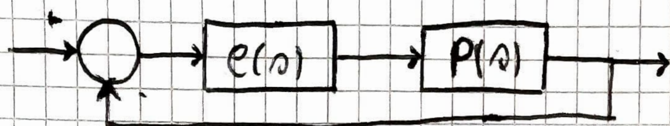
# Controllori 2




$$P(s) = \frac{100(s+1)}{(s+2)^2(s+10)}$$

Controllore di struttura (RETE RITARDATRICE): (metodo generico)

$$\boxed{C(s) = k\,\frac{1+\alpha T s}{1+T s}, \quad k \in \mathbb{R} \text{ e } \alpha \in (0,1) \quad T \in \mathbb{R}^+}$$

lo da la traccia

a) errore a regime $e_R$: $|e_R| = 0{,}02 = \frac{1}{50}$

b) Margine di fase $M_F = 50°$ poi $M_F = 45°$

$= 0{,}872665$

- Per l'errore $|e_R| = 0{,}02$:

$$\left|\frac{1}{1+K_p}\right| = \frac{1}{50} \iff K_p = 49; \text{ sappiamo che } K_p = k\frac{5}{2} \Rightarrow k = \frac{98}{5}$$

- Definiamo il segnale $L(s)$ e $L'(s)$

$$L(s) = k\,P(s) = 1960\,\frac{(s+1)}{(s+2)^2(s+10)}$$

il nuovo k del controllore

$$L'(s) = C(s)\cdot P(s) = 1960 \cdot \frac{1+\alpha T s}{1+T s} \cdot \frac{s+1}{(s+2)^2\cdot(s+10)}$$

- Trovo $\alpha$ e $T$ mediante formule di inversione:

$$L(j\omega) = 1960\,\frac{(j\omega+1)}{(j\omega+2)^2(j\omega+10)} = 1960\,\frac{(j\omega+1)}{4\left(\frac{j\omega}{2}+1\right)^2 \cdot 10\left(\frac{j\omega}{10}+1\right)}$$

$$\arg L(j\omega) = -2\,\text{arctg}\left(\frac{\omega}{2}\right) - \text{arctg}\left(\frac{\omega}{10}\right) + \text{arctg}(\omega)$$

$$|L(j\omega)| = 1960 \cdot \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{(4+\omega^2)\sqrt{100+\omega^2}}$$

- Determino la pulsazione critica $\omega_0$:

Posso determinare $\omega_p$: (intersezione con l'asse reale negativo, non serve)

$\arg(j\omega_p) = -\pi \rightarrow \omega_p$: non ci sono intersezioni

Per determinare $\omega_0$ devo fare riferimento a queste condizioni.

$$\begin{cases} \varphi_0 \triangleq \arg L(j\omega_0) + \pi - M_F > 0 \\ \cos\varphi_0 > \dfrac{1}{|L(j\omega_0)|} \end{cases}$$

dopo qualche tentativo scelgo $\omega_0 = 10$ rad/s

| $\omega_0$ | $\arg L(j\omega_0) + \pi$ |
|---|---|
| 1 | 2,90 |
| 9 | 1,16 |
| • 10 | 1,08 $> M_F$ ✓ verificata |
| 13,9 | 0,86 |

- $\varphi_0 = 0{,}2078556$

$|L(j\omega_0)| = 13{,}393$

- Per verificare la validità di $\omega_0$ deve soddisfare la disequazione:

$$\cos\varphi_0 > \frac{1}{|L(j\omega_0)|} \Rightarrow 0{,}9785 > 0{,}0747 \checkmark \text{ verificata}$$

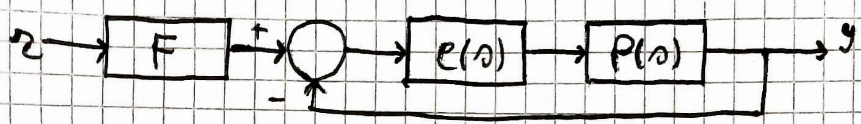
- Applico le formule di inversione per trovare $\alpha$ e $T$:

$M := |L(j\omega_0)| = 13{,}393$ e $\varphi = \varphi_0 = 0{,}2079$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{M\cos\varphi - 1}{M(M - \cos\varphi)} = 0{,}07280 \\ T = \dfrac{M - \cos\varphi}{\omega_0 \operatorname{sen}\varphi} = 6{,}016 \text{ sec} \end{cases}$$

da ricordare.

