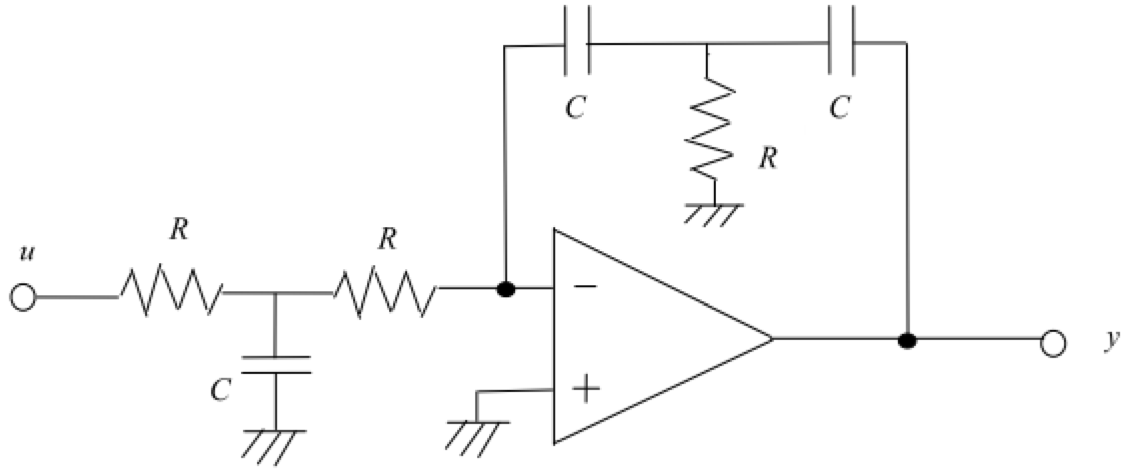
2. [punti 4] Il seguente schema elettrico definisca un sistema dinamico Σ orientato da u (tensione di ingresso) ad y (tensione d'uscita).



Si assuma l'amplificatore operazionale come ideale e si introduca il parametro $T \triangleq RC$:

1. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema Σ.
2. Determinare poli, zeri e modi di Σ.
3. Scrivere l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.

2.

1.

$$G(s) = -\frac{Z_{tf}}{Z_{ti}}$$

$$Z_{tf} = \frac{1}{sC} + \frac{1}{sC} + \frac{\frac{1}{sC}\cdot\frac{1}{sC}}{R} = \frac{1+2RCs}{RC^2s^2}$$

$$Z_{ti} = R + R + \frac{R^2}{\frac{1}{sC}} = R\left(2+RCs\right)$$

$$G(s) = -\frac{1+2RCs}{R^2C^2s^2\left(2+RCs\right)}$$

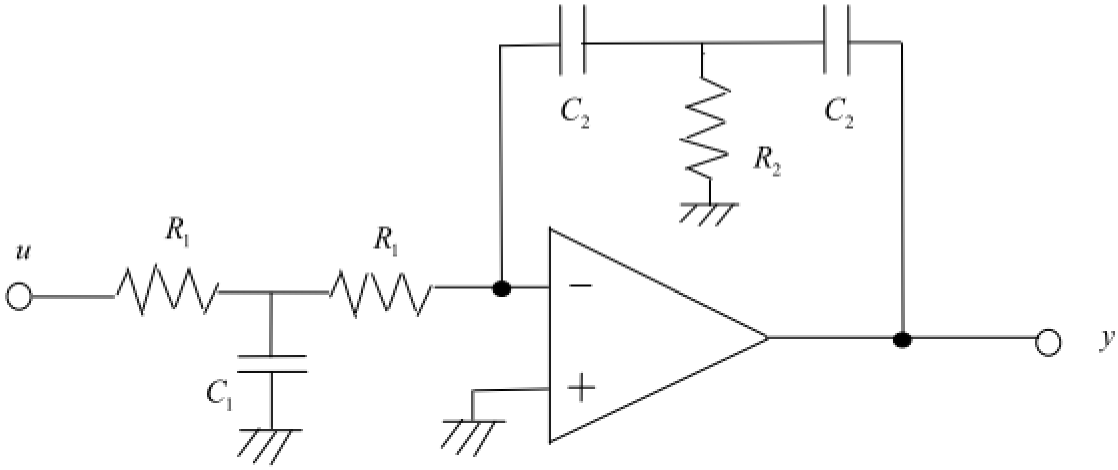
2. Σ ha uno zero in $-\frac{1}{2RC}$ e tre poli in $0, 0,$ e $-\frac{2}{RC}$. I modi sono $1, t, e^{-\frac{2}{RC}t}$.

3.

$$G(s) = -\frac{1+2RCs}{R^2C^2s^2\left(2+RCs\right)} = \frac{-2RCs-1}{R^3C^3s^3+2R^2C^2s^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad R^3C^3D^3y(t) + 2R^2C^2D^2y(t) = -2RCDu(t) - u(t)$$

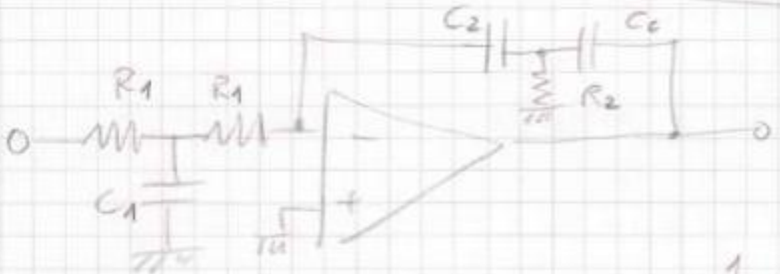
1. [punti 6] Il seguente circuito elettrico definisca un sistema dinamico Σ orientato da u (tensione di ingresso) ad y (tensione d'uscita).



Si assuma l'amplificatore differenziale come ideale:

1. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema Σ.
2. Determinare poli, zeri e modi di Σ.
3. Scrivere l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.

