1) $a(1) > 0$

2) $(-1)^n\, a(-1) > 0$

3) $|a_0| < a_2$

1) $\cancel{1} + 0.00187\cdot k - \cancel{1{,}8187} + 0{,}001756\cdot k + \cancel{0{,}8187} > 0$

$k > 0$

2) $1 - 0{,}00187\cdot k + 1{,}8187 + 0{,}001756\cdot k + 0{,}8187 > 0$

$-0{,}000114\cdot k + 3{,}6374 > 0$

$3{,}6374 > 0{,}000114\cdot k$

$k < \dfrac{3{,}6374}{0{,}000114} \qquad k < 31907{,}02$

3) $|0{,}001756\cdot k + 0{,}8187| < 1$

$0{,}001756\cdot k + 0{,}8187 < 1 \qquad 0{,}001756\,k < 0{,}1813$

$k < 103{,}25$

$-0{,}001756\,k - 0{,}8187 < 1$

$-0{,}001756\,k < 1{,}8187 \qquad 0{,}001756\,k > -1{,}8187$

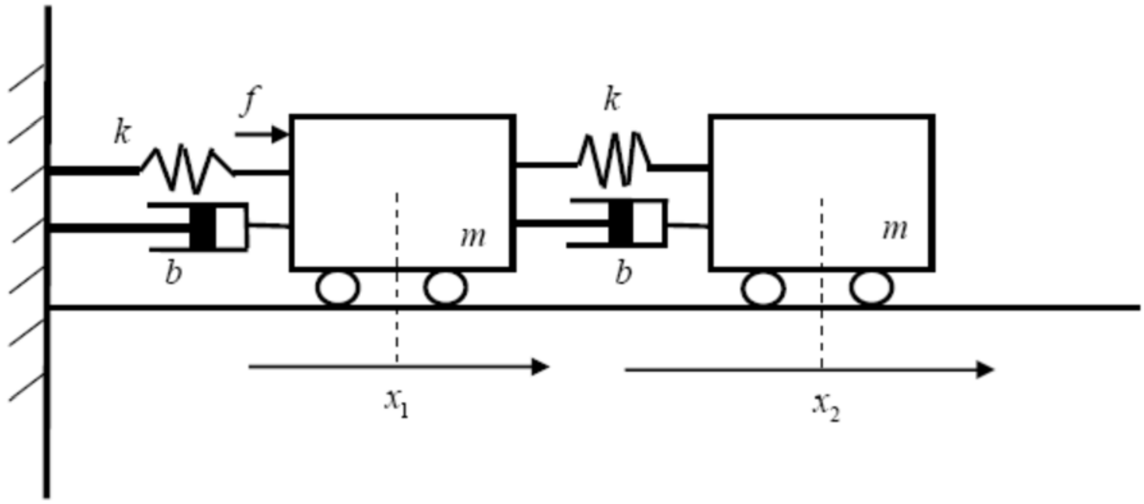
$k > -1035{,}71$

Quindi $\boxed{0 < k < 103{,}25}$

Parte A

1. [punti 4,5] Definire la stabilità asintotica interna per un sistema di controllo in retroazione. Enunciare e dimostrare una condizione necessaria e sufficiente che assicuri questa stabilità.
Fornire inoltre un esempio di sistema retroazionato asintoticamente stabile come sistema orientato dal segnale di comando all'uscita controllata ma non stabile internamente.

2. [punti 4,5] Due carrelli di massa m collegati come mostrato in figura costituiscono un sistema dinamico Σ orientato da f (forza applicata al carrello di sinistra) ad x_1 (posizione del carrello di sinistra). In condizione di riposo delle molle sia $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$.



1. Determinare l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.
2. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ di Σ.

3. [punti 4,5] Determinare la risposta forzata $y(t)$ di un sistema dinamico avente funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{32}{(s+2)^3(s+4)}$ al segnale di ingresso $u(t) = t \cdot 1(t)$. Determinare inoltre il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$.

4. [punti 4,5] Sia Σ_d un sistema a tempo discreto descritto dalla funzione di trasferimento $H(z) = \dfrac{b(z)}{a(z)}$ con $a(z)$ e $b(z)$ polinomi coprimi fra loro. Presentare e dimostrare una condizione necessaria e sufficiente (in relazione ai poli del sistema) che assicuri la stabilità asintotica di Σ_d.

Parte B

5. [punti 4,5]
1) Tracciare il diagramma polare associato alla funzione di trasferimento

$$P(s)=\frac{100(1-s)^2}{s(s+2)^3}$$

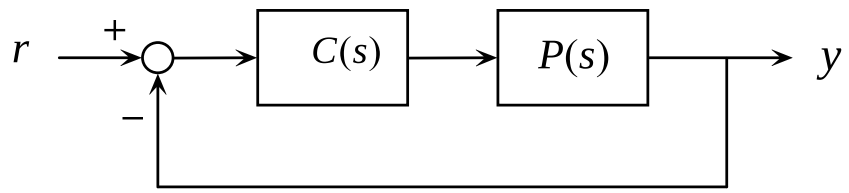
determinando in particolare l'asintoto e l'intersezione con l'asse reale negativo.
2) Utilizzando il Criterio di Nyquist si studino le radici dell'equazione caratteristica $1+P(s)=0$ (quante a parte reale negativa, quante puramente immaginarie, quante a parte reale positiva).

6. [punti 4,5] Si tracci il luogo delle radici della seguente equazione caratteristica:

$$1+K\frac{1-s}{(s+1)^3(s+2)^2}=0 \quad , \quad K\in[0,+\infty)$$

determinando in particolare asintoti e radici doppie.

7. [punti 4,5] Sia dato il sistema in retroazione di figura



dove $P(s)=\dfrac{10}{(1+s)(1+0,4s)^2}$. Progettare un controllore con struttura di rete a ritardo e anticipo $C(s)=\dfrac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)+\tau_{12}s}$ affinché il sistema retroazionato sia stabile asintoticamente con margine di fase $M_F=45^\circ$ (si assuma $\dfrac{\tau_1}{\tau_2}=10$).

8. [punti 4,5] Determinare la risposta forzata $y(k)$ all'ingresso $u(k)=1(k)$ di un sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento $H(z)=\dfrac{z^2+z+1}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)}$.

Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

2.

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = f - k x_1 - b D x_1 + k(x_2 - x_1) + b(D x_2 - D x_1) \\ m D^2 x_2 = -k(x_2 - x_1) - b(D x_2 - D x_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (bD + k)\, x_2 = m D^2 x_1 + 2bD x_1 + 2k x_1 - f \\ (m D^2 + bD + k)\, x_2 = bD x_1 + k x_1 \end{cases}$$

$$(m D^2 + bD + k)(m D^2 x_1 + 2bD x_1 + 2k x_1 - f) =$$
$$= (bD + k)(bD x_1 + k x_1)$$

$$(m D^2 + bD + k)(m D^2 + 2bD + 2k)\, x_1 - (m D^2 + bD + k) f =$$
$$= (bD + k)^2 x_1$$

$$(m^2 D^4 + 3bm D^3 + (3km + 2b^2) D^2 + 4bk D + 2k^2)\, x_1$$
$$- (b^2 D^2 + 2bk D + k^2)\, x_1 = (m D^2 + bD + k) f$$

1

$$\boxed{\begin{aligned} & m^2 D^4 x_1 + 3bm D^3 x_1 + (3km + b^2) D^2 x_1 + 2bk D x_1 + k^2 x_1 = \\ & \qquad = m D^2 f + bD f + k f \end{aligned}}$$

2

$$\boxed{G(s) = \frac{m s^2 + b s + k}{m^2 s^4 + 3bm s^3 + (3km + b^2) s^2 + 2bk s + k^2}}$$

3.

$$U(s) = \frac{1}{s^2} \qquad Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{32}{s^2 (s+2)^3 (s+4)}$$

$$= \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_{21}}{(s+2)^3} + \frac{K_{22}}{(s+2)^2} + \frac{K_{23}}{s+2} + \frac{K_3}{s+4}$$

RESIDUI

$$K_{11} = \left.\frac{32}{(s+2)^3 (s+4)}\right|_{s=0} = \frac{32}{32} = 1$$

$$K_{21} = \left.\frac{32}{s^2 (s+4)}\right|_{s=-2} = \frac{32}{4 \cdot 2} = 4$$

$$K_3 = \left.\frac{32}{s^2 (s+2)^3}\right|_{s=-4} = \frac{32}{4 \cdot 4 \cdot (-8)} = -\frac{1}{4}$$

$$K_{12} + K_{23} + K_3 = 0 \qquad \boxed{K_{12} + K_{23} = \frac{1}{4}}$$

calcolo di K_{12} : $K_{12} = D\left[\frac{32}{(s+2)^3 (s+4)}\right]_{s=0} = -\frac{7}{4}$

$$= -(32)\left.\frac{3(s+2)^2(s+4) + (s+2)^3}{(s+2)^6 (s+4)^2}\right|_{s=0} = -\overset{8}{\cancel{32}} \cdot \frac{3 \cdot 4 \cdot \cancel{4} + \cancel{4} \cdot 2}{2^6 \cdot \cancel{4^2}} = -\cancel{8}\,\frac{3 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} + \cancel{2}}{\cancel{2^3} \cdot \cancel{2} \cdot 4} =$$

$$-\frac{7}{4}+K_{23}=\frac{1}{4}$$

$$K_{23}=\frac{1}{4}+\frac{7}{4}=\frac{8}{4}=2$$

$$K_{23}=2$$

$$y(t)=\Big(t-\frac{7}{4}+4\cdot\frac{1}{2!}t^2e^{-2t}$$
$$+K_{22}\,t\,e^{-2t}+2e^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-4t}\Big)\,1(t)$$

$$K_{22}=D\left[\frac{32}{s^2(s+4)}\right]\Bigg|_{s=-2}=$$

$$=-32\cdot\frac{2s(s+4)+s^2}{s^4(s+4)^2}\Bigg|_{s=-2}=-32\,\frac{-\cancel{4}\cdot 2+\cancel{4}}{2^4\cdot\cancel{4}}=$$

$$=-\cancel{16}\cdot 2\,\frac{-1}{\cancel{16}}=2$$

$$y(t)=\Big(-\frac{7}{4}+t+2t^2e^{-2t}+2te^{-2t}+2e^{-2t}$$
$$-\frac{1}{4}e^{-4t}\Big)\cdot 1(t)$$

$$Y(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{s}+\frac{4}{(s+2)^3}+\frac{2}{(s+2)^2}+\frac{2}{s+2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+4}$$

ok!

Il grado relativo del sistema è uguale a 4. Considerato che il segnale di ingresso ha grado massimo di continuità pari a 0 segue dalla nota proprietà che il grado massimo del segnale di uscita è uguale a 4.

4. Vedi dispense del corso.

5.

a) Funzione di Trasferimento:

$$P(s) = 100\,\frac{(1-s)^2}{s\,(s+2)^3} \;\Rightarrow\; P(j\omega) = 12.5\,\frac{(1-j\omega)^2}{j\omega\,(1+0.5\,j\omega)^3}$$

Ascissa dell'asintoto: $\nabla_a = 12.5\,(-1-1-0.5-0.5-0.5) = -43.75$
Argomento della funzione di trasferimento:

$$\arg P(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 3\,\arctan(0.5\,\omega) - 2\,\arctan\omega$$

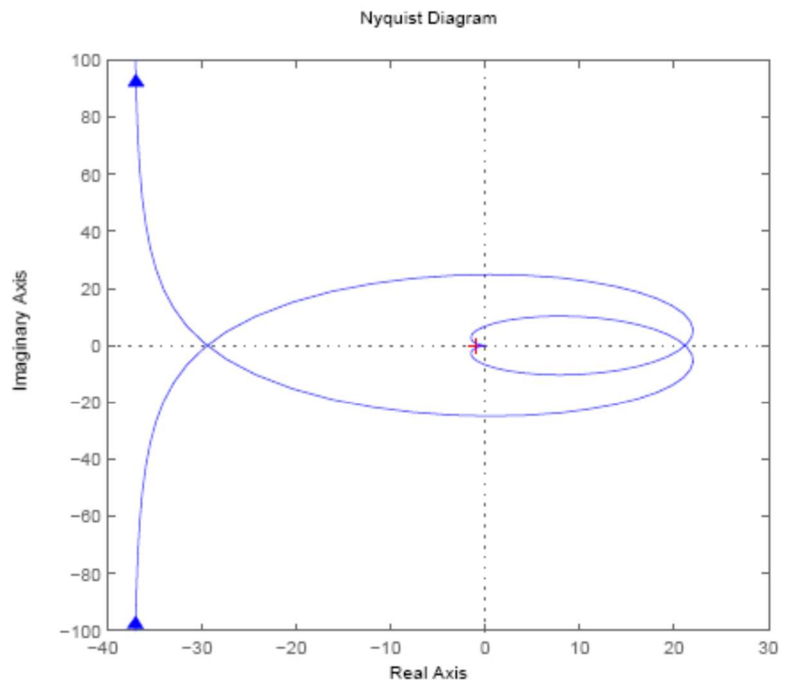
$$\text{per}\,\omega \to 0 \;\Rightarrow\; \arg P(j\omega) \to -\frac{\pi}{2} \qquad \text{per}\,\omega \to +\text{inf} \;\Rightarrow\; \arg P(j\omega) \to -3\,\pi$$

Intersezione con l'asse reale negativo:

$$\arg P(j\omega_p) = -\pi \Rightarrow 3\,\arctan\frac{\omega_p}{2} + 2\,\arctan\omega_p = \frac{\pi}{2}$$

Attraverso una stima numerica si ottiene: $\omega_p \simeq 0,47$ [rad/s]
Intesezione:

$$|P(j\omega_p)| = 12.5\,\frac{(1+\omega_p^2)}{\omega_p\,\left(1+(\frac{\omega_p}{2})^2\right)^{\frac{3}{2}}} \simeq 29.95$$



b) Il diagramma polare completo circonda due volte in senso orario il punto -1 e il guadagno di anello non ha poli a parte reale positiva, quindi le radici di $1+P(s)$ sono:

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{C}_+ &: \quad 2 \\ n \in \mathbb{C}_- &: \quad 2 \;\; (4-2) \\ n \in j\,\mathbb{R} &: \quad 0 \end{aligned}$$

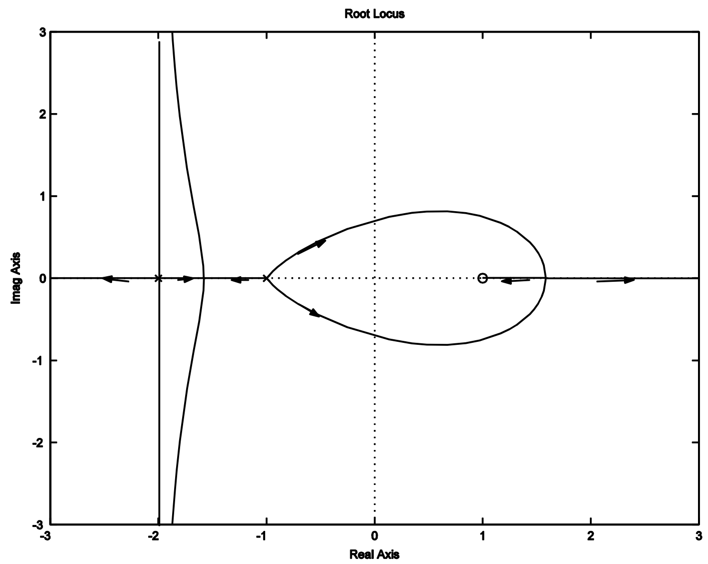
6.

L'equazione caratteristica è riscrivibile come

$$1+K_1\frac{s-1}{(s+1)^3(s+2)^2}=0 \quad \text{con } K_1=-K\in(-\infty,0]$$

e quindi si tratta di un luogo inverso. Presenta 4 asintoti il cui centro ha ascissa

$$\sigma_a=\frac{-1-1-1-2-2-(+1)}{5-1}=-2$$



Le radici doppie sono determinabili risolvendo l'equazione:

$$\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s-1}=0$$

$$\frac{3}{s+1}+\frac{2}{s+2}-\frac{1}{s-1}=0$$

$$4s^2-10=0$$

$$s_{1,2}=\pm\sqrt{5/2}=\pm1,5811$$

7.

$$P(j\omega) = \frac{10}{(1+j\omega)(1+0{,}4j\omega)^2}$$

$\omega_0 ? \Rightarrow \arg P(j\omega_0) = -\pi + \frac{45}{180}\cdot\pi = -2{,}3562$

$\arg P(j\omega_0) = -\operatorname{arctg} \omega_0 - 2 \operatorname{arctg} 0{,}4\cdot\omega_0$

ω_0	$\arg P(j\omega_0)$
1	-1,5464
2	-2,4566
1,8	-2,3117
1,86	-2,3568

Imponiamo

$\omega_n = \omega_0 = 1{,}86 \ rad/sec$

attenuazione in centro banda $= \frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1+\tau_2+\tau_{12}} = \frac{1}{|P(j\omega_0)|} =$

$\frac{1}{\sqrt{\tau_1\tau_2}} = \omega_n \qquad \frac{1}{\tau_1\tau_2} = \omega_n^2 \qquad \frac{1}{10\tau_2^2} = \omega_n^2$

$\frac{\tau_1}{\tau_2} = 10 \qquad \tau_1 = 10\tau_2$

$\tau_2^2 = \frac{1}{10\cdot\omega_n^2} \Rightarrow \tau_2 = \frac{1}{\sqrt{10}\cdot\omega_n} = 0{,}170 \ sec$

$\tau_1 = 10\tau_2 = 1{,}70 \ sec$

$$|P(j\omega_0)| = \frac{10}{\sqrt{1+\omega_0^2}\cdot\left(1+(0{,}4\cdot\omega_0)^2\right)} =$$

$$= \frac{10}{\#} = 3{,}0481$$

$$\frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1+\tau_2+\tau_{12}} = \frac{1}{|P(j\omega_0)|}$$

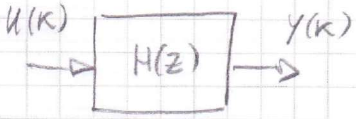
$$(\tau_1+\tau_2)\cdot|P(j\omega_0)| = (\tau_1+\tau_2)+\tau_{12}$$

$$\tau_{12} = (\tau_1+\tau_2)\left[\,|P(j\omega_0)| - 1\,\right]$$

$$= (1{,}70+0{,}170)\left[2{,}0481\right]$$

$$= 1{,}87\cdot 2{,}0481 \cong 3{,}83 \text{ sec}$$

8.



$$H(z) = \frac{z^2 + z + 1}{(z-1)\left(z + \frac{1}{2}\right)} \qquad u(k) = 1(k)$$

$$U(z) = \frac{z}{z-1} \qquad Y(z) = H(z)U(z) = \frac{(z^2+z+1)\,z}{(z-1)^2\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

$$Y(z)\cdot z^{-1} = \frac{z^2+z+1}{(z-1)^2\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \frac{c_{11}}{(z-1)^2} + \frac{c_{12}}{z-1} + \frac{c_2}{z+\frac{1}{2}}$$

$$c_{11} = \left.\frac{z^2+z+1}{z+\frac{1}{2}}\right|_{z=1} = \frac{3}{\frac{3}{2}} = 2$$

$$c_2 = \left.\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1}{\frac{9}{4}} = \frac{\frac{1-2+4}{4}}{\frac{9}{4}} = \frac{\cancel{3}^{\,1}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{9}_{\,3}} = \frac{1}{3}$$

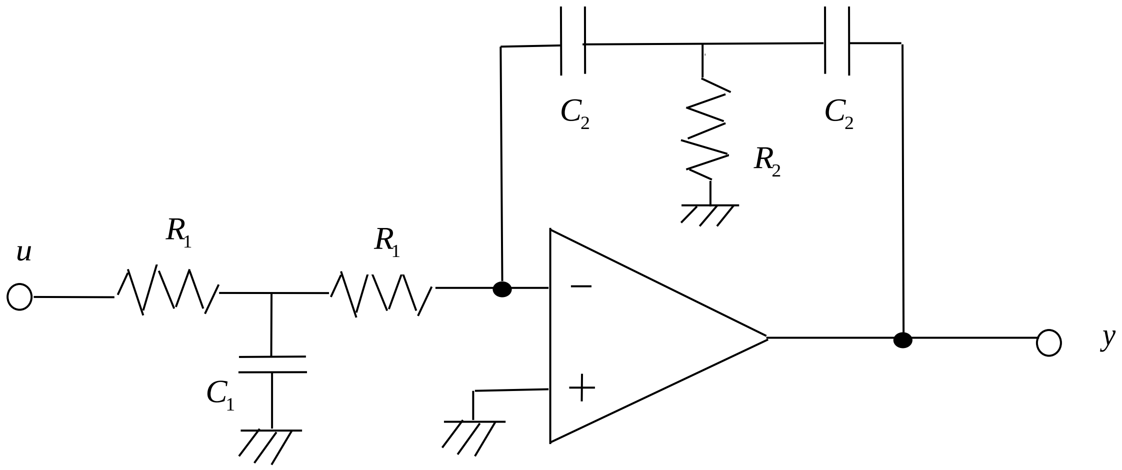
$$c_{12} + c_2 = 1 \qquad c_{12} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$Y(z) = 2\,\frac{z}{(z-1)^2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{z}{z-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{z}{z+\frac{1}{2}}$$

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[Y(z)\right] = 2\,k\cdot 1(k) + \frac{2}{3}\,1(k) + \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k 1(k)$$

Parte A

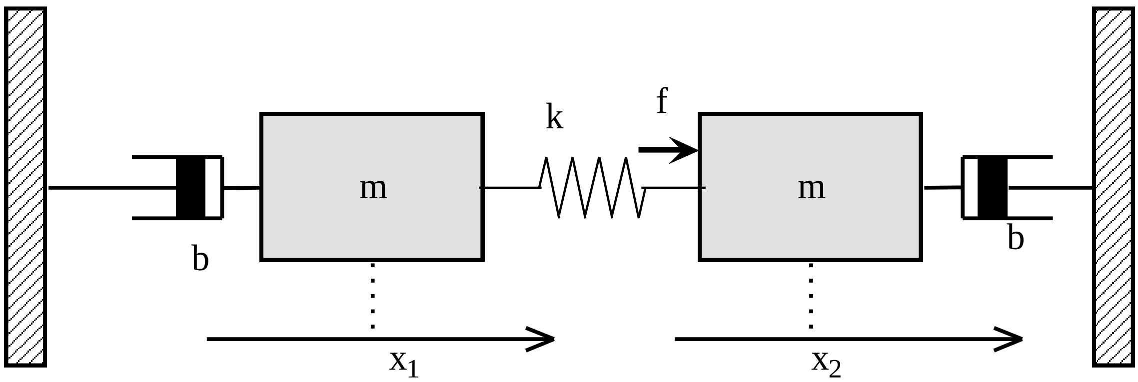
1. [punti 6] **1. [punti 6]** Il seguente circuito elettrico definisca un sistema dinamico Σ orientato da u (tensione di ingresso) ad y (tensione d'uscita).



Si assuma l'amplificatore differenziale come ideale:

1. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema Σ.
2. Determinare poli, zeri e modi di Σ.
3. Scrivere l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.

2. [punti 6] Due parti meccaniche di massa m siano collegate come in figura.



Si definisca un sistema dinamico Σ orientato da f (forza applicata alla massa di destra) ad x_1 (posizione della massa di sinistra). Si trascurino gli attriti nel movimento delle parti meccaniche e nelle condizioni iniziali di quiete con la molla a riposo si abbia $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$.

- **a.** Determinare l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.
- **b.** Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema Σ.
- **c.** Dimostrare che Σ è semplicemente stabile.

3. [punti 6] Sia dato un generico sistema dinamico orientato da u (ingresso) ad y (uscita) e descritto dall'equazione differenziale $\sum_{i=0}^{n} a_i D^i y(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i D^i u(t)$.

Note le condizioni iniziali al tempo $0-$ come $y_-, Dy_-, \ldots, D^{n-1}y_-$ e $u_-, Du_-, \ldots, D^{m-1}u_-$ e l'azione forzante $u(t),\ t \geq 0$, determinare la trasformata di Laplace della risposta $y(t),\ t \geq 0$. Interpretare e commentare il risultato ottenuto.

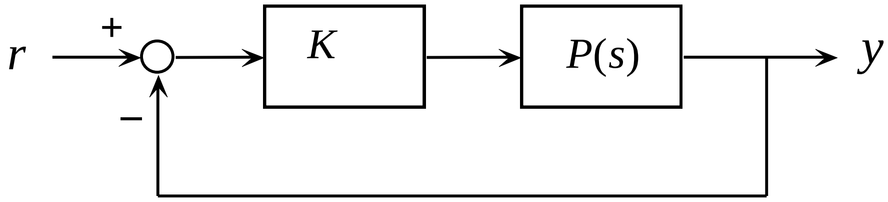
Nota: riportare i ragionamenti e i passaggi che permettono l'individuazione dell'espressione di $Y(s)$ cercata.

Parte B

4. [punti 6] Dato un sistema dinamico Σ descritto dalla funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{3s^2 + s + 7}{s^3 + 4s^2 + 8s + 9}$, introdurre e definire l'insieme $\mathcal{B}$ dei behaviours di Σ. Dedurre inoltre le relazioni fra le condizioni iniziali in un istante di discontinuità dei segnali dell'ingresso e dell'uscita.

5. [punti 6] Determinare la risposta forzata in uscita $y(t)$ all'ingresso $u(t) = 3t \cdot 1(t)$ di un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{4s^2 + 2s + 1}{s^2 + 3s + 2}$. Determinare inoltre il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$.

6. [punti 6] Dato il sistema in retroazione di figura

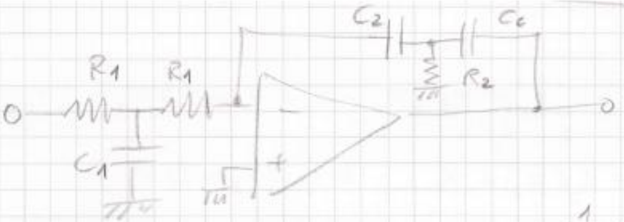


dove $P(s) = \dfrac{(s-1)(s-2)}{s(s+1)^2(s+2)}$ determinare i valori di $K \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Tracce delle soluzioni

1.

1)



$$G(s) = -\frac{Z_{t,f}}{Z_{t,i}} = -\frac{\frac{1}{C_2 s} + \frac{1}{C_2 s} + \frac{\frac{1}{C_2 s}\cdot\frac{1}{C_2 s}}{R_2}}{R_1 + R_1 + \frac{R_1^2}{\frac{1}{C_1 s}}}$$

$$= -\frac{\frac{2}{C_2 s} + \frac{1}{R_2 C_2^2 s^2}}{2R_1 + R_1^2 C_1 s} = -\frac{\frac{1 + 2R_2C_2 s}{R_2 C_2^2 s^2}}{R_1(2 + R_1 C_1 s)}$$

$$= -\frac{1 + 2R_2C_2 s}{R_1 R_2 C_2^2 s^2 (2 + R_1 C_1 s)}$$

2) zeri: $z_1 = -\frac{1}{2R_2C_2}$ poli: $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = -\frac{2}{R_1C_1}$

modi $= \left\{1, t, \exp\left\{-\frac{2}{R_1C_1}\right\}\right\}$

3) $$G(s) = -\frac{1 + 2R_2C_2 s}{R_1R_2C_2^2 s^2(2 + R_1C_1 s)} = \frac{-2R_2C_2 s - 1}{R_1^2 R_2 C_1 C_2^2 s^3 + 2R_1R_2C_2^2 s^2}$$

eq. differenziale

$$R_1^2 R_2 C_1 C_2^2 D^3 y(t) + 2R_1R_2C_2^2 D^2 y(t) = -2R_2C_2 D u(t) - u(t)$$

2.

a.

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = +k(x_2 - x_1) - b D x_1 \\ m D^2 x_2 = -k(x_2 - x_1) - b D x_2 + f \end{cases}$$

$$\begin{cases} k x_2 = (m D^2 + b D + k) x_1 \\ (m D^2 + b D + k) x_2 = f + k x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (m D^2 + b D + k)^2 x_1 = k f + k^2 x_1$$

$$\boxed{m^2 D^4 x_1 + 2 m b D^3 x_1 + (b^2 + 2 m k) D^2 x_1 + 2 b k D x_1 = k f}$$

b.

$$G(s) = \frac{k}{s\left[m^2 s^3 + 2 m b s^2 + (b^2 + 2 m k) s + 2 b k\right]}$$

c.

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & m^2 & b^2 + 2 m k & 0 \\ 2 & \cancel{2} m \cancel{b} & \cancel{2} \cancel{b} k & 0 \\ 1 & \dfrac{\underbrace{b^2 m + 2 m^2 k - k m^2}}{b^2 m + m^2 k} & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \end{array}$$

La prima colonna della tabella ha tutti elementi positivi e quindi tutte permanenze di segno. Per il criterio di Routh il polinomio $m^2 s^3 + 2 m b s^2 + (b^2 + 2 m k) s + 2 b k$ è hurwitziano. Quindi Σ ha un polo semplice nell'origine ed i rimanenti poli con parte reale negativa. Per il teorema sulla stabilità alle perturbazioni Σ è SEMPLICEMENTE STABILE.

3.
Vedi dispense dell'insegnamento.

4.

Eq. differenziale: $D^3 y + 4 D^2 y + 8 D y + 9 y = 3 D^2 u + D u + 7 u$

$$u \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow y$$

$$\mathfrak{B} := \{ (u,y) \in PC^\infty \times PC^\infty : D^{*3} y + 4 D^{*2} y + 8 D^* y + 9 y = 3 D^{*2} u + D^* u + 7 u \}$$

$D^* \equiv$ operatore della derivata generalizzata

Le relazioni fra i valori al tempo $0-$

$$y_-,\ Dy_-,\ D^2 y_-\ ;\ u_-,\ Du_-$$

ed i valori al tempo $0+$

$$y_+,\ Dy_+,\ D^2 y_+\ ;\ u_+,\ Du_+$$

sono deducibili uguagliando le espressioni impulsive dell'eq. differenziale generalizzata al tempo $t = 0$.

∘ ∘ ∘ ∘

$$\begin{cases} y_+ = y_- \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Dy_+ - Dy_- \\ D^2 y_+ - D^2 y_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_+ - u_- \\ Du_+ - Du_- \end{bmatrix} \end{cases}$$

5.

$$U(s) = \frac{3}{s^2}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{4s^2+2s+1}{s^2+3s+2} \cdot \frac{3}{s^2} = \frac{3(4s^2+2s+1)}{s^2(s+1)(s+2)}$$

$$= \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_2}{s+1} + \frac{K_3}{s+2}$$

$$K_{11} = \left.\frac{3(4s^2+2s+1)}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=0} = \frac{3}{2} \qquad K_2 = \left.\frac{3(4s^2+2s+1)}{s^2(s+2)}\right|_{s=-1} = \frac{3(3)}{1} = 9$$

$$K_3 = \left.\frac{3(4s^2+2s+1)}{s^2(s+1)}\right|_{s=-2} = \frac{3(16-4+1)}{4(-1)} = \frac{3\cdot 13}{-4} = -\frac{39}{4}$$

$$K_{12}+K_2+K_3 = 0 \qquad K_{12} = -K_2 - K_3 = -9 + \frac{39}{4} = \frac{-36+39}{4} = \frac{3}{4}$$

$$y(t) = \frac{3}{2}t + \frac{3}{4} + 9e^{-t} - \frac{39}{4}e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

Il grado relativo di $G(s)$ è zero e il grado massimo di continuità dell'ingresso è zero. Quindi dalla proprietà

$$u \in C^{p,\infty} \Longleftrightarrow y \in C^{p+\rho,\infty} \qquad (p=0 \text{ e } \rho=0)$$

segue che l'uscita ha grado massimo di continuità uguale a zero ($y(t)$ è continua su $\mathbb{R}$ mentre $y^{(1)}(t)$ è discontinua su $\mathbb{R}$).

6.

$$P(s) = \frac{(s-1)(s-2)}{s(s+1)^2(s+2)} \qquad 1 + K\frac{s^2-3s+2}{s(s^2+2s+1)(s+2)} = 0$$

$$(s^3+2s^2+s)(s+2) + Ks^2 - 3Ks + 2K = 0$$

$$s^4+2s^3+s^2+2s^3+4s^2+2s+Ks^2-3Ks+2K=0$$

$$s^4+4s^3+(5+K)s^2+(2-3K)s+2K=0$$

4	1	$5+K$	$2K$	0
3	4	$2-3K$	0	0
2	α	$8K$	0	
1	β	0		
0	$8K$			

$$\alpha = 4(5+K)-2+3K = 20+4K-2+3K = 18+7K$$

$$\beta = (18+7K)(2-3K)-32K = 36+14K-54K-21K^2-32K = -21K^2-72K+36$$

Per il criterio di Routh, la stabilità asintotica del sistema retroazionato è associata alle condizioni: $\alpha>0$, $\beta>0$, $8K>0$.

Se $K>0 \Longrightarrow \alpha>0$

$$\beta>0, \quad -7K^2-24K+12>0 \qquad K_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{228}}{-7} \begin{cases} = -3.8714 \\ = 0.4428 \end{cases}$$

$$K \in \left(-\frac{12+2\sqrt{57}}{7}, \frac{-12+2\sqrt{57}}{7}\right)$$

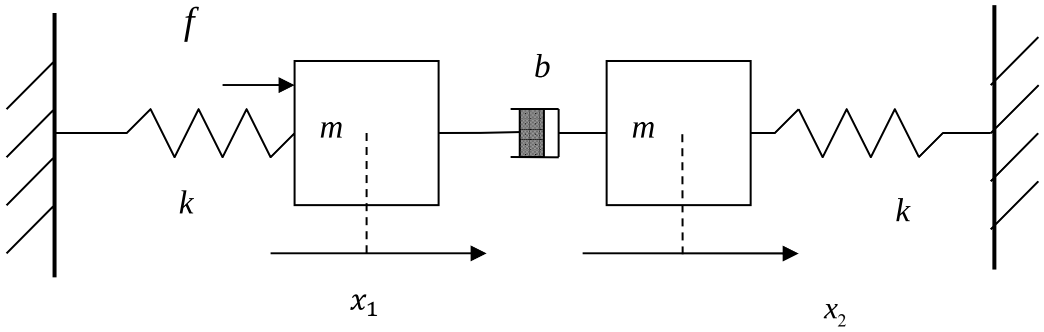
La soluzione è quindi

$$K \in \left(0, \frac{-12+2\sqrt{57}}{7}\right) \simeq (0, 0.4428)$$

Parte A

1. [punti 4,5] Enunciare il Criterio di Nyquist (sia il caso generale che quello particolare) avendo cura di definire i concetti e le premesse teoriche sui quali si basa. Riportare inoltre una dimostrazione di tale criterio.

2. [punti 4,5] Sia assegnato il sistema meccanico vibrante di figura



caratterizzato da due molle di costante elastica k e due corpi di massa m accoppiati da uno smorzatore viscoso di coefficiente b. Il corpo di sinistra sia soggetto ad una forza f e le posizioni delle due masse siano descritte dalle variabili x_1 e x_2 (quando il sistema è in quiete $x_1 = x_2 = 0$).

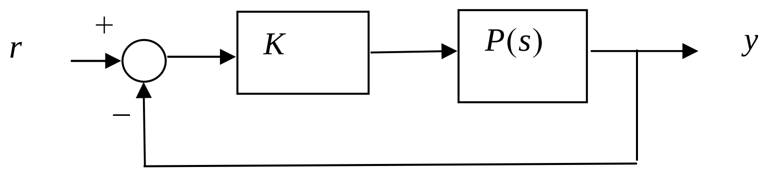
a) Determinare le equazioni differenziali che descrivono il moto delle due masse.
b) Determinare l'equazione differenziale che caratterizza il sistema vibrante (denominato Σ) orientato dall'ingresso f all'uscita x_2.
c) Scrivere il polinomio caratteristico e la funzione di trasferimento di Σ.
d) Dimostrare con i metodi e teoremi della tabella di Routh che Σ è **semplicemente stabile** per qualsivoglia valore dei parametri m, k, b (tutti positivi).
e) Giustificare con un ragionamento fisico il motivo per cui Σ, nonostante la presenza di un elemento dissipativo (lo smorzatore viscoso), **non è asintoticamente stabile**.

3. [punti 4,5] Determinare l'evoluzione forzata $y(t)$ in risposta al gradino unitario $u(t) = 1(t)$ di un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{1}{(s+1)^3(s+2)}$. Determinare inoltre il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$.

4. [punti 4,5] Sia Σ_d un sistema a tempo discreto descritto dalla funzione di trasferimento $H(z) = \dfrac{b(z)}{a(z)}$ con $a(z)$ e $b(z)$ polinomi coprimi fra loro. Presentare e dimostrare una condizione necessaria e sufficiente (in relazione ai poli del sistema) che assicuri la stabilità asintotica di Σ_d.

Parte B

5. [punti 4,5] Sia dato il seguente sistema retroazionato

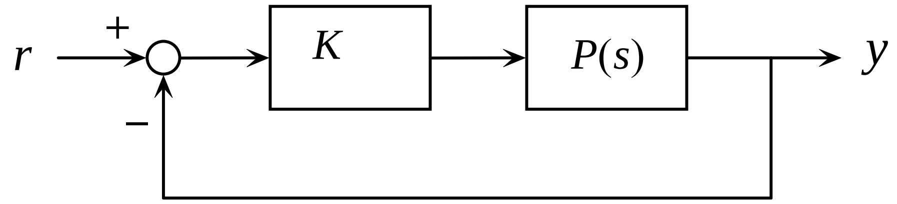


dove $K = 10$ e $P(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$.

a. Determinare il guadagno di anello del sistema retroazionato e tracciarne il diagramma polare. Calcolare in particolare l'intersezione del diagramma con l'asse reale negativo e la corrispondente pulsazione ω_p (pulsazione di fase pi greco).

b. Studiare la stabilità del sistema retroazionato applicando il Criterio di Nyquist. Determinare il margine di ampiezza (M_A) ed il margine di fase (M_F).

6. [punti 4,5] Sia dato il sistema in retroazione di figura



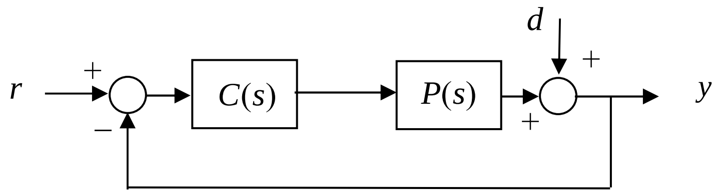
dove $P(s) = \dfrac{1}{s(s+2)^3}$.

a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K > 0$ determinando in particolare
   1. Asintoti del luogo.
   2. Eventuali radici doppie.
   3. Angoli di partenza del luogo.

b. Determinare i valori di $K \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Determinare inoltre le intersezioni del luogo delle radici dell'equazione caratteristica con l'asse immaginario del piano complesso.

c. Determinare il valore di K che massimizza il grado di stabilità del sistema retroazionato: $K^* = \arg\max_{K\in\mathbb{R}} G_S(K)$.

7. [punti 4,5] Sia dato il seguente sistema



dove $P(s) = \dfrac{9}{s+4}$. Determinare un controllore proprio di ordine minimo $C(s)$ affinché le seguenti specifiche siano soddisfatte:

1. reiezione infinita asintotica al disturbo composito $d(t) = 7 + 10 \cdot \cos(3t+1)$;
2. costante di velocità $K_v = 4$;
3. sistema retroazionato asintoticamente stabile con tre poli dominanti in $-2, -2 \pm j$.

8. [punti 4,5] Sia dato il sistema a tempo discreto definito dall'equazione

$$16y(k+13) - 12y(k+12) + y(k+10) = 16u(k+11) + 16u(k+10), \ k \in \mathbb{Z}$$

ed orientato da $u(k)$ (ingresso) a $y(k)$ (uscita).

1) Determinare la funzione di trasferimento del sistema.

2) Studiare la stabilità alle perturbazioni del sistema.

Tracce delle soluzioni

1. Vedi dispense del corso.

2.

a) Dall'equazione della dinamica otteniamo

$$\begin{cases} mD^2x_1 = f - kx_1 - b(Dx_1 - Dx_2) \\ mD^2x_2 = -kx_2 + b(Dx_1 - Dx_2) \end{cases}$$

b) Dall'espressione precedente otteniamo

$$\begin{cases} (mD^2 + bD + k)x_1 = f + bDx_2 \\ bDx_1 = mD^2x_2 + kx_2 + bDx_2 \end{cases}$$

applicando l'operatore $MD^2 + BD + k$ ad entrambi i membri della seconda equazione e BD a entrambi i membri della prima otteniamo

$$\begin{cases} bD(MD^2 + bD + k)x_1 = bD(f + bDx_2) \\ (mD^2 + bD + k)bDx_1 = (mD^2 + bD + k)(mD^2x_2 + kx_2 + bDx_2) \end{cases}$$

sottraendo membro a membro le due equazioni eliminiamo x_1 dal sistema e otteniamo

$$bD(f + bDx_2) = (mD^2 + bD + k)(mD^2x_2 + kx_2 + bDx_2)$$

da cui

$$m^2D^4x_2 + 2mbD^3x_2 + 2mkD^2x_2 + 2bkDx_2 + k^2x_2 = bDf$$

c) La funzione di trasferimento e'

$$T(s) = \frac{bs}{m^2s^4 + 2mbs^3 + 2mks^2 + 2bks + k^2}$$

e il polinomio caratteristico

$$p(s) = m^2s^4 + 2mbs^3 + 2mks^2 + 2bks + k^2$$

d)

$$\begin{array}{r|ccc} 4 & m^2 & 2mk & k^2 \\ 3 & 2mb & 2bk & 0 \\ 2 & mk & k^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

l'ultima riga della tabella di Routh e' tutta nulla, si ottiene l'equazione ausiliaria

$$ms^2 + k = 0$$

da cui $s = \pm j\sqrt{\frac{k}{m}}$, la prima parte della tabella ha due permanenze di segno, quindi il sistema e' semplicemente stabile.

E) Quando il sistema è in evoluzione libera (f=0), a causa della simmetria del sistema vibrante, è possibile il moto armonico non smorzato delle due masse per il quale $x_1(t) \equiv x_2(t)$.

Conseguentemente lo smorzatore viscoso non dissipa energia in quanto $D(x_1 - x_2) \equiv 0$ (è come se, virtualmente, le due masse fossero connesse da un braccio rigido). Questo comportamento corrisponde ad un sistema semplicemente stabile.

Si osservi che con $f(t) \equiv 0$ la soluzione particolare

$$x_1(t) = x_2(t) = \varepsilon \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

soddisfa il sistema di equazioni differenziali del punto a).

3.

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)^3(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1)^3} + \frac{K_{22}}{(s+1)^2} + \frac{K_{23}}{s+1} + \frac{K_3}{s+2}$$

$$K_1 = \left.\frac{1}{(s+1)^3(s+2)}\right|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$K_{21} = \left.\frac{1}{s(s+2)}\right|_{s=-1} = \frac{1}{(-1)(1)} = -1$$

$$K_3 = \left.\frac{1}{s(s+1)}\right|_{s=-2} = \frac{1}{(-2)(-1)} = \frac{1}{2}$$

$$K_1 + K_{23} + K_3 = 0 \qquad K_{23} = -K_1 - K_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

$$K_{22} = \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s(s+2)}\right)\right|_{s=-1} = -\left.\frac{s+2+s}{s^2(s+2)^2}\right|_{s=-1} = 0$$

$$Y(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2 e^{-t} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}} \quad \boxed{t \geq 0}$$

Il segnale u(t)=1(t) è discontinuo su R, quindi il grado massimo di continuità della risposta y(t) è {grado relativo} - 1 = 4 – 1 = 3

N.B.
Correzione sul calcolo di k_3:
k_3 = 1/(s (s+1)^3)|_{s=-2} = 1/2

4. Vedi dispense dell'insegnamento.

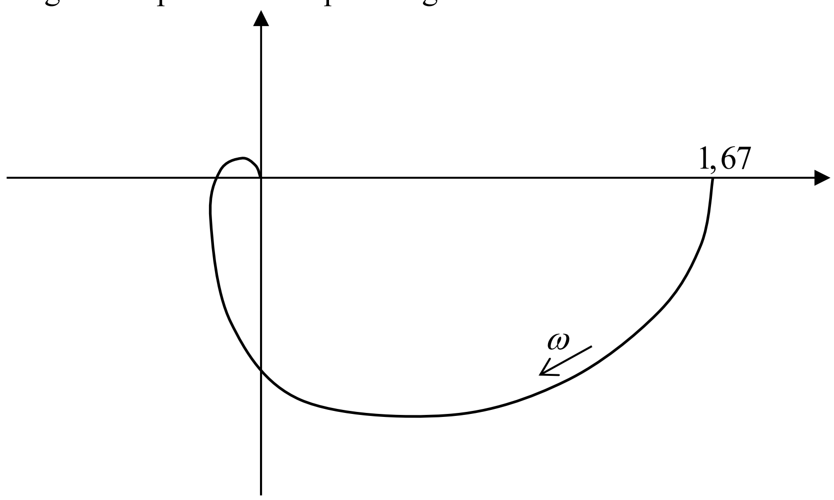
5
a.

$$L(s)=\frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)};\quad L(j\omega)=\frac{10}{(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)}$$

$$|L(j\omega)|=\frac{10}{\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{4+\omega^2}\sqrt{9+\omega^2}}$$

$$\arg L(j\omega)=-\arctan\omega-\arctan\frac{\omega}{2}-\arctan\frac{\omega}{3}$$

Si osservi che $L(j0)=\frac{5}{3}\cong 1,67$ e $\lim_{\omega\to+\infty}|L(j\omega)|=0$, $\lim_{\omega\to+\infty}\arg L(j\omega)=-3\frac{\pi}{2}$. Il modulo e l'argomento della risposta armonica sono funzioni monotone decrescenti. Un tracciamento qualitativo del diagramma polare è dunque il seguente:



Per determinare l'intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo si risolva l'equazione $\arg L(j\omega_p)=-\pi$:

$$\arctan\frac{\omega_p}{2}+\arctan\frac{\omega_p}{3}=\pi-\arctan\omega_p$$

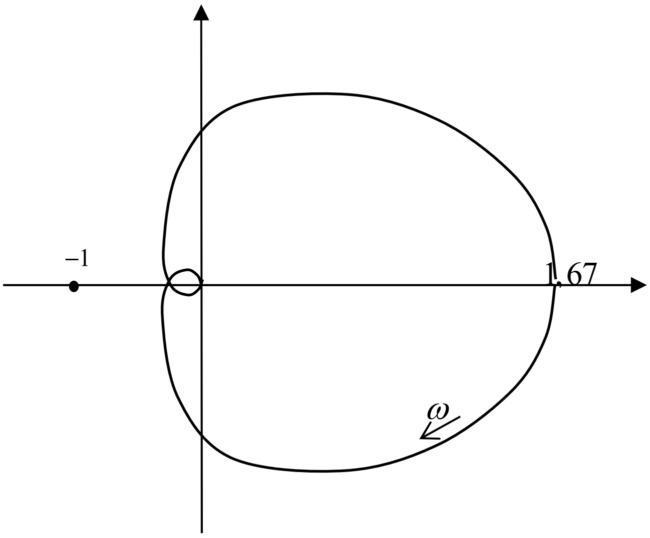
Applicando la funzione tangente ad ambo i membri dell'equazione si ottiene $\omega_p^2-11=0$ da cui $\omega_p=\sqrt{11}\cong 3,32$ rad/s.

$$|L(j\omega_p)|=\frac{10}{\sqrt{12}\sqrt{15}\sqrt{20}}=\frac{1}{6}$$

L'intersezione avviene quindi in $-\frac{1}{6}$. $\left(L(j\omega_p)=-\frac{1}{6}\right)$.

b.

Tracciamento del diagramma polare completo:



Il guadagno di anello non ha poli a parte reale positiva e il diagramma polare completo non circonda il punto critico -1. Per il Criterio di Nyquist il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Il margine di ampiezza è $M_A = \dfrac{1}{\frac{1}{6}} = 6$.

Calcolo del margine di fase:

$$\left|L(j\omega_c)\right| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{100}{(1+\omega_c^2)(4+\omega_c^2)(9+\omega_c^2)} = 1$$

$$x := \omega_c^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{100}{(1+x)(4+x)(9+x)} = 1$$

$\Rightarrow x = 1$ (soluzione dedotta per ispezione diretta dell'equazione;

in alternativa soluzione approssimata con metodo iterativo).

$\Rightarrow \omega_c = 1$ rad/s

$$\arg L(j\omega_c) = -\arctan 1 - \arctan\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{3} = -\frac{\pi}{2}$$

$$M_F = 180^0 + \arg L(j\omega_c) = 90^0$$

6.

4. Eq. caratteristica $1 + K \dfrac{1}{s(s+2)^3} = 0$

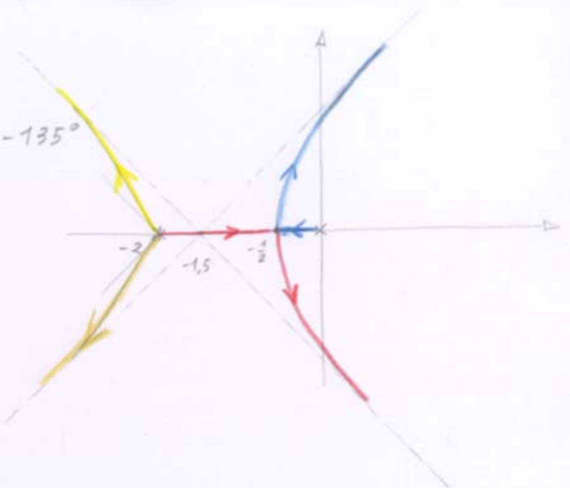
a) Asintoti del luogo: $\sigma_a = \dfrac{0-2-2-2}{4} = -1,5$

$\theta_{1,a} = +45°$, $\theta_{2,a} = +135°$, $\theta_{3,a} = -45°$, $\theta_{4,a} = -135°$

Radici doppie: $3\dfrac{1}{s+2} + \dfrac{1}{s} = 0 \Rightarrow s = -\dfrac{1}{2} = -0,5$

Angoli di partenza: da $p_1 = 0$ $\theta_1 = 180°$

da $p_2 = -2$ $\theta_{2,1} = 0°$, $\theta_{2,2} = +120°$, $\theta_{2,3} = -120°$



b) $s^4 + 6s^3 + 12s^2 + 8s + K = 0$

4	1	12	K
3	$\cancel{6}$ 3	$\cancel{8}$ 4	0
2	32	3K	0
1	128-9K	0	
0	3K		

$\begin{cases} 128 - 9K > 0 \\ 3K > 0 \end{cases}$

$K \in \left(0, \dfrac{128}{9}\right) \simeq (0, 14,\bar{2})$

eq. ausiliaria per $K = \dfrac{128}{9}$: $32s^2 + 3\dfrac{128}{9} = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm j\sqrt{\dfrac{4}{3}} \simeq \pm j\,1,1547$

Le intersezioni del luogo con $j\mathbb{R}$ avvengono in $\pm j\,1,1547$.

c) Dalla geometria del luogo si deduce:

$1 + K^* P(-\tfrac{1}{2}) = 0 \Rightarrow 1 + K^* \dfrac{1}{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}+2)^3} = 0 \Rightarrow K^* = \dfrac{27}{16} = 1,6875$.

7.

$$C(s) = \frac{y_3 s^3 + y_2 s^2 + y_1 s + y_0}{s(s^2+9)}$$

$$L(s) = C(s)P(s) = 9 \cdot \frac{y_3 s^3 + y_2 s^2 + y_1 s + y_0}{s(s^2+9)(s+4)}$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} sL(s) = \frac{9 \cdot y_0}{9 \cdot 4} = \frac{y_0}{4}$$

$$K_v = 4 \implies \frac{y_0}{4} = 4, \quad \boxed{y_0 = 16}$$

Il polinomio caratteristico desiderato è

$$P_d(s) = \left[(s+2)^2+1\right](s+2)(s+c) \quad \text{con } c > 2.$$

$$P_d(s) = s^4 + (6+c)s^3 + (6c+13)s^2 + (13c+10)s + 10c$$

Il polinomio caratteristico associato al controllore scelto è

$$P_c(s) = s(s^2+9)(s+4) + 9(y_3 s^3 + y_2 s^2 + y_1 s + y_0)$$

$$P_c(s) = s^4 + (4+9y_3)s^3 + (9+9y_2)s^2 + (36+9y_1)s + 9y_0$$

Si impone che $P_c(s) \equiv P_d(s)$

$$\begin{cases} 4+9y_3 = 6+c \\ 9+9y_2 = 13+6c \\ 36+9y_1 = 10+13c \\ 9y_0 = 10c \end{cases} \implies c = \frac{144}{10} = 14.4 \quad \text{ok! } c \gg 2.$$

$$\boxed{y_1 = 17.91, \quad y_2 = 10.04, \quad y_3 = 1.822}$$

8.

8) Si effettua la sostituzione $k-13 \to k$.
L'eq. diventa

$$16\,y(k) - 12\,y(k-1) + y(k-3)$$
$$= 16\,u(k-2) + 16\,u(k-3)$$

Quindi la f.d.t. risulta

$$H(z) = \frac{16z + 16}{16z^3 - 12z^2 + 1}$$

Il polinomio caratteristico è $16z^3 - 12z^2 + 1$.

$a(z) \triangleq a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$
Condizione necessaria affinché tutte le radici di $a(z)$ abbiano modulo minore di uno:

1. $a(1) > 0$ cioè $16 - 12 + 1 = 5 > 0$ ok!
2. $(-1)^3 a(-1) > 0$ cioè $-a(-1) > 0$
$-[-16 - 12 + 1] = -[-27] = 27 > 0$ ok!
3. $|a_0| < a_n$ cioè $|1| < 16$ ok!

Costruiamo la tabella di Jury

	z^0	z^1	z^2	z^3
1	1	0	-12	16
2	16	-12	0	1
3	-255	192	-12	

Dall'ultima riga della tabella otteniamo una quarta condizione

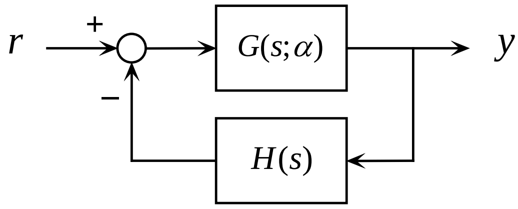
4. $|-255| > |-12|$ ok!

Quindi per il criterio di Jury il sistema è asintoticamente stabile.

In alternativa, si possono calcolare le radici del polinomio caratteristico del sistema: p_1 = 0.6545, p_2 = 0.0955. Queste hanno modulo minore di 1, quindi per il noto teorema il sistema è asintoticamente stabile.

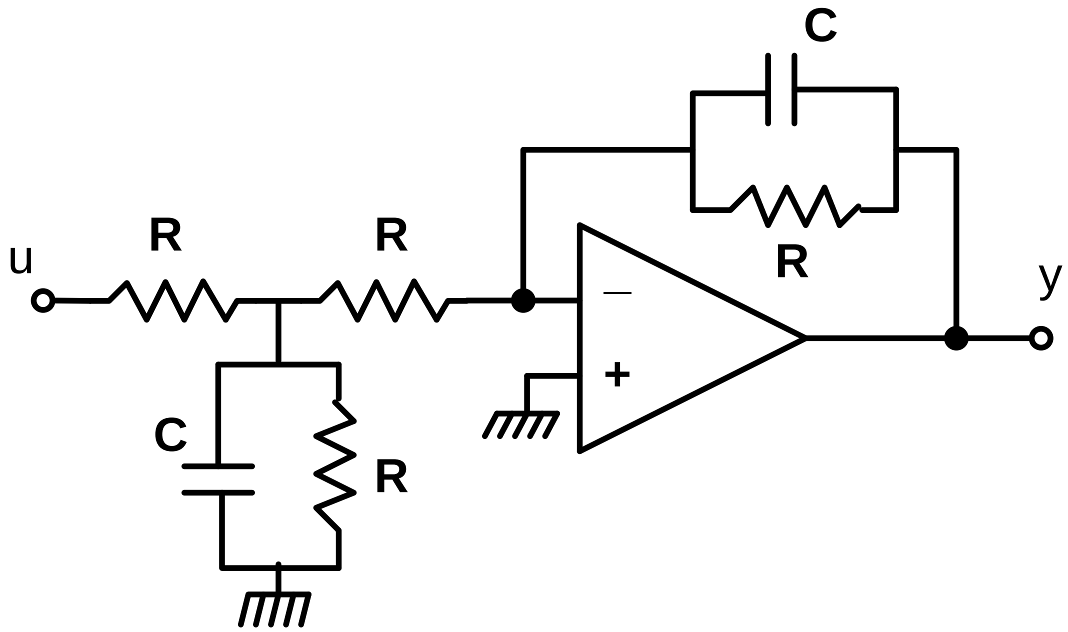
Parte A

1. [punti 4,5] Sia dato il sistema retroazionato di figura



Definire e determinare la sensibilità di $T_{ry}(s)$ (funzione di trasferimento fra r ed y) a variazioni di $G(s;\alpha)$ determinate dal parametro incerto $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$ (α_0 è il valore nominale del parametro). Interpretare e commentare il risultato ottenuto.

2. [punti 4,5] Il seguente schema elettrico definisca un sistema dinamico Σ orientato da u (tensione di ingresso) ad y (tensione d'uscita).



Si assuma l'amplificatore operazionale come ideale.

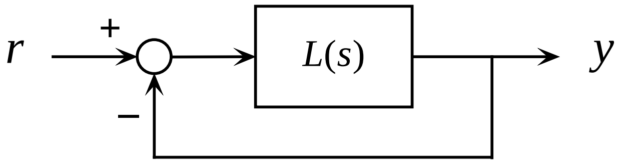
1. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema Σ.
2. Determinare poli e modi di Σ.
3. Scrivere l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.

3. [punti 4,5] Determinare l'evoluzione forzata $y(t)$ in risposta alla rampa $u(t) = 2t \cdot 1(t)$ di un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{1}{(s+1)^4}$. Determinare inoltre il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$.

4. [punti 4,5] Presentare e dimostrare la formula di antitrasformazione zeta, ovvero l'espressione con l'integrale su curva chiusa del piano complesso che determina la sequenza a tempo discreto $x(k)$ nota che sia $X(z) \triangleq \mathcal{Z}[x(k)]$.

Parte B

5. [punti 4,5] Sia dato il seguente sistema retroazionato



dove $L(s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(1-s)^2}{s(1+s)^2}$.

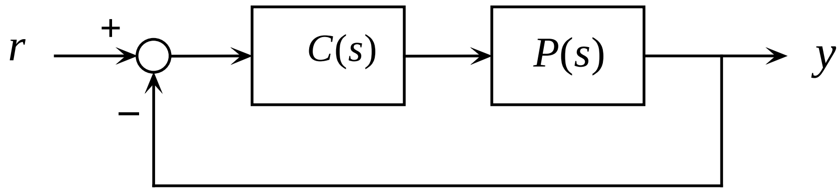
1. Tracciare il diagramma polare di $L(j\omega)$ determinando in particolare l'asintoto, il comportamento per $\omega \to +\infty$ e l'intersezione con l'asse reale negativo.
2. Stabilire mediante applicazione del criterio di Nyquist che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Determinare inoltre il margine di ampiezza (M_A) ed il margine di fase (M_F).

6. [punti 4,5] Si tracci il luogo delle radici della seguente equazione caratteristica:

$$1+5\frac{1+\tau s}{(1+2\tau s)(1+s)} = 0 \quad , \quad \tau \in [0,+\infty)$$

determinando in particolare asintoti e radici doppie

7. [punti 4,5] Si consideri il seguente sistema di controllo



dove $P(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$. Si progetti un controllore $C(s)$ proprio di ordine 2 affinché:

a) l'errore a regime in risposta ad un gradino di comando del set-point sia nullo.
b) La costante di velocità del sistema retroazionato K_v sia pari a 8 : $K_v = 8$.
c) I poli dominanti del sistema retroazionato siano -1 e -2.

8. [punti 4,5] Un sistema a tempo discreto è in evoluzione libera (ingresso identicamente nullo) e la trasformata zeta dell'uscita è $Y_{\text{lib}} = \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 (z^2-1)}$. Determinare l'evoluzione libera dell'uscita $y_{\text{lib}}(k),\ k \geq 0$.

Tracce delle soluzioni

1.
vedi dispense del corso.

2.

Impedenza del parallelo capacità e resistenza Z_p:

$$Z_p = \frac{R \cdot \frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{R}{1+RCs}$$

Impedenza di trasferimento del tripolo Z_t:

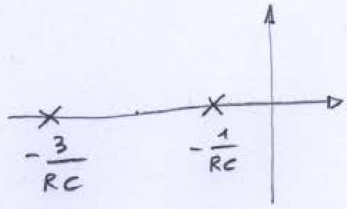
$$Z_t = R + R + \frac{R \cdot R}{Z_p} = 2R + \frac{R^2}{\frac{R}{1+RCs}} = 2R + R(1+RCs)$$

$$G(s) = -\frac{Z_p}{Z_t} = -\frac{\frac{R}{1+RCs}}{2R + R(1+RCs)}$$

①

$$G(s) = -\frac{1}{(1+RCs)(3+RCs)}$$

② Poli: $-\frac{1}{RC}$, $-\frac{3}{RC}$



modi di $\Sigma = \left\{ e^{-\frac{t}{RC}}, e^{-\frac{3t}{RC}} \right\}$

③

$$(1+RCs)(3+RCs) = 3 + RCs + 3RCs + (RC)^2 s^2 =$$
$$= (RC)^2 s^2 + 4RCs + 3$$

$$G(s) = \frac{-1}{(RC)^2 s^2 + 4RCs + 3}$$

eq. diff. $(RC)^2 D^2 y + 4RC\,Dy + 3y = -u$

3.

$$u(t) = 2t \cdot 1(t) \qquad U(s) = \frac{2}{s^2}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2}{s^2(s+1)^4}$$

$$Y(s) = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1)^4} + \frac{K_{22}}{(s+1)^3} + \frac{K_{23}}{(s+1)^2} + \frac{K_{24}}{s+1}$$

$$K_{11} = \left.\frac{2}{(s+1)^4}\right|_{s=0} = 2 \qquad K_{21} = \left.\frac{2}{s^2}\right|_{s=-1} = 2$$

$$K_{12} = D\left[\frac{2}{(s+1)^4}\right]_{s=0} = -2 \cdot \left.\frac{4(s+1)^{\cancel{3}\,0}}{(s+1)^{\cancel{8}\,5}}\right|_{s=0} = -8$$

$$K_{12} + K_{24} = 0 \implies K_{24} = -K_{12} = 8$$

$$K_{22} = D\left[\frac{2}{s^2}\right]_{s=-1} = -2 \cdot \left.\frac{2\cancel{s}}{s^{\cancel{4}\,3}}\right|_{s=-1} = 4$$

$$K_{23} = \frac{1}{2} D^2\left[\frac{2}{s^2}\right]_{s=-1} = \frac{1}{2}(-4) \cdot D\left[\frac{1}{s^3}\right]_{s=-1} = -2 \cdot (-1)\left.\frac{3 \cdot s^2}{s^6}\right|_{s=-1} =$$

$$= 2 \cdot \left.\frac{3}{s^4}\right|_{s=-1} = 6$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{8}{s} + \frac{2}{(s+1)^4} + \frac{4}{(s+1)^3} + \frac{6}{(s+1)^2} + \frac{8}{s+1}$$

$$y(t) = 2t - 8 + 2 \cdot \frac{1}{3!} t^3 e^{-t} + 4 \cdot \frac{1}{2!} \cdot t^2 \cdot e^{-t} + 6 \cdot t \cdot e^{-t} + 8 \cdot e^{-t}$$

$$y(t) = 2t - 8 + \frac{1}{3} t^3 e^{-t} + 2t^2 e^{-t} + 6te^{-t} + 8 \cdot e^{-t}$$

Si nota che $u(t) \in \overline{C}^{0,\infty}$ ed il grado relativo di $G(s)$ è $\rho = 4$.

Quindi $u(t) \in \overline{C}^{0,\infty} \iff y(t) \in \overline{C}^{4,\infty}$.

Pertanto il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$ è 4.

4.
Vedi dispense dell'insegnamento.

5.

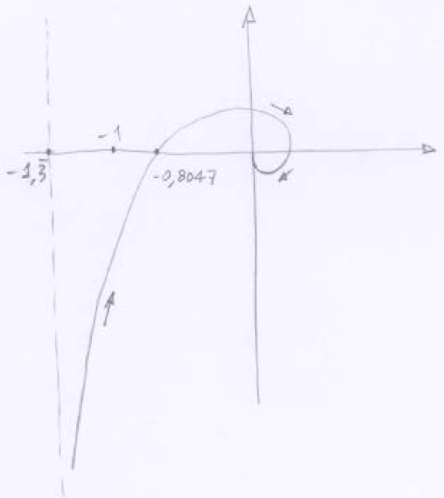
1. $L(j\omega) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(1-j\omega)^2}{j\omega(1+j\omega)^2}$; $|L(j\omega)| = \frac{1}{3\omega}$; $\arg L(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 4\,\mathrm{arctg}\,\omega$

asintoto per $\omega \to 0+$ $\quad \sigma_a = \frac{1}{3}\left(-1-1-(1+1)\right) = -\frac{4}{3} = -1,\bar{3}$

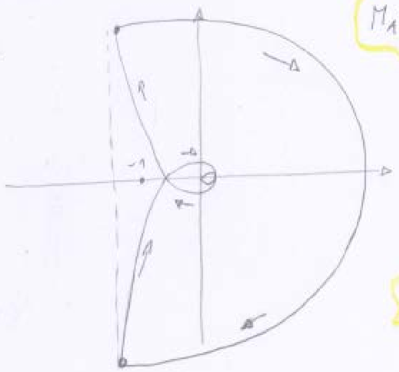
$\omega \to +\infty \quad |L(j\omega)| \to 0 \quad \arg L(j\omega) \to -5\cdot\frac{\pi}{2}$

$\arg L(j\omega_p) = -\pi \Rightarrow \mathrm{arctg}\,\omega_p = \frac{\pi}{8}, \quad \omega_p = \mathrm{tg}\frac{\pi}{8} = 0,4142$

$|L(j\omega_p)| = 0,8047 \Rightarrow L(j\omega_p) = -0,8047$



2.



$M_A = \frac{1}{0,8047} \cong 1,24$

M_F :

$|L(j\omega_c)| = 1$

$\omega_c = \frac{1}{3}$

$\arg L(j\omega_c) = -163°,74$

$M_F = 16°,26$

L(s) non ha poli a parte reale positiva e il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto -1. Quindi per il C. di N. il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

6.
L'equazione caratteristica

$$1+10\frac{1+\tau s}{(1+2\tau s)(1+s)} = 0 \qquad K \in [0,+\infty)$$

e' riscrivibile come

$$(1+2\tau s)(1+s)+10+\tau(10s) = 0$$

$$(1+s)+\tau[2s(1+s)]+10+\tau(10s) = 0$$

$$s+11+\tau[2s(1+s)+10s] = 0$$

$$1+\tau\cdot 2\frac{s+s^2+5s}{s+11} = 0$$

$$1+2\tau\frac{s^2+6s}{s+11} = 0$$

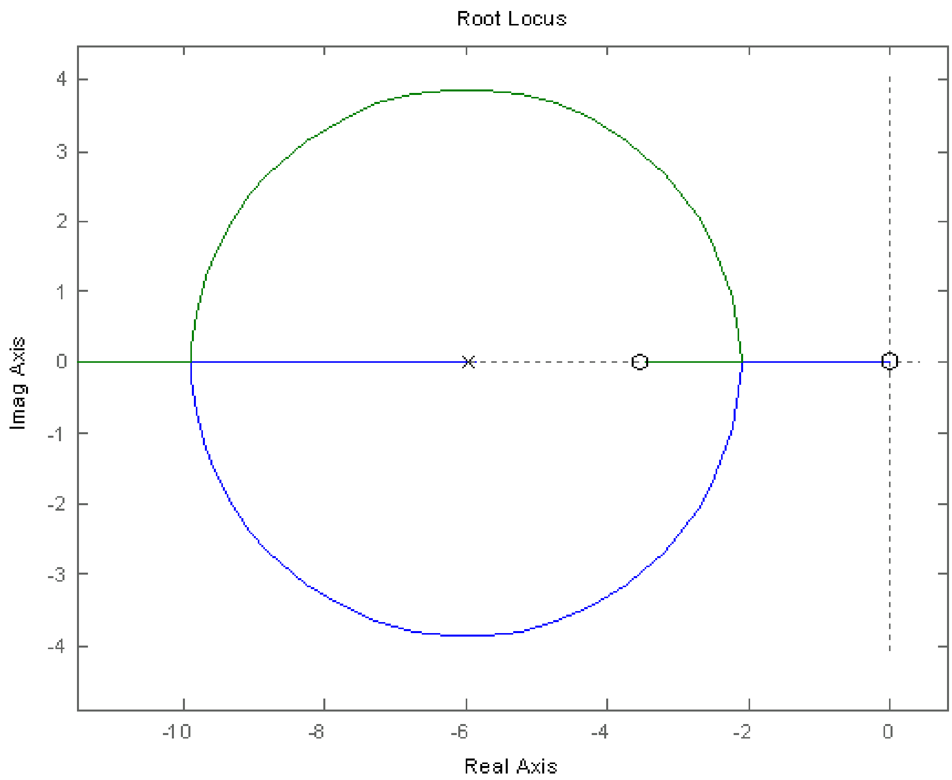
$$1+2\tau\frac{s^2+6s}{s+11} = 0$$

$$1+2\tau\frac{s(s+6)}{s+11}$$

e quindi, posto $K_1:=2\tau$, come

$$1+K_1\frac{s(s+6)}{s+11}=0 \qquad K_1\in[0,+\infty)$$

Si tratta di un luogo diretto. E' noto che il luogo delle radici in oggetto e' formato anche da una



circonferenza di raggio $R=\sqrt{d_1 d_2}=\sqrt{5\cdot 11}$ e centro in *–11*.

Le radici doppie sono determinabili anche risolvendo l'equazione:

$$\frac{1}{s+6}-\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{7}{2}}=0$$

e valgono $s_1=-6+\sqrt{6^2-21}=-9.87$ e $s_2=-6+\sqrt{6^2-42}=-2.12$.

7.
Sia scelta una funzione propria del secondo ordine per il controllore *C(s)* del tipo

$$C(s) = \frac{bs^2 + cs + d}{s(s+a)}$$

in modo che sia rispettata la specifica sull'errore a regime in risposta al gradino.
Il guadagno di anello risulta:

$$F(s) := \frac{bs^2 + cs + d}{s(s+a)} \cdot \frac{1}{(s-1)^2}$$

dalla specifica su K_v si ricava

$$K_v = \lim_{s \to 0} sF(s) = \frac{d}{a} = 10$$

Considerando l'equazione caratteristica:

$$1 + \frac{bs^2 + cs + d}{s(s+a)} \cdot \frac{1}{(s-1)^2} = 0$$

si ottiene il seguente polinomio caratteristico:

$$s^4 + (a-2)s^3 + (1-2a+b)s^2 + (a+c)s + d$$

il polinomio caratteristico imposto e':

$$(s+1)(s+2)(s+6)(s+e) =$$
$$s^4 + (s+e)s^3 + (9e+20)s^2 + (20e+12)s + 12e$$

Dal principio di identità dei polinomi e dalla specifica su K_a si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} a - 2 = 9 + e \\ 1 - 2a + b = 9e + 20 \\ a + c = 20e + 12 \\ d = 12e \\ \dfrac{d}{a} = 10 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} a = 66 \\ b = 646 \\ c = 1046 \\ d = 660 \\ e = 55 \end{cases}$$

Si noti che il valore trovato per e fissa un ulteriore polo del sistema retroazionato in –55 e cio' garantisce il rispetto della specifica sui poli dominanti.
Il controllore trovato è quindi:

$$C(s) = \frac{646s^2 + 1046s + 660}{s(s+66)}$$

8.

$$Y = \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 (z^2-1)} = \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 (z+1)(z-1)}$$

$$= \frac{K_{11}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{K_{12}}{z-\frac{1}{2}} + \frac{K_2}{z+1} + \frac{K_3}{z-1}$$

$$K_{11} = \left.\frac{1}{(z^2-1)}\right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{\frac{1-4}{4}} = -\frac{4}{3}$$

$$K_2 = \left.\frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 (z-1)}\right|_{z=-1} = \frac{1}{\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2(-2)} = \frac{1}{\frac{9}{4}(-2)} = -\frac{1}{\frac{9}{2}} = -\frac{2}{9}$$

$$K_3 = \left.\frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 (z+1)}\right|_{z=1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 2} = \frac{1}{\frac{1}{4}\cdot 2} = 2$$

$$K_{12} + K_2 + K_3 = 0 \implies K_{12} = -K_2 - K_3 = \frac{2}{9} - 2 = \frac{2-18}{9} = -\frac{16}{9}$$

$$y(k) = -\frac{4}{3}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \cdot 1(k-1) - \frac{16}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot 1(k-1)$$
$$- \frac{2}{9}(-1)^{k-1} \cdot 1(k-1) + 2 \cdot 1(k-1) \qquad , k \geq 0$$

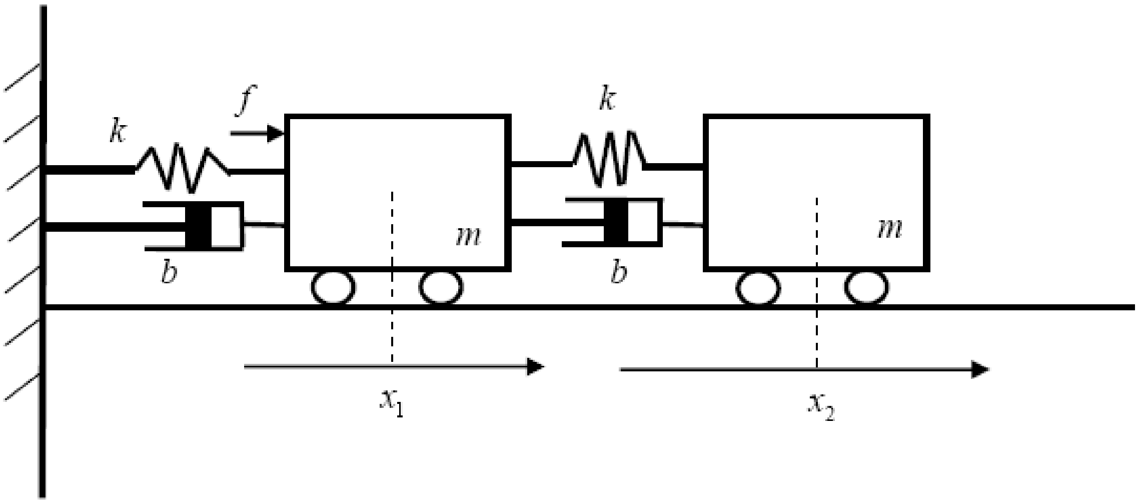
anche esprimibile come

$$y(k) = 2 - 4\delta(k) - \frac{16}{3} k \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{16}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{2}{9}(-1)^k, \; k \geq 0$$

Parte A

1. [punti 4,5] Definire la stabilità asintotica interna per un sistema di controllo in retroazione. Enunciare e dimostrare una condizione necessaria e sufficiente che garantisca questa particolare stabilità.
Fornire inoltre un esempio di sistema retroazionato asintoticamente stabile come sistema orientato dal segnale di comando all'uscita controllata ma non stabile internamente.

2. [punti 4,5] Due carrelli di massa m collegati come mostrato in figura costituiscono un sistema dinamico Σ orientato da f (forza applicata al carrello di sinistra) ad x_1 (posizione del carrello di sinistra). In condizione di riposo delle molle sia $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$.



1. Determinare l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.
2. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ di Σ.
3. Verificare che Σ è asintoticamente stabile per ogni valore di $m, b, k > 0$.

3. [punti 4,5] Dato un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{2s^2+1}{s^2+3s+2}$ determinare la risposta forzata $y(t),\ \ t \in [0, +\infty)$ al segnale di ingresso $u(t) = (1+t)\cdot 1(t)$.

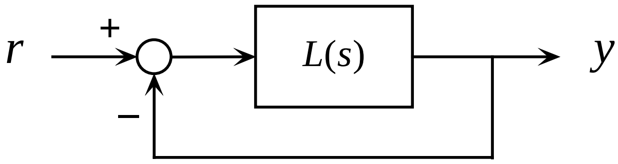
4. [punti 4,5] Un sistema a tempo discreto con ingresso $u(k)$ ed uscita $y(k)$ è definito dall'equazione alle differenze

$$a_2 y(k) + a_1 y(k-1) + a_0 y(k-2) = b_2 u(k) + b_1 u(k-1) + b_0 u(k-2) .$$

Considerando condizioni iniziali generali si determini la trasformata zeta dell'uscita $Y(z) \triangleq \mathcal{Z}\left[y(k)\right]$ (si ponga $u_{-1} \triangleq u(-1)$, $u_{-2} \triangleq u(-2)$, $y_{-1} \triangleq y(-1)$, $y_{-2} \triangleq y(-2)$ e $U(z) \triangleq \mathcal{Z}\left[u(k)\right]$).