# Controllori 10




$P(s) = \frac{8}{(s+2)^4}$

Controllore di struttura (RETE ANTICIPATRICE): (metodo generico)

$\boxed{C(s) = K \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}}$ lo da la traccia

$F \in \mathbb{R}$, il controllore deve rispettare queste specifiche:

a) $K_p = 3{,}5$ (costante di posizionamento)

b) $M_F = 30°$ (margine di fase) $M_F = 0{,}523599$ rad

c) $e_r = 0$ (errore a regime in risposta ad un gradino del rif. r)

- Per l'errore a regime nullo:

$L(s) = C(s)P(s) = K \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s} \cdot \frac{8}{(s+2)^4}$

- Per la specifica $K_p = 3{,}5$:

$K_p = L(0) = \frac{K}{2} = 3{,}5 \rightarrow K = 7$

- Definiamo il segnale $G(s)$ e $G'(s)$:

$G(s) = K P(s) = \frac{56}{(s+2)^4}$

$G'(s) = C(s) \cdot P(s) = \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s} \cdot \frac{56}{(s+2)^4}$

- Trovo $\alpha$ e $\tau$ mediante formule di inversione:

$G(j\omega) = \frac{56}{(j\omega+2)^4} = \frac{56}{16\left(\frac{j\omega}{2}+1\right)^4} = \frac{3{,}5}{\left(\frac{j\omega}{2}+1\right)}$

$\arg G(j\omega) = -4 \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right)$

$|G(j\omega)| = \frac{56}{(\omega^2+4)^2}$

- Determino la pulsazione critica $\omega_0$:

Posso determinare $\omega_p$: (intersezione con l'asse reale negativo, non serve)

$\arg G(j\omega_p) = -\pi \rightarrow \omega_p = 2$ rad/s

Per determinare $\omega_0$ devo fare riferimento a queste condizioni:

$$\begin{cases} \varphi_0 \triangleq -\arg(G(j\omega_0)) - \pi + M_F > 0 \\ \cos\varphi_0 > |G(j\omega_0)| \end{cases}$$

dopo qualche tentativo scelgo $\omega_0 = 2{,}5$ rad/s

| $\omega_0$ | $-\arg G(j\omega_0) - \pi$ |
|---|---|
| 1 | $-1{,}28$ |
| 2 | 0 |
| 2,1 | 0,09 |
| 2,5 | 0,44 $< M_F$ ✓ verificata |

- $\varphi_0 = 0{,}9662$

$|G(j\omega_0)| = 0{,}5330$

- Per verificare la validità di $\omega_0$ deve soddisfare la disequazione:

$\cos\varphi_0 > |G(j\omega_0)| \Rightarrow 0{,}5689 > 0{,}5330$ ✓ verificata

- Applico le formule di inversione per trovare $\alpha$ e $T$:

$$M := \frac{1}{|G(j\omega_0)|} = 1{,}8761 \quad \text{e} \quad \varphi = \varphi_0 = 0{,}9662$$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{M\cos\varphi - 1}{M(M - \cos\varphi)} = 0{,}0271 \\ T = \dfrac{M - \cos\varphi}{\omega_0 \cdot \operatorname{sen}\varphi} = 0{,}636 \text{ sec} \end{cases}$$

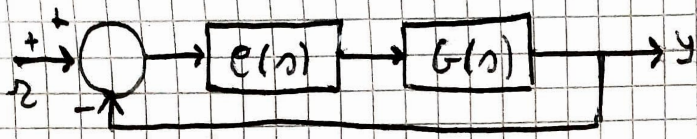
da rifare

- Calcolo il blocco algebrico F: (errore nullo)

$$\boxed{T_{ry} = F \cdot \frac{L(s)}{1 + L(s)}}$$

$$T_{ry}(0) = 1 = \frac{F \cdot L(0)}{1 + L(0)} = \frac{F \cdot 3{,}5}{1 + 3{,}5} \longrightarrow F = 1{,}2857$$

# Controllori 7




$G(s) = \dfrac{10}{s(s+2)^2}$

Per cancellazione polo - zero (metodo quando c'è $M_A$)

**Controllore di struttura (RETE ANTICIPATRICE):**

$$\boxed{C(s) = K_c \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}, \quad K_c \in \mathbb{R}^+,\ T>0,\ \alpha \in (0,1)}$$ lo da la traccia

a) Stabile con margine ampiezza $M_A = 5$

b) Costante di velocità $K_v = 10$

Prima di progettare il controllore, la traccia mi chiede di verificare la stabilità asintotica posto $C(s)=1$. E di determinare il corrispondente margine di ampiezza, $M_A$.

- **Verifica la stabilità con criterio di Nyquist:**

$$F(s) = C(s)\,G(s) = \frac{10}{s(s+2)^2}\ ; \quad F(j\omega) = \frac{10}{j\omega\cdot(j\omega+2)^2} = \frac{10}{j\omega\cdot 4\cdot\left(\frac{j\omega}{2}+1\right)^2} =$$

$$|F(j\omega)| = \frac{10}{j\omega\cdot(\omega^2+4)} \qquad \arg F(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

- **Calcolo i limiti:**

$\omega \to 0^+ :\ |F(j\omega)| = +\infty \qquad \arg F(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$

$\omega \to +\infty :\ |F(j\omega)| = 0 \qquad \arg F(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi$

- **Dato che c'è un polo in 0 calcolo il centro dell'asintoto:**

$$\frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot(-1) = -2,5$$

La rotazione complessiva $\overset{\infty}{-\frac{3}{2}\pi} - \overset{0}{\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = -\pi$

- <u>Calcolo l'intersezione con l'asse reale negativo</u>:

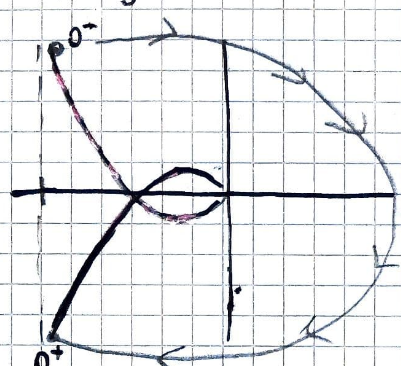
Uso la tabella di Routh e impongo che le radici siano puramente immaginarie:

$F(s) + \eta = 0$

$\dfrac{10}{s(s+2)^2} + \eta = 0 \dots \rightarrow s^3 + 4s^2 + 4s + \dfrac{10}{\eta} = 0$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & \frac{10}{\eta} \\ 1 & & \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & \frac{5}{\eta} \\ 1 & 8 - \frac{5}{\eta} & 0 \end{array}$$

$8 - \dfrac{5}{\eta} = 0 \rightarrow \eta = \dfrac{5}{8}$ ; l'attraversamento avviene nel punto $-\dfrac{5}{8}$




$N = 0$ (il vettore $-1$ non riesce a ruotare)

Poli a parte reale pos $= 0 = P_p$

$P_p = N = 0$ stabile ✓

- <u>Progetto la rete anticipatrice per cancellazione polo-zero</u>:

Fisso $\tau = 0{,}5\,s$ $\left( -\dfrac{1}{\tau} = -2 \leftarrow \text{escluso il polo in zero, scelgo il polo più piccolo} \rightarrow \tau = \dfrac{1}{2} \right)$

$C(s) = K_c \dfrac{1 + 0{,}5s}{1 + \alpha 0{,}5s} = K_c \dfrac{2 + s}{2 + \alpha s}$

$L(s) = C(s)F(s) = K_c \dfrac{2+s}{2+\alpha s} \cdot \dfrac{10}{s(s+2)^2} = K_c \dfrac{10}{s(2+\alpha s)(s+2)}$

- <u>Dalla specifica sulla costante di velocità $K_v$</u>:

$K_v = \lim_{s \to 0} sL(s) = \dfrac{10 K_c}{4} \longrightarrow K_c = 4$

- <u>Dalla specifica stabile con margine d'ampiezza $M_A = 5$</u>:

L'intersezione con l'asse reale negativo in $-\dfrac{1}{5}$ assicura la stabilità con $M_A = 5$.

$L(s) + \dfrac{1}{5} = 0 \quad \dots \quad \alpha s^3 + (2 + 2\alpha) s^2 + 4s + 200 = 0$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & \alpha & 4 \\ 2 & 1+\alpha & 100 \\ 1 & 4(1+\alpha) - 100\alpha & 0 \end{array} \quad \rightarrow 4(1+\alpha) - 100\alpha = 0 \rightarrow \alpha = \frac{4}{96} \simeq 0{,}0417$$

Potremmo usare le formule di intersezione, farò un esempio

# Controllori 3


$$P(s) = \frac{10}{(1+s)(1+0{,}4s)^2}$$

Controllore di struttura (RETE RITARDO E ANTICIPO): (metodo generico)

$$\boxed{C(s) = \frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)+\tau_{12} s}}$$

Ro da la traccia

a) Stabile asintoticamente

b) Margine di fase $M_F = 45°$ (si assuma $\frac{\tau_1}{\tau_2} = 10$)

- **Determino la pulsazione critica $\omega_0$:**

$$P(j\omega) = \frac{10}{(1+j\omega)(1+0{,}4j\omega)^2}$$

$$|P(j\omega)| = \frac{10}{\sqrt{1+\omega^2}\cdot(1+(0{,}4)^2\omega^2)} \qquad \arg P(j\omega) = -\arctan(\omega) - 2\arctan\left(\frac{2\omega}{5}\right)$$

$$-\arctan(\omega_0) - 2\arctan\left(\frac{2\omega_0}{5}\right) = -\pi + \overset{0{,}785398}{45°}$$

...

$\omega_0 = 1{,}86$ rad/s

- **Calcolo $\tau_1, \tau_2, \tau_{12}$ mediante formule:**

$\omega_m = \omega_0 = 1{,}86$

$$\boxed{\frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1+\tau_2+\tau_{12}} = \frac{1}{|P(j\omega_0)|} \; ; \; \frac{1}{\sqrt{\tau_1\tau_2}} = \omega_0}$$ da ricordare

$\omega_0^2 = \frac{1}{\tau_1\tau_2}$ sapendo che in questo caso $\frac{\tau_1}{\tau_2} = 10 \longrightarrow \tau_1 = 10\tau_2$

- **Trovo $\tau_2$:**

$$\omega_0^2 = \frac{1}{10\tau_2^2} \longrightarrow \tau_2^2 = \frac{1}{10\omega_0^2} \longrightarrow \tau_2 = \frac{1}{\sqrt{10}\,\omega_0} = 0{,}170 \text{ s}$$