1)



$$G(s) = -\frac{Z_{t,f}}{Z_{t,i}} = -\frac{\frac{1}{C_2 s} + \frac{1}{C_2 s} + \frac{\frac{1}{C_2 s}\cdot\frac{1}{C_2 s}}{R_2}}{R_1 + R_1 + \frac{R_1^2}{\frac{1}{C_1 s}}}$$

$$= -\frac{\frac{2}{C_2 s} + \frac{1}{R_2 C_2^2 s^2}}{2R_1 + R_1^2 C_1 s} = -\frac{\frac{1 + 2R_2 C_2 s}{R_2 C_2^2 s^2}}{R_1(2 + R_1 C_1 s)}$$

$$= -\frac{1 + 2R_2 C_2 s}{R_1 R_2 C_2^2 s^2 (2 + R_1 C_1 s)}$$

2) zeri: $z_1 = -\frac{1}{2R_2 C_2}$ poli: $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = -\frac{2}{R_1 C_1}$

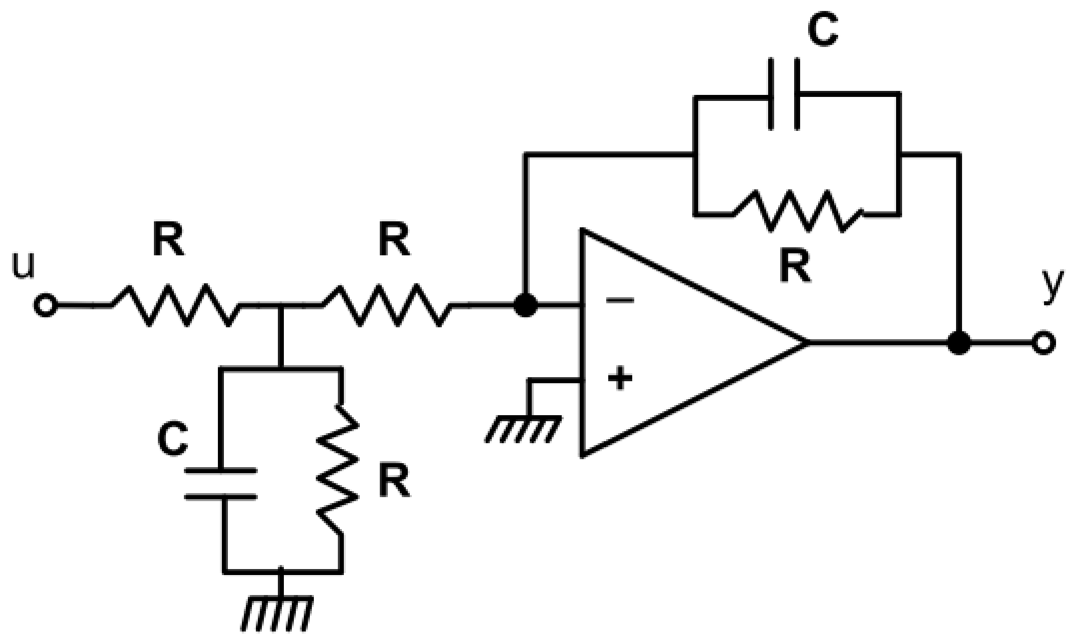
modi $= \left\{1, t, \exp\left\{-\frac{2}{R_1 C_1}\right\}\right\}$

3) $G(s) = -\dfrac{1+2R_2C_2 s}{R_1R_2C_2^2 s^2(2+R_1C_1 s)} = \dfrac{-2R_2C_2 s - 1}{R_1^2R_2C_1C_2^2 s^3 + 2R_1R_2C_2^2 s^2}$

eq. differenziale

$$R_1^2R_2C_1C_2^2 D^3 y(t) + 2R_1R_2C_2^2 D^2 y(t) = -2R_2C_2 D u(t) - u(t)$$

2. [punti 5] Il seguente schema elettrico definisca un sistema dinamico Σ orientato da u (tensione di ingresso) ad y (tensione d'uscita).



Si assuma l'amplificatore operazionale come ideale.

1. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema Σ.
2. Determinare poli e modi di Σ.
3. Scrivere l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.

2.

Impedenza del parallelo capacità e resistenza Z_p:

$$Z_p = \frac{R \cdot \frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{R}{1+RCs}$$

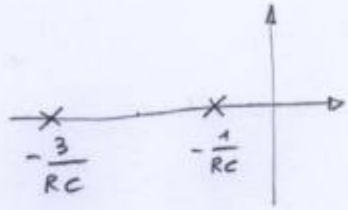
Impedenza di trasferimento del tripolo Z_t:

$$Z_t = R + R + \frac{R \cdot R}{Z_p} = 2R + \frac{R^2}{\frac{R}{1+RCs}} = 2R + R(1+RCs)$$

$$G(s) = -\frac{Z_p}{Z_t} = -\frac{\frac{R}{1+RCs}}{2R+R(1+RCs)}$$

① $$G(s) = -\frac{1}{(1+RCs)(3+RCs)}$$

② Poli : $-\frac{1}{RC}$, $-\frac{3}{RC}$



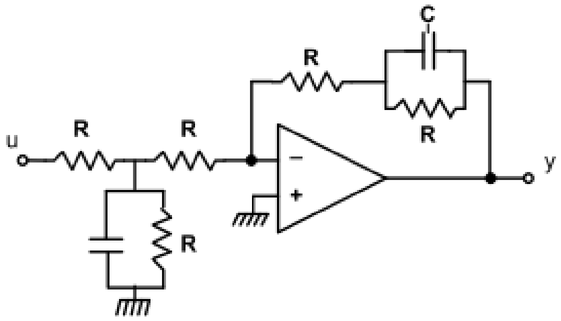
modi di $\Sigma = \left\{ e^{-\frac{t}{RC}}, e^{-\frac{3t}{RC}} \right\}$

③ $$(1+RCs)(3+RCs) = 3 + RCs + 3RCs + (RC)^2 s^2 =$$
$$= (RC)^2 s^2 + 4RCs + 3$$

$$G(s) = \frac{-1}{(RC)^2 s^2 + 4RCs + 3}$$

eq. diff. $\quad (RC)^2 D^2 y + 4RC\, Dy + 3y = -u$

1. [punti 6] L'amplificatore operazionale di figura definisce un sistema dinamico orientato da u (tensione all'ingresso) ad y (tensione all'uscita).