Parte B

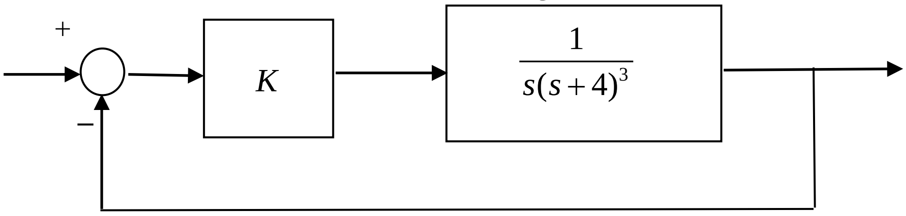
5. [punti 4,5] Sia dato il seguente sistema retroazionato



dove $L(s) = 10 \cdot \dfrac{1+10s}{(s+1)(s+2)(s+3)}$.

1. Tracciare il diagramma polare di $L(j\omega)$ determinando le eventuali intersezioni con l'asse reale.
2. Studiare mediante il criterio di Nyquist la stabilità del sistema retroazionato.

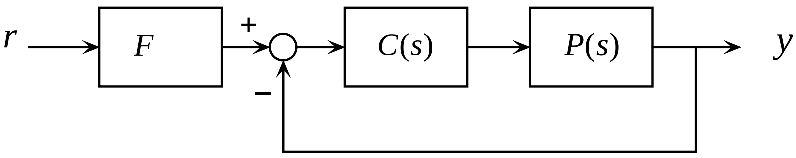
6. [punti 4,5] Sia dato il sistema retroazionato di figura



dove $K \in \mathbb{R}_+$.

1) Determinare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K \in (0,+\infty)$ determinando in particolare asintoti e radici doppie.
2) Determinare l'insieme dei valori $K \in \mathbb{R}_+$ per i quali sussiste la stabilità asintotica del sistema retroazionato.
3) Relativamente al luogo delle radici di cui al punto 1) determinare l'intersezione del luogo con l'asse immaginario.

7. [punti 4,5] Sia dato lo schema di sistema di controllo in figura dove $P(s) = \dfrac{10}{(s+2)(s+5)(s+10)}$.



Determinare un controllore dinamico $C(s)$ con struttura di rete anticipatrice ed il blocco algebrico $F \in \mathbb{R}$ affinché il sistema di controllo soddisfi le seguenti specifiche:

1. costante di posizione $K_p = 19$,
2. margine di ampiezza $M_A = 2$,
3. in condizioni nominali l'errore a regime in risposta ad un gradino del riferimento sia nullo.

8. [punti 4,5] Sia dato un sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento

$$H(z) = \frac{z^2 - z - 1}{(z-1)\left(z + \frac{1}{2}\right)}.$$

a) Determinare l'equazione alle differenze che caratterizza il sistema.
b) Determinare la risposta forzata $y(k)$ all'ingresso $u(k) = k \cdot 1(k)$.

Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

2.

$$\begin{cases} mD^2x_1 = f - kx_1 - bDx_1 + k(x_2 - x_1) + b(Dx_2 - Dx_1) \\ mD^2x_2 = -k(x_2 - x_1) - b(Dx_2 - Dx_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (bD + k)\,x_2 = mD^2x_1 + 2bDx_1 + 2kx_1 - f \\ (mD^2 + bD + k)\,x_2 = bDx_1 + kx_1 \end{cases}$$

$$(mD^2 + bD + k)(mD^2x_1 + 2bDx_1 + 2kx_1 - f) =$$
$$= (bD + k)(bDx_1 + kx_1)$$

$$(mD^2 + bD + k)(mD^2 + 2bD + 2k)\,x_1 - (mD^2 + bD + k)\,f =$$
$$= (bD + k)^2 x_1$$

$$(m^2D^4 + 3bmD^3 + (3km + 2b^2)D^2 + 4bkD + 2k^2)\,x_1$$
$$- (b^2D^2 + 2bkD + k^2)\,x_1 = (mD^2 + bD + k)\,f$$

1

$$\boxed{\begin{aligned} & m^2D^4x_1 + 3bmD^3x_1 + (3km + b^2)D^2x_1 + 2bkDx_1 + k^2x_1 = \\ & \quad = mD^2f + bDf + kf \end{aligned}}$$

2

$$\boxed{G(s) = \frac{ms^2 + bs + k}{m^2s^4 + 3bms^3 + (3km + b^2)s^2 + 2bks + k^2}}$$

3.

Verifica mediante applicazione del criterio di Routh:

$$
\begin{array}{c|ccc}
4 & m^2 & 3km+b^2 & k^2 \\
3 & 3\cancel{b}m & 2\cancel{b}k & 0 \\
2 & \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} & 0 \\
1 & \gamma_{3,1} & 0 & \\
0 & \gamma_{2,2} & &
\end{array}
$$

$$\gamma_{2,1} = 3m\cdot(3km+b^2) - 2km^2 = 9km^2 + 3b^2m - 2km^2$$

$$= 7km^2 + 3b^2m > 0 \quad \forall b,k,m>0 \quad \text{ok!}$$

$$\gamma_{2,2} = 3m\cdot k^2 = 3k^2m$$

$$\gamma_{3,1} = \gamma_{2,1}\cdot 2k - \gamma_{2,2}\cdot 3m = 2k(7km^2+3b^2m) - 3k^2m\cdot 3m =$$

$$= 14k^2m^2 + 6b^2km - 9k^2m^2 = 5k^2m^2 + 6b^2km > 0$$

$$\forall b,k,m>0 \quad \text{ok!}$$

$$\gamma_{22} > 0 \quad \forall b,k,m>0 \quad \text{ok!}$$

Tutte permanenze di segno nella prima colonna:

Σ è asintoticamente stabile.

3.

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2s^2+1}{s^2+3s+2} \cdot \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right) =$$

$$= \frac{2s^2+1}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{s+1}{s^2} = \frac{2s^2+1}{s^2(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_2}{s+2}$$

$$K_{11} = \frac{2s^2+1}{s+2}\bigg|_{s=0} = \frac{1}{2} \qquad K_2 = \frac{2s^2+1}{s^2}\bigg|_{s=-2} = \frac{9}{4}$$

$$K_{12} + K_2 = 2, \quad K_{12} = 2 - K_2 = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{9}{4} \cdot e^{-2t}$$

4.

$$a_2\, y(k) + a_1\, y(k-1) + a_0\, y(k-2) =$$
$$= b_2\, u(k) + b_1\, u(k-1) + b_0\, u(k-2)$$

$$a_2\, Y(z) + a_1 \left\{ z^{-1} Y(z) + y_{-1} \right\} + a_0 \left\{ z^{-2} Y(z) + y_{-2} + y_{-1} z^{-1} \right\} =$$
$$= b_2 U(z) + b_1 \left\{ z^{-1} U(z) + u_{-1} \right\} + b_0 \left\{ z^{-2} U(z) + u_{-2} + u_{-1} z^{-1} \right\}$$

$$a_2 z^2 Y + a_1 \left(z Y + y_{-1} z^2 \right) + a_0 \left(Y + y_{-2} z^2 + y_{-1} z \right) =$$
$$= b_2 z^2 U + b_1 \left(z U + u_{-1} z^2 \right) + b_0 \left(U + u_{-2} z^2 + u_{-1} z \right)$$

$$(a_2 z^2 + a_1 z + a_0) Y + a_1 y_{-1} z^2 + a_0 y_{-2} z^2 + a_0 y_{-1} z =$$
$$= (b_2 z^2 + b_1 z + b_0) U + b_1 u_{-1} z^2 + b_0 u_{-2} z^2 + b_0 u_{-1} z$$

$$Y = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0} U + \frac{C(z)}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}$$

$$C(z) \triangleq c_2 z^2 + c_1 z$$

$$c_2 \triangleq b_1 u_{-1} + b_0 u_{-2} - a_1 y_{-1} - a_0 y_{-2}$$
$$c_1 \triangleq b_0 u_{-1} - a_0 y_{-1}$$

5.

$\boxed{1.}$ $$L(j\omega) = 10\,\frac{1+10j\omega}{(1+j\omega)(2+j\omega)(3+j\omega)}$$

$$\arg L(j\omega) = \mathrm{arctg}\,10\omega - \mathrm{arctg}\,\omega - \mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{2} - \mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{3}$$

per ω piccolo $\arg L(j\omega) \simeq 10\omega - \omega - \frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{3} = \frac{49}{6}\omega$,

quindi per ω piccolo e positivo $\arg L(j\omega) > 0$.

$\omega \to +\infty$ $\quad \arg L(j\omega) \to -\pi$, $\quad |L(j\omega)| \to 0$

$L(j0) = \frac{5}{3} = 1.\bar{6}$

Calcolo intersezioni: $1 + \eta L(s) = 0$ abbia radici pur. im.

$$1 + \eta \cdot 10\,\frac{1+10s}{(s+1)(s+2)(s+3)} = 0, \quad K := 10\eta$$

$$1 + K\,\frac{1+10s}{(s^2+3s+2)(s+3)} = 0, \quad s^3 + 6s^2 + (11+10K)s + 6 + K = 0$$

3	1	11+10K	0
2	6	6+K	0
1	60+59K	0	

Si impone $60 + 59K = 0$

$K = -\frac{60}{59}$. Per questo valore

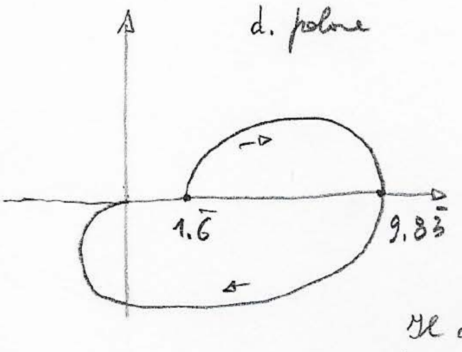
l'eq. ausiliaria $6s^2 + 6 + K = 0$

ammette radici pur. im.

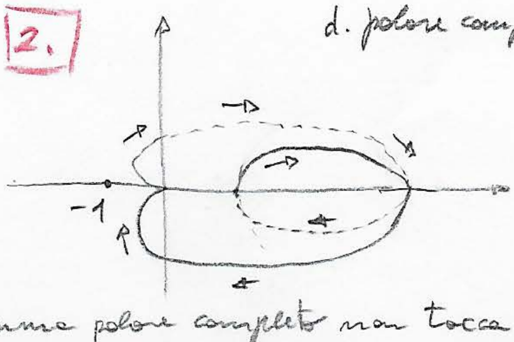
$$\eta = \frac{K}{10} = -\frac{6}{59}$$

Da $1 + \eta L(j\omega) = 0$ segue $L(j\omega) = -\frac{1}{\eta} = \frac{59}{6} = 9.8\bar{3}$

d. polare



$\boxed{2.}$ d. polare completo



Il diagramma polare completo non tocca né circonda -1 e $L(s)$ non ha poli a parte reale positiva. Per il criterio di N. il sistema retroazionato è asintoticamente stabile

6.

1) L'eq. caratteristica è

$$1 + K\frac{1}{s(s+4)^3} = 0 \qquad K > 0.$$

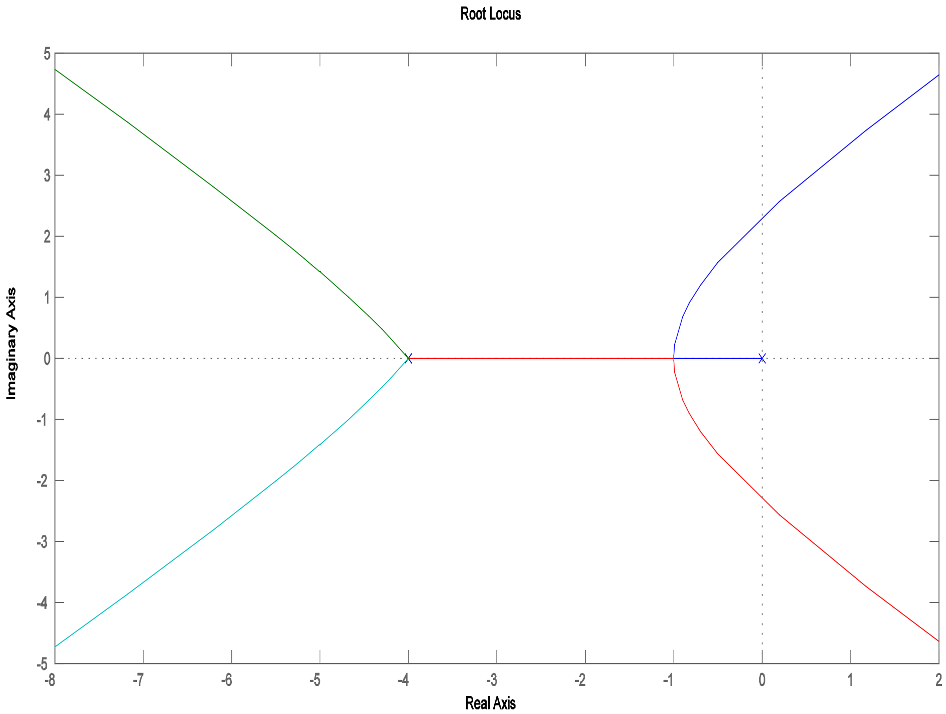
Il luogo è composto da quattro rami convergenti a quattro asintototi rettilinei con angoli rispetto all'asse reale di $+\frac{\pi}{4}, +\frac{3}{4}\pi, -\frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{4}$. Il centro degli asintoti è dato da

$$\sigma_a = \frac{0-4-4-4}{4} = -3$$

Il segmento dell'asse reale fra -3 e 0 appartiene al luogo ed in un suo punto interno si rivela una radice doppia determinabile risolvendo l'equazione:

$$\frac{1}{s} + \frac{3}{s+4} = 0 \qquad \text{radice doppia in } s = -1$$

Il luogo è riportato in figura:



2) L'equazione caratteristica in forma polinomiale è

$$s(s+4)^3 + K = 0$$

$$s^4 + 12s^3 + 48s^2 + 64s + K = 0$$

La tabella di Routh associata è

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 48 & K \\
3 & 12 & 64 & 0 \\
2 & 128 & 3K & 0 \\
1 & 2048-9K & 0 & \\
0 & 3K & &
\end{array}$$

Considerato che $K > 0$, l'applicazione del Criterio di Routh impone $2048 - 9K > 0$. Quindi l'insieme dei valori positivi di K per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile è

$$K \in (0, \frac{2048}{9}) \simeq (0,\ 227,56)$$

3) Dalla tabella di Routh si deduce l'equazione ausiliaria in corrispondenza del valore limite di K ($= 2048/9$):

$$128s^2 + 3 \cdot \frac{2048}{9} = 0$$

Le radici di questa equazione sono $s = \pm j\frac{4}{\sqrt{3}} \simeq \pm j2,309$. Quindi le intersezioni del luogo avvengono in $\pm j2,309$.

7.

b. $C(s) = k \dfrac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}$

$L(0) = \dfrac{k}{10}$ $\qquad K_p = L(0) = 19$

$k = 190$ impongo $-\dfrac{1}{\tau} = -2$ (CANCELLAZIONE POLO-ZERO)

$\tau = \dfrac{1}{2}$

$$L(s) = \frac{1+\frac{1}{2}s}{1+\alpha\frac{1}{2}s} \cdot \frac{1900}{(s+2)(s+5)(s+10)} =$$

$$= \frac{\cancel{s+2}}{(\alpha s+2)} \cdot \frac{1900}{\cancel{(s+2)}(s+5)(s+10)} =$$

$$= \frac{1900}{(\alpha s+2)(s+5)(s+10)}$$

$L(s;\alpha) + \frac{1}{2} = 0$ abbiamo radici pur. immaginarie

$$3800 + (\alpha s+2)(s^2+15s+50) = 0$$

$$\alpha s^3 + (15\alpha + 2)s^2 + (50\alpha + 30)s + 3900 = 0$$

$$\begin{array}{c|cc}
3 & \alpha & 50\alpha + 30 \\
2 & 15\alpha + 2 & 3900 \\
1 & f(\alpha) &
\end{array}$$

$$f(\alpha) = (15\alpha + 2)(50\alpha + 30) - 3900\alpha =$$

$$= 100\alpha + 60 + 750\alpha^2 + 450\alpha - 3900\alpha =$$

$$= 750\alpha^2 - 3350\alpha + 60$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{+1675 \pm \sqrt{1675^2 - 60 \cdot 750}}{750} = \frac{1675 \pm \sqrt{2'760'625}}{750}$$

$$= \frac{1675 \pm 1'661,5123}{750} = \begin{cases} 4,4487 & \text{da SCARTARE} \\ 0,0180 & [0,0179828\ldots] \end{cases}$$

$$\alpha \in (0,1) \Rightarrow \alpha = 0,0180$$

$$C(s) = 180 \, \frac{1 + \frac{1}{2}s}{1 + 0,0180 \cdot \frac{1}{2}s}$$

Calcolo di F :

$$T_{ry}(s) = F \cdot \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

$$T_{ry}(0) = 1 \qquad F \cdot \frac{L(0)}{1+L(0)} = 1$$

$$F \cdot \frac{19}{1+19} = 1 \qquad \boxed{F = \frac{20}{19} = 1{,}0526}$$

8.

a) $H(z) = \dfrac{z^2 - z - 1}{z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}}$, quindi l'equazione alle differenze è

$$y(k) - \frac{1}{2}y(k-1) - \frac{1}{2}y(k-2) = u(k) - u(k-1) - u(k-2)$$

b)

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{z^2 - z - 1}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z(z^2 - z - 1)}{(z-1)^3\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

$$Y \cdot z^{-1} = \frac{z^2 - z - 1}{(z-1)^3\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \frac{c_{1,1}}{(z-1)^3} + \frac{c_{1,2}}{(z-1)^2} + \frac{c_{1,3}}{z-1} + \frac{c_2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{-\frac{2}{3}}{(z-1)^3} + \frac{\frac{10}{9}}{(z-1)^2} + \frac{-\frac{2}{27}}{z-1} + \frac{\frac{2}{27}}{\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

$$Y = -\frac{2}{3}\frac{z}{(z-1)^3} + \frac{10}{9}\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{2}{27}\frac{z}{z-1} + \frac{2}{27}\frac{z}{\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

$$y(k) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}k(k-1) + \frac{10}{9}k - \frac{2}{27} + \frac{2}{27}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k, \ k \ge 0$$

$$y(k) = -\frac{1}{3}k^2 + \frac{13}{9}k - \frac{2}{27} + \frac{2}{27}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k, \ k \ge 0$$

Parte A

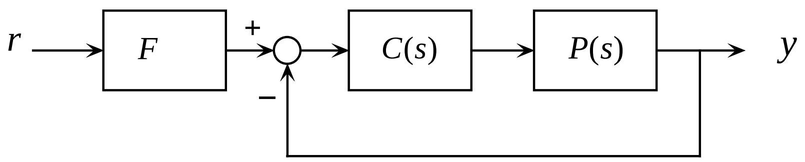
1. [punti 6] Enunciare il Criterio di Nyquist (sia il caso generale che quello particolare) avendo cura di definire i concetti e le premesse teoriche sui quali si basa. Riportare inoltre una dimostrazione di tale criterio.

2. [punti 6] Data la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{s-5}{s(s+10)}$ tracciarne
1) il diagramma di Nyquist con determinazione dell'asintoto e dell'intersezione con l'asse reale;
2) i diagrammi di Bode asintotici (diagramma dei moduli e diagramma delle fasi).
Suggerimento per il tracciamento dei diagrammi di Bode: si assegnino 10 quadretti del foglio protocollo per una decade delle pulsazioni. Si riportano per comodità dello studente i logaritmi in base 10 degli interi da 2 a 9: $\log_{10} 2 \cong 0,30$, $\log_{10} 3 \cong 0,48$, $\log_{10} 4 \cong 0,60$, $\log_{10} 5 \cong 0,70$, $\log_{10} 6 \cong 0,78$, $\log_{10} 7 \cong 0,85$, $\log_{10} 8 \cong 0,90$, $\log_{10} 9 \cong 0,95$.

3. [punti 6] Presentare e dimostrare la formula di antitrasformazione zeta, ovvero l'espressione con l'integrale su curva chiusa del piano complesso che determina la sequenza a tempo discreto $x(k)$ nota che sia $X(z) \triangleq \mathcal{Z}[x(k)]$.

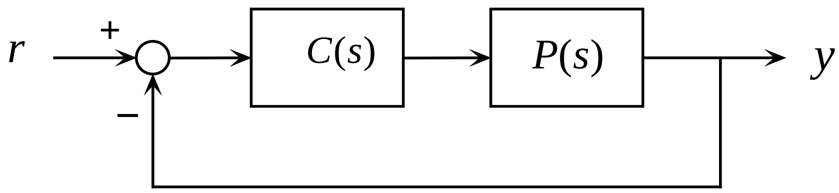
Parte B

4. [punti 6] Sia dato lo schema di sistema di controllo in figura dove $P(s)=\dfrac{1-0.1s}{(s^2+s+1)(s+2)}$.



Determinare un controllore con struttura $C(s)=K\dfrac{s^2+b_1s+b_0}{(s+100)^2}$, $K,b_0,b_1\in\mathbb{R}$ e il blocco algebrico $F\in\mathbb{R}$ affinché il sistema di controllo in risposta ad un gradino del riferimento abbia sovraelongazione nulla ($S=0$), tempo di assestamento $T_a=0.2$ s e un errore di inseguimento a regime nullo ($e_\infty := \lim_{t\to\infty} r_0 1(t)-y(t)=0$).

5. [punti 6] Si consideri il seguente sistema di controllo



dove $P(s)=\dfrac{100(s+1)}{(s+2)^2(s+10)}$. Si chiede di progettare un controllore di struttura (rete ritardatrice) $C(s)=K\dfrac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}$, $K>0$, $\alpha\in(0,1)$, $\tau>0$ affinché:

a) l'errore a regime in risposta ad un gradino unitario del segnale di riferimento sia $e_R=0.02$.

b) Il margine di fase sia $M_F=45^\circ$.

6. [punti 6] Un sistema a tempo discreto è in evoluzione libera (ingresso identicamente nullo) e la trasformata zeta dell'uscita è $Y_{\text{lib}}=\dfrac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2(z^2+1)}$. Determinare la corrispondente evoluzione libera $y_{\text{lib}}(k)$, $k\geq 0$.

Tracce delle soluzioni

1.

Vedi dispense del corso.

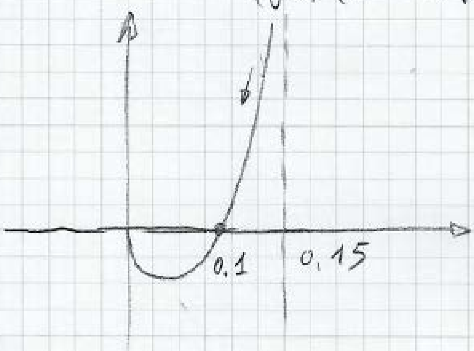
2.

$$G(s) = \frac{s-5}{s(s+10)} \qquad G(s) = \frac{-5\left(1-\frac{1}{5}s\right)}{s \cdot 10 \cdot (1+0{,}1s)}$$

$$G(s) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1-0{,}2 \cdot s}{s(1+0{,}1s)}$$

$$G(j\omega) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1-0{,}2 \cdot j\omega}{(j\omega)(1+0{,}1j\omega)}$$

$$\tau_a = \left(-\frac{1}{2}\right)\left[-0{,}2-0{,}1\right] = -\frac{1}{2} \cdot \left[-0{,}3\right] = 0{,}15$$



$$\omega \to 0 \quad G(j\omega) \to K \frac{1+j\tau_\Sigma \omega}{(j\omega)^h}$$

$$h = 1$$

$$G(j\omega) \to K \frac{1+j\tau_\Sigma \omega}{j\omega} = K\tau_\Sigma - j\frac{K}{\omega}$$

$$\tau_\Sigma = -0{,}2-(0{,}1) = -0{,}3$$

$$K\tau_\Sigma = -\frac{1}{2} \cdot (-0{,}3) = 0{,}15$$

$$1 + K\,G(s) = 0$$

$$1 + K\,G(j\omega) = 0$$

$$G(j\omega) = -\frac{1}{K}$$

$$1 + K\frac{s-5}{s(s+10)} = 0 \qquad s^2 + 10s + K(s-5) = 0$$

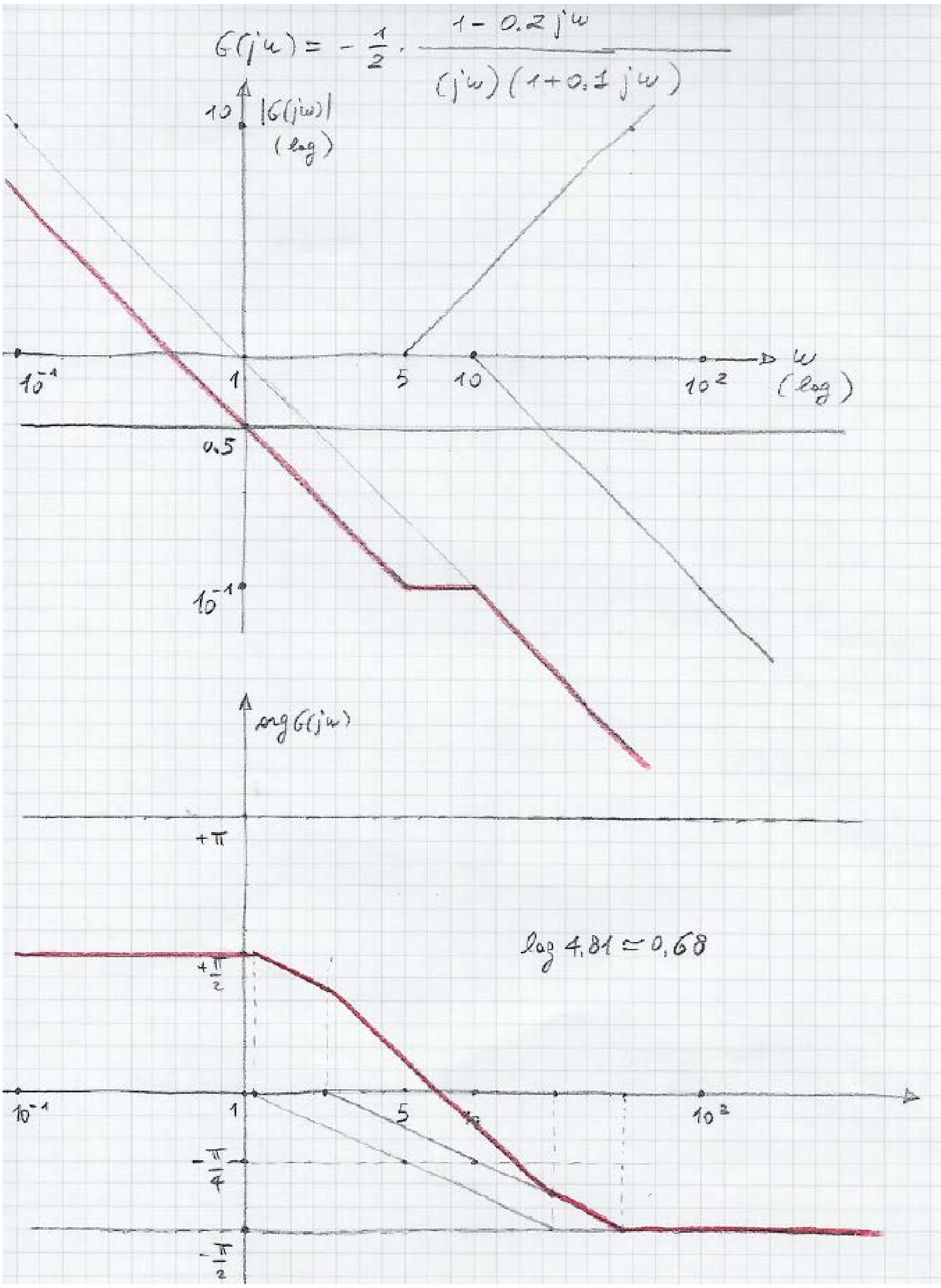
$$s^2 + (10+K)s - 5K = 0$$

$$10 + K = 0 \qquad K = -10$$

$$\Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$s^2 = 5K = -50 \qquad s = \pm j\sqrt{50}$$

$$\omega = \sqrt{50}\ \text{rad/s} = 7.07\ \text{rad/s}$$



3.
Vedi dispese dell'insegnamento.

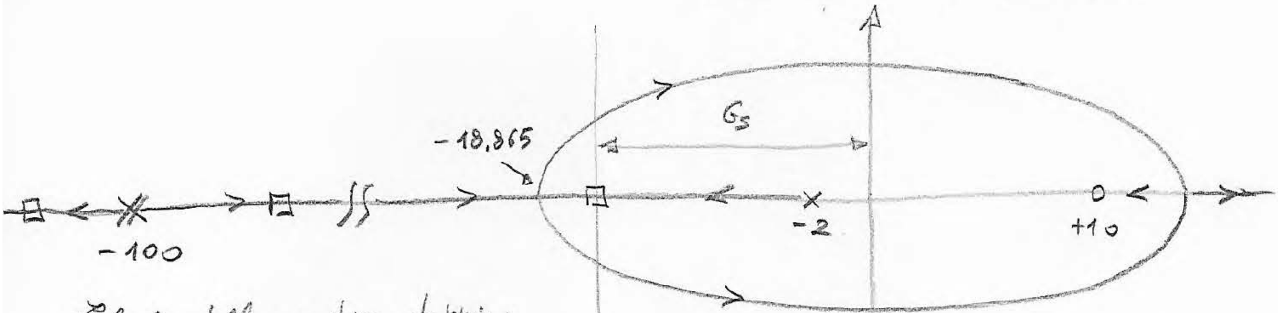
4.

Si sceglie $b_0 = 1$, $b_1 = 1$ affinché si abbia una cancellazione dei poli dominanti del sistema controllato.

$$C(s) = k\,\frac{s^2+s+1}{(s+100)^2}\ ; \quad L(s) := C(s)\,P(s)$$

$$L(s) = k\,\frac{1-0.1\,s}{(s+2)(s+100)^2} = \underbrace{-0.1\cdot k}_{K_1 \triangleq}\,\frac{s-10}{(s+2)(s+100)^2}$$

$$1 + K_1\,\frac{s-10}{(s+2)(s+100)^2} = 0$$ Si traccia il luogo inverso delle radici ($K_1 < 0$).



Calcolo della radice doppia:

$$\frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+100} - \frac{1}{s-10} = 0 \iff s^2 - 14s - 620 = 0$$

$$s_{1,2} = -18.865\,,\ 32.865$$

Sul luogo inverso la radice doppia è in -18.865.

$$T_a = \frac{3}{G_s} \implies G_s = \frac{3}{T_a} = \frac{3}{0{,}2} = 15\ s^{-1}$$

È quindi possibile ottenere $S = 0$ e $T_a = 0{,}2\ s$ imponendo come polo singolo dominante -15:

$$1 + k\,\frac{1-0.1\,s}{(s+2)(s+100)^2}\bigg|_{s=-15} = 0 \implies \boxed{k = 37570}$$

$$L(0) = 1.8785$$

$$F\cdot\frac{L(0)}{1+L(0)} = 1 \implies \boxed{F = \frac{1+L(0)}{L(0)} = 1.532}$$

5.

La specifica a) equivale a $\frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{50} \quad \Leftrightarrow \quad K_p = 49$. Dato che $K_p = K\frac{5}{2}$ si ottiene $K = \frac{98}{5}$

Definiamo

$$L(s) := KP(s) = 1960\frac{s+1}{(s+2)^2(s+10)}$$

$$L'(s) := C(s)P(s) = 1960\frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}\frac{s+1}{(s+2)^2(s+10)}$$

Si propone di progettare α e τ mediante le formule di inversione.

$$L(j\omega) = 1960\frac{j\omega+1}{(j\omega+2)^2(j\omega+10)}$$

$$\arg L(j\omega) = \text{arctg } \omega - 2 \text{ arctg } \frac{\omega}{2} - \text{ arctg } \frac{\omega}{10}$$

$$|L(j\omega)| = 1960\frac{\sqrt{1+\omega^2}}{(4+\omega^2)\sqrt{100+\omega^2}}$$

Il diagramma polare di $L(j\omega)$ è riportato in figura.

Si determina (per tentativi) ω_0 (sarà la pulsazione critica di $L'(j\omega)$):

$\omega_0 = 10$ rad/s

$\arg L(j\omega_0) = -2,0611$ rad $\quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = 0,2951$ rad

$|L(j\omega_0)| = 13,393$

verifica validità di ω_0 : $\quad \left(|L(j\omega_0)|, \varphi_0\right) \in C$?

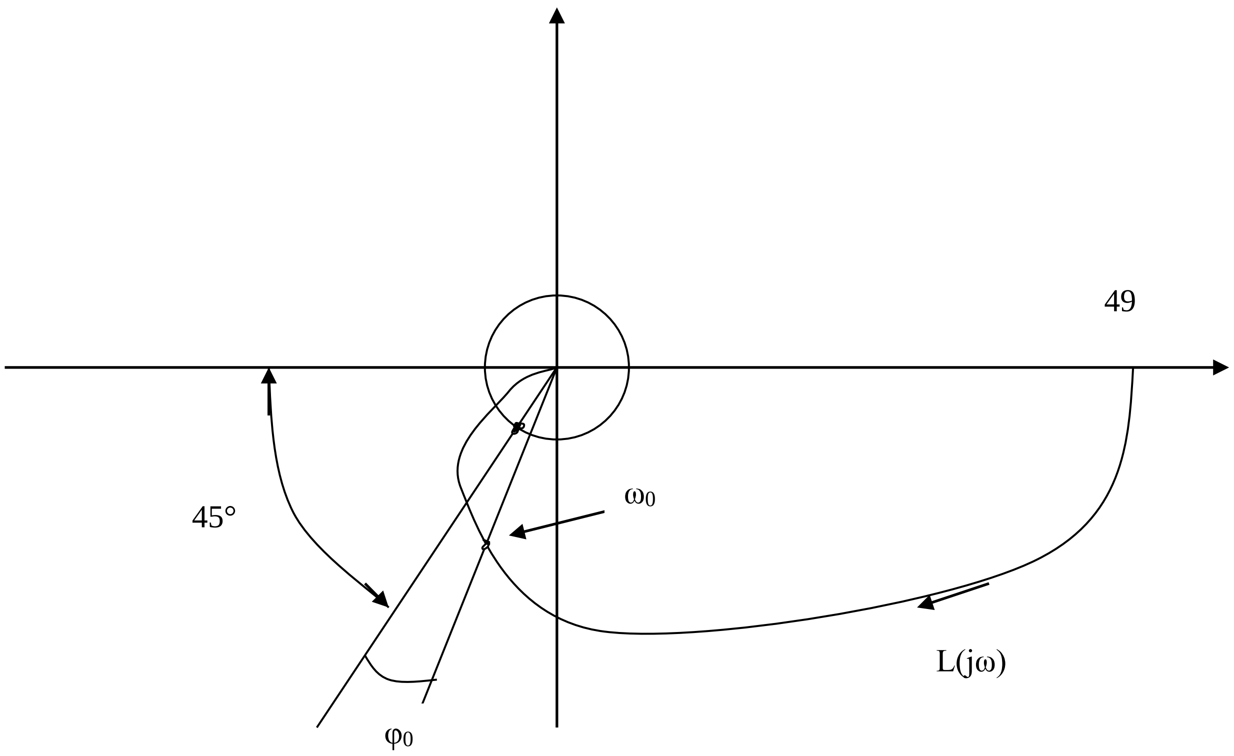
sì, perchè $\cos\ \varphi_0 > 1/|L(j\omega_0)|$: 0,9568 > 0,0747.

Si definisce $M := |L(j\omega)|$ e $\varphi := \varphi_0$ e si impone, mediante le formule di inversione, che

$$\frac{1}{M}e^{-j\varphi} = \frac{1+\alpha\tau j\omega_0}{1+\tau j\omega_0}$$

Quindi:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{M\cos\ \varphi - 1}{M(M - \cos\ \varphi)} = 0.0709 \\ \tau = \dfrac{M - \cos\ \varphi}{\omega_0 \text{ sen } \varphi} = 4.276 \text{ s} \end{cases}$$


49
45°
ω0
L(jω)
φ0

6.

$$Y_{lib} = \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2(z^2+1)} = \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2(z-j)(z+j)} =$$

$$= \frac{K_{11}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{K_{12}}{z-\frac{1}{2}} + \frac{K_2}{z-j} + \frac{\bar{K}_2}{z+j}$$

$$K_{11} = \left.\frac{1}{(z^2+1)}\right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{4}+1} = \frac{4}{5}$$

$$K_2 = \left.\frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2(z+j)}\right|_{z=j} = \frac{1}{\left(j-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2j} = \frac{8}{25}\left(1+\frac{3}{4}j\right) = \frac{8}{25}+\frac{6}{25}j$$

$$K_{12}+K_2+\bar{K}_2 = 0 \qquad K_{12} = -K_2-\bar{K}_2 = -\frac{8}{25}\cancel{-\frac{6}{25}j}-\frac{8}{25}\cancel{+\frac{6}{25}j}$$

$$K_{12} = -\frac{16}{25} \qquad |K_2| = \frac{2}{5} \quad \arg K_2 = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$$

$$Y_{lib}(k) = \frac{4}{5}\cdot(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}\cdot 1(k-1) - \frac{16}{25}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\cdot 1(k-1)$$

$$+2\cdot\frac{2}{5}\cdot\cos\left[\frac{\pi}{2}(k-1)+\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right]\cdot 1(k-1)$$

anche esprimibile come

$$Y_{lib}(k) = \frac{16}{5}k\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot 1(k-1) - \frac{112}{25}\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot 1(k-1) + \frac{16}{25}\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)\cdot 1(k-1) + \frac{12}{25}\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)\cdot 1(k-1)$$

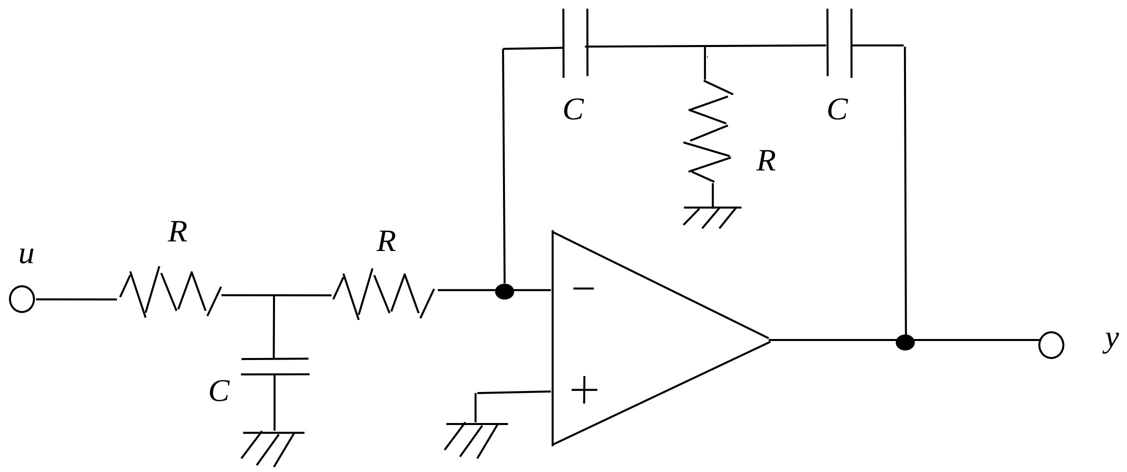
oppure

$$Y_{lib}(k) = \frac{16}{5}k\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{112}{25}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{16}{25}\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) + \frac{12}{25}\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) + 4\,\delta(k),\ k\geq 0$$

Parte A

1. [punti 4,5] Tracciare i diagrammi di Bode ed il diagramma polare relativi alla rete anticipatrice $C(s) = \dfrac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}$ determinando in particolare l'anticipo massimo di fase e la corrispondente pulsazione.

2. [punti 4,5] Il seguente schema elettrico definisca un sistema dinamico Σ orientato da u (tensione di ingresso) ad y (tensione d'uscita).



Si assuma l'amplificatore operazionale come ideale e si introduca il parametro $T \triangleq RC$:

1. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema Σ.
2. Determinare poli, zeri e modi di Σ.
3. Scrivere l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.

3. [punti 4,5] Sia dato un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \frac{s^2+1}{(s+2)^2}$ in cui si introduce l'ingresso $u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 5\sin(t) & t \geq 0 \end{cases}$.
Determinare le condizioni iniziali sull'uscita al tempo 0^-, $y(0^-)$ e $Dy(0^-)$ affinché l'uscita sia identicamente nulla per $t \geq 0$: $y(t) = 0$, $t \geq 0$.

4. [punti 4,5] Sia Σ_d un sistema a tempo discreto descritto dalla funzione di trasferimento $H(z) = \dfrac{b(z)}{a(z)}$ con $a(z)$ e $b(z)$ polinomi coprimi fra loro. Presentare e dimostrare una condizione necessaria e sufficiente che assicuri la stabilità asintotica di Σ_d .

Parte B

5. [punti 4,5 1) Tracciare il diagramma polare associato alla funzione di trasferimento

$$P(s)=\frac{10(1-s)^2}{s(s+1)^3}$$

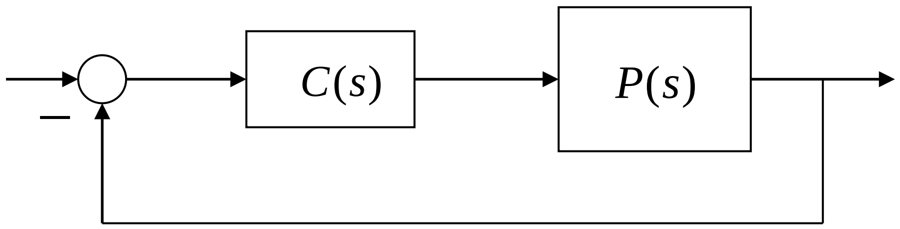
determinando in particolare asintoti e le intersezioni con l'asse reale negativo.
2) Utilizzando il Criterio di Nyquist si studino le radici dell'equazione caratteristica $1+P(s)=0$ (quante a parte reale negativa, quante puramente immaginarie, quante a parte reale positiva).

6. [punti 4,5] Si tracci il luogo delle radici dell'equazione caratteristica

$$1+K_1\frac{s-1}{(s+1)(s+7)}=0$$

per $K_1>0$ (luogo diretto) e per $K_1<0$ (luogo inverso) determinando in entrambi i casi gli asintoti e le eventuali radici doppie.

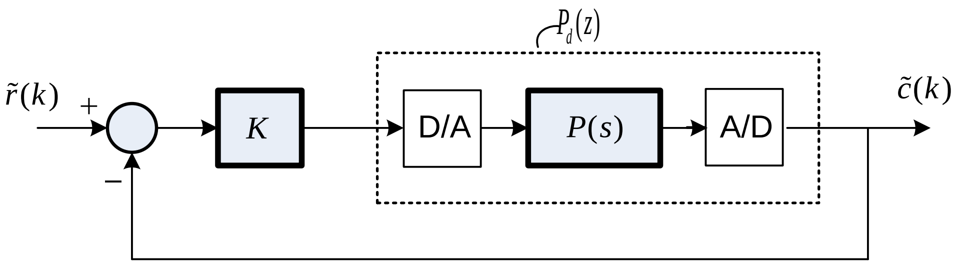
7. [punti 4,5] Sia dato il sistema retroazionato di figura



dove $P(s)=\dfrac{1}{s(s+2)(s+4)}$ e $C(s)=K\in\mathbb{R}$ è un controllore proporzionale.

1. Determinare i valori di K per i quali è assicurata la stabilità asintotica del sistema retroazionato.
2. Determinare i valori di K per i quali il sistema retroazionato ammette $G_S\geq 0,2\ \text{s}^{-1}$ ($G_S\equiv$ grado di stabilità nel piano complesso).

8. [punti 4,5] Determinare i valori di $K\in\mathbb{R}$ che assicurano la stabilità asintotica del sistema di controllo in figura. Il periodo di campionamento è $T=0.02$ s e $P(s)=\frac{16}{(s+2)(s+4)}$.



Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

2.
1.

$$G(s) = -\frac{Z_{tf}}{Z_{ti}}$$

$$Z_{tf} = \frac{1}{sC} + \frac{1}{sC} + \frac{\frac{1}{sC} \cdot \frac{1}{sC}}{R} = \frac{1+2RCs}{RC^2s^2}$$

$$Z_{ti} = R + R + \frac{R^2}{\frac{1}{sC}} = R\left(2 + RCs\right)$$

$$G(s) = -\frac{1+2RCs}{R^2C^2s^2\left(2+RCs\right)}$$

2. Σ ha uno zero in $-\frac{1}{2RC}$ e tre poli in $0, 0,$ e $-\frac{2}{RC}$. I modi sono $1, t, e^{-\frac{2}{RC}t}$.

3.

$$G(s) = -\frac{1+2RCs}{R^2C^2s^2\left(2+RCs\right)} = \frac{-2RCs-1}{R^3C^3s^3 + 2R^2C^2s^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad R^3C^3D^3y(t) + 2R^2C^2D^2y(t) = -2RCDu(t) - u(t)$$

3.

$$G(s) = \frac{s^2+1}{s^2+4s+4}$$

Eq. differenziale $\quad D^{*2} y(t) + 4 D^{*} y(t) + 4 y(t) = D^{*2} u(t) + u(t)$

$$y_- := y(0^-) \qquad Dy_- := Dy(0^-)$$

$$s^2 Y - y_- s - Dy_- + 4(sY - y_-) + 4Y = s^2 U + U$$

$$(s^2+4s+4)Y = (s^2+1)U + y_- s + Dy_- + 4y_-$$

$$Y(s) = \frac{s^2+1}{s^2+4s+4} U(s) + \frac{y_- s + Dy_- + 4y_-}{s^2+4s+4}$$

$$U(s) = \mathcal{L}[5 \sin(t)] = 5 \cdot \frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{\cancel{s^2+1}}{s^2+4s+4} \cdot \frac{5}{\cancel{s^2+1}} + \frac{y_- s + Dy_- + 4y_-}{s^2+4s+4}$$

Imponiamo $Y(s) = 0 \iff y(t) = 0,\ t \geq 0$

$$5 + y_- s + Dy_- + 4y_- = 0 \iff \boxed{\begin{cases} y_- = 0 \\ Dy_- = -5 \end{cases}}$$

Altro metodo:

$$\begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_+ - y_- \\ Dy_+ - Dy_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 & 0 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_+ - u_- \\ Du_+ - Du_- \end{bmatrix}$$

$$y(t) = 0,\ t \geq 0 \Rightarrow y_+ = 0,\ Dy_+ = 0$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 5 \sin(t) & t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_- = 0, & Du_- = 0 \\ u_+ = 0 & Du_+ = 5 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y_- \\ -Dy_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -y_- = 0 \\ -4y_- - Dy_- = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_- = 0 \\ Dy_- = -5 \end{cases}$$

4.
Vedi dispense del corso.

5.
1)

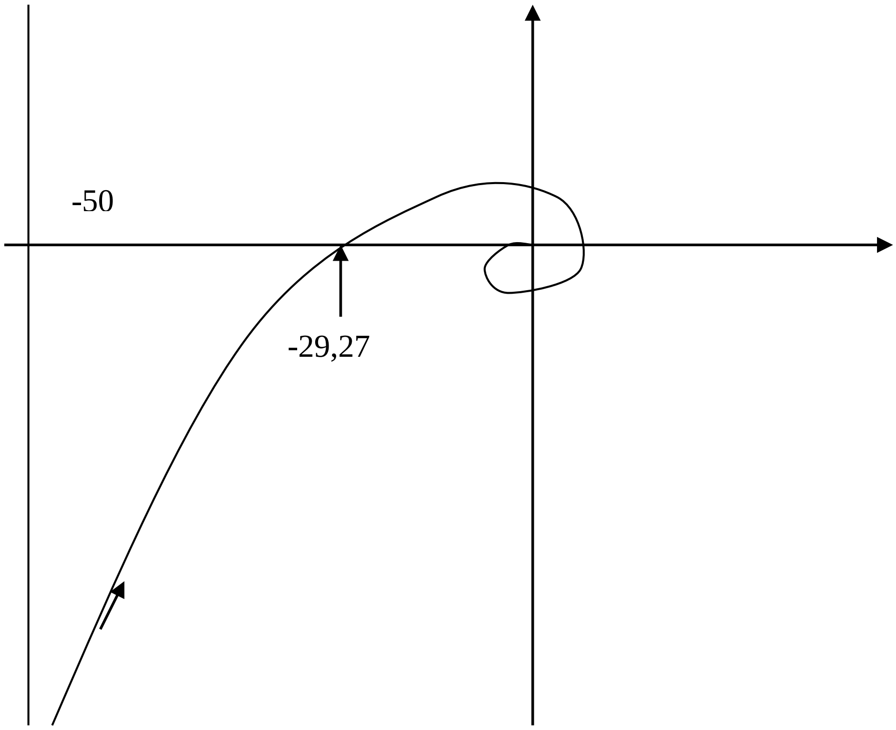
$$P(j\omega)=\frac{10(1-j\omega)^2}{(j\omega)(1+j\omega)^3}$$

$$\arg P(j\omega)=-\frac{\pi}{2}-5\ \text{arctg}\ \omega$$

$$\left|P(j\omega)\right|=\frac{10}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}$$

L'asintoto è verticale (il sistema è di tipo 2) e la sua ascissa è $\sigma_a=10[(-1-1)-(1+1+1)]=-50$.

$$\omega\rightarrow\infty \qquad \arg P(j\omega)\rightarrow -2\pi-\pi$$



Calcolo intersezione con l'asse reale negativo:

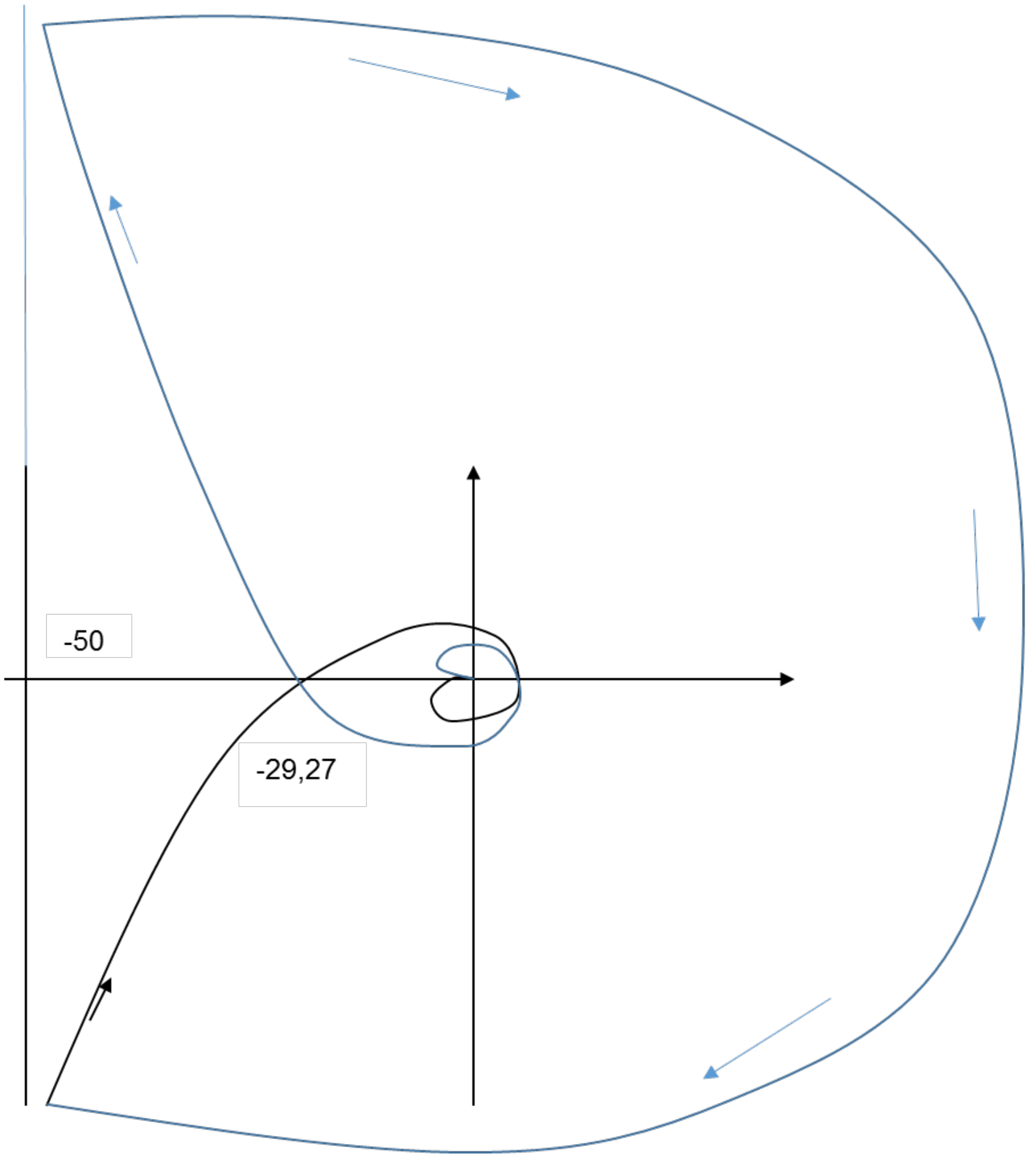
$$\arg P(j\omega_p)=-\pi$$

$$5\ \text{arctg}\ \omega_p=\frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad \omega_p=\ \text{tg}\ \frac{\pi}{10}=0,3249\ \ \text{rad}$$

$$\left|P(j\omega_p)\right|=29,27 \quad\Rightarrow\quad P(j\omega_p)=-29,27$$

2) Considerato che P(s) non ha poli a parte reale positiva, il caso particolare del Criterio di Nyquist afferma che l'eq. 1 + P(s) = 0 ha tutte le radici a parte reale negativa (sistema retroazionato asintoticamente stabile) se e solo se il diagramma polare completo (vedi disegno qui sotto) non tocca né circonda il punto critico - 1. Dal diagramma sopra riportato risulta invece che il d.p.c. circonda 2 volte (in senso orario) il punto – 1. Si conclude quindi:

$$\text{numero radici } \in \mathbb{C}_+ = 2$$
$$\text{numero radici } \in j\mathbb{R} = 0$$
$$\text{numero radici } \in \mathbb{C}_- = 4-2=2$$



6.

Si osservi innanzitutto che si ha la seguente configurazione di poli e zeri:

- uno zero per $s=1$ con molteplicità 1
- uno polo per $s=-1$ con molteplicità 1
- uno polo per $s=-7$ con molteplicità 1

Essendo $n-m=1$ il luogo (sia diretto che inverso) presenta un asintoto.

LUOGO DIRETTO ($K_1 \in [0,+\infty)$ **):**

Tenendo conto delle seguenti osservazioni

- un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zeri e di poli.
- il luogo delle radici ha 2 rami.

si può dedurre che il luogo delle radici (per $K_1 > 0$) ha l'andamento riportato in figura 1.

LUOGO INVERSO ($K_1 \in (-\infty, 0]$):

Tenendo conto delle seguenti osservazioni

- un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale pari di zeri e di poli.
- il luogo delle radici ha 2 rami.
- Il luogo, oltre a due porzioni dell'asse reale, comprende una circonferenza con centro nello zero e raggio $R = \sqrt{d_1 d_2} = 4$ (con $d_1 = 2$ e $d_2 = 8$).

si può dedurre che il luogo delle radici (per $K_1 < 0$) ha l'andamento riportato in figura 2 e interseca l'asse reale nei punti di ascissa -3 e 5.

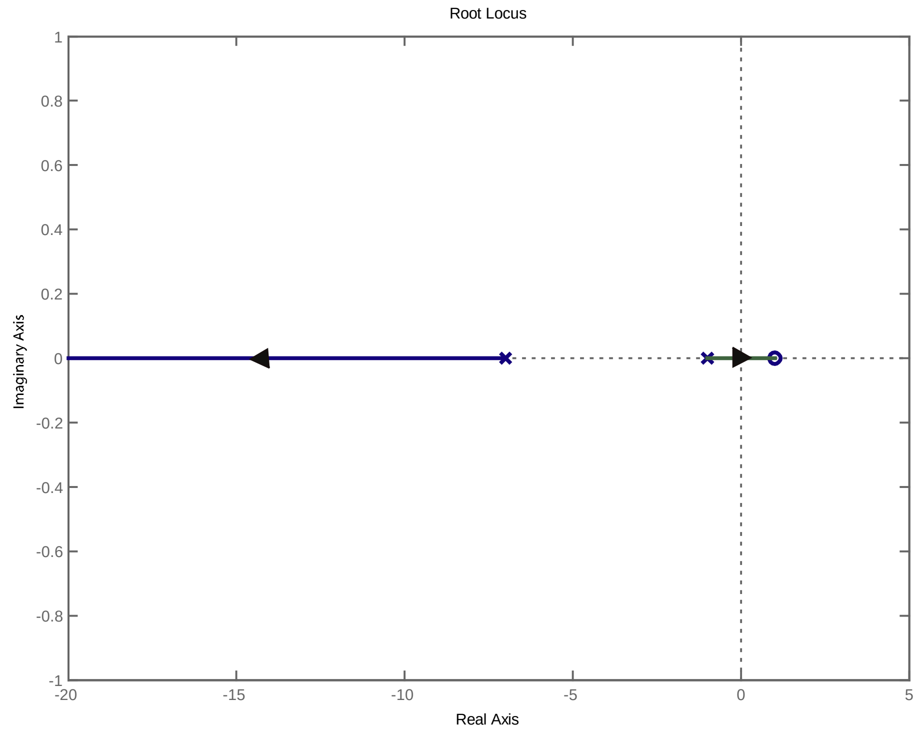


Figura 1. Luogo diretto

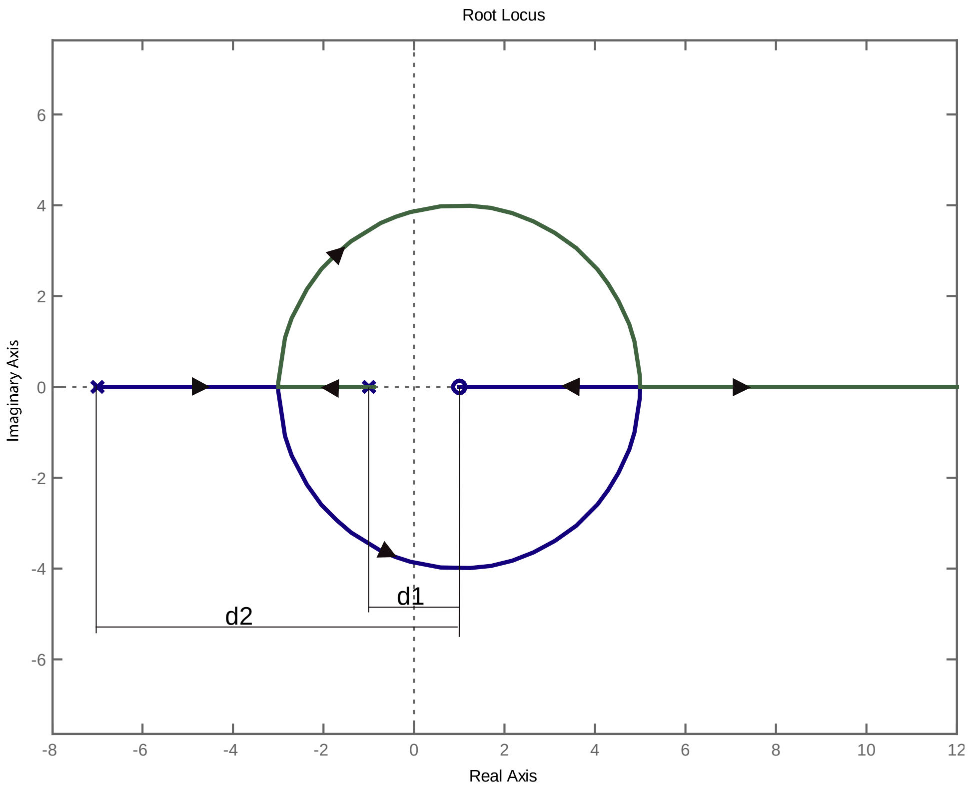


Figura 2. Luogo inverso

7.
L'equazione caratteristica del sistema in retroazione è

$$s^3+6s^2+8s+k=0$$

La corrispondente tabella di Routh è:

3	1	8	0
2	6	k	0
1	48-k	0	
0	k		

Per la stabilità asintotica debbono valere le seguenti disequazioni:
$48-k>0$

$k>0$
Il campo corrispondente alla stabilità asintotica asintotica del sistema è $k\in(0,\ 48)$.

1. Ricordando che il grado di stabilità (nel piano complesso) *Gs* di un sistema asintoticamente stabile è definito come

$G_s=-\max\{\mathrm{Re}\,p_1,\mathrm{Re}\,p_2,...,\mathrm{Re}\,p_n\}$, i=1..n, dove i *pi* sono i poli del sistema

e rappresenta la distanza minima dei poli del sistema dall'asse immaginario, il problema può essere risolto effettuando la traslazione nel piano complesso $s=z-0.2$.
Ponendo $s=z-0.2$ si ottiene:

$$z^3+5.4z^2+5.72z-1.368+k=0$$

La corrispondente tabella di Routh è:

3	1	5.72	0
2	5.4	-1.368+k	0
1	30.888-(k-1.368)	0	
0	-1.368+k		

Per cui i valori di k per cui il sistema retroazionato ammette $G_s \geq 0.2s^{-1}$ sono quelli soddisfacenti il sistema di disequazioni:

$$-1.368 + k > 0$$
$$30.888 - (k - 1.368) > 0$$

cioè $k \in [1.368,\ 32.256]$.

8.

$$P_d(z) = \frac{z-1}{z}\,\mathcal{Z}\left[\frac{P(s)}{s}, T\right]$$

$$\frac{P(s)}{s} = \frac{16}{s(s+2)(s+4)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+8} = \frac{2}{s} - \frac{4}{s+2} + \frac{2}{s+4}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{s}\right] = 2 - 4e^{-2t} + 2e^{-4t} := P_s(t)$$

$$\mathcal{Z}[P_s(kT)] = \mathcal{Z}\left[2 - 4e^{-2\cdot k\cdot 0.02} + 2e^{-4\cdot k\cdot 0.02}\right] = \mathcal{Z}\left[2 - 4\left(e^{-0.04}\right)^k + 2\left(e^{-0.08}\right)^k\right]$$

$$= 2\frac{z}{z-1} - 4\cdot\frac{z}{z-0.9608} + 2\frac{z}{z-0.9231}$$

$$P_d(z) = \frac{z-1}{z}\,\mathcal{Z}[P_s(kT)] = 2 - 4\frac{z-1}{z-0.9608} + 2\frac{z-1}{z-0.9231} = \frac{0.003000\cdot z + 0.00302896}{(z-0.9608)(z-0.9231)}$$

$$T_{\tilde{r}\tilde{c}}(z) = \frac{L(z)}{1+L(z)}, \quad L(z) = k\,P_d(z)$$

$$1 + k\frac{0.003\cdot z + 0.00302896}{(z-0.9608)(z-0.9231)} = 0 \qquad z^2 - 1.8839\cdot z + 0.88691448 + 0.003\cdot k\cdot z + 0.00302896k = 0$$

$$z^2 + (0.003\cdot k - 1.8839)z + 0.00302896\cdot k + 0.88691448 = 0 \qquad a(z) = 0$$

1) $a(1) > 0$, $\quad 0.00301448 + 0.00602896\cdot k > 0 \qquad k > -0.5$

2) $(-1)^2 a(-1) > 0$, $\quad 3.77081448 + 0.00002896\cdot k > 0 \qquad k > -130207.68$

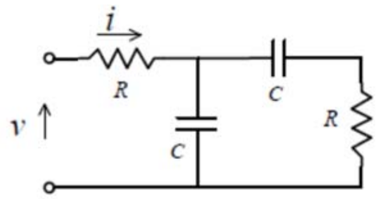
3) $|a_0| < a_2 \qquad |0.00302896\cdot k + 0.88691448| < 1 \qquad \begin{cases} k < 37.33 \\ k > -622.96 \end{cases}$

$\quad -0.00302896\cdot k - 0.88691448 < 1$

$$\boxed{-0.5 < k < 37.33}$$

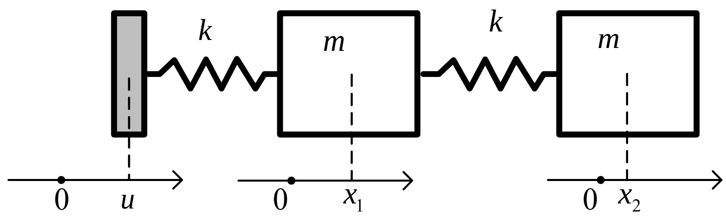
Parte A

1. [punti 6] La rete elettrica di figura definisca un sistema dinamico orientato dalla tensione v (ingresso) alla corrente i (uscita).



Di questo sistema si determini (con $T := RC$):
1) la funzione di trasferimento, 2) gli zeri, 3) i poli, 4) i modi, 5) il guadagno statico, 6) l'equazione differenziale.

2. [punti 6] Un azionamento elettrico lineare che può imporre una posizione desiderata u viene utilizzato per movimentare due masse su di una guida rettilinea (vedi figura). Gli accoppiamenti fra le masse e con l'azionamento elettrico sono costituiti da molle ideali con costante elastica k. Le posizioni delle due masse sono descritte dalle variabili x_1 e x_2. Si vuole studiare la dinamica del sistema meccanico orientato da u (ingresso) ad x_1 (uscita) ipotizzando che in condizioni di quiete si abbia $u = 0$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. Di questo sistema si determini: 1) l'equazione differenziale, 2) la funzione di trasferimento, 3) gli zeri, 4) i poli, 5) i modi, 6) il guadagno statico.



3. [punti 6] Presentare e dimostrare gli integrali di Vaschy. [Sono gli integrali che determinano la risposta forzata di un sistema noto l'ingresso e la risposta al gradino unitario del sistema]

Parte B

4. [punti 6] Sia dato un generico sistema dinamico orientato da u (ingresso) ad y (uscita) e descritto dall'equazione differenziale $\sum_{i=0}^{n} a_i D^i y(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i D^i u(t)$.

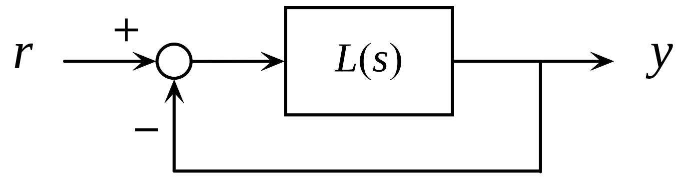
Note le condizioni iniziali al tempo $0-$ come $y_-, Dy_-, \ldots, D^{n-1}y_-$ e $u_-, Du_-, \ldots, D^{m-1}u_-$ e l'azione forzante $u(t),\ t \geq 0$, determinare la trasformata di Laplace della risposta $y(t),\ t \geq 0$.

Nota: riportare i ragionamenti e i passaggi che permettono l'individuazione dell'espressione di $Y(s)$ cercata.

5. [punti 6] Determinare la risposta $g_s(t)$ al gradino unitario di un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{1}{(s+2)\left[(s+1)^2+1\right]}$. Determinare inoltre la risposta $g(t)$ all'impulso unitario di tale sistema.

6. [punti 6] Dato il sistema retroazionato di figura con $L(s) = \dfrac{16}{s(s+5)}$, determinare:

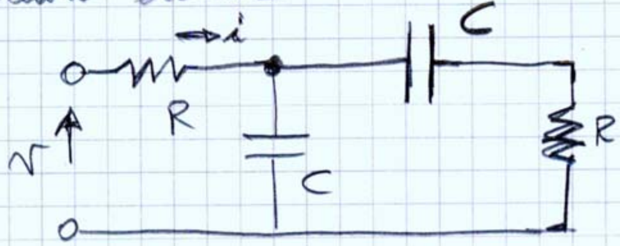
1. la funzione di trasferimento e l'equazione differenziale del sistema orientato da r ad y.
2. il tempo di assestamento T_a, la sovraelongazione S ed il tempo di salita T_s della risposta $y(t)$ al comando in ingresso $r(t) = 1(t)$ (gradino unitario).

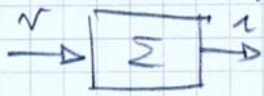


Tracce delle soluzioni

1.

1) Circuito elettrico





$T := RC$

$$V = Z_{tot}\, I \qquad I = \frac{1}{Z_{tot}}\, V$$

$$\text{f.d.t.} \equiv G(s) = \frac{1}{Z_{tot}}$$

$$Z_{tot} = R + \frac{\frac{1}{Cs}\left(\frac{1}{Cs} + R\right)}{\frac{1}{Cs} + \frac{1}{Cs} + R} = R + \frac{\frac{1}{Cs} \cdot \frac{1+RCs}{Cs}}{\frac{2}{Cs} + R} =$$

$$= R + \frac{\frac{1+RCs}{(Cs)^2}}{\frac{2+RCs}{Cs}} = R + \frac{\frac{1+RCs}{Cs}}{2+RCs} =$$

$$= R + \frac{1+RCs}{Cs(2+RCs)} = \frac{RCs(2+RCs) + 1 + RCs}{Cs(2+RCs)} =$$

$$= \frac{2RCs + (RC)^2 s^2 + RCs + 1}{Cs(RCs+2)} = \frac{(RC)^2 s^2 + 3RCs + 1}{Cs(RCs+2)}$$

$$G(s) = \frac{Cs(RCs+2)}{(RC)^2 s^2 + 3RCs + 1} = \frac{Cs(Ts+2)}{T^2 s^2 + 3Ts + 1}$$

zeri: $z_1 = 0$, $z_2 = -\frac{2}{RC}$ poli: $p_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2T}$, $p_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2T}$

modi: $\left\{ \exp\left\{-\frac{3+\sqrt{5}}{2T} t\right\}, \exp\left\{-\frac{3-\sqrt{5}}{2T} t\right\} \right\}$, guadagno statico $G(0) = 0$

eq. diff. $T^2 D^2 i(t) + 3T D i(t) + i(t) = CT D^2 v(t) + 2C D v(t)$

2.

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} m D^2 x_1 = -k(x_1 - u) + k(x_2 - x_1) \\ m D^2 x_2 = -k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (mD^2+k) \\ k \end{array} \begin{cases} k x_2 = m D^2 x_1 + 2k x_1 - k u \\ (m D^2 + k) x_2 = k x_1 \end{cases}$$

$$(m D^2 + k)\left[(m D^2 + 2k) x_1 - k u\right] = k^2 x_1$$

$$\boxed{m^2 D^4 x_1 + 3 k m D^2 x_1 + k^2 x_1 = k m D^2 u + k^2 u} \qquad \text{eq. diff.}$$

$$\text{f.d.t.} \quad G(s) = \frac{k m s^2 + k^2}{m^2 s^4 + 3 k m s^2 + k^2} = \frac{k(m s^2 + k)}{m^2 s^4 + 3 k m s^2 + k^2}$$

$$\text{zeri:} \quad m s^2 + k = 0, \qquad z_{1,2} = \pm j \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\text{poli:} \quad m^2 s^4 + 3 k m s^2 + k^2 = 0, \qquad s^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{k}{m}$$

$$p_{1,2} = \pm j \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad p_{3,4} = \pm j \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\text{modi:} \quad \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \varphi_1\right), \ \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \varphi_2\right)$$

$$\text{guadagno statico} \quad G(0) = 1.$$

3.
Vedi dispense del corso

Parte B

4.
Vedi dispense del corso

5.

$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{1}{s(s+2)(s+1-j)(s+1+j)}$$

$$= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+1-j} + \frac{\overline{K_3}}{s+1+j}$$

$$K_1 = \left.\frac{1}{(s+2)[(s+1)^2+1]}\right|_{s=0} = \frac{1}{4}$$

$$K_2 = \left.\frac{1}{s[(s+1)^2+1]}\right|_{s=-2} = \frac{1}{(-2)[2]} = -\frac{1}{4}$$

$$K_3 = \left.\frac{1}{s(s+2)(s+1+j)}\right|_{s=-1+j} = \frac{1}{(-1+j)(-1+j+2)(\cancel{-1}+j+\cancel{1}+j)} =$$

$$= \frac{1}{(-1+j)(1+j)\,2j} = \frac{1}{[j^2-1]\,2j} = \frac{1}{(-2)\,2j} = \frac{1}{-4j}$$

$$K_3 = \frac{j}{-4j^2} = \frac{1}{4}j \qquad |K_3| = \frac{1}{4} \quad \arg K_3 = +\frac{\pi}{2}$$

$$g_s(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} + 2|K_3|\,e^{-t}\cdot\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-t}[-\sin t] = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-t}\sin t$$

OK!! ✓

$$g_s(t) \in \overline{C}^{\,\rho-1} \qquad \rho = 3 \qquad g_s(t) \in \overline{C}^{\,2}$$

$$g(t) = D\,g_s(t) = \left(-\frac{1}{4}\right)(-2)e^{-2t} - \frac{1}{2}(-1)e^{-t}\sin t - \frac{1}{2}e^{-t}(\cos t) =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-t}\sin t - \frac{1}{2}e^{-t}\cos t$$

OK!

6.

1. $$G_{ry}(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{\frac{16}{s(s+5)}}{1+\frac{16}{s(s+5)}} = \frac{16}{s(s+5)+16} = \frac{16}{s^2+5s+16}$$

eq. diff.: $D^2y(t) + 5Dy(t) + 16y(t) = 16r(t)$

2. Dal confronto $\frac{16}{s^2+5s+16} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2}$

$\omega_n = \sqrt{16} = 4 \quad \Rightarrow \quad T_s \simeq \frac{1.8}{\omega_n} = 0,45 \ \text{sec.}$

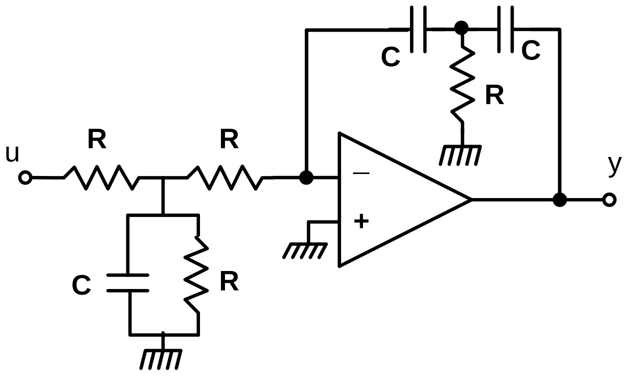
$2\delta\omega_n = 5 \ \Rightarrow \ \delta\omega_n = 2.5 \ \Rightarrow \ T_a = \frac{3}{\delta\omega_n} = 1,2 \ \text{sec.}$

$\delta = \frac{2.5}{4} = 0,625 \quad \Rightarrow \quad S = 100\exp\left(-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) \cong 8,1\%$

Parte A

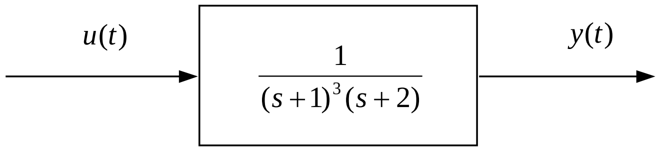
1. [punti 4.5] Sia dato un sistema in retroazione unitaria con guadagno di anello L(s). Si presenti e discuta l'analisi a regime della risposta ai segnali tipici del riferimento.

2. [punti 4.5] L'amplificatore operazionale di figura definisce un sistema dinamico orientato da u (tensione all'ingresso) ad y (tensione all'uscita).



Di questo sistema si determinino: 1) la funzione di trasferimento; 2) l'equazione differenziale; 3) gli zeri, i poli e i modi.

3. [punti 4.5] Sia dato il sistema di figura con funzione di trasferimento $P(s) = \dfrac{1}{(s+1)^3(s+2)}$.



Determinare l'evoluzione forzata $y(t)$ del sistema in risposta al gradino unitario $u(t) = 1(t)$.

4. [punti 4.5] Si consideri un sistema lineare a tempo discreto. Enunciare e dimostrare una condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia asintoticamente stabile alle perturbazioni.

Parte B

5. [punti 4.5] Dato un sistema retroazionato con guadagno di anello

$$L(s) = 50\frac{(s+1)^2}{s^3(s+10)}$$

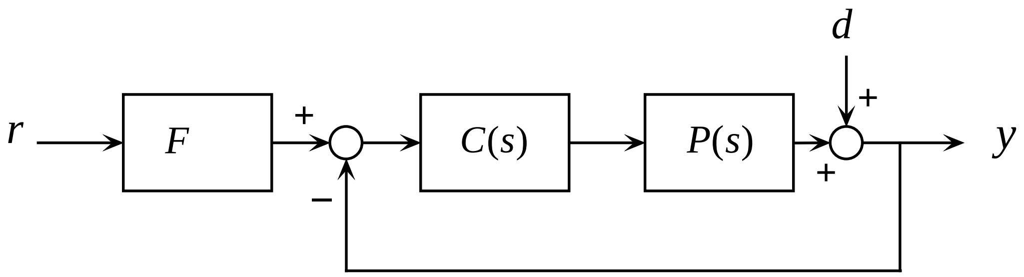
1. Tracciare il diagramma polare di $L(j\omega)$ determinando le eventuali intersezioni con l'asse reale.
2. Studiare la stabilità del sistema retroazionato con il Criterio di Nyquist.

6. [punti 4.5] Tracciare il luogo delle radici della seguente equazione caratteristica:

$$1 + K_1 \frac{s-1}{(s+1)^3(s+2)^2} = 0$$

per $K_1 \in [0, +\infty)$, determinando in particolare gli asintoti e le eventuali radici doppie.