- **Trovo $\tau_1$** $= 10\tau_2 = 1{,}70$ sec

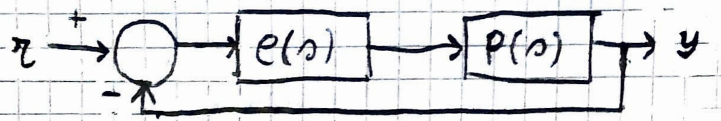
- **Ευρω $\tau_{12}$ :**

$$|P(j\omega_0)| = 3,0481$$

$$\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}} = \frac{1}{|P(j\omega_0)|} \quad \ldots$$

$$\boxed{\tau_{12} = (\tau_1 + \tau_2) \cdot \left[ |P(j\omega_0)| - 1 \right]} = 3,83 \ s$$

# Controllori 8




$$P(s) = \frac{s-1}{s^2+2s+2}$$

**Controllore di ordine minimo:** (primo ordine) (senza poli dominanti)

a) Errore a regime nullo in risposta ad un gradino.
b) Tempo di assestamento $T_a = 9\,s$ in risposta ad un gradino.
c) Sovraelongazione in risposta ad un gradino $S = 0\%$.

Scelgo come controllore $\boxed{C(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s} \; ; \; b_0, b_1 \in \mathbb{R}}$

- **Per avere errore nullo:**

$L(s) = C(s)P(s)$

- **Cerco il polinomio caratteristico:** $(1 + L(s) = 0)$

$s^3 + (b_1 + 2)s^2 + (b_3 - b_1 + 2)s - b_0 = 0 \ldots$

$P_c(s) = s^3 + (b_1+2)s^2 + (b_0 - b_1 + 2)s - b_0$

- **Per la specifica $T_a = 9$ e $S = 0$:**

$\boxed{T_a = \frac{3}{\sigma_s}} = 9 \rightarrow \sigma_s = \frac{1}{3}\ rad/s \quad ; \quad S = 0$

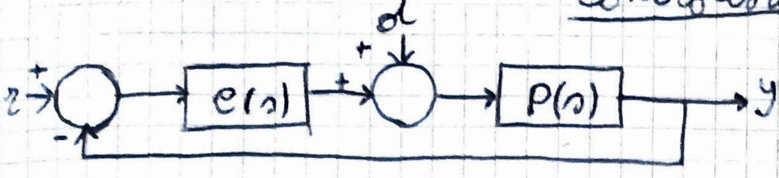
- **Cerco il polinomio desiderato:** (che rispetti specifica $T_a = 9$ e $S = 0\%$.)

$P_d(s) = (s + \frac{1}{3})(s+\alpha)(s+\beta) \quad$ con $\alpha, \beta > \frac{1}{3}$

$P_d(s) = s^3 + (\frac{1}{3} + \alpha + \beta)s^2 + (\alpha\beta + \frac{1}{3}(\alpha+\beta))s + \frac{1}{3}\alpha\beta$

$$\begin{cases} b_1 + 2 = \frac{1}{3} + \alpha + \beta \\ b_0 - b_1 + 2 = \alpha\beta + \frac{1}{3}(\alpha+\beta) \\ -b_0 = \frac{1}{3} \\ \beta = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} \text{ (scelto io)} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2} > \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_0 = -\frac{1}{4} \\ b_1 = \frac{1}{3} \\ \alpha = \frac{3}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

# Controllori 13




$$P(s) = \frac{10}{(s+2)^2}$$

Controllore di ordine minimo : (primo ordine)(senza gli dom. det $M_A$ e $M_F$)

a) Reiezione infinita asintotica al disturbo costante.

b) Sovraelongazione $S=0$ e Tempo di assest. $T_a \simeq 3$ sec in risposta ad un gradino.
(S e $T_a$ da valutarsi in assenza di disturbo)

Con il controllore così progettato, si determinino:

1) Il margine di ampiezza $M_A$ e $M_F$ del sistema retroazionato.

2) L'errore a regime $e_\infty$ in risposta ad un gradino del riferimento.

Scelgo come controllore $\boxed{C(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s}}$

- Per avere errore nullo:

$$L(s) = C(s)P(s)$$

- Creo il polinomio caratteristico : $(1+L(s)=0)$

$$P_c(s) = s^3 + 4s^2 + (4+10b_1)s + 10b_0$$

- Per la specifica $T_a = 3$ e $S = 0$ :

$$\boxed{T_a = \frac{3}{\sigma_s}} = 3 \longrightarrow \sigma_s = 1 \text{ rad/s} \;;\; S = 0$$