Di questo sistema si determinino: 1) la funzione di trasferimento; 2) l'equazione differenziale; 3) gli zeri, i poli e i modi.

$$T_{uy}(s) = -\frac{R + \dfrac{\frac{1}{sC}\cdot R}{\frac{1}{sC}+R}}{R+R+\dfrac{R^2}{\dfrac{\frac{1}{sC}\cdot R}{\frac{1}{sC}+R}}} = -\frac{R+\dfrac{R}{1+RCs}}{2R+\dfrac{R^2}{\dfrac{R}{1+RCs}}} =$$

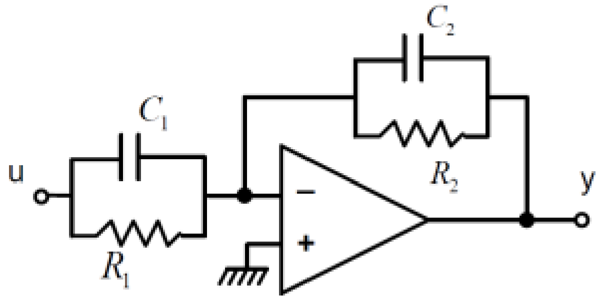
$$= -\frac{2+RCs}{(1+RCs)(3+RCs)} = \frac{-RCs-2}{R^2C^2s^2+4RCs+3}$$

eq. diff. $R^2C^2D^2y(t) + 4RC\,Dy(t) + 3y(t) = -RC\,Du(t) - 2u(t)$

zeri: $z_1 = -\frac{2}{RC}$ poli: $p_1 = -\frac{1}{RC}$, $p_2 = -\frac{3}{RC}$

modi $= \left\{ \exp\left\{-\frac{1}{RC}t\right\}, \exp\left\{-\frac{3}{RC}\cdot t\right\} \right\}$

2. [punti 5] L'amplificatore operazionale di figura definisce un sistema dinamico orientato da u (tensione all'ingresso) ad y (tensione all'uscita).



Di questo sistema si determini:
1. la funzione di trasferimento;
2. l'equazione differenziale;
3. gli zeri, i poli, i modi ed il guadagno statico.

2.

$$G(s) = -\frac{Z_f}{Z_i}, \quad Z_i = \frac{\frac{R_1}{s\,C_1}}{\frac{1}{s\,C_1} + R_1} = \frac{R_1}{1 + R_1\,C_1\,s}, \quad Z_f = \frac{R_2}{1 + R_2\,C_2\,s}$$

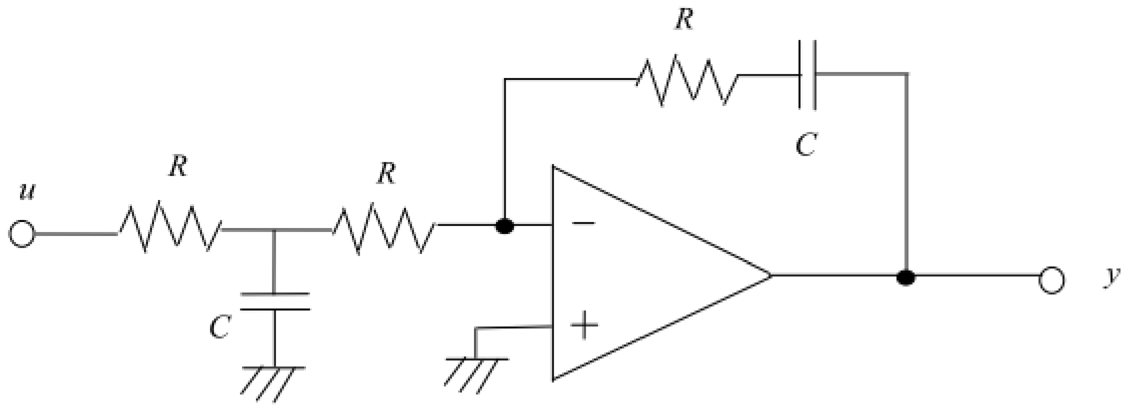
$$G(s) = -\frac{R_2}{R_1}\,\frac{1 + R_1\,C_1\,s}{1 + R_2\,C_2\,s} = -\frac{R_1\,R_2\,C_1\,s + R_2}{R_1\,R_2\,C_2\,s + R_1}$$

Guadagno statico: $G(0) = -\frac{R_2}{R_1}$
Eq. Differenziale:

$$R_1\,R_2\,C_2\,Dy(t) + R_1 y(t) = -R_1\,R_2\,C_1\,Du(t) - R_2 u(t)$$

zeri: $-\frac{1}{R_1\,C_1}$, poli: $-\frac{1}{R_2\,C_2}$, modi: $\{e^{-\frac{t}{R_2 C_2}}\}$

2. [punti 4] Il seguente schema elettrico definisca un sistema dinamico Σ orientato da u (tensione di ingresso) ad y (tensione d'uscita).



Si assuma l'amplificatore operazionale come ideale e si introduca il parametro $T \triangleq RC$:
1. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema Σ.
2. Scrivere $G(s)$ nella forma standard con poli e zeri e disegnare la configurazione poli-zeri di Σ.
3. Determinare l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.

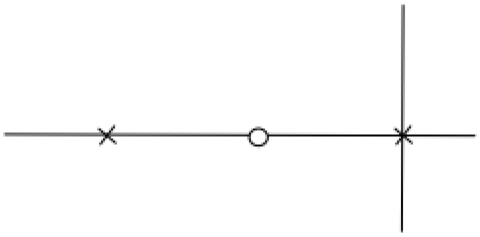
2.

1.

$$G(s) = -\frac{Z_f}{Z_{i,i}} = -\frac{R + \dfrac{1}{sC}}{2R + \dfrac{R^2}{\dfrac{1}{sC}}} = -\frac{1 + RCs}{2RCs + R^2C^2s^2} = -\frac{1 + Ts}{Ts(2 + Ts)}$$

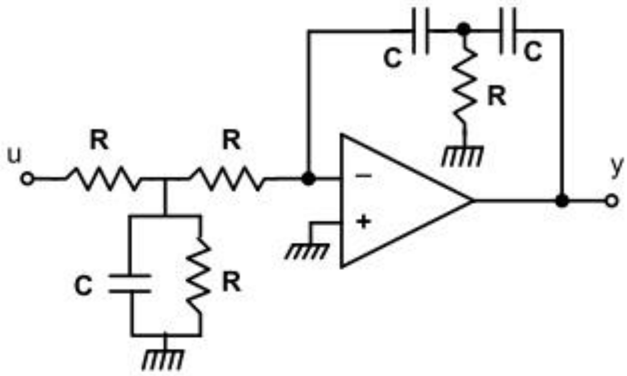
2.

$$G(s) = \left(-\frac{1}{T}\right)\frac{s + \dfrac{1}{T}}{s\left(s + \dfrac{2}{T}\right)} \qquad \text{zeri: } z_1 = -\frac{1}{T}\ ; \quad \text{poli: } p_1 = 0\ ,\ p_2 = -\frac{2}{T}$$



3. $G(s) = \dfrac{-s - \dfrac{1}{T}}{Ts^2 + 2s} \qquad \Rightarrow \qquad TD^2y + 2Dy = -Du - \dfrac{1}{T}u$

1. [punti 6] L'amplificatore operazionale di figura definisce un sistema dinamico orientato da u (tensione all'ingresso) ad y (tensione all'uscita).