7. [punti 4.5] Sia dato lo schema di sistema di controllo di figura



dove $P(s) = \dfrac{4}{s+2}$. Determinare un controllore $C(s)$ di ordine minimo ed il blocco algebrico $F \in \mathbb{R}$ affinché il sistema di controllo soddisfi le seguenti specifiche:

1. reiezione infinita asintotica al disturbo sinusoidale $d(t) = 3\sin(2t+4)$,
2. sistema retroazionato con poli dominanti in $-2 \pm j$,
3. costante di posizione $K_p = 4$,
4. in condizioni nominali l'errore a regime in risposta ad un gradino del riferimento sia nullo.

8. [punti 4.5] Determinare il segnale a tempo discreto $x(k),\ k \geq 0$ la cui trasformata zeta è

$$\mathcal{Z}[x(k)] = \frac{2z^3 + z + 1}{(z-1)(z-2)^2}.$$

Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense dell’insegnamento.

2.

$$> \quad G := -\frac{\frac{1}{s\,C} + \frac{1}{s\,C} + \frac{\frac{1}{s\,C}\cdot\frac{1}{s\,C}}{R}}{R + R + \frac{R\,R}{\frac{\frac{1}{s\,C}\cdot R}{\frac{1}{s\,C} + R}}}$$

$$-\frac{\frac{2}{s\,C} + \frac{1}{s^2\,C^2\,R}}{2\,R + R\,s\,C\left(\frac{1}{s\,C} + R\right)}$$

$$-\frac{2\,s\,C\,R + 1}{s^2\,C^2\,R^2\,(3 + s\,C\,R)}$$

$$G(s) = \frac{-2RCs - 1}{(RC)^3 s^3 + 3(RC)^2 s^2}$$

eq. differenziale

$$(RC)^3 D^3 y(t) + 3(RC)^2 D^2 y(t) = -2(RC) D u(t) - u(t)$$

zeri : $z_1 = -\dfrac{1}{2RC}$

poli : $p_1 = 0 \qquad p_2 = 0 \qquad p_3 = -\dfrac{3}{RC}$

modi $= \left\{ 1,\ t,\ \exp\left\{ -\frac{3}{RC} t \right\} \right\}$

3.

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)^3(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1)^3} + \frac{K_{22}}{(s+1)^2} + \frac{K_{23}}{s+1} + \frac{K_3}{s+2}$$

$$K_1 = \left.\frac{1}{(s+1)^3(s+2)}\right|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$K_{21} = \left.\frac{1}{s(s+2)}\right|_{s=-1} = \frac{1}{(-1)(1)} = -1$$

$$K_3 = \left.\frac{1}{s(s+1)}\right|_{s=-2} = \frac{1}{(-2)(-1)} = \frac{1}{2}$$

$$K_1 + K_{23} + K_3 = 0 \qquad K_{23} = -K_1 - K_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

$$K_{22} = \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s(s+2)}\right)\right|_{s=-1} = -\left.\frac{s+2+s}{s^2(s+2)^2}\right|_{s=-1} = 0$$

$$Y(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2 e^{-t} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \qquad t \geq 0}$$

4.
Vedi dispense dell'insegnamento.

5.
1)

$$L(j\omega) = \frac{50(j\omega+1)^2}{(j\omega)^3(j\omega+10)}$$

$$|L(j\omega)| = \frac{50(1+\omega^2)}{\omega^3(100+\omega^2)^{1/2}}$$

$$\arg L(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi - arctg\,0.1\omega + 2arctg\,\omega$$

Studio del diagramma polare di $L\left(j\omega\right)$:

Comportamento per $\omega \to 0^+$:
Il diagramma polare parte da un punto all'infinito

$$\lim_{\omega \to 0+} \left| L\left(j\omega\right) \right| = \infty$$

$$\lim_{\omega \to 0^+} \arg L\left(j\omega\right) = -\frac{3}{2}\pi$$

Comportamento per $\omega \to \infty$:
Il diagramma termina nell'origine tangente a uno degli assi coordinati, essendo

$$\lim_{\omega \to \infty} \left| L\left(j\omega\right) \right| = 0$$

$$\lim_{\omega \to \infty} \arg L\left(j\omega\right) = -\pi$$

Calcolo dell'intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo:

$$\arg L\left(j\omega_p\right) = -\pi$$

$$-\frac{3}{2}\pi - arctg 0.1\omega + 2 arctg \omega = -\pi$$

$$-arctg 0.1\omega + 2 arctg \omega = \frac{\pi}{2}$$

$$1 + tg\left(2 arctg \omega\right) \cdot 0.1\omega = 0$$

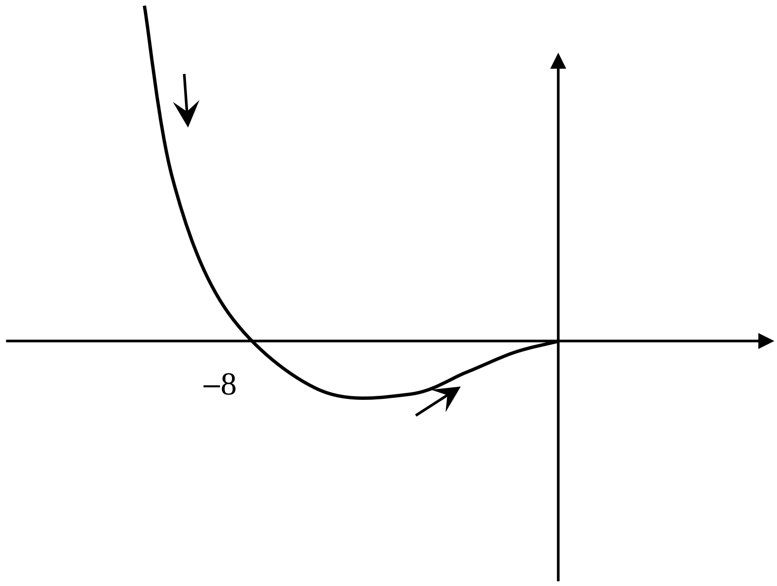
$$1 + \frac{2\omega}{1-\omega^2} \cdot \frac{\omega}{10} = 0$$

$$\omega_p = \sqrt{5/4} \simeq 1.118 rad/\sec$$

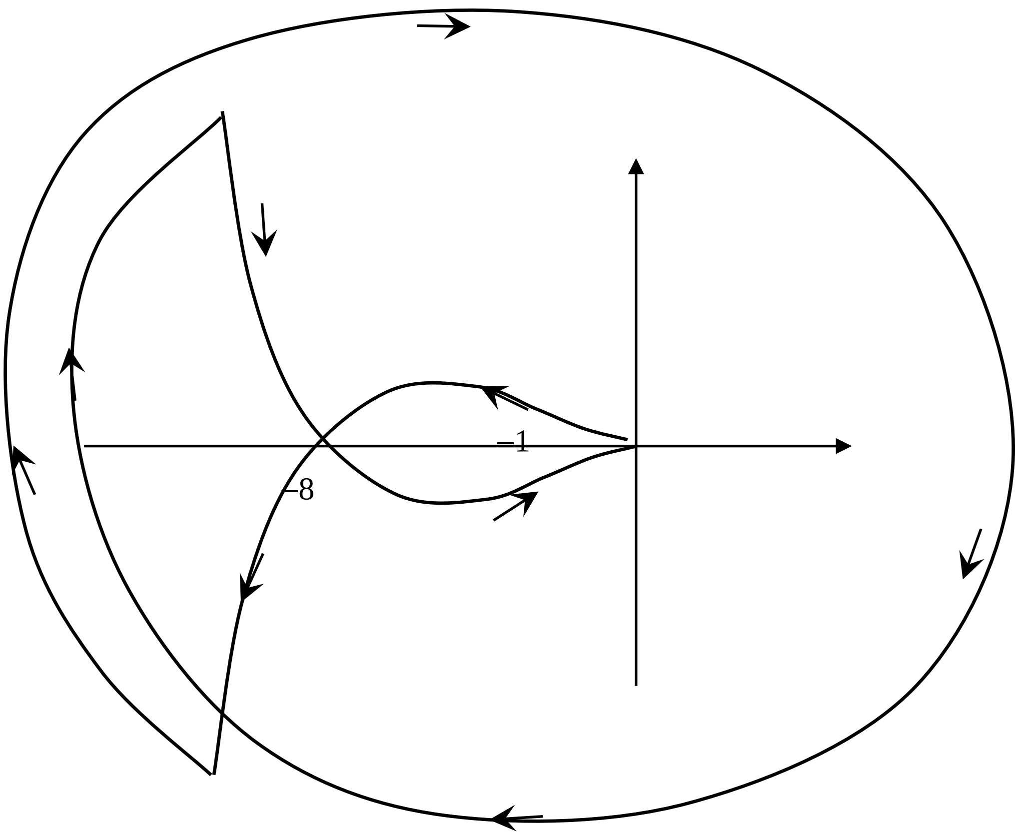
$$\left| L\left(j\omega_p\right) \right| = 8$$

$$L\left(j\omega_p\right) = -8$$

Il diagramma polare del guadagno di anello risulta pertanto:



2) Il diagramma polare completo è:



Si può concludere che per il criterio di Nyquist il sistema retroazionato è **asintoticamente stabile**. Infatti considerato che non ci sono poli a parte reale positiva del guadagno di anello, il numero totale di giri del diagramma polare completo attorno al punto critico -1 è nullo.

6.

Si osservi innanzitutto che si ha la seguente configurazione di poli e zeri:

- uno zero per $s=1$ con molteplicità 1
- uno zero per $s=-1$ con molteplicità 3
- uno polo per $s=-2$ con molteplicità 2

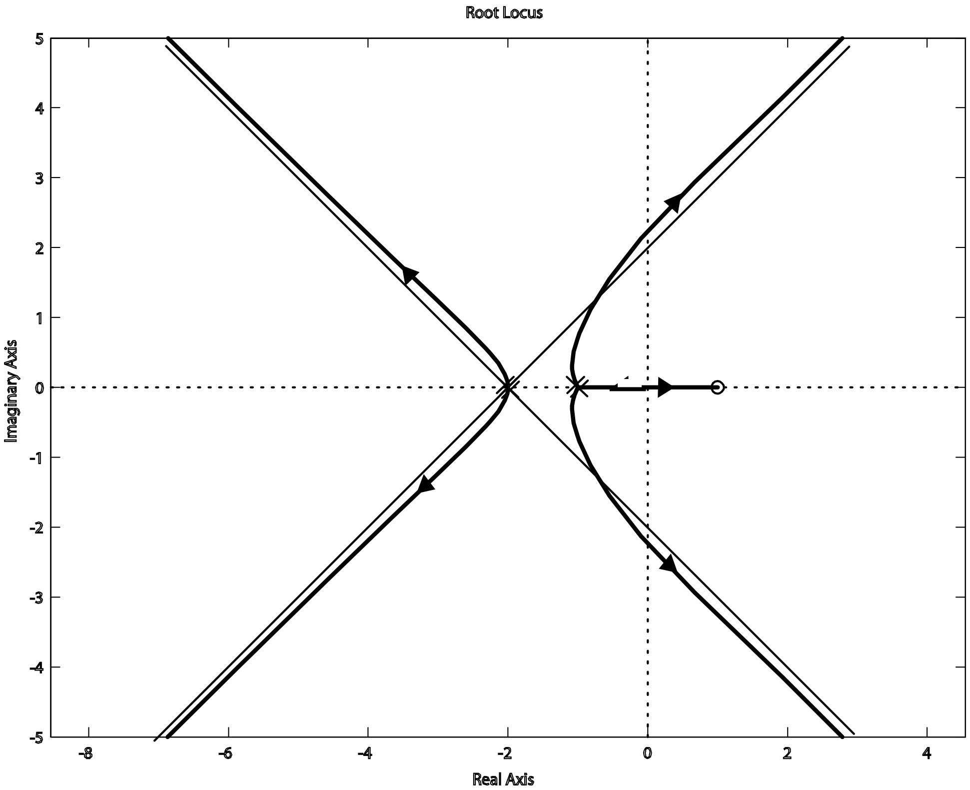
Essendo $n-m=4$ il luogo presenta quattro asintoti.
Tali asintoti formano una stella di raggi con centro nel punto dell'asse reale di ascissa

$$\sigma_a = \frac{1}{4}((-1-1-1-2-2)-1) = -2$$

Tenendo conto delle seguenti osservazioni (luogo diretto):

- un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zeri e di poli.
- il luogo delle radici ha 5 rami.
- gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli
  $\theta_{a,0} = \frac{\pi}{4}$; $\theta_{a,1} = \frac{3}{4}\pi$; $\theta_{a,2} = \frac{5}{4}\pi$; $\theta_{a,3} = \frac{7}{4}\pi$
- le radici doppie sono individuate dalle soluzioni della seguente equazione
  $\frac{1}{s-1} - 3\frac{1}{s+1} - 2\frac{1}{s+2} = 0$
  cioè
  $4s^2 - 10 = 0$
  e risultano essere
  $s_1 = -\sqrt{5/2}$; $s_2 = \sqrt{5/2}$
  si nota subito che esse non appartengono al luogo delle radici.

si può dedurre che il luogo delle radici per $K_1 > 0$ ha l'andamento riportato in figura:



7.

L'ordine minimo per il controllore $C(s)$ è 2.

1. Disturbo sinusoidale $d(t) = A\ \sin(\omega\ t + 4) = 3\ \sin(2\ t + 4)$; per la reiezione asintotica al disturbo pongo un polo complesso coniugato alla pulsazione $\omega = 2$. Il controllore di ordine minimo sarà della forma:

$$C(s) = \frac{b_2\, s^2 + b_1\, s + b_0}{(s^2 + 4)}$$

3. Costante di posizione $K_p = 4$:

$$L(s) = C(s)\ P(s)$$

$$K_p = L(0) = \frac{b_0}{2} \ \Rightarrow\ K_p = \frac{b_0}{2} = 4 \ \Rightarrow\ b_0 = 8$$

2. Sistema retroazionato con poli dominanti in $-2 \pm j$.
Polinomio caratteristico:

$$p_c(s) = (s^2+4)(s+2)+4\,b_2\,s^2+4\,b_1\,s+32 = 0 \ \Rightarrow\ p_c(s) = s^3+(4\,b_2+2)s^2+(4\,b_1+4)s+40 = 0$$

Polinomio desiderato:

$$p_d(s) = [(s+2)^2+1]\,(s+\alpha) = s^3 + (\alpha+4)\,s^2 + (4\,\alpha+5)\,s + 5\,\alpha$$

Si impone $p_c(s) = p_d(s)$ e si ottiene:

$$\begin{cases} \alpha + 4 = 4\,b_2 + 2 \\ 4\,\alpha + 5 = 4\,b_1 + 4 \\ 5\,\alpha = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 8.25 \\ b_2 = 2.5 \\ \alpha = 8 \end{cases}$$

Verifico: $-\alpha = -8 << -2 \ \Rightarrow$ i poli $-2 \pm j$ sono dominanti

4. Errore a regime nullo: $\{$guadagno statico fra r ed $y\} = 1$
Calcolo F:

$$F\,\frac{L(0)}{1+L(0)} = 1 \ \Rightarrow\ F\,\frac{4}{5} = 1 \ \Rightarrow\ F = \frac{5}{4} = 1.25$$

8.

$$\boxed{X(z) = \frac{2z^3+z+1}{(z-1)(z-2)^2}} = c_0 + \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_{21}}{(z-2)^2} + \frac{c_{22}}{z-2}$$

$$c_0 = \lim_{z \to +\infty} X(z) = 2$$

$$c_1 = \left.\frac{2z^3+z+1}{(z-2)^2}\right|_{z=1} = 4$$

$$c_{21} = \left.\frac{2z^3+z+1}{z-1}\right|_{z=2} = 19$$

$$c_{22} = D\left[\frac{2z^3+z+1}{z-1}\right]_{z=2} = \left.\frac{(6z^2+1)(z-1)-(2z^3+z+1)}{(z-1)^2}\right|_{z=2} =$$

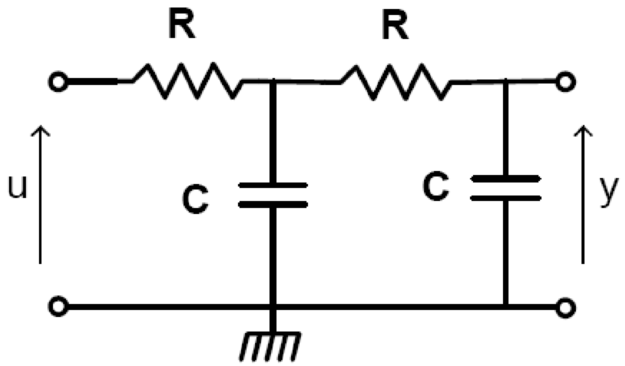
$$= 25 - (16+2+1) = 25 - 19 = 6$$

$$\boxed{x(k) = 2\,\delta(k) + 4 \cdot 1(k-1) + 19(k-1)\,2^{k-2} \cdot 1(k-1) + 6 \cdot 2^{k-1} \cdot 1(k-1)}$$

Parte A

1. [punti 4.5] Si presentino e si dimostrino le formule di inversione per la sintesi in frequenza delle reti correttrici. Si esponga inoltre come utilizzare tali formule per la sintesi della rete **anticipatrice** con imposizione del **margine di ampiezza** M_A**.**

2. [punti 4.5] La rete elettrica di figura definisce un sistema dinamico orientato da u (tensione all'ingresso) ad y (tensione all'uscita).



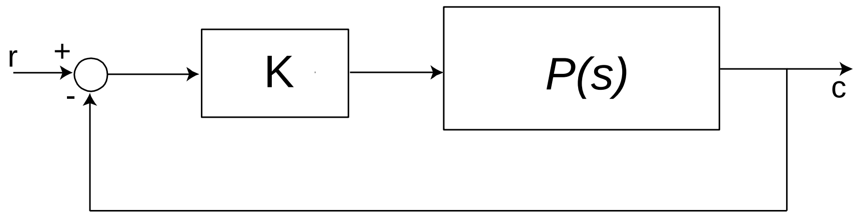
Di questo sistema si determini:
1. la funzione di trasferimento;
2. l'equazione differenziale;
3. gli zeri, i poli, i modi ed il guadagno statico.

3. [punti 4.5] Di un sistema dinamico è nota la risposta all'impulso $g(t) = 15e^{-2t} - 10te^{-2t} - 15e^{-4t}$. Determinare la risposta al gradino unitario $g_s(t)$ di tale sistema.

4. [punti 4.5] Siano $x(k)$, $y(k)$ due segnali a tempo discreto per i quali $x(k) = 0$, $y(k) = 0$ per $k < 0$.
Si dimostri che la trasformata zeta della loro convoluzione eguaglia il prodotto delle loro trasformate:
$\mathcal{Z}\left[x(k) * y(k)\right] = \mathcal{Z}\left[x(k)\right]\mathcal{Z}\left[y(k)\right]$.

Parte B

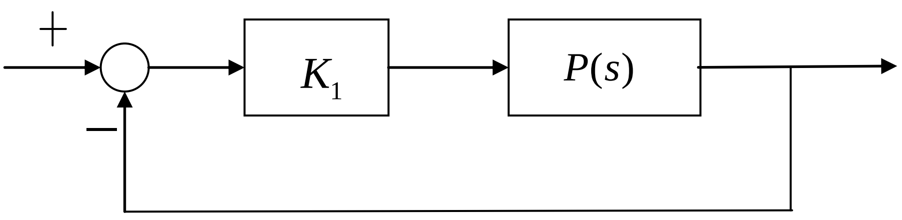
5. [punti 4.5] Sia dato il sistema retroazionato di figura



dove $P(s)=\dfrac{s^2}{(s^3-8)(s-1)}$.

1. Posto $K=10$ tracciare il diagramma di Nyquist del guadagno di anello *L(s)* del sistema determinando in particolare le intersezioni con l'asse reale.
2. Nelle condizioni di cui al punto 1) studiare la stabilità del sistema retroazionato utilizzando il criterio di Nyquist.

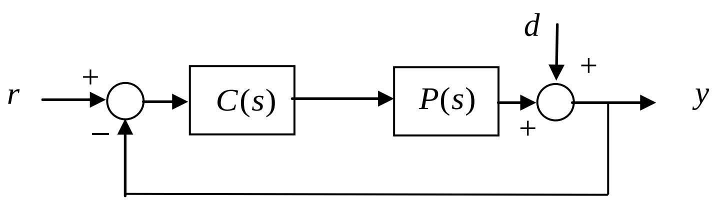
6. [punti 4.5] Sia dato il sistema retroazionato di figura:



dove K_1 è un parametro reale e $P(s)=\dfrac{s+1}{s^2(s+4)(s+8)}$.

1. Determinare l'insieme dei valori di K_1 per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
2. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica associata al sistema retroazionato per $K_1 \in (0,+\infty)$. Determinare in particolare gli asintoti del luogo e le intersezioni del luogo con l'asse immaginario del piano complesso.

7. [punti 4.5] Sia dato il seguente sistema



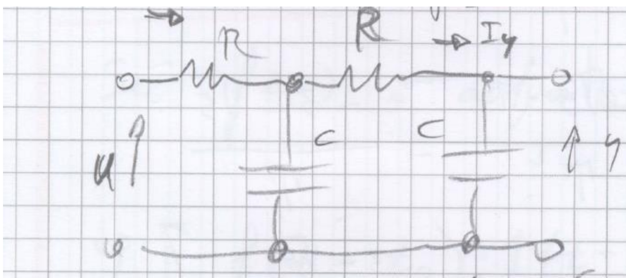
con $P(s)=\dfrac{1}{1+s}$. Determinare un controllore proprio di ordine minimo $C(s)$ che soddisfi alle seguenti specifiche: 1) reiezione infinita asintotica al disturbo sinusoidale $d(t)=4\sin 2t$; 2) sistema retroazionato asintoticamente stabile con poli dominanti in $-1\pm j$; 3) costante di posizione $K_p=4$.

8. [punti 4.5] Un sistema a tempo discreto, lineare e tempo invariante, con funzione di trasferimento $P(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2}$, manifesta sull'uscita una risposta forzata $y(k)=0.5^k\cdot 1(k-1)$. Determinare il segnale di ingresso del sistema.

Tracce delle soluzioni

1. Vedi dispense dell'insegnamento.

2.



$$Z_t = R + \frac{\frac{1}{sC}\cdot\left(R+\frac{1}{sC}\right)}{\frac{1}{sC}+R+\frac{1}{sC}} = R + \frac{\frac{1}{sC}\cdot\left(R+\frac{1}{sC}\right)}{R+\frac{2}{sC}}$$

$$I = \frac{U}{Z_t} \qquad I_y = I\cdot\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{2}{sC}}$$

$$Y = \frac{1}{sC}\cdot I_y = \frac{1}{sC}\cdot\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{2}{sC}}\cdot I =$$

$$Y = \frac{1}{sC}\cdot\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{2}{sC}}\cdot\frac{U}{R+\frac{\frac{1}{sC}\left(R+\frac{1}{sC}\right)}{R+\frac{2}{sC}}} =$$

$$= \frac{1}{sC}\cdot\frac{\frac{1}{sC}U}{R^2+\frac{2R}{sC}+\frac{R}{sC}+\frac{1}{(sC)^2}} =$$

$$= \frac{U}{1+3R(sC)+R^2(sC)^2} = \frac{U}{(RC)^2s^2+3RCs+1}$$

eq. diff. $(RC)^2 D^2 y + 3RC\, Dy + y = u$

zeri: nessuno

poli $\quad T := RC \qquad T^2 s^2 + 3Ts + 1 = 0$

$$p_{1,2} = \frac{-3T \pm \sqrt{9T^2 - 4T^2}}{T^2} = \frac{-3T \pm \sqrt{5}\cdot T}{T^2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{T}$$

modi: $\left\{ e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{T}\cdot t},\ e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{T} t} \right\}$

Guadagno statico: $G(0) = 1$

funzione di trasferimento $\quad (T := RC)$

$$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 3Ts + 1}$$

Errato corrige: segnalo una svista nel calcolo dei poli. I due poli reali individuati vanno divisi per 2. Conseguentemente i due modi vanno corretti nei loro esponenti.

3.

1° metodo:

$$g_s(t) = \int_0^t g(v)dv$$

$$g_s(t) = \int_0^t \left(15e^{-2v} - 10ve^{-2v} - 15e^{-4v}\right)dv =$$

$$= 15\int_0^t e^{-2v}dv - 10\int_0^t ve^{-2v}dv - 15\int_0^t e^{-4v}dv =$$

$$= 15\left[-\frac{1}{2}\left(e^{-2t} - 1\right)\right] - 10\left[-\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4}\right] - 15\left[-\frac{1}{4}\left(e^{-4t} - 1\right)\right] =$$

$$= \frac{5}{4} - 5e^{-2t} + 5te^{-2t} + \frac{15}{4}e^{-4t}$$

2° metodo:

$$G(s)=\mathcal{L}[g(t)]=20\cdot\frac{s+1}{(s+2)^2(s+4)}$$

$$\mathcal{L}[g_s(t)]=\frac{G(s)}{s}=20\cdot\frac{s+1}{s(s+2)^2(s+4)}=\frac{k_1}{s}+\frac{k_{21}}{(s+2)^2}+\frac{k_{22}}{s+2}+\frac{k_3}{s+4}=$$

$$=\frac{5/4}{s}+\frac{5}{(s+2)^2}+\frac{(-5)}{s+2}+\frac{15/4}{s+4}$$

$$\Rightarrow g_s(t)=\frac{5}{4}+5te^{-2t}-5e^{-2t}+\frac{15}{4}e^{-4t}$$

4.
Vedi appunti dell'insegnamento.

5.

Sia $L(s):=K\cdot P(s)=\dfrac{10s^2}{\left(s^3-8\right)(s-1)}$

$$L(j\omega)=\frac{10(j\omega)^2}{\left[(j\omega)^3-8\right](j\omega-1)}=\frac{10\omega^2}{\left(j\omega^3+8\right)(j\omega-1)}$$

$$\left|L(j\omega)\right|=\frac{10\omega^2}{\left(\omega^6+64\right)^{1/2}\cdot\left(\omega^2+1\right)^{1/2}}$$

$$\arg L(j\omega)=\pi-arctg\frac{\omega^3}{8}+arctg\,\omega$$

Studio del diagramma polare di $L(j\omega)$:

Comportamento per $\omega\to0^+$:
Il diagramma polare parte da un punto dell'asse reale e precisamente da:

$$\lim_{\omega\to0^+}\left|L(j\omega)\right|=0$$

$$\lim_{\omega\to0^+}\arg L(j\omega)=\pi$$

Comportamento per $\omega\to\infty$:
Il diagramma termina nell'origine tangente a uno degli assi coordinati, essendo

$$\lim_{\omega\to\infty}\left|L(j\omega)\right|=0$$

$$\lim_{\omega\to\infty}\arg L(j\omega)=\pi$$

Calcolo dell'intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo:

$$\arg L(j\omega_p)=-\pi$$

$$\pi - arctg\frac{\omega_p^{\ 3}}{8} + arctg\omega_p = -\pi$$

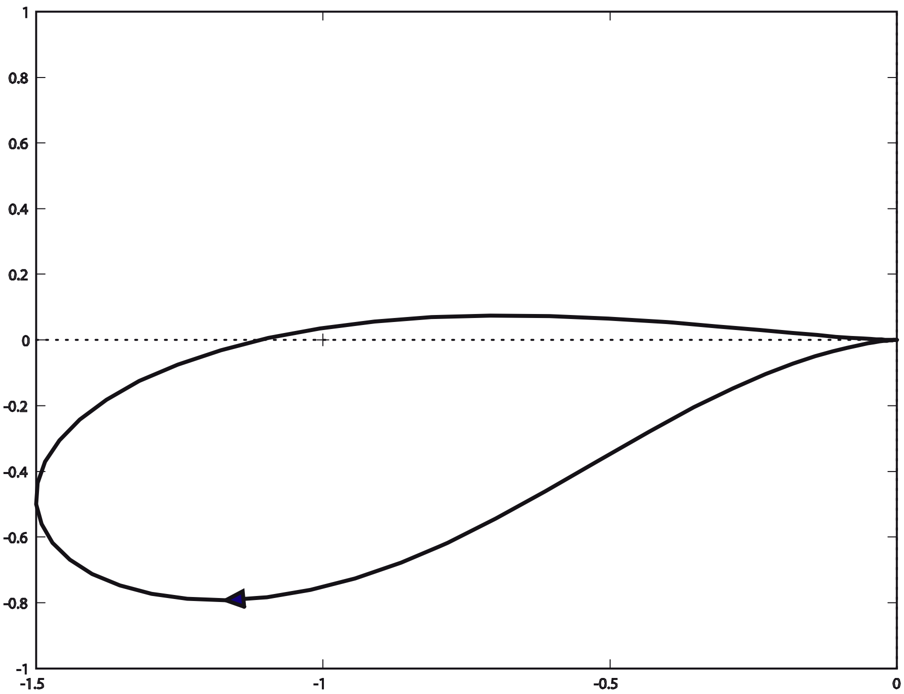
$$arctg\omega_p - arctg\frac{\omega_p^{\ 3}}{8} = -2\pi$$

$$\omega_p = 2\sqrt{2} rad/\sec$$

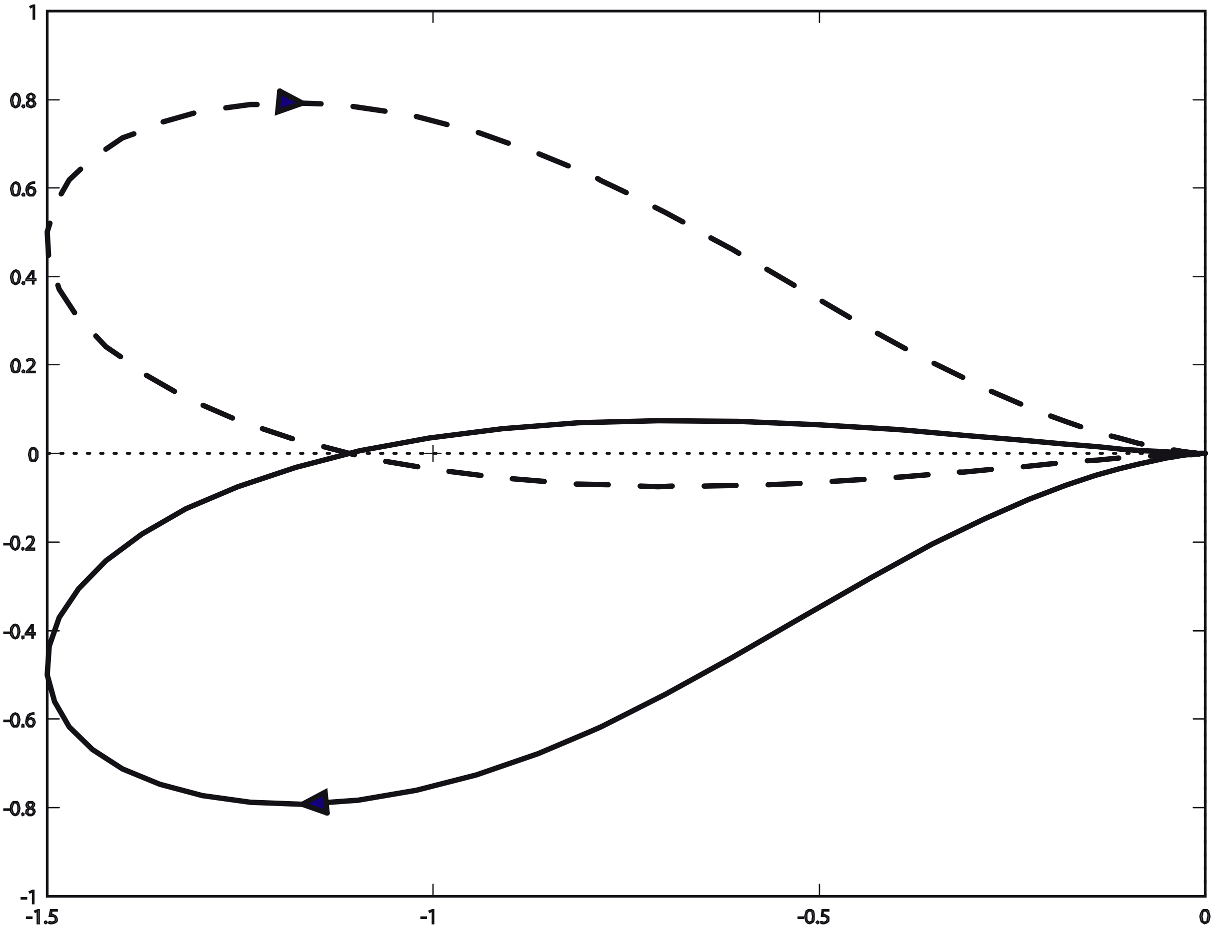
$$\left|L\left(j\omega_p\right)\right| = \frac{10\cdot\left(2\sqrt{2}\right)^2}{\left(\left(2\sqrt{2}\right)^6+64\right)^{1/2}\cdot\left(\left(2\sqrt{2}\right)^2+1\right)^{1/2}} = 1.1111$$

$$L\left(j\omega_p\right) = -1.1111$$

Il diagramma polare del guadagno di anello risulta pertanto:



2) Il diagramma polare completo è:



Mediante divisione polinomiale (col metodo di Ruffini per esempio) si constata che $s^3 - 8 = (s-2)(s^2 + 2s + 4)$; quindi $s^3 - 8$ ha una radice (semplice) a parte reale positiva ($+2$) e due radici a parte reale negativa.

Il sistema ad anello aperto presenta dunque due poli a parte reale positiva (+1, +2) quindi per il Criterio di Nyquist il sistema retroazionato è asintoticamente stabile se e solo se il d.p.c. circonda due volte in senso antiorario il punto critico -1.

Considerato che in effetti il d.p.c. circonda due volte il punto critico <u>in senso orario</u> si conclude che il sistema retroazionato è **instabile** (a causa di quattro poli a parte reale positiva)

6.

1) L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + K_1 \frac{s+1}{s^2(s+4)(s+8)} = 0$$

Questa in forma polinomiale diventa:

$$s^4 + 12s^3 + 32s^2 + K_1 s + K_1 = 0$$

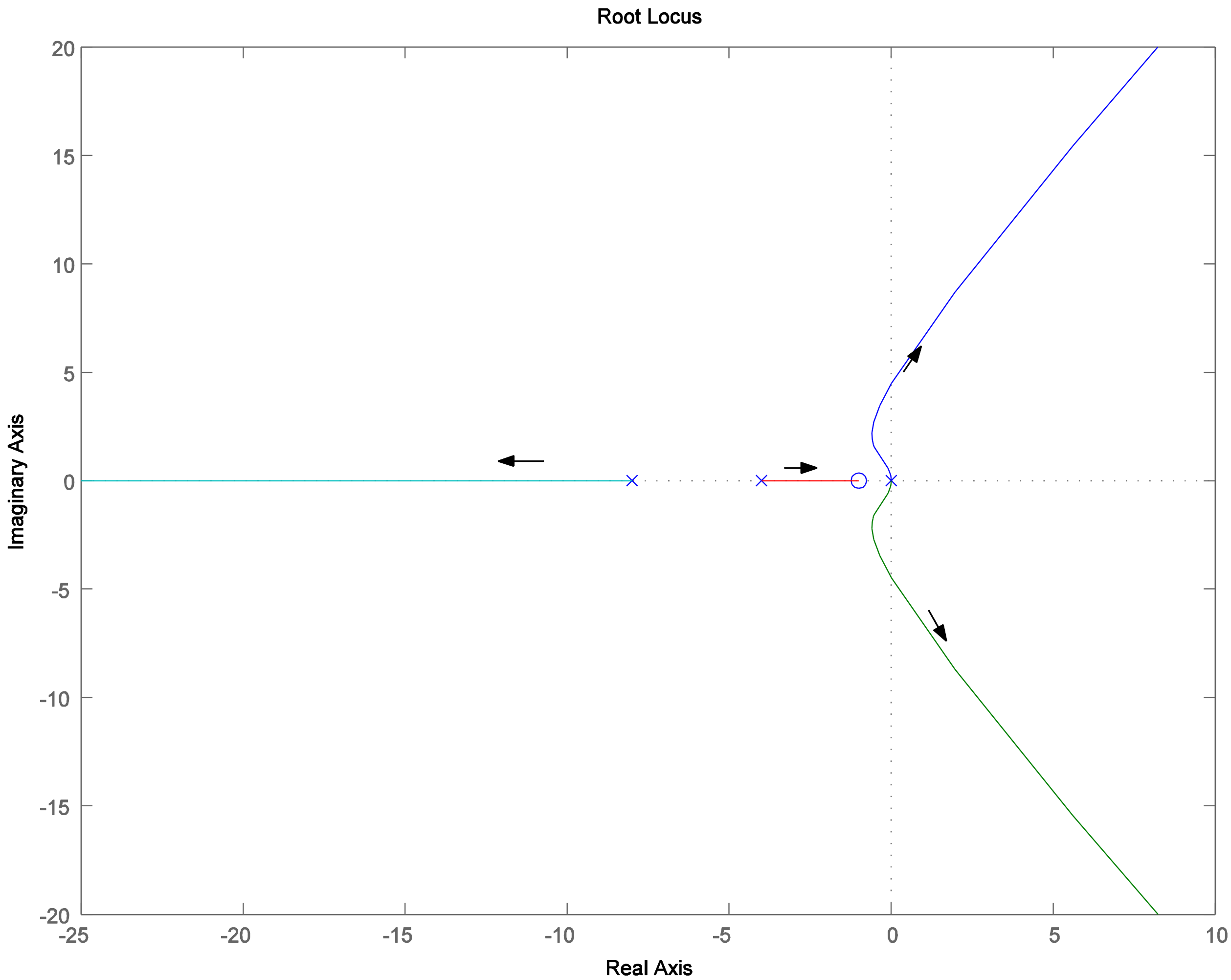
La tabella di Routh corrispondente è

$$
\begin{array}{c|cccc}
4 & 1 & 32 & K_1 & 0 \\
3 & 12 & K_1 & 0 & 0 \\
2 & 384 - K_1 & 12K_1 & 0 & \\
1 & K_1(240 - K_1) & 0 & & \\
0 & 12K_1 & & &
\end{array}
$$

Imponendo la positività degli elementi della prima colonna si ottiene $K_1 \in (0,\ 240)$, valori per i quali il sistema è asintoticamente stabile (Criterio di Routh).

2) Il luogo presenta tre asintoti rettilinei $\left(\vartheta_{a,1} = +60°,\ \vartheta_{a,2} = +180°,\ \vartheta_{a,3} = -60°\right)$ con centro in

$$\sigma_a = \frac{-4-8-(-1)}{3} = -\frac{11}{3} \cong -3,67$$



Le intersezioni del luogo si hanno in corrispondenza del valore limite di $K_1 = 240$. Per tale valore la tabella di Routh evidenzia l'equazione ausiliaria

$$(384-240)s^2 + 12 \cdot 240 = 0$$

$$s^2 + 20 = 0$$

Quindi le intersezioni avvengono in $s = \pm j\sqrt{20} \cong \pm j4,47$.

7.
Il controllore è del tipo

$$C(s)=\frac{b_2 s^2+b_1 s+b_0}{(s^2+4)}$$

in cui la coppia di poli immaginari coniugati al denominatore serve per rimuovere il disturbo. Il guadagno ad anello aperto è

$$P(s)C(s)=\frac{b_2 s^2+b_1 s+b_0}{(s^2+4)(s+1)}$$

dalla specifica 3) si ha che $\frac{b_0}{4}=4$, da cui $b_0=16$, dalla specifica 2) si ha la seguente equazione

$$(s^2+4)(s+1)+b_2 s^2+b_1 s+b_0=(s^2+2s+2)(s+c)$$

da cui otteniamo

$$b_2=11, b_1=18, b_0=16, c=10$$

il controllore è quindi

$C(s)=\frac{11s^2+18s+16}{s^2+4}$.

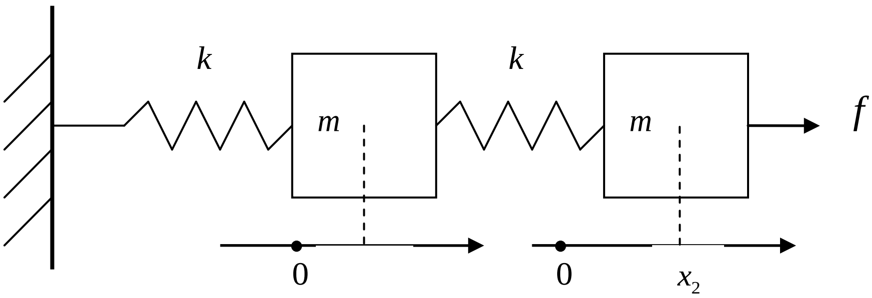
8.

$$U(z)=\frac{Y(z)}{P(z)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-\frac{1}{2}}\cdot\frac{(z-1)^2}{z} \quad\Rightarrow\quad u(k)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{se } k=0\\ -\frac{3}{4} & \text{se } k=1\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} & \text{se } k\geq 2\end{cases}$$

Parte A

1. [punti 4.5] Tracciare i diagrammi di Bode ed il diagramma polare di una rete ritardatrice determinando in particolare il ritardo massimo di fase e la corrispondente pulsazione.

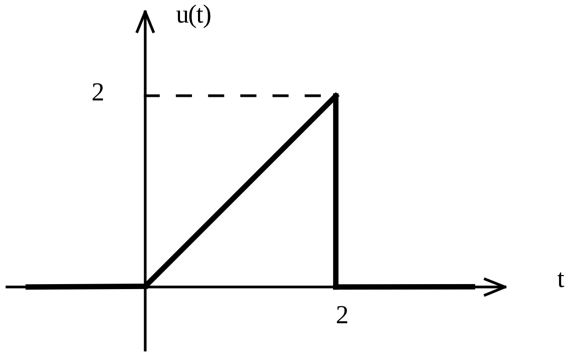
2. [punti 4.5] Sia assegnato il sistema meccanico vibrante di figura



caratterizzato da due molle di costante elastica k e due corpi di massa m. Il corpo di destra sia soggetto ad una forza f e le posizioni delle due masse siano descritte dalle variabili x_1 e x_2 (quando il sistema è in quiete con le molle a riposo $x_1 = x_2 = 0$). Si consideri il sistema dinamico Σ orientato da f ad x_1 (posizione del corpo di sinistra).

a) Determinare l'equazione differenziale che descrive il sistema Σ.
b) Determinare la funzione di trasferimento $T(s)$ di Σ.
c) Determinare i modi di Σ.

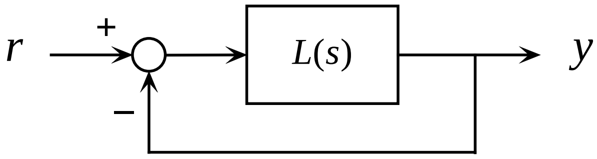
3. [punti 4.5] Dato un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{10}{s+3}$ determinare la risposta forzata $y(t),\ \ t \in (0, +\infty)$ al segnale di ingresso definito in figura:



4. [punti 4.5]
Presentare e dedurre la funzione di trasferimento a tempo discreto $P_d(z)$ di un sistema a tempo continuo $P(s)$ con all'ingresso un mantenitore D/A di ordine zero e all'uscita un campionatore A/D sincronizzati con periodo T.

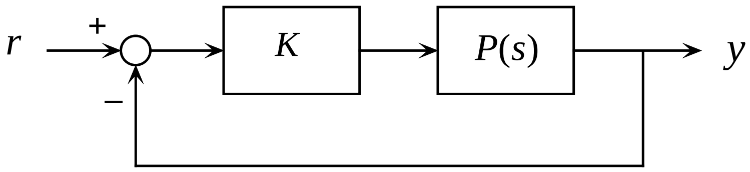
Parte B

5. [punti 4.5] Sia dato il sistema retroazionato di figura dove $L(s) = 10\dfrac{(s+1)(s+2)}{s^3}$.



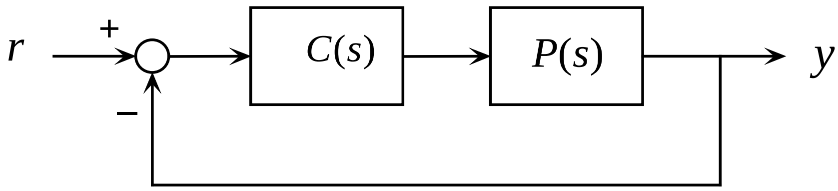
a. Tracciare il diagramma di Nyquist di $L(j\omega)$ determinando le eventuali intersezioni con l'asse reale negativo.
b. Studiare la stabilità del sistema retroazionato applicando il Criterio di Nyquist.

6. [punti 4.5] Sia assegnato il seguente sistema retroazionato dove $P(s) = \dfrac{s+4}{s^2(s+2)^2}$.



Tracciare il luogo delle radici relativo all'equazione caratteristica $1 + KP(s) = 0$ per $K > 0$. Determinare in particolare gli asintoti, le eventuali radici doppie e gli angoli di partenza dai poli di $P(s)$.

7. [punti 4.5] Sia dato il sistema in retroazione di figura



dove $P(s) = \dfrac{10}{(s-1)^2}$. Progettare un controllore di struttura $C(s) = \dfrac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s(s+20)}$ affinché il sistema retroazionato sia stabile asintoticamente con poli dominanti in $-1 \pm j\dfrac{1}{2}$ e abbia costante di velocità $K_v = 4$. Per tale controllore determinare inoltre tutti i poli del sistema retroazionato.

8. [punti 4.5] Determinare la risposta forzata $y(k)$ all'ingresso $u(k) = k \cdot 1(k)$ (rampa unitaria) di un sistema a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze

$$y(k) + y(k-1) + \frac{1}{4}y(k-2) = u(k) + 4u(k-1) + 4u(k-2)\ .$$

Tracce delle soluzioni

1. Vedi dispense del corso.

2.

$$\begin{cases} m\,D^2 x_1 = -k x_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\,D^2 x_2 = f - k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (mD^2+k)\cdot \\ k\cdot \end{array}\begin{cases} k x_2 = m\,D^2 x_1 + 2k x_1 \\ (m D^2 + k)\, x_2 = f + k x_1 \end{cases}$$

$$(mD^2+k)(m D^2 x_1 + 2k x_1) = kf + k^2 x_1$$

$$m^2 D^4 x_1 + 2km\,D^2 x_1 + km\,D^2 x_1 + 2k^2 x_1 = kf + k^2 x_1$$

$$\boxed{m^2 D^4 x_1 + 3km\,D^2 x_1 + k^2 x_1 = kf} \quad \text{Eq. diff.}$$

$$T(s) = \frac{k}{m^2 s^4 + 3km\,s^2 + k^2} \qquad \text{f.d.t.}$$

$$m^2 s^4 + 3km\,s^2 + k^2 = 0 \qquad s^2 = \frac{-3km \pm \sqrt{9k^2m^2 - 4k^2m^2}}{2m^2} =$$

$$= \frac{-3k \pm \sqrt{5}\cdot k}{2m} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}$$

poli di Σ:

$$P_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}} \qquad P_{3,4} = \pm j\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}}$$

modi di Σ:

$$\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}}\cdot t + \varphi_1\right),\ \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}}\cdot t + \varphi_2\right)$$

più semplicemente

$$\operatorname{sen}\left(1{,}618\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t + \varphi_1\right),\ \operatorname{sen}\left(0{,}618\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t + \varphi_2\right)$$

3.

determiniamo la risposta forzata per $t \in (0,2)$

$u(t) = t \qquad U(s) = \frac{1}{s^2}$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{10}{s+3}\cdot\frac{1}{s^2} = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_2}{s+3}$$

$$K_{11} = \left.\frac{10}{s+3}\right|_{s=0} = \frac{10}{3}$$

$$K_2 = \left.\frac{10}{s^2}\right|_{s=-3} = \frac{10}{9}$$

$$K_{12} + K_2 = 0 \qquad K_{12} = -K_2 = -\frac{10}{9}$$

$$Y(s) = \frac{10}{3}\cdot\frac{1}{s^2} - \frac{10}{9}\,\frac{1}{s} + \frac{10}{9}\cdot\frac{1}{s+3}$$

$$y(t) = \frac{10}{3}\,t - \frac{10}{9} + \frac{10}{9}\,e^{-3t}$$

ok!

per $t > 2$ il sistema è in evoluzione libera.

$\Rightarrow \quad y(t) = c\,e^{-3t}$

Studio delle relazioni fra le condizioni iniziali al tempo $t = 2$.

$$y(2-) = \frac{10}{3}\cdot 2 - \frac{10}{9} + \frac{10}{9}e^{-6} =$$

$$= \frac{6\cdot 10 - 10}{9} + \frac{10}{9}e^{-6} = \frac{50}{9} +$$

$$= \frac{50}{9} + \frac{10}{9}e^{-6}$$

$$y(2+) = ?$$

$$\rho = 1 \qquad u(t) \in C^{-1} \Rightarrow y(t) \in C^{-1+1} = C^{0}$$

$$\Rightarrow y(2+) = y(2-)$$

$$y(2+) = c\,e^{-6}$$

$$\frac{50}{9} + \frac{10}{9}e^{-6} = c\,e^{-6}$$

$$c = \frac{50}{9}e^{6} + \frac{10}{9}$$

Quindi per $t > 2$

$$\boxed{y(t) = \left(\frac{50}{9}e^{6} + \frac{10}{9}\right)e^{-3t}}$$

4.

Vedi dispense dell'insegnamento.

5.

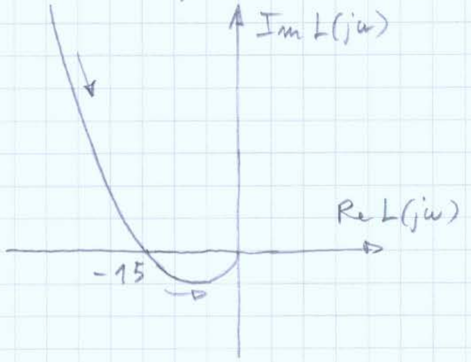
a) $L(j\omega) = 10\,\dfrac{(j\omega+1)(j\omega+2)}{(j\omega)^3}$

$\arg L(j\omega) = \operatorname{arctg}\omega + \operatorname{arctg}\frac{\omega}{2} - 3\cdot\frac{\pi}{2}$

$\omega \to 0+ \quad |L(j\omega)| \to +\infty \quad \arg L(j\omega) \to -3\cdot\frac{\pi}{2}$

$\omega \to +\infty \quad |L(j\omega)| \to 0 \quad \arg L(j\omega) \to -\frac{\pi}{2}$

Per ω piccolo e positivo $\arg L(j\omega) \simeq \omega + \frac{\omega}{2} - 3\cdot\frac{\pi}{2} > -3\frac{\pi}{2}$, quindi il diagramma di N. emerge da un punto all'infinito del secondo quadrante di $\mathbb{C}$.



Determinazione dell'intersezione con l'asse reale

$1 + K\frac{(s+1)(s+2)}{s^3} = 0 \quad , K \neq 0$

$s^3 + Ks^2 + 3Ks + 2K = 0$

3	1	$3K$	0
2	K	$2K$	0
1	$3K^2-2K$	0	

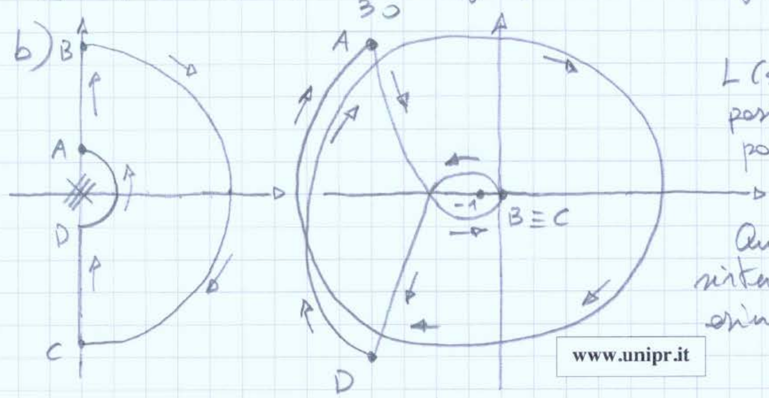
$K(3K-2) = 0$

$K = \frac{2}{3}$

L'eq. $1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}L(s) = 0$ ha radici puramente immaginarie.

$\exists\, \omega > 0 \ni 1 + \frac{2}{30}L(j\omega) = 0 \qquad L(j\omega) = -15$

b)



www.unipr.it

$L(s)$ non ha poli a parte reale positiva. Il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto -1.

Quindi per il criterio di N. il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

6.

Gli angoli di partenza da 0 e – 2 sono +/- 90°

Gli asintoti sono tre, hanno centro in 0 + j0, con angoli +60°, +180°, -60° .

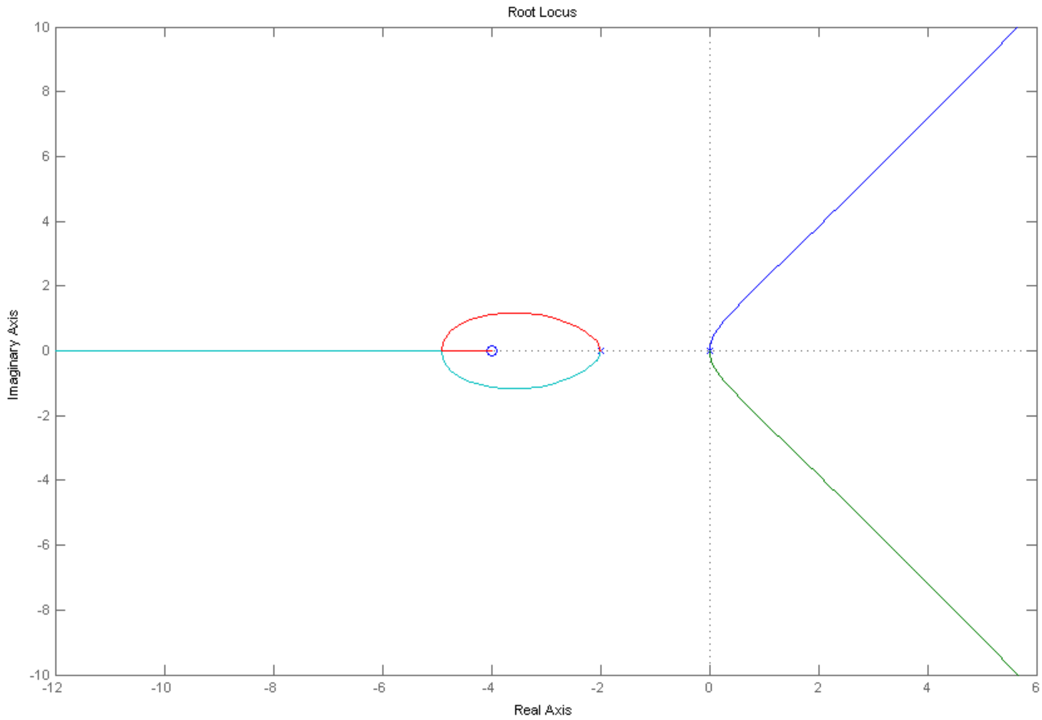
Calcolo delle radici doppie:

$$2 \cdot \frac{1}{s} + 2 \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+4} = 0$$

$$3s^2 + 18s + 16 = 0$$

$$s_{1,2} = -1,0851 \quad -4,9149$$

si scarta la prima radice in quanto non appartiene al luogo diretto



7.

guadagno di anello $L(s) := C(s)P(s)$

$$K_v = \lim_{s \to 0} s\,L(s) = \frac{b_0}{20} \cdot 10 = \frac{b_0}{2}$$

Da $K_v = 4$ si ottiene $\boxed{b_0 = 8}$.

Eq. caratteristica associata al controllore:

$$1 + \frac{b_2 s^2 + b_1 s + 8}{s(s+20)} \cdot \frac{10}{(s-1)^2} = 0$$

$$s(s+20)(s-1)^2 + 10 b_2 s^2 + 10 b_1 s + 80 = 0$$

$$P_c(s) := s^4 + 18 s^3 + (10 b_2 - 39) s^2 + (10 b_1 + 20) s + 80$$

Il polinomio caratteristico desiderato è

$$P_d(s) = \left[(s+1)^2 + \frac{1}{4} \right] (s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0)$$

$$= s^4 + (\alpha_1 + 2) s^3 + \left(\alpha_0 + 2\alpha_1 + \frac{5}{4}\right) s^2 + \left(2\alpha_0 + \frac{5}{4}\alpha_1\right) s + \frac{5}{4}\alpha_0$$

Imponendo $P_c(s) \equiv P_d(s)$ si ottiene

$$\begin{cases} 18 = \alpha_1 + 2 \\ 10 b_2 - 39 = \alpha_0 + 2\alpha_1 + \frac{5}{4} \\ 10 b_1 + 20 = 2\alpha_0 + \frac{5}{4}\alpha_1 \\ 80 = \frac{5}{4}\alpha_0 \end{cases}$$

$\alpha_1 = 16$, $\alpha_0 = 64$

$\boxed{b_1 = 12.8}$ $\boxed{b_2 = \frac{109}{8} = 13.625}$

$$C(s) = \frac{13.625 s^2 + 12.8 s + 8}{s(s+20)}$$

Le radici di $s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$ sono $s_{1,2} = -8, -8$; quindi i poli $-1 \pm j\frac{1}{2}$ sono effettivamente dominanti. I poli del sistema retroazionato sono evidentemente $-1 \pm j\frac{1}{2}, -8, -8$.

8.

$$\mathcal{Z}\left[k \cdot 1(k)\right] = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\mathcal{Z}\left[\binom{k}{n-1} a^{k-(n-1)} \cdot 1(k)\right] = \frac{z}{(z-a)^n}$$

$$H(z) = \frac{z^2+4z+4}{z^2+z+\frac{1}{4}} = \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$Y(z) = H(z)\,U(z) = \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} = z \cdot Y_1(z)$$

$$Y_1(z) = \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 (z-1)^2}$$

$$Y_1(z) = \frac{c_{11}}{(z-1)^2} + \frac{c_{12}}{z-1} + \frac{c_{21}}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{c_{22}}{z+\frac{1}{2}} \neq$$

$$c_{11} = \left.\frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}\right|_{z=1} = \frac{3^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3^2}{\frac{3^2}{2^2}} = 4$$

$$c_{21} = \left.\frac{(z+2)^2}{(z-1)^2}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{\left(-\frac{1}{2}+2\right)^2}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{\left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\frac{3^2}{2^2}}{\frac{3^2}{2^2}} = 1$$

$$c_{12} + c_{22} = 0$$

$$C_{12} = \frac{d}{dz}\left[\frac{(z+2)^2}{(z+\frac{1}{2})^2}\right]_{|z=1} =$$

$$= \frac{2(z+2)(z+\frac{1}{2})^2 - (z+2)^2 2(z+\frac{1}{2})}{(z+\frac{1}{2})^4}\Big|_{z=1} =$$

$$= \frac{2\cdot 3\cdot(\frac{3}{2})^2 - (3)^2\cdot 2\cdot\frac{3}{2}}{(\frac{3}{2})^4} =$$

$$= \frac{2\cdot 3\cdot\frac{3^2}{2^2} - 3^2\cdot 3}{\frac{3^4}{2^4}} = \frac{\frac{3^3}{2} - 3^3}{\frac{3^4}{2^4}} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{3}{2^4}} =$$

$$= \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)\cdot\frac{2^{\cancel{4}\,3}}{3} = -\frac{8}{3}$$

$$C_{22} = -C_{12} = \frac{8}{3}$$

$$Y(z) = 4\cdot\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{8}{3}\cdot\frac{z}{z-1} + \frac{z}{(z+\frac{1}{2})^2} + \frac{8}{3}\cdot\frac{z}{z+\frac{1}{2}}$$

$$y(k) = 4k - \frac{8}{3} + k\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \frac{8}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

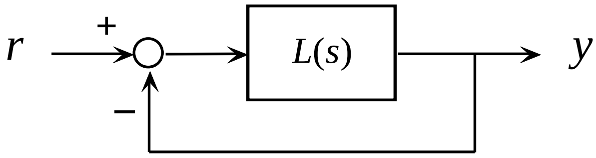
$$= 4k - \frac{8}{3} + k\left(-\frac{1}{2}\right)^k\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} + \frac{8}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k =$$

$$= 4k - \frac{8}{3} - 2k\left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{8}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

Parte A

1. [punti 6] Si presentino e si dimostrino le formule di inversione per la sintesi in frequenza delle reti correttrici. Si esponga inoltre come utilizzare tali formule per la sintesi della rete **ritardatrice** con imposizione del **margine di fase** M_F **.**

2. [punti 6] Sia dato il sistema retroazionato di figura dove $L(s) = 10\dfrac{s+2}{s^2(s+1)}$.

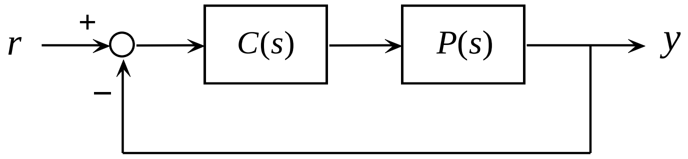


a. Tracciare il diagramma di Nyquist di $L(j\omega)$ determinando le eventuali intersezioni con l'asse reale negativo.
b. Studiare la stabilità del sistema retroazionato applicando il Criterio di Nyquist.

3. [punti 6] Sia Σ_d un sistema a tempo discreto descritto dalla funzione di trasferimento $H(z) = \dfrac{b(z)}{a(z)}$ con $a(z)$ e $b(z)$ polinomi coprimi fra loro. Presentare e dimostrare una condizione necessaria e sufficiente che assicuri la stabilità asintotica di Σ_d .

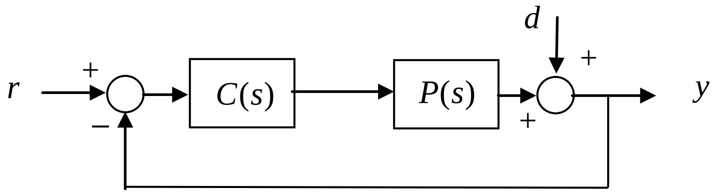
Parte B

4. [punti 6] Sia dato il sistema in retroazione di figura dove $P(s)=\dfrac{1}{s\left[(s+2)^2+16\right]}$ e $C(s)=K\in\mathbb{R}.$.



a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K>0$. In particolare 1) determinare gli asintoti del luogo, 2) determinare gli angoli di partenza del luogo, 3) dimostrare che non esistono radici doppie reali nel luogo.
b. Determinare il guadagno ottimo K^* del controllore affinché il grado di stabilità del sistema retroazionato sia massimo $\left[K^* = \arg\max_{K\in\mathbb{R}} G_s(K)\right]$.

5. [punti 6] Sia dato il seguente sistema



dove $P(s)=\dfrac{9}{s+4}$.
Determinare un controllore proprio di ordine minimo $C(s)$ affinché le seguenti specifiche siano soddisfatte:

1. reiezione infinita asintotica al disturbo composito $d(t)=7+10\cdot\cos(3t+1)$;
2. costante di velocità $K_v=4$;
3. sistema retroazionato asintoticamente stabile con tre poli dominanti in $-2,-2\pm j$.

6. [punti 6] Un sistema a tempo discreto è in evoluzione libera (ingresso identicamente nullo) e la trasformata zeta dell'uscita è $Y_{\mathrm{lib}}=\dfrac{z^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2(z^2+1)}$. Determinare l'evoluzione libera dell'uscita $y_{\mathrm{lib}}(k),\ k\ge 0.$

Tracce soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

2.

a)

$$L(j\omega) = 10\,\frac{j\omega+2}{(j\omega)^2(j\omega+1)}$$

$$\arg L(j\omega) = -\pi + \operatorname{arctg}\frac{\omega}{2} - \operatorname{arctg}\omega$$

$\omega \to 0 \quad \arg L(j\omega) \to -\pi \qquad |L(j\omega)| \to +\infty$

$\omega \to +\infty \quad \arg L(j\omega) \to -\pi \qquad |L(j\omega)| \to 0$

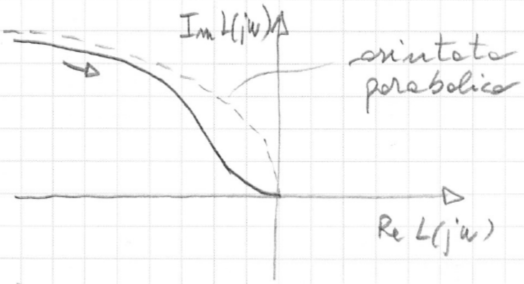
Per ω piccolo e positivo: $\arg L(j\omega) \cong -\pi + \frac{\omega}{2} - \omega = -\pi - \frac{\omega}{2} < -\pi$

$\Rightarrow$ emergenza del diagramma polare dal secondo quadrante.

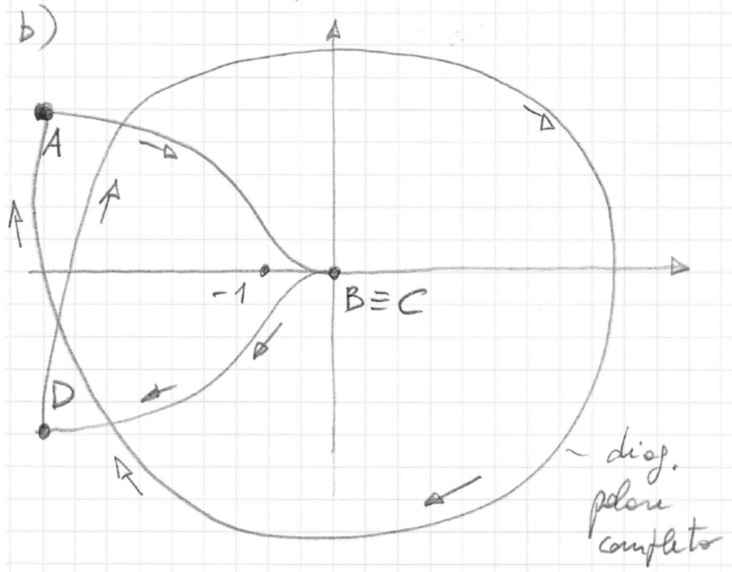
$\arg L(j\omega) = -\pi$ con $\omega > 0$: $\operatorname{arctg}\frac{\omega}{2} - \operatorname{arctg}\omega = 0$

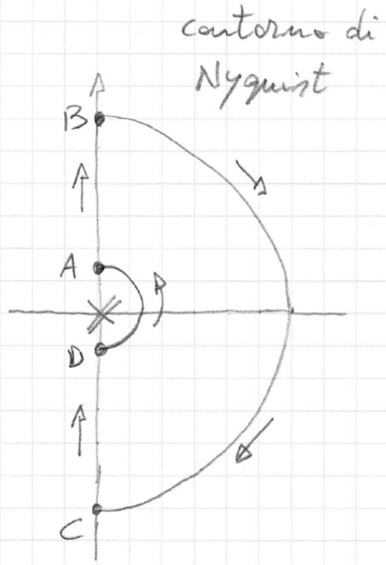
$$\frac{\frac{\omega}{2} - \omega}{1 + \frac{\omega}{2}\cdot\omega} = 0 \qquad -\frac{1}{2}\omega = 0 \qquad \text{nessuna soluzione per } \omega > 0$$

Quindi nessuna intersezione con l'asse reale negativo.



b)





L(s) non ha poli a parte reale positiva. Per il criterio di N. la stabilità asint. sussiste quando il d.p.c. non circonda né tocca il punto -1. In questo caso il d.p.c. circonda 2 volte -1. Quindi il sistema ret. è instabile.

3.
Vedi dispense del corso.

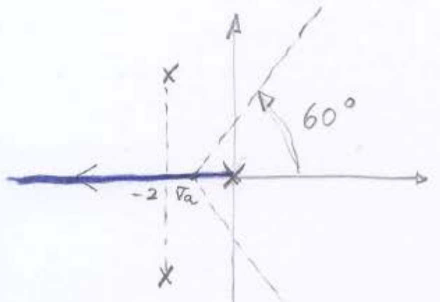
4.

a. Eq. caratteristica del sistema retroazionato

$$1 + K \frac{1}{s\left[(s+2)^2 + 16\right]} = 0 \quad , \quad K > 0$$

Poli ad anello aperto: $p_1 = 0$, $p_{2,3} = -2 \pm j4$

ASINTOTI: centro in $\sigma_a = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{3} = -\frac{4}{3}$



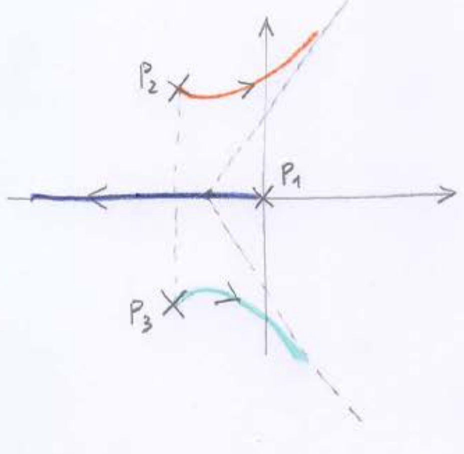
L'asse reale negativo appartiene al luogo.

RADICI DOPPIE:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s+2-j4} + \frac{1}{s+2+j4} = 0$$

$$3s^2 + 8s + 20 = 0$$

$$s = \frac{-4 \pm \sqrt{16-60}}{3} \notin \mathbb{R}$$



Quindi non esistono radici doppie reali nel luogo.

ANGOLI DI PARTENZA:

$$\theta_2 = \pi - \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{2}{4}\right] =$$

$$= -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} = -0{,}4636 = -26{,}57^\circ$$

$$\theta_3 = +26{,}57^\circ \qquad \theta_1 = +180^\circ$$

b.

La configurazione dei poli retroazionati in corrispondenza del guadagno ottimo K^* è σ, $\sigma + j\omega$, $\sigma - j\omega$ $[\sigma, \omega \in \mathbb{R}]$.

Dal teorema del baricentro $3\sigma = -4 \Rightarrow \sigma = -\frac{4}{3}$

Quindi $K^* \ni 1 + K^* \frac{1}{\left(-\frac{4}{3}\right)\left[\left(-\frac{4}{3}+2\right)^2 + 16\right]} = 0$

$\Rightarrow K^* \cong 21{,}9$

5.

$$C(s) = \frac{y_3 s^3 + y_2 s^2 + y_1 s + y_0}{s(s^2+9)}$$

$$L(s) = C(s)P(s) = 9 \cdot \frac{y_3 s^3 + y_2 s^2 + y_1 s + y_0}{s(s^2+9)(s+4)}$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} s L(s) = \frac{9 \cdot y_0}{9 \cdot 4} = \frac{y_0}{4}$$

$$K_v = 4 \Rightarrow \frac{y_0}{4} = 4, \quad \boxed{y_0 = 16}$$

Il polinomio caratteristico desiderato è

$$P_d(s) = \left[(s+2)^2 + 1\right](s+2)(s+c) \quad \text{con } c > 2.$$

$$P_d(s) = s^4 + (6+c)s^3 + (6c+13)s^2 + (13c+10)s + 10c$$

Il polinomio caratteristico associato al controllore scelto è

$$P_c(s) = s(s^2+9)(s+4) + 9(y_3 s^3 + y_2 s^2 + y_1 s + y_0)$$

$$P_c(s) = s^4 + (4+9y_3)s^3 + (9+9y_2)s^2 + (36+9y_1)s + 9y_0$$

Si impone che $P_c(s) \equiv P_d(s)$

$$\begin{cases} 4 + 9y_3 = 6 + c \\ 9 + 9y_2 = 13 + 6c \\ 36 + 9y_1 = 10 + 13c \\ 9y_0 = 10c \end{cases} \Rightarrow c = \frac{144}{10} = 14.4 \quad \text{ok! } c \gg 2.$$

$$\boxed{y_1 = 17.91, \quad y_2 = 10.04, \quad y_3 = 1.822}$$

6.

$$Y_{lib} = z \cdot \frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 (z^2+1)} \triangleq z \cdot Y_1(z)$$

$$Y_1(z) = \frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 (z-j)(z+j)} = \frac{K_{11}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{K_{12}}{z-\frac{1}{2}} + \frac{K_2}{z-j} + \frac{\overline{K_2}}{z+j}$$

$$K_{11} = \left.\frac{z}{z^2+1}\right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$K_2 = \left.\frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2(z+j)}\right|_{z=j} = \frac{1}{2\left(-\frac{1}{2}+j\right)^2} = -\frac{6}{25} + \frac{8}{25}j$$

$$K_{12} + K_2 + \overline{K_2} = 0 \qquad K_{12} = -K_2 - \overline{K_2} = \frac{12}{25}$$

$$Y_{lib} = \frac{2}{5} \cdot \frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{12}{25} \cdot \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \left(-\frac{6}{25}+\frac{8}{25}j\right)\frac{z}{z-j} + \left(-\frac{6}{25}-\frac{8}{25}j\right) \cdot \frac{z}{z+j}$$

$$\left|-\frac{6}{25}+\frac{8}{25}j\right| = \frac{2}{5} \qquad \arg\left(-\frac{6}{25}+\frac{8}{25}j\right) = \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$|j| = 1 \qquad \arg(j) = \frac{\pi}{2}$$

$$y_{lib}(k) = \frac{2}{5} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \frac{12}{25}\left(\frac{1}{2}\right)^k + 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}k + \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\right)$$

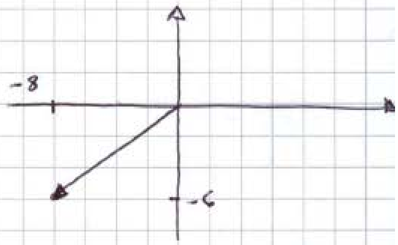
$$= \frac{4}{5} k \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{12}{25}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{4}{5} \cos\left(\frac{\pi}{2}k - \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\right), \quad k \geq 0$$

anche esprimibile come

$$y_{lib}(k) = \frac{4}{5} k \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{12}{25}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{12}{25} \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) - \frac{16}{25} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}k\right)$$

Un altro metodo risolutivo:

$$Y_{LIB}(z) = \frac{z^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 (z^2+1)}$$



$$Y_{LIB}(z) = \frac{k_{11}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{k_{12}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)} + \frac{k_2}{z-j} + \frac{\overline{k}_2}{z+j}$$

$$k_{11} = \cancel{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} \frac{z^2}{\cancel{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}(z^2+1)} \Bigg|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+1} = \frac{1}{5}$$

$$k_2 = \cancel{(z-j)} \frac{z^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 \cancel{(z-j)}(z+j)} \Bigg|_{z=j} = -\frac{8}{25} - \frac{6}{25} i$$

$$k_{1,2} = -k_2 - \overline{k}_2 = \frac{16}{25}$$

$$Y_{LIB} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{16}{25} \cdot \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)} + \left(-\frac{8}{25} - \frac{6}{25} j\right) \frac{1}{z-j} + \left(-\frac{8}{25} + \frac{6}{25} j\right) \frac{1}{z+j}$$

$$|p| = |j| = 1 \qquad \arg(p) = \arg(j) = \frac{\pi}{2}$$

$$|k_2| = \sqrt{\left(\frac{8}{25}\right)^2 + \left(\frac{6}{25}\right)^2} = \frac{2}{5} \qquad \arg(k_2) = -143.13^\circ$$

$$\arg(k_2) = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} - \pi$$

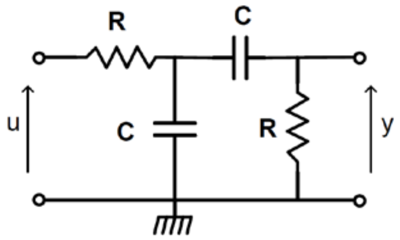
$$y(k) = \frac{1}{5}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} 1(k-1) + \frac{16}{25}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} 1(k-1) +$$

$$+ 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot 1^{k-1} \cos\left(\frac{\pi}{2}(k-1) + \operatorname{arctg}\frac{3}{4} - \pi\right) 1(k-1)$$

Parte A

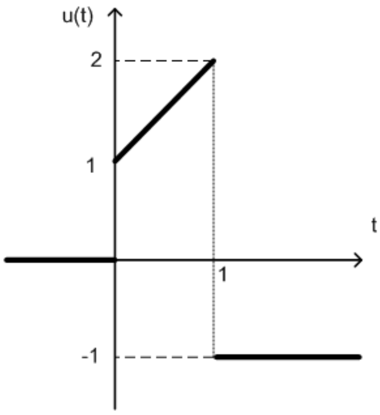
1. [punti 4,5] Enunciare e dimostrare il teorema di analisi armonica per un sistema descritto da una funzione di trasferimento razionale.

2. [punti 4,5] La rete elettrica di figura definisce un sistema dinamico orientato da u (tensione all'ingresso) ad y (tensione all'uscita).



Di questo sistema si determini:
1. la funzione di trasferimento;
2. l'equazione differenziale;
3. gli zeri, i poli, i modi ed il guadagno statico.

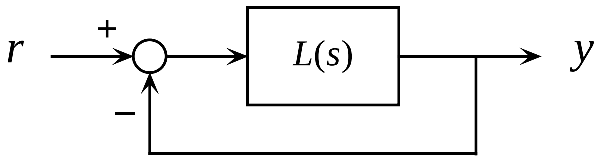
3. [punti 4,5] Dato un sistema con funzione di trasferimento $G(s)=\dfrac{2}{s+1}$ determinare la risposta forzata $y(t),\ t\in[0,+\infty)$ al segnale di ingresso definito in figura:



4. [punti 4,5] Presentare il metodo di Tustin per la discretizzazione dei controllori a tempo continuo.
Includere una discussione sulla stabilità del controllore a tempo discreto così determinato.