- Creo il polinomio desiderato : (che rispetti specifica $T_a = 3$ e $S = 0\%$)

$$P_d(s) = (s+1)(s+\alpha)(s+\beta) \quad \text{con } \alpha, \beta > 1$$

$P_d(s) = s^3 + (\alpha+1)s^2 + (\alpha+\beta)s + \beta$ (il prof non l'ha fatto così ?), io faccio finta che esca ok

$$\begin{cases} \alpha+1 = 4 \\ \alpha+\beta = 4+10b_1 \\ \beta = 10b_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 1+10b_1 \\ \beta = 10b_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_0 = \frac{9}{40} \\ b_1 = \frac{5}{40} \end{cases}$$

$$\boxed{C(s) = \frac{0{,}125 \cdot s + 0{,}225}{s}}$$

• Calcolo il $M_A$ e $M_F$:

$$L(s) = C(s)\,P(s) = \frac{9}{16}\cdot\frac{1+\frac{5}{9}s}{s\left(1+\frac{1}{2}s\right)^2}$$

$$L(j\omega) = \frac{9}{16}\cdot\frac{1+\frac{5}{9}(j\omega)}{j\omega\cdot\left(1+\frac{1}{2}j\omega\right)^2}$$

$$|L(j\omega)| = \frac{9}{16}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{25}{81}\omega^2}}{\omega\cdot\left(1+\frac{1}{4}\omega^2\right)} \qquad \arg L(j\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{5\omega}{9}\right) - \frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

• Calcolo l'asintoto verticale (dato che c'è un polo in zero):

$$\frac{9}{16}\cdot\left[\frac{5}{9}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right] = -0{,}25$$

• Calcolo le intersezioni con l'asse reale negativo:

$$\arg L(j\omega_p) = -\pi$$

$$\omega_p = \dots = 9{,}7855 \qquad |L(j\omega_p)| = 0{,}01 \simeq 0$$

• Calcolo di $M_F$ (esatto):

$\boxed{|L(j\omega_c)| = 1} \rightarrow \omega_c = \sqrt{-2+\sqrt{5}} = 0{,}4859$ è la pulsazione critica

$\boxed{M_F = \pi + \arg L(j\cdot 0{,}4859)} = 1{,}35779$ rad $= 77{,}795^\circ$

• Calcolo $M_A$:

$\boxed{M_A = \frac{1}{|L(j\omega_p)|}} \simeq \frac{1}{0} \longrightarrow +\infty$ (lo noto perché c'è un asintoto che fa allungare l'ampiezza)

• Calcolo di $M_F$ (approssimato):

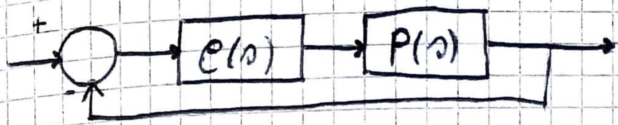
$$0{,}25 = 1\cdot\cos M_F$$

$$M_F = \arccos(0{,}25) = 1{,}318116 \simeq 75{,}5224^\circ$$

• Calcolo errore a regime $e_\infty$:

Il sistema è di tipo 1: $e_\infty = 0$

# Controllori 1




$$P(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

Controllore di ordine 2 (PROPRIO): (secondo ordine senza disturbo)

a) Errore a regime in risposta al gradino di comando del set-point nullo.

b) La costante di velocità $K_v = 10$

c) I poli dominanti del sistema retroazionato siano $-1$ e $-2$.

Scelgo:

$$\boxed{C(s) = \frac{b s^2 + c s + d}{s(s+a)}}$$

- Per l'errore nullo:

$$F(s) = \frac{b s^2 + c s + d}{s(s+a)} \cdot \frac{1}{(s-1)^2}$$

- Per la specifica $K_v = 10$:

$$K_v = \lim_{s \to 0} s F(s) = \frac{\cancel{s}(b s^2 + c s + d)}{\cancel{s}(s+a)} = \frac{d}{a} = 10$$

- Cerco il polinomio caratteristico:

$$1 + F(s) = 0$$

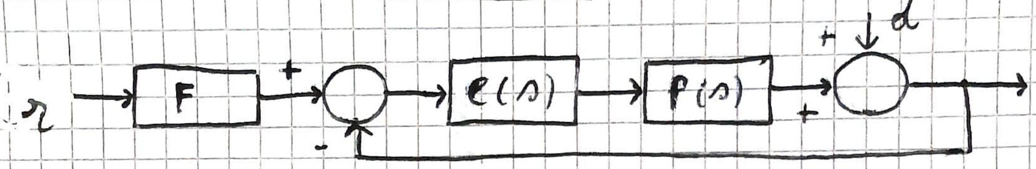
- $s^4 + (a+2)s^3 + (1-2a+b)s^2 + (a+c)s + d$
- Cerco il polinomio desiderato:

$$(s+1)(s+2)(s+6)(s+e) = s^4 + (9+e)s^3 + (9e+20)s^2 + (20e+12)s + 12e$$

$$\begin{cases} a - 2 = 9 + e \\ 1 - 2a + b = 9e + 20 \\ a + c = 20e + 12 \\ d = 12e \\ \dfrac{d}{a} = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 0 + 0 + 0 - e - 11 = 0 \\ -2a + b + 0 + 0 - 9e - 19 = 0 \\ a + 0 + c + 0 - 20e - 12 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + d - 12e + 0 = 0 \\ 10a + 0 + 0 - d + 0 + 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 66 \\ b = 646 \\ c = 1046 \\ d = 660 \\ e = 55 \end{cases}$$

$$C(s) = \frac{646 s^2 + 1046 s + 660}{s(s+66)}$$

# Controllori 4




$$P(s) = \frac{4}{s+2}$$

**Controllore di ordine minimo e blocco algebrico F:** (Poli reali)(secondo ordine)

$F \in \mathbb{R}$, il controllore deve rispettare queste specifiche:

a) Reiezione infinita asintotica al disturbo sinusoidale $d(t) = 3\sin(2t+4)$

b) Sistema retroazionato con poli dominanti in $-2, -3$.