Di questo sistema si determinino: 1) la funzione di trasferimento; 2) l'equazione differenziale; 3) gli zeri, i poli e i modi.

1.

$$> G := -\frac{\frac{1}{sC}+\frac{1}{sC}+\frac{\frac{1}{sC}\cdot\frac{1}{sC}}{R}}{R+R+\frac{RR}{\frac{\frac{1}{sC}\cdot R}{\frac{1}{sC}+R}}}$$

$$-\frac{\frac{2}{sC}+\frac{1}{s^2C^2R}}{2R+RsC\left(\frac{1}{sC}+R\right)}$$

$$-\frac{2sCR+1}{s^2C^2R^2(3+sCR)}$$

$$G(s)=\frac{-2RCs-1}{(RC)^3s^3+3(RC)^2s^2}$$

eq. differenziale

$$(RC)^3D^3y(t)+3(RC)^2D^2y(t)=-2(RC)Du(t)-u(t)$$

zeri : $z_1=-\frac{1}{2RC}$

poli : $p_1=0 \qquad p_2=0 \qquad p_3=-\frac{3}{RC}$

modi $=\left\{1,\ t,\ \exp\left\{-\frac{3}{RC}t\right\}\right\}$

(questo ha sia nyquist che bode)

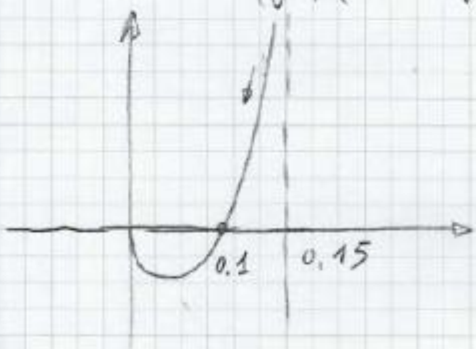
2. [punti 6] Data la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{s-5}{s(s+10)}$ tracciarne
1) il diagramma di Nyquist con determinazione dell'asintoto e dell'intersezione con l'asse reale;
2) i diagrammi di Bode asintotici (diagramma dei moduli e diagramma delle fasi).
Suggerimento per il tracciamento dei diagrammi di Bode: si assegnino 10 quadretti del foglio protocollo per una decade delle pulsazioni. Si riportano per comodità dello studente i logaritmi in base 10 degli interi da 2 a 9: $\log_{10} 2 \cong 0,30$, $\log_{10} 3 \cong 0,48$, $\log_{10} 4 \cong 0,60$, $\log_{10} 5 \cong 0,70$, $\log_{10} 6 \cong 0,78$, $\log_{10} 7 \cong 0,85$, $\log_{10} 8 \cong 0,90$, $\log_{10} 9 \cong 0,95$.

$$G(s) = \frac{s-5}{s(s+10)} \qquad G(s) = \frac{-5\left(1 - \frac{1}{5}s\right)}{s \cdot 10 \cdot (1+0,1s)}$$

$$G(s) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1-0,2\cdot s}{s(1+0,1s)}$$

$$G(j\omega) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1-0.2\cdot j\omega}{(j\omega)(1+0.1j\omega)}$$

$$\sigma_a = \left(-\frac{1}{2}\right)\left[-0.2-0.1\right] = -\frac{1}{2}\cdot[-0.3] = 0.15$$



$$\omega \to 0 \quad G(j\omega) \to K\frac{1+j\tau_\Sigma\omega}{(j\omega)^h}$$

$h = 1$

$$G(j\omega) \to K\frac{1+j\tau_\Sigma\omega}{j\omega} = K\tau_\Sigma - j\frac{K}{\omega}$$