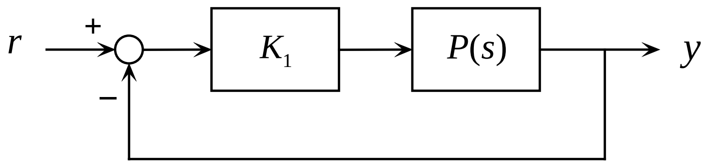
Parte B

5. [punti 4,5] Sia dato il sistema retroazionato di figura dove $L(s) = 10\dfrac{s+1}{s^3(s+2)}$.



a. Tracciare il diagramma di Nyquist di $L(j\omega)$ determinando le eventuali intersezioni con l'asse reale negativo.
b. Studiare la stabilità del sistema retroazionato applicando il Criterio di Nyquist.

6. [punti 4,5] Sia dato il sistema in retroazione di figura

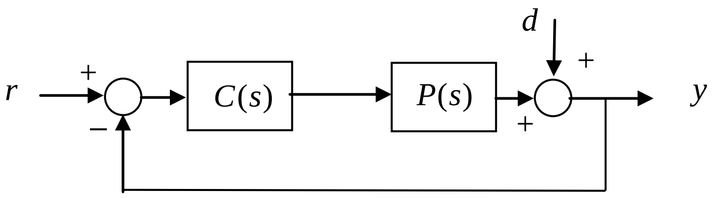


dove $P(s) = \dfrac{\left[(s+2)^2+4\right]}{s(s+4)^2}$.

a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K_1 > 0$ (luogo diretto) e $K_1 < 0$ (luogo inverso) determinando in entrambi i luoghi gli asintoti, le eventuali radici doppie e gli angoli di arrivo.
b. Determinare i valori di $K_1 \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

N.B.: L'equazione che determina le radici doppie al punto **a** è equivalente ad un'equazione polinomiale di terzo grado che ammette una sola radice reale. Questa venga stimata con una procedura numerica ed una precisione di circa l'1%.

7. [punti 4,5] Sia dato il seguente sistema



dove $P(s) = \dfrac{5}{s+3}$.

Determinare un controllore proprio di ordine minimo $C(s)$ affinché le seguenti specifiche siano soddisfatte:
1. reiezione infinita asintotica al disturbo armonico $d(t) = 7\cos(3t+2)$;
2. costante di posizione $K_p = 5$;
3. sistema retroazionato asintoticamente (internamente) stabile con poli dominanti in $-3 \pm j$.

8. [punti 4,5] Un sistema a tempo discreto, orientato dall'ingresso u all'uscita y, è descritto dalla seguente equazione alle differenze

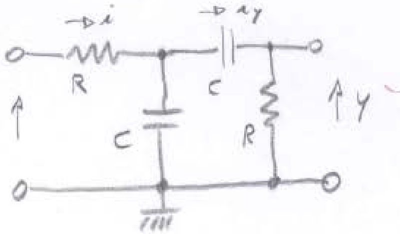
$$y(k+5) - 0.6y(k+4) - 0.71y(k+3) + 0.24y(k+2) + 0.16y(k+1) = u(k+3) \text{ .}$$

a) Determinare la funzione di trasferimento del sistema.
b) Studiare la stabilità asintotica del sistema applicando il criterio di Jury.

Tracce delle soluzioni

1.
vedi dispense del corso.

2.



$$Y = R\, I_y$$

$$I_y = I \cdot \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC} + \frac{1}{sC} + R} = I \cdot \frac{1}{2 + RCs}$$

$$I = \frac{U}{R + \dfrac{\frac{1}{sC}\cdot\left(\frac{1}{sC} + R\right)}{\frac{1}{sC} + \frac{1}{sC} + R}} = \frac{U}{R + \dfrac{R + \frac{1}{sC}}{2 + RCs}}$$

$$Y = R\, \frac{U}{R + \dfrac{R + \frac{1}{sC}}{2 + RCs}} \cdot \frac{1}{2 + RCs} = \frac{U}{1 + \dfrac{1 + \frac{1}{sCR}}{2 + RCs}} \cdot \frac{1}{2 + RCs}$$

$$G(s) = \frac{1}{2 + RCs + 1 + \frac{1}{RCs}} = \boxed{\frac{RCs}{(RC)^2 s^2 + 3RCs + 1}} \quad \text{f.d.t.}$$

eq. diff. $\quad (RC)^2 D^2 y(t) + 3RC\, Dy(t) + y(t) = RC\, Du(t)$

zeri: $\quad z_1 = 0 \qquad$ poli: $\quad p_{1,2} = \dfrac{-3RC \pm \sqrt{9(RC)^2 - 4(RC)^2}}{2(RC)^2} =$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2RC}$$

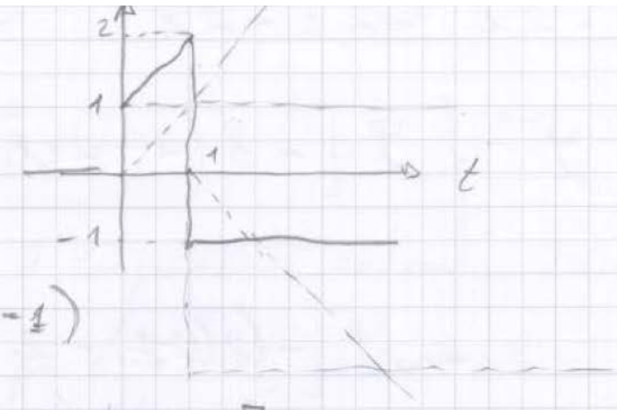
modi: $\left\{ \exp\left(\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2RC}\right),\ \exp\left(\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2RC}\right) \right\}$

guadagno statico: $\quad G(0) = 0.$

3.

5

$$G(s) = \frac{2}{s+1}$$



$$u(t) = (1+t)\cdot 1(t) + \left(-3-(t-1)\right) 1(t-1)$$

$$U(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + e^{-s}\,\mathcal{L}\left[-3-t\right] =$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + e^{-s}\left\{-\frac{3}{s} - \frac{1}{s^2}\right\}$$

$$U(s) = \frac{s+1}{s^2} - e^{-s}\left\{\frac{3s+1}{s^2}\right\}$$

$$= \frac{s+1}{s^2} - e^{-s}\frac{3s+1}{s^2}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2}{s+1}\left\{\frac{s+1}{s^2} - \frac{3s+1}{s^2}e^{-s}\right\}$$

$$= \frac{2}{s^2} - \frac{6s+2}{s^2(s+1)}e^{-s}$$

$$y(t) = 2t - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s+2}{s^2(s+1)}e^{-s}\right\}$$

$$\frac{6s+2}{s^2(s+1)} = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_2}{s+1} = \frac{2}{s^2} + \frac{4}{s} - \frac{4}{s+1}$$

$$K_{11} = 2 \quad K_2 = \left.\frac{6s+2}{s^2}\right|_{s=-1} = \frac{-6+2}{1} = -4$$

$$K_{12} + K_2 = 0 \quad K_{12} = 4$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6s+2}{s^2(s+1)}\right] = \left(2t + 4 - 4e^{-t}\right)1(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s+2}{s^2(s+1)}e^{-s}\right\} = \left.\left(2t+4-4e^{-t}\right)\right|_{t \leftarrow t-1} \cdot 1(t-1)$$

$$= \left(2(t-1) + 4 - 4e^{-(t-1)}\right) \cdot 1(t-1)$$

Se $t \in [0,1]$ $\quad y(t) = 2t$ ✓

Se $t > 1$ $\quad y(t) = \cancel{2t} - \cancel{2t} + 2 - 4 + 4e^{-(t-1)} =$

$$= -2 + 4e^{-(t-1)}$$ ✓

$$y(t) = 2t - \left[2(t-1) + 4 - 4e^{-(t-1)}\right] \cdot 1(t-1)$$

www.unipr.it

metodo alternativo

per $t \in [0, 1)$ $u(t) = 1 + t \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$

$$U(s) = \frac{s+1}{s^2}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{2}{\cancel{s+1}} \cdot \frac{\cancel{s+1}}{s^2} = \frac{2}{s^2}$$

$y(t) = 2t$ se $t \in [0, 1)$

Consideriamo ora $t > 1$: l'ingresso è costante, $u(t) = -1$, e quindi l'uscita $y(t)$, per $t \to +\infty$, avrà il valore {guadagno statico}$\cdot(-1) = G(0)\cdot(-1) =$

$y_\infty = 2 \cdot (-1) = -2$

Quindi $y(t)$ per $t > 1$ sarà così strutturata

$y(t) = y_\infty$ + evoluzione libera

$y(t) = -2 + c\,e^{-t}$, dove c è una costante da determinarsi

Utilizziamo la proprietà: Se $u(t)$ è funzione discontinua allora la corrispondente $y(t) \in C^{\rho-1}(\mathbb{R})$ dove ρ è il grado relativo di $G(s)$. Quindi, essendo $\rho = 1$, segue $y(t) \in C^0(\mathbb{R})$:

$y(1-) = y(1+) \iff 2 = -2 + c\,e^{-1}$

$c\,e^{-1} = 4 \qquad c = 4 \cdot e$

$y(t) = -2 + 4 \cdot e \cdot e^{-t} = -2 + 4\,e^{-(t-1)}$ per $t > 1$

4.
Vedi dispense del corso.

5.

a) $L(j\omega) = 10\,\dfrac{j\omega+1}{(j\omega)^3(j\omega+2)}$, $\arg L(j\omega) = \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\omega - \operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{2}$

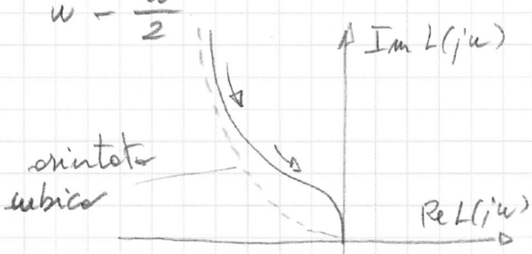
$\omega \to 0$ $\quad \arg L(j\omega) \to \dfrac{\pi}{2} \quad |L(j\omega)| \to +\infty$

$\omega \to +\infty$ $\quad \arg L(j\omega) \to \dfrac{\pi}{2} \quad |L(j\omega)| \to 0$

Per ω piccolo e positivo $\arg L(j\omega) \simeq \dfrac{\pi}{2} + \omega - \dfrac{\omega}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\omega}{2} > \dfrac{\pi}{2}$;
quindi l'emergenza del d.p. avviene nel II quadrante.

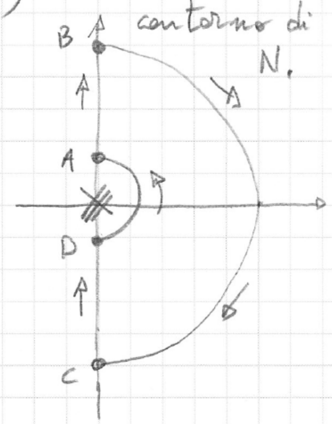
$\arg L(j\omega) = \pi \qquad \operatorname{arctg}\omega - \operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ per $\omega > 0$

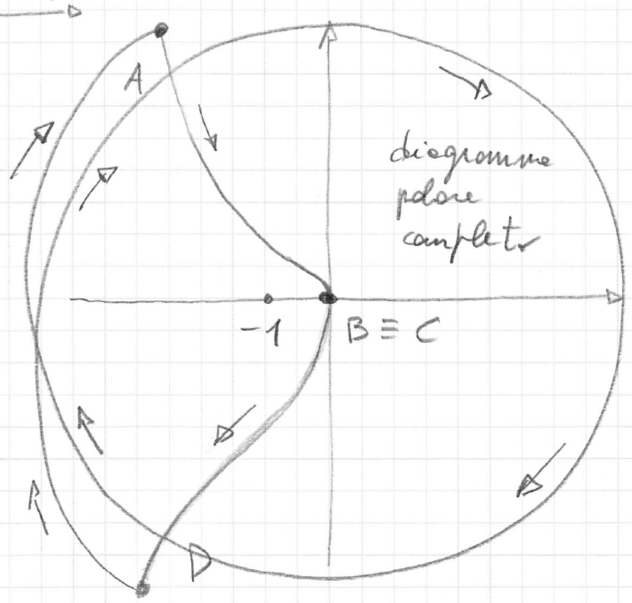
$\dfrac{1 + \omega \cdot \frac{\omega}{2}}{\omega - \frac{\omega}{2}} = 0 \qquad 1 + \dfrac{\omega^2}{2} = 0$ nessuna soluzione



Quindi nessuna intersezione con l'asse reale negativo del diagramma polare

b)

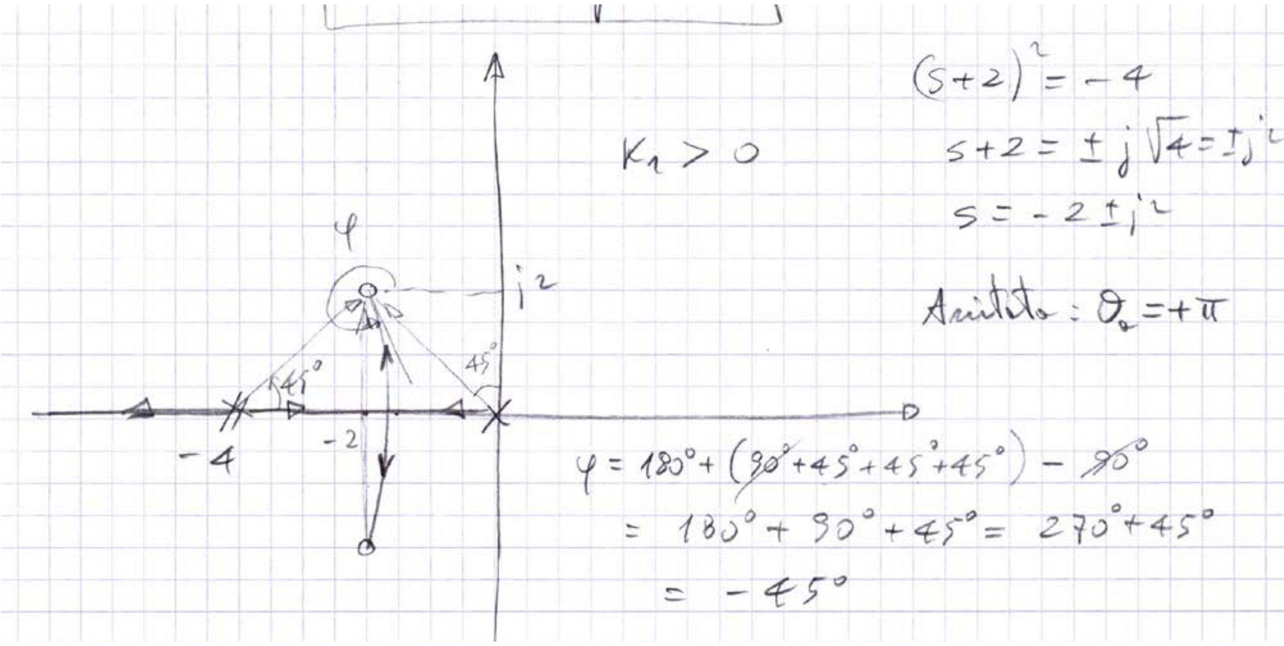


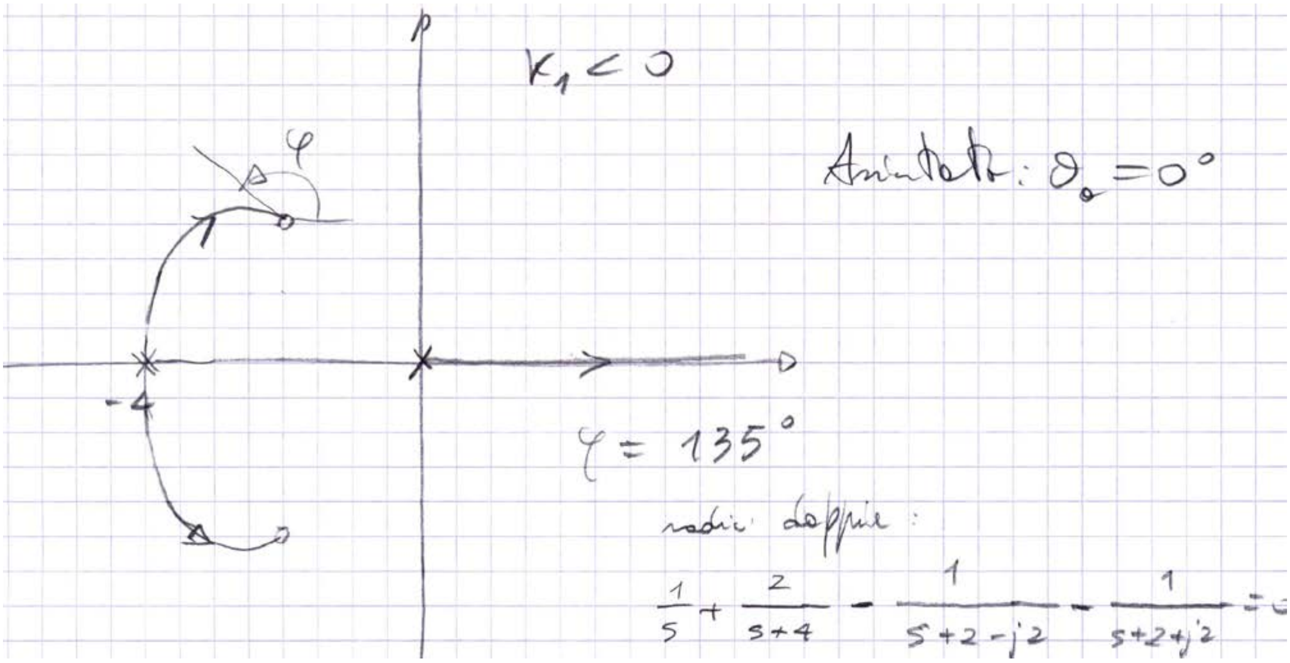


L(s) non ha poli a parte reale negativa. Per il criterio di N. la stabilità sussiste quando il d.p.c. non circonda né tocca −1. In questo caso il d.p.c. circonda 2 volte −1. Quindi il sistema retroazionato è <u>instabile</u>.

6.

a.


(s+2)^2 = -4
s+2 = ± j √4 = ± j2
s = -2 ± j2
K1 > 0
φ
j2
Asintoto : θa = +π
45°
45°
-4
-2
φ = 180° + (90° + 45° + 45° + 45°) - 90°
= 180° + 90° + 45° = 270° + 45°
= -45°


K1 < 0
φ
Asintoto : θa = 0°
-4
φ = 135°
radici doppie :
1/s + 2/(s+4) - 1/(s+2-j2) - 1/(s+2+j2) = 0

radici doppie :

$$\frac{1}{s}+\frac{2}{s+4}-\frac{1}{s+2-j2}-\frac{1}{s+2+j2}=0$$

$$\frac{1}{s}+\frac{2}{s+4}-\left(\frac{s+2+\cancel{j2}+s+2-\cancel{j2}}{(s+2)^2+4}\right)=0$$

$$\frac{1}{s}+\frac{2}{s+4}-\frac{2(s+2)}{(s+2)^2+4}=0$$

$$(s+4)(s^2+4s+8)+2s(s^2+4s+8)-2(s^2+2s)(s+4)=0$$

$$(3s+4)(s^2+4s+8)-2(s^3+2s^2+4s^2+8s)=0$$

$$(3s+4)(s^2+4s+8)-2(s^3+6s^2+8s)=0$$

$$3s^3+\cancel{12s^2}+24s+4s^2+\cancel{16s}+32$$

$$-2s^3-\cancel{12s^2}-\cancel{16s}=0$$

$$s^3+4s^2+24s+32=0$$

$$f(s) = s^3 + 4s^2 + 24s + 32$$

s	$f(s)$
-2	-8
$-2,2$	-12
$-1,8$	$-4,072$
$-1,6$	$-0,2560$
$-1,5$	$1,625$
$-1,58$	$0,12$
-1.59	-0.0673

radice doppia $\simeq -1,59$

b) Dal luogo delle radici si deduce che la stabilità asintotica del sistema ret. è data dalla condizione

$$k_1 > 0$$

Verifica con il criterio di Routh.

$$s(s^2 + 8s + 16) + k_1(s^2 + 4s + 8) = 0$$

$$s^3 + 8s^2 + 16s + k_1 s^2 + 4k_1 s + 8k_1 = 0$$

$$s^3 + (8 + k_1)s^2 + (16 + 4k_1)s + 8k_1 = 0$$

$$\begin{array}{c|ll}
3 & 1 & 16 + 4k_1 \\
2 & 8 + k_1 & 8k_1 \\
1 & (8+k_1)(16+4k_1) - 8k_1 & \\
0 & 8k_1 &
\end{array}$$

$8 + k_1 > 0 \quad k_1 > -8$

$8k_1 > 0 \quad k_1 > 0$

$128 + 32k_1 + 16k_1 + 4k_1^2 - 8k_1 > 0$

$4k_1^2 + 40k_1 + 128 > 0$

radici $k_{1,2} = \dfrac{-20 \pm \sqrt{400 - 512}}{4}$ è sempre > 0

$\Delta = -112 < 0 \Rightarrow \forall k_1 \in \mathbb{R}$!

7.
Il controllore è del tipo

$$C(s)=\frac{y_2 s^2+y_1 s+y_0}{(s^2+9)}$$

in cui la coppia di poli immaginari coniugati al denominatore serve per rimuovere il disturbo. Il guadagno ad anello aperto è

$$P(s)C(s)=\frac{5\left(y_2 s^2+y_1 s+y_0\right)}{(s^2+9)(s+3)}$$

Dalla specifica 2) si ha $\frac{5y_0}{27}=5$ da cui $y_0=18$. Dalla specifica 3) si imposta la seguente identità polinomiale

$$(s^2+9)(s+3)+5\left(y_2 s^2+y_1 s+27\right)=((s+3)^2+1)(s+c)$$

da cui otteniamo

$$c=16,2 \quad y_1=19,64 \quad y_2=3,84$$

Si osservi che la soluzione è soddisfacente in quanto il parametro c = 16,2 corrisponde al polo $-16,2$ la cui dinamica è trascurabile rispetto ai poli $-3\pm j$.

Il controllore è quindi

$$C(s)=\frac{3,84s^2+19,64s+27}{s^2+9}.$$

8.

a) ordine n di $\Sigma_d = k+5-(k+1) = 4$

grado relativo ρ di $\Sigma_d = k+5-(k+3) = 2$

Sostituzione $k \leftarrow k-5$ (si ottiene l'eq. in forma standard)

$$y(k)-0.6\,y(k-1)-0.71\,y(k-2)+0.24\,y(k-3)+0.16\,y(k-4)=u(k-2)$$

$$H(z)=\frac{z^2}{z^4-0.6\,z^3-0.71\,z^2+0.24\,z+0.16} =: \frac{b(z)}{a(z)}$$

b) Si applica il criterio di Jury al pol. $a(z)$

1) $a(1) = 1-0.6-0.71+0.24+0.16 = 0.09 > 0$ ok!

2) $(-1)^4 a(-1) = a(-1) = 1+0.6-0.71-0.24+0.16 = 0.81 > 0$ ok!

3) $|a_0| < a_n$, $0.16 < 1$ ok!

1	0,16	0,24	−0,71	−0,6	1
2	1	−0,6	−0,71	0,24	0,16
3	−0.9744	0.6384	0.5964	−0.336	
4	−0,336	0.5964	0.6384	−0,9744	
5	0.83655936	*	−0.36662976		

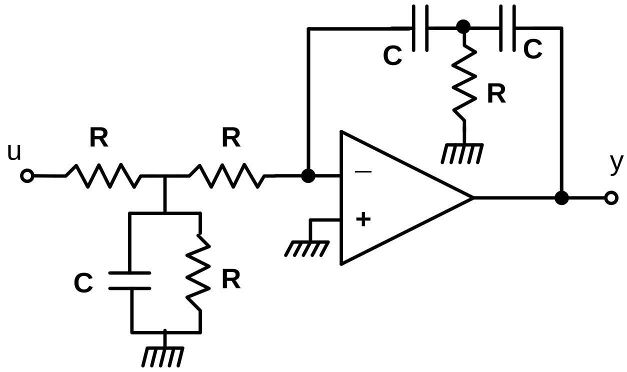
4) $|b_0| > |b_3|$, $0.9744 > 0.336$ ok!

5) $|c_0| > |c_2|$, $0.83655936 > 0.3666297$ ok!

Tutte le radici di $a(z)$ hanno modulo minore di uno, quindi Σ_d è asintoticamente stabile.

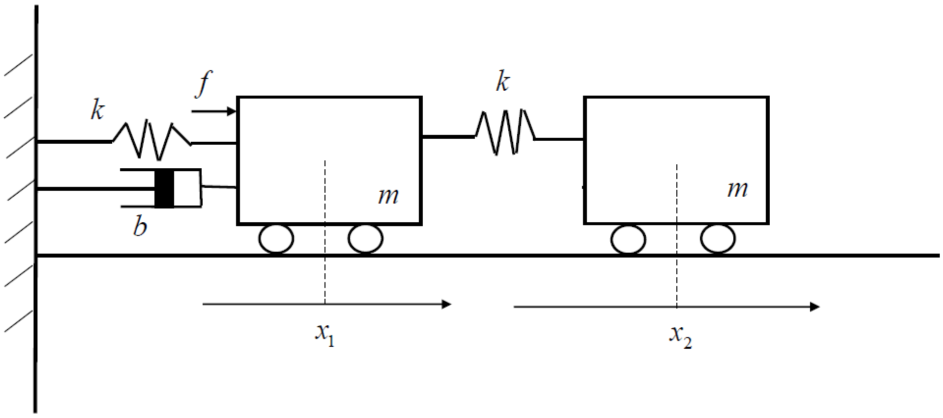
Parte A

1. [punti 6] L'amplificatore operazionale di figura definisce un sistema dinamico orientato da u (tensione all'ingresso) ad y (tensione all'uscita).



Di questo sistema si determinino: 1) la funzione di trasferimento; 2) l'equazione differenziale; 3) gli zeri, i poli e i modi.

2. [punti 5] Due carrelli di massa m collegati come mostrato in figura costituiscono un sistema dinamico Σ orientato da f (forza applicata al carrello di sinistra) ad x_2 (posizione del carrello di destra). In condizione di riposo delle molle sia $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$.



1. Determinare l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.
2. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ di Σ.

3. [punti 6]
Dimostrare le seguenti proprietà della trasformata di Laplace:
1. $L[Df(t)] = sF(s) - f(0+)$;
2. $L\left[\int_0^t f(v)dv\right] = \frac{1}{s}F(s)$;
3. $L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$.

Parte B

4. [punti 5] Nota la risposta al gradino unitario $g_s(t)$ di un sistema lineare stazionario dedurre la risposta forzata $y_F(t)$ del sistema ad un ingresso forzante $u(t)$.

5. [punti 8] Determinare la risposta forzata $y(t)$ in risposta al gradino unitario $u(t) = 1(t)$ per un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{4}{\left[(s+1)^2+1\right]^2}$. Determinare inoltre il grado massimo di continuità su $\mathbb{R}$ di $y(t)$. [L'esercizio può essere svolto senza uso della calcolatrice. Se nei calcoli appaiono funzioni trigonometriche inverse queste vanno riportate senza valutarle numericamente. Esempio: $\mathrm{arctg}(5)$ non va calcolato.]

6. [punti 6] Un sistema dinamico ha funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{1-s}{s^2+2s+1}$. L'ingresso applicato è $u(t) = 0$ per ogni $t \geq 0$ e dell'uscita si conosce che $y(0+) = 2$ e $Dy(0+) = 1$. Determinare $y(t)$ per $t \geq 0$.

Tracce delle soluzioni

1.

$$> G := -\frac{\frac{1}{s\,C}+\frac{1}{s\,C}+\frac{\frac{1}{s\,C}\cdot\frac{1}{s\,C}}{R}}{R+R+\frac{R\,R}{\frac{\frac{1}{s\,C}\cdot R}{\frac{1}{s\,C}+R}}}$$

$$-\frac{\frac{2}{s\,C}+\frac{1}{s^2\,C^2\,R}}{2\,R+R\,s\,C\left(\frac{1}{s\,C}+R\right)}$$

$$-\frac{2\,s\,C\,R+1}{s^2\,C^2\,R^2\,(3+s\,C\,R)}$$

$$G(s) = \frac{-2RCs-1}{(RC)^3 s^3 + 3(RC)^2 s^2}$$

eq. differenziale

$$(RC)^3 D^3 y(t) + 3(RC)^2 D^2 y(t) = -2(RC)Du(t) - u(t)$$

zeri: $z_1 = -\frac{1}{2RC}$

poli: $p_1 = 0 \qquad p_2 = 0 \qquad p_3 = -\frac{3}{RC}$

modi $= \left\{1,\ t,\ \exp\left\{-\frac{3}{RC}t\right\}\right\}$

2.

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = f - k x_1 - b D x_1 + k(x_2 - x_1) \\ m D^2 x_2 = -k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m D^2 + b D + 2k) x_1 = k x_2 + f \\ k x_1 = (m D^2 + k) x_2 \end{cases}$$

$$(m D^2 + b D + 2k)(m D^2 + k) x_2 = k^2 x_2 + k f$$

$$\boxed{m^2 D^4 x_2 + b m D^3 x_2 + 3 k m D^2 x_2 + k b D x_2 + k^2 x_2 = k f}$$

$$\text{f.d.t. } G(s) = \frac{k}{m^2 s^4 + b m s^3 + 3 k m s^2 + k b s + k^2}$$

3.
Vedi le dispense del corso.

4.
Vedi dispense dell’insegnamento.

5.

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{4}{s\left[(s+1)^2+1\right]^2}$$

$$Y(s) = \frac{4}{s(s+1-j)^2(s+1+j)^2}$$

$$= \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1-j)^2} + \frac{K_{22}}{s+1-j} + \frac{K_{31}}{(s+1+j)^2} + \frac{K_{32}}{s+1+j}$$

$$= \frac{K_1}{s} + \left\{\frac{K_{21}}{(s+1-j)^2} + \frac{\overline{K_{21}}}{(s+1+j)^2}\right\} + \left\{\frac{K_{22}}{s+1-j} + \frac{\overline{K_{22}}}{s+1+j}\right\}$$

$$K_1 = 1 \qquad K_{21} = \left.\frac{4}{s(s+1+j)^2}\right|_{s=-1+j} = \frac{4}{(-1+j)(2j)^2} = \frac{1}{1-j}$$

$$|K_{21}| = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \arg K_{21} = -\arg(1-j) = -\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$K_{31} = \overline{K_{21}}$$

$$K_{22} = D\left[\frac{4}{s(s+1+j)^2}\right]_{s=-1+j} = -4\cdot\left.\frac{(s+1+j)^2 + s\cdot 2\cdot(s+1+j)}{s^2(s+1+j)^4}\right|_{s=-1+j} =$$

$$= -4\,\frac{(2j)^2 + (-1+j)2(2j)}{(-1+j)^2(2j)^4} = -\frac{-1+(-1+j)j}{(-1+j)^2}$$

$$= -\frac{-2-j}{(-1+j)^2} = \frac{2+j}{(-1+j)^2} \qquad K_{32} = \overline{K_{22}}$$

$$|K_{22}| = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \arg K_{22} = \arg(2+j) - 2\arg(-1+j) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) - \pi - \frac{\pi}{2}$$

$$y(t) = 1 + 2|K_{21}|\cdot t\cdot e^{-t}\cos(t + \arg K_{21}) + 2|K_{22}|\,e^{-t}\cos(t + \arg K_{22})$$

$$= 1 + 2\frac{1}{\sqrt{2}}\,t\,e^{-t}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right) + 2\frac{\sqrt{5}}{2}\,e^{-t}\cos\left(t + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) - \pi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{= 1 + \sqrt{2}\cdot t\, e^{-t}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{5}\,e^{-t}\operatorname{sen}\left(t + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)\right)}$$

anche esprimibile come $y(t) = 1 + te^{-t}(\cos t - \operatorname{sen} t) - e^{-t}(\cos t + 2\operatorname{sen} t)$

Il gradino $u(t) = 1(t)$ è funzione discontinua. Quindi $y(t) \in C^{\rho-1,\infty}$ dove $\rho = 4$ è il grado relativo. Il grado massimo di continuità di $y(t)$ è 3.

6.

$$G(s) = \frac{1-s}{(s+1)^2} \qquad \text{Ingresso } u(t)=0 \text{ per } t \geq 0$$

$$y(0+) = 2 \qquad Dy(0+) = 1$$

Metodo dei modi

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$$

$$Dy(t) = -c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t} + c_2 t \cdot (-1) e^{-t}$$

$$Dy(t) = -c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t} - c_2 t e^{-t}$$

$$\begin{cases} c_1 = 2 \\ -c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow c_2 = 1 + c_1 = 3$$

$$y(t) = 2 e^{-t} + 3 t e^{-t}$$

metodo dell'eq. differenziale

$$G(s) = \frac{1-s}{s^2+2s+1} \qquad D^2y + 2Dy + y = -Du + u$$

$$D^2y + 2Dy + y = 0 \quad , t \geq 0$$

Si applica la tras. di Laplace

$$s^2 Y - y(0+)s - Dy(0+) + 2\left(sY - y(0+)\right) + Y = 0$$

$$s^2 Y - 2s - 1 + 2sY - 4 + Y = 0$$

$$(s^2+2s+1)Y = 2s+5$$

$$Y(s) = \frac{2s+5}{s^2+2s+1} = \frac{2s+5}{(s+1)^2} = \frac{K_{11}}{(s+1)^2} + \frac{K_{12}}{s+1}$$

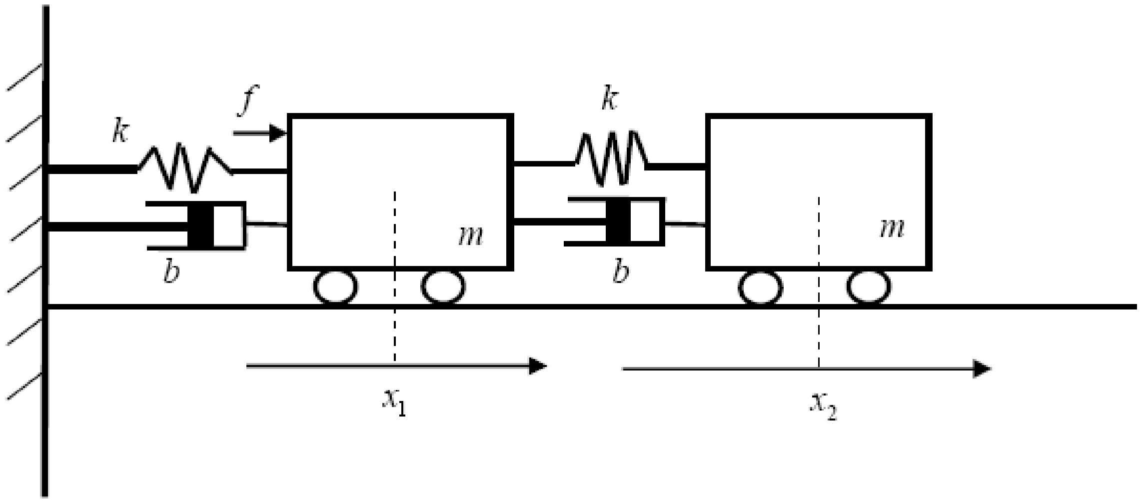
$$K_{11} = 2(-1)+5 = 3 \qquad K_{12} = 2$$

$$y(t) = 3 t e^{-t} + 2 e^{-t}$$

Parte A

1. [punti 4] Sia dato un sistema in retroazione unitaria con guadagno di anello L(s). Si presenti e si discuta l'analisi a regime della risposta ai segnali tipici del riferimento.

2. [punti 5] Due carrelli di massa m collegati come mostrato in figura costituiscono un sistema dinamico Σ orientato da f forza applicata al carrello di sinistra ad x_2 posizione del carrello di destra (in condizione di riposo delle molle sia $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$).



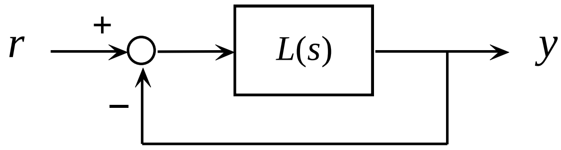
1. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema Σ.
2. Scrivere l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.
3. Dimostrare che il sistema è asintoticamente stabile per ogni valore positivo di m, k e b.

3. [punti 4] Determinare l'evoluzione forzata $y(t)$ in risposta al gradino unitario $u(t) = 1(t)$ di un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{s-2}{(s+2)^3(s+1)}$.
Determinare inoltre il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$.

4. [punti 4] Presentare e dimostrare la formula di antitrasformazione zeta, ovvero l'espressione che determina la sequenza a tempo discreto $x(k)$ nota che sia $X(z) \triangleq \mathcal{Z}[x(k)]$.

Parte B

5. [punti 5] Sia dato il seguente sistema retroazionato

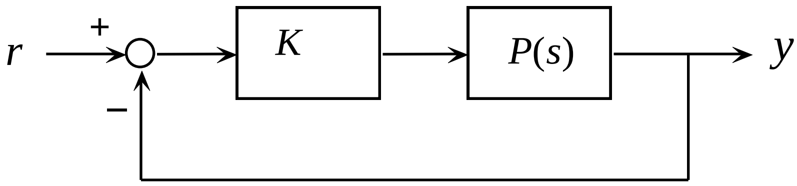


dove $L(s)=16\dfrac{1-s}{(s+2)^4}$.

a) Tracciare il diagramma polare associato alla funzione di trasferimento $L(s)$ determinando in particolare l'intersezione con l'asse reale negativo.

b) Dimostrare mediante il criterio di Nyquist che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile e determinare il corrispondente margine di ampiezza M_A.

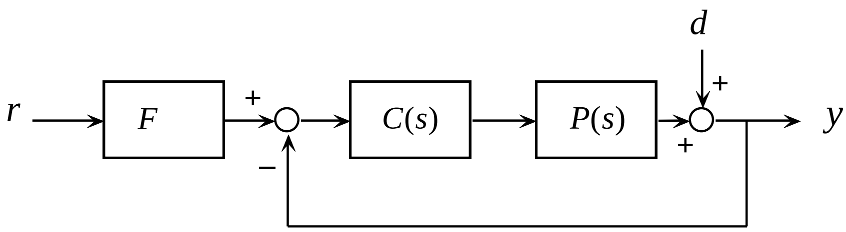
6. [punti 5] Sia dato il sistema in retroazione di figura



dove $P(s)=\dfrac{1}{s(s+4)^3}$.

a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K>0$ determinando in particolare
   1. Asintoti del luogo.
   2. Eventuali radici doppie.
   3. Angoli di partenza del luogo.
b. Determinare i valori di $K\in\mathbb{R}$ per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Determinare inoltre le intersezioni del luogo delle radici dell'equazione caratteristica con l'asse immaginario del piano complesso.
c. Determinare il valore di K che massimizza il grado di stabilità del sistema retroazionato: $K^* = \arg\max_{K\in\mathbb{R}} G_S(K)$.

7. [punti 5] Sia dato lo schema di sistema di controllo di figura



dove $P(s)=\dfrac{1}{s+4}$. Determinare un controllore $C(s)$ di ordine 4 (quattro) ed il blocco algebrico $F\in\mathbb{R}$ affinché il sistema di controllo soddisfi le seguenti specifiche:

1. reiezione infinita asintotica al disturbo $d(t)=7\sin(2t)+9\sin(t+5)$;
2. sistema retroazionato con poli dislocati in $-1,-2,-3,-5,-6$;
3. in condizioni nominali l'errore a regime in risposta ad un gradino del riferimento sia nullo.

8. [punti 4] Dato il sistema a tempo discreto definito dall'equazione

$$y(k)+0.5y(k-1)+0.5y(k-2)+0.5y(k-3)=u(k-3)$$

ed orientato da $u(k)$ (ingresso) a $y(k)$ (uscita) se ne studi la stabilità alle perturbazioni.

Traccia delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso

2.

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = f - k x_1 - b D x_1 + k(x_2 - x_1) + b(D x_2 - D x_1) \\ m D^2 x_2 = -k(x_2 - x_1) - b(D x_2 - D x_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m s^2 X_1 = F - k X_1 - b s X_1 + k(X_2 - X_1) + b s(X_2 - X_1) \\ m s^2 X_2 = -k(X_2 - X_1) - b s(X_2 - X_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m s^2 X_1 = F - k X_1 - b s X_1 + k X_2 - k X_1 + b s X_2 - b s X_1 \\ m s^2 X_2 = -k X_2 - b s X_2 + k X_1 + b s X_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m s^2 X_1 = F - 2k X_1 - 2bs X_1 + k X_2 + bs X_2 \\ m s^2 X_2 = -k X_2 - bs X_2 + (k+bs) X_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m s^2 + 2bs + 2k) X_1 = F + (k+bs) X_2 \\ (m s^2 + bs + k) X_2 = (k+bs) X_1 \end{cases}$$

$$X_1 = \frac{F + (k+bs) X_2}{m s^2 + 2bs + 2k}$$

$$(m s^2 + bs + k) X_2 = (k+bs) \frac{F + (k+bs) X_2}{m s^2 + 2bs + 2k}$$

$$(m s^2 + bs + k)(m s^2 + 2bs + 2k) X_2 =$$

$$= (k+bs) F + (k+bs)^2 X_2$$

$$\left[(m s^2 + bs + k)(m s^2 + 2bs + 2k) - (k+bs)^2 \right] X_2 =$$

$$= (k+bs) F$$

$$\frac{X_2}{F} = \frac{bs + k}{(m s^2 + bs + k)(m s^2 + 2bs + 2k) - (k+bs)^2}$$

$$m^2 s^4 + 2bms^3 + 2kms^2 + bms^3 + 2b^2s^2 + 2kbs +$$
$$+ kms^2 + \cancel{2bks} + 2k^2$$
$$- k^2 - b^2s^2 - \cancel{2bks} =$$
$$= m^2s^4 + 3bms^3 + (3km + b^2)s^2 + 2kbs + k^2$$

$$T_{fx_2} = \frac{bs+k}{m^2s^4 + 3bms^3 + (3km+b^2)s^2 + 2kbs + k^2}$$

Eq. differenziale $\quad y \equiv x_2 \quad u \equiv f$

$$m^2 D^4 y + 3bm D^3 y + (3km + b^2) D^2 y + 2kb D y + k^2 y =$$
$$= b D u + k u$$

4	m^2	$3km + b^2$	k^2	
3	$3bm$	$2kb$	0	
2	$\underbrace{-2kbm^2 + 9kbm^2 + 3b^3m}_{3b^3m + 7kbm^2}$	$3bk^2m$	0	
1	#	0	0	0
0	$3bk^2m$			

$$\# = 6b^4km + 14k^2b^2m^2 - 9b^2k^2m^2 =$$
$$= 5k^2b^2m^2 + 6b^4km$$

Tutti gli elementi della prima colonna sono monomi o polinomi evidentemente positivi $\forall\, m, k, b > 0$.
Quindi per il Criterio di Routh Σ è asint. stabile $\forall\, m, k, b > 0$.

3.

$$Y(s)=\frac{s-2}{s(s+2)^3(s+1)}.$$

Dallo sviluppo in fratti semplici:

$$Y(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{(s+2)^3}+\frac{C}{(s+2)^2}+\frac{D}{s+2}+\frac{E}{s+1}$$

$$A=\left.\frac{s-2}{(s+2)^3(s+1)}\right|_{s=0}=-\frac{1}{4}$$

$$B=\left.\frac{s-2}{s(s+1)}\right|_{s=-2}=-2$$

$$E=\left.\frac{s-2}{s(s+2)^3}\right|_{s=-1}=3$$

L'ordine relativo di Y(s) è maggiore di uno:

$$\Rightarrow A+D+E=0\Rightarrow D=-\frac{11}{4}$$

$$C=\left.\frac{d}{ds}\left[\frac{s-2}{s(s+1)}\right]\right|_{s=-2}=-\frac{5}{2}$$

Antitrasformando si ottiene:

$$y(t)=A+B\frac{1}{2}t^2e^{-2t}+Cte^{-2t}+De^{-2t}+Ee^{-t}\quad \text{per } t\geq 0$$

$$y(t)=-\frac{1}{4}-t^2e^{-2t}-\frac{5}{2}te^{-2t}-\frac{11}{4}e^{-2t}+3e^{-t}\quad \text{per } t\geq 0$$

Il segnale in ingresso è discontinuo e $\rho=3\geq 1$, quindi $y(t)\in\overline{C^{\rho-1,\infty}}$, ovvero il grado massimo di continuità di $y(t)$ è 2.

4

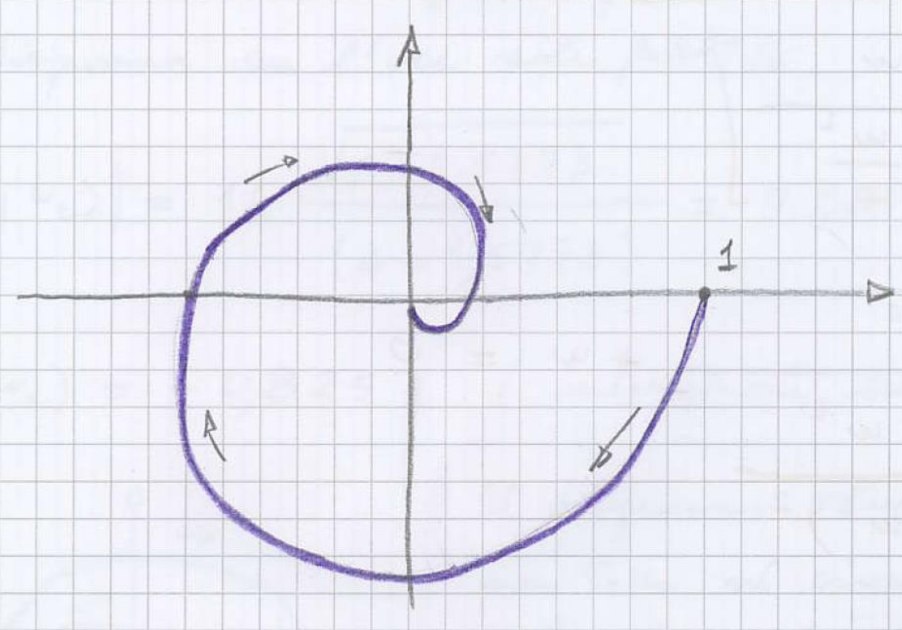
Vedi appunti dell'insegnamento.

5.

a) $L(j\omega) = 16 \dfrac{1 - j\omega}{(j\omega + 2)^4}$; $L(j0) = 1$

$$|L(j\omega)| = 16 \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{(4+\omega^2)^2}$$

$$\arg L(j\omega) = -4 \operatorname{arctg} \frac{\omega}{2} - \operatorname{arctg} \omega$$



$$\lim_{\omega \to +\infty} L(j\omega) = -5 \frac{\pi}{2} = -2\pi - \frac{\pi}{2}$$

Calcolo intersezione con l'asse reale negativo:

$$\arg L(j\omega) = -\pi$$

$$+4 \operatorname{arctg} \frac{\omega}{2} + \operatorname{arctg} \omega = +\pi$$

$$\operatorname{tg}\left(4 \operatorname{arctg} \frac{\omega}{2}\right) + \omega = 0$$

$$\frac{2 \operatorname{tg}\left(2 \operatorname{arctg} \frac{\omega}{2}\right)}{1 - \left[\operatorname{tg}\left(2 \operatorname{arctg} \frac{\omega}{2}\right)\right]^2} + \omega = 0$$

$$\frac{2 \left[\dfrac{\omega}{1 - \frac{\omega^2}{4}}\right]}{1 - \left[\dfrac{\omega}{1 - \frac{\omega^2}{4}}\right]^2} + \omega = 0$$

$$\frac{2 \dfrac{4\omega}{4 - \omega^2}}{1 - \dfrac{16\omega^2}{(4 - \omega^2)^2}} + \omega = 0$$

$$\frac{\dfrac{8\omega}{\cancel{4 - \omega^2}}}{\dfrac{(4 - \omega^2)^2 - 16\omega^2}{(4 - \omega^2)^{\cancel{2}}}} + \omega = 0$$

$$\frac{8\omega(4-\omega^2)}{(4-\omega^2)^2-16\omega^2}+\omega=0$$

Si scarta la soluzione $\omega=0$

$$8(4-\omega^2)+(4-\omega^2)^2-16\omega^2=0$$

$$x \triangleq \omega^2$$

$$8(4-x)+(4-x)^2-16x=0$$

$$32-8x+16+x^2-8x-16x=0$$

$$x^2-32x+48=0$$

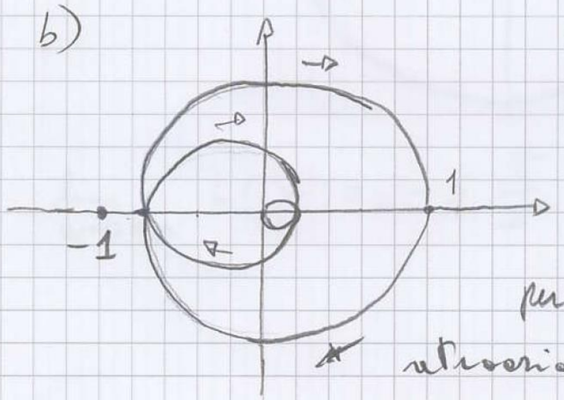
$$x_{1,2}= \begin{cases} 30,4222 \\ 1,5778 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \omega_1 &= 5,5156 \text{ rad/sec} \\ \omega_2 &= 1,2561 \text{ rad/sec} \end{aligned}$$

Si scarta la soluzione ω_1 corrispondente all'intersezione del diagramma con l'asse reale positivo.

$$|L(j\omega_2)| = 16\,\frac{\sqrt{1+1,5778}}{(4+1,5778)} = 0,8257$$

$$L(j\omega_2) = -0,8257 \quad (\text{intersezione cercata})$$

b)



Il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto critico -1. Considerato che $L(s)$ non ha poli a parte reale positiva per il C. di Nyquist il sistema retroazionato è asin. stabile.

$$M_A = \frac{1}{0,8257} \simeq 1,21$$

6.

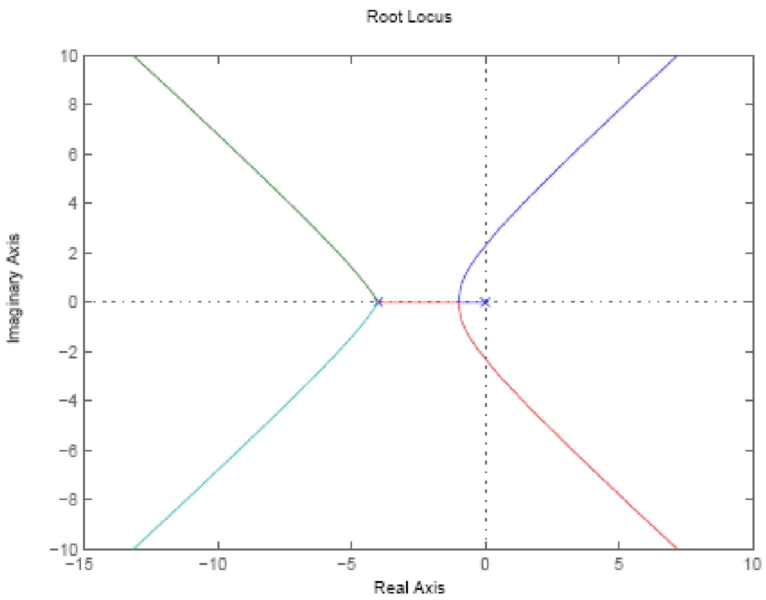
a) Intersezione degli asintoti:

$$\nabla_a = \frac{-4 \cdot 3 + 0}{4} = -3$$

Angoli deli asintoti: $+45°,\ -45°,\ +135°, -135°$
Angolo di partenza dal polo in 0: $+180°$
Angolo di partenza dal polo triplo in -4: $0°,\ +120°,\ -120°$
Radici doppie:

$$\frac{3}{s+4} + \frac{1}{s} = 0 \ \Rightarrow\ 4\,s + 4 = 0 \ \Rightarrow\ s = -1$$

Luogo delle radici:



b) Equazione caratteristica:

$$1 + K\,\frac{1}{s\,(s+4)^3} = 0 \ \Rightarrow\ s^4 + 12\,s^3 + 48\,s^2 + 64\,s + K = 0$$

Criterio di Routh:

4	1	48	K	0
3	3	16	0	0
2	128	$3\,K$	0	
1	$128 \cdot 16 - 9\,K$	0		
0	$3\,K$	0		

Condizione per la stabilità asintotica:

$$\begin{cases} 2048 - 9\,K > 0 \\ 3\,K > 0 \end{cases} \ \Rightarrow\ K \in (0, 227.\bar{5})$$

Calcolo delle intersezioni:

$$128\, s^2 + 3 \cdot 227.\bar{5} = 0 \;\Rightarrow\; s = \pm j\, \sqrt{\frac{16}{3}} \simeq \pm j\, 2.309$$

c) Grado di stabilità massimo nella radice doppia $s = -1$:

$$1 + K^* \, \frac{1}{s\,(s+4)^3}\bigg|_{s=-1} = 0 \;\Rightarrow\; K^* = 27$$

7.

Il controllore (di ordine quattro) è del tipo

$$C(s) = \frac{b_4\,s^4 + b_3\,s^3 + b_2\,s^2 + b_1\,s + b_0}{(s^2+4)\,(s^2+1)}$$

in cui i quattro poli coniugati in $\pm j2$ e $\pm j1$ servono a rimuovere il disturbo $d(t)$.

Il guadagno ad anello è $L(s) = C(s)\,P(s)$ e dall'equazione $1 + L(s) = 0$ si ricava il polinomio caratteristico

$$\begin{aligned} p_c(s) &= (s^2+1)\,(s^2+4)\,(s+4) + b_4\,s^4 + b_3\,s^3 + b_2\,s^2 + b_1\,s + b_0 = \\ &= s^5 + (4+b_4)\,s^4 + (5+b_3)\,s^3 + (20+b_2)\,s^2 + (4+b_1)\,s + 16 + b_0 \end{aligned}$$

Dalle specifiche si ricava il polinomio desiderato

$$\begin{aligned} p_d(s) &= (s+1)(s+2)(s+3)(s+5)(s+6) = \\ &= s^5 + 17\,s^4 + 107\,s^3 + 307\,s^2 + 396\,s + 180 \end{aligned}$$

Impostando l'identità polinomiale $p_c(s) = p_d(s)$ si determina il seguente sistema

$$\begin{cases} b_4 + 4 = 17 \\ b_3 + 5 = 107 \\ b_2 + 20 = 307 \\ b_1 + 4 = 396 \\ b_0 + 16 = 180 \end{cases}$$

risolvendo il quale si ricava

$$b_4 = 13 \quad b_3 = 102 \quad b_2 = 287 \quad b_1 = 392 \quad b_0 = 164$$

Il controllore è quindi

$$C(s) = \frac{13\,s^4 + 102\,s^3 + 287\,s^2 + 392\,s + 164}{(s^2+4)\,(s^2+1)}$$

Perchè l'errore a regime in condizioni nominali sia nullo, si deve avere $T_{ry}(0) = 1$ da cui

$$F\,\frac{C(0)P(0)}{1 + C(0)\,P(0)} = F\,\frac{\frac{164}{4}\,\frac{1}{4}}{1 + \frac{164}{4}\,\frac{1}{4}} = F\,\frac{41}{45} = 1$$

Si impone quindi

$$F = \frac{45}{41} = 1.0976$$

8.

La funzione di trasferimento del sistema a tempo discreto è

$$H(z) = \frac{1}{z^3 + 0.5\,z^2 + 0.5\,z + 0.5}$$

La stabilità alle perturbazioni è determinata dalle radici del polinomio $a(z) \triangleq z^3 + 0.5\,z^2 + 0.5\,z + 0.5$ per il quale si applica il Criterio di Jury

1) $a(1) > 0$ ok!

2) $(-1)^3\, a(-1) > 0$

$$(-1)\,(-1 + \cancel{0.5} - \cancel{0.5} + 0.5) > 0 \quad \text{ok!}$$

3) $|a_0| < a_n$

$$|0.5| < 1 \quad \text{ok!}$$

4) $|b_0| > |b_{n-1}|$

1	0.5	0.5	0.5	1
2	1	0.5	0.5	0.5
3	−0.75	*	−0.25	

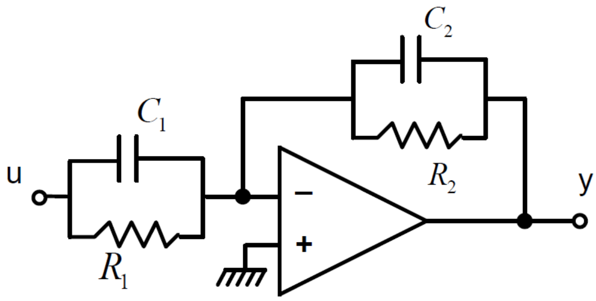
$$|-0.75| > |-0.25| \quad \text{ok!}$$

Il sistema è asintoticamente stabile.

Parte A

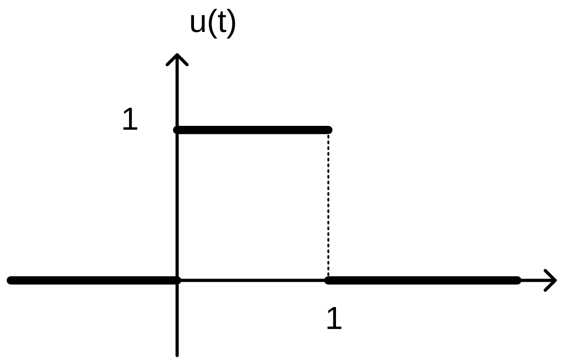
1. [punti 4] Definire la stabilità asintotica interna per un sistema di controllo in retroazione. Enunciare e dimostrare una condizione necessaria e sufficiente che garantisca questa particolare stabilità.
Fornire inoltre un esempio di sistema retroazionato asintoticamente stabile come sistema orientato dal segnale di comando all'uscita controllata ma non stabile internamente.

2. [punti 5] L'amplificatore operazionale di figura definisce un sistema dinamico orientato da u (tensione all'ingresso) ad y (tensione all'uscita).



Di questo sistema si determini:
1. la funzione di trasferimento;
2. l'equazione differenziale;
3. gli zeri, i poli, i modi ed il guadagno statico.

3. [punti 5] Dato un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{4}{(s+1)(s+2)}$ determinare la risposta forzata $y(t)$ al segnale di ingresso $u(t) = \begin{cases} 0 \ \text{ per } t < 0 \\ 1 \ \text{ per } 0 \le t < 1 \\ 0 \ \text{ per } t \ge 1 \end{cases}$ (vedi figura).



4. [punti 4] Un sistema a tempo discreto con ingresso $u(k)$ ed uscita $y(k)$ è definito dall'equazione alle differenze

$$a_2 y(k) + a_1 y(k-1) + a_0 y(k-2) = b_2 u(k) + b_1 u(k-1) + b_0 u(k-2)\,.$$

Considerando condizioni iniziali generali si determini la trasformata zeta dell'uscita $Y(z) \triangleq \mathcal{Z}\left[y(k)\right]$ (si ponga $u_{-1} \triangleq u(-1)$, $u_{-2} \triangleq u(-2)$, $y_{-1} \triangleq y(-1)$, $y_{-2} \triangleq y(-2)$ e $U(z) \triangleq \mathcal{Z}\left[u(k)\right]$).

Parte B

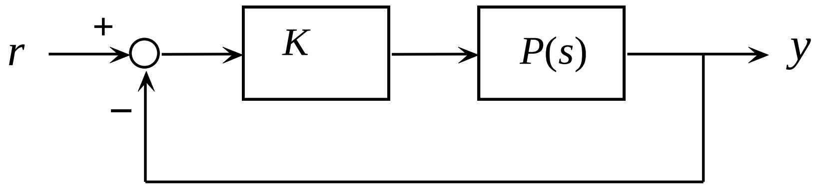
5. [punti 4] Tracciare i diagrammi di Bode asintotici (diagramma dei moduli e diagramma delle fasi della risposta armonica) associati alla funzione di trasferimento $G(s) = 40\dfrac{s+5}{(s+1)(s+20)}$

Suggerimenti:

i) per una decade delle pulsazioni si assegnino 10 quadretti del foglio protocollo;

ii) si riportano per comodità dello studente i logaritmi in base 10 degli interi da 2 a 9: $\log_{10} 2 \cong 0{,}30$, $\log_{10} 3 \cong 0{,}48$, $\log_{10} 4 \cong 0{,}60$, $\log_{10} 5 \cong 0{,}70$, $\log_{10} 6 \cong 0{,}78$, $\log_{10} 7 \cong 0{,}85$, $\log_{10} 8 \cong 0{,}90$, $\log_{10} 9 \cong 0{,}95$.

6. [punti 5] Sia dato il sistema in retroazione di figura



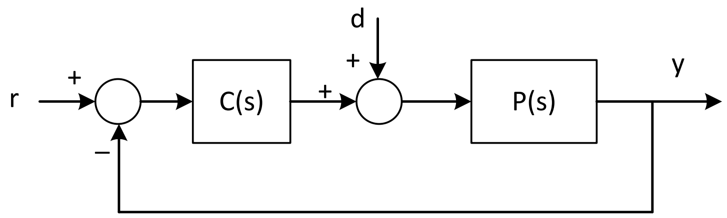
dove $P(s) = \dfrac{s+3}{s(s+2)^3}$.

a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K > 0$ determinando in particolare
   1. Asintoti del luogo.
   2. Eventuali radici doppie.
   3. Angoli di partenza del luogo.

b. Determinare i valori di $K \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Determinare inoltre le intersezioni del luogo delle radici dell'equazione caratteristica con l'asse immaginario del piano complesso.

c. Determinare il valore di K che massimizza il grado di stabilità del sistema retroazionato: $K^* = \arg\max_{K\in\mathbb{R}} G_S(K)$.

7. [punti 5] Si consideri il sistema di controllo di figura



dove $P(s) = \dfrac{10}{(s+2)^2}$. Progettare un controllore $C(s)$ di ordine minimo affinché si abbia

1) reiezione asintotica infinita di un disturbo costante all'ingresso dell'impianto controllato;

2) sovraelongazione $S = 0$ e tempo di assestamento $T_a \simeq 3$ sec. in risposta ad un gradino del riferimento (S e T_a da valutarsi in assenza di disturbo all'ingresso dell'impianto).

Con il controllore così progettato si determinino:

a) il margine di ampiezza M_A e quello di fase M_F del sistema retroazionato;

b) l'errore a regime e_∞ in risposta ad un gradino del riferimento.

8. [punti 4] Determinare la risposta forzata $y(k)$ all'ingresso $u(k) = 2 \cdot 1(k)$ di un sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento $H(z) = \dfrac{z^2+1}{(z+1)^2(2z+1)}$.

Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

2.

$$G(s) = -\frac{Z_f}{Z_i}, \quad Z_i = \frac{\frac{R_1}{s\,C_1}}{\frac{1}{s\,C_1} + R_1} = \frac{R_1}{1 + R_1\,C_1\,s}, \quad Z_f = \frac{R_2}{1 + R_2\,C_2\,s}$$

$$G(s) = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1 + R_1\,C_1\,s}{1 + R_2\,C_2\,s} = -\frac{R_1\,R_2\,C_1\,s + R_2}{R_1\,R_2\,C_2\,s + R_1}$$

Guadagno statico: $G(0) = -\frac{R_2}{R_1}$
Eq. Differenziale:

$$R_1\,R_2\,C_2\,Dy(t) + R_1 y(t) = -R_1\,R_2\,C_1\,Du(t) - R_2 u(t)$$

zeri: $-\frac{1}{R_1\,C_1}$, poli: $-\frac{1}{R_2\,C_2}$, modi: $\{e^{-\frac{t}{R_2 C_2}}\}$

3.
1° metodo :
Calcolo di $y(t)$ per $0 \le t < 1$:

$$u(t) = 1, \quad U(s) = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = G(s)U(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_3}{s+2};$$

$$k_1 = \left.\frac{4}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=0} = 2\,; \quad k_2 = \left.\frac{4}{s(s+2)}\right|_{s=-1} = -4\,; \quad k_3 = \left.\frac{4}{s(s+1)}\right|_{s=-2} = 2\,;$$

$$y(t) = 2 - 4e^{-t} + 2e^{-2t}$$

Calcolo di $y(t)$ per $t \ge 1$:

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

Considerato che $\rho = 2$ e $y \in \overline{C^{\rho-1,\infty}}(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad y \in \overline{C^{1,\infty}}(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(1-) = y(1+) \\ Dy(1-) = Dy(1+) \end{cases},$$

$$Dy(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t} \quad \text{per } t \ge 1\,; \qquad Dy(t) = 4e^{-t} - 4e^{-2t} \quad \text{per } 0 \le t < 1$$

$$\begin{cases} 2 - 4e^{-1} + 2e^{-2} = c_1 e^{-1} + c_2 e^{-2} \\ 4e^{-1} - 4e^{-2} = -c_1 e^{-1} - 2c_2 e^{-2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 4e - 4\,; \; c_2 = 2 - 2e^2\,;$$

$$y(t) = 4(e-1)\cdot e^{-t} + 2(1-e^2)\cdot e^{-2t}$$

2° metodo :

$$u(t) = 1(t) - 1(t-1), \quad U(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s}$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = G(s)U(s) = \frac{4}{(s+1)(s+2)}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s}\right]$$

$$Y(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+2)} - \frac{4}{s(s+1)(s+2)}e^{-s}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s(s+1)(s+2)}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s(s+1)(s+2)}e^{-s}\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s(s+1)(s+2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s} - \frac{4}{s+1} + \frac{2}{s+2}\right] = 2 - 4e^{-t} + 2e^{-2t} \quad \text{per } t \geq 0$$

Digressione: dal teorema di traslazione nel tempo

$$\mathcal{L}\left[f(t-t_0)\cdot 1(t-t_0)\right] = e^{-t_0 s}F(s)\ ; \quad F(s) := \mathcal{L}\left[f(t)\right]$$

$$\Rightarrow f(t-t_0)\cdot 1(t-t_0) = \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-t_0 s}F(s)\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s(s+1)(s+2)}e^{-s}\right] = \left[2 - 4e^{-(t-1)} + 2e^{-2(t-1)}\right]\cdot 1(t-1) \quad \text{per } t \geq 0$$

$$y(t) = 2 - 4e^{-t} + 2e^{-2t} - \left[2 - 4e^{-(t-1)} + 2e^{-2(t-1)}\right]\cdot 1(t-1)$$

da cui per $0 \leq t < 1$: $y(t) = 2 - 4e^{-t} + 2e^{-2t}$

e per $t \geq 1$: $y(t) = 2 - 4e^{-t} + 2e^{-2t} - \left[2 - 4e^{-(t-1)} + 2e^{-2(t-1)}\right] =$

$$= (-4 + 4e)e^{-t} + (2 - 2e^{2})e^{-2t}$$

4.

$$a_2 y(k) + a_1 y(k-1) + a_0 y(k-2) =$$
$$= b_2 u(k) + b_1 u(k-1) + b_0 u(k-2)$$

$$a_2 Y(z) + a_1 \{ z^{-1} Y(z) + y_{-1} \} + a_0 \{ z^{-2} Y(z) + y_{-2} + y_{-1} z^{-1} \} =$$
$$= b_2 U(z) + b_1 \{ z^{-1} U(z) + u_{-1} \} + b_0 \{ z^{-2} U(z) + u_{-2} + u_{-1} z^{-1} \}$$

$$a_2 z^2 Y + a_1 (z Y + y_{-1} z^2) + a_0 (Y + y_{-2} z^2 + y_{-1} z) =$$
$$= b_2 z^2 U + b_1 (z U + u_{-1} z^2) + b_0 (U + u_{-2} z^2 + u_{-1} z)$$

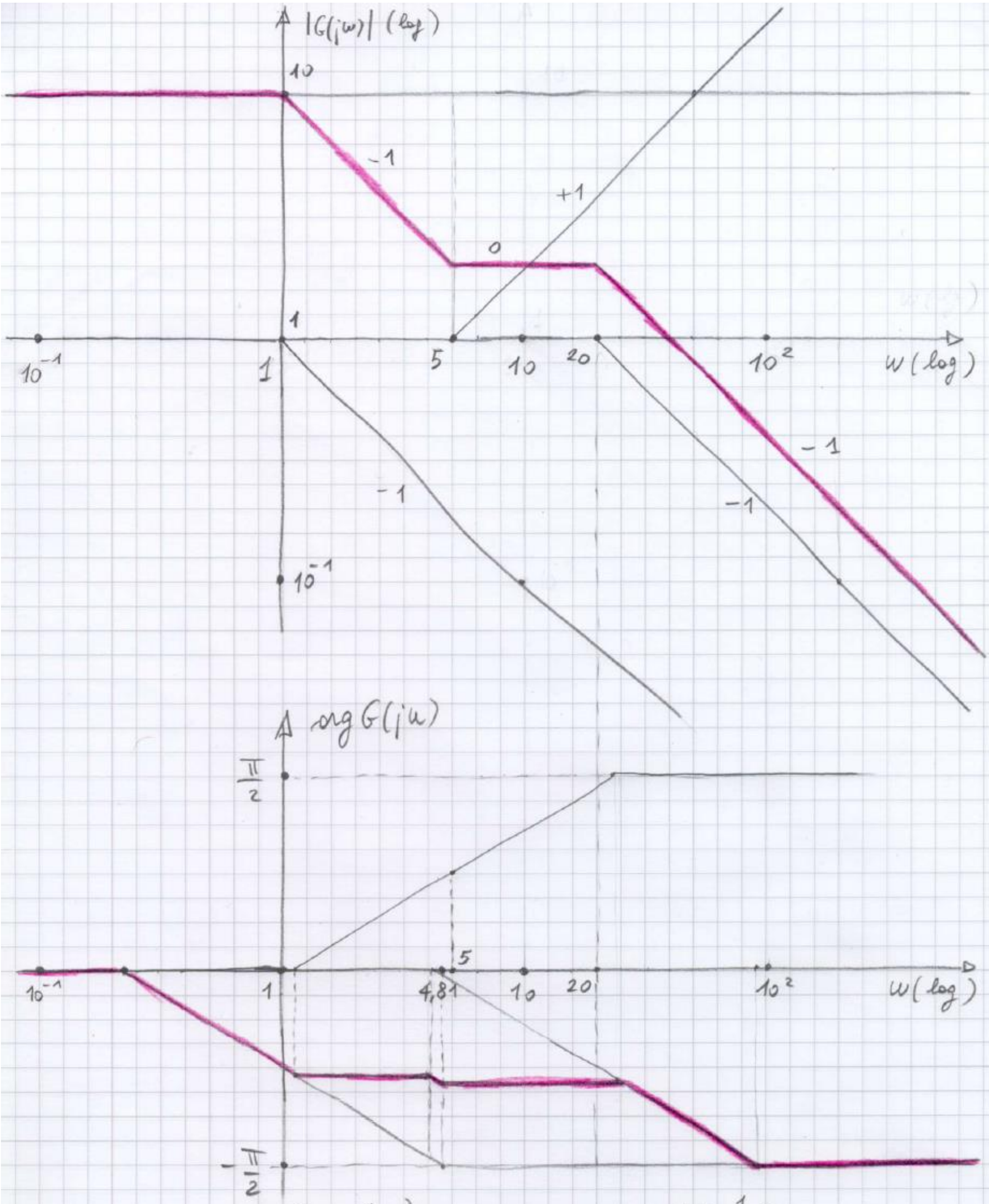
$$(a_2 z^2 + a_1 z + a_0) Y + a_1 y_{-1} z^2 + a_0 y_{-2} z^2 + a_0 y_{-1} z =$$
$$= (b_2 z^2 + b_1 z + b_0) U + b_1 u_{-1} z^2 + b_0 u_{-2} z^2 + b_0 u_{-1} z$$

$$Y = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0} U + \frac{C(z)}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}$$

$$C(z) \triangleq c_2 z^2 + c_1 z$$

$$c_2 \triangleq b_1 u_{-1} + b_0 u_{-2} - a_1 y_{-1} - a_0 y_{-2}$$
$$c_1 \triangleq b_0 u_{-1} - a_0 y_{-1}$$

5.



$$G(s) = 40\,\frac{5\left(1+\frac{1}{5}s\right)}{(1+s)\,20\left(1+\frac{1}{20}s\right)} = 10\,\frac{1+\frac{1}{5}s}{(1+s)\left(1+\frac{1}{20}s\right)}$$

$$G(j\omega) = 10\,\frac{1+\frac{1}{5}j\omega}{(1+j\omega)\left(1+\frac{1}{20}j\omega\right)}$$

6.

a) L'equazione caratteristica del sistema è data da $1 + L(s) = 0$ dove il guadagno di anello vale

$$L(s) = K\,\frac{s+3}{s\,(s+2)^3}$$

Il grado relativo è $\rho = 3$ e quindi avrò tre asintoti separati tra loro da angoli di 120° che si intersecano nel punto ∇_a che viene determinato nel modo seguente

$$\nabla_a = \frac{\sum_i p_i - \sum_i z_i}{\rho} = \frac{-2-2-2-0-(-3)}{3} = -1$$

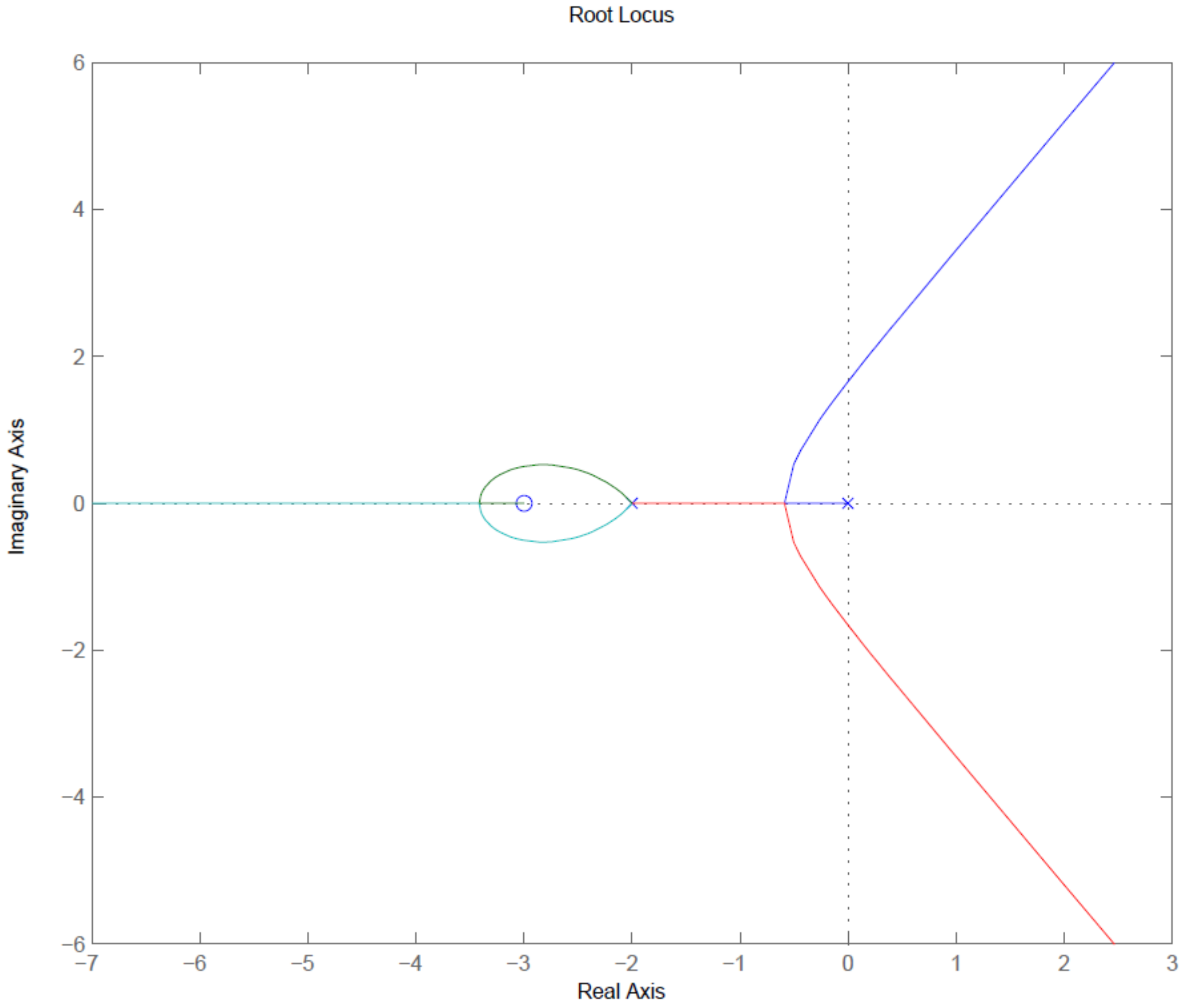
Si determinano le eventuali radici doppie come segue

$$\sum_i \frac{1}{s-p_i} - \sum_i \frac{1}{s-z_i} = \frac{1}{s} + \frac{3}{s+2} - \frac{1}{s+3} = 0$$

ottenendo l'equazione di secondo grado $s^2 + 4s + 2 = 0$ risolvendo la quale si ricava che le radici doppie sono in

$$s_1 = -0.5858 \qquad \text{e} \qquad s_2 = -3.4142$$

Per quanto riguarda gli angoli di partenza, è facile determinare che il polo nell'origine avrà angolo iniziale $\theta_1 = \pi$ mentre i tre poli in -2 avranno angoli di partenza $\theta_{1a} = 0$, $\theta_{1b} = \frac{2}{3}\pi$ e $\theta_{1b} = -\frac{2}{3}\pi$. Il luogo delle radici per $K > 0$ è quindi il seguente



b) L'equazione caratteristica è la seguente

$$1 + K\,\frac{s+3}{s\,(s+2)^3} = 0$$

dalla quale viene determinato il polinomio caratteristico

$$p_c(s;K) = s^4 + 6\,s^3 + 12\,s^2 + (8+K)\,s + 3\,K$$

Applichiamo il Criterio di Routh e costruiamo la seguente tabella

$$\begin{array}{c|cccc}
\mathbf{4} & 1 & 12 & 3\,K & 0 \\
\mathbf{3} & 6 & 8+K & 0 & 0 \\
\mathbf{2} & \text{64-K} & \text{18K} & 0 & \\
\mathbf{1} & f(K) & 0 & & \\
\mathbf{0} & 18\,K & 0 & &
\end{array}$$

dove $f(K) = -K^2 - 52\,K + 512$. Perchè il sistema sia asintoticamente stabile devono quindi valere le condizioni

$$\begin{cases} -K^2 - 52\,K + 512 > 0 \\ 18\,K > 0 \end{cases}$$

Risolvendo la disequazione di secondo grado si ottiene che $f(K) > 0$ per $-60.4674 < K < 8.4674$, per cui, tenendo conto della seconda condizione ricavata dalla tabella di Routh, possiamo dire che il sistema è asintoticamaente stabile se

$$K \in (0, 8.4674)$$

Per determinare le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario, annulliamo la riga **1** della tabella di Routh, ponendo $f(K) = 0$ ed abbiamo che la tabella di Routh presenta una singolarità completa per $K = 8.4674$. Ora determino le radici del polinomio ausiliario

$$a_2(s;K) = (64 - K)\,s^2 + 18\,K$$

per $K = 8.4674$ ed ottengo che le intersezioni del luogo con l'asse immaginario sono in

$$s_{1,2} = \pm 1.6567$$

c) Dal luogo delle radici si nota facilmente che il grado di stabilità G_s è massimo nella radice doppia in -0.5858. Risolvendo l'equazione caratteristica $1 + K^* G(s) = 0$ in $s = -0.5858$ si ha che

$$K^* = -\frac{1}{G(-0.5858)}$$

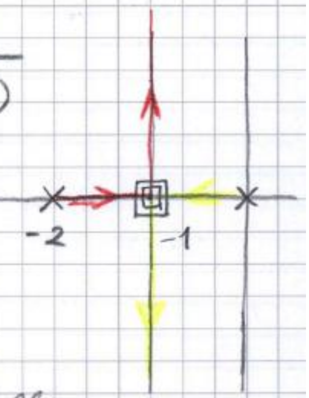
e si ottiene che il guadagno K^* che massimizza G_s vale

$$K^* = 0.6863$$

7.