c) Costante di posizione $K_p = 4$.

d) Errore a regime in risposta ad un gradino nullo.

- $\mathcal{L}[d(t)] = \dfrac{s\sin(4) + 2\cos(4)}{\underbrace{s^2+4}_{\text{metto come denom al controllore}}}$

Scelgo come controllore $\boxed{C(s) = \dfrac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2+4}}$

- **Per avere errore nullo:**

$$L(s) = C(s)P(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2+4} \cdot \frac{4}{s+2};$$

- **Per la specifica $K_p = 4$:**

$$K_p = L(0) = \frac{b_0}{2} \quad \text{se } K_p = 4 \rightarrow b_0 = 8$$

- **Cerco il polinomio caratteristico:**

$$1 + L(s) = 0 \quad \dots \quad (s^2+4)(s+2) + 4(b_2 s^2 + b_1 s + 8) = 0$$

$$P_c(s) = s^3 + (4b_2 + 2)s^2 + (4b_1 + 4)s + 40$$

- **Cerco il polinomio desiderato:**

$$P_d(s) = (s+2)(s+3)(s+c) \text{ con } c >> 3 = s^3 + (c+5)s^2 + (5c+6)s + 6c$$

$$\begin{cases} 4b_2 + 2 = c + 5 \\ 4b_1 + 4 = 5c + 6 \\ 40 = 6c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_2 = \frac{23}{12} \\ b_1 = \frac{53}{6} \\ c = \frac{20}{3} \end{cases}$$

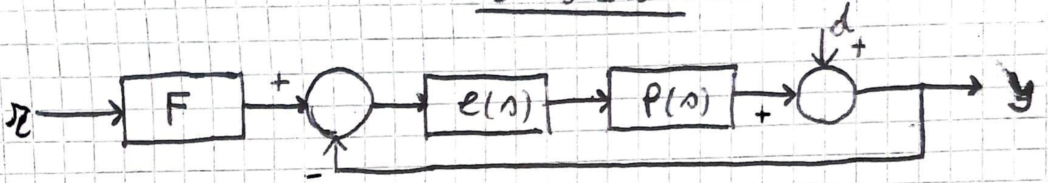
($c >>$ di 3 quindi OK)

- <u>Calcolo il blocco algebrico F</u>: (errore nullo)

$$\boxed{T_{ry} = F \cdot \frac{L(s)}{1+L(s)}} ;$$

$$T_{ry}(0) = F \cdot \frac{L(0)}{1+L(0)} = 1 ; \quad F \cdot \frac{4}{1+4} = 1 \rightarrow F = \frac{5}{4}$$

# Controllori 5




$P(s) = \dfrac{4}{s+2}$

Controllore di ordine minimo e blocco algebrico F: (Poli complessi) (secondo ordine)

$F \in \mathbb{R}$, il controllore deve rispettare queste specifiche:

a) Reiezione infinita asintotica al dist. sinusoidale $d(t) = 4\sin(3t)$

b) Sistema retroazionato con poli dominanti in $-2 \pm j$

c) Costante di posizione $K_p = 4$

d) Errore a regime in risposta ad un gradino, nullo.

$\mathcal{L}[d(t)] = \dfrac{12}{s^2+9}$ metto come denom. al controllore

Scelgo come controllore $\boxed{C(s) = \dfrac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2+9}}$

- Per avere errore nullo:

$L(s) = C(s)P(s) = \dfrac{4(b_2 s^2 + b_1 s + b_0)}{(s^2+9)(s+2)}$

- Per la specifica $K_p = 4$:

$K_p = L(0) = \dfrac{4 b_0}{18} = 4 \rightarrow b_0 = 18$

- Creo il polinomio caratteristico:

$1 + L(s) = 0 \dots \quad s^3 + 2s^2 + 9s + 18 + 4b_2 s^2 + 4b_1 s + 72 = 0$

$P_c(s) = s^3 + (2 + 4b_2)s^2 + (9 + 4b_1)s + 90$

- Creo il polinomio desiderato:

$P_d(s) = (s+2-j)(s+2+j)(s+c)$ con $c \gg 2$ $= [(s+2)^2+1](s+c)$

...