$$\tau_\Sigma = -0.2 - (0.1) = -0.3$$

$$K\tau_\Sigma = -\frac{1}{2}\cdot(-0,3) = 0,15$$

$$1 + K\,G(s) = 0$$

$$1 + K\,G(j\omega) = 0$$

$$G(j\omega) = -\frac{1}{K}$$

$$1 + K\frac{s-5}{s(s+10)} = 0 \qquad s^2 + 10s + K(s-5) = 0$$

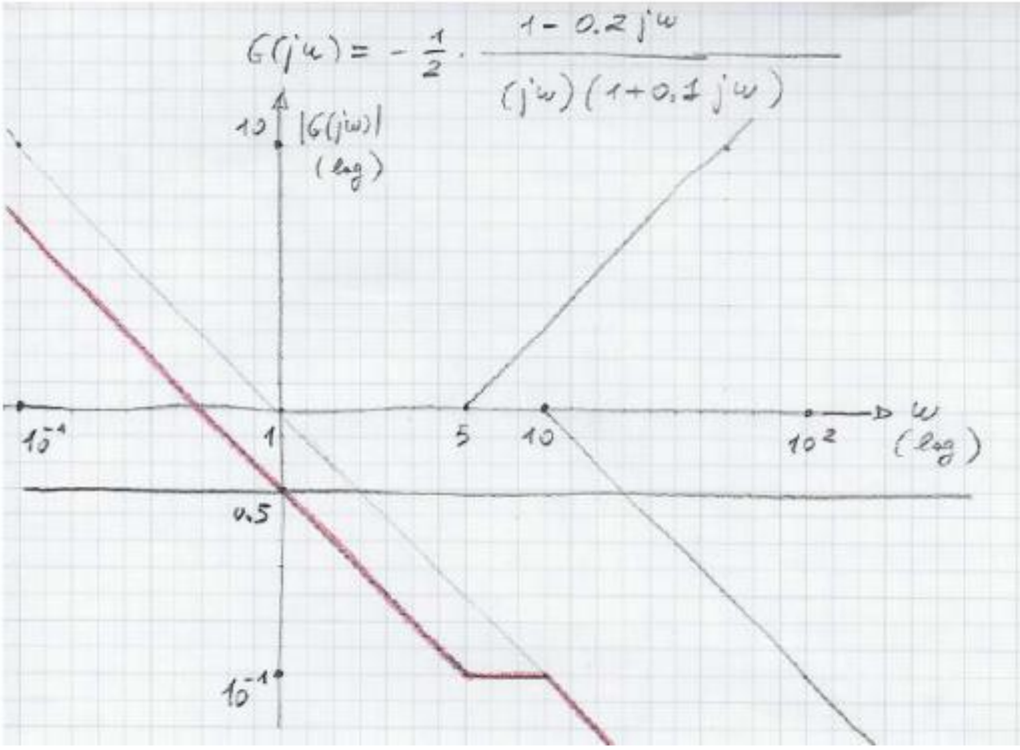
$$s^2 + (10+K)s - 5K = 0$$

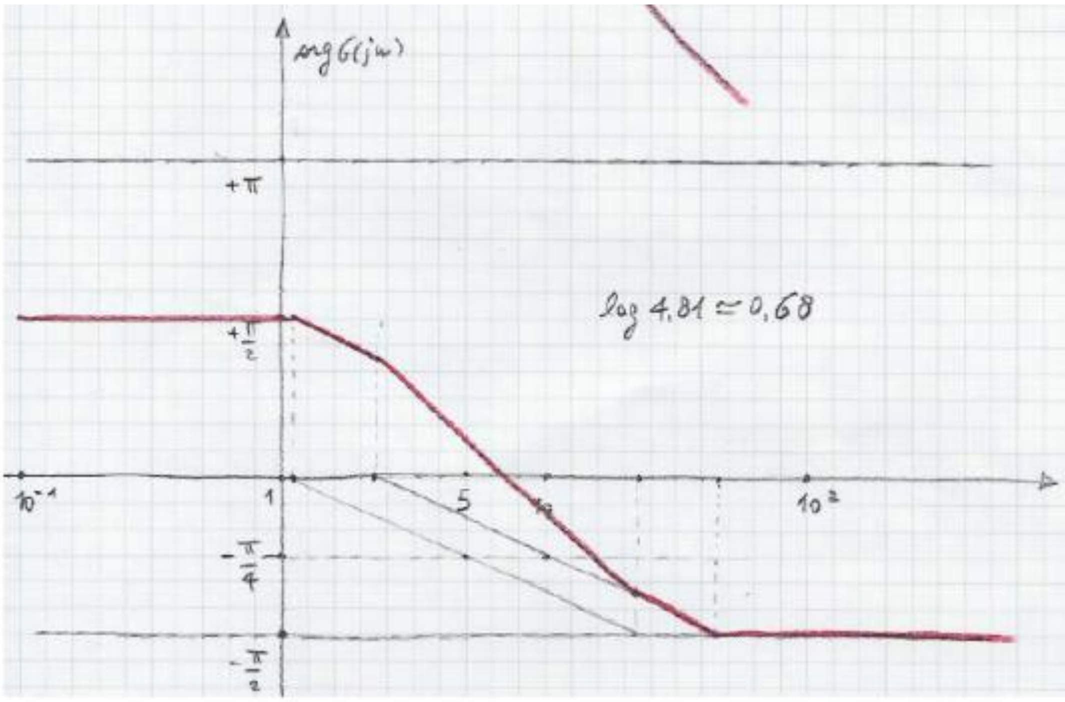
$$10 + K = 0 \qquad K = -10$$

$$\Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$s^2 = 5K = -50 \qquad s = \pm j\sqrt{50}$$

$$\omega = \sqrt{50}\ \text{rad/s} = 7.07\ \text{rad/s}$$


$G(j\omega) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 0.2\,j\omega}{(j\omega)(1+0.1\,j\omega)}$
10
$|G(j\omega)|$
(log)
10^{-1}
1
5
10
10^{2}
ω
(log)
0.5
10^{-1}


$\arg G(j\omega)$
$+\pi$
$+\frac{\pi}{2}$
$\log 4.81 \simeq 0,68$
10^{-1}
1
5
10
10^{2}
$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{2}$

Questo ha sia nyquist che bode

2. [punti 6] Data la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{100s}{(s+1)(s+10)^2}$ tracciarne 1) il diagramma di Nyquist determinando le tangenti al diagramma per $\omega \to 0^+$ e $\omega \to +\infty$ e l'eventuale intersezione con l'asse reale (positivo o negativo); 2) i diagrammi di Bode asintotici (diagramma dei moduli e diagramma delle fasi).

Suggerimento per il tracciamento dei diagrammi di Bode: si assegnino 10 quadretti del foglio protocollo per una decade delle pulsazioni. Si riportano per comodità dello studente i logaritmi in base 10 degli interi da 2 a 9: $\log_{10} 2 \cong 0{,}30$, $\log_{10} 3 \cong 0{,}48$, $\log_{10} 4 \cong 0{,}60$, $\log_{10} 5 \cong 0{,}70$, $\log_{10} 6 \cong 0{,}78$, $\log_{10} 7 \cong 0{,}85$, $\log_{10} 8 \cong 0{,}90$, $\log_{10} 9 \cong 0{,}95$.

$$G(s) = \frac{100\, s}{(1+s)\, 10^2 (1+0.1\, s)^2} = \frac{s}{(1+s)(1+0.1 s)^2}$$

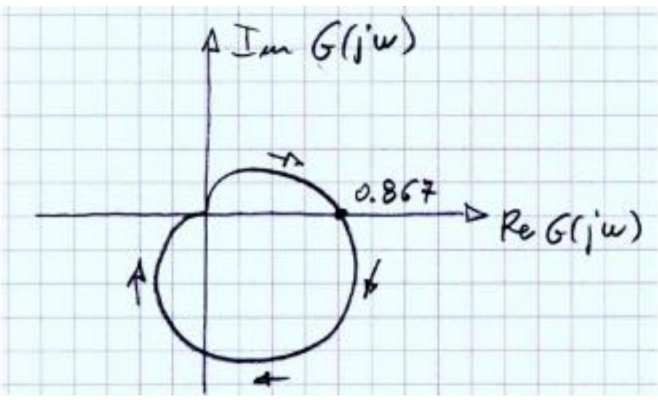
$$G(j\omega) = \frac{j\omega}{(1+j\omega)(1+0.1 j\omega)^2}$$

$$\arg G(j\omega) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \omega - 2 \operatorname{arctg} 0.1\omega$$

$$|G(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2} \cdot (1+0.01 \cdot \omega^2)}$$

$$\omega \to 0^+ \quad \arg G(j\omega) \to \frac{\pi}{2} \qquad |G(j\omega)| \to 0$$

$$\omega \to +\infty \quad \arg G(j\omega) \to -\pi \qquad |G(j\omega)| \to 0$$



determinazione dell'intersezione con l'asse reale positivo:

$1 + K G(s) = 0$ abbia radici puramente immaginarie

$$1 + K \frac{100 s}{(s+1)(s+10)^2} = 0 \qquad \text{Sia } \eta := 100 K$$

$$(s+1)(s+10)^2 + \eta s = 0 \qquad s^3 + 21 s^2 + (120+\eta) s + 100 = 0$$

3	1	$120+\eta$	0
2	21	100	0
1	α		

$$\alpha = 21\eta + 2420 = 0$$

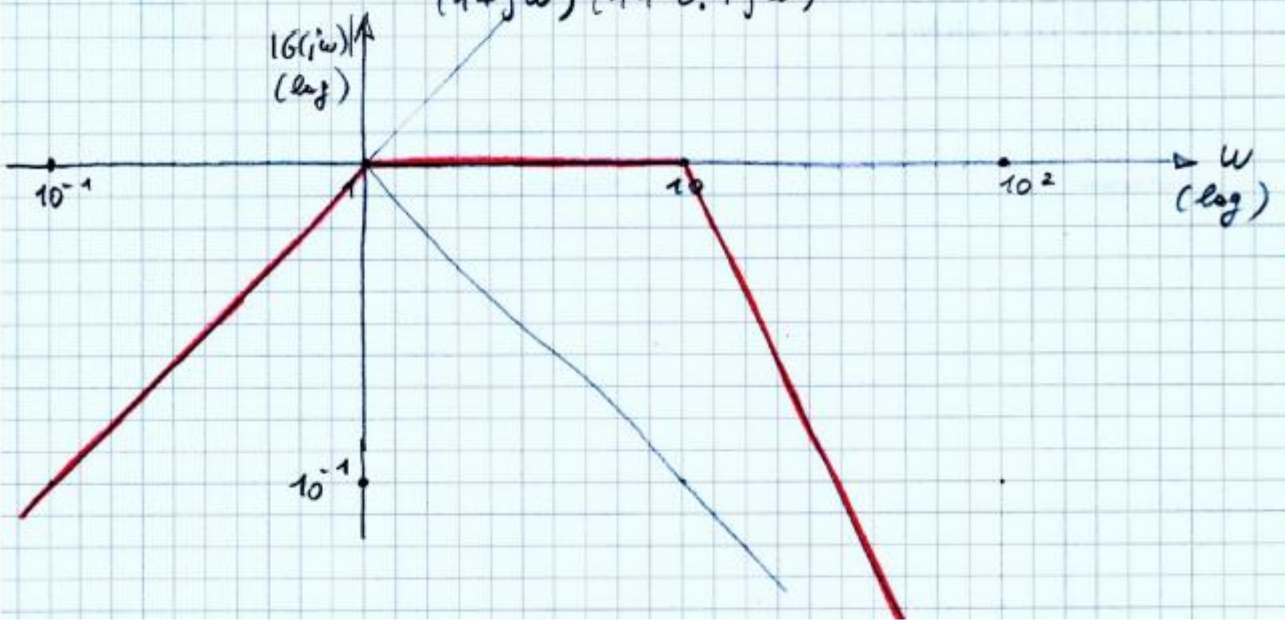
$$K = -\frac{2420}{2100}$$

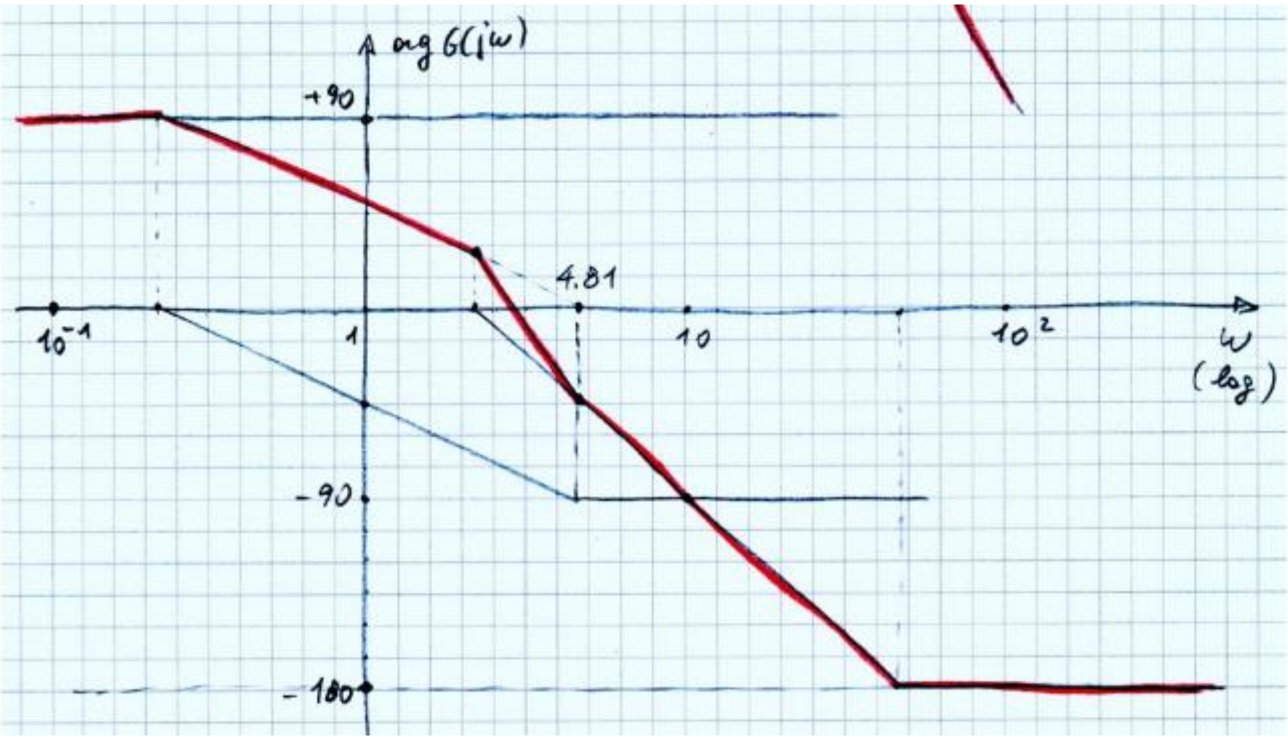
$$1 + K G(j\omega) = 0 \qquad G(j\omega) = -\frac{1}{K} = \frac{2100}{2420} = 0.867$$