$C(s) = K\,\dfrac{s+\alpha}{s}$; α determinato con cancellazione polo-zero

$\alpha = 2 \Rightarrow L(s) = C(s)P(s) = K\,\dfrac{10}{s(s+2)}$



eq. caratteristica : $1 + K\,\dfrac{10}{s(s+2)} = 0$

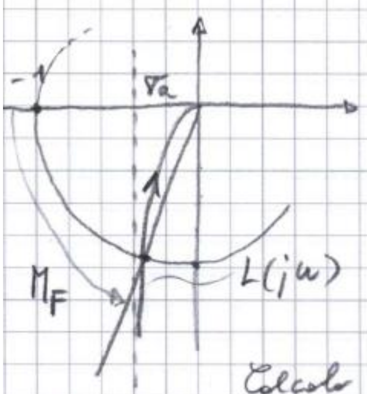
$T_a = \dfrac{3}{\sigma_s}$, $T_a = 3 \Leftrightarrow \sigma_s = 1$ rad/sec.

$\sigma_s = 1$ quando il valore di K corrisponde alla radice doppia -1 :

$$1 + K\,\frac{10}{(-1)\cdot(1)} = 0 \Rightarrow K = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$\boxed{C(s) = 0,1 \cdot \frac{s+2}{s}}$$

a) $L(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega(j\omega+2)} = \dfrac{0,5}{j\omega(1+0,5\,j\omega)}$



$M_A = +\infty$

$\sigma_a = 0,5\,(-0,5) = -0,25$

Calcolo approssimato di M_F : $0,25 = 1 \cdot \cos M_F$

$M_F = \arccos 0,25 = 75°,5$

Calcolo esatto di M_F : $|L(j\omega)| = 1 \Rightarrow \omega = \sqrt{-2+\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \omega = 0,4859$ rad/sec è la pulsazione critica

$M_F = 180° + \arg L(j0,4859) = 180° - 90° - \operatorname{arctg}\dfrac{0,4859}{2}$

$= 90° - 13°,66 = 76°,34$

b) $e_\infty = 0$ perché il sistema è di tipo 1.

Un approccio alternativo, più generale, per determinare il controllore è il seguente:

$$C(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s} \quad \text{(imposizione specifica 1)}$$

$T_a = 3$ sec. $\Rightarrow \sigma_s = 1$ rad./sec.
$S = 0$
} imposizione specifica 2

Quindi il polinomio caratteristico desiderato può essere descritto come

$$P_d(s) = (s+1)(s^2 + \alpha s + \beta)$$

radici $s_{1,2}$ del polinomio $s^2 + \alpha s + \beta$: $Re\, s_{1,2} < -1$

Sia $z = s+1$, $s = z-1$, $Re\, s < -1 \Leftrightarrow Re\, z < 0$

$$(z-1)^2 + \alpha(z-1) + \beta = 0$$

$$z^2 + (\alpha - 2) z + \beta - \alpha + 1 = 0$$

Quindi $\begin{cases} \alpha - 2 > 0 \\ \beta - \alpha + 1 > 0 \end{cases}$

$$P_d(s) = s^3 + (\alpha+1)s^2 + (\alpha+\beta)s + \beta$$

$$1 + \frac{b_1 s + b_0}{s} \cdot \frac{10}{(s+2)^2} = 0$$

$$s(s+2)^2 + 10 b_1 s + 10 b_0 = 0$$

$$P_c(s) = s^3 + 4s^2 + (4 + 10 b_1)s + 10 b_0$$

Si impone $P_d(s) \equiv P_c(s)$

$$\begin{cases} \alpha + 1 = 4 & \Rightarrow \alpha = 3 \quad \text{ok!} \quad \beta > 2 \\ \alpha + \beta = 4 + 10 b_1 & \beta = 1 + 10 b_1 \\ \beta = 10 b_0 & \beta = 10 b_0 \end{cases}$$

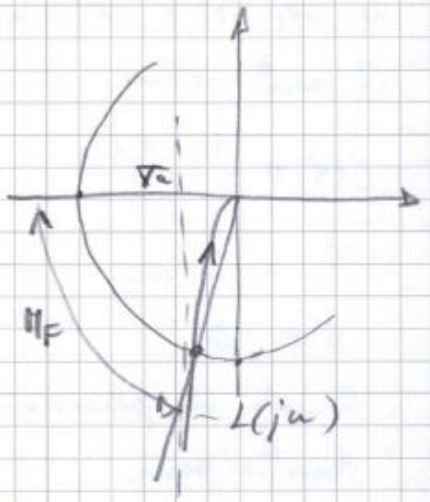
I poli non dominanti sono $-1.5 \pm \frac{1}{2}\sqrt{9 - 4\beta}$

Scegliamo β : $9 - 4\beta = 0$, $\beta = \frac{9}{4}$ ($\beta > 2$ ok!)

$b_0 = \frac{9}{40} = 0.225 \qquad b_1 = \frac{5}{40} = 0.125$

$$\boxed{C(s) = \frac{0.125 \cdot s + 0.225}{s}}$$

a) $L(s) = C(s)\,P(s) = \frac{9}{16}\cdot\frac{1+\frac{5}{9}s}{s\left(1+\frac{1}{2}s\right)^2}$



$L(j\omega) = \frac{9}{16}\cdot\frac{1+\frac{5}{9}j\omega}{j\omega\left(1+\frac{1}{2}j\omega\right)^2}$

$\sigma_a = \frac{9}{16}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\left(-\frac{5}{9}\right)\right) = -\frac{1}{4} = -0.25$

calcolo app. di M_F : $0{,}25 = 1\cdot\cos M_F$

$M_F \simeq \arccos 0.25 = 75^\circ{,}5$

$M_F = +\infty$

8.

6. $u(k) = 2 \cdot 1(k) \qquad U(z) = 2 \cdot \dfrac{z}{z-1}$

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{z^2+1}{(z+1)^2(2z+1)} \cdot \frac{2 \cdot z}{z-1}$$

$$= \frac{(z^2+1)\cdot \cancel{2} \cdot z}{(z+1)^2 \cdot \cancel{2}\left(z+\frac{1}{2}\right)\cdot(z-1)} = \frac{z\left(z^2+1\right)}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z-1)(z+1)^2}$$

$$\frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z-1)(z+1)^2} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z+\frac{1}{2}} + \frac{c_{31}}{(z+1)^2} + \frac{c_{32}}{z+1}$$

$$c_1 = \frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+1)^2}\Bigg|_{z=1} = \frac{\cancel{2}}{\frac{3}{2}\cdot 2^{\cancel{2}}} = \frac{1}{3}$$

$$c_2 = \frac{z^2+1}{(z-1)(z+1)^2}\Bigg|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}+1}{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{5}{\cancel{4}}}{-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}} = -5\cdot\frac{2}{3} = -\frac{10}{3}$$

$$c_{31} = \frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z-1)}\Bigg|_{z=-1} = \frac{2}{\left(-\frac{1}{2}\right)(-2)} = 2$$

$$c_1 + c_2 + c_{32} = 0 \qquad c_{32} = -c_1 - c_2 = -\frac{1}{3} + \frac{10}{3} = 3$$

$$Y(z) = \frac{1}{3}\cdot\frac{z}{z-1} - \frac{10}{3}\cdot\frac{z}{z+\frac{1}{2}} + 2\cdot\frac{z}{(z+1)^2} + 3\,\frac{z}{z+1}$$

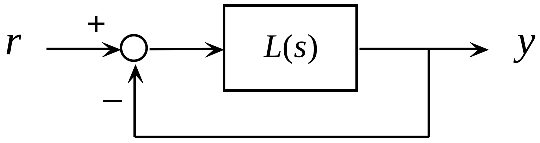
$$y(k) = \frac{1}{3} - \frac{10}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k + 2\cdot k\cdot(-1)^{k-1} + 3\cdot(-1)^k, \quad k \geqslant 0$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{10}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2\cdot k\cdot(-1)^k + 3\cdot(-1)^k, \quad k \geqslant 0$$

Parte A

1. [punti 6] Si presentino e si dimostrino le formule di inversione per la sintesi in frequenza delle reti correttrici. Si esponga inoltre come utilizzare tali formule per la sintesi della rete **anticipatrice** con imposizione del **margine di fase** M_F .

2. [punti 6] Sia dato il sistema retroazionato di figura dove $L(s) = \dfrac{(1-s)^2}{s(1+s)^2(s+4)}$.

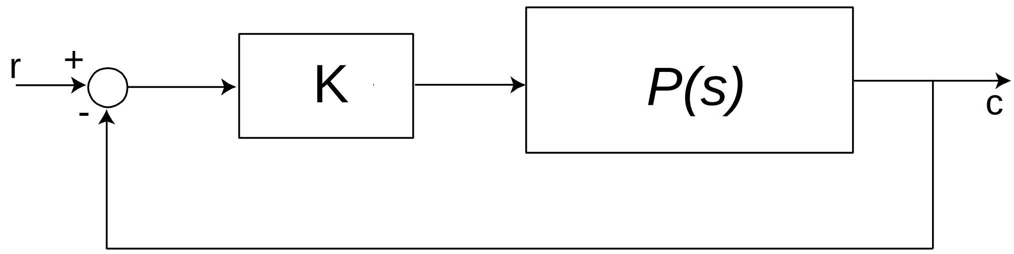


a. Tracciare il diagramma polare della risposta armonica $L(j\omega)$ determinando in particolare l'asintoto e l'intersezione del diagramma con l'asse reale negativo.
b. Utilizzando il criterio di Nyquist dimostrare che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
c. Determinare il margine di ampiezza M_A.

3. [punti 6] [**Trasformata zeta della convoluzione**] Siano $x(k)$, $y(k)$ due segnali a tempo discreto per i quali $x(k) = 0$, $y(k) = 0$ per $k < 0$. Si dimostri che la trasformata zeta della loro convoluzione eguaglia il prodotto delle loro trasformate: $\mathcal{Z}\left[x(k) * y(k)\right] = \mathcal{Z}\left[x(k)\right]\mathcal{Z}\left[y(k)\right]$.

Parte B

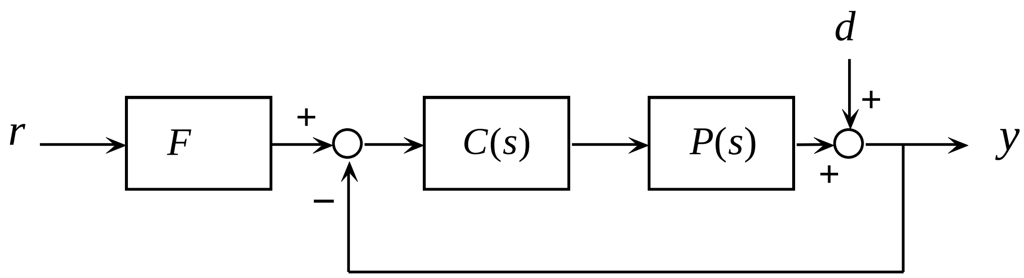
4. [punti 6] Sia dato il sistema retroazionato di figura



dove $P(s) = \dfrac{s\left(s^2+1\right)}{\left(s^2+4\right)\left(s+1\right)\left(s+2\right)}$

1. Determinare i valori di K per i quali è assicurata la stabilità asintotica del sistema retroazionato.
2. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica associata al sistema retroazionato per $K \in [0,+\infty)$. Si determini l'angolo di partenza dal polo *+2j* e l'angolo di arrivo sullo zero *+j*. Infine si determinino le eventuali intersezioni con l'asse immaginario $j\mathbb{R}$.

5. [punti 6] Sia dato lo schema di sistema di controllo di figura



dove $P(s) = \dfrac{4}{s+2}$. Determinare un controllore $C(s)$ di ordine minimo ed il blocco algebrico $F \in \mathbb{R}$ affinché il sistema di controllo soddisfi le seguenti specifiche:

1. reiezione infinita asintotica al disturbo sinusoidale $d(t) = 4\sin(3t)$,
2. sistema retroazionato con poli dominanti in $-2 \pm j$,
3. costante di posizione $K_p = 4$,
4. in condizioni nominali l'errore a regime in risposta ad un gradino del riferimento sia nullo.

6. [punti 6] Un sistema a tempo discreto, orientato dall'ingresso u all'uscita y, è descritto dalla seguente equazione alle differenze

$$y(k) - 8y(k+2) + 16y(k+4) = 16u(k+4) + 16u(k+1) \text{ .}$$

a) Determinare la funzione di trasferimento del sistema.
b) Verificare la stabilità asintotica del sistema applicando il criterio di Jury.

Tracce delle soluzioni

1. Vedi dispense del corso.

2.
a)

$$L(s) = \frac{1}{4} \cdot \frac{(1-s)^2}{s(1+s)^2\left(1+\frac{1}{4}s\right)}$$

$$L(j\omega) = \frac{1}{4} \cdot \frac{(1-j\omega)^2}{j\omega(1+j\omega)^2\left(1+\frac{1}{4}j\omega\right)}$$

$$\arg L(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 4\arctan\omega - \arctan\frac{\omega}{4}$$

ascissa dell'asintoto verticale: $\sigma_a = \frac{1}{4}\left(-1-1-1-1-\frac{1}{4}\right) = -\frac{17}{16} \cong -1,06$

Calcolo dell'intersezione con l'asse reale negativo:

$$\arg L(j\omega) = -\pi \Leftrightarrow 4\arctan\omega + \arctan\frac{\omega}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$1 - \frac{\omega}{4}\tan\left(4\arctan\omega\right) = 0$$

sviluppando questa equazione e definendo $x := \omega^2$ si ottiene

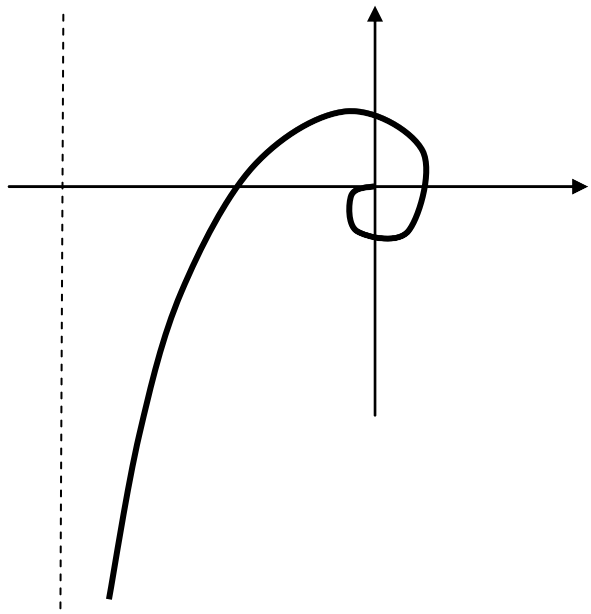
$2x^2 - 7x + 1 = 0$

$x_{1,2} = 0,1492 \quad 3,3508 \qquad \Rightarrow \quad \omega_1 = 0,3863 \quad \omega_2 = 1,8305$

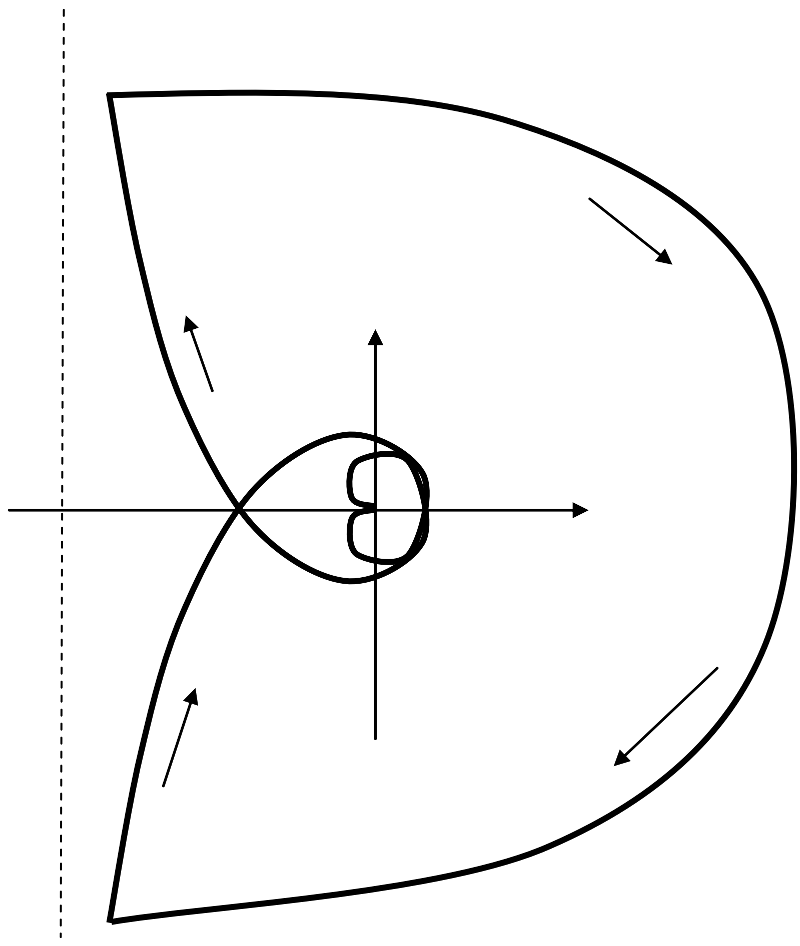
$\arg L(j\omega_1) = -3,1416 \qquad \arg L(j\omega_2) = -6,2832$

si scarta la seconda soluzione (che corrisponde all'intersezione del diagramma con l'asse reale positivo) e si ottiene:

$L(j\omega_1) = -0,6442$



b) Si traccia il diagramma polare completo:



Il guadagno di anello non ha poli a parte reale negativa ed il d.p.c. non tocca né circonda il punto critico – 1. Ne consegue, per il criterio di Nyquist, che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

c)

$$M_A = \frac{1}{|L(j\omega_1)|} = \frac{1}{0,6442} = 1,55$$

3.
Vedi appunti dell'insegnamento.

4.
L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + k\frac{s\left(s^2+1\right)}{\left(s^2+4\right)(s+1)(s+2)} = 0$$

$$s^4 + (3+k)s^3 + 6s^2 + (12+k)s + 8 = 0$$

I valori di k per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile sono quelli che che garantiscono la positività della prima colonna della tabella di Routh associata all'equazione caratteristica.

4	1	6	8
3	3+k	12+k	0
2	α(k)	24+8k	0
1	β(k)	0	
0	24+8k		

$$\alpha\left(k\right) = 6\left(3+k\right) - 12 - k = 5k + 6$$
$$\beta\left(k\right) = \left(5k+6\right)\left(12+k\right) - \left(3+k\right)\left(24+8k\right) = -3k^2 + 18k$$

Il sistema di disequazioni risultante ha come soluzione $0 < k < 6$.

2) Si osservi innanzitutto che si ha la seguente configurazione di poli e zeri:

- uno zero per $s = 0$ con molteplicità 1
- uno zero per $s = +j$ con molteplicità 1
- uno zero per $s = -j$ con molteplicità 1
- uno polo per $s = -1$ con molteplicità 1
- uno polo per $s = -2$ con molteplicità 1
- uno polo per $s = -2j$ con molteplicità 1
- uno polo per $s = +2j$ con molteplicità 1

Essendo $n-m=1$ il luogo presenta un asintoto.

Tenendo conto delle seguenti osservazioni (luogo diretto):

- un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zeri e di poli.
- il luogo delle radici ha 4 rami.
- Angolo di partenza del luogo dal polo +2j:

  $$\{\text{angolo di p. da } p_i\} = \pi + \sum_{j=1}^{m} \arg(p_i - z_j) - \sum_{j \neq i} \arg(p_i - p_j)$$

  $$\{\text{angolo di p. dal polo +2j}\} = \pi + \left[\arg(2j) + \arg(2j+j) + \arg(2j-j)\right] +$$

  $$-\left[\arg(2j+2j) + \arg(2j+1) + \arg(2j+2)\right] =$$

  $$\pi + \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} + arctg(2) + arctg(1)\right) = -108.43°$$

- Angolo di arrivo del luogo sullo zero 2j:

  $$\{\text{angolo di a. su } z_i\} = \pi + \sum_{j=1}^{n} \arg(z_i - p_j) - \sum_{j \neq i} \arg(z_i - z_j)$$

  $$\{\text{angolo di a. sullo zero +j}\} = \pi + \left[\arg(j+2j) + \arg(j-2j) + \arg(j+1) + \arg(j+2)\right] +$$

  $$-\left[\arg(j+j) + \arg(j)\right] =$$

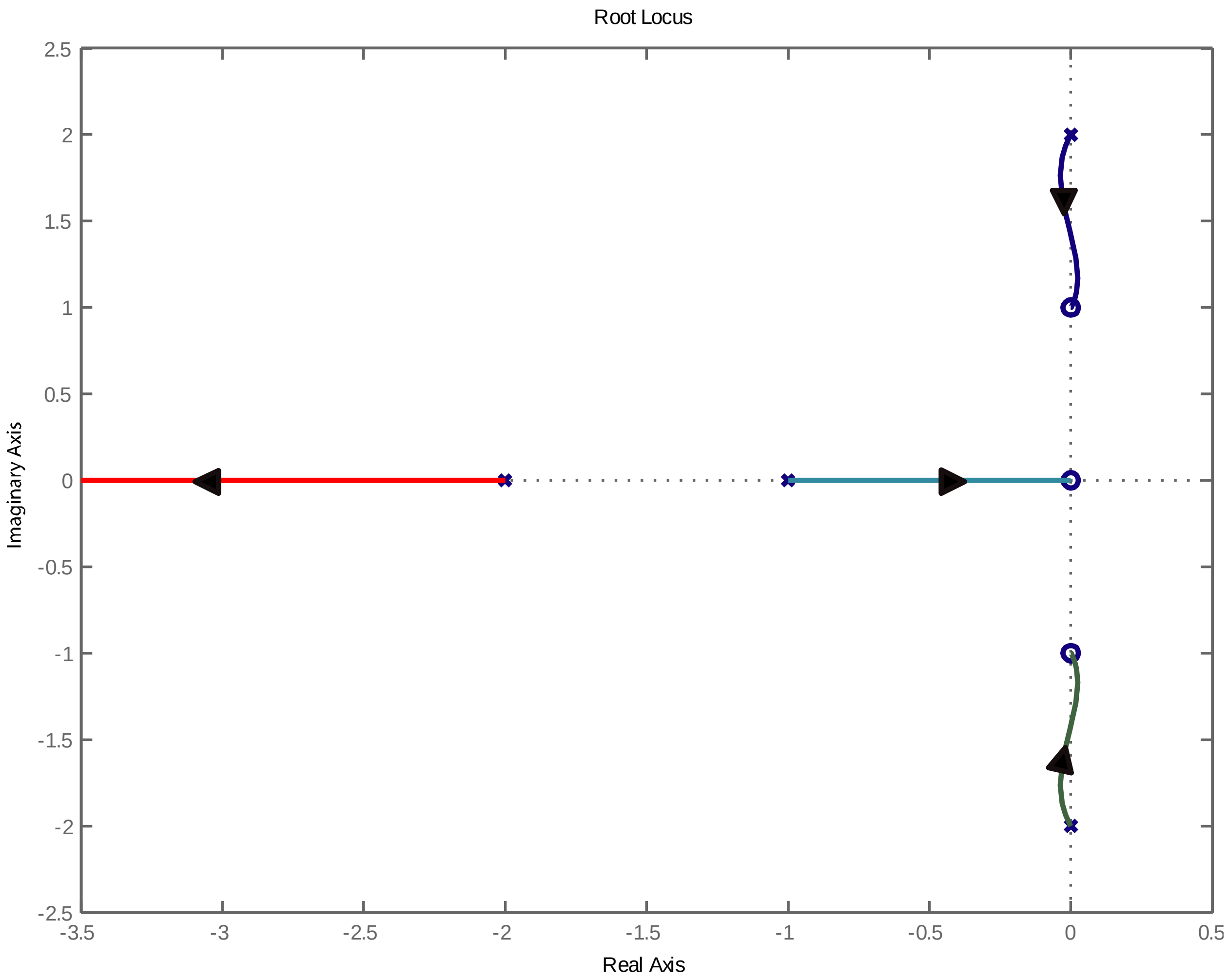
  $$\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + arctg(1) + arctg(1/2)\right) - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 71.56°$$

- Intersezioni del luogo con l'asse immaginario
  Le intersezioni del luogo con l'asse immaginario si possono ottenere come soluzioni dell'equazione ausiliaria associata alla tabella di Routh in 1) per k=6:

  $$(5 \cdot 6 + 6)s^2 + 24 + 8 \cdot 6 = 0$$

  $$36s^2 + 72 = 0 \quad \rightarrow \quad s = \pm j\sqrt{2} = \pm\, j1.41$$

si può dedurre che il luogo delle radici per $K_1 > 0$ ha l'andamento riportato in figura:


Root Locus
Imaginary Axis
Real Axis
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3.5
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5

5.

(3) Il controllore di ordine minimo può avere la struttura.

$$C(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + 9}$$

$$L(s) = C(s)\,P(s) = \frac{4\,(b_2 s^2 + b_1 s + b_0)}{(s^2+9)(s+2)}$$

$$K_p = \frac{4\,b_0}{9 \cdot 2} = 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b_0 = 18}$$

$$1 + L(s) = 0 \qquad 1 + \frac{4\,(b_2 s^2 + b_1 s + 18)}{s^3 + 2s^2 + 9s + 18} = 0$$

$$s^3 + 2s^2 + 9s + 18 + 4 b_2 s^2 + 4 b_1 s + 72 = 0$$

$$s^3 + (2 + 4b_2)\,s^2 + (9 + 4b_1)\,s + 90 = 0$$

$$\boxed{P_c(s) = s^3 + (2 + 4b_2)\,s^2 + (9 + 4b_1)\,s + 90}$$

Il polinomio caratteristico desiderato è

$$P_d(s) = (s + 2 - j)(s + 2 + j)(s + c)$$

dove $c >> 2$

$$P_d(s) = \left[(s+2)^2+1\right](s+c) =$$

$$= (s^2+4s+5)(s+c) =$$

$$= s^3+4s^2+5s +$$

$$+cs^2+4cs+5c =$$

$$\boxed{P_d(s) = s^3+(4+c)s^2+(5+4c)s+5c}$$

Imponiamo

$$P_d(s) \equiv P_C(s)$$

$$\begin{cases} 2+4b_2 = 4+c \\ 9+4b_1 = 5+4c \\ 90 = 5c \end{cases}$$

È un sistema di tre eq. lineari in tre incognite.

$$\boxed{c = 18}$$

$$4b_2 = 20 \Rightarrow \boxed{b_2 = 5}$$

$$4b_1 = -4+72 = 68 \Rightarrow \boxed{b_1 = 17}$$

$$c >> 2$$

$$\boxed{C(s) = \frac{5s^2+17s+18}{s^2+9}}$$

$$C(s) = 5\,\frac{(s+1{,}7+j0{,}8426)(s+1{,}7-j0{,}8426)}{(s+3j)(s-3j)}$$

Calcolo di F :

$$T_{ry}(s) = F \cdot \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

Imponiamo $T_{ry}(0) = 1$

$$F\,\frac{L(0)}{1+L(0)} = 1 \quad ; \quad K_p = L(0) = 4$$

$$F\,\frac{4}{1+4} = 1 \Rightarrow \boxed{F = \frac{5}{4} = 1{,}25}$$

6.

La differenza massima fra gli argomenti della funzione $y(\cdot)$ è 4.
Quindi l'ordine del sistema è $n = 4$.
Si effettua la sostituzione $(k-4) \rightarrow k$:

$$y(k-4) - 8y(k-4+2) + 16y(k-4+4) = 16u(k-4+4) + 16u(k-4+1)$$

$$16y(k) - 8y(k-2) + y(k-4) = 16u(k) + 16u(k-3)$$

La funzione di trasferimento è

$$H(z) = \frac{16z^4 + 16z}{16z^4 - 8z^2 + 1} \triangleq \frac{b(z)}{a(z)}$$

Per un sistema del 4° ordine il criterio di Jury afferma:
Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia asintoticamente stabile è che le seguenti disuguaglianze siano soddisfatte:

1) $a(1) > 0$: $16 - 8 + 1 = 9 > 0$ ok!
2) $(-1)^4 a(-1) > 0$: $16 - 8 + 1 = 9 > 0$ ok!
3) $|a_0| < a_4$: $1 < 16$ ok!
4) $|b_0| > |b_3|$: $255 > 0$ ok!
5) $|c_0| > |c_2|$: $255^2 > 255 \cdot 120$ ok!

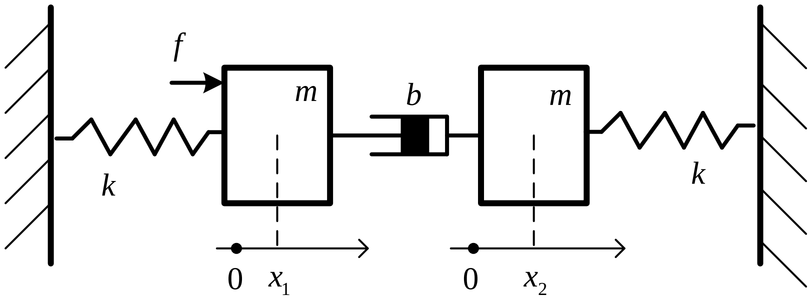
Tabella di Jury

1	1	0	-8	0	16
2	16	0	-8	0	1
3	-255	0	120	0	
4	0	120	0	-255	
5	255^2	0	$-255 \cdot 120$		

Parte A

1. [punti 4,5] Enunciare il Criterio di Nyquist (sia il caso generale che quello particolare) avendo cura di definire i concetti e le premesse teoriche sui quali si basa. Riportare inoltre una dimostrazione di tale criterio.

2. [punti 4,5] Sia assegnato il sistema meccanico vibrante di figura



caratterizzato da due molle di costante elastica k e due corpi di massa m accoppiati da uno smorzatore viscoso di coefficiente b . Il corpo di sinistra sia soggetto ad una forza f e le posizioni delle due masse siano descritte dalle variabili x_1 e x_2 (quando il sistema è in quiete $x_1 = x_2 = 0$).

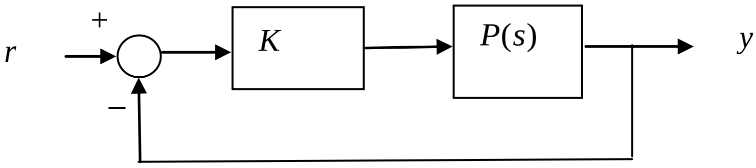
a) Determinare le equazioni differenziali che descrivono il moto delle due masse.
b) Determinare la funzione di trasferimento del sistema orientato dall'ingresso f all'uscita x_1 .

3. [punti 5] Determinare l'evoluzione forzata $y(t)$ in risposta alla rampa $u(t) = 2t \cdot 1(t)$ di un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{1}{(s+2)^3 (s+1)}$. Determinare inoltre il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$.

4. [punti 4] Dedurre, riportando i passaggi algebrici necessari, le trasformate zeta delle funzioni armoniche $\sin(\omega k)$, $\cos(\omega k)$, $\left(k \in \mathbb{Z},\ \omega > 0\right)$, $\mathcal{Z}\left[\sin(\omega k)\right]$ e $\mathcal{Z}\left[\cos(\omega k)\right]$.

Parte B

5. [punti 4,5] Sia dato il seguente sistema retroazionato

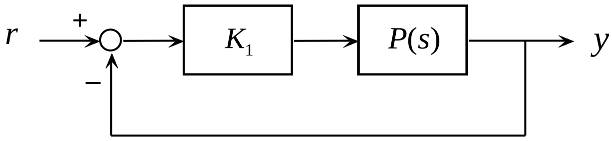


dove $K = 10$ e $P(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$.

a. Determinare il guadagno di anello del sistema retroazionato e tracciarne il diagramma polare. Calcolare in particolare l'intersezione del diagramma con l'asse reale negativo e la corrispondente pulsazione ω_p (pulsazione di fase pi greco).

b. Studiare la stabilità del sistema retroazionato applicando il Criterio di Nyquist. Determinare il margine di ampiezza (M_A) ed il margine di fase (M_F).

6. [punti 4,5] Sia dato il sistema in retroazione di figura



dove $P(s) = \dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}$.

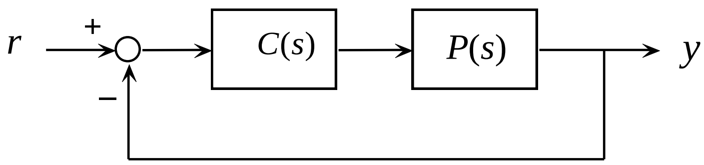
a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K_1 > 0$ e $K_1 < 0$ determinando gli asintoti e le eventuali radici doppie.

b. Determinare i valori di $K_1 \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

c. Determinare i valori di $K_1 \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema retroazionato ha grado di stabilità $G_s \geq 0{,}2\ \mathrm{s}^{-1}$.

d. Determinare il valore di K_1 che massimizza il grado di stabilità del sistema retroazionato: $K_1^* = \arg\max_{K_1 \in \mathbb{R}} G_s(K_1)$.

7. [punti 4,5] Sia dato il sistema in retroazione di figura dove $P(s) = \dfrac{1}{s^3}$.



1. Progettare un controllore $C(s)$ di ordine due affinché i poli del sistema retroazionato siano posti in $-1, -2, -4, -5, -6$.

2. Con il controllore progettato al punto **1,** si applichi un gradino $r(t) = 3 \cdot 1(t)$ al sistema retroazionato e si determini una stima del tempo di assestamento T_a e l'errore di regolazione a regime e_r . $\left[e_r := \lim_{t \to +\infty} r(t) - y(t) \right]$

8. [punti 4,5] Determinare l'equazione alle differenze di un sistema a tempo discreto la cui risposta all'impulso è nota come

$$h(k) = 8 \cdot 1(k-1) - \frac{5}{2}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \cdot 1(k-1) - 7\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot 1(k-1), \quad k \geq 0 \ .$$

Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso

2.
a) Dall'equazione della dinamica otteniamo

$$\begin{cases} mD^2 x_1 = f - kx_1 + b(Dx_2 - Dx_1) \\ mD^2 x_2 = -b(Dx_2 - Dx_1) - kx_2 \end{cases}$$

b) Dalle equazioni precedenti trasformando secondo Laplace con condizioni iniziali tutte nulle otteniamo:

$$\begin{cases} ms^2 X_1 = F - kX_1 + b(sX_2 - sX_1) \\ ms^2 X_2 = -b(sX_2 - sX_1) - kX_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ms^2 X_1 = F - kX_1 + b(sX_2 - sX_1) \\ (ms^2 + bs + k)X_2 = bsX_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2 = \dfrac{bsX_1}{(ms^2 + bs + k)} \\ (ms^2 + bs + k)X_1 = F + bsX_2 \end{cases}$$

$$(ms^2 + bs + k)X_1 = F + bs\frac{bsX_1}{(ms^2 + bs + k)}$$

$$G(s) := \frac{X_1}{F} = \frac{ms^2 + bs + k}{(ms^2 + bs + k)^2 - b^2 s^2} =$$

$$= \frac{ms^2 + bs + k}{m^2 s^4 + 2mbs^3 + 2mks^2 + 2bks + k^2}$$

3.

$$U(s) = \mathcal{L}[2t \cdot 1(t)] = \frac{2}{s^2}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2}{s^2(s+2)^3(s+1)}$$

$$Y(s) = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_{21}}{(s+2)^3} + \frac{K_{22}}{(s+2)^2} + \frac{K_{23}}{s+2} + \frac{K_3}{s+1}$$

$$K_{11} = \left.\frac{2}{(s+2)^3(s+1)}\right|_{s=0} = \frac{1}{4}$$

$$K_{21} = \left.\frac{2}{s^2(s+1)}\right|_{s=-2} = -\frac{1}{2} \qquad K_3 = \left.\frac{2}{s^2(s+2)^3}\right|_{s=-1} = 2$$

$$K_{12} = D\left[\frac{2}{(s+2)^3(s+1)}\right]_{s=0} = -\frac{5}{8}$$

$$K_{22} = D\left[\frac{2}{s^2(s+1)}\right]_{s=-2} = -1$$

$$K_{12} + K_{23} + K_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad K_{23} = -\frac{11}{8}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{4}t - \frac{5}{8} - \frac{1}{4}t^2 e^{-2t} - t e^{-2t} - \frac{11}{8}e^{-2t} + 2e^{-t}$$

per $t > 0$

Si noti che $u(t) \in \overline{C^{0,\infty}}$ ed il grado relativo di $G(s)$ è $\rho = 4$. Dalla nota proprietà

$$u(t) \in \overline{C^{0,\infty}} \Leftrightarrow y(t) \in \overline{C^{4,\infty}}$$

Quindi il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$ è 4.

4.

Vedi appunti delle lezioni.

5.

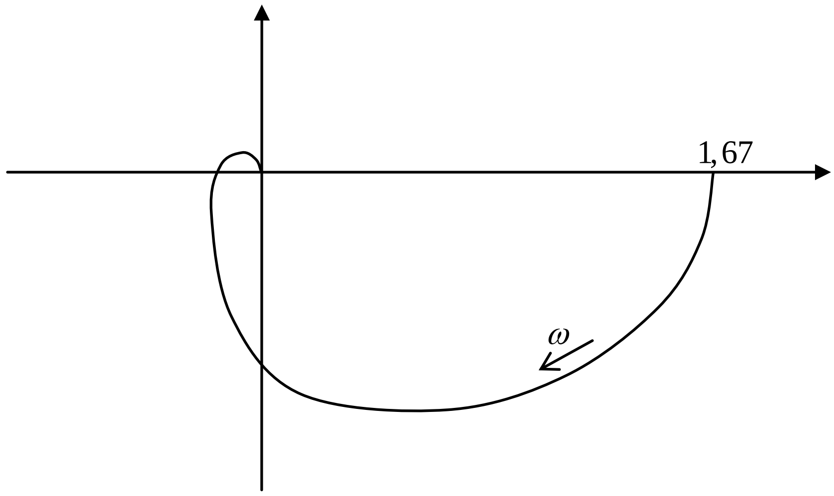
a.

$$L(s)=\frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)};\quad L(j\omega)=\frac{10}{(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)}$$

$$\left|L(j\omega)\right|=\frac{10}{\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{4+\omega^2}\sqrt{9+\omega^2}}$$

$$\arg L(j\omega)=-\arctan\omega-\arctan\frac{\omega}{2}-\arctan\frac{\omega}{3}$$

Si osservi che $L(j0)=\frac{5}{3}\cong 1,67$ e $\lim_{\omega\to+\infty}\left|L(j\omega)\right|=0$, $\lim_{\omega\to+\infty}\arg L(j\omega)=-3\frac{\pi}{2}$. Il modulo e l'argomento della risposta armonica sono funzioni monotone decrescenti. Un tracciamento qualitativo del diagramma polare è dunque il seguente:



Per determinare l'intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo si risolva l'equazione $\arg L(j\omega_p)=-\pi$:

$$\arctan\frac{\omega_p}{2}+\arctan\frac{\omega_p}{3}=\pi-\arctan\omega_p$$

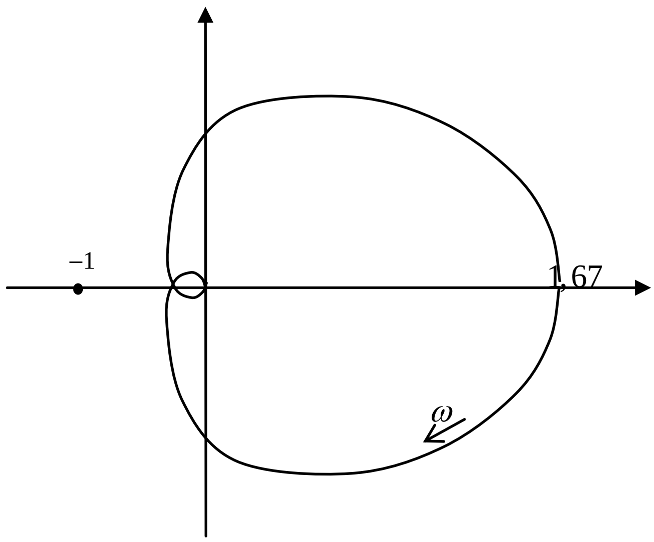
Applicando la funzione tangente ad ambo i membri dell'equazione si ottiene $\omega_p^2-11=0$ da cui $\omega_p=\sqrt{11}\cong 3,32$ rad/s.

$$\left|L(j\omega_p)\right|=\frac{10}{\sqrt{12}\sqrt{15}\sqrt{20}}=\frac{1}{6}$$

L'intersezione avviene quindi in $-\frac{1}{6}$. $\left(L(j\omega_p)=-\frac{1}{6}\right)$.

b.

Tracciamento del diagramma polare completo:



Il guadagno di anello non ha poli a parte reale positiva e il diagramma polare completo non circonda il punto critico -1. Per il Criterio di Nyquist il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Il margine di ampiezza è $M_A = \dfrac{1}{\frac{1}{6}} = 6$.

Calcolo del margine di fase:

$$|L(j\omega_c)| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{100}{(1+\omega_c^2)(4+\omega_c^2)(9+\omega_c^2)} = 1$$

$$x := \omega_c^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{100}{(1+x)(4+x)(9+x)} = 1$$

$\Rightarrow x = 1$ (soluzione dedotta per ispezione diretta dell'equazione;

in alternativa soluzione approssimata con metodo iterativo).

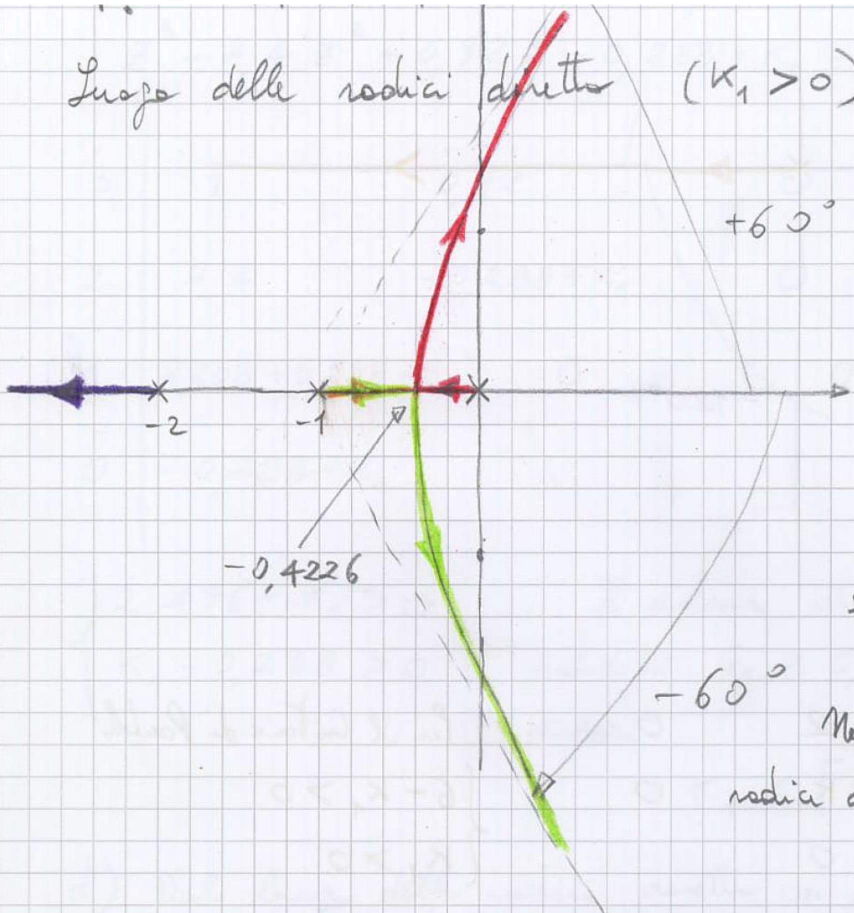
$\Rightarrow \omega_c \;\; = 1$ rad/s

$$\arg L(j\omega_c) = -\arctan 1 - \arctan\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{3} = -\frac{\pi}{2}$$

$$M_F = 180^0 + \arg L(j\omega_c) = 90^0$$

6.

Luogo delle radici diretto $(K_1 > 0)$



$$\sigma_a = \frac{0-1-2}{3} = -1$$

Calcolo radici doppie:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} = 0$$

$$3s^2 + 6s + 2 = 0$$

$$s_{1,2} = \begin{cases} -1,5774 \\ -0,4226 \end{cases}$$

Nel luogo diretto l'unica radice doppia è $-0,4226$

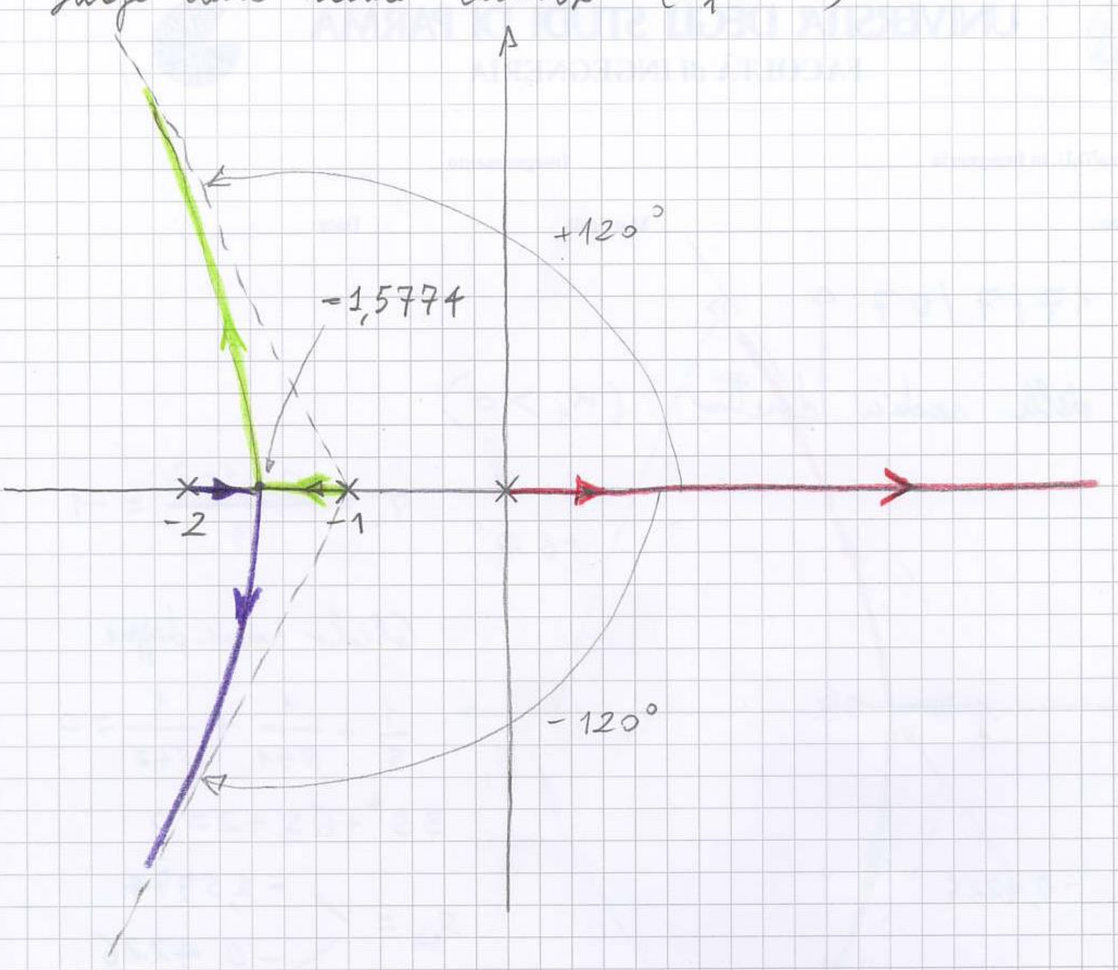
Eq. caratteristica $\quad 1 + K_1 P(s) = 0$

$$1 + K_1 \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

$$(s^2+s)(s+2) + K_1 = 0$$

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K_1 = 0$$

Luogo delle radici inverso ($K_1 < 0$)



b)

3	1	2	0
2	3	K_1	0
1	$6-K_1$	0	
0	K_1		

Per il Criterio di Routh

$$\begin{cases} 6-K_1 > 0 \\ K_1 > 0 \end{cases}$$

Il sistema retroazionato è asint. stabile per tutti e soli valori

$$K_1 \in (0, 6)$$

c) Cambio di variabile complessa $z = s + 0{,}2$

$Re\ z < 0 \iff Re\ s < -0{,}2$

$s = z - 0{,}2$

$$(z-0{,}2)^3 + 3(z-0{,}2)^2 + 2(z-0{,}2) + K_1 = 0$$

$$z^3 + 2{,}4z^2 + 0{,}92z - 0{,}288 + K_1 = 0$$

3	1	$0{,}92$	0
2	$2{,}4$	$-0{,}288+K_1$	0
1	$2{,}208+0{,}288-K_1$	0	0
0	$-0{,}288+K_1$		

$$\begin{cases} 2{,}496 - K_1 > 0 \\ K_1 - 0{,}288 > 0 \end{cases}$$

Il sistema retroazionato ha grado di stabilità $G_S \geq 0{,}2$ per tutti e soli valori

$$K_1 \in [0{,}288\ ,\ 2{,}496]$$

d) Dal luogo delle radici diretto si evince che per il valore ottimo K_1^* l'eq. caratteristica ha fra le sue radici, la radice doppia $-0{,}4226$. Quindi

$$K_1^* = -s(s+1)(s+2)\Big|_{s=-0{,}4226} \cong 1{,}456$$

Attenzione: il valore corretto di K_1^* è 0,3849

7.

$$P(s) = \frac{1}{s^3}$$

$$C(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$1 + CP = 0 \qquad 1 + \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3(s^2 + a_1 s + a_0)} = 0$$

$$s^3(s^2 + a_1 s + a_0) + b_2 s^2 + b_1 s + b_0 = 0$$

$$s^5 + a_1 s^4 + a_0 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0 = 0$$

$$P_c(s) \triangleq s^5 + a_1 s^4 + a_0 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0$$

poli ut. desiderati : $-1, -2, -4, -5, -6$

$$P_d(s) = (s+1)(s+2)(s+4)(s+5)(s+6)$$
$$= (s^2+3s+2)(s^2+9s+20)(s+6)$$
$$= (s^4 + 9s^3 + 20s^2 + 3s^3 + 27s^2 + 60s$$
$$+ 2s^2 + 18s + 40)(s+6) =$$
$$= (s^4 + 12s^3 + 49s^2 + 78s + 40)(s+6) =$$
$$= s^5 + 12s^4 + 49s^3 + 78s^2 + 40s +$$
$$+ 6s^4 + 72s^3 + 294s^2 + 468s + 240 =$$
$$= s^5 + 18s^4 + 121s^3 + 372s^2 + 508s + 240$$

ok!

da $P_d(s) \equiv P_c(s) \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 18, & a_0 = 121 \\ b_2 = 372, \; b_1 = 508, & b_0 = 240 \end{cases}$

$$C(s) = \frac{372 s^2 + 508 s + 240}{s^2 + 18 s + 121}$$

OK!

1. Si applichi un gradino $r(t) = 3 \cdot 1(t)$ al sistema retroazionato e si determini l'errore a regime e_r $\left[e_r := \lim_{t \to \infty} \left(r(t) - y(t) \right) \right]$ ed ~~[illegible]~~ una stima del tempo di assestamento

$$e_r = 0 \quad \text{perché è un sistema di tipo 3}$$

$$T_a \simeq \frac{3}{G_s} = \frac{3}{1} \simeq 3 \text{ sec.}$$

8.

Si applica la trasformata zeta alla risposta all'impulso $h(k)$

$$H(z) = \mathcal{Z}\left[h(k) \right] = \frac{8}{z-1} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2} - 7 \cdot \frac{1}{z - \frac{1}{2}}$$

$H(z)$ è la funzione di trasferimento del sistema anche esprimibile come

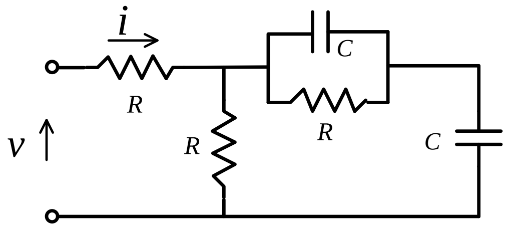
$$H(z) = \frac{z^2 + 1}{(z-1)\left(z - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{z^2 + 1}{z^3 - 2z^2 + \frac{5}{4} z - \frac{1}{4}}.$$

Da quest'ultima espressione si ricava l'eq. alle differenze:

$$\boxed{y(k) - 2y(k-1) + \frac{5}{4} y(k-2) - \frac{1}{4} y(k-3) = u(k-1) + u(k-3)}$$

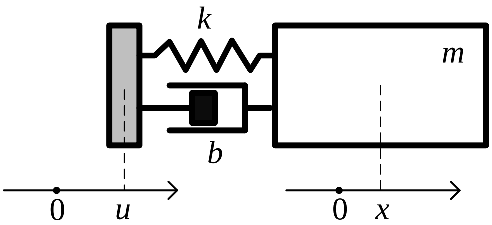
Parte A

1. [punti 7] La rete elettrica di figura definisca un sistema dinamico orientato dalla tensione v (ingresso) alla corrente i (uscita).



Di tale sistema si determini (per semplicità si definisce $T := RC$):
1) la funzione di trasferimento, 2) gli zeri, 3) i modi, 4) l'equazione differenziale.

2. [punti 5] Una parte meccanica di massa m che si muove su di una guida lineare orizzontale è attuata da un azionamento lineare programmabile che può imporre una posizione desiderata u (vedi figura sotto). Ipotizzando che il collegamento fra azionamento e massa sia descritto da una molla di costante elastica k e da un ammortizzatore di costante viscosa b **si determini l'equazione differenziale e la funzione di trasferimento** del sistema orientato da u (ingresso) ad x (uscita, posizione della massa m). Si ipotizza che in condizioni di quiete del dispositivo si abbia $u = 0$ e $x = 0$. **Si determini inoltre una condizione sui parametri** per la quale non si abbiano modi armonici del sistema.



3. [punti 6]
Si consideri un sistema dinamico orientato da u (ingresso) ad y (uscita) e descritto dall'equazione differenziale $\sum_{i=0}^{n} a_i D^i y(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i D^i u(t)$. Sia $(u, y) \in \mathcal{B}^*$ con $u(t) = 0,\ y(t) = 0\ \forall t < 0$. Si dimostri che

1. $(D^* u, D^* y) \in \mathcal{B}^*$
2. $\left(\int_{0-}^{t} u(v)dv, \int_{0-}^{t} y(v)dv \right) \in \mathcal{B}^*$

Parte B

4. [punti 6] Dato un sistema dinamico con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad \omega_n > 0,\ \delta \in (0,1)$$

sia nota la risposta al gradino unitario

$$g_s(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta\omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} \cdot t + \varphi\right),\ \varphi := \arccos(\delta)\ .$$

Dedurre la formula che esprime la sovraelongazione S in funzione del coefficiente di smorzamento del sistema.

5. [punti 7] Dato un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \frac{1}{s(s+1)[(s+1)^2+1]}$ determinare la risposta forzata $y(t)$, $t \geq 0$ al segnale di ingresso $u(t) = 1(t) + t \cdot 1(t)$. Determinare inoltre il grado massimo di continuità di tale risposta.

6. [punti 5] Dato un sistema dinamico con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{(s+10)[(s+1)^2+4.1]}{(s+4)^3[(s+2)^2+4][(s+1)^2+4]}$$

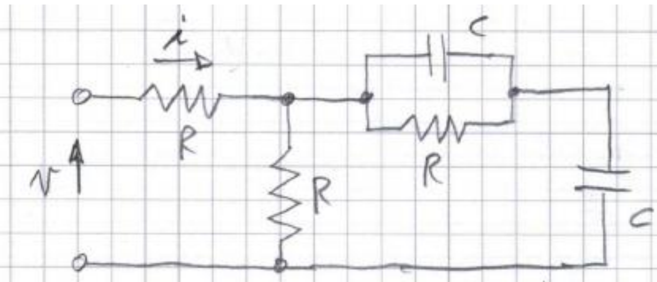
determinare:

1) i modi del sistema;

2) Sovraelongazione S, tempo di assestamento T_a, tempo di salita T_s in risposta (forzata) ad un gradino dell'ingresso (fare un calcolo approssimato utilizzando il concetto di poli dominanti).

Tracce delle soluzioni

1.



$v \equiv$ tensione

$i \equiv$ corrente

$$V(s) = Z_{tot} \cdot I(s)$$

$$I(s) = \frac{1}{Z_{tot}} \cdot V(s)$$

$$Z_{tot} = R + \frac{R \cdot \left(\frac{1}{Cs} + \frac{R \cdot \frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} \right)}{R + \frac{1}{Cs} + \frac{R \cdot \frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}}}$$

$$T := RC$$

Quindi $$Z_{tot}(s) = R \cdot \frac{R^2C^2s^2 + 5RCs + 2}{R^2C^2s^2 + 3RCs + 1} = R \cdot \frac{T^2s^2 + 5Ts + 2}{T^2s^2 + 3Ts + 1}$$

La funzione di trasferimento è $G(s) := \frac{1}{Z_{tot}(s)}$

$$G(s) = \frac{T^2s^2 + 3Ts + 1}{R(T^2s^2 + 5Ts + 2)}$$

zeri : $T^2s^2 + 3Ts + 1 = 0 \Rightarrow z_1 = -\frac{3+\sqrt{5}}{2T}, \; z_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2T}$

poli : $T^2s^2 + 5Ts + 2 = 0 \Rightarrow p_1 = -\frac{5+\sqrt{17}}{2T}, \; p_2 = \frac{-5+\sqrt{17}}{2T}$

modi : $\left\{ \exp\left(-\frac{5+\sqrt{17}}{2T} \cdot t \right), \; \exp\left(\frac{-5+\sqrt{17}}{2T} \cdot t \right) \right\}$

Eq. differenziale :

$$RT^2D^2i(t) + 5RTDi(t) + 2R \cdot i(t) = $$
$$= T^2D^2v(t) + 3TDv(t) + v(t)$$

2.

$$m D^2 x = -k(x-u) - b(Dx - Du)$$

$$m D^2 x = -k x + k u - b D x + b D u$$

$$\boxed{m D^2 x + b D x + k x = b D u + k u}$$

f.d.t. $$G(s) = \frac{b s + k}{m s^2 + b s + k}$$

$m s^2 + b s + k$ è il polinomio caratteristico del sistema.

$$\Delta = b^2 - 4 m k$$

Non si hanno modi armonici quando $\Delta \geq 0$ ovvero quando

$$b \geq 2\sqrt{m k}$$

3.
Vedi le dispense dell'insegnamento.

4
Vedi le dispense dell'insegnamento.

5.

$$\mathcal{L}[u(t)] = U(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} = \frac{s+1}{s^2}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{1}{s\cancel{(s+1)}\left[(s+1)^2+1\right]} \cdot \frac{\cancel{s+1}}{s^2} = \frac{1}{s^3\left[(s+1)^2+1\right]}$$

$$Y(s) = \frac{K_{11}}{s^3} + \frac{K_{12}}{s^2} + \frac{K_{13}}{s} + \frac{K_2}{s+1-j} + \frac{\overline{K_2}}{s+1+j}$$

$$K_{11} = \frac{1}{(s+1)^2+1}\bigg|_{s=0} = \frac{1}{2} \qquad K_{12} = D\left[\frac{1}{(s+1)^2+1}\right]_{s=0} = -\frac{2(s+1)}{\left[(s+1)^2+1\right]^2}\bigg|_{s=0} = -\frac{1}{2}$$

$$K_2 = \cancel{(s+1-j)}\,\frac{1}{s^3\cancel{(s+1-j)}(s+1+j)}\bigg|_{s=-1+j} = \frac{1}{(-1+j)^3\,2j}$$

$$|K_2| = \frac{1}{2^{3/2}\cdot 2} = \frac{1}{2^{5/2}} \qquad \arg K_2 = -3\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{2} = -\frac{3}{4}\pi \mod 2\pi$$

$$K_{13} + K_2 + \overline{K_2} = 0 \qquad K_{13} = -\left(K_2 + \overline{K_2}\right) = -\left(|K_2|\,e^{j\arg K_2} + |K_2|\,e^{-j\arg K_2}\right)$$

$$K_{13} = -|K_2|\cdot\left\{\cos\arg K_2 + \cancel{j\,\mathrm{sen}\arg K_2} + \cos\arg K_2 - \cancel{j\,\mathrm{sen}\arg K_2}\right)$$

$$K_{13} = -\frac{1}{2^{5/2}}\cdot 2\cdot\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2^{5/2}}\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{2^3} = \frac{1}{4}$$

$$y(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} + 2\,|K_2|\,e^{-t}\cos\left(t - \frac{3}{4}\pi\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} + 2^{-3/2}\,e^{-t}\cdot\mathrm{sen}\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

La risposta forzata è anche esprimibile come

$$y(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-t}\left(\mathrm{sen}(t) - \cos(t)\right)$$

L'ingresso è segnale discontinuo (in $t=0$). Quindi

$$y(t) \in C^{\rho-1,\infty}, \quad \rho \equiv \{\text{grado relativo}\} = 4$$

Il grado massimo di continuità di $y(t)$ è uguale a 3.

6.

Modi $\equiv \left\{ e^{-4t}, te^{-4t}, t^2 e^{-4t}, e^{-2t}\sin(2t+\varphi_1), e^{-t}\sin(2t+\varphi_2) \right\}$

poli dominanti $= -2 \pm j2$

$\omega_n = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2} = \ 2.828$

$\delta\omega_n = 2$; $\delta = 1/\sqrt{2} = 0.7071$

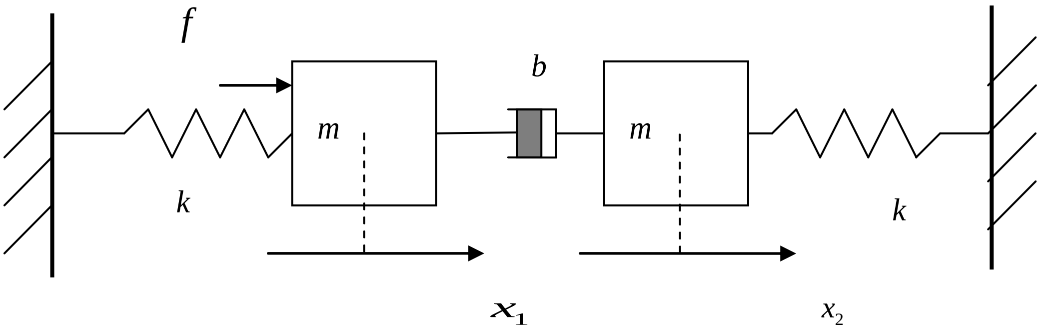
$$S = 100\exp\left(-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} \right) = 4,3\%$$

$T_a = \dfrac{3}{2} = 1.5$ s ; $T = \dfrac{1.8}{2.828} = 0.636$ s

Parte A

1. [punti 4] Si esponga il metodo di progetto di una rete a ritardo e anticipo con imposizione del margine di fase M_F .

2. [punti 5] Sia assegnato il sistema meccanico vibrante di figura



caratterizzato da due molle di costante elastica k e due corpi di massa m accoppiati da uno smorzatore viscoso di coefficiente b. Il corpo di sinistra sia soggetto ad una forza f e le posizioni delle due masse siano descritte dalle variabili x_1 e x_2 (quando il sistema è in quiete $x_1 = x_2 = 0$).

a) Determinare le equazioni differenziali che descrivono il moto delle due masse.
b) Determinare la funzione di trasferimento del sistema orientato dall'ingresso f all'uscita x_1.

3. [punti 5] Dato un sistema di equazione $D^2y + 4Dy + 4y = D^2u + 2Du + u$ sia noto che per $t < 0$ ingresso ed uscita evolvono secondo le leggi: $u(t) = 2e^{-t}$, $y(t) = e^{-2t}$. All'istante $t = 0$ viene applicato il segnale $u(t) = 10,\ t \geq 0$:

1) verificare la correttezza dell'evoluzione del sistema per $t < 0$;
2) determinare l'uscita $y(t)$ del sistema per $t \geq 0$.

4. [punti 4] Presentare e dimostrare la formula di antitrasformazione zeta, ovvero l'espressione che determina la sequenza a tempo discreto $x(k)$ nota che sia $X(z) \triangleq \mathcal{Z}[x(k)]$.

Parte B

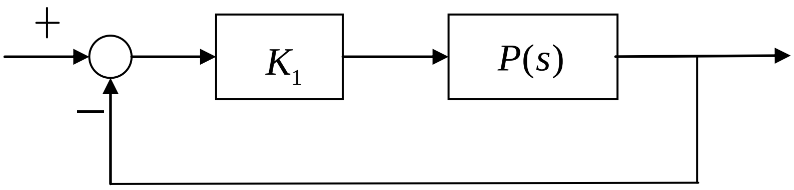
5. [punti 4] Tracciare i diagrammi di Bode asintotici (diagramma dei moduli e diagramma delle fasi della risposta armonica) associati alla funzione di trasferimento $G(s) = 50\dfrac{s-4}{(s+1)(s+20)}$

Suggerimenti:

i) per una decade delle pulsazioni si assegnino 10 quadretti del foglio protocollo;

ii) si riportano per comodità dello studente i logaritmi in base 10 degli interi da 2 a 9:
$\log_{10} 2 \cong 0,30$, $\log_{10} 3 \cong 0,48$, $\log_{10} 4 \cong 0,60$, $\log_{10} 5 \cong 0,70$, $\log_{10} 6 \cong 0,78$, $\log_{10} 7 \cong 0,85$, $\log_{10} 8 \cong 0,90$, $\log_{10} 9 \cong 0,95$.

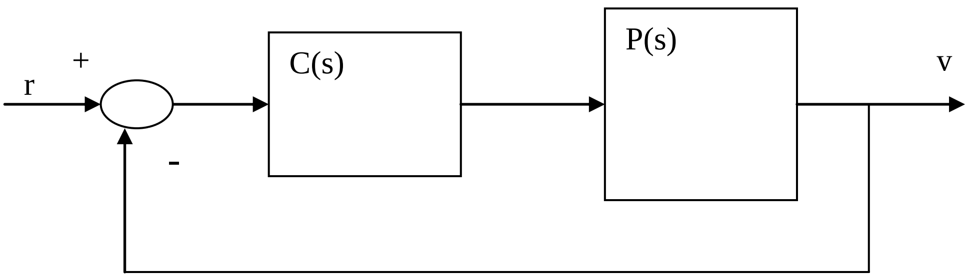
6. [punti 5] Sia dato il sistema retroazionato di figura:



dove K_1 è un parametro reale e $P(s) = \dfrac{s+1}{s^2(s+4)(s+8)}$.

1. Determinare l'insieme dei valori di K_1 per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
2. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica associata al sistema retroazionato per $K_1 \in (0,+\infty)$. Determinare in particolare gli asintoti del luogo e le intersezioni del luogo con l'asse immaginario del piano complesso.

7. [punti 5] Si consideri il seguente sistema di controllo



dove $P(s) = \dfrac{100(s+1)}{(s+2)^2(s+10)}$. Si chiede di progettare un controllore di struttura (rete ritardatrice) $C(s) = K\dfrac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}$, $K \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0,1)$, $\tau \in \mathbb{R}^+$ affinché:

a) l'errore a regime e_R in risposta ad un gradino unitario del set-point abbia valore assoluto pari a 0,02: $|e_R| = 0,02$.

b) Il margine di fase M_F sia pari a 50°: $M_F = 50^\circ$.

8. [punti 4] Sia dato il sistema a tempo discreto definito dall'equazione

$$16y(k+13) - 12y(k+12) + y(k+10) = 16u(k+11) + 16u(k+10),\ k \in \mathbb{Z}$$

ed orientato da $u(k)$ (ingresso) a $y(k)$ (uscita).

1) Determinare la funzione di trasferimento del sistema.
2) Studiare la stabilità alle perturbazioni del sistema.

Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense dell'insegnamento.

2.
a) Dall'equazione della dinamica otteniamo

$$\begin{cases} mD^2x_1 = f - kx_1 + b(Dx_2 - Dx_1) \\ mD^2x_2 = -b(Dx_2 - Dx_1) - kx_2 \end{cases}$$

b) Dalle equazioni precedenti trasformando secondo Laplace con condizioni iniziali tutte nulle otteniamo:

$$\begin{cases} ms^2X_1 = F - kX_1 + b(sX_2 - sX_1) \\ ms^2X_2 = -b(sX_2 - sX_1) - kX_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ms^2X_1 = F - kX_1 + b(sX_2 - sX_1) \\ (ms^2 + bs + k)X_2 = bsX_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2 = \dfrac{bsX_1}{(ms^2 + bs + k)} \\ (ms^2 + bs + k)X_1 = F + bsX_2 \end{cases}$$

$$(ms^2 + bs + k)X_1 = F + bs\frac{bsX_1}{(ms^2 + bs + k)}$$

$$G(s) := \frac{X_1}{F} = \frac{ms^2 + bs + k}{(ms^2 + bs + k)^2 - b^2s^2} =$$

$$= \frac{ms^2 + bs + k}{m^2s^4 + 2mbs^3 + 2mks^2 + 2bks + k^2}$$

3.

1) $Du = -2e^{-t}$ $\quad D^2u = 2e^{-t}$ $\quad Dy = -2e^{-2t}$ $\quad D^2y = 4e^{-2t}$

$$4e^{-2t} + 4(-2e^{-2t}) + 4(e^{-2t}) =$$

$$= 2e^{-t} + 2(-2e^{-t}) + 2e^{-t}$$ OK! vero $\forall t < 0$

2) determinazione delle condizioni iniziali al tempo $t = 0-$.

$$y(t) = e^{-2t} \Rightarrow y(0-) = 1$$

$$Dy = -2e^{-2t} \Rightarrow Dy(0-) = -2$$

$$u(t) = 2e^{-t} \Rightarrow u(0-) = 2$$

$$Du(t) = -2e^{-t} \Rightarrow Du(0-) = -2$$

$$s^2Y(s) - sy(0-) - Dy(0-) + 4\left(sY(s) - y(0-)\right) + 4Y(s) =$$

$$= s^2U(s) - s\,u(0-) - Du(0-) + 2\left(sU(s) - u(0-)\right) + \cancel{4}\,U(s)$$

$$s^2Y(s) - s + 2 + 4\left(sY(s) - 1\right) + 4Y(s) =$$

$$= s^2U(s) - 2s + 2 + 2\left(sU(s) - 2\right) + U(s)$$

$$(s^2 + 4s + 4)\,Y(s) - s - \cancel{2} =$$

$$= (s^2 + 2s + 1)\,U(s) - 2s - \cancel{2}$$

$$(s^2 + 4s + 4)\,Y(s) = (s^2 + 2s + 1)\,U(s) - s$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 + 4s + 4}\,U(s) - \frac{s}{s^2 + 4s + 4}$$

$$Y(s) = \frac{(s+1)^2}{(s+2)^2} \cdot \frac{10}{s} - \frac{s}{(s+2)^2}$$

$$= \frac{10(s+1)^2 - s^2}{s(s+2)^2} =$$

$$= \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{(s+2)^2} + \frac{K_{22}}{s+2}$$

$$K_1 = \left.\frac{10(s+1)^2 - s^2}{(s+2)^2}\right|_{s=0} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$K_{21} = \left.\frac{10(s+1)^2 - s^2}{s}\right|_{s=-2} = \frac{10-4}{-2} = -3$$

$$K_1 + K_{22} = 9 \implies K_{22} = 9 - \frac{5}{2} = \frac{18-5}{2} = \frac{13}{2}$$

(OK! verificato con altro metodo)

$$Y(s) = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{s} - 3 \cdot \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{13}{2} \cdot \frac{1}{s+2}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{5}{2} - 3\,t\,e^{-2t} + \frac{13}{2}\,e^{-2t}}$$

4.

Vedi appunti dell'insegnamento.

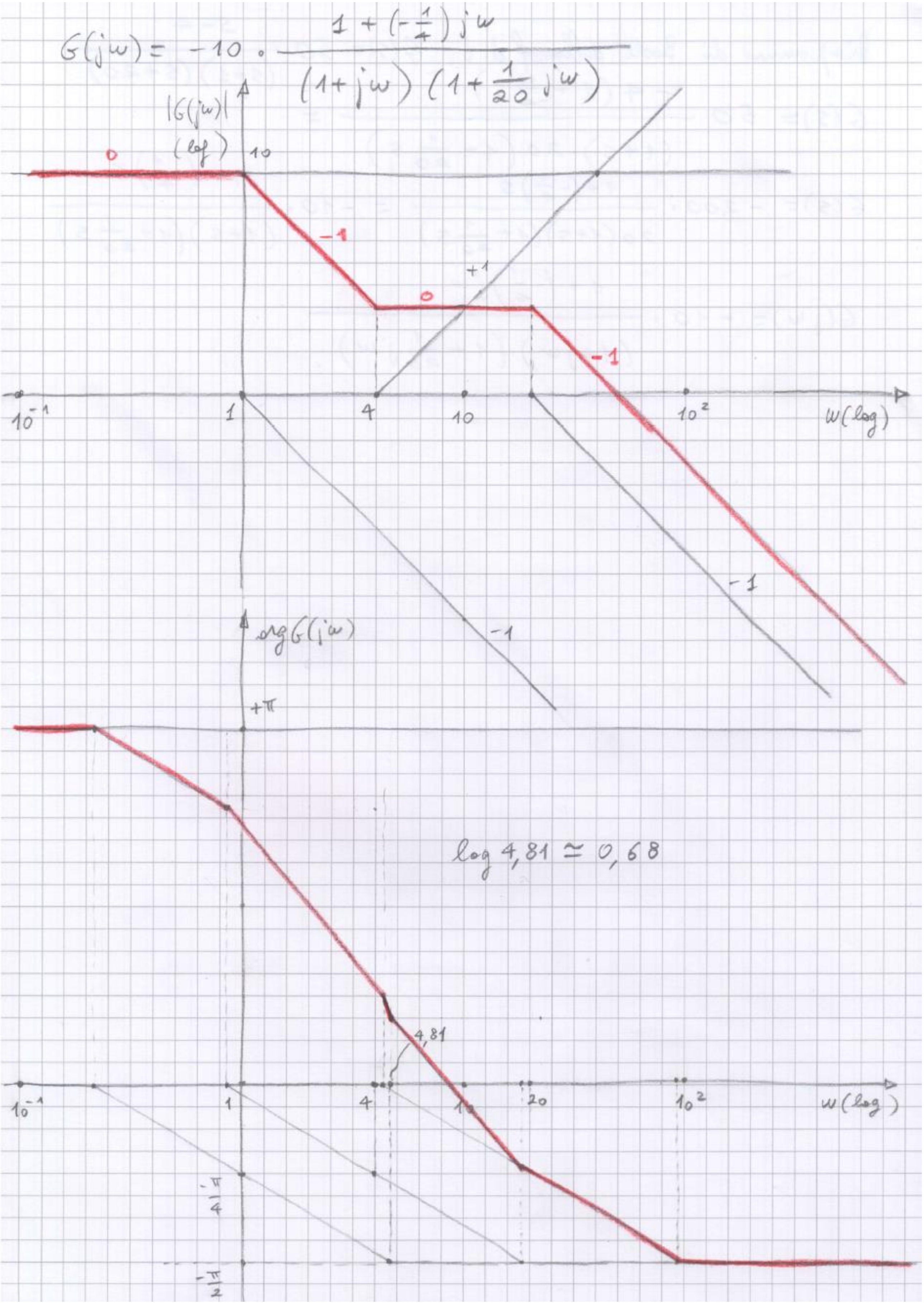
5.