$P_d(s) = s^3 + (4+c)s^2 + (5+4c)s + 5c$

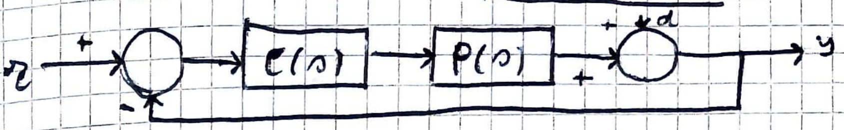
$$\begin{cases} 2 + 4b_2 = 4 + c \\ 9 + 4b_1 = 5 + 4c \\ 90 = 5c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_2 = 5 \\ b_1 = 17 \\ c = 18 \end{cases}$$

- <u>Calcolo il blocco algebrico F</u>: (errore nullo)

$$\boxed{T_{ry} = F \cdot \frac{L(s)}{1+L(s)}}$$

$$T_{ry}(0) = 1 = \frac{F \cdot L(0)}{1+L(0)} = 1; \quad F \cdot \frac{4}{1+4} = 1 \rightarrow F = \frac{5}{4}$$

# Controllori 9




$P(s) = \dfrac{9}{s+5}$

Controllore di ordine minimo: (terzo ordine)

a) Reiezione infinita asintotica al dist. sinusoidale $d(t) = 5 + 11\cos(3t+2)$

b) Costante di velocità $K_v = 4$

c) Sist. retr. asintotic. stabile con poli dominanti $(-2; -2 \pm j)$

$$\mathcal{L}[d(t)] = \frac{5s^2 + 11s^2\cos(2) - 33s\sin(2) + 45}{s(s^2+9)}$$ metto come denom. al controllore

Scelgo come controllore $\boxed{C(s) = \dfrac{y_3 s^3 + y_2 s^2 + y_1 s + y_0}{s(s^2+9)}}$

- Dalla specifica $K_v = 4$:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sL(s) = \lim_{s\to 0} s(C(s)\cdot P(s)) = \frac{y_0}{5} = 4 \longrightarrow y_0 = 20$$

- Cerco il polinomio caratteristico:

$1 + L(s) = 0 \qquad s(s^2+9)(s+5) + 9(y_3 s^3 + y_2 s^2 + y_1 s + y_0)$

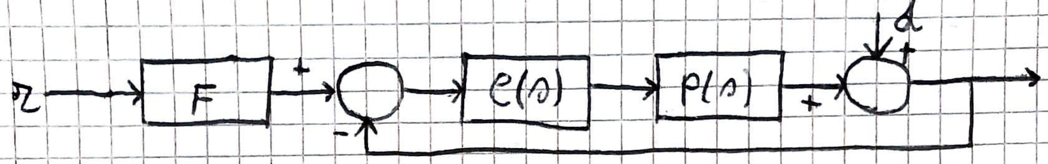
$P_c(s) = \dots$

- Cerco il polinomio desiderato:

$$P_d(s) = (s+2-j)(s+2+j)(s+2)(s+e) \quad \text{con } e \gg 2$$
$$= [(s+2)^2+1](s+2)(s+e) = \dots$$

$$\begin{cases} 9y_3 + 5 = 6 + e \\ 9y_2 + 9 = 13 + 6e \\ 9y_1 + 45 = 10 + 13e \\ 180 = 10e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_3 = \frac{19}{9} \\ y_2 = \frac{112}{9} \\ y_1 = \frac{133}{9} \\ e = 18 \gg 2 \ \checkmark \end{cases}$$

# Controllori 12




$P(s) = \dfrac{1}{s+4}$

Controllore di ordine minimo e blocco algebrico F: (quarto ordine)

$F \in \mathbb{R}$, il controllore deve rispettare queste specifiche:

a) Reiezione infinita asintotica al disturbo $d(t) = 7\sin(2t) + 9\sin(t+5)$.

b) Sistema retroazionato con poli dislocati $-1, -2, -3, -5, -6$.

c) Errore a regime in risposta ad un gradino, nullo.

$$\mathcal{L}[d(t)] = \frac{14}{s^2+4} + \frac{9(s\sin 5 + \cos 5)}{s^2+1} = \frac{\dots}{(s^2+4)(s^2+1)}$$

Scelgo come controllore $\boxed{C(s) = \dfrac{b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{(s^2+4)(s^2+1)}}$

- Per avere errore nullo:

$L(s) = C(s)P(s) = \dots$

- Cerco il polinomio caratteristico:

$1 + L(s) = 0$

$P_c(s) = s^5 + (4+b_4)s^4 + (5+b_3)s^3 + (20+b_2)s^2 + (4+b_1)s + 16 + b_0$

- Cerco il polinomio desiderato:

$$P_d(s) = (s+1)(s+2)(s+3)(s+5)(s+6) = \stackrel{!}{=} s^5 + 17s^4 + 107s^3 + 307s^2 + 396s + 180$$

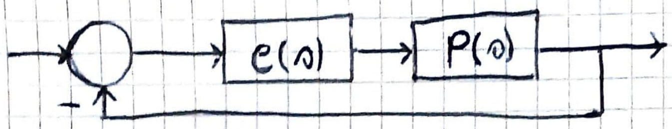
$$\begin{cases} 4 + b_4 = 17 \\ 5 + b_3 = 107 \\ 20 + b_2 = 307 \\ 4 + b_1 = 396 \\ 16 + b_0 = 180 \end{cases} \Rightarrow \dots$$