Diagrammi di Bode della f.d.t. $G(s) = 50 \dfrac{s-4}{(s+1)(s+20)}$

$$G(s) = 50 \, \frac{-4\left(1 + \frac{1}{-4} s\right)}{(1+s) \cdot 20 \cdot \left(1 + \frac{1}{20} s\right)} =$$

$$G(s) = -200 \cdot \frac{1 + \left(-\frac{1}{4}\right) s}{20 (1+s)\left(1 + \frac{1}{20} s\right)} = -10 \cdot \frac{1 + \left(-\frac{1}{4}\right) s}{(1+s)\left(1 + \frac{1}{20} s\right)}$$

$$G(j\omega) = -10 \cdot \frac{1 + \left(-\frac{1}{4}\right) j\omega}{(1+j\omega)\left(1 + \frac{1}{20} j\omega\right)}$$



G(jw) = -10 ∘ (1 + (-1/4) jw) / ((1+jw)(1 + 1/20 jw))
|G(jw)|
(log)
10
0
-1
+1
0
-1
-1
-1
10^-1
1
4
10
10^2
w(log)
argG(jw)
+π
log 4,81 ≃ 0,68
4,81
10^-1
1
4
20
10^2
w(log)
-π/4
-π/2

6.

1) L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1+K_1\frac{s+1}{s^2(s+4)(s+8)}=0$$

Questa in forma polinomiale diventa:

$$s^4+12s^3+32s^2+K_1 s+K_1=0$$

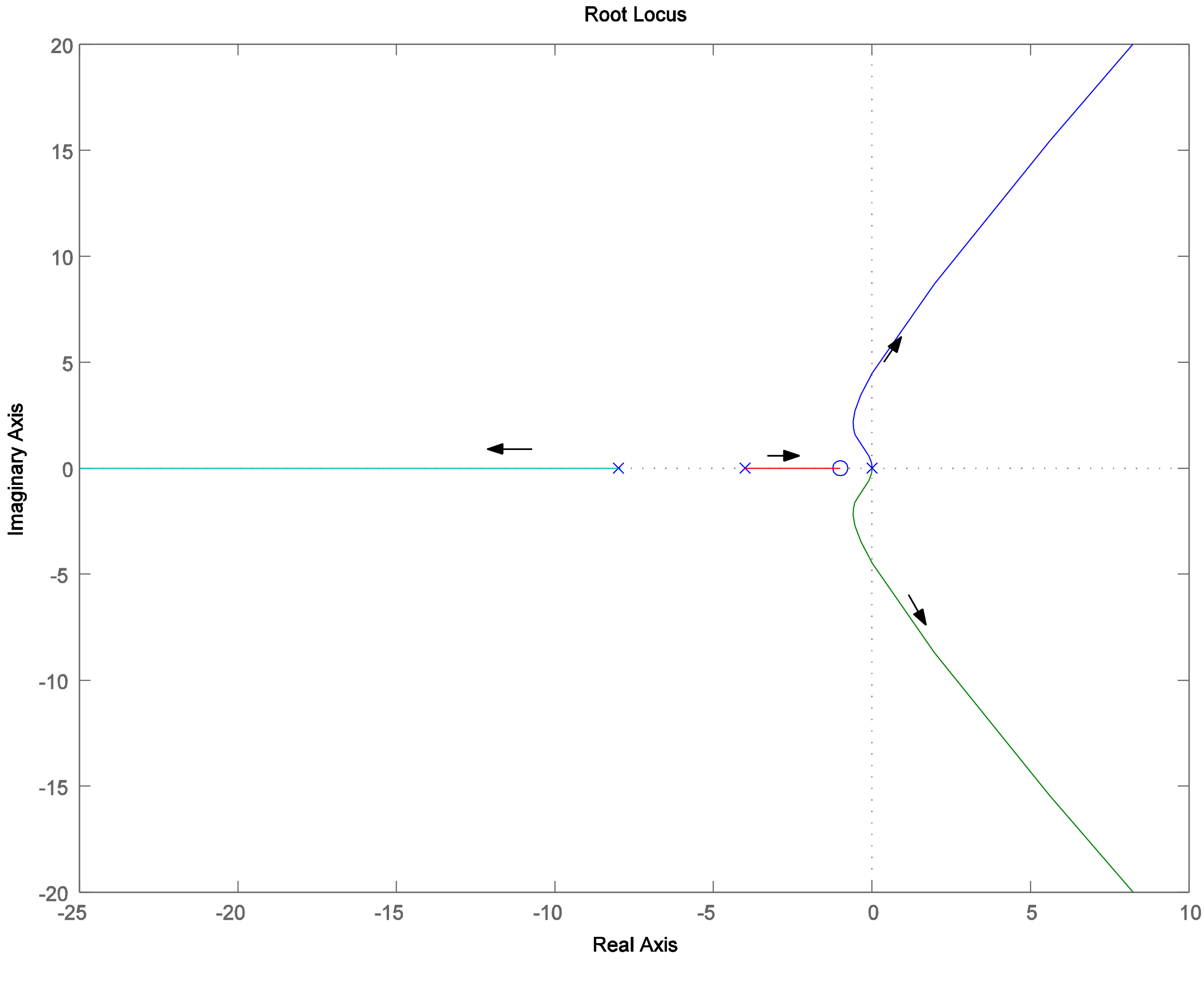
La tabella di Routh corrispondente è

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & 32 & K_1 & 0 \\ 3 & 12 & K_1 & 0 & 0 \\ 2 & 384-K_1 & 12K_1 & 0 & \\ 1 & K_1(240-K_1) & 0 & & \\ 0 & 12K_1 & & & \end{array}$$

Imponendo la positività degli elementi della prima colonna si ottiene $K_1 \in (0,\ 240)$, valori per i quali il sistema è asintoticamente stabile (Criterio di Routh).

2) Il luogo presenta tre asintoti rettilinei $\left(\vartheta_{a,1}=+60°,\ \vartheta_{a,2}=+180°,\ \vartheta_{a,3}=-60°\right)$ con centro in

$$\sigma_a=\frac{-4-8-(-1)}{3}=-\frac{11}{3}\cong-3,67$$



Le intersezioni del luogo si hanno in corrispondenza del valore limite di $K_1=240$. Per tale valore la tabella di Routh evidenzia l'equazione ausiliaria

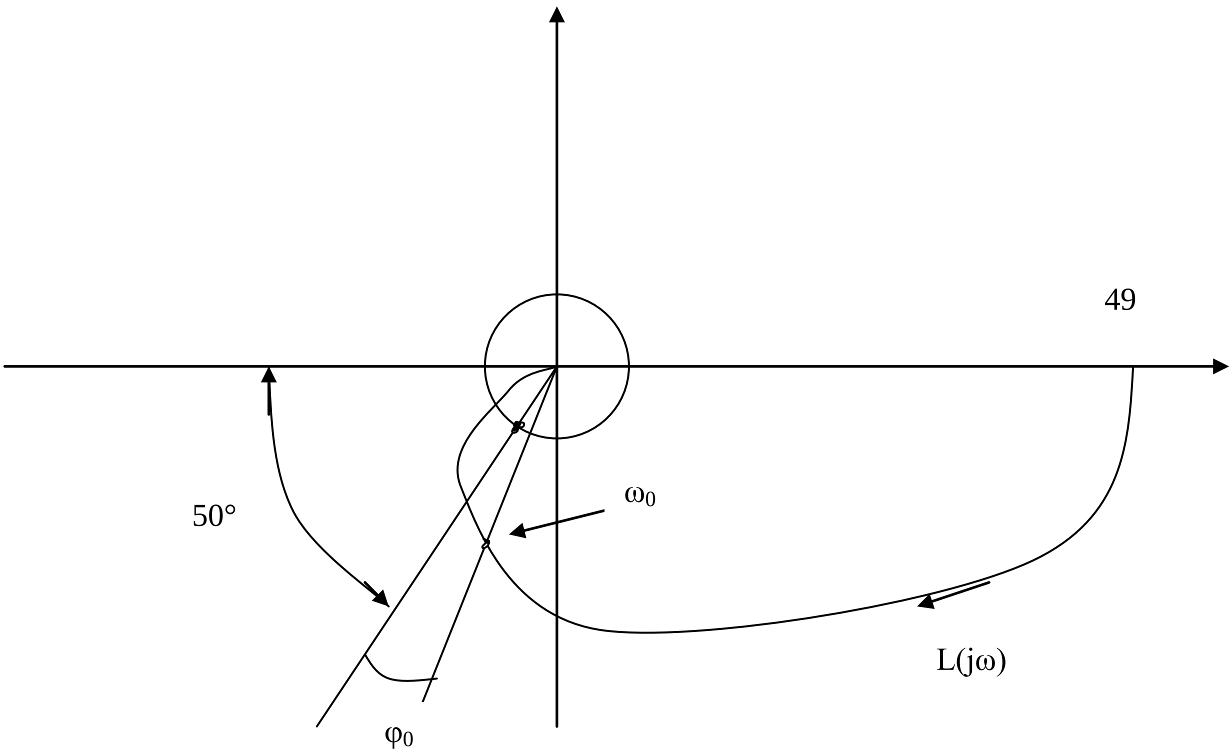
$$(384-240)s^2+12\cdot 240=0$$
$$s^2+20=0$$
Quindi le intersezioni avvengono in $s=\pm j\sqrt{20}\cong \pm j4,47$.

7.

) La specifica a) equivale a $\left|\dfrac{1}{1+K_p}\right|=\dfrac{1}{50}$ $\Leftrightarrow$ $K_p=49$ oppure $K_p=-51$. Dato che $K_p=K\dfrac{5}{2}$ ed è opportuno scegliere $K>0$ (al fine dell'ottenimento di una facile stabilizzabilità) si impone
$$K_p=49 \quad \Rightarrow \quad K=\frac{98}{5}$$
Definiamo
$$L(s):=KP(s)=1960\frac{s+1}{(s+2)^2(s+10)}$$
$$L'(s):=C(s)P(s)=1960\frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}\,\frac{s+1}{(s+2)^2(s+10)}$$
Si propone di progettare α e τ mediante le formule di inversione.
$$L(j\omega)=1960\frac{j\omega+1}{(j\omega+2)^2(j\omega+10)}$$
$$\arg L(j\omega)=\text{arctg}\ \omega-2\ \text{arctg}\ \frac{\omega}{2}-\ \text{arctg}\ \frac{\omega}{10}$$
$$|L(j\omega)|=1960\frac{\sqrt{1+\omega^2}}{(4+\omega^2)\sqrt{100+\omega^2}}$$
Il diagramma polare di $L(j\omega)$ è riportato in figura.
Si determina (per tentativi) ω_0 (sarà la pulsazione critica di $L'(j\omega)$):
$$\omega_0=10 \text{ rad/s}$$
$$\arg L(j\omega_0)=-2,0611 \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad \varphi_0=0,2079 \text{ rad}$$
$$|L(j\omega_0)|=13,393$$
verifica validità di ω_0 : $\left(|L(j\omega_0)|,\varphi_0\right)\in C$?

sì, perchè $\cos\ \varphi_0>1/|L(j\omega_0)|$: 0,9785 > 0,0747.

Si definisce $M:=|L(j\omega)|$ e $\varphi:=\varphi_0$ e si impone, mediante le formule di inversione, che
$$\frac{1}{M}e^{-j\varphi}=\frac{1+\alpha\tau j\omega_0}{1+\tau j\omega_0}$$
Quindi:
$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{M\cos\ \varphi-1}{M(M-\cos\ \varphi)}=0,07280\\[2ex] \tau=\dfrac{M-\cos\ \varphi}{\omega_0\ \text{sen}\ \varphi}=6,016 \text{ s}\end{cases}$$



8.

8) Si effettua la sostituzione $k-13 \to k$.
L'eq. diventa

$$16\,y(k) - 12\,y(k-1) + y(k-3)$$

$$= 16\,u(k-2) + 16\,u(k-3)$$

Quindi la f.d.t. risulta

$$H(z) = \frac{16z + 16}{16z^3 - 12z^2 + 1}$$

Il polinomio caratteristico è $16z^3 - 12z^2 + 1$.

$$a(z) \triangleq a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

Condizione necessaria affinché tutte le radici di $a(z)$ abbiano modulo minore di uno:

1. $a(1) > 0$ cioè $16 - 12 + 1 = 5 > 0$ ok!
2. $(-1)^3 a(-1) > 0$ cioè $-a(-1) > 0$

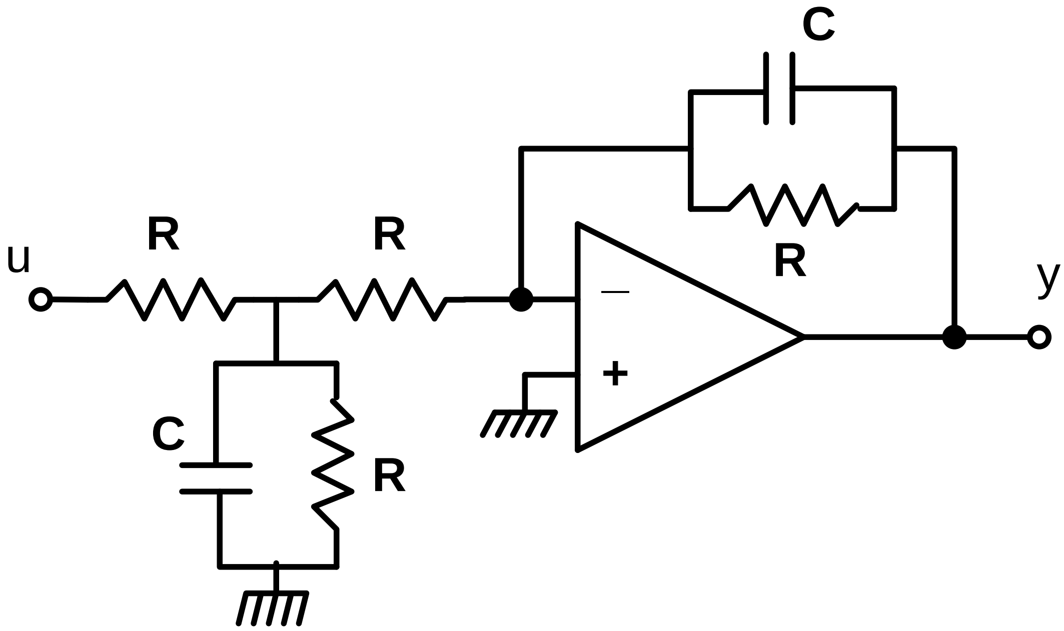
$$-[-16 - 12 + 1] = -[-27] = 27 > 0$$ ok!

3. $|a_0| < a_n$ cioè $|1| < 16$ ok!

Parte A

1. [punti 5] Si presentino e si dimostrino le formule di inversione per la sintesi in frequenza delle reti correttrici. Si esponga inoltre come utilizzare tali formule per la sintesi della rete **ritardatrice** con imposizione del **margine di ampiezza** M_A.

2. [punti 5] Il seguente schema elettrico definisca un sistema dinamico Σ orientato da u (tensione di ingresso) ad y (tensione d'uscita).



Si assuma l'amplificatore operazionale come ideale.

1. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema Σ.
2. Determinare poli e modi di Σ.
3. Scrivere l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.

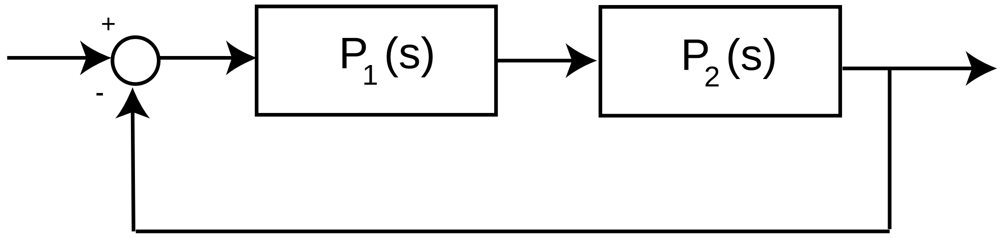
3. [punti 4] Determinare l'evoluzione forzata $y(t)$ in risposta al gradino unitario $u(t) = 1(t)$ per un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = 10 \cdot \dfrac{1-s}{(s+1)(s+2)(s+5)}$.

Determinare il grado massimo di continuità su $\mathbb{R}$ di tale evoluzione forzata $y(t)$.

4. [punti 4] Presentare e dedurre la funzione di trasferimento a tempo discreto $P_d(z)$ di un sistema a tempo continuo $P(s)$ con all'ingresso un mantenitore D/A di ordine zero ed all'uscita un campionatore A/D sincronizzati con periodo T .

Parte B

5. [punti 5] Sia dato il sistema retroazionato di figura



dove $P_1(s) = \dfrac{1}{s(1+s)^2(1-s)}$.

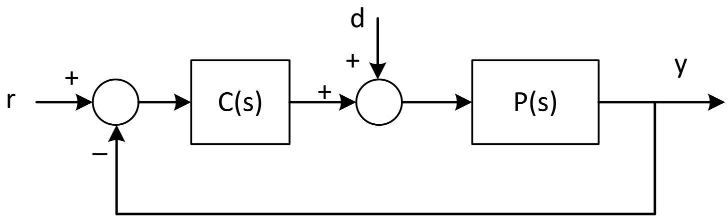
1. Posto $P_2(s) = 1$ tracciare il diagramma di Nyquist del guadagno di anello *L(s)* del sistema determinando in particolare asintoti e intersezioni con l'asse reale.
2. Nelle condizioni di cui al punto 1) studiare la stabilità del sistema retroazionato utilizzando il criterio di Nyquist.
3. Posto $P_2(s) = \exp(-s)$ (ritardo finito di 1 secondo) studiare la stabilità del sistema retroazionato utilizzando il criterio di Nyquist.

6. [punti 4] Si tracci il luogo delle radici della seguente equazione caratteristica:

$$1 + K_1 \frac{(s-1)^2}{s^3(s+5)^2} = 0 \quad , \quad K_1 \in [0, +\infty)$$

determinando in particolare asintoti e radici doppie.

7. [punti 5] Sia dato il sistema retroazionato di figura



dove $P(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$. Progettare un controllore $C(s)$ di ordine minimo che soddisfi le seguenti specifiche:

1. errore a regime nullo in risposta ad un gradino del segnale di riferimento $r(t) = r_0 1(t)$;
2. errore a regime nullo in risposta ad un disturbo costante all'ingresso dell'impianto controllato $d(t) = d_0 1(t)$;
3. poli dominanti del sistema retroazionato dislocati in $-1 \pm j$.

8. [punti 4] Determinare la risposta forzata $y(k)$ all'ingresso $u(k) = 1(k)$ (gradino unitario) di un sistema a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze

$$y(k) + y(k-1) + \frac{1}{4} y(k-2) = u(k) + 4u(k-1) + 4u(k-2) \ .$$

Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense dell'insegnamento.

2

Impedenza del parallelo capacità e resistenza Z_p:

$$Z_p = \frac{R \cdot \frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{R}{1+RCs}$$

Impedenza di trasferimento del tripolo Z_t:

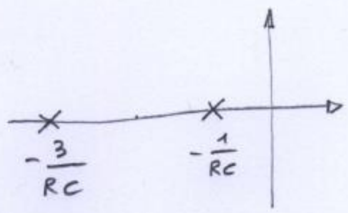
$$Z_t = R + R + \frac{R \cdot R}{Z_p} = 2R + \frac{R^2}{\frac{R}{1+RCs}} = 2R + R(1+RCs)$$

$$G(s) = -\frac{Z_p}{Z_t} = -\frac{\frac{R}{1+RCs}}{2R+R(1+RCs)}$$

1

$$G(s) = -\frac{1}{(1+RCs)(3+RCs)}$$

2 Poli: $-\frac{1}{RC}$, $-\frac{3}{RC}$



modi di $\Sigma = \left\{ e^{-\frac{t}{RC}}, e^{-\frac{3t}{RC}} \right\}$

3

$$(1+RCs)(3+RCs) = 3 + RCs + 3RCs + (RC)^2 s^2 =$$
$$= (RC)^2 s^2 + 4RCs + 3$$

$$G(s) = \frac{-1}{(RC)^2 s^2 + 4RCs + 3}$$

eq. diff. $(RC)^2 D^2 y + 4RC\, Dy + 3y = -u$

3.

$$Y(s)=10\cdot\frac{1-s}{s(s+1)(s+2)(s+5)}=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{s+1}+\frac{k_3}{s+2}+\frac{k_4}{s+5}$$

Calcolando i residui con le formule usuali otteniamo $k_1=1$, $k_2=-5$, $k_3=5,\ k_4=-1$. Quindi

$$y(t)=0 \quad \text{per} \quad t<0$$

$$y(t)=1-5e^{-t}+5e^{-2t}-e^{-5t} \qquad \text{per } t\geq 0$$

L'ingresso applicato al sistema $u(t)=1(t)$ (gradino unitario) è una funzione discontinua e l'ordine relativo del sistema è $\rho=2\geq 1$. Quindi da una nota proprietà $y(t)\in\overline{C^{\rho-1,\infty}}=\overline{C^{1,\infty}}$, ovvero il grado massimo di continuità su $\mathbb{R}$ di $y(t)$ è 1.

4.

Vedi appunti dell'insegnamento.

5.

1) Sia $L(s):=P_1(s)\cdot P_2(s)=\dfrac{1}{s(1+s)^2(1-s)}$

$$L(j\omega)=\frac{1}{j\omega(1+j\omega)^2(1-j\omega)}$$

$$|L(j\omega)|=\frac{1}{\omega(1+\omega^2)(1+\omega^2)^{1/2}}$$

$$\arg L(j\omega)=-\frac{\pi}{2}-2arctg\omega+arctg\omega=-\frac{\pi}{2}-arctg\omega$$

Studio del diagramma polare di $L(j\omega)$:

Comportamento per $\omega\to 0^+$:

Il diagramma polare presenta un asintoto parallelo all'asse immaginario

$$\sigma=1(-1-1+1)=-1$$

$$\lim_{\omega\to 0^+}\arg L(j\omega)=-\frac{\pi}{2}$$

Comportamento per $\omega\to\infty$:

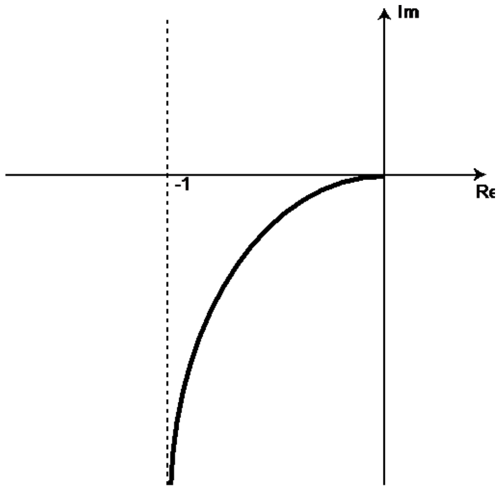
Il diagramma termina nell'origine tangente a uno degli assi coordinati, essendo

$$\lim_{\omega\to\infty}|L(j\omega)|=0$$

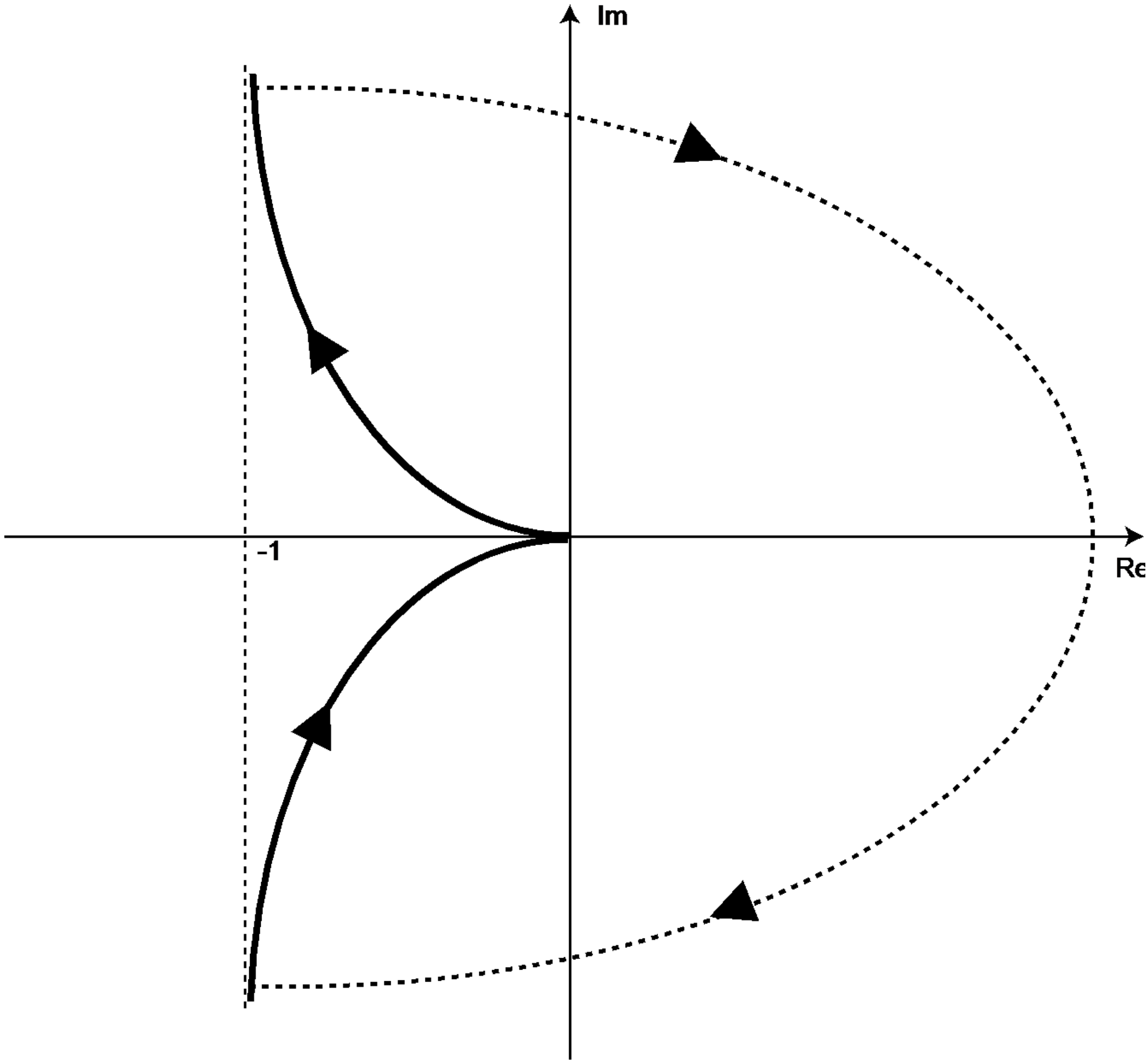
$$\lim_{\omega \to \infty} \arg L(j\omega) = -\pi$$

Si può subito dedurre che il diagramma polare non presenta intersezioni con l'asse reale.

Il diagramma polare del guadagno di anello risulta pertanto:



2) Il diagramma polare completo è:



Si può concludere che per il criterio di Nyquist il sistema retroazionato è **instabile** poichè il diagramma polare completo non circonda in senso antiorario 1 volta il punto critico -1. (Si ricorda che il guadagno di anello presenta 1 polo a parte reale positiva).

3) $$L(j\omega)=\frac{1}{j\omega(1+j\omega)^2(1-j\omega)}e^{-j\omega}$$

$$\arg L(j\omega)=-\frac{\pi}{2}-arctg\omega-\omega$$

osservando che

$\omega\to 0^+ \qquad e^{-j\omega}\to 1-j\omega$

L'asintoto verticale ha ascissa

$\sigma=1[-1-1]=-2$

Si può calcolare la prima intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo:

$$\arg L\left(j\omega_p\right) = -\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} - arctg\,\omega_p - \omega_p = -\pi$$

$$arctg\,\omega_p + \omega_p = \frac{\pi}{2}$$

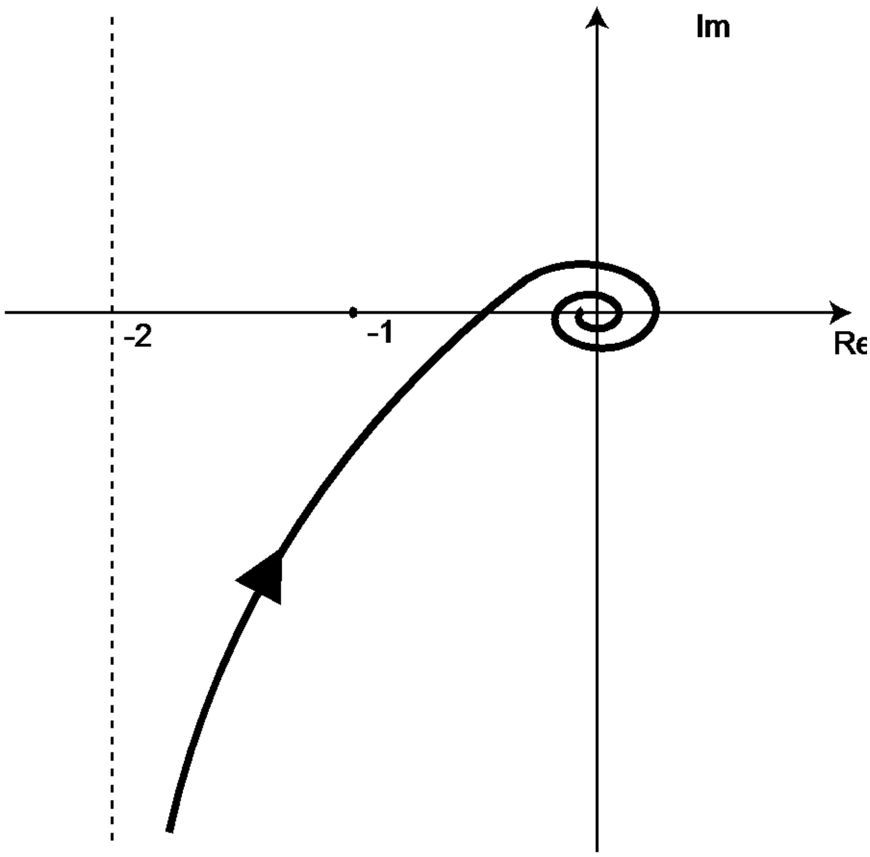
La soluzione a questa equazione può essere ricavata mediante una procedura numerica per tentativi e si ottiene

$$\omega_p \simeq 0.86 rad/\sec$$

$$\left|L\left(j\omega_p\right)\right| = \frac{1}{\omega_p\left(1+\omega_p^{\ 2}\right)\left(1+\omega_p^{\ 2}\right)^{1/2}} \simeq 0.501$$

$$L\left(j\omega_p\right) \simeq -0.501$$

Il diagramma polare del guadagno di anello è del tipo:



Si può concludere che per il criterio di Nyquist il sistema retroazionato è ancora **instabile** poiché il d.p.c. non circonda in senso antiorario il punto critico -1+j0.

6.
Si noti che si ha:

- uno zero s=1 con molteplicità 2
- un polo s=0 con molteplicità 3
- un polo s=-5 con molteplicità 2

Essendo la $K_1 \in [0; +\infty)$ un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zero e di poli.

Essendo $n - m = 3$ il luogo delle radici presenta 3 asintoti.
Gli asintoti del luogo delle radici formano una stella di raggi con centro nel punto dell'asse reale di ascissa:

$$\sigma_a = \frac{1}{3}\left[-5 - 5 - (1+1)\right] = -4$$

Gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli:

$$\theta_{a,0} = \frac{\pi}{3} \qquad \theta_{a,1} = \pi \quad \theta_{a,2} = \frac{5}{3}\pi$$

Per la determinazione delle radici doppie si ha:

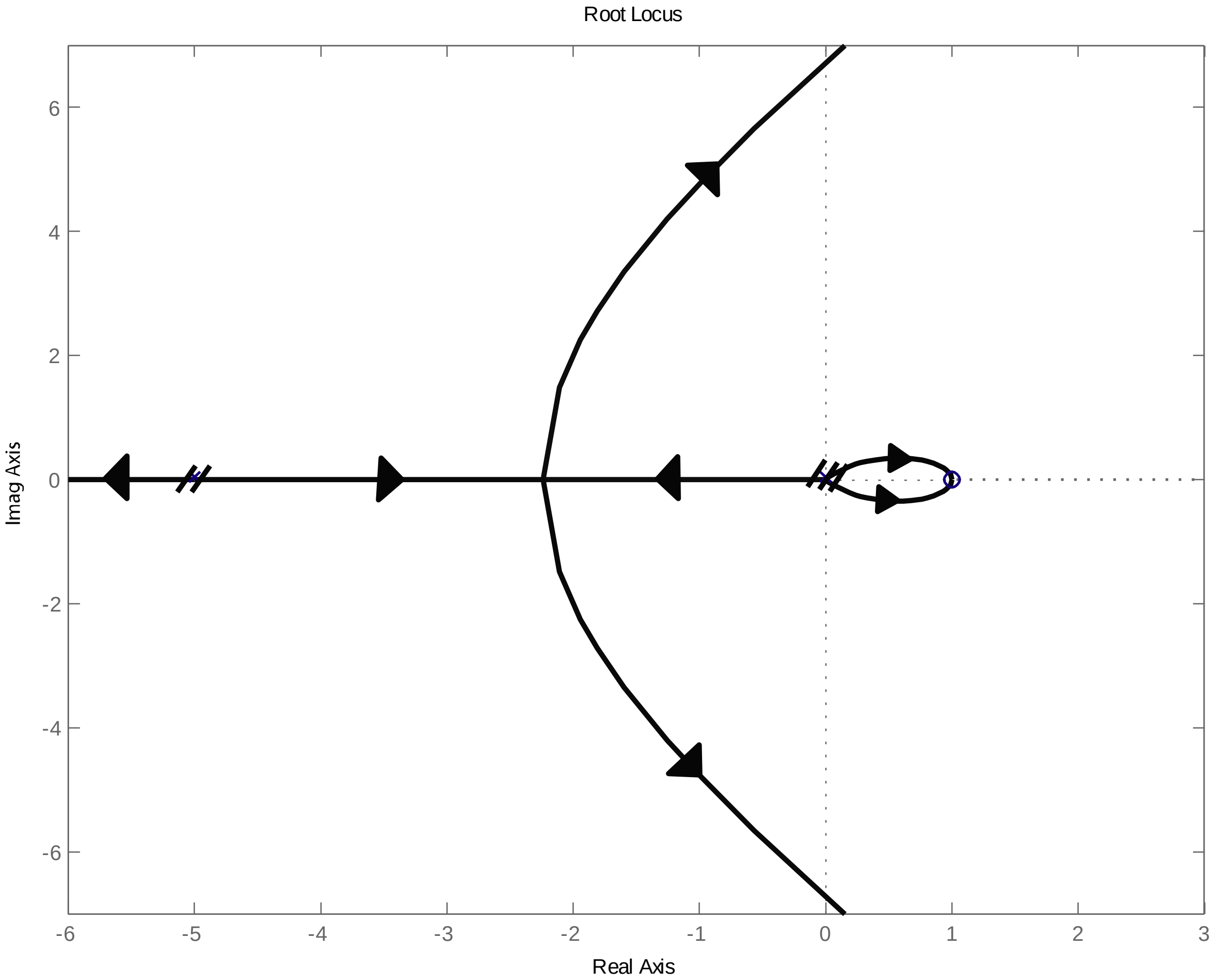
$$\frac{2}{s-1} - \frac{3}{s} - \frac{2}{s+5} = 0$$

Risolvendo l'equazione si ottiene:

$$3s^2 - 15 = 0 \Rightarrow s = \pm\sqrt{5} = \pm 2.236$$

Dalle considerazioni fatte sopra si osserva che solo $s = -2.236$ appartiene al luogo delle radici.

Di seguito è riportato il luogo delle radici.



7.

Per soddisfare la specifica 1 basterebbe un controllore proporzionale (di ordine zero) in quanto nell'impianto è già presente un polo nell'origine. La specifica 2 richiede la presenza di un polo nell'origine per il controllore $C(s)$.

1° tentativo

$$C(s) = K\,\frac{s+b}{s}\ ,\ K, b \in \mathbb{R} \Rightarrow L(s) := CP = K\,\frac{s+b}{s^2(s+1)}$$

eq. caratteristica $\quad 1+L(s)=0\ ,\ 1+K\,\frac{s+b}{s^2(s+1)}=0$

$$s^2(s+1)+K(s+b)=0 \qquad s^3+s^2+Ks+Kb=0$$

$$P_c(s) \triangleq s^3+s^2+Ks+Kb$$

$$P_d(s) = \left[(s+1)^2+1\right](s+\alpha) = s^3+(2+\alpha)s^2+(2+2\alpha)s+2\alpha$$

Si impone $P_c(s) \equiv P_d(s)$

$$\begin{cases} 1 = 2+\alpha \\ K = 2+2\alpha \\ Kb = 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha = -1$$

il sistema retroazionato risulta instabile!

Conclusione: un controllore di ordine 1 non può soddisfare le specifiche richieste.

2° tentativo

$$C(s) = K\,\frac{(s+1)(s+b)}{s(s+a)}$$

(per semplificare il progetto si è imposta una cancellazione polo-zero fra C e P)

eq. caratteristica $\quad 1+K\,\frac{s+b}{s^2(s+a)} = 0\ ,\ s^3+as^2+Ks+Kb=0$

$P_c(s) \triangleq s^3+as^2+Ks+Kb\ ,\ P_d(s)$ come sopra e si impone $P_c(s) \equiv P_d(s)$

$$\begin{cases} a = 2+\alpha \\ K = 2+2\alpha \\ Kb = 2\alpha \end{cases}$$

Scegliamo $\alpha = 5$ affinché $-1 \pm j$ siano i poli dominanti.

$\Rightarrow a = 7\ ,\ K = 12\ ,\ b = \frac{5}{6} = 0{,}8\bar{3}$

$$\boxed{C(s) = 12 \cdot \frac{(s+1)(s+0{,}8\bar{3})}{s(s+7)}}$$

8.

La funzione di trasferimento è $H(z) = \dfrac{z^2+4z+4}{z^2+z+\frac{1}{4}} = \dfrac{(z+2)^2}{(z+\frac{1}{2})^2}$

$$Y(z) = H(z)\,U(z) = \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \frac{z}{z-1} \triangleq z \cdot A(z)$$

$$A(z) = \frac{(z+2)^2}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_{21}}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{c_{22}}{z+\frac{1}{2}}$$

$$c_1 = \left.\frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}\right|_{z=1} = 4 \qquad c_{21} = \left.\frac{(z+2)^2}{z-1}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2}$$

$$c_1 + c_{22} = 1 \Rightarrow c_{22} = 1 - c_1 = 1 - 4 = -3$$

$$Y(z) = 4\,\frac{z}{z-1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{z}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} - 3\,\frac{z}{z+\frac{1}{2}} \quad , k \geq 0$$

$$y(k) = 4 - \frac{3}{2}\,k\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^k =$$

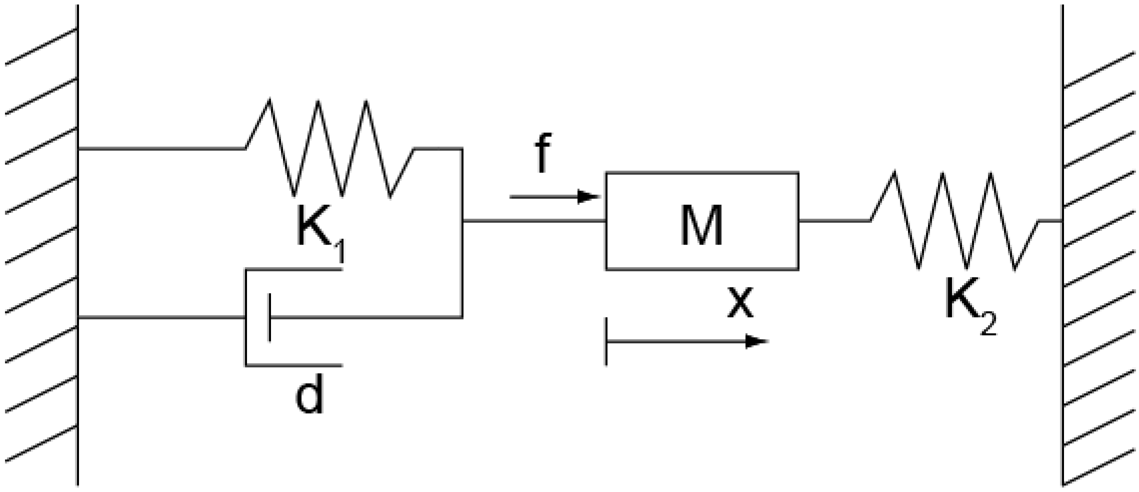
$$= 4 + 3k\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\boxed{y(k) = 4 + 3(k-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^k, \; k \geq 0}$$

Parte A

1. [punti 5] Si presentino e si dimostrino le formule di inversione per la sintesi in frequenza delle reti correttrici. Si esponga inoltre come utilizzare tali formule per la sintesi della rete **ritardatrice** con imposizione del **margine di fase** M_F .

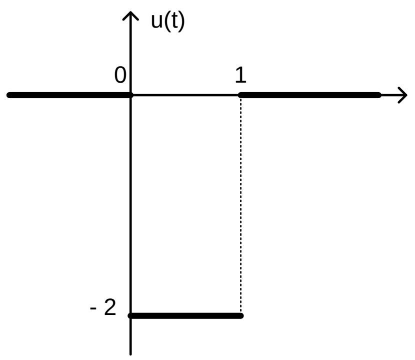
2. [punti 5] Sia dato il seguente sistema meccanico



dove x rappresenta la posizione della massa rispetto ad un sistema di riferimento orizzontale, scelto in modo tale che per x=0 il sistema si trovi in equilibrio, K_1 e K_2 sono le costanti delle due molle, d la constante dello smorzatore e f è una forza esterna agente sulla massa.

1) Determinare l'equazione differenziale che determina il moto della massa.
2) Determinare la funzione di trasferimento $P(s)$ tra la forza f e la posizione della massa x
3) Posto $m = 1\text{kg}$, $K_1 = K_2 = 5\text{N/m}$, $d = 2\text{Ns/m}$, tracciare i diagrammi di Bode (diagramma dei moduli e diagramma delle fasi) della risposta armonica di $P(s)$ e calcolare la pulsazione di risonanza del sistema.

3. [punti 4] Dato un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{8}{(s+1)(s+2)}$ determinare la risposta forzata $y(t),\ t \in [0,+\infty)$ al segnale di ingresso definito in figura:



4. [punti 4] Data un generico segnale a tempo discreto $x(k)$, $k \in \mathbb{Z}$ determinare le trasformate zeta dei segnali ritardati e anticipati di n passi ($n \in \mathbb{N}$), $\mathcal{Z}[x(k-n)]$ e $\mathcal{Z}[x(k+n)]$.

Parte B

5. [punti 5] Dato un sistema retroazionato con guadagno di anello

$$L(s) = 100\frac{(s+1)^2}{s^3(s+10)}$$

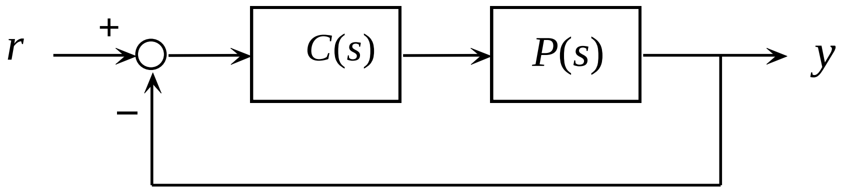
1. Tracciare il diagramma polare di $L(j\omega)$ determinando le eventuali intersezioni con l'asse reale.
2. Studiare la stabilità del sistema retroazionato con il Criterio di Nyquist.

6. [punti 4] Si tracci il luogo delle radici della seguente equazione caratteristica:

$$1 + K\frac{1-s}{(s+1)^3(s+2)^2} = 0 \quad , \quad K \in [0, +\infty)$$

determinando in particolare asintoti e radici doppie.

7. [punti 5] Sia dato il sistema in retroazione di figura



dove $P(s) = \frac{s-1}{s^2+2s+2}$. Progettare un controllore $C(s)$ di ordine minimo affinché in risposta ad un gradino del segnale di comando si abbia: 1) l'errore a regime nullo; 2) tempo di assestamento $T_a \simeq 9$ secondi ; 3) sovraelongazione $S \simeq 0$%.

8. [punti 4] Determinare la risposta forzata $y(k)$ all'ingresso $u(k) = 1(k)$ (gradino unitario) di un sistema a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze

$$y(k) + \frac{1}{4}y(k-1) - \frac{1}{8}y(k-2) = u(k) + 4u(k-1) + 4u(k-2) \ .$$

Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

2.
1) L'equazione del sistema è

$$M\ddot{x} = -K_1 x - d\dot{x} - K_2 x + f$$

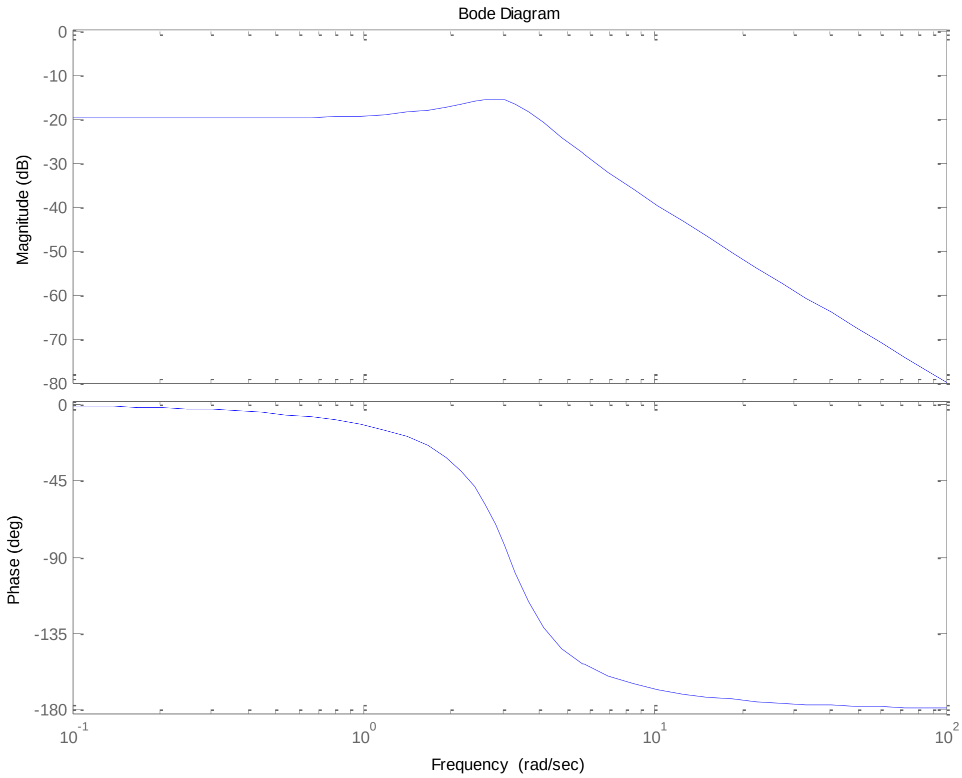
2)da cui la funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{1}{Ms^2 + ds + K_1 + K_2}$$

3)sostituendo i valori indicati otteniamo

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 10}$$

il diagramma di bode di questo sistema del secondo ordine è



$P(s)$ si può scrivere nella forma

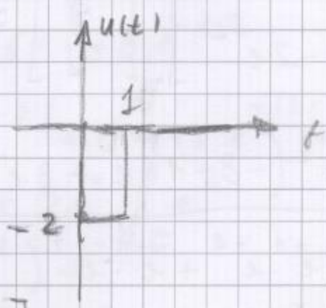
$$P(s) = \frac{1}{10(\frac{s^2}{\omega_n{}^2} + \delta\frac{2s}{\omega_n} + 1)}$$

con $\omega_n = \sqrt{10}$ e $\delta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, la pulsazione di risonanza risulta

$$\omega_R = w_n\sqrt{1-2\delta^2} = \sqrt{10}\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \sqrt{8}\text{rad/s} \cong 2{,}828 \text{ rad/s}$$

3.

B3. $G(s) = \dfrac{8}{(s+1)(s+2)}$



determinare $y(t)$ per $t > 0$

$u(t) = -2 \cdot 1(t)$ per $t \in [0,1]$

$U(s) = -2 \cdot \dfrac{1}{s}$ $\qquad Y(s) = -2 \cdot \dfrac{1}{s} \cdot \dfrac{8}{(s+1)(s+2)} =$

$$Y(s) = \frac{-16}{s(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1} + \frac{K_3}{s+2}$$

$K_1 = \left.\dfrac{-16}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=0} = \dfrac{-16}{1 \cdot 2} = -8$ $\qquad K_2 = \left.\dfrac{-16}{s(s+2)}\right|_{s=-1} = \dfrac{-16}{(-1)\cdot 1} = +16$

$K_1 + K_2 + K_3 = 0$ $\qquad K_3 = 8 - 16 = -8$

$$y(t) = -8 + 16e^{-t} - 8e^{-2t} \qquad t \in [0,1]$$

$$Dy(t) = -16e^{-t} + 16e^{-2t}$$

$$Dy(0+) = -16 + 16 = 0 \qquad y(0+) = 0 \quad \text{ok!}$$

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \quad \text{per } t \geq 1$$

$$Dy(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t}$$

$$y(t) \in \overline{C}^{g-1}, \text{ quindi essendo } g = 2$$

$$\Rightarrow y(t) \in \overline{C}^{1,\infty}$$

$$\begin{cases} y(1-) = y(1+) \\ Dy(1-) = Dy(1+) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8 + 16e^{-1} - 8e^{-2} = c_1 e^{-1} + c_2 e^{-2} \\ -16e^{-1} + 16e^{-2} = -c_1 e^{-1} - 2c_2 e^{-2} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} e^{-1} & e^{-2} \\ -e^{-1} & -2e^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 + 16e^{-1} - 8e^{-2} \\ -16e^{-1} + 16e^{-2} \end{bmatrix}$$

$$c_1 = \frac{-2e^{-2}\left(-8 + 16e^{-1} - 8e^{-2}\right) - \left(-16e^{-1} + 16e^{-2}\right)e^{-2}}{-2e^{-1}\cdot e^{-2} + e^{-1}\cdot e^{-2}} =$$

$$= \frac{-2\left(-8 + 16e^{-1} - 8e^{-2}\right) + 16e^{-1} - 16e^{-2}}{\underbrace{-2e^{-3} + e^{-3}}_{\cancel{(-e^{-3})}\ \ (-e^{-1})}} =$$

$$= \frac{16 - 32e^{-1} + \cancel{16e^{-2}} + 16e^{-1} - \cancel{16e^{-2}}}{-e^{-1}} = \frac{16 - 16e^{-1}}{-e^{-1}} =$$

$$= -16 \cdot e + 16 = 16 - 16 \cdot e$$

$$y(t) = -8 + 16e^{-t} - 8e^{-2t} \qquad t \in [0,1]$$

$$Dy(t) = -16e^{-t} + 16e^{-2t}$$

$$Dy(0+) = -16 + 16 = 0 \qquad y(0+) = 0 \qquad \text{ok!}$$

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \quad \text{per } t \geq 1$$

$$Dy(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t}$$

$$y(t) \in C^{g-1}, \text{ quindi essendo } g = 2$$

$$\Rightarrow y(t) \in C^{1}$$

$$\begin{cases} y(1-) = y(1+) \\ Dy(1-) = Dy(1+) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8 + 16e^{-1} - 8e^{-2} = c_1 e^{-1} + c_2 e^{-2} \\ -16e^{-1} + 16e^{-2} = -c_1 e^{-1} - 2c_2 e^{-2} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} e^{-1} & e^{-2} \\ -e^{-1} & -2e^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 + 16e^{-1} - 8e^{-2} \\ -16e^{-1} + 16e^{-2} \end{bmatrix}$$

$$c_1 = \frac{-2e^{-2}(-8 + 16e^{-1} - 8e^{-2}) - (-16e^{-1} + 16e^{-2})e^{-2}}{-2e^{-1} \cdot e^{-2} + e^{-1} \cdot e^{-2}} =$$

$$= \frac{-2(-8 + 16e^{-1} - 8e^{-2}) + 16e^{-1} - 16e^{-2}}{\underbrace{-2e^{-3} + e^{-3}}_{\cancel{(-e^{-3})}\ (-e^{-1})}} =$$

$$= \frac{16 - 32e^{-1} + \cancel{16e^{-2}} + 16e^{-1} - \cancel{16e^{-2}}}{-e^{-1}} = \frac{16 - 16e^{-1}}{-e^{-1}} =$$

$$= -16 \cdot e + 16 = 16 - 16 \cdot e$$

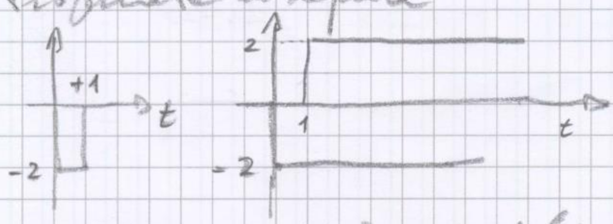
$$c_2 = \frac{\cancel{-16e^{-2}} + 16e^{-3} - 8e^{-1} \cancel{+16e^{-2}} - 8e^{-3}}{-e^{-3}} =$$

$$= \frac{-8e^{-1} + 8e^{-3}}{-e^{-3}} = 8e^{2} - 8$$

determinazione di $y(t)\big|_{t \geq 0}$ con le sole proprietà della trasformata di Laplace

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-t_0 s}\mathcal{L}[f(t)]$$

$$f(t-t_0) = \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-t_0 s}F(s)\right]$$



$$u(t) = -2 \cdot 1(t) + 2 \cdot 1(t-1)$$

$$U(s) = -2 \cdot \frac{1}{s} + 2 \cdot e^{-s} \cdot \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{-16}{s(s+1)(s+2)} + \frac{16}{s(s+1)(s+2)}\,e^{-s}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-16}{s(s+1)(s+2)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{16}{s(s+1)(s+2)}\,e^{-s}\right] =$$

$$= \left(-8 + 16e^{-t} - 8e^{-2t}\right)\cdot 1(t) + \left(+8 - 16e^{-(t-1)} + 8e^{-2(t-1)}\right)1(t-1)$$

Quindi per $t \in [0,1)$: $y(t) = -8 + 16e^{-t} - 8e^{-2t}$

Per $t \geq 1$ $\quad y(t) = \cancel{-8} + 16e^{-t} - 8e^{-2t} \cancel{+8} - 16e^{-(t-1)} + 8e^{-2(t-1)} =$

$$= 16e^{-t} - 16e^{-t}\cdot e - 8e^{-2t} + 8e^{-2t}\cdot e^{2}$$

$$= (16 - 16e)\,e^{-t} + (-8 + 8e^{2})\,e^{-2t}$$

ok!

4.
Vedi appunti dell'insegnamento.

5.

1) Sia $L(s) := \dfrac{100(s+1)^2}{s^3(s+10)}$

$$L(j\omega) = \frac{100(j\omega+1)^2}{(j\omega)^3(j\omega+10)}$$

$$|L(j\omega)| = \frac{100(1+\omega^2)}{\omega^3(100+\omega^2)^{1/2}}$$

$$\arg L(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi - arctg\,0.1\omega + 2arctg\,\omega$$

Studio del diagramma polare di $L(j\omega)$:

Comportamento per $\omega \to 0^+$:
Il diagramma polare parte da un punto all'infinito

$$\lim_{\omega\to\infty} |L(j\omega)| = \infty$$

$$\lim_{\omega\to 0^+} \arg L(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi$$

Comportamento per $\omega \to \infty$:
Il diagramma termina nell'origine tangente a uno degli assi coordinati, essendo

$$\lim_{\omega\to\infty} |L(j\omega)| = 0$$

$$\lim_{\omega\to\infty} \arg L(j\omega) = -\pi$$

La rotazione complessiva intorno all'origine per ω variabile da 0 a ∞ è di $-\pi$.

Calcolo dell'intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo:

$$\arg L(j\omega_p) = -\pi$$

$$-\frac{3}{2}\pi - arctg\,0.1\omega + 2arctg\,\omega = -\pi$$

$$-arctg\,0.1\omega + 2arctg\,\omega = \frac{\pi}{2}$$

$$1 + tg(2arctg\,\omega)\cdot 0.1\omega = 0$$

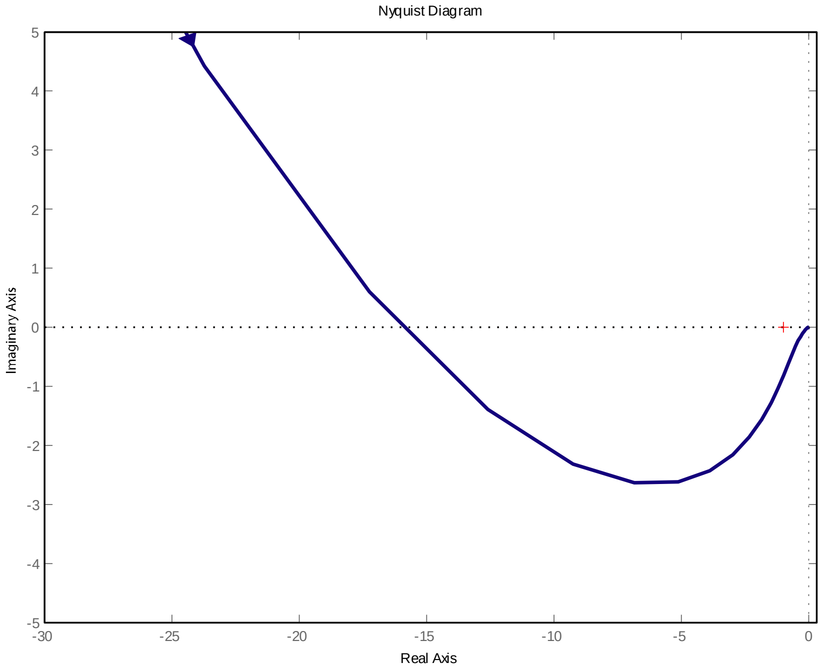
$$1 + \frac{2\omega}{1-\omega^2} - \frac{\omega}{10} = 0$$

$$\omega_p = \sqrt{5/4} \simeq 1.118 rad/\sec$$

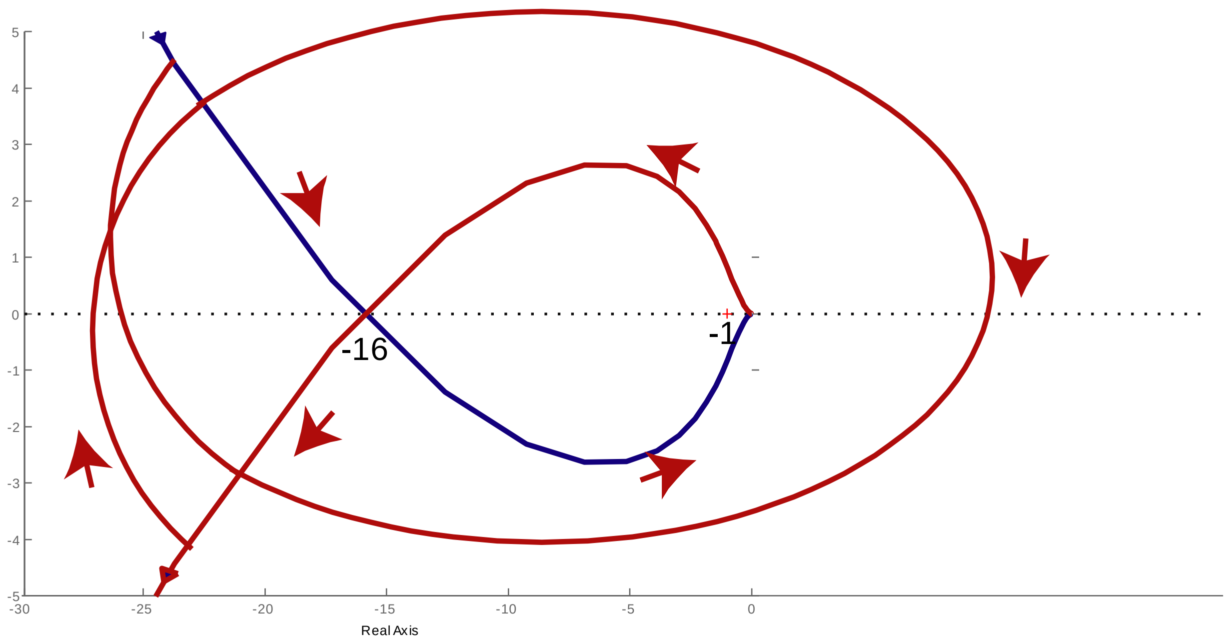
$$|L(j\omega_p)| = 16$$

$$L(j\omega_p) = -16$$

Il diagramma polare del guadagno di anello risulta pertanto:



2) Il diagramma polare completo è:



Si può concludere che per il criterio di Nyquist il sistema retroazionato è **asintoticamente stabile**, infatti il numero totale di giri del diagramma polare completo attorno al punto critico -1 è nullo.

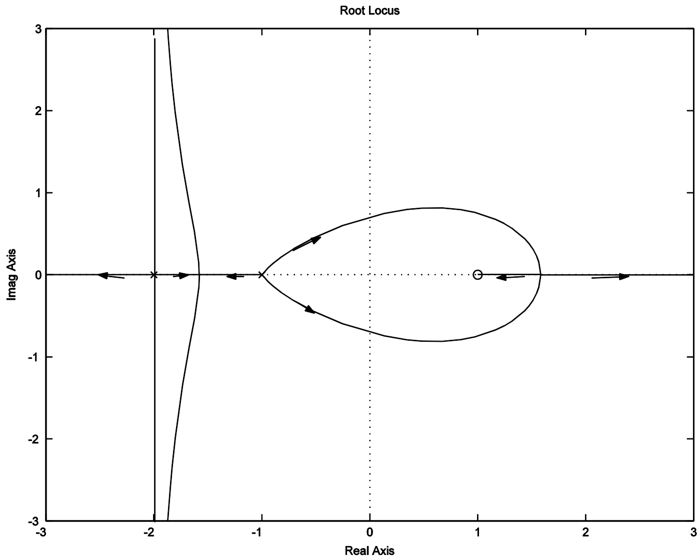
6.

L'equazione caratteristica è riscrivibile come

$$1+K_1\frac{s-1}{(s+1)^3(s+2)^2}=0 \quad \text{con } K_1=-K\in(-\infty,0]$$

e quindi si tratta di un luogo inverso. Presenta 4 asintoti il cui centro ha ascissa

$$\sigma_a=\frac{-1-1-1-2-2-(+1)}{5-1}=-2$$



Le radici doppie sono determinabili risolvendo l'equazione:

$$\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s-1}=0$$

$$\frac{3}{s+1}+\frac{2}{s+2}-\frac{1}{s-1}=0$$

$$4s^2-10=0$$

$$s_{1,2}=\pm\sqrt{5/2}=\pm 1{,}5811$$

7.

5. Tentativamente si cerca con un controllore di ordine 1 di soddisfare tutte le specifiche imposte:

$$C(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s} \quad , \; b_0, b_1 \in \mathbb{R} \text{ parametri di progetto}$$

$$1 + C(s)P(s) = 0 \iff s^3 + (b_1+2)s^2 + (b_0 - b_1 + 2)s - b_0 = 0$$

$$\boxed{P_c(s) \triangleq s^3 + (b_1+2)s^2 + (b_0 - b_1 + 2)s - b_0}$$

$T_a = \frac{3}{G_s}$, da $T_a = 9$ sec. $\Rightarrow G_s = \frac{1}{3}$

Si sceglie un polinomio caratteristico desiderato che soddisfi le specifiche 2) e 3):

$$P_d(s) = \left(s + \frac{1}{3}\right)(s+\alpha)(s+\beta) \quad \text{con } \alpha, \beta > \frac{1}{3}$$

$$\boxed{P_d(s) = s^3 + \left(\frac{1}{3} + \alpha + \beta\right)s^2 + \left(\alpha\beta + \frac{1}{3}(\alpha+\beta)\right)s + \frac{1}{3}\alpha\beta}$$

Si impone $P_c(s) \equiv P_d(s)$

$$\begin{cases} b_1 + 2 = \frac{1}{3} + \alpha + \beta \\ b_0 - b_1 + 2 = \alpha\beta + \frac{1}{3}(\alpha+\beta) \\ -b_0 = \frac{1}{3}\alpha\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{11 - 4\beta}{4\beta + 4}$$

Scegliamo $\beta = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2} > \frac{1}{3}$. Quindi $\begin{cases} b_0 = -\frac{1}{4} \\ b_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$

$C(s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{s - \frac{3}{4}}{s}$ è un controllore di ordine minimo che soddisfa le specifiche richieste.

8.

La funzione di trasferimento è

$$H(z) = \frac{z^2+4z+4}{z^2+\frac{1}{4}z-\frac{1}{8}} = \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

$$Y(z) = H(z)\,U(z) = \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)} \cdot \frac{z}{z-1}$$

$$Y(z) = z \cdot \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)(z-1)} = z \cdot \left(\frac{K_1}{z-1} + \frac{K_2}{z+\frac{1}{2}} + \frac{K_3}{z-\frac{1}{4}} \right)$$

$$K_1 = \left.\frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}\right|_{z=1} = 8$$

$$K_2 = \left.\frac{(z+2)^2}{\left(z-\frac{1}{4}\right)(z-1)}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = 2$$

$$K_1 + K_2 + K_3 = 1 \Rightarrow K_3 = -9$$

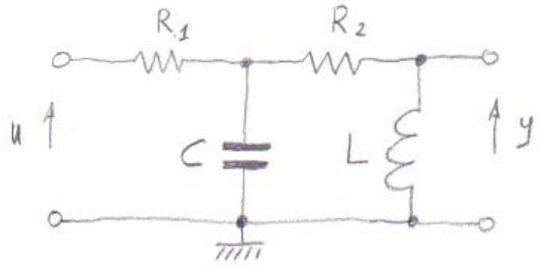
$$Y(z) = 8\frac{z}{z-1} + 2\frac{z}{z+\frac{1}{2}} - 9\frac{z}{z-\frac{1}{4}}$$

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[Y(z)\right] = 8 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 9\left(\frac{1}{4}\right)^k, \quad k \geq 0$$

Parte A

1. [punti 4] Fornire una definizione generale di margine di ampiezza M_A e margine di fase M_F per un sistema retroazionato asintoticamente stabile. Giustificare tali definizioni enunciando e dimostrando le pertinenti proprietà geometriche. Definire una procedura per il calcolo di M_A ed M_F nel caso di intersezioni multiple del diagramma polare con l'asse reale negativo e con la circonferenza unitaria.

2. [punti 4] Il circuito elettrico di figura definisca un sistema dinamico orientato da u (tensione elettrica) ad y (tensione elettrica).



Determinare per questo sistema:
1. la funzione di trasferimento;
2. l'equazione differenziale;
3. il guadagno statico.

3. [punti 4] Determinare l'evoluzione forzata $y(t)$ in risposta al gradino unitario $u(t) = 1(t)$ di un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{1}{(s+1)^3(s+2)}$. Determinare inoltre la classe di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$.

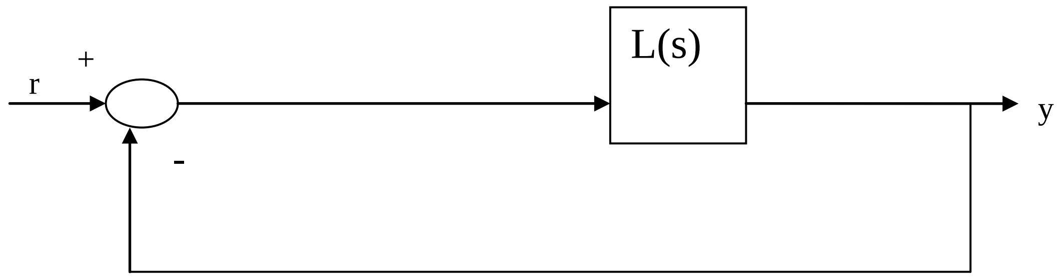
4. [punti 5] Un sistema a tempo discreto con ingresso $u(k)$ ed uscita $y(k)$ è definito dall'equazione alle differenze

$$a_2 y(k) + a_1 y(k-1) + a_0 y(k-2) = b_2 u(k) + b_1 u(k-1) + b_0 u(k-2).$$

Considerando condizioni iniziali generali si determini la trasformata zeta dell'uscita $Y(z) \triangleq \mathcal{Z}[y(k)]$ (si ponga $u_{-1} \triangleq u(-1)$, $u_{-2} \triangleq u(-2)$, $y_{-1} \triangleq y(-1)$, $y_{-2} \triangleq y(-2)$ e $U(z) \triangleq \mathcal{Z}[u(k)]$).

Parte B

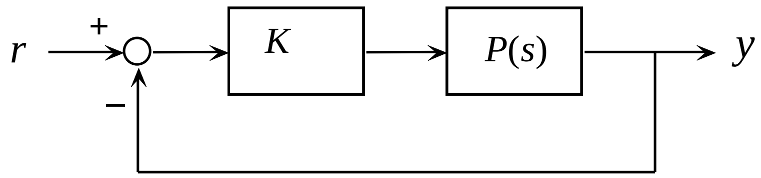
5. [punti 5] Sia dato il seguente sistema retroazionato



dove $L(s) = 100\dfrac{(1-s)^2}{(s+1)^2(s+10)^2}$.

a) Tracciare il diagramma polare associato alla funzione di trasferimento $L(s)$ determinando in particolare le intersezioni con l'asse reale negativo.
b) Studiare la stabilità del sistema retroazionato mediante il criterio di Nyquist.

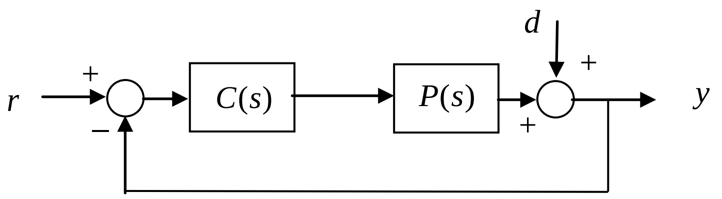
6. [punti 5] Sia dato il sistema in retroazione di figura



dove $P(s) = \dfrac{1}{s(s+2)^3}$.

a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K > 0$ determinando in particolare
   1. Asintoti del luogo.
   2. Eventuali radici doppie.
   3. Angoli di partenza del luogo.
b. Determinare i valori di $K \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Determinare inoltre le intersezioni del luogo delle radici dell'equazione caratteristica con l'asse immaginario del piano complesso.
c. Determinare il valore di K che massimizza il grado di stabilità del sistema retroazionato: $K^* = \arg\max_{K\in\mathbb{R}} G_S(K)$.

7. [punti 5] Sia dato il seguente sistema



dove $P(s) = \frac{9}{s+5}$.

Determinare un controllore proprio di ordine minimo $C(s)$ affinché le seguenti specifiche siano soddisfatte:

1. reiezione infinita asintotica al disturbo composito $d(t) = 5 + 11 \cdot \cos(3t+2)$;
2. costante di velocità $K_v = 4$;
3. sistema retroazionato asintoticamente stabile con tre poli dominanti in $-2, -2 \pm j$.

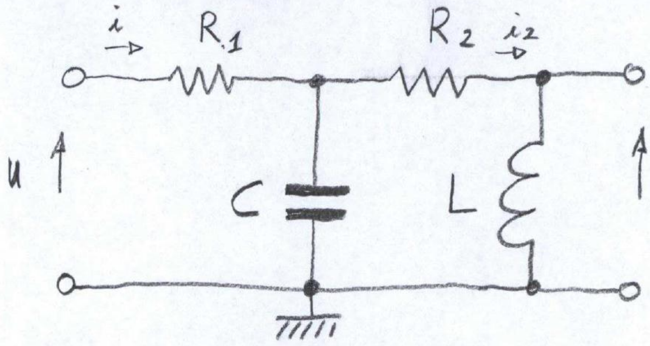
8. [punti 4] Determinare la risposta forzata $y(k)$ all'ingresso $u(k) = 1(k)$ (gradino unitario) di un sistema a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze

$$y(k) - \frac{1}{4} y(k-2) = u(k) + u(k-2) \; .$$

Tracce delle soluzioni

1
Vedi dispense del corso.

2.



$$Z(s) = R_1 + \frac{\frac{1}{sC}(R_2 + Ls)}{\frac{1}{sC} + R_2 + Ls} \qquad I(s) = \frac{U(s)}{Z(s)}$$

$$I_2 = I \cdot \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC} + R_2 + Ls} \ ; \qquad Y = Ls \cdot I_2$$

$$Y(s) = \frac{Ls}{LR_1Cs^2 + (L + R_1R_2C)s + R_1 + R_2} \cdot U(s) \triangleq G(s)U(s)$$

f.d.t. $$G(s) = \frac{Ls}{LR_1Cs^2 + (L + R_1R_2C)s + R_1 + R_2}$$

eq. diff. $$LR_1C\,D^2y(t) + (L + R_1R_2C)\,Dy(t) + (R_1 + R_2)\,y(t) = $$
$$= L\,Du(t)$$

guadagno statico $G(0) = 0$.

3.

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)^3(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1)^3} + \frac{K_{22}}{(s+1)^2} + \frac{K_{23}}{s+1} + \frac{K_3}{s+2}$$

$$K_1 = \left.\frac{1}{(s+1)^3(s+2)}\right|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$K_{21} = \left.\frac{1}{s(s+2)}\right|_{s=-1} = \frac{1}{(-1)(1)} = -1$$

$$K_3 = \left.\frac{1}{s(s+1)}\right|_{s=-2} = \frac{1}{(-2)(-1)} = \frac{1}{2}$$

$$K_1 + K_{23} + K_3 = 0 \qquad K_{23} = -K_1 - K_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

$$K_{22} = \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s(s+2)}\right)\right|_{s=-1} = -\left.\frac{s+2+s}{s^2(s+2)^2}\right|_{s=-1} = 0$$

$$Y(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2e^{-t} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \qquad t \geq 0}$$

Il segnale u(t)=1(t) è discontinuo su R, quindi il grado massimo di continuità della risposta y(t) è {grado relativo} - 1 = 4 – 1 = 3

4.

$$a_2\, y(k) + a_1\, y(k-1) + a_0\, y(k-2) =$$
$$= b_2\, u(k) + b_1\, u(k-1) + b_0\, u(k-2)$$

$$a_2\, Y(z) + a_1 \left\{ z^{-1} Y(z) + y_{-1} \right\} + a_0 \left\{ z^{-2} Y(z) + y_{-2} + y_{-1} z^{-1} \right\} =$$
$$= b_2\, U(z) + b_1 \left\{ z^{-1} U(z) + u_{-1} \right\} + b_0 \left\{ z^{-2} U(z) + u_{-2} + u_{-1} z^{-1} \right\}$$

$$a_2 z^2 Y + a_1 \left(z Y + y_{-1} z^2 \right) + a_0 \left(Y + y_{-2} z^2 + y_{-1} z \right) =$$
$$= b_2 z^2 U + b_1 \left(z U + u_{-1} z^2 \right) + b_0 \left(U + u_{-2} z^2 + u_{-1} z \right)$$

$$(a_2 z^2 + a_1 z + a_0) Y + a_1 y_{-1} z^2 + a_0 y_{-2} z^2 + a_0 y_{-1} z =$$
$$= (b_2 z^2 + b_1 z + b_0) U + b_1 u_{-1} z^2 + b_0 u_{-2} z^2 + b_0 u_{-1} z$$

$$Y = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0} U + \frac{C(z)}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}$$

$$C(z) \triangleq c_2 z^2 + c_1 z$$

$$c_2 \triangleq b_1 u_{-1} + b_0 u_{-2} - a_1 y_{-1} - a_0 y_{-2}$$
$$c_1 \triangleq b_0 u_{-1} - a_0 y_{-1}$$

5.
Il sistema ammette la seguente funzione di risposta armonica

$$L(j\omega) = 100 \frac{(1 - j\omega)^2}{(1 + j\omega)^2 (10 + j\omega)^2}$$

il cui modulo è dato da

$$|L(j\omega)| = 100 \frac{(1+\omega^2)}{(1+\omega^2)(100+\omega^2)} = \frac{100}{(100+\omega^2)}$$

e la cui fase è data da

$$\arg L(j\omega) = -2 \arctan \omega - 2 \arctan \omega - 2 \arctan \frac{\omega}{10} = -4 \arctan \omega - 2 \arctan \frac{\omega}{10} .$$

Valutando i valori al limite si ottiene

$$\lim_{\omega \to 0} |L(j\omega)| = 1 \qquad \lim_{\omega \to 0} \arg L(j\omega) = 0$$

$$\lim_{\omega\to\infty}|L(j\omega)| = 0 \qquad \lim_{\omega\to\infty}\arg L(j\omega) = -4\frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{2} = -3\pi\,.$$

Al fine di ottenere un miglior tracciamento e di valutare la stabilità del sistema è necessario valutare l'intersezione del diagramma di Nyquist con l'asse reale negativo

$$\arg L(j\omega_p) = -\pi$$

$$-4\arctan\omega_p - 2\arctan\frac{\omega_p}{10} = -\pi$$

$$2\arctan\omega_p + \arctan\frac{\omega_p}{10} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\tan\left(2\arctan\omega_p\right) + \frac{\omega_p}{10}}{1 - \tan\left(2\arctan\omega_p\right)\frac{\omega_p}{10}} = \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$1 - \tan\left(2\arctan\omega_p\right)\frac{\omega_p}{10} = 0$$

Poiché si ha che

$$\tan\left(2\arctan\omega_p\right) = \tan\left(\arctan\omega_p + \arctan\omega_p\right) = \frac{\omega_p + \omega_p}{1 - \omega_p\omega_p} = \frac{2\omega_p}{1 - \omega_p^2}$$

l'equazione da risolvere sarà

$$1 - \frac{2\omega_p}{1-\omega_p^2}\frac{\omega_p}{10} = 1 - \frac{\omega_p^2}{5(1-\omega_p^2)} = 0$$

$$5 - 5\omega_p^2 - \omega_p^2 = 5 - 6\omega_p^2 = 0$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{5}{6}} = 0{,}9129\,\text{rad/s}$$

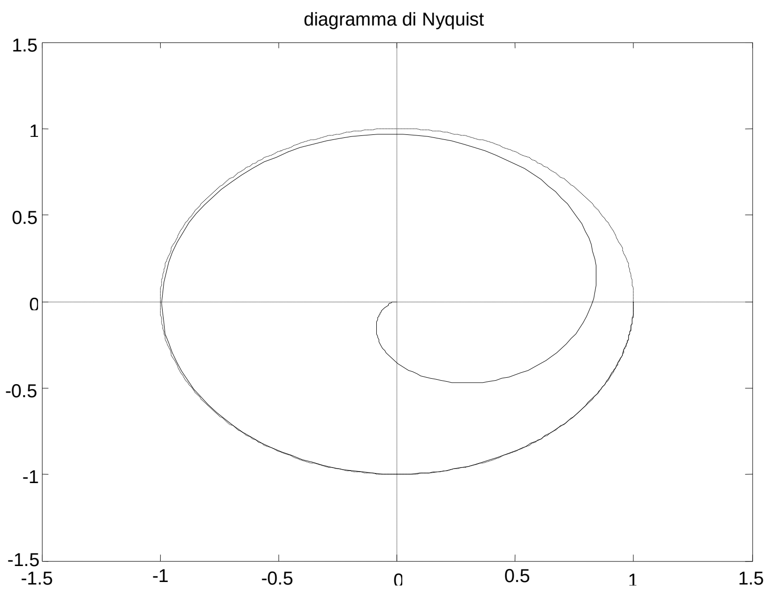
e l'intersezione sarà data da

$$|L(j\omega_p)| = \frac{100}{(100+\omega_p^2)} = \frac{100}{\left(100 + \frac{5}{6}\right)} = 0.9917$$

Pertanto

$$L(j\omega_p) = -0{,}9917$$

In accordo con i risultati ottenuti, il diagramma complessivo sarà il seguente



b) Il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto critico -1. Considerato che L(s) non presenta poli a parte reale negativa ne consegue, per il Criterio di Nyquist, che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Si osservi che tale stabilità è, da un punto di vista realizzativo, alquanto precaria in virtù di un margine di ampiezza estremamente piccolo (M_A=1,0083).

6.

4. Eq. caratteristica $1+K\frac{1}{s(s+2)^3}=0$

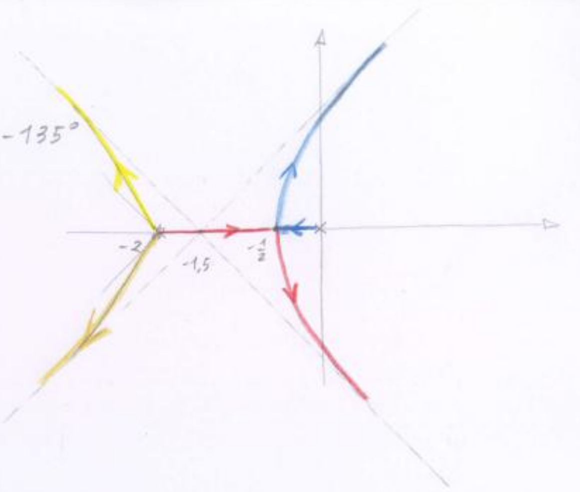
a) Asintoti del luogo: $\sigma_a=\frac{0-2-2-2}{4}=-1,5$

$\theta_{1,a}=+45°,\ \theta_{2,a}=+135°,\ \theta_{3,a}=-45°,\ \theta_{4,a}=-135°$

Radici doppie: $3\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s}=0 \Rightarrow s=-\frac{1}{2}=-0,5$

Angoli di partenza: da $P_1=0$ $\theta_1=180°$

da $P_2=-2$ $\theta_{2,1}=0°,\ \theta_{2,2}=+120°,\ \theta_{2,3}=-120°$



b) $s^4+6s^3+12s^2+8s+K=0$

4	1	12	K
3	$\cancel{6}$ 3	$\cancel{8}$ 4	0
2	32	3K	0
1	128-9K	0	
0	3K		

$\begin{cases}128-9K>0\\3K>0\end{cases}$

$K\in\left(0,\frac{128}{9}\right)=(0,14,\bar{2})$

eq. ausiliaria per $K=\frac{128}{9}$: $32s^2+3\frac{128}{9}=0 \Rightarrow s_{1,2}=\pm j\sqrt{\frac{4}{3}}\simeq\pm j1,1547$

Le intersezioni del luogo con $j\mathbb{R}$ avvengono in $\pm j1,1547$.

c) Dalla geometria del luogo si deduce:

$1+K^*P(-\frac{1}{2})=0 \Rightarrow 1+K^*\frac{1}{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}+2)^3}=0 \Rightarrow K^*=\frac{27}{16}=1,6875.$

7.

Soluzione

$$C(s) = \frac{y_3 s^3 + y_2 s^2 + y_1 s + y_0}{s(s^2+9)}$$

$$L(s) = CP = \frac{9\cdot(y_3 s^3 + y_2 s^2 + y_1 s + y_0)}{s(s^2+9)(s+5)}$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} sL(s) = \frac{\cancel{9}\cdot y_0}{\cancel{9}\cdot 5} = \frac{y_0}{5} = 4$$

$y_0 = 20$ oppure $\frac{9y_0}{9\cdot 5} = 4$

$1+L(s)=0$

$$s(s^2+9)\cdot(s+5) + 9(y_3 s^3 + y_2 s^2 + y_1 s + y_0)$$

$$((s+2)^2+1)(s+2)(s+c)$$

$9y_3+5 = 6+c$ $\quad 9y_3+5=24$ $\quad 9y_3=19$ $\quad y_3=\frac{19}{9}$

$9y_2+9 = 13+6c$ $\quad 9y_2+9=13+108$ $\quad 9y_2=112$ $\quad y_2=\frac{112}{9}$

$9y_1+45 = 10+13c$ $\quad 9y_1+45=10+234$ $\quad 9y_1=199$ $\quad y_1=\frac{199}{9}$

$180 = 10c \Rightarrow c = 18$ $\quad c >> 2$ ok!

$$C(s) = \frac{2{,}11 s^3 + 12{,}4 s^2 + 13{,}2 s + 20}{s(s^2+9)}$$

8.

La funzione di trasferimento è $H(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2-\frac{1}{4}} = \dfrac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{z}{z-1} = z \cdot A(z)$$

$$A(z) = \frac{z^2+1}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z+\frac{1}{2}} + \frac{c_3}{z-\frac{1}{2}}$$

$$c_1 = \left.\frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\right|_{z=1} = \frac{8}{3} \qquad c_2 = \left.\frac{z^2+1}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{5}{6}$$

$$c_3 = \left.\frac{z^2+1}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)}\right|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{5}{2}$$

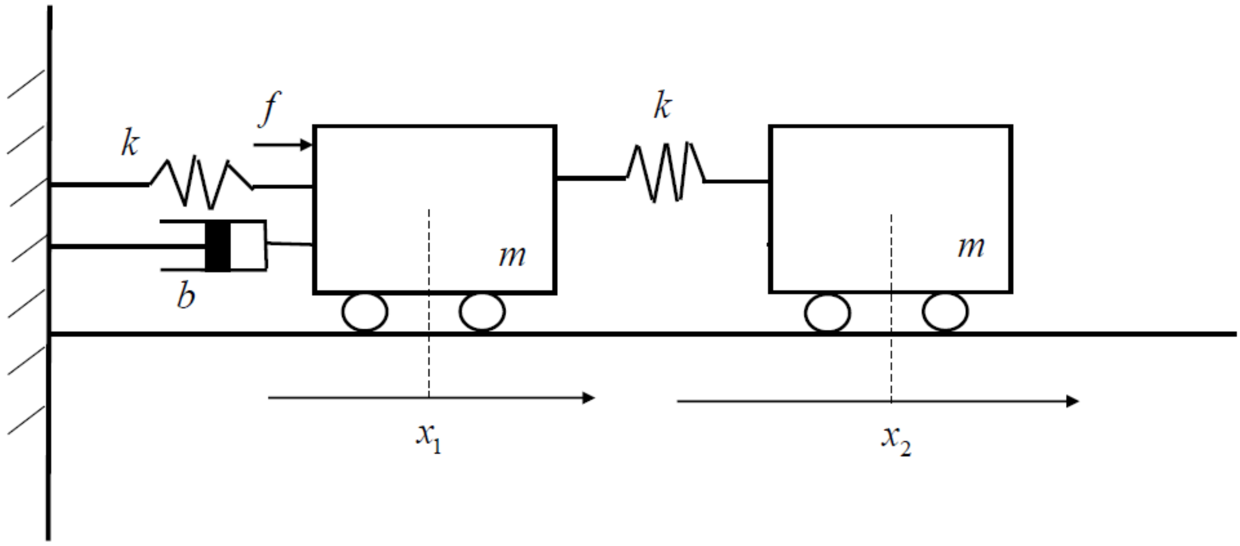
$$Y(z) = \frac{8}{3} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{5}{6} \cdot \frac{z}{z+\frac{1}{2}} - \frac{5}{2} \cdot \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{y(k) = \frac{8}{3} + \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^k - \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k \geq 0}$$

Parte A

1. [punti 4] Presentare e dimostrare le formule di inversione per la sintesi in frequenza delle reti correttrici. Si esponga inoltre il metodo delle formule di inversione per la sintesi della rete **anticipatrice** con imposizione del **margine di ampiezza** M_A .

2. [punti 4] Due carrelli di massa m collegati come mostrato in figura costituiscono un sistema dinamico Σ orientato da f (forza applicata al carrello di sinistra) ad x_1 (posizione del carrello di sinistra). In condizione di riposo delle molle sia $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$.



1. Determinare l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.
2. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ di Σ.
3. Determinare il guadagno statico e gli zeri di Σ.

3. [punti 5] Dato un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{1}{s+1}$, a partire da condizioni iniziali nulle, determinarne la risposta $y(t),\ t \in [0, +\infty)$ al segnale di ingresso così definito:

$$u(t) = \begin{cases} 1+2t & 0 \le t < 1 \\ t-1 & t \ge 1 \end{cases}$$

4. [punti 4] Presentare e dimostrare la formula di antitrasformazione zeta, ovvero l'espressione che determina la sequenza a tempo discreto $x(k)$ nota che sia $X(z) \triangleq \mathcal{Z}[x(k)]$.

Parte B

5. [punti 4]

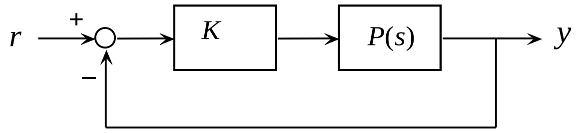
1) Tracciare il diagramma polare associato alla funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{100(1-s)^2}{s(s+2)^3}$$

determinando in particolare l'asintoto e l'intersezione con l'asse reale negativo.

2) Utilizzando il Criterio di Nyquist si studino le radici dell'equazione caratteristica $1+P(s)=0$ (quante a parte reale negativa, quante puramente immaginarie, quante a parte reale positiva).

6. [punti 5] Sia dato il sistema in retroazione di figura



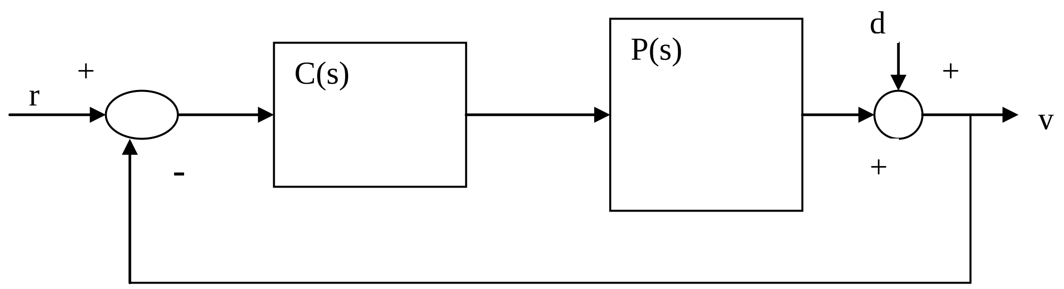
dove $P(s) = \dfrac{s+3}{s(s+2)^3}$.

a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K > 0$ determinando in particolare
   1. Asintoti del luogo.
   2. Eventuali radici doppie.
   3. Angoli di partenza del luogo.

b. Determinare i valori di $K \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Determinare inoltre le intersezioni del luogo delle radici dell'equazione caratteristica con l'asse immaginario del piano complesso.

c. Determinare il valore di K che massimizza il grado di stabilità del sistema retroazionato: $K^* = \arg\max_{K\in\mathbb{R}} G_S(K)$.

7. [punti 5] Sia dato il seguente sistema retroazionato



dove $P(s) = \dfrac{10}{s+5}$. Progettare un controllore C(s) proprio affinché:

a) Il sistema sull'uscita controllata y abbia reiezione infinita (asintoticamente) del disturbo armonico $d(t) = 3{,}5\ \mathrm{sen}(2t)$.

b) Il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile con poli dominanti $-10 \pm j2$.

8. [punti 5] Sia dato il sistema a tempo discreto definito dall'equazione

$$16y(k+13) - 12y(k+12) + y(k+10) = 16u(k+11) + 16u(k+10),\ k \in \mathbb{Z}$$

ed orientato da $u(k)$ (ingresso) a $y(k)$ (uscita).

1) Determinare la funzione di trasferimento del sistema.

2) Studiare la stabilità alle perturbazioni del sistema.

Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

2

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = f - k x_1 - b D x_1 + k(x_2 - x_1) \\ m D^2 x_2 = -k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = f - 2k x_1 - b D x_1 + k x_2 \\ m D^2 x_2 = -k x_2 + k x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k x_2 = m D^2 x_1 + b D x_1 + 2k x_1 - f \\ m D^2 x_2 + k x_2 = k x_1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} (mD^2+k) \\ k \end{array} \begin{cases} k x_2 = m D^2 x_1 + b D x_1 + 2k x_1 - f \\ (m D^2 + k) x_2 = k x_1 \end{cases}$$

$$(mD^2+k)(mD^2+bD+2k)x_1 - (mD^2+k)f = k^2 x_1$$

$$(m^2D^4 + mbD^3 + 2kmD^2 + kmD^2 + kbD + \cancel{2}k^2)x_1 - \cancel{k^2 x_1} =$$
$$= (mD^2+k)f$$

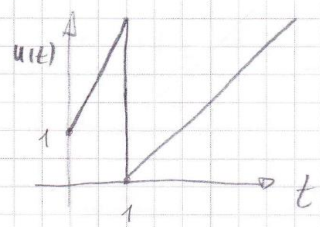
eq. diff. $m^2 D^4 x_1 + m b D^3 x_1 + 3km D^2 x_1 + k b D x_1 + k^2 x_1 = m D^2 f + k f$

f.d.t. $G(s) = \dfrac{m s^2 + k}{m^2 s^4 + m b s^3 + 3km s^2 + kbs + k^2}$

3. Il guadagno statico è G(0)=1/k.

Gli zeri sono $z_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}}$

3.



$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$u(t) = \begin{cases} 1 + 2t & t \in [0, 1) \\ t - 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

1° metodo

$$u(t) = 1 + 2t - (1+2t)1(t-1) + (t-1)\cdot 1(t-1)$$
$$= 1 + 2t - (t+2)1(t-1) = 1 + 2t - [(t-1) + 3]\,1(t-1)$$

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \qquad u(t) = 1+2t - \left[(t-1) + 3 \right] \cdot 1(t-1)$$

$$U(s) = \frac{1}{s} + 2 \cdot \frac{1}{s^2} - e^{-s} \left(\frac{1}{s^2} + 3 \cdot \frac{1}{s} \right)$$

$$= \frac{s+2}{s^2} - e^{-s} \cdot \frac{1+3s}{s^2}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{s+2}{s^2} - e^{-s} \cdot \frac{1+3s}{s^2} \cdot \frac{1}{s+1} =$$

$$= \frac{s+2}{s^2(s+1)} - e^{-s} \cdot \frac{1+3s}{s^2(s+1)}$$

$$\frac{s+2}{s^2(s+1)} = \frac{c_{11}}{s^2} + \frac{c_{12}}{s} + \frac{c_2}{s+1} = \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

$$c_{11} = \left. \frac{s+2}{s+1} \right|_{s=0} = 2 \qquad c_2 = \left. \frac{s+2}{s^2} \right|_{s=-1} = 1$$

$$c_{12} + c_2 = 0 \qquad c_{12} = -c_2 = -1$$

$$\frac{1+3s}{s^2(s+1)} = \frac{c_{11}}{s^2} + \frac{c_{12}}{s} + \frac{c_2}{s+1} = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1}$$

$$c_{11} = \left. \frac{1+3s}{s+1} \right|_{s=0} = 1 \qquad c_2 = \left. \frac{1+3s}{s^2} \right|_{s=-1} = -2$$

$$c_{12} + c_2 = 0 \qquad c_{12} = 2$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \right] - \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-s} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1} \right) \right] =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1} \right](t-1) \cdot 1(t-1)$$

$$= 2t - 1 + e^{-t} - \left[(t-1) + 2 - 2e^{-(t-1)} \right] \cdot 1(t-1)$$

Se $t \in [0,1)$ $\quad y(t) = 2t - 1 + e^{-t}$

Se $t \in [1, +\infty)$

$$y(t) = 2t - 1 + e^{-t} - \left[t - 1 + 2 - 2 \cdot e^{-(t-1)} \right]$$

$$= t - 2 + e^{-t} + 2e^{-(t-1)}$$

$$= t - 2 + e^{-t}(1 + 2e)$$

2° metodo

Per $t \in [0,1)$ $\quad u(t) = 1 + 2t$

$$U(s) = \frac{1}{s} + 2\cdot\frac{1}{s^2} \qquad Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s+2}{s^2(s+1)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{s^2(s+1)}\right] = 2t - 1 + e^{-t}$$

Per $t \in [1, +\infty)$:

$$y(t) = y_{for.}(t) + y_{lib.}(t)$$

La risposta forzata è causata dall'ingresso $u(t) = t - 1$

La risposta libera è determinata dalla condizione iniziale $y(1^-)$

$$y(1^-) = 2t - 1 + e^{-t}\Big|_{t=1} = 1 + e^{-1}$$

EQ DIFF

eq. diff. $\quad Dy(t) + y(t) = u(t)$

Cambio di variabile : $\tau = t - 1$

come se iniziasse da zero

$$y(\tau) = y_{for.}(\tau) + y_{lib.}(\tau)$$

DERIV GEN

eq. diff. $\quad D^* y(\tau) + y(\tau) = u(\tau)$

LAPLACE

$$sY(s) - y(0^-) + Y(s) = U(s)$$

$$(s+1)Y(s) - y(0^-) = U(s)$$

ANTITRAS

$$Y(s) = \frac{1}{s+1}U(s) + \frac{y(0^-)}{s+1} = \frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s^2} + \frac{y(0^-)}{s+1}$$

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{c_{11}}{s^2} + \frac{c_{12}}{s} + \frac{c_2}{s+1} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

$$c_{11} = \frac{1}{s+1}\Big|_{s=0} = 1 \qquad c_2 = \frac{1}{s^2}\Big|_{s=-1} = 1$$

TRASLA

$$c_{12} + c_2 = 0 \qquad c_{12} = -1$$

$$y(\tau) = \tau - 1 + e^{-\tau} + (1 + e^{-1})\cdot e^{-\tau}$$

$$y(t) = t - 1 - 1 + e^{-(t-1)} + (1 + e^{-1})\,e^{-(t-1)}$$

$$= t - 2 + e^{-t}\cdot e + (1 + e^{-1})\,e^{-t}\cdot e = t - 2 + e^{-t}\cdot e + (e+1)\,e^{-t}$$

$$= t - 2 + e^{-t}(e + e + 1) = t - 2 + e^{-t}(1 + 2e)$$

3° metodo

Per $t \in [0, 1)$ $\quad u(t) = 1 + 2t$

$U(s) = \frac{1}{s} + 2 \cdot \frac{1}{s^2}$ $\quad Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s+2}{s^2(s+1)}$

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{s^2(s+1)}\right] = 2t - 1 + e^{-t}$

Per $t \in [1, +\infty)$

Si effettua il cambio di variabile $\tau = t - 1$

$u(\tau) = \tau \implies y(\tau) = y_{for.}(\tau) + y_{lib.}(\tau)$

$Y_{for.}(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{c_{11}}{s^2} + \frac{c_{12}}{s} + \frac{c_2}{s+1}$

$c_{11} = 1, \quad c_2 = 1, \quad c_{12} + c_2 = 0 \implies c_{12} = -1$

$y_{for.}(\tau) = \tau - 1 + e^{-\tau}$ $\quad y_{lib.}(\tau) = c_3 e^{-\tau}$

$y(\tau) \in C^0(\mathbb{R}) \implies y(\tau)\big|_{\tau=0-} = y(\tau)\big|_{\tau=0+}$

$y(\tau)\big|_{\tau=0-} = y(t)\big|_{t=1-} = 1 + e^{-1}$

$y(\tau)\big|_{\tau=0+} = -1 + 1 + c_3 = c_3$

Quindi $c_3 = 1 + e^{-1}$

$y(\tau) = \tau - 1 + e^{-\tau} + (1 + e^{-1})e^{-\tau} = \tau - 1 + (2 + e^{-1})e^{-\tau}$

Ritornando alla variabile t:

$y(t) = t - 2 + (2 + e^{-1})e^{-(t-1)} = t - 2 + (1 + 2 \cdot e)e^{-t}$

4

Vedi appunti dell'insegnamento.

5.

a) Funzione di Trasferimento:

$$P(s) = 100\,\frac{(1-s)^2}{s\,(s+2)^3} \;\Rightarrow\; P(j\omega) = 12.5\,\frac{(1-j\omega)^2}{j\omega\,(1+0.5\,j\omega)^3}$$

Ascissa dell'asintoto: $\nabla_a = 12.5\,(-1-1-0.5-0.5-0.5) = -43.75$
Argomento della funzione di trasferimento:

$$\arg P(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 3\,\arctan(0.5\,\omega) - 2\,\arctan\omega$$

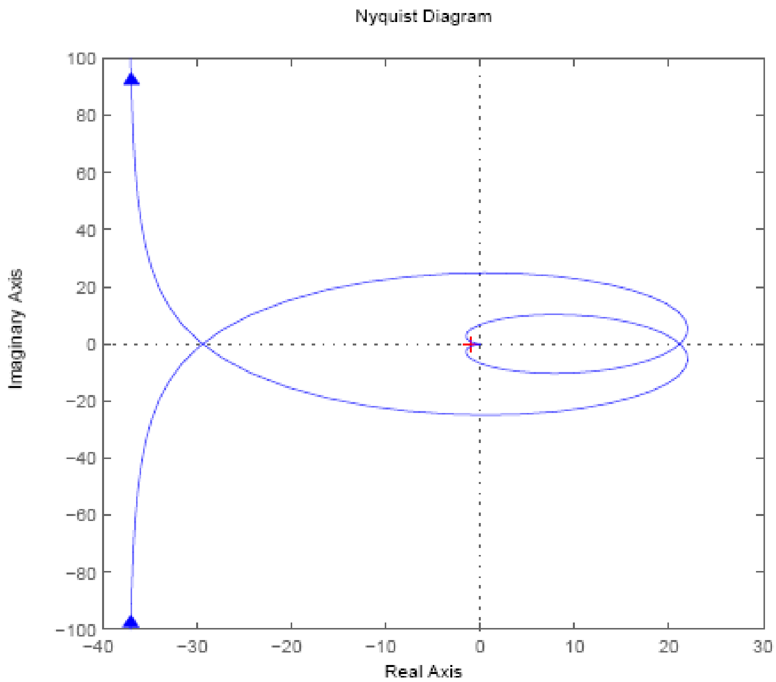
$$\text{per } \omega \to 0 \;\Rightarrow\; \arg P(j\omega) \to -\frac{\pi}{2} \qquad \text{per } \omega \to +\inf \;\Rightarrow\; \arg P(j\omega) \to -3\,\pi$$

Intersezione con l'asse reale negativo:

$$\arg P(j\omega_p) = -\pi \Rightarrow 3\,\arctan\frac{\omega_p}{2} + 2\,\arctan\omega_p = \frac{\pi}{2}$$

Attraverso una stima numerica si ottiene: $\omega_p \simeq 0,47$ [rad/s]
Intesezione:

$$|P(j\omega_p)| = 12.5\,\frac{(1+\omega_p^2)}{\omega_p\,\left(1+(\frac{\omega_p}{2})^2\right)^{\frac{3}{2}}} \simeq 29.95$$



b) Il diagramma polare completo circonda due volte in senso orario il punto -1 e il guadagno di anello non ha poli a parte reale positiva, quindi le radici di $1+P(s)$ sono:

$$\begin{array}{ll} n \in \mathbb{C}_+ : & 2 \\ n \in \mathbb{C}_- : & 2\;\;(4-2) \\ n \in j\,\mathbb{R} : & 0 \end{array}$$

6.

a) L'equazione caratteristica del sistema è data da $1 + L(s) = 0$ dove il guadagno di anello vale

$$L(s) = K\,\frac{s+3}{s\,(s+2)^3}$$

Il grado relativo è $\rho = 3$ e quindi avrò tre asintoti separati tra loro da angoli di 120° che si intersecano nel punto ∇_a che viene determinato nel modo seguente

$$\nabla_a = \frac{\sum_i p_i - \sum_i z_i}{\rho} = \frac{-2-2-2-0-(-3)}{3} = -1$$

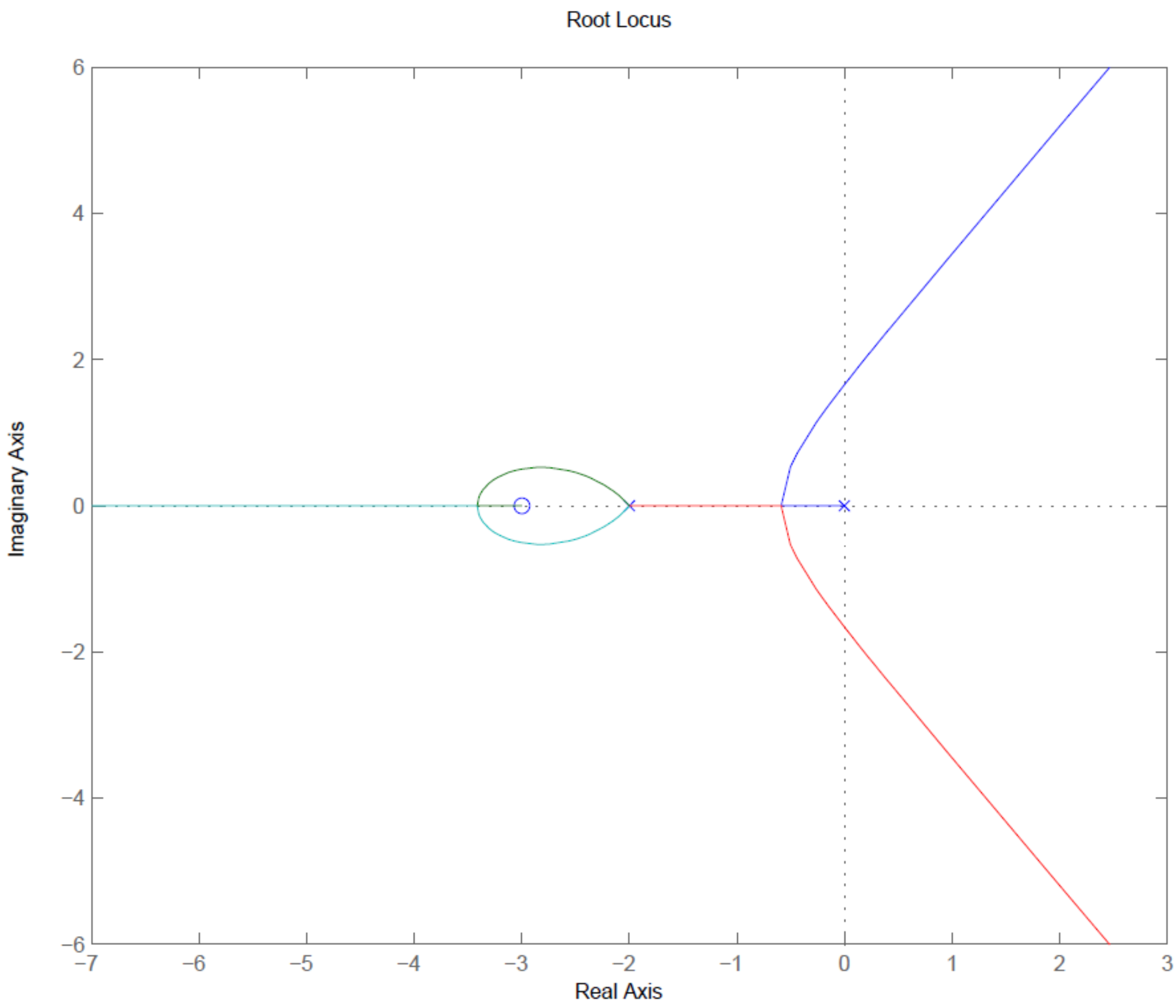
Si determinano le eventuali radici doppie come segue

$$\sum_i \frac{1}{s-p_i} - \sum_i \frac{1}{s-z_i} = \frac{1}{s} + \frac{3}{s+2} - \frac{1}{s+3} = 0$$

ottenendo l'equazione di secondo grado $s^2 + 4s + 2 = 0$ risolvendo la quale si ricava che le radici doppie sono in

$$s_1 = -0.5858 \qquad \text{e} \qquad s_2 = -3.4142$$

Per quanto riguarda gli angoli di partenza, è facile determinare che il polo nell'origine avrà angolo iniziale $\theta_1 = \pi$ mentre i tre poli in -2 avranno angoli di partenza $\theta_{1a} = 0$, $\theta_{1b} = \frac{2}{3}\,\pi$ e $\theta_{1b} = -\frac{2}{3}\,\pi$. Il luogo delle radici per $K > 0$ è quindi il seguente


Root Locus
Imaginary Axis
Real Axis
6
4
2
0
−2
−4
−6
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3

b) L'equazione caratteristica è la seguente

$$1 + K\,\frac{s+3}{s\,(s+2)^3} = 0$$

dalla quale viene determinato il polinomio caratteristico

$$p_c(s;K) = s^4 + 6\,s^3 + 12\,s^2 + (8+K)\,s + 3\,K$$

Applichiamo il Criterio di Routh e costruiamo la seguente tabella

$$\begin{array}{c|cccc}
\mathbf{4} & 1 & 12 & 3\,K & 0 \\
\mathbf{3} & 6 & 8+K & 0 & 0 \\
\mathbf{2} & \text{64-K} & \text{18K} & 0 & \\
\mathbf{1} & f(K) & 0 & & \\
\mathbf{0} & 18\,K & 0 & &
\end{array}$$

dove $f(K) = -K^2 - 52\,K + 512$. Perchè il sistema sia asintoticamente stabile devono quindi valere le condizioni

$$\begin{cases} -K^2 - 52\,K + 512 > 0 \\ 18\,K > 0 \end{cases}$$

Risolvendo la disequazione di secondo grado si ottiene che $f(K) > 0$ per $-60.4674 < K < 8.4674$, per cui, tenendo conto della seconda condizione ricavata dalla tabella di Routh, possiamo dire che il sistema è asintoticamaente stabile se

$$K \in (0, 8.4674)$$

Per determinare le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario, annulliamo la riga **1** della tabella di Routh, ponendo $f(K) = 0$ ed abbiamo che la tabella di Routh presenta una singolarità completa per $K = 8.4674$. Ora determino le radici del polinomio ausiliario

$$a_2(s;K) = (64-K)\,s^2 + 18\,K$$

per $K = 8.4674$ ed ottengo che le intersezioni del luogo con l'asse immaginario sono in

$$s_{1,2} = \pm 1.6567$$

c) Dal luogo delle radici si nota facilmente che il grado di stabilità G_s è massimo nella radice doppia in -0.5858. Risolvendo l'equazione caratteristica $1 + K^* G(s) = 0$ in $s = -0.5858$ si ha che

$$K^* = -\frac{1}{G(-0.5858)}$$

e si ottiene che il guadagno K^* che massimizza G_s vale

$$K^* = 0.6863$$

7.

$$T_{dy}(s) = \frac{1}{1+C(s)P(s)}$$

$$T_{dy}(j\omega) = \frac{1}{1+C(j\omega)P(j\omega)}$$

$$T_{dy}(j2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C(j2) = +\infty$$

$$\Rightarrow \quad C(s) := \frac{y(s)}{(s^2+4)x(s)} \quad \text{controllore di ordine } l \text{ biproprio}$$

$$y(s) := y_0 s^l + y_1 s^{l-1} + \cdots + y_l$$

$$x(s) := s^{l-2} + x_1 s^{l-3} + \cdots + x_{l-2}$$

$$P(s) := \frac{b(s)}{a(s)}$$

equazione caratteristica:

$$1+C(s)P(s) = 0$$

$$x(s)(s^2+4)a(s) + y(s)b(s) = 0$$

Quindi il polinomio caratteristico associato alla struttura scelta per il controllore è un polinomio monico di grado $l+1$:

$$(s^2+4)(s+5)x(s)+10y(s)$$

Sia d(s) il polinomio caratteristico desiderato (polinomio monico di grado $l+1$). Imponendo che d(s) coincida col pol. caratteristico sopra si ottengono $l+1$ equazioni (lineari) con $l+1+(l-2)=2l-1$ incognite . Richiedendo che $l+1=2l-1$ si ottiene $l=2$.

Scelta di d(s):

$$d(s) := [(s+10)^2+4](s+30) = s^3+50s^2+704s+3120$$

Polinomio caratteristico associato al controllore:

$$s^3+(5+10y_0)s^2+(4+10y_1)s+20+10y_2$$

Quindi

$$\begin{cases} 5+10y_0 = 50 & \Rightarrow y_0 = 4,5 \\ 4+10y_1 = 704 & \Rightarrow y_1 = 70 \\ 20+10y_2 = 3120 & \Rightarrow y_2 = 310 \end{cases}$$

In conclusione: $C(s) = \dfrac{4,5s^2+70s+310}{s^2+4}$

8.

8) Si effettua la sostituzione $k-13 \rightarrow k$.
L'eq. diventa

$$16\, y(k) - 12\, y(k-1) + y(k-3)$$
$$= 16\, u(k-2) + 16\, u(k-3)$$

Quindi la f.d.t. risulta

$$H(z) = \frac{16z + 16}{16z^3 - 12z^2 + 1}$$

Il polinomio caratteristico è $16z^3 - 12z^2 + 1$.

$$a(z) \triangleq a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

Condizione necessaria affinché tutte le radici di $a(z)$ abbiano modulo minore di uno:

1. $a(1) > 0$ cioè $16 - 12 + 1 = 5 > 0$ ok!
2. $(-1)^3 a(-1) > 0$ cioè $-a(-1) > 0$
   $-[-16 - 12 + 1] = -[-27] = 27 > 0$ ok!
3. $|a_0| < a_n$ cioè $|1| < 16$ ok!

Costruiamo la tabella di Jury

	z^0	z^1	z^2	z^3
1	1	0	−12	16
2	16	−12	0	1
3	−255	192	−12	

Dall'ultima riga della tabella otteniamo una questa condizione

4. $|-255| > |-12|$ ok!

Quindi per il criterio di Jury il sistema è asintoticamente stabile.

Parte A

1. [punti 6] Enunciare il Criterio di Nyquist (sia il caso generale che quello particolare) avendo cura di definire i concetti e le premesse teoriche sui quali si basa. Riportare inoltre una dimostrazione di tale criterio.

2. [punti 6]
a) Tracciare il diagramma polare associato alla funzione di trasferimento

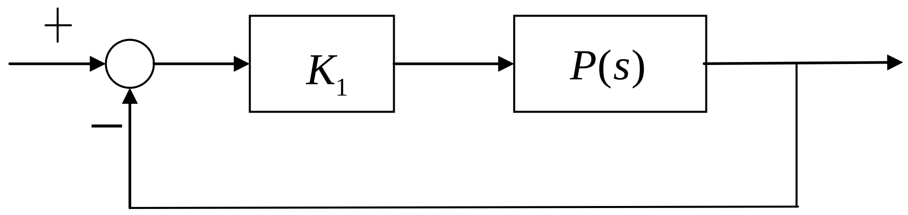
$$P(s) = \frac{10(1-s)^2}{s(s+1)^3}$$

determinando in particolare l'asintoto e l'intersezione con l'asse reale negativo.
b) Utilizzando il Criterio di Nyquist si studino le radici dell'equazione caratteristica $1+P(s)=0$ (quante a parte reale negativa, quante puramente immaginarie, quante a parte reale positiva).

3. [punti 6] Presentare e dedurre la funzione di trasferimento a tempo discreto $P_d(z)$ di un sistema a tempo continuo $P(s)$ con all'ingresso un mantenitore D/A di ordine zero ed all'uscita un campionatore A/D sincronizzati con periodo T .

Parte B

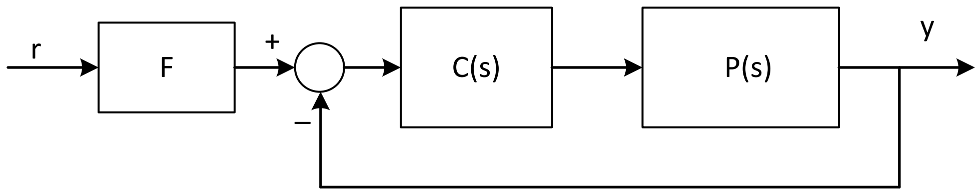
4. [punti 6] Sia dato il sistema retroazionato di figura:



dove K_1 è un parametro reale e $P(s) = \dfrac{s+1}{s^2(s+4)(s+8)}$.

1. Determinare l'insieme dei valori di K_1 per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
2. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica associata al sistema retroazionato per $K_1 \in (0, +\infty)$. Determinare in particolare gli asintoti del luogo e le intersezioni del luogo con l'asse immaginario del piano complesso.

5. [punti 6] Sia dato il sistema di controllo schematizzato in figura



dove $P(s) = \dfrac{8}{(s+2)^4}$. Determinare un controllore con struttura di rete ritardatrice

$C(s) = K\dfrac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}$ ed il blocco algebrico $F \in \mathbb{R}$ affinché le seguenti specifiche siano soddisfatte:

a) $K_p = 5$ (costante di posizione del sistema retroazionato);

b) $M_F = 35°$ (margine di fase del sistema retroazionato);

c) $e_r = 0$ (errore a regime in risposta ad un gradino del riferimento r).

6. [punti 6] Determinare la risposta forzata $y(k)$ all'ingresso $u(k) = 1(k)$ (gradino unitario) di un sistema a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze

$$y(k) - \frac{1}{4}y(k-2) = u(k) + u(k-2) \ .$$

Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

2.
a)

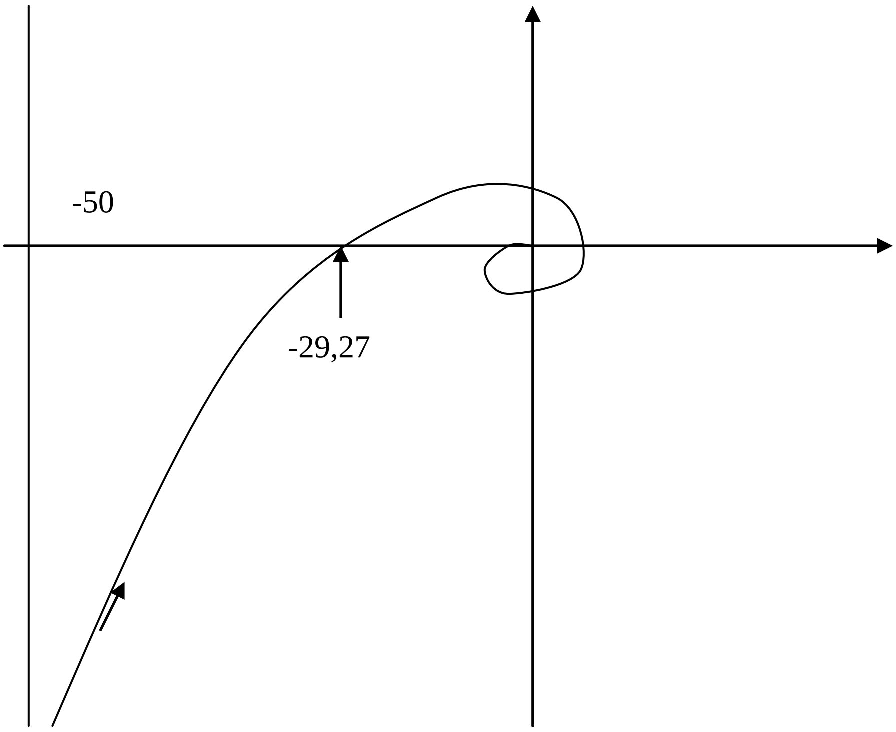
$$P(j\omega) = \frac{10(1-j\omega)^2}{(j\omega)(1+j\omega)^3}$$

$$\arg P(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 5 \text{ arctg } \omega$$

$$|P(j\omega)| = \frac{10}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}$$

L'asintoto è verticale (il sistema è di tipo 2) e la sua ascissa è $\sigma_a = 10[(-1-1)-(1+1+1)] = -50$.

$$\omega \to \infty \qquad \arg P(j\omega) \to -2\pi - \pi$$



Calcolo intersezione con l'asse reale negativo:

$$\arg P(j\omega_p) = -\pi$$

$$5 \text{ arctg } \omega_p = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega_p = \text{ tg } \frac{\pi}{10} = 0,3249 \text{ rad}$$

$$|P(j\omega_p)| = 29,27 \quad \Rightarrow \quad P(j\omega_p) = -29,27$$

b) Considerato che P(s) non ha poli a parte reale positiva, il caso particolare del Criterio di Nyquist afferma che l'eq. 1 + P(s) = 0 ha tutte le radici a parte reale negativa se e solo se il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto critico - 1. Dal diagramma sopra riportato risulta invece che il d.p.c. circonda 2 volte (in senso orario) il punto – 1. Si conclude quindi:

$$\text{numero radici } \in \mathbb{C}_+ = 2$$
$$\text{numero radici } \in j\mathbb{R} = 0$$
$$\text{numero radici } \in \mathbb{C}_- = 4-2 = 2$$

3.
Vedi appunti dell'insegnamento.

4.
1) L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + K_1 \frac{s+1}{s^2(s+4)(s+8)} = 0$$

Questa in forma polinomiale diventa:

$$s^4 + 12s^3 + 32s^2 + K_1 s + K_1 = 0$$

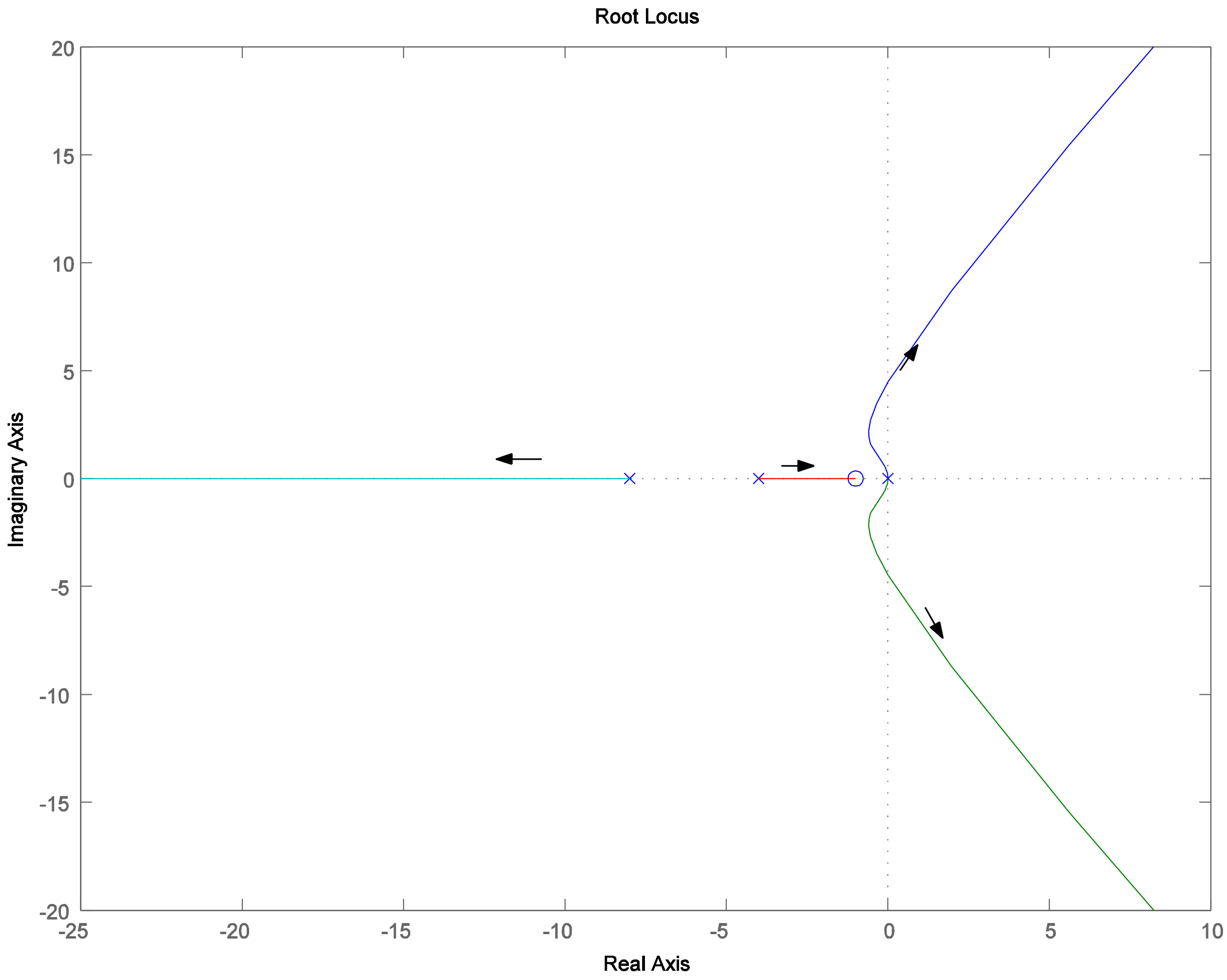
La tabella di Routh corrispondente è

$$\begin{array}{c|cccc}
4 & 1 & 32 & K_1 & 0 \\
3 & 12 & K_1 & 0 & 0 \\
2 & 384 - K_1 & 12K_1 & 0 & \\
1 & K_1(240 - K_1) & 0 & & \\
0 & 12K_1 & & &
\end{array}$$

Imponendo la positività degli elementi della prima colonna si ottiene $K_1 \in (0,\ 240)$, valori per i quali il sistema è asintoticamente stabile (Criterio di Routh).

2) Il luogo presenta tre asintoti rettilinei $\left(\vartheta_{a,1} = +60°,\ \vartheta_{a,2} = +180°,\ \vartheta_{a,3} = -60°\right)$ con centro in

$$\sigma_a = \frac{-4-8-(-1)}{3} = -\frac{11}{3} \cong -3,67$$



Le intersezioni del luogo si hanno in corrispondenza del valore limite di $K_1 = 240$. Per tale valore la tabella di Routh evidenzia l'equazione ausiliaria

$$(384-240)s^2 + 12\cdot 240 = 0$$

$$s^2 + 20 = 0$$

Quindi le intersezioni avvengono in $s = \pm j\sqrt{20} \cong \pm j4,47$.

5.

$$L(s) \triangleq C(s)P(s) = K \, \frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s} \cdot \frac{8}{(s+2)^4}$$

$$L(0) = K \, \frac{8}{16} = \frac{K}{2} \, ; \qquad K_p = L(0)$$

La specifica è $K_p = 5 \Rightarrow \frac{K}{2} = 5 \Rightarrow \boxed{K = 10}$

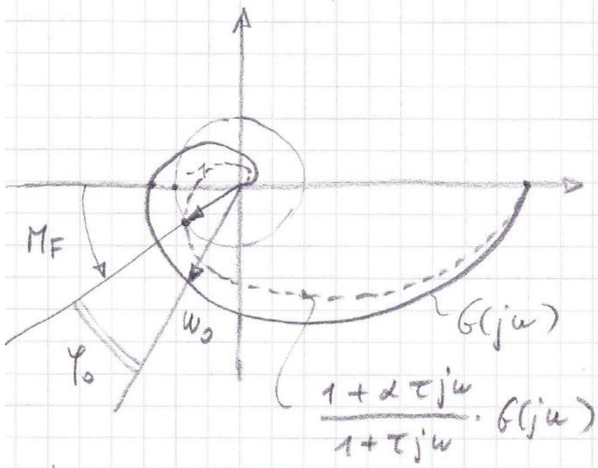
$$L(s) = \frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s} \cdot \frac{80}{(s+2)^4} \triangleq \frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s} \cdot G(s)$$

$$G(s) = \frac{80}{(s+2)^4} \, , \quad G(j\omega) = \frac{80}{(j\omega+2)^4}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{80}{(\omega^2+4)^2} \, , \quad \arg G(j\omega) = -4 \, \mathrm{arctg} \, \frac{\omega}{2}$$

$$\arg G(j\omega) = -\pi \, , \quad -4 \, \mathrm{arctg} \, \frac{\omega}{2} = -\pi \, , \quad \omega_p = 2 \text{ rad/sec}$$

$$|G(j\omega_p)| = 1{,}25 \, , \quad G(j\omega_p) = -1{,}25$$



Scelgo $\omega_0 = 1$ rad/sec

$$|G(j\omega_0)| = 3{,}2 \quad \arg G(j\omega_0) = -1{,}8546$$

$$\varphi_0 = \pi + \arg G(j\omega_0) - \frac{35}{180} \cdot \pi = 0{,}6761$$

$$\cos\varphi_0 > \frac{1}{|G(j\omega_0)|} \qquad 0{,}78 > 0{,}3125 \text{ ok!}$$

$$M \triangleq 3{,}2 \quad \varphi = 0{,}6761$$

$$\tau = \frac{M - \cos\varphi}{\omega_0 \sin\varphi} = 3{,}867 \text{ sec}$$

$$\alpha = \frac{M\cos\varphi - 1}{M(M - \cos\varphi)} = 0{,}1932$$

Determinazione di F:

$$F \cdot \frac{L(0)}{1+L(0)} = 1$$

$$F \cdot \frac{5}{1+5} = 1 \, , \qquad F = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

6

La funzione di trasferimento è $H(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2-\frac{1}{4}} = \dfrac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{z}{z-1} = z \cdot A(z)$$

$$A(z) = \frac{z^2+1}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z+\frac{1}{2}} + \frac{c_3}{z-\frac{1}{2}}$$

$$c_1 = \left.\frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\right|_{z=1} = \frac{8}{3} \qquad c_2 = \left.\frac{z^2+1}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{5}{6}$$

$$c_3 = \left.\frac{z^2+1}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)}\right|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{5}{2}$$

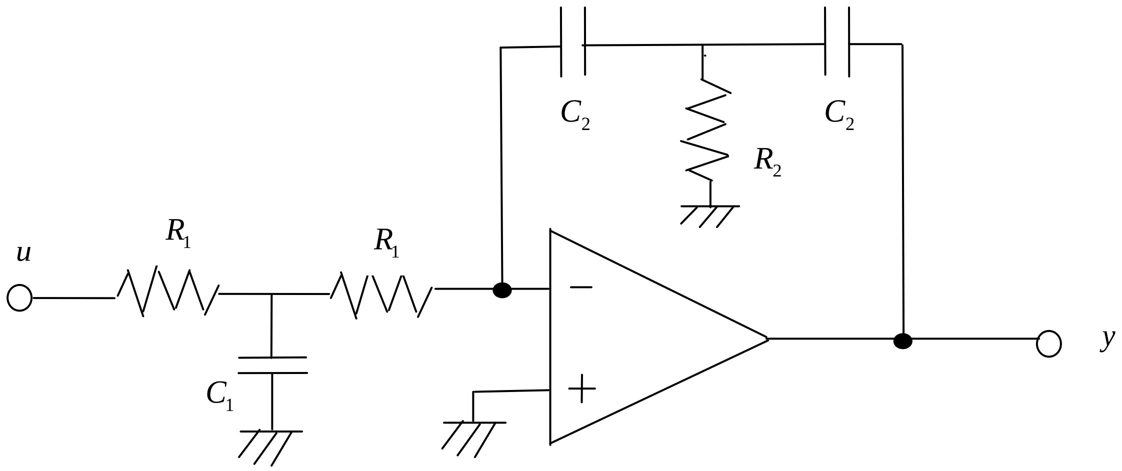
$$Y(z) = \frac{8}{3} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{5}{6} \cdot \frac{z}{z+\frac{1}{2}} - \frac{5}{2} \cdot \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{y(k) = \frac{8}{3} + \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^k - \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k \geq 0}$$

Parte A

1. [punti 4] Sia dato un sistema in retroazione unitaria con guadagno di anello L(s). Si presenti e discuta l'analisi a regime della risposta ai segnali tipici del riferimento.

2. [punti 4] Il seguente circuito elettrico definisca un sistema dinamico Σ orientato da u (tensione di ingresso) ad y (tensione d'uscita).



Si assuma l'amplificatore differenziale come ideale:

1. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema Σ.
2. Determinare poli, zeri e modi di Σ.
3. Scrivere l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.

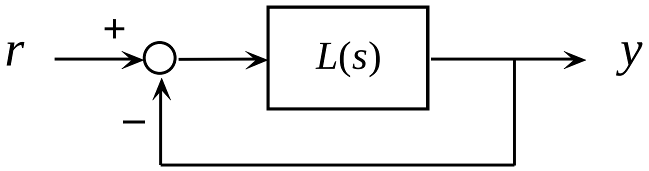
3. [punti 4] Dato un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{1}{s+1}$, a partire da condizioni iniziali nulle, determinarne la risposta $y(t),\ t \in [0, +\infty)$ al segnale di ingresso così definito:

$$u(t) = \begin{cases} 2t+2 & 0 \le t < \dfrac{1}{2} \\ 1 & t \ge \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

4. [punti 4] Data un generico segnale a tempo discreto $x(k)$, $k \in \mathbb{Z}$ determinare le trasformate zeta dei segnali ritardati e anticipati di n passi ($n \in \mathbb{N}$), $\mathcal{Z}[x(k-n)]$ e $\mathcal{Z}[x(k+n)]$.

Parte B

5. [punti 5] Sia dato il seguente sistema retroazionato



dove $L(s) = 2\dfrac{1+5s}{(1+s)^2(1+0,5s)^2}$.

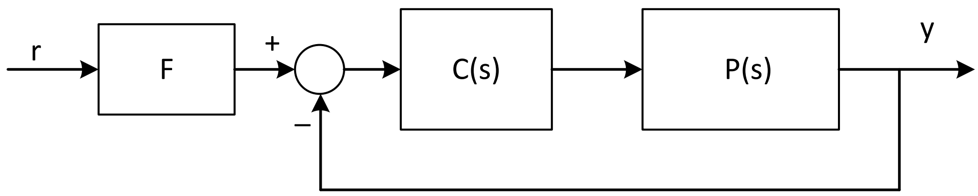
a) Tracciare il diagramma polare associato alla funzione di trasferimento $L(s)$ determinando in particolare le intersezioni con l'asse reale.
b) Studiare la stabilità del sistema retroazionato utilizzando il Criterio di Nyquist.

6. [punti 5] Si tracci il luogo delle radici della seguente equazione caratteristica:

$$1 + K\frac{1-s}{(s+1)^3(s+2)^3} = 0 \quad , \quad K \in [0, +\infty)$$

determinando in particolare asintoti e radici doppie.

7. [punti 5] Sia dato il sistema di controllo schematizzato in figura



dove $P(s) = \dfrac{8}{(s+2)^4}$. Determinare un controllore con struttura di rete anticipatrice $C(s) = K\dfrac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}$ ed il blocco algebrico $F \in \mathbb{R}$ affinché le seguenti specifiche siano soddisfatte:

a) $K_p = 3{,}5$ (costante di posizione del sistema retroazionato);
b) $M_F = 30°$ (margine di fase del sistema retroazionato);
c) $e_r = 0$ (errore a regime in risposta ad un gradino del riferimento r).

8. [punti 5] Determinare la risposta forzata $y(k)$ all'ingresso $u(k) = 1(k)$ (gradino unitario) di un sistema a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze

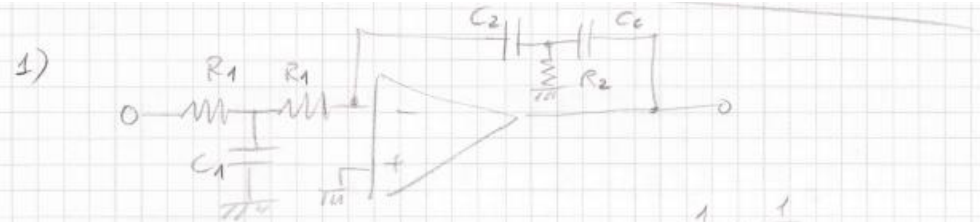
$$y(k) + y(k-1) + \frac{1}{4}y(k-2) = u(k) + 4u(k-1) + 4u(k-2) \ .$$

Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso

2.

1)



$$G(s) = -\frac{Z_{t,f}}{Z_{t,i}} = -\frac{\frac{1}{C_2 s} + \frac{1}{C_2 s} + \frac{\frac{1}{C_2 s}\cdot\frac{1}{C_2 s}}{R_2}}{R_1 + R_1 + \frac{R_1^2}{\frac{1}{C_1 s}}}$$

$$= -\frac{\frac{2}{C_2 s} + \frac{1}{R_2 C_2^2 s^2}}{2R_1 + R_1^2 C_1 s} = -\frac{\frac{1 + 2R_2C_2 s}{R_2 C_2^2 s^2}}{R_1(2 + R_1 C_1 s)}$$

$$= -\frac{1 + 2R_2C_2 s}{R_1 R_2 C_2^2 s^2 (2 + R_1 C_1 s)}$$

2) zeri: $z_1 = -\frac{1}{2R_2C_2}$ poli: $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = -\frac{2}{R_1C_1}$

modi $= \left\{1, t, \exp\left\{-\frac{2}{R_1C_1}\right\}\right\}$

3) $$G(s) = -\frac{1 + 2R_2C_2 s}{R_1R_2C_2^2 s^2(2 + R_1C_1 s)} = \frac{-2R_2C_2 s - 1}{R_1^2R_2C_1C_2^2 s^3 + 2R_1R_2C_2^2 s^2}$$

eq. differenziale

$$R_1^2R_2C_1C_2^2 D^3y(t) + 2R_1R_2C_2^2 D^2y(t) = -2R_2C_2 Du(t) - u(t)$$

3.

* $y(t),\ t \in [0, \frac{1}{2})$

$$U(s) = 2 \cdot \frac{1}{s^2} + 2 \cdot \frac{1}{s} = 2 \cdot \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}+1\right) = 2\frac{1}{s} \cdot \frac{1+s}{s}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{1}{\cancel{s+1}} \cdot \frac{2\cancel{(1+s)}}{s^2} = \frac{2}{s^2}$$

$$y(t) = 2t, \quad 0 \le t < \frac{1}{2}$$

* $y(t), \quad t \in [\frac{1}{2}, +\infty)$

$G(s)$ è asintoticamente stabile, quindi

$$y(t) = G(0) \cdot 1 + y_{tran.}(t) = 1 + y_{tran.}(t)$$

$$y_{trans.}(t) = c \cdot e^{-t}, \quad c \in \mathbb{R} \quad (\text{evoluzione libera})$$

$$y(t) \in C^{\rho-1}(\mathbb{R}); \quad \rho = 1 \Rightarrow y(t) \in C^0(\mathbb{R})$$

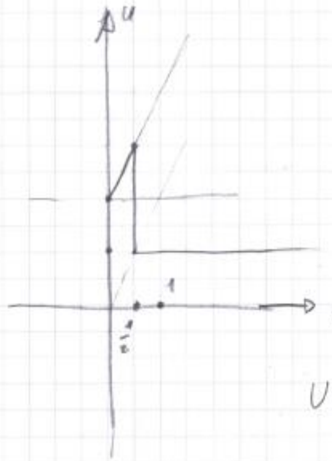
$$y\left(\tfrac{1}{2}-\right) = y\left(\tfrac{1}{2}+\right)$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} = 1 + c \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\right\} \quad \text{da cui } c = 0$$

Quindi $y(t) = 1, \quad t \geq \frac{1}{2}$.

Alternativamente si può procedere come segue:

$$u(t) = \begin{cases} 2t+2 & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1 & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$u(t) = 2t+2 - \{(2t+2)-1\} 1(t-\tfrac{1}{2})$$
$$= 2t+2-\{2t+1\} 1(t-\tfrac{1}{2})$$
$$= 2t+2-\{2(t-\tfrac{1}{2})+2\} 1(t-\tfrac{1}{2})$$

$$U(s) = \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s} - e^{-\frac{1}{2}s}\left(\frac{2}{s^2}+\frac{2}{s}\right)$$

$$U(s) = 2\,\frac{1+s}{s^2} - e^{-\frac{1}{2}s} \cdot 2\,\frac{1+s}{s^2}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{1}{s+1} \cdot U(s) = \frac{2}{s^2} - e^{-\frac{1}{2}s} \cdot \frac{2}{s^2}$$

$$y(t) = 2t - 2(t-\tfrac{1}{2}) \cdot 1(t-\tfrac{1}{2})$$

Se $t \in [0, \frac{1}{2}] \Rightarrow y(t) = 2t$

Se $t \geq \frac{1}{2}$ $\quad y(t) = 2t - 2(t-\frac{1}{2}) = 2t - 2t + 1 = 1$

$y(t) = 1$.

4.

Vedi appunti delle lezioni.

5.

a)

$$L(j\omega) = 2\frac{1+5j\omega}{(1+j\omega)^2(1+0,5j\omega)^2}$$

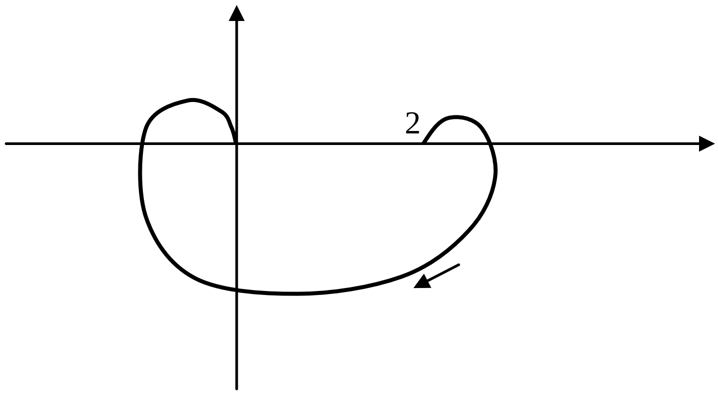
$$|L(j\omega)| = 2\frac{\sqrt{1+25\omega^2}}{(1+\omega^2)(1+\omega^2/4)}$$

$$\arg L(j\omega) = \arctan(5\omega) - 2\arctan(\omega) - 2\arctan(0,5\omega)$$

$$L(j0) = 2$$

$$\lim_{\omega\to\infty} |L(j\omega)| = 0 \qquad \lim_{\omega\to\infty} \arg L(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi$$

Per ω piccolo vale $\arg L(j\omega) \simeq 5\omega - 2\omega - 2 \cdot 0,5\omega = 2\omega > 0$ e $|L(j\omega)| > |L(j0)|$. Ne consegue quindi il seguente tracciamento qualitativo del diagramma polare:



Si prevedono quindi la presenza di due intersezioni del diagramma con l'asse reale (escluse quelle in 0 e 2). Le pulsazioni corrispondenti a tali intersezioni possono essere determinate risolvendo l'equazione

$$\arg L(j\omega) = 0 \quad (-\pi)$$

ovvero

$$\arctan(5\omega) + 0 \ (+\pi) = 2\arctan\omega + 2\arctan(0,5\omega)$$

Applicando la funzione $\tan(\cdot)$ ad entrambi i membri si ottiene:

$$5\omega = \frac{\dfrac{2\omega}{1-\omega^2} + \dfrac{\omega}{1-\frac{1}{4}\omega^2}}{1 - \dfrac{2\omega}{1-\omega^2}\dfrac{\omega}{1-\frac{1}{4}\omega^2}}$$

Eliminando la soluzione $\omega = 0$ e ponendo $x := \omega^2$ si giunge all'equazione algebrica di secondo grado

$$5x^2 - 59x + 8 = 0$$

da cui le soluzioni $x_1 = 0,137188$ e $x_2 = 11,6628$. Considerando le soluzioni positive di ω otteniamo

$$\begin{cases} \omega_1 = 0,37038 \quad \text{rad/sec} \\ \omega_2 = 3,41508 \quad \text{rad/sec} \end{cases}$$

Le intersezioni cercate sono quindi

$$\begin{cases} L(j\omega_1) = 3,5788 \\ L(j\omega_2) = -0,6899 \end{cases}$$

b)

Il guadagno di anello L(s) non ha poli a parte reale positiva ed il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto critico -1 . Per il Criterio di Nyquist il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Si noti che il margine di ampiezza associato è facilmente determinabile come

$$M_A = \frac{1}{|L(j\omega_2)|} \cong 1,45$$

6.

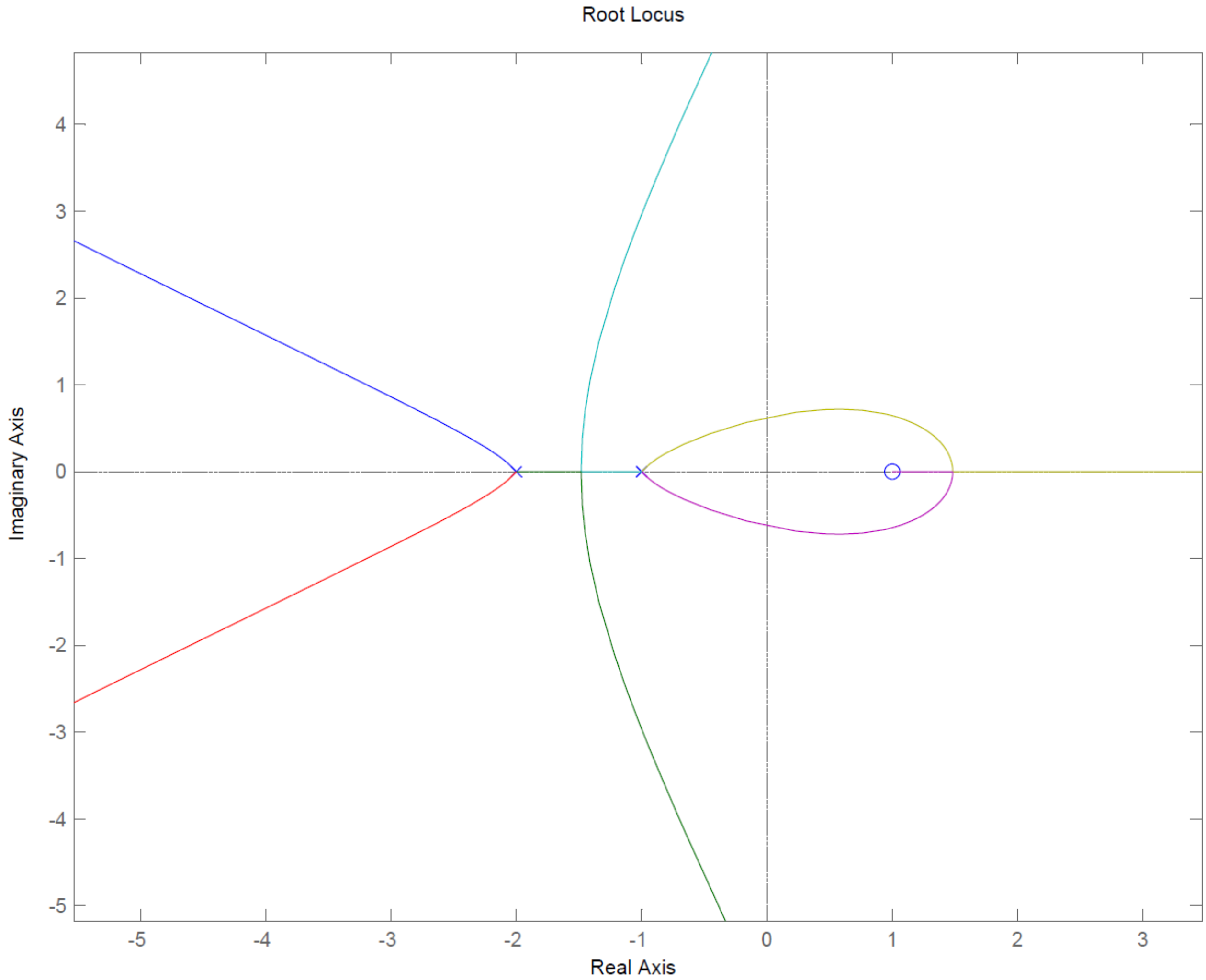
L'equazione caratteristica è riscrivibile come

$$1+K_1\frac{s-1}{(s+1)^3(s+2)^3}=0 \quad \text{con } K_1=-K\in(-\infty,0]$$

e quindi si tratta di un luogo inverso. Presenta 5 asintoti il cui centro ha ascissa

$$\sigma_a=\frac{-1-1-1-2-2-2-(+1)}{6-1}=-2$$

Gli asintoti formano i seguenti angoli con l'asse reale positivo: 0°, 72°,144°, -72°,-144°



Le radici doppie sono determinabili risolvendo l'equazione:

$$\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s-1}=0$$

$$\frac{3}{s+1}+\frac{3}{s+2}-\frac{1}{s-1}=0$$

$$5s^2-11=0$$

$$s_{1,2}=\pm\sqrt{11/5}=\pm1,4832$$

7.

$$L(s) = C(s)\,P(s) = k\,\frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}\cdot\frac{8}{(s+2)^4}$$

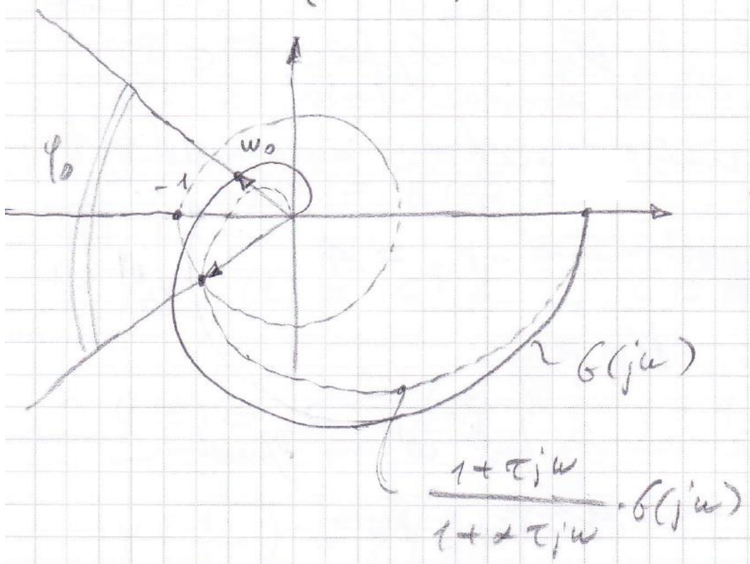
$$L(0) = k\cdot\frac{\cancel{8}\,1}{\cancel{16}\,2} = \frac{k}{2} \qquad K_p = L(0)$$

$$3{,}5 = \frac{k}{2} \Rightarrow k = 7$$

$$L(s) = \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}\cdot\frac{56}{(s+2)^4} \triangleq \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}\cdot G(s)$$

$$G(s) = \frac{56}{(s+2)^4} \qquad G(j\omega) = \frac{56}{(j\omega+2)^4}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{56}{(\omega^2+4)^2} \qquad \arg G(j\omega) = -4\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{2}$$



$$\arg G(j\omega) = -\pi$$

$$-4\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{2} = -\pi$$

$$\omega_p = 2 \text{ rad/sec}$$

$$|G(j\omega_p)| = 0{,}8750$$

$$G(j\omega_p) = -0.8750$$

Scelgo $\omega_0 = 2{,}5$ rad/sec

$$|G(j\omega_0)| = 0{,}5330 \qquad \varphi_0 = -\arg G(j\omega_0) - \pi + M_F =$$

$$= 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{2{,}5}{2} - \pi + \frac{30}{180}\cdot\pi = 0{,}9662 \text{ rad/sec}$$

$$\cos\varphi_0 > |G(j\omega_0)| \qquad 0{,}5684 > 0{,}5330 \quad \text{ok!}$$

$$M \triangleq \frac{1}{|G(j\omega_0)|} = 1{,}8761 \qquad \varphi \triangleq \varphi_0$$

$$\tau = \frac{M - \cos\varphi}{\omega_0 \operatorname{sen}\varphi} = \frac{1{,}8761 - 0{,}5684}{2{,}5 \cdot 0{,}8227} = 0{,}636 \text{ sec}$$

OK

$$\alpha = \frac{M\cos\varphi - 1}{M(M - \cos\varphi)} = \frac{1{,}8761 \cdot 0{,}5684 - 1}{1{,}8761 \cdot (1{,}8761 - 0{,}5684)} = 0{,}0271$$

Determinazione di F:

$$F \cdot \frac{L(0)}{1 + L(0)} = 1 \qquad F \cdot \frac{3{,}5}{1 + 3{,}5} = 1$$

$$F = \frac{1 + 3{,}5}{3{,}5} = \frac{4{,}5}{3{,}5} = 1{,}2857$$

8.

La funzione di trasferimento è $H(z) = \dfrac{z^2+4z+4}{z^2+z+\frac{1}{4}} = \dfrac{(z+2)^2}{(z+\frac{1}{2})^2}$

$$Y(z) = H(z)\,U(z) = \frac{(z+2)^2}{(z+\frac{1}{2})^2} \cdot \frac{z}{z-1} \triangleq z \cdot A(z)$$

$$A(z) = \frac{(z+2)^2}{(z-1)(z+\frac{1}{2})^2} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_{21}}{(z+\frac{1}{2})^2} + \frac{c_{22}}{z+\frac{1}{2}}$$

$$c_1 = \left.\frac{(z+2)^2}{(z+\frac{1}{2})^2}\right|_{z=1} = 4 \qquad c_{21} = \left.\frac{(z+2)^2}{z-1}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2}$$

$$c_1 + c_{22} = 1 \implies c_{22} = 1 - c_1 = 1 - 4 = -3$$

$$Y(z) = 4\,\frac{z}{z-1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{z}{(z+\frac{1}{2})^2} - 3\,\frac{z}{z+\frac{1}{2}} \quad , k \geq 0$$

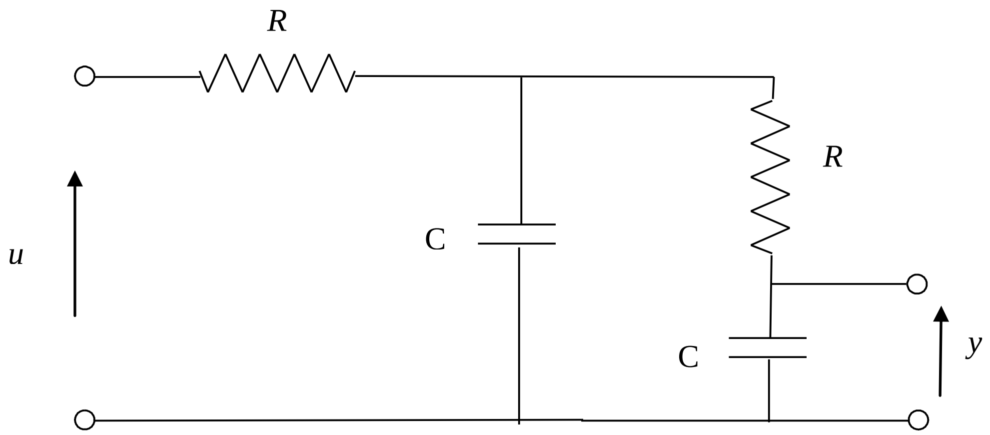
$$y(k) = 4 - \frac{3}{2}\,k\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^k =$$

$$= 4 + 3k\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\boxed{y(k) = 4 + 3(k-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^k, \; k \geq 0}$$

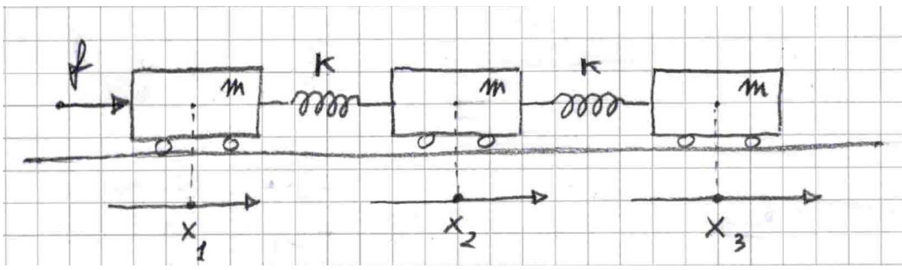
Parte A

1. [punti 6] La rete elettrica di figura definisca un sistema dinamico orientato dalla tensione u (ingresso) alla tensione y (uscita).