- Calcolo il blocco algebrico F: (errore nullo)

$$\boxed{T_{ry} = F \cdot \frac{L(s)}{1+L(s)}}$$

$$T_{ry}(0) = 1 = F \cdot \frac{L(0)}{1+L(0)} = F\,\frac{41}{45} \longrightarrow F = \frac{45}{41}$$

# Controllori 11




$$P(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+4)}$$

**Controllore proporzionale:**

$\boxed{C(s) = K\ ,\ K \in \mathbb{R}}$ Lo da la traccia

a) Determinare i K per i quali è assicurata la stabilità asintotica.
b) Det. i K per i quali il sist. retroazionato ammette $G_s \geq 0{,}2\ s^{-1}$.
($G_s$ = grado di stabilità nel piano complesso)

- Cerco l'equazione caratteristica del sist in retroaz:

$$L(s) = C(s) \cdot P(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+4)}$$

$$1 + L(s) = 0$$

$$1 + \frac{K}{s(s+2)(s+4)} = 0 \rightarrow s^3 + 4s^2 + 2s^2 + 8s + K = 0$$

$$s^3 + 6s^2 + 8s + K = 0$$

- Costruisco la tabella di Routh:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 8 | 0 |
| 2 | 6 | K | 0 |
| 1 | (48 − K) | 0 | |
| $\frac{6}{(48-K)}$ · 0 | K | | |

Per la stabilità asintotica, la prima colonna della tabella di Routh deve avere solo permanenze di segno.

$$\begin{cases} 48 - K > 0 \\ K > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K < 48 \\ K > 0 \end{cases} \qquad K \in (0;48)$$

- Grado di stabilità $G_s$:

Il grado di stabilità $G_s$ (nel piano complesso) di un sistema asintoticamente stabile è:

$G_s = -\max\{\mathrm{Re}\, p_1, \mathrm{Re}\, p_2, \dots, \mathrm{Re}\, p_n\}$ $p_i$ sono i poli del sistema.
Rappresenta la distanza minima dei poli del sistema dall'asse immaginario
In questo caso, il problema può essere risolto effettuando la traslazione nel piano complesso $s = z - 0{,}2$:

...

$$z^3 + 5{,}4z^2 + 5{,}72z - 1{,}368 + K = 0$$

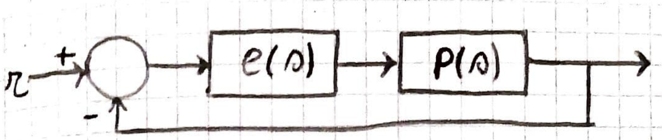
- **Costruisco la tabella di Routh:**

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 1 | 5,72 |
| 2 | 5,4 | -1,368 + K |
| 1 | 30,888 -(K- 1,368) | 0 |
| 0 | - 1,368 + K | |

In conclusione, i valori di K per cui il sistema retroazionato ammette $\sigma_0 \geq 0,2\ s^{-1}$:

$$\begin{cases} -1,368 + K > 0 \\ 30,888 - K(K - 1,368) > 0 \end{cases} \Rightarrow K \in [1,368 ; 32,256]$$

# Controlli 14:




$P(s) = \frac{1}{s^3}$

**Controllore di ordine due:** (sistema di tipo 3)

a) Poli del sistema retroazionato posti in $-1, -2, -4, -5, -6$

b) Al controllore progettato al punto a), applicare un gradino $r(t) = 3 \cdot 1(t)$ e si determini una stima del tempo di assestamento $T_a$, e l'errore a regime $e_r := \lim_{t \to +\infty} r(t) - y(t)$

Scelgo come controllore $C(s) = \dfrac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$

• Definisco $L(s)$:

$$L(s) = C(s) \cdot P(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3(s^2 + a_1 s + a_0)}$$

• Creo il polinomio caratteristico:

$1 + L(s) = 0$

$$P_c(s) = s^5 + a_1 s^4 + a_0 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0$$

• Creo il polinomio desiderato:

$$P_d(s) = (s+1)(s+2)(s+4)(s+5)(s+6)$$

$$P_d(s) \equiv P_c(s) \Rightarrow a_1 = 18;\ a_0 = 121;\ b_2 = 372;\ b_1 = 508;\ b_0 = 240$$

$$C(s) = \frac{372 s^2 + 508 s + 240}{s^2 + 18 s + 121}$$

• Si applica un gradino $r(t) = 3 \cdot 1(t)$ al sistema retroazionato e determino l'errore:

$$e_r = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{3}{s} \frac{1}{1 + \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3(s^2 + a_1 s + a_0)}} = \frac{3}{1 + \frac{\dots}{0}} = \frac{3}{\infty} = 0 \text{ (tipo 3)}$$

$$\boxed{T_a = \frac{3}{G_s}} = T_a = \frac{3}{1} = T_a = 3$$

polo più piccolo