Di questo sistema si determini: 1) la funzione di trasferimento, 2) i modi, 3) l'equazione differenziale.

2. [punti 6] Tre carrelli, ciascuno di massa m, e collegati fra di loro con molle di costante elastica pari a k come mostrato in figura costituiscano un sistema dinamico orientato da f ad x_1, rispettivamente forza applicata e posizione del carrello di sinistra. Nelle condizioni iniziali di quiete e con le molle a riposo si abbia $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$. Trascurando gli attriti si determinino l'equazione differenziale e la funzione di trasferimento di tale sistema.



3. [punti 6]
Dimostrare le seguenti proprietà della trasformata di Laplace:
1. $L[Df(t)] = sF(s) - f(0+)$;
2. $L\left[\int_0^t f(v)dv\right] = \frac{1}{s}F(s)$;
3. $L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$.

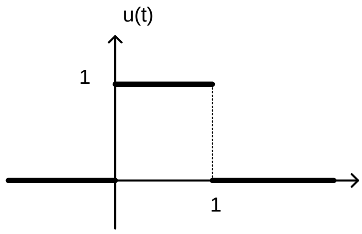
Parte B

4. [punti 6] Sia dato un generico sistema dinamico orientato da u (ingresso) ad y (uscita) e descritto dall'equazione differenziale $\sum_{i=0}^{n} a_i D^i y(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i D^i u(t)$.

Note le condizioni iniziali al tempo $0-$ come $y_-, Dy_-, \ldots, D^{n-1}y_-$ e $u_-, Du_-, \ldots, D^{m-1}u_-$ e l'azione forzante $u(t),\ t \geq 0$, determinare la trasformata di Laplace della risposta $y(t),\ t \geq 0$.

Nota: riportare i ragionamenti e i passaggi che permettono l'individuazione dell'espressione $Y(s)$ cercata.

5. [punti 6] Un sistema dinamico abbia funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{1}{(s+1)^2}$. A partire da condizioni di quiete venga applicato l'ingresso $u(t)$ definito in figura. Determinare $y(t)$ per $t \geq 0$.

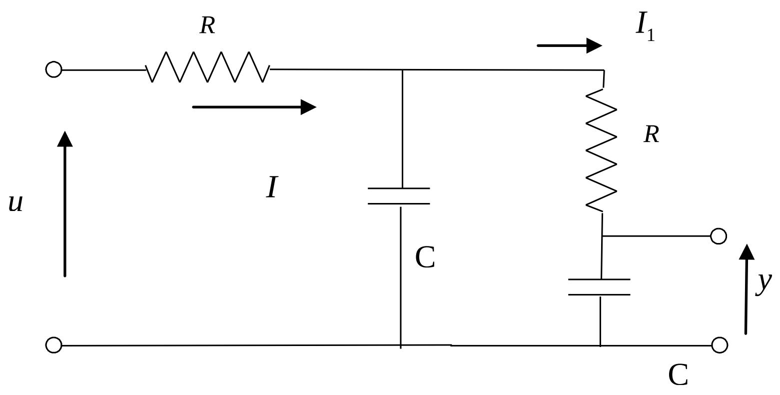


6. [punti 6] Un sistema dinamico ha funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}$. L'ingresso applicato è $u(t) = 0$ per ogni $t \geq 0$ e dell'uscita si conosce che $y(0+) = 0$ e $Dy(0+) = 1$. Determinare $y(t)$ per $t \geq 0$.

Tracce delle soluzioni

1.

1)



$$U = ZI$$

$$Z = R + \frac{RCs+1}{Cs(RCs+2)}$$

$$Y = \frac{1}{Cs}\cdot I_1 = \frac{1}{Cs}\cdot I\,\frac{\frac{1}{Cs}}{\frac{1}{Cs}+R+\frac{1}{Cs}} = \frac{1}{Cs}\cdot\frac{U}{Z}\,\frac{\frac{1}{Cs}}{\frac{1}{Cs}+R+\frac{1}{Cs}}$$

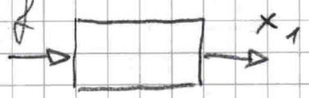
$$G(s) := \frac{Y}{U} = \frac{1}{T^2s^2+3Ts+1}$$

2) I poli del sistema sono $\frac{-3-\sqrt{5}}{2T}$, $\frac{-3+\sqrt{5}}{2T}$ e quindi i corrispondenti modi sono $\exp\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2T}\cdot t\right)$, $\exp\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2T}\cdot t\right)$.

3) L'equazione differenziale associata a G(s) è

$$T^2D^2y + 3TDy + y = u$$

2.



$$\begin{cases} m D^2 x_1 = f - k(x_1 - x_2) \quad \Rightarrow \quad k x_2 = m D^2 x_1 + k x_1 - f \\ m D^2 x_2 = k(x_1 - x_2) - k(x_2 - x_3) \\ m D^2 x_3 = k(x_2 - x_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k x_3 = m D^2 x_2 + 2k x_2 - k x_1 \\ m D^2 x_3 + k x_3 = k x_2 \end{cases} \qquad (mD^2 + k) x_3 = k x_2$$

$$(mD^2 + k)(mD^2 x_2 + 2k x_2 - k x_1) = k^2 x_2$$

$$(mD^2 + k)(mD^2 + 2k) x_2 - k(mD^2 + k) x_1 = k^2 x_2$$

$$(m^2 D^4 + 2kmD^2 + kmD^2 + 2k^2 - k^2) x_2 = k(mD^2 + k) x_1$$

$$(m^2 D^4 + 3kmD^2 + k^2) x_2 = k(mD^2 + k) x_1$$

$$(m^2 D^4 + 3kmD^2 + k^2)(mD^2 x_1 + k x_1 - f) = k^2 (mD^2 + k) x_1$$

$$(m^2 D^4 + 3kmD^2 + k^2)(mD^2 + k) x_1 - k^2 (mD^2 + k) x_1 = (m^2 D^4 + 3kmD^2 + k^2) f$$

$$(m^2 D^4 + 3kmD^2)(mD^2 + k) x_1 = (m^2 D^4 + 3kmD^2 + k^2) f$$

$$\text{f.d.t. } G(s) = \frac{m^2 s^4 + 3kms^2 + k^2}{(m^2 s^4 + 3kms^2)(ms^2 + k)} = \frac{m^2 s^4 + 3kms^2 + k^2}{m \cdot s^2 (ms^2 + 3k)(ms^2 + k)}$$

3.

Le dimostrazioni della prima e terza proprietà sono riportate sulle dispense del corso. La seconda dimostrazione richiesta si deduce facilmente a partire dalla prima proprietà.

4.

Vedi le dispense del corso.

5.

1° metodo: $u(t) = 1(t) - 1(t-1)$

$$U(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s} \qquad Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s(s+1)^2} - \frac{1}{s(s+1)^2}e^{-s}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)^2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)^2}\cdot e^{-s}\right]$$

$$\frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1)^2} + \frac{K_{12}}{s+1}$$

$$K_1 = \left.\frac{1}{(s+1)^2}\right|_{s=0} = 1 \qquad K_{21} = \left.\frac{1}{s}\right|_{s=-1} = -1 \qquad K_1 + K_{12} = 0$$

$$K_{12} = -1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)^2}e^{-s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)^2}\right](t-1)\cdot 1(t-1)$$

$$y(t) = 1 - te^{-t} - e^{-t} - \left[1 - (t-1)e^{-(t-1)} - e^{-(t-1)}\right]\cdot 1(t-1)$$

Per $t \in [0,1)$ $\quad y(t) = 1 - te^{-t} - e^{-t}$

Per $t \in [1,+\infty)$ $\quad y(t) = \cancel{1} - te^{-t} - e^{-t} \cancel{-1} + (t\cancel{-1})e^{-t}\cdot e$
$\cancel{+e^{-t}\cdot e}$

$$y(t) = -e^{-t} + (e-1)te^{-t}$$

2° metodo: Per $t \in [0,1)$ vale $u(t) = 1(t)$

e quindi $y(t) = 1 - te^{-t} - e^{-t}$

Per $t \in [1,+\infty)$ $\quad y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$

$u(t)$ è discontinua su $(-\infty,+\infty)$, quindi $y(t) \in C^{\rho-1}(\mathbb{R})$

ovvero $y(t) \in C^1(\mathbb{R})$

$$\begin{cases} y(1-) = y(1+) \\ Dy(1-) = Dy(1+) \end{cases}$$

Per $t \in [0,1)$ $\quad y(t) = 1 - te^{-t} - e^{-t}$

$$Dy(t) = -e^{-t} + te^{-t} + e^{-t}$$

Per $t \in [1,+\infty)$ $\quad y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$

$$Dy(t) = -c_1 e^{-t} + c_2\left(e^{-t} - te^{-t}\right)$$

$$y(1-) = 1 - e^{-1} - e^{-1} = 1 - 2e^{-1}$$

$$Dy(1-) = \cancel{-e^{-1}} + \cancel{e^{-1}} + e^{-1} = e^{-1}$$

$$\begin{cases} c_1 e^{-1} + c_2 e^{-1} = 1 - 2e^{-1} \\ -c_1 e^{-1} + c_2\,\cancel{\left(e^{-1} - e^{-1}\right)} = e^{-1} \end{cases} \Rightarrow c_1 = -1$$

$$-e^{-1} + c_2 e^{-1} = 1 - 2e^{-1} \qquad -1 + c_2 = e - 2$$

$$\Rightarrow c_2 = e - 1$$

$$\boxed{y(t) = -e^{-t} + (e-1)\,te^{-t}}$$

6.

Soluzione

Metodo dei modi: $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$

$Dy(t) = -c_1 e^{-t} - 2 c_2 e^{-2t}$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 - 2c_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} c_2 = -c_1 \\ -c_1 - 2(-c_1) = 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} c_2 = -1 \\ c_1 = 1 \end{array}$$

Quindi $\boxed{y(t) = e^{-t} - e^{-2t}}$

Metodo dell'eq. differenziale: $G(s) = \dfrac{s+3}{s^2+3s+2}$

$D^2 y(t) + 3Dy(t) + 2y(t) = Du(t) + 3u(t)$

Applichiamo la Trasformata di Laplace

$s^2 Y - y(0+)s - Dy(0+) + 3(sY - y(0+)) + 2Y = 0$

$(s^2+3s+2)Y - 1 = 0 \qquad Y = \dfrac{1}{s^2+3s+2}$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

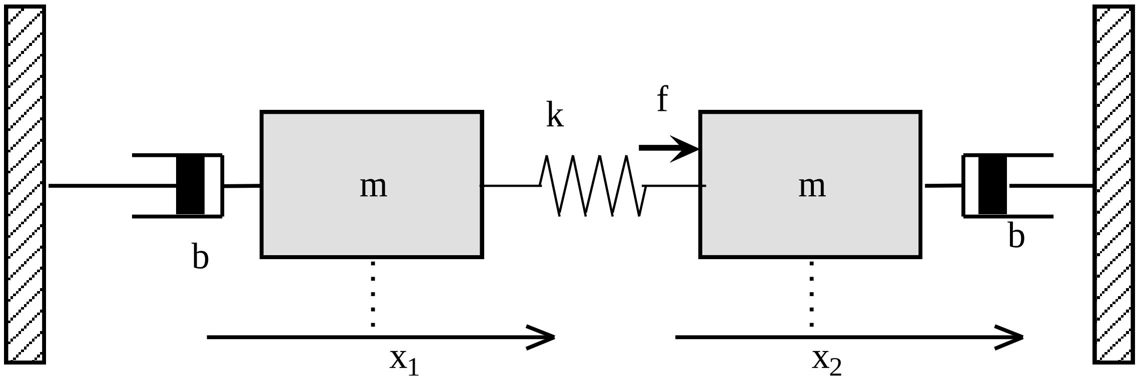
$K_1 = \left.\dfrac{1}{s+2}\right|_{s=-1} = 1 \qquad K_1 + K_2 = 0 \qquad K_2 = -1$

$\boxed{y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = e^{-t} - e^{-2t}}$

Parte A

1. [punti 5] Si presentino e si dimostrino le formule di inversione per la sintesi in frequenza delle reti correttrici. Si esponga inoltre come utilizzare tali formule per la sintesi della rete **anticipatrice** con imposizione del **margine di fase** M_F .

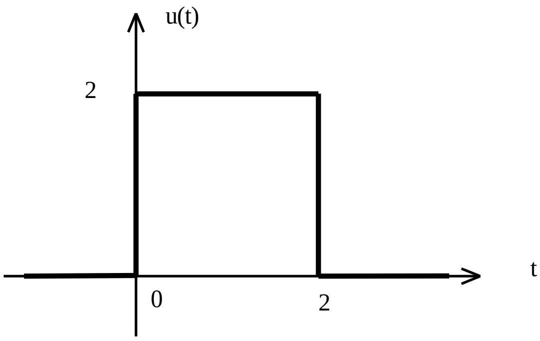
2. [punti 5] Due parti meccaniche di massa m siano collegate come in figura.



Si definisca un sistema dinamico Σ orientato da f (forza applicata alla massa di destra) ad x_1 (posizione della massa di sinistra). Si trascurino gli attriti nel movimento delle parti meccaniche e nelle condizioni iniziali di quiete con la molla a riposo si abbia $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$.

- **a.** Determinare l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.
- **b.** Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema Σ.
- **c.** Dimostrare che Σ è semplicemente stabile.

3. [punti 4] Dato un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{8}{(s+2)(s+4)}$ determinare la risposta forzata $y(t)$ (per $t > 0$) al segnale di ingresso definito in figura:



4. [punti 4] Presentare e dimostrare la formula di antitrasformazione zeta, ovvero l'espressione che determina la sequenza a tempo discreto $x(k)$ nota che sia $X(z) \triangleq \mathcal{Z}[x(k)]$.

Parte B

5. [punti 4] Tracciare i diagrammi di Bode asintotici (diagramma dei moduli e diagramma delle fasi della risposta armonica) associati alla funzione di trasferimento

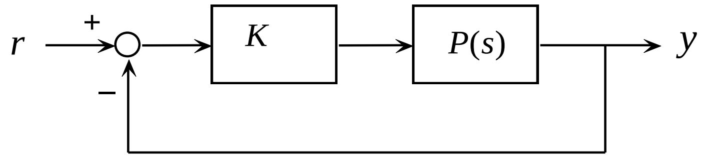
$$G(s) = 10^3 \frac{1-s}{(1+s)(s+10)^2}$$

Suggerimenti:

i) per una decade delle pulsazioni si assegnino 10 quadretti del foglio protocollo;

ii) si riportano per comodità dello studente i logaritmi in base 10 degli interi da 2 a 9:
$\log_{10} 2 \cong 0,30$, $\log_{10} 3 \cong 0,48$, $\log_{10} 4 \cong 0,60$, $\log_{10} 5 \cong 0,70$, $\log_{10} 6 \cong 0,78$,
$\log_{10} 7 \cong 0,85$, $\log_{10} 8 \cong 0,90$, $\log_{10} 9 \cong 0,95$.

6. [punti 6] Sia dato il sistema in retroazione di figura



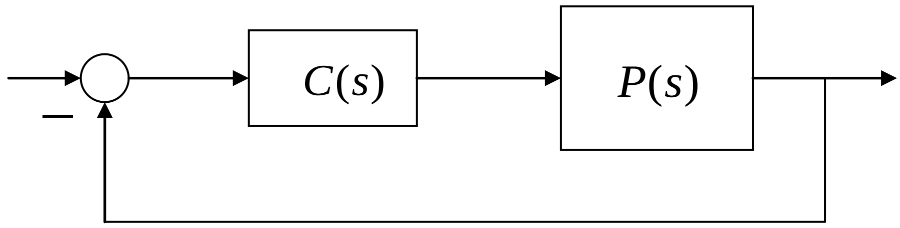
dove $P(s) = \dfrac{s+3}{s(s+2)^3}$.

a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K > 0$ determinando in particolare 1. Asintoti del luogo; 2. Eventuali radici doppie; 3. Angoli di partenza del luogo.

b. Determinare i valori di $K \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Determinare inoltre le intersezioni del luogo delle radici dell'equazione caratteristica con l'asse immaginario del piano complesso.

c. Determinare il valore di K che massimizza il grado di stabilità del sistema retroazionato: $K^* = \arg\max_{K\in\mathbb{R}} G_S(K)$.

7. [punti 4] Sia dato il sistema retroazionato di figura



dove $P(s) = \dfrac{1}{s(s+2)(s+4)}$ e $C(s) = K \in \mathbb{R}$ è un controllore proporzionale.

1. Determinare i valori di K per i quali è assicurata la stabilità asintotica del sistema retroazionato.
2. Determinare i valori di K per i quali il sistema retroazionato ammette $G_S \geq 0,2\ \text{s}^{-1}$ ($G_S \equiv$ grado di stabilità nel piano complesso).

8. [punti 4] Determinare la risposta forzata $y(k)$ all'ingresso $u(k) = 1(k)$ di un sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento $H(z) = \dfrac{z^2+z+1}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)}$.

Tracce delle soluzioni

1. Vedi dispense del corso.

2.

a.

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = +k(x_2 - x_1) - b D x_1 \\ m D^2 x_2 = -k(x_2 - x_1) - b D x_2 + f \end{cases}$$

$$\begin{cases} k x_2 = (m D^2 + b D + k) x_1 \\ (m D^2 + b D + k) x_2 = f + k x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (m D^2 + b D + k)^2 x_1 = k f + k^2 x_1$$

$$\boxed{m^2 D^4 x_1 + 2 m b D^3 x_1 + (b^2 + 2 m k) D^2 x_1 + 2 b k D x_1 = k f}$$

b.

$$G(s) = \frac{k}{s\left[m^2 s^3 + 2 m b s^2 + (b^2 + 2 m k) s + 2 b k\right]}$$

c.

$$\begin{array}{c|ccc}
3 & m^2 & b^2 + 2 m k & 0 \\
2 & \cancel{2} m \cancel{b} & \cancel{2} b k & 0 \\
1 & \underbrace{b^2 m + 2 m^2 k - k m^2}_{b^2 m + m^2 k} & 0 & 0 \\
0 & k & 0 &
\end{array}$$

La prima colonna della tabella ha tutti elementi positivi e quindi tutte permanenze di segno. Per il criterio di Routh il polinomio $m^2 s^3 + 2 m b s^2 + (b^2 + 2 m k) s + 2 b k$ è hurwitziano. Quindi Σ ha un polo semplice nell'origine ed i rimanenti poli con parte reale negativa. Per il teorema sulla stabilità delle perturbazioni Σ è SEMPLICEMENTE STABILE.

3.

$$u(t) = 2 \cdot 1(t) - 2 \cdot 1(t-2)$$

$$U(s) = 2 \cdot \frac{1}{s} - 2 \cdot e^{-2s} \cdot \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{8}{(s+2)(s+4)} \left\{ 2 \cdot \frac{1}{s} - 2\, e^{-2s} \cdot \frac{1}{s} \right\} =$$

$$= \frac{16}{s(s+2)(s+4)} - e^{-2s} \cdot \frac{16}{s(s+2)(s+4)}$$

$$Y_1(t) \triangleq \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{16}{s(s+2)(s+4)} \right]$$

$$Y(s) = Y_1(s) - e^{-2s}\, Y_1(s)$$

$$y(t) = y_1(t) - y_1(t-2)$$

Calcolo di $y_1(t)$:

$$\frac{16}{s(s+2)(s+4)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+4}$$

$$K_1 = \left. \frac{16}{(s+2)(s+4)} \right|_{s=0} = 2$$

$$K_2 = \left. \frac{16}{s(s+4)} \right|_{s=-2} = \frac{16}{(-2)\,2} = -4$$

$$K_3 = \left. \frac{16}{s(s+2)} \right|_{s=-4} = \frac{16}{(-4)(-2)} = 2$$

$$y_1(t) = \left[2 - 4\, e^{-2t} + 2\, e^{-4t} \right] \cdot 1(t)$$

$$y(t) = \left[2 - 4e^{-2t} + 2e^{-4t}\right] \cdot 1(t)$$
$$- \left[2 - 4e^{-2(t-2)} + 2e^{-4(t-2)}\right] \cdot 1(t-2)$$

per $t \in (0, 2)$

$$y(t) = 2 - 4e^{-2t} + 2e^{-4t}$$

per $t \in [2, +\infty)$

$$y(t) = \cancel{2} - 4e^{-2t} + 2e^{-4t} - \cancel{2} + 4e^{-2(t-2)} - 2e^{-4(t-2)} =$$
$$= \left(e^{4} - 1\right) 4e^{-2t} + \left(1 - e^{8}\right) 2e^{-4t}$$

4. Vedi appunti dell'insegnamento.

5.

6

$$G(s) = 10^3 \frac{1-s}{(1+s)(s+10)^2}$$

$$G(s) = \frac{10^3 (1-s)}{(1+s)\,\cancel{10^2}\left(1+\frac{1}{10}s\right)^2} =$$

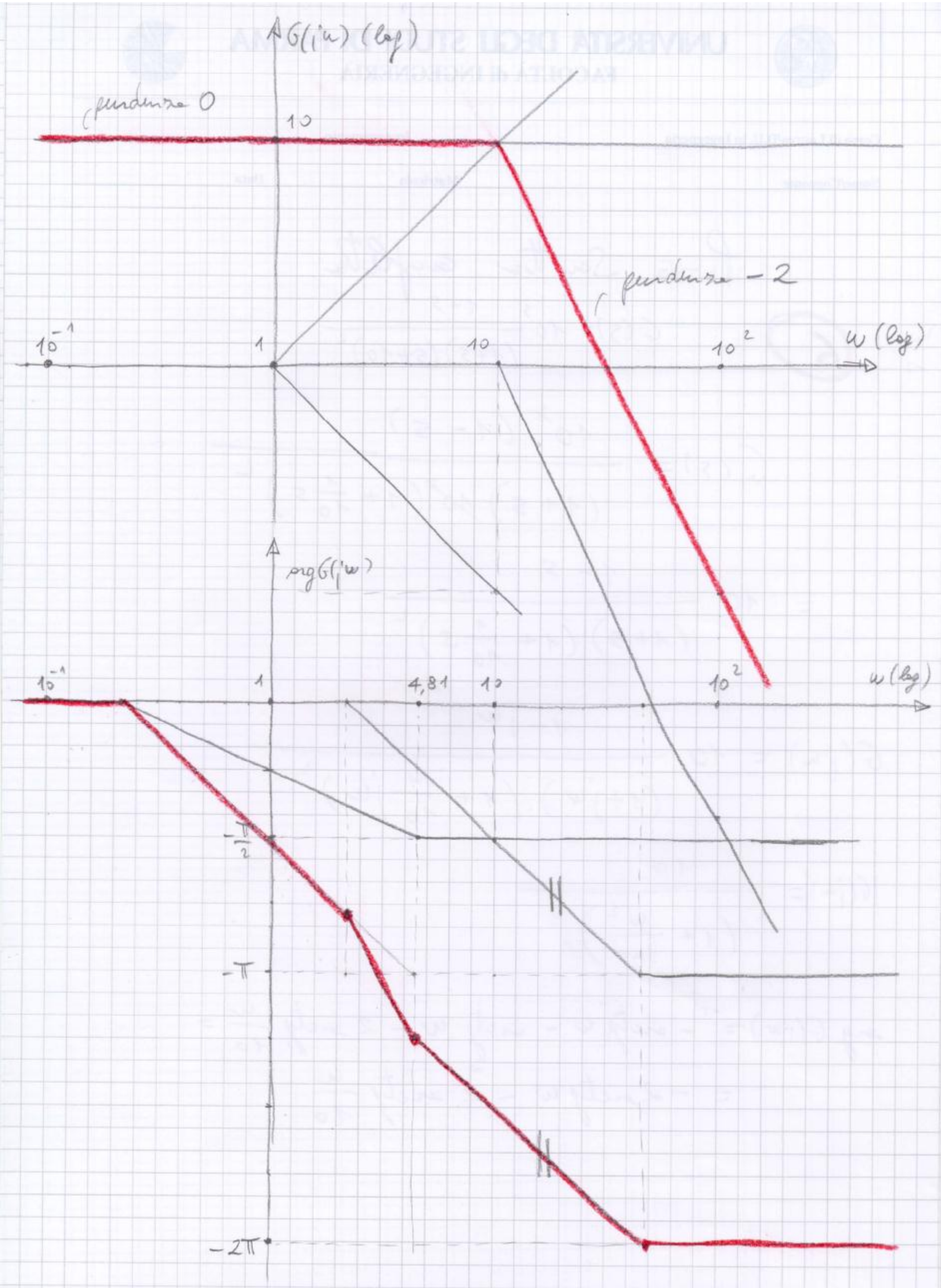
$$= 10 \frac{1-s}{(1+s)\left(1+\frac{1}{10}s\right)^2}$$

$$G(j\omega) = 10 \frac{1-j\omega}{(1+j\omega)\left(1+\frac{1}{10}j\omega\right)^2}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{10}{\left(1+\frac{\omega^2}{100}\right)}$$

$$\arg G(j\omega) = -\operatorname{arctg}\omega - \operatorname{arctg}\omega - 2\operatorname{arctg}\frac{\omega}{10} =$$

$$= -2\operatorname{arctg}\omega - 2\operatorname{arctg}\frac{\omega}{10}$$



G(jω) (log)
pendenza 0
10
pendenza −2
10⁻¹
1
10
10²
ω (log)
arg G(jω)
10⁻¹
1
4,81
10
10²
ω (log)
−π/2
−π
−2π

6.

a) L'equazione caratteristica del sistema è data da $1 + L(s) = 0$ dove il guadagno di anello vale

$$L(s) = K\,\frac{s+3}{s\,(s+2)^3}$$

Il grado relativo è $\rho = 3$ e quindi avrò tre asintoti separati tra loro da angoli di 120° che si intersecano nel punto ∇_a che viene determinato nel modo seguente

$$\nabla_a = \frac{\sum_i p_i - \sum_i z_i}{\rho} = \frac{-2-2-2-0-(-3)}{3} = -1$$

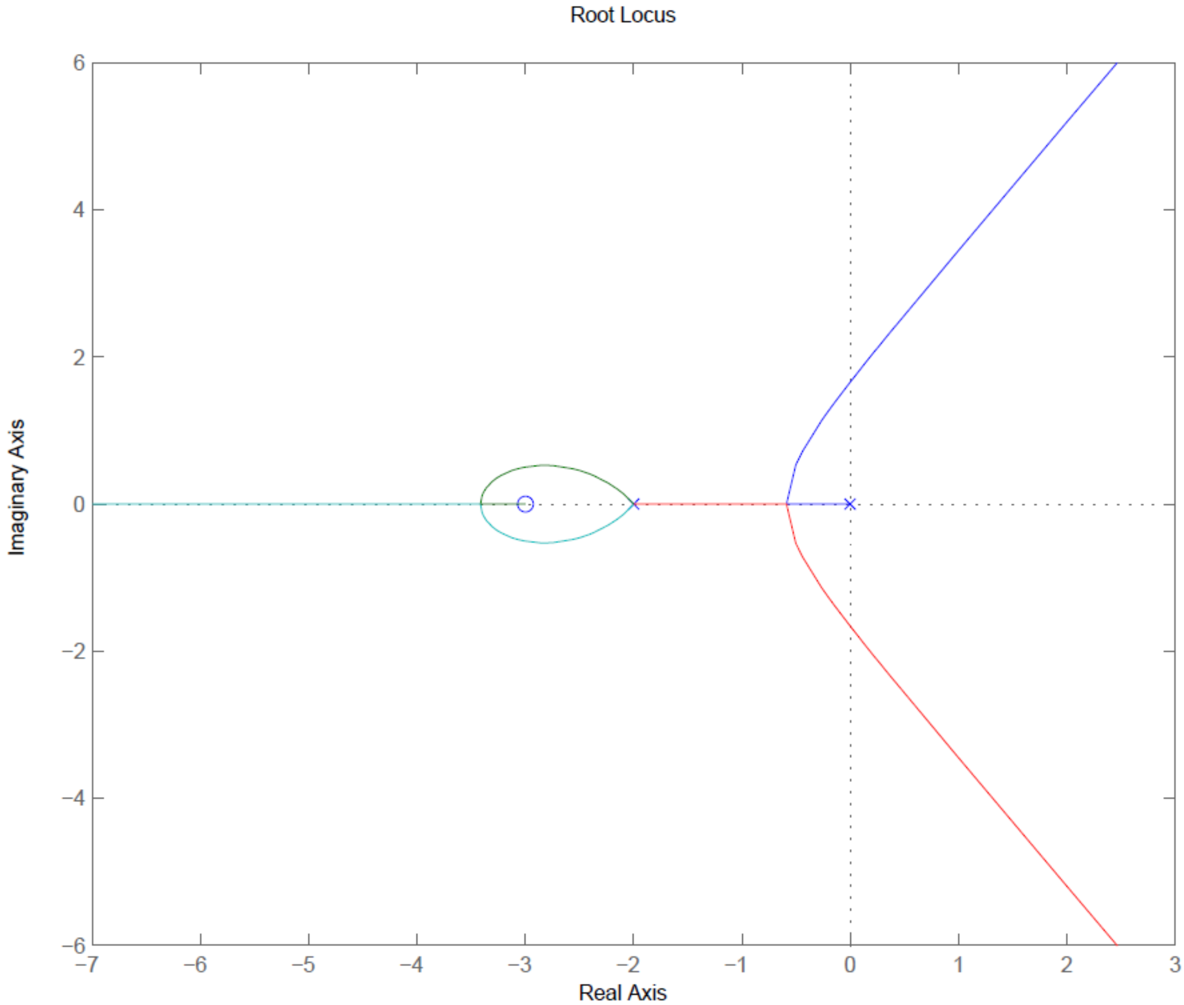
Si determinano le eventuali radici doppie come segue

$$\sum_i \frac{1}{s-p_i} - \sum_i \frac{1}{s-z_i} = \frac{1}{s} + \frac{3}{s+2} - \frac{1}{s+3} = 0$$

ottenendo l'equazione di secondo grado $s^2 + 4s + 2 = 0$ risolvendo la quale si ricava che le radici doppie sono in

$$s_1 = -0.5858 \qquad \text{e} \qquad s_2 = -3.4142$$

Per quanto riguarda gli angoli di partenza, è facile determinare che il polo nell'origine avrà angolo iniziale $\theta_1 = \pi$ mentre i tre poli in -2 avranno angoli di partenza $\theta_{1a} = 0$, $\theta_{1b} = \frac{2}{3}\,\pi$ e $\theta_{1b} = -\frac{2}{3}\,\pi$. Il luogo delle radici per $K > 0$ è quindi il seguente



b) L'equazione caratteristica è la seguente

$$1 + K\,\frac{s+3}{s\,(s+2)^3} = 0$$

dalla quale viene determinato il polinomio caratteristico

$$p_c(s;K) = s^4 + 6\,s^3 + 12\,s^2 + (8+K)\,s + 3\,K$$

Applichiamo il Criterio di Routh e costruiamo la seguente tabella

$$\begin{array}{c|cccc}
\mathbf{4} & 1 & 12 & 3\,K & 0 \\
\mathbf{3} & 6 & 8+K & 0 & 0 \\
\mathbf{2} & \text{64-K} & \text{18K} & 0 & \\
\mathbf{1} & f(K) & 0 & & \\
\mathbf{0} & 18\,K & 0 & &
\end{array}$$

dove $f(K) = -K^2 - 52\,K + 512$. Perchè il sistema sia asintoticamente stabile devono quindi valere le condizioni

$$\begin{cases} -K^2 - 52\,K + 512 > 0 \\ 18\,K > 0 \end{cases}$$

Risolvendo la disequazione di secondo grado si ottiene che $f(K) > 0$ per $-60.4674 < K < 8.4674$, per cui, tenendo conto della seconda condizione ricavata dalla tabella di Routh, possiamo dire che il sistema è asintoticamaente stabile se

$$K \in (0, 8.4674)$$

Per determinare le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario, annulliamo la riga **1** della tabella di Routh, ponendo $f(K) = 0$ ed abbiamo che la tabella di Routh presenta una singolarità completa per $K = 8.4674$. Ora determino le radici del polinomio ausiliario

$$a_2(s;K) = (64-K)\,s^2 + 18\,K$$

per $K = 8.4674$ ed ottengo che le intersezioni del luogo con l'asse immaginario sono in

$$s_{1,2} = \pm 1.6567$$

c) Dal luogo delle radici si nota facilmente che il grado di stabilità G_s è massimo nella radice doppia in -0.5858. Risolvendo l'equazione caratteristica $1 + K^* G(s) = 0$ in $s = -0.5858$ si ha che

$$K^* = -\frac{1}{G(-0.5858)}$$

e si ottiene che il guadagno K^* che massimizza G_s vale

$$K^* = 0.6863$$

7. L'equazione caratteristica del sistema in retroazione è

$$s^3 + 6s^2 + 8s + k = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è:

3	1	8	0
2	6	k	0
1	48-k	0	
0	k		

Per la stabilità asintotica debbono valere le seguenti disequazioni:

$48-k>0$

$k>0$

Il campo corrispondente alla stabilità asintotica asintotica del sistema è $k\in(0,\ 48)$.

1. Ricordando che il grado di stabilità (nel piano complesso) *Gs* di un sistema asintoticamente stabile è definito come

$G_s=-\max\{\operatorname{Re}p_1,\operatorname{Re}p_2,...,\operatorname{Re}p_n\}$, i=1..n, dove i *pi* sono i poli del sistema

e rappresenta la distanza minima dei poli del sistema dall'asse immaginario, il problema può essere risolto effettuando la traslazione nel piano complesso $s=z-0.2$.

Ponendo $s=z-0.2$ si ottiene:

$$z^3+5.4z^2+5.72z-1.368+k=0$$

La corrispondente tabella di Routh è:

3	1	5.72	0
2	5.4	-1.368+k	0
1	30.888-(k-1.368)	0	
0	-1.368+k		

Per cui i valori di *k* per cui il sistema retroazionato ammette $G_s\geq 0.2s^{-1}$ sono quelli soddisfacenti il sistema di disequazioni:

$-1.368+k>0$

$30.888-(k-1.368)>0$

cioè $k\in[1.368,\ 32.256]$.

8.

$$u(k) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow y(k) \qquad H(z) = \frac{z^2+z+1}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)} \qquad u(k) = 1(k)$$

$$U(z) = \frac{z}{z-1} \qquad Y(z) = H(z)U(z) = \frac{\left(z^2+z+1\right)z}{(z-1)^2\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

$$Y(z)\cdot z^{-1} = \frac{z^2+z+1}{(z-1)^2\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \frac{c_{11}}{(z-1)^2} + \frac{c_{12}}{z-1} + \frac{c_2}{z+\frac{1}{2}}$$

$$c_{11} = \left.\frac{z^2+z+1}{z+\frac{1}{2}}\right|_{z=1} = \frac{3}{\frac{3}{2}} = 2$$

$$c_2 = \left.\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1}{\frac{9}{4}} = \frac{\frac{1-2+4}{4}}{\frac{9}{4}} = \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{9}_{3}} = \frac{1}{3}$$

$$c_{12} + c_2 = 1 \qquad c_{12} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$Y(z) = 2\,\frac{z}{(z-1)^2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{z}{z-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{z}{z+\frac{1}{2}}$$

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[Y(z)\right] = 2k\cdot 1(k) + \frac{2}{3}1(k) + \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k 1(k)$$

2° turno
Parte A [punti 9]

1) Scrivere la funzione di trasferimento di un sistema dinamico avente i modi $\left\{e^{-2t}\sin(3t+\varphi_1),\ 1,\ t, t^2\right\}$:

$G(s) =$

2) Sia noto che la coppia di funzioni ingresso-uscita $\left(\sin 2t, \cos 2t\right)$ appartiene all'insieme dei *behaviors* $\mathcal{B}$ di un sistema dinamico. Determinare una funzione $y(t)$ tale che $\left(2\cos 2t, y(t)\right) \in \mathcal{B}$: $y(t) =$

3) Dato un sistema Σ con funzione di trasferimento $T(s) = \dfrac{s^2-1}{(s+7)^4(s^2+2)s}$ stabilire (vero = V, falso = F):

a) Σ è asintoticamente stabile:
b) Σ è semplicemente stabile:
c) Σ è instabile:
d) Σ è a fase minima:
e) Σ è stabile ingresso-limitato uscita limitata:

4) Ad un sistema dinamico in quiete con funzione di trasferimento $\dfrac{s+1}{s+4}$ viene applicato l'ingresso $u(t) = 4\cdot 1(t)$ (segnale a gradino). L'uscita corrispondente ha la struttura $y(t) = A + Be^{-4t}$ per $t > 0$. Determinare le costanti A e B: $A =$ $B =$

5) Il diagramma polare associato alla funzione di trasferimento $L(s) = \dfrac{80(s+1)}{s(s+2)^3}$ presenta un asintoto verticale parallelo all'asse immaginario. Determinare l'ascissa reale σ_a di tale asintoto: $\sigma_a =$

6) Scrivere la funzione di trasferimento di una rete ritardatrice con zero in -10, polo in -2 e guadagno statico uguale ad 1. Determinarne inoltre la costante di tempo τ e il parametro α.

$C_r(s) =$; $\tau =$; $\alpha =$

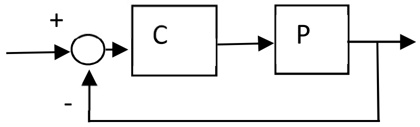
7) La funzione di trasferimento $-\dfrac{s-\frac{1}{4}}{s+\frac{1}{4}}$ è una approssimante di Padé della funzione di trasferimento di un ritardo finito t_0. Determinare tale ritardo t_0: $t_0 =$

8) Un sistema dinamico Σ è rappresentato dalla funzione di trasferimento $\dfrac{s^2+2s}{(s+1)(s+2)(s+4)}$. Determinare i suoi poli: $\{\text{poli di } \Sigma\} =$

9) Determinare i modi del sistema dinamico con funzione di trasferimento $T(s) = \dfrac{s-1}{s^2+2s+1}$.

Modi =

10) Dato il sistema in retroazione unitaria di figura con $C(s) = \dfrac{s-1}{s+1}$, $P(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s-1)}$ stabilire (vero = V, falso = F):



a) Il sistema è internamente asintoticamente stabile:
b) Il sistema è ben connesso:

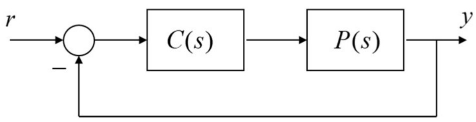
11) Dato il segnale a tempo discreto $x(k)$, $k \in \mathbb{Z}$ determinare la trasformata zeta del segnale anticipato $x(k+6)$ in funzione dei campioni iniziali del segnale: $\mathcal{Z}[x(k+6)] =$

12) Determinare la derivata generalizzata della funzione $f(t) = t \cdot 1(t-3) + 2 \cdot 1(t),\ t \in \mathbb{R}$:
$D^* f(t) =$

13) Discretizzare il controllore a tempo continuo $C(s) = \frac{100}{s}$ con il metodo di Tustin (il tempo di campionamento è $T = 0.02$ sec.): $C_d(z) =$

14) Sia dato il sistema a tempo discreto $H(z) = \frac{z}{z-0.8}$.
a) Determinarne il guadagno statico del sistema:
b) Determinarne la risposta all'impulso:

15) Sia dato l'impianto instabile $P(s) = \frac{s+3}{(s-1)(s+7)^3}$ per il quale si propone la stabilizzazione mediante il sistema retroazionato di figura.



Determinare l'ordine minimo n_C di un controllore $C(s)$ che assicuri l'assegnabilità arbitraria di tutti i poli del sistema retroazionato ed errore a regime zero in risposta ad un gradino del segnale di riferimento: $n_C =$

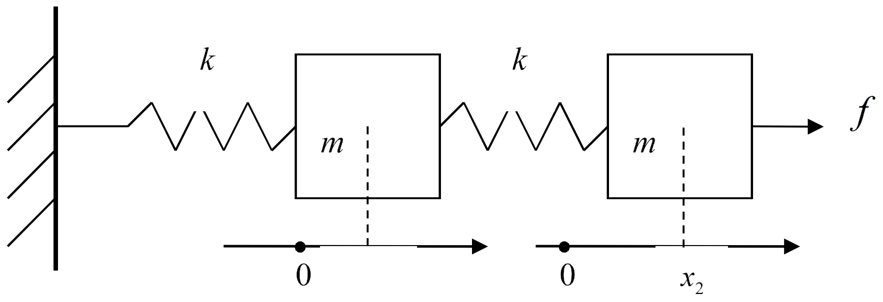
16) Sia dato il sistema $G(s) = \frac{\left(1+\frac{1}{5}s\right)\left(1+\frac{1}{9}s\right)}{(s^2+12s+36)(s+5)}$ a cui si applica all'ingresso il gradino $2 \cdot 1(t)$ a partire da condizioni iniziali tutte nulle. Determinare il tempo di assestamento della risposta: $T_a =$

17) Dato il polinomio $a(s) = s^3 + 9s^2 + s + 9$ determinare il segno della parte reale delle sue radici:
$n_+(a) =$
$n_-(a) =$
$n_0(a) =$

18) Sia data la rete anticipatrice $C(s) = \frac{1+10S}{1+0.1s}$. Determinare la pulsazione per la quale si ha l'anticipo di fase massimo: $\omega_m =$

Parte B

1. [punti 4,5] Sia assegnato il sistema meccanico vibrante di figura



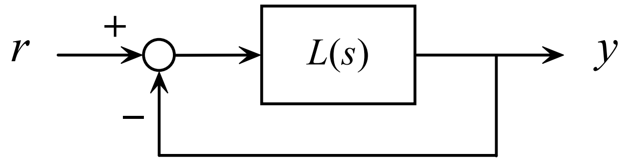
caratterizzato da due molle di costante elastica k e due corpi di massa m. Il corpo di destra sia soggetto ad una forza f e le posizioni delle due masse siano descritte dalle variabili x_1 e x_2 (quando il sistema è in quiete con le molle a riposo $x_1 = x_2 = 0$). Si consideri il sistema dinamico Σ orientato da f ad x_1 (posizione del corpo di sinistra).

a) Determinare l'equazione differenziale che descrive il sistema Σ.
b) Determinare la funzione di trasferimento $T(s)$ di Σ.
c) Determinare i modi di Σ.

2. [punti 4,5] Determinare l'evoluzione forzata $y(t)$ in risposta al gradino unitario $u(t) = 1(t)$ di un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{1}{(s+1)^3(s+2)}$. Determinare inoltre il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$.

Parte C

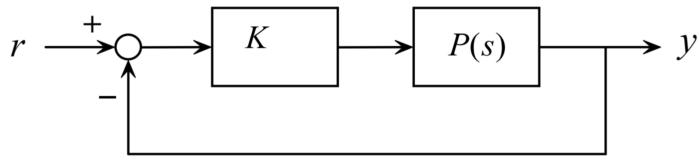
3. [punti 4,5] Sia dato il seguente sistema retroazionato



dove $L(s)=\frac{1}{3}\cdot\frac{(1-s)^2}{s(1+s)^2}$.

1. Tracciare il diagramma polare di $L(j\omega)$ determinando in particolare l'asintoto, il comportamento per $\omega\to+\infty$ e l'intersezione con l'asse reale negativo.
2. Stabilire mediante applicazione del criterio di Nyquist che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Determinare inoltre il margine di ampiezza (M_A) ed il margine di fase (M_F).

4. [punti 4,5] Sia dato il sistema in retroazione di figura

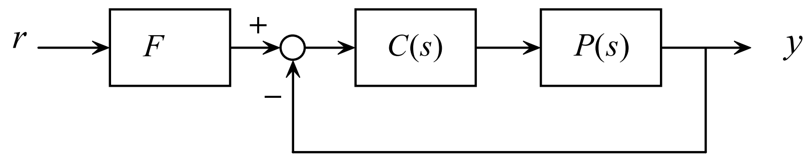


dove $P(s)=\frac{1}{s^2(s+2)(s+4)^2}$.

1. Dimostrare, mediante un risultato della teoria della stabilità (criterio di Routh o altro), che non esistono valori $K\in\mathbb{R}$ per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
2. Tracciare i luoghi delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K>0$ (luogo diretto) e $K<0$ (luogo inverso) determinando in entrambi i casi:
   a) gli asintoti del luogo;
   b) le eventuali radici doppie.

Parte D

5. [punti 4,5] Sia dato lo schema di sistema di controllo in figura dove $P(s) = \dfrac{10}{(s+2)(s+5)(s+10)}$.



Determinare un controllore dinamico $C(s)$ con struttura di rete anticipatrice ed il blocco algebrico $F \in \mathbb{R}$ affinché il sistema di controllo soddisfi le seguenti specifiche:

1. costante di posizione $K_p = 19$,
2. margine di ampiezza $M_A = 2$,
3. in condizioni nominali l'errore a regime in risposta ad un gradino del riferimento sia nullo.

6. [punti 4,5] Determinare il segnale a tempo discreto $x(k),\ k \geq 0$ la cui trasformata zeta è
$\mathcal{Z}[x(k)] = \dfrac{2z^3 + z + 1}{(z-1)(z-2)^2}$.

SOLUZIONI – 2° turno
Parte A

1) $$T(s)=\frac{s+1}{s^3\left[(s+2)^2+9\right]}$$

2) $y(t)=-2\sin(2t)$

3) a) Σ è asintoticamente stabile: F
b) Σ è semplicemente stabile: V
c) Σ è instabile: F
d) Σ è a fase minima: F
e) Σ è stabile ingresso-limitato uscita limitata: F

4) $A=1$ e $B=3$.

5) $\sigma_a=-5$

6) $C_r(s)=\dfrac{1+0.1s}{1+0.5s}$; $\tau=0.5$; $\alpha=0.2$

7) $t_0=8$ sec.

8) $\{\text{poli di }\Sigma\}=\{-1,\ -4\}$

9) Modi = $\{\ e^{-t}, te^{-t}\ \}$

10)
a) Il sistema è internamente asintoticamente stabile: F
b) Il sistema è ben connesso: V

11) $\mathcal{Z}[x(k+6)]=z^6\mathcal{Z}[x(k)]-x(0)z^6-x(1)z^5-x(2)z^4-x(3)z^3-x(4)z^2-x(5)z$

12) $D^*f(t)=1(t-3)+3\delta(t-3)+2\delta(t)$

13) $C_d(z)=\frac{z+1}{z-1}$

14)
a) Determinarne il guadagno statico del sistema: $H(1)=5$
b) Determinarne la risposta all'impulso: $h(k)=(0.8)^k\cdot 1(k)$

15) $n_C=4$

16) $T_a=0.5$ sec.

17) $n_+(a)=0$
$n_-(a)=1$
$n_0(a)=2$

18) $\omega_m=1$ rad/s

1.

$$\begin{cases} m\,D^2 x_1 = -k x_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\,D^2 x_2 = f - k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (mD^2+k)\cdot \\ k\cdot \end{array}\begin{cases} k x_2 = m\,D^2 x_1 + 2k x_1 \\ (m\,D^2 + k)\,x_2 = f + k x_1 \end{cases}$$

$$(mD^2 + k)(m\,D^2 x_1 + 2k x_1) = kf + k^2 x_1$$

$$m^2 D^4 x_1 + 2km\,D^2 x_1 + km\,D^2 x_1 + 2k^2 x_1 = kf + k^2 x_1$$

$$\boxed{m^2 D^4 x_1 + 3km\,D^2 x_1 + k^2 x_1 = kf} \quad \text{Eq. diff.}$$

$$T(s) = \frac{k}{m^2 s^4 + 3km\,s^2 + k^2} \qquad f.d.t.$$

$$m^2 s^4 + 3km\,s^2 + k^2 = 0 \qquad s^2 = \frac{-3km \pm \sqrt{9k^2m^2 - 4k^2m^2}}{2m^2} =$$

$$= \frac{-3k \pm \sqrt{5}\cdot k}{2m} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}$$

poli di Σ:

$$P_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}} \qquad P_{3,4} = \pm j\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}}$$

modi di Σ:

$$\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}}\cdot t + \varphi_1\right),\ \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}}\cdot t + \varphi_2\right)$$

più semplicemente

$$\operatorname{sen}\left(1{,}618\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t + \varphi_1\right),\ \operatorname{sen}\left(0{,}618\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t + \varphi_2\right)$$

2.

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)^3(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1)^3} + \frac{K_{22}}{(s+1)^2} + \frac{K_{23}}{s+1} + \frac{K_3}{s+2}$$

$$K_1 = \left.\frac{1}{(s+1)^3(s+2)}\right|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$K_{21} = \left.\frac{1}{s(s+2)}\right|_{s=-1} = \frac{1}{(-1)(1)} = -1$$

$$K_3 = \left.\frac{1}{s(s+1)}\right|_{s=-2} = \frac{1}{(-2)(-1)} = \frac{1}{2}$$

$$K_1 + K_{23} + K_3 = 0 \qquad K_{23} = -K_1 - K_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

$$K_{22} = \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s(s+2)}\right)\right|_{s=-1} = \left. -\frac{s+2+s}{s^2(s+2)^2}\right|_{s=-1} = 0$$

$$Y(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2 e^{-t} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \quad t \geq 0}$$

Il segnale u(t)=1(t) è discontinuo su R, quindi il grado massimo di continuità della risposta y(t) è
{grado relativo} - 1 = 4 – 1 = 3

N.B.
Correzione sul calcolo di k_3:
k_3 = 1/(s (s+1)^3)|_{s=-2} = 1/2

3.

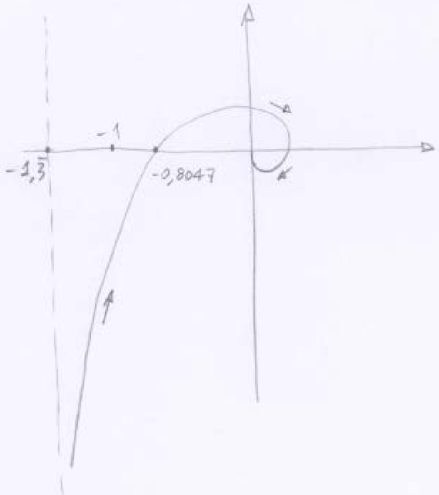
1. $L(j\omega) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(1-j\omega)^2}{j\omega(1+j\omega)^2}$; $|L(j\omega)| = \frac{1}{3\omega}$; $\arg L(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 4\,\mathrm{arctg}\,\omega$

asintoto per $\omega \to 0+$ $\quad \sigma_a = \frac{1}{3}\left(-1-1-(1+1)\right) = -\frac{4}{3} = -1,\overline{3}$

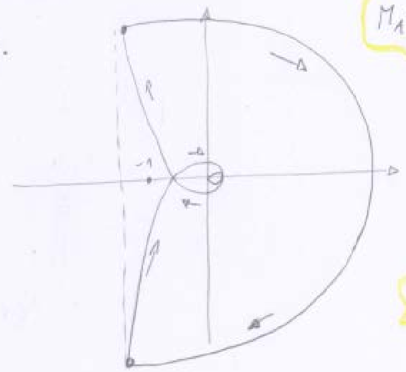
$\omega \to +\infty \quad |L(j\omega)| \to 0 \quad \arg L(j\omega) \to -5 \cdot \frac{\pi}{2}$

$\arg L(j\omega_p) = -\pi \Rightarrow \mathrm{arctg}\,\omega_p = \frac{\pi}{8}, \quad \omega_p = \mathrm{tg}\frac{\pi}{8} = 0,4142$

$|L(j\omega_p)| = 0,8047 \Rightarrow L(j\omega_p) = -0,8047$



2.



$M_A = \frac{1}{0,8047} \cong 1,24$

M_F :

$|L(j\omega_c)| = 1$

$\omega_c = \frac{1}{3}$

$\arg L(j\omega_c) = -163°,74$

$M_F = 16°,26$

$L(s)$ non ha poli a parte reale positiva e il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto -1. Quindi per il C. di N. il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

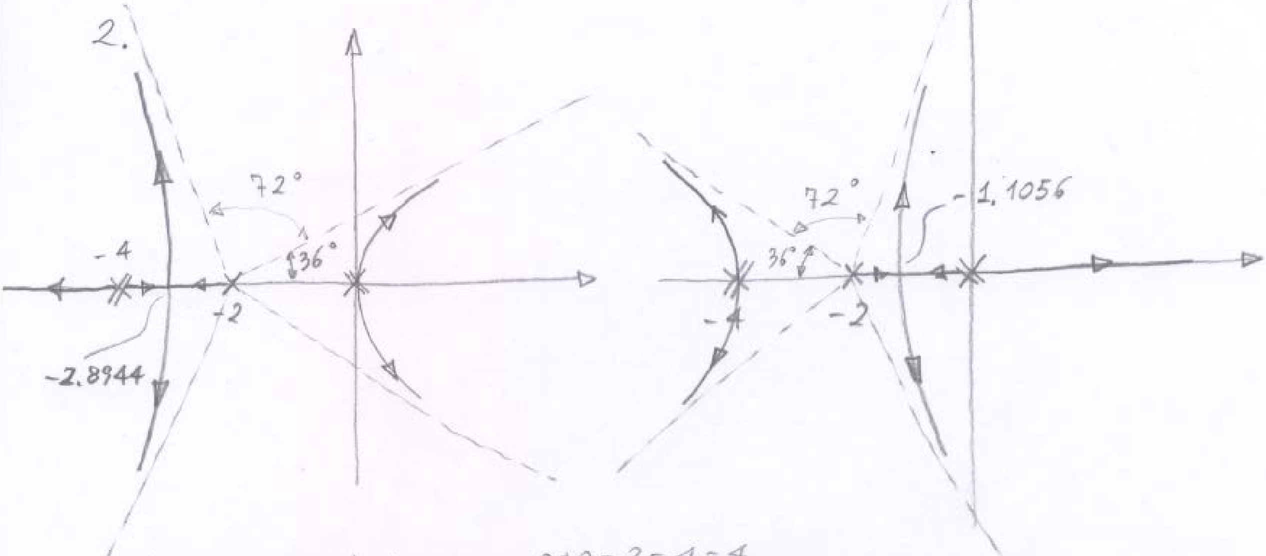
4.

1. $1 + K \frac{1}{s^2(s+2)(s+4)^2} = 0$

Il polinomio caratteristico è quindi $s^5+10s^4+32s^3+32s^2+K$.

Dalla nota proprietà che un polinomio è hurwitziano solo se tutti i suoi coefficienti sono (strettamente) positivi segue che $\forall K \in \mathbb{R}$ il sistema retroazionato non è asintoticamente stabile.

2.



Centro dei 5 asintoti $\sigma_a = \frac{0+0-2-4-4}{5} = -2$

Calcolo delle radici doppie : $\frac{2}{s}+\frac{1}{s+2}+\frac{2}{s+4}=0$

$5s^2+20s+16=0$ da cui $s_{1,2} = -2.8944$ e -1.1056

5.

b. $C(s) = k \dfrac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}$

$L(0) = \dfrac{k}{10}$ $\qquad K_p = L(0) = 19$

$k = 190$ $\qquad$ imponiamo $-\dfrac{1}{\tau} = -2$ (CANCELLAZIONE POLO - ZERO)

$\tau = \dfrac{1}{2}$

$$L(s) = \frac{1+\frac{1}{2}s}{1+\alpha\frac{1}{2}s} \cdot \frac{1900}{(s+2)(s+5)(s+10)} =$$

$$= \frac{\cancel{s+2}}{(\alpha s+2)} \cdot \frac{1900}{(\cancel{s+2})(s+5)(s+10)} =$$

$$= \frac{1900}{(\alpha s+2)(s+5)(s+10)}$$

$L(s;\alpha) + \dfrac{1}{2} = 0$ ottenere radici pure immaginarie

$3800 + (\alpha s+2)(s^2+15s+50) = 0$

$$\alpha s^3 + (15\alpha+2)s^2 + (50\alpha+30)s + 3900 = 0$$

$$\begin{array}{c|cc}
3 & \alpha & 50\alpha+30 \\
2 & 15\alpha+2 & 3900 \\
1 & f(\alpha) &
\end{array}$$

$$f(\alpha) = (15\alpha+2)(50\alpha+30) - 3900\alpha =$$

$$= 100\alpha + 60 + 750\alpha^2 + 450\alpha - 3900\alpha =$$

$$= 750\alpha^2 - 3350\alpha + 60$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{+1675 \pm \sqrt{1675^2 - 60\cdot 750}}{750} = \frac{1675 \pm \sqrt{2'760'625}}{750}$$

$$= \frac{1675 \pm 1661{,}5123}{750} = \begin{cases} 4{,}4487 & \text{da SCARTARE} \\ 0{,}0180 & [0{,}0179828\ldots] \end{cases}$$

$$\alpha \in (0,1) \Rightarrow \alpha = 0{,}0180$$

$$C(s) = 180 \frac{1 + \frac{1}{2}s}{1 + 0{,}0180 \cdot \frac{1}{2} s}$$

Calcolo di F :

$$T_{ry}(s) = F \cdot \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

$$T_{ry}(0) = 1 \qquad F \cdot \frac{L(0)}{1+L(0)} = 1$$

$$F \cdot \frac{19}{1+19} = 1 \qquad \boxed{F = \frac{20}{19} = 1,0526}$$

6.

$$\boxed{X(z) = \frac{2z^3+z+1}{(z-1)(z-2)^2}} = c_0 + \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_{21}}{(z-2)^2} + \frac{c_{22}}{z-2}$$

$$c_0 = \lim_{z \to +\infty} X(z) = 2$$

$$c_1 = \left. \frac{2z^3+z+1}{(z-2)^2} \right|_{z=1} = 4$$

$$c_{21} = \left. \frac{2z^3+z+1}{z-1} \right|_{z=2} = 19$$

$$c_{22} = D\left[\frac{2z^3+z+1}{z-1}\right]_{z=2} = \left. \frac{(6z^2+1)(z-1)-(2z^3+z+1)}{(z-1)^2} \right|_{z=2} =$$

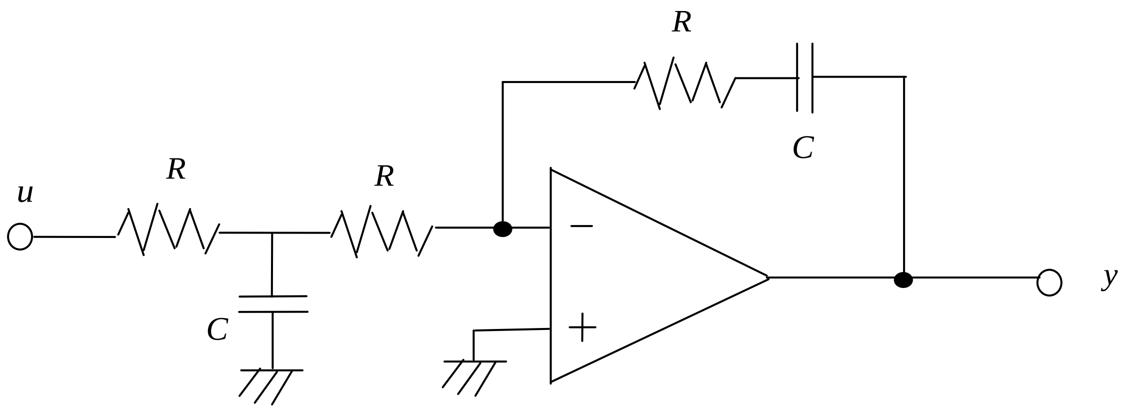
$$= 25 - (16+2+1) = 25 - 19 = 6$$

$$\boxed{x(k) = 2\,\delta(k) + 4 \cdot 1(k-1) + 19\,(k-1)\,2^{k-2} \cdot 1(k-1) + 6 \cdot 2^{k-1} \cdot 1(k-1)}$$

Parte A

1. [punti 4] Riportare e commentare le regole di riduzione per gli schemi a blocchi. Spiegare il significato della riduzione alla forma minima ed esporne un esempio.

2. [punti 4] Il seguente schema elettrico definisca un sistema dinamico Σ orientato da u (tensione di ingresso) ad y (tensione d'uscita).



Si assuma l'amplificatore operazionale come ideale e si introduca il parametro $T \triangleq RC$:

1. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema Σ.
2. Scrivere $G(s)$ nella forma standard con poli e zeri e disegnare la configurazione poli-zeri di Σ.
3. Determinare l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.

3. [punti 5] Da una elaborazione di dati sperimentali su di un sistema dinamico è nota la risposta al gradino unitario $g_s(t) = \frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t}$.

a) Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema esprimendola nella forma standard con poli e zeri.

b) Determinare la risposta forzata $y(t),\ t \geq 0$ del sistema al segnale di ingresso $u(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1+t & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$

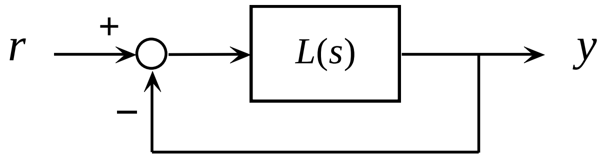
4. [punti 4]

a) Sia $X(z)$ la trasformata zeta di un segnale a tempo discreto x. Presenta e dimostra la relazione fra $\frac{dX}{dz}$ e $X(z)$.

b) Calcolare, riportando i passaggi algebrici necessari, la trasformata zeta della funzione armonica $\sin(\omega k)$, $k \in \mathbb{Z}$: $\mathcal{Z}[\sin(\omega k)]$. [Suggerimento: $\mathcal{Z}\left[a^k\right] = \frac{z}{z-a}$]

Parte B

5. [punti 4] Sia dato il sistema retroazionato di figura dove $L(s) = \dfrac{1000}{(s+1)(s+2)(s+5)(s+10)}$.



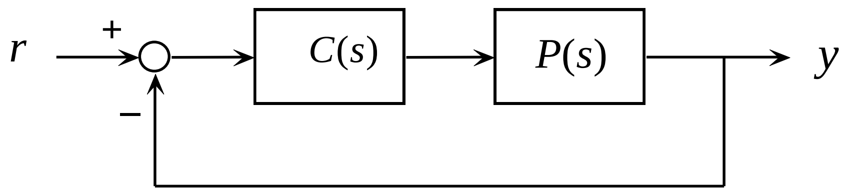
a. Tracciare il diagramma di Nyquist di $L(j\omega)$ determinando in particolare l'intersezione con l'asse reale negativo.
b. Applicando il criterio di Nyquist studiare la stabilità del sistema retroazionato.

6. [punti 5] Tracciare il luogo delle radici dell'equazione

$$1 + \frac{s+a}{(s+1)(s+2)(s+2a)} = 0 \quad \text{per } a \geq 0.$$

Si determinino mediante una stima numerica le radici doppie presenti nel luogo. Esporre dettagliatamente il metodo numerico scelto considerando che un errore di $\pm 10\%$ nella stima è accettabile al fine del tracciamento qualitativo richiesto.

7. [punti 5] Sia dato il sistema in retroazione di figura



dove $P(s) = \dfrac{10}{(s+1)^3}$. Progettare un controllore con struttura di rete ritardatrice $C(s) = K \cdot \dfrac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}$ affinché si abbia: 1) costante di posizione $K_p = 20$; 2) stabilità con margine di fase $M_F = 40^\circ$.

8. [punti 5] Sia dato un sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento

$$H(z) = \frac{z^2 - z - 1}{(z-1)\left(z + \frac{1}{2}\right)}.$$

a) Determinare l'equazione alle differenze che caratterizza il sistema.
b) Determinare la risposta forzata $y(k)$ all'ingresso $u(k) = k \cdot 1(k)$.

Traccia delle soluzioni

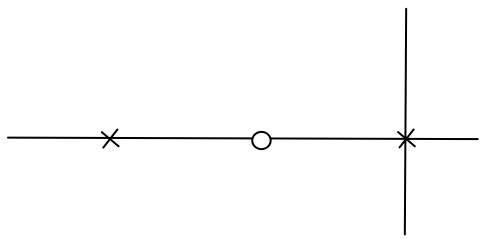
1.
Vedi dispense del corso

2.
1.

$$G(s) = -\frac{Z_f}{Z_{t,i}} = -\frac{R + \frac{1}{sC}}{2R + \frac{R^2}{\frac{1}{sC}}} = -\frac{1 + RCs}{2RCs + R^2C^2s^2} = -\frac{1+Ts}{Ts(2+Ts)}$$

2.

$$G(s) = \left(-\frac{1}{T}\right)\frac{s + \frac{1}{T}}{s\left(s + \frac{2}{T}\right)} \qquad \text{zeri: } z_1 = -\frac{1}{T} \;\; ; \quad \text{poli: } p_1 = 0 \;,\; p_2 = -\frac{2}{T}$$



3. $G(s) = \dfrac{-s - \frac{1}{T}}{Ts^2 + 2s} \qquad \Rightarrow \qquad TD^2 y + 2Dy = -Du - \dfrac{1}{T} u$

3.

5 a. $\mathcal{L}[g_s(t)] = G(s)\cdot\frac{1}{s}$

$$\mathcal{L}[g_s(t)] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s+2}$$

$$G(s) = \frac{1}{2} + \frac{s}{s+1} - \frac{3}{2}\cdot\frac{s}{s+2} = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)}$$

$$G(s) = 2\cdot\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+1)(s+2)}$$

b. $u(t) = 1(t) + t\cdot 1(t)$, $U(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$

$$Y(s) = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)}\cdot\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\right) = \frac{2s+1}{\cancel{(s+1)}(s+2)}\cdot\frac{\cancel{s+1}}{s^2}$$

$$= \frac{2s+1}{s^2(s+2)} = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_2}{s+2}$$

$$K_{11} = \left.\frac{2s+1}{s+2}\right|_{s=0} = \frac{1}{2} \qquad K_2 = \left.\frac{2s+1}{s^2}\right|_{s=-2} = -\frac{3}{4}$$

$$K_{12} + K_2 = 0 \implies K_{12} = \frac{3}{4}$$

$$Y(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s+2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \left(\frac{1}{2}t + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}e^{-2t}\right)\cdot 1(t)$$

4

Vedi appunti dell'insegnamento.

5.

a. $L(j\omega) = \dfrac{1000}{(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+5)(j\omega+10)}$

$L(j0) = 10$

$\omega \to +\infty \quad |L(j\omega)| \to 0 \quad \arg L(j\omega) \to -2\pi$

$1 + K L(s) = 0$ abbia radici puramente immaginarie

$1 + K \dfrac{1000}{(s+1)(s+2)(s+5)(s+10)} = 0 \qquad \beta := 1000\,K$

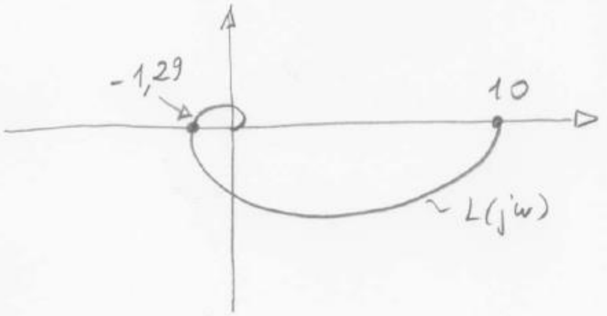
$s^4 + 18\,s^3 + 97\,s^2 + 180\,s + 100 + \beta = 0$

4	1	97	$100+\beta$
3	$\overset{1}{\cancel{18}}$	$\overset{10}{\cancel{180}}$	0
2	87	$100+\beta$	0
1	$870-100-\beta$		

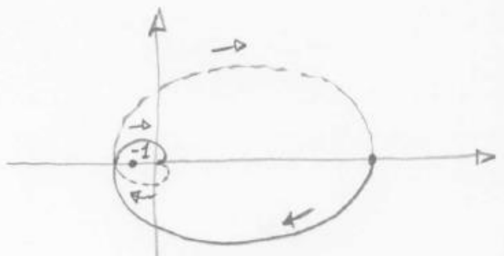
$770 - \beta = 0 \qquad \beta = 770$

$K = \dfrac{77}{100} = 0{,}77$

L'intersezione avviene in $-\dfrac{1}{K} = -\dfrac{100}{77} = -1{,}2987$



b.



Il diagramma polare completo circonda due volte, in senso orario, il punto critico -1. $L(s)$ non ha poli a parte reale positiva, quindi per il Criterio di N. il sistema retroazionato è instabile.

6.

$$\left(s^2+3s+2\right)\left(s+2a\right)+s+a=0$$

$$s^3+3s^2+2s+2a\left(s^2+3s+2\right)+s+a=0$$

$$s^3+3s^2+3s+2a\left(s^2+3s+2+\frac{1}{2}\right)=0$$

$$1+2a\,\frac{s^2+3s+5/2}{s\left(s^2+3s+3\right)}=0$$

$$1+2a\,\frac{\left(s+\frac{3}{2}+j\frac{1}{2}\right)\left(s+\frac{3}{2}-j\frac{1}{2}\right)}{s\left(s+\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(s+\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=0$$

Calcolo delle radici doppie:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s+\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{1}{s+\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{1}{s+\frac{3}{2}+j\frac{1}{2}}-\frac{1}{s+\frac{3}{2}-j\frac{1}{2}}=0$$

$$\frac{1}{s}+\frac{2(s+1{,}5)}{(s+1{,}5)^2+0{,}75}-\frac{2(s+1{,}5)}{(s+1{,}5)^2+0{,}25}=0$$

$$f(s)\triangleq\frac{1}{s}+2(s+1{,}5)\left[\frac{1}{(s+1{,}5)^2+0{,}75}-\frac{1}{(s+1{,}5)^2+0{,}25}\right]$$

L'asse reale negativo appartiene al luogo $(a>0)$ e quindi, tentativamente, si cercano le radici nell'intervallo $[-5,-1]$

$f(-5) = -0,178$

$f(-4) = -0,195$

$f(-3) = -0,133$

$f(-2) = 0,5$

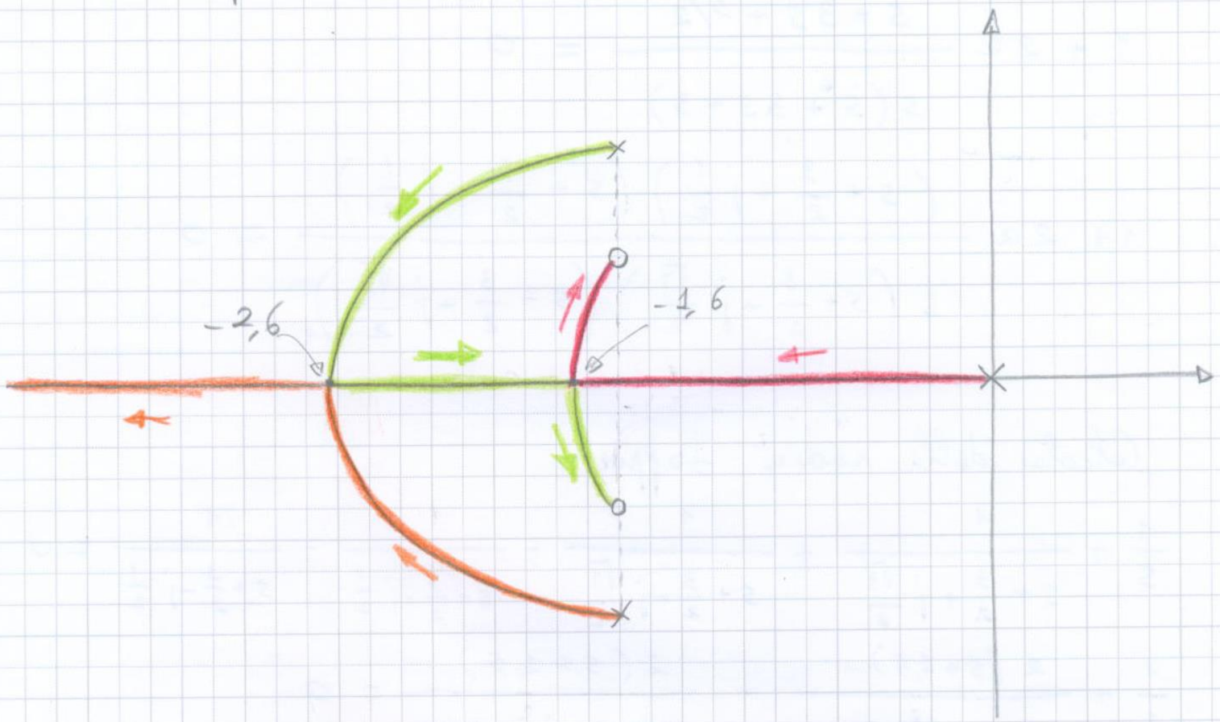
$f(-1) = -2$

$f(-3),\ f(-2) \Rightarrow f(-2,5) = 0,057\ ;\ f(-2,6) = -0,0002$

$f(-2),\ f(-1) \Rightarrow f(-1,5) = -0,666$

$f(-1,6) = -0,118$

radici doppie in $s_1 \simeq -2,6$ e $s_2 \simeq -1,6$



7.

$$K_p = \lim_{s \to 0} C(s)P(s) = \lim_{s \to 0} K \frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s} \cdot \frac{10}{(s+1)^3} = 10K$$

$$K_p = 20 \quad \Rightarrow \quad \boxed{K = 2}$$

Sia $L(s) \triangleq \dfrac{20}{(s+1)^3}$ (guadagno di anello non compensato)

e $L_c(s) = \dfrac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s} \cdot L(s)$ (g. di anello compensato)

È richiesto $M_F = 40° = 0.6981317$ rad

$$L(j\omega) = \frac{20}{(j\omega+1)^3}, \quad |L(j\omega)| = \frac{20}{(1+\omega^2)^{3/2}}, \quad \arg L(j\omega) = -3\,\mathrm{arctg}\,\omega$$

Scegliamo per tentativi una pulsazione ω_0 affinché

$$\varphi_0 \triangleq \arg L(j\omega_0) + \pi - M_F > 0 \quad \text{e} \quad \cos\varphi_0 > \frac{1}{|L(j\omega_0)|}.$$

Sia $\omega_0 = 1$ rad/sec

$$\varphi_0 = 0.0873 \text{ rad } (\sim 5°), \quad |L(j\omega_0)| = 7.0711$$

$$\cos\varphi_0 = 0.9962 > \frac{1}{|L(j\omega_0)|} = 0.1414 \quad \text{ok!}$$

$$\varphi := \varphi_0, \quad M := |L(j\omega_0)|$$

$$\tau = \frac{M - \cos\varphi}{\omega_0 \sin\varphi} = \boxed{69.67 \text{ sec}}, \quad \alpha = \frac{M\cos\varphi - 1}{M(M - \cos\varphi)} = \boxed{0.1407}$$

8.

a) $H(z) = \dfrac{z^2 - z - 1}{z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}}$, quindi l'equazione alle differenze è

$$y(k) - \frac{1}{2}y(k-1) - \frac{1}{2}y(k-2) = u(k) - u(k-1) - u(k-2)$$

b)

$$Y(z)=H(z)U(z)=\frac{z^2-z-1}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{z}{(z-1)^2}=\frac{z(z^2-z-1)}{(z-1)^3\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

$$Y\cdot z^{-1}=\frac{z^2-z-1}{(z-1)^3\left(z+\frac{1}{2}\right)}=\frac{c_{1,1}}{(z-1)^3}+\frac{c_{1,2}}{(z-1)^2}+\frac{c_{1,3}}{z-1}+\frac{c_2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{-\frac{2}{3}}{(z-1)^3}+\frac{\frac{10}{9}}{(z-1)^2}+\frac{-\frac{2}{27}}{z-1}+\frac{\frac{2}{27}}{\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

$$Y=-\frac{2}{3}\frac{z}{(z-1)^3}+\frac{10}{9}\frac{z}{(z-1)^2}-\frac{2}{27}\frac{z}{z-1}+\frac{2}{27}\frac{z}{\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

$$y(k)=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}k(k-1)+\frac{10}{9}k-\frac{2}{27}+\frac{2}{27}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k,\ k\geq 0$$

$$y(k)=-\frac{1}{3}k^2+\frac{13}{9}k-\frac{2}{27}+\frac{2}{27}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k,\ k\geq 0$$