eq. ausiliaria $21 s^2 + 100 = 0$

$$s = \pm j \sqrt{\frac{100}{21}} = \pm j\, 2.18 \,, \quad \omega = 2.18 \text{ rad/sec}$$

$$G(j\omega) = \frac{j\omega}{(1+j\omega)(1+0.1 j\omega)^2}$$





5. [punti 4] Tracciare i diagrammi di Bode asintotici (diagramma dei moduli e diagramma delle fasi della risposta armonica) associati alla funzione di trasferimento

$$P(s) = 100\frac{1+s}{(s+2)(s+10)}$$

Suggerimenti:

i) per una decade delle pulsazioni si assegnino 10 quadretti del foglio protocollo;

ii) si riportano per comodità dello studente i logaritmi in base 10 degli interi da 2 a 9: $\log_{10} 2 \cong 0,30$, $\log_{10} 3 \cong 0,48$, $\log_{10} 4 \cong 0,60$, $\log_{10} 5 \cong 0,70$, $\log_{10} 6 \cong 0,78$, $\log_{10} 7 \cong 0,85$, $\log_{10} 8 \cong 0,90$, $\log_{10} 9 \cong 0,95$;

iii) i diagrammi richiesti si ottengono dalla somma dei diagrammi elementari…

5.

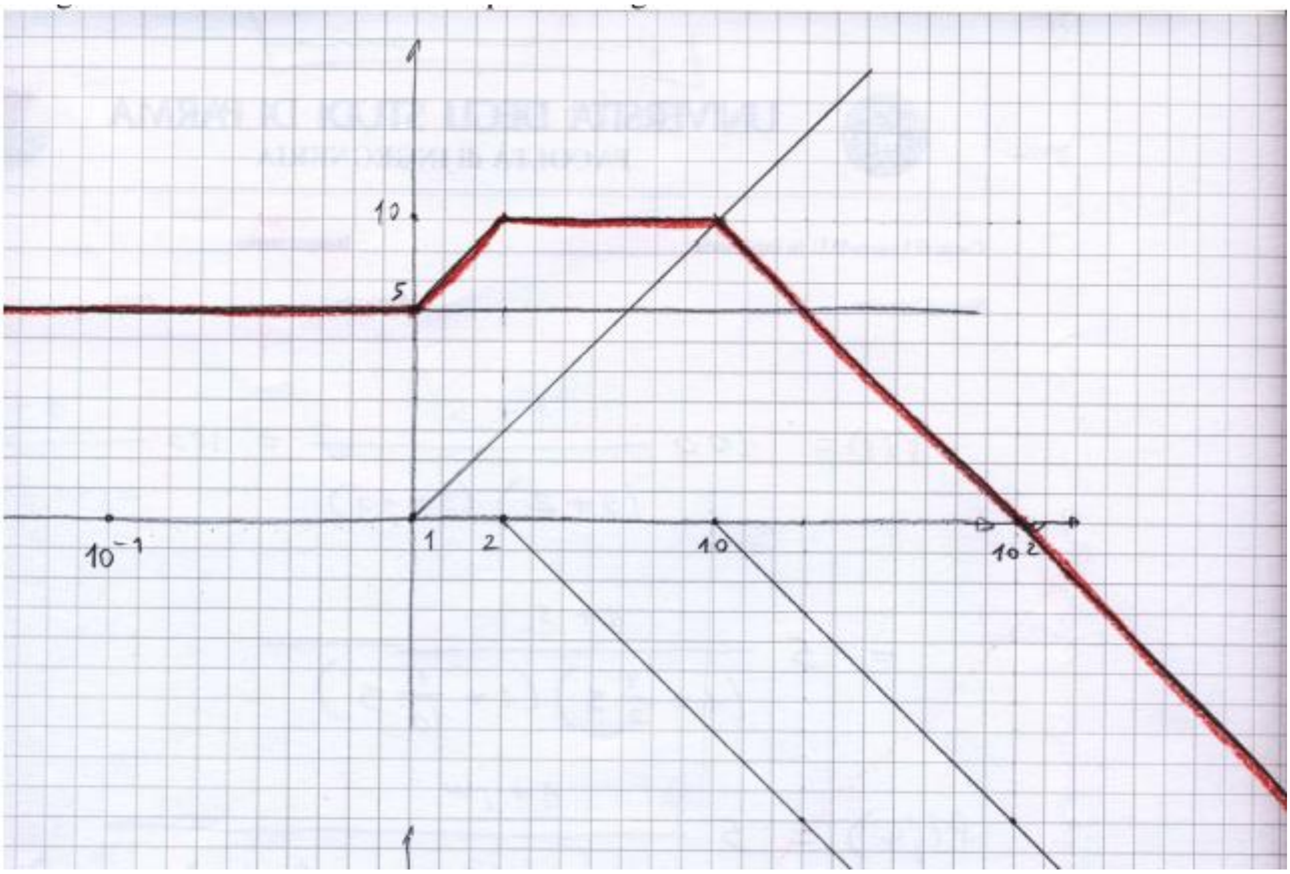
Si riscrive la funzione di trasferimento nella forma standard con le costanti di tempo:

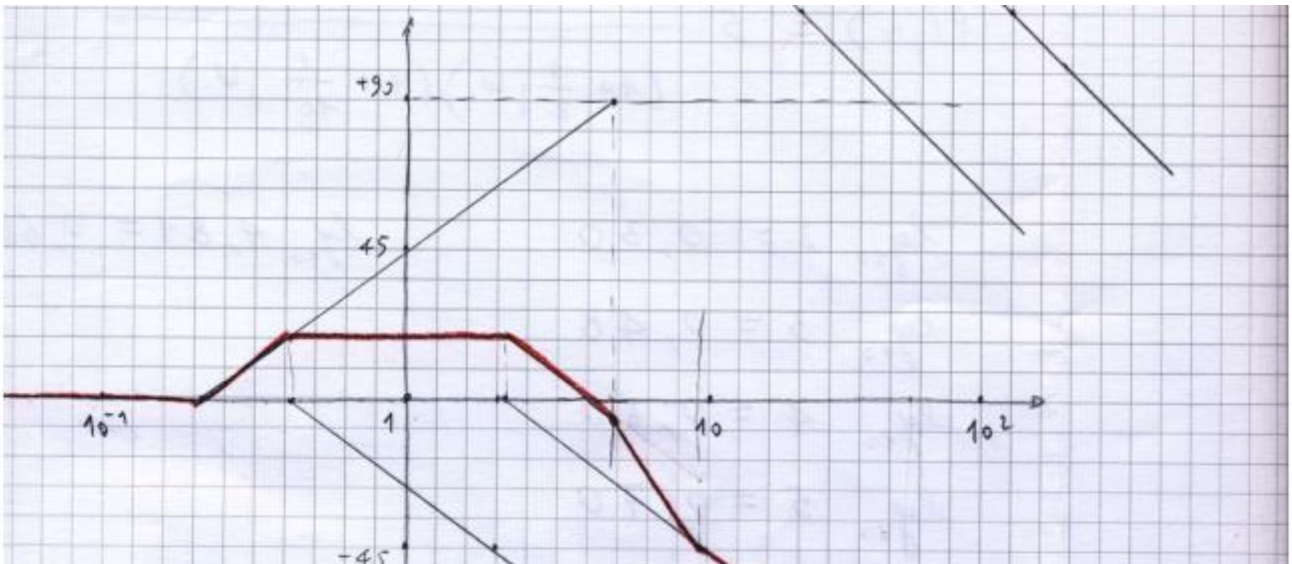
$$P(s) = 5\frac{1+s}{(1+\frac{1}{2}s)(1+\frac{1}{10}s)}$$

da cui la risposta armonica

$$P(j\omega) = 5\frac{1+j\omega}{(1+\frac{1}{2}j\omega)(1+\frac{1}{10}j\omega)}$$

I diagrammi di Bode asintotici sono riportati in figura:


10
5
10^{-1}
1
2
10
10^{2}


+90
45
10^{-1}
1
10
10^{2}
-45
-90

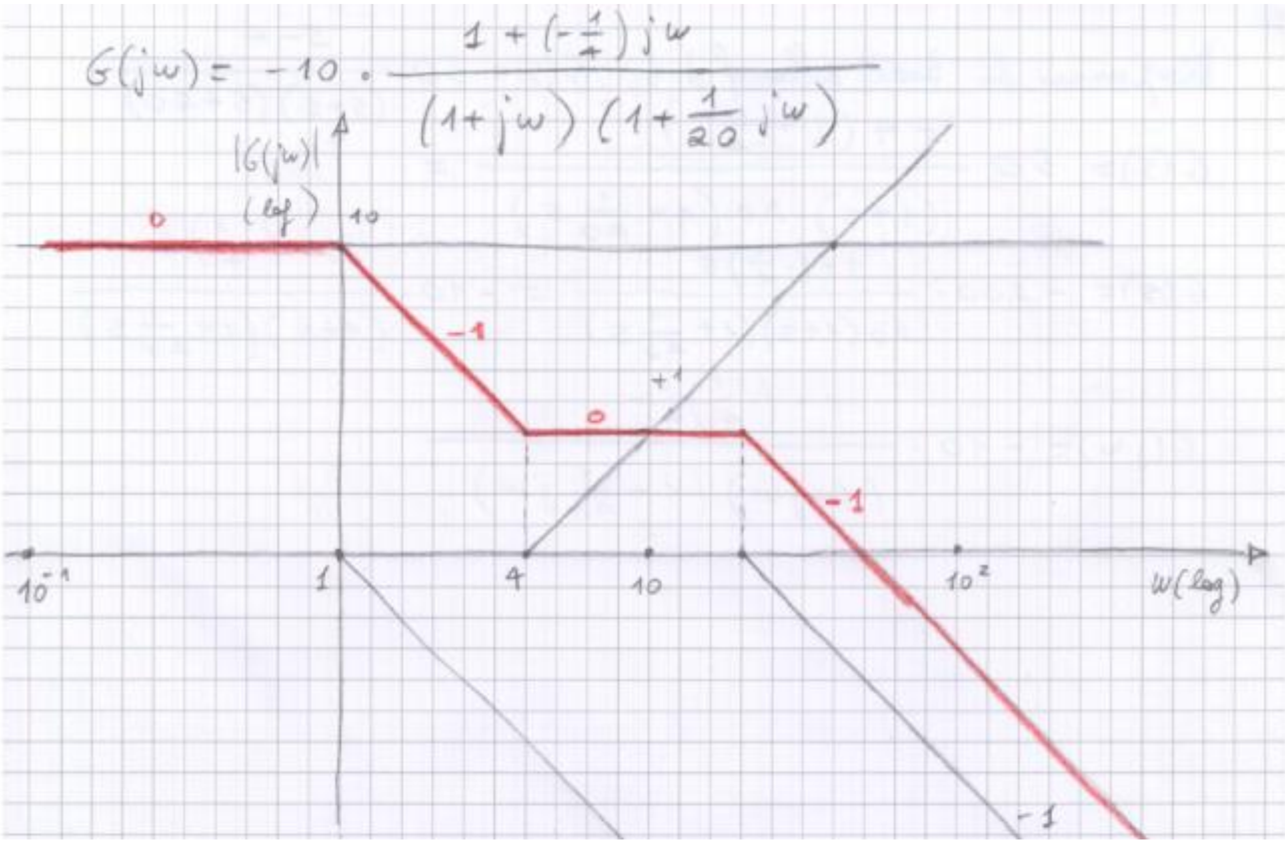
5. [punti 4,5] Tracciare i diagrammi di Bode asintotici (diagramma dei moduli e diagramma delle fasi della risposta armonica) associati alla funzione di trasferimento $G(s)=50\dfrac{s-4}{(s+1)(s+20)}$. Suggerimenti: a) per una decade delle pulsazioni si assegnino 10 quadretti del foglio protocollo; b) si riportano per comodità dello studente i logaritmi in base 10 degli interi da 2 a 9: $\log_{10}2\cong 0,30$, $\log_{10}3\cong 0,48$, $\log_{10}4\cong 0,60$, $\log_{10}5\cong 0,70$, $\log_{10}6\cong 0,78$, $\log_{10}7\cong 0,85$, $\log_{10}8\cong 0,90$, $\log_{10}9\cong 0,95$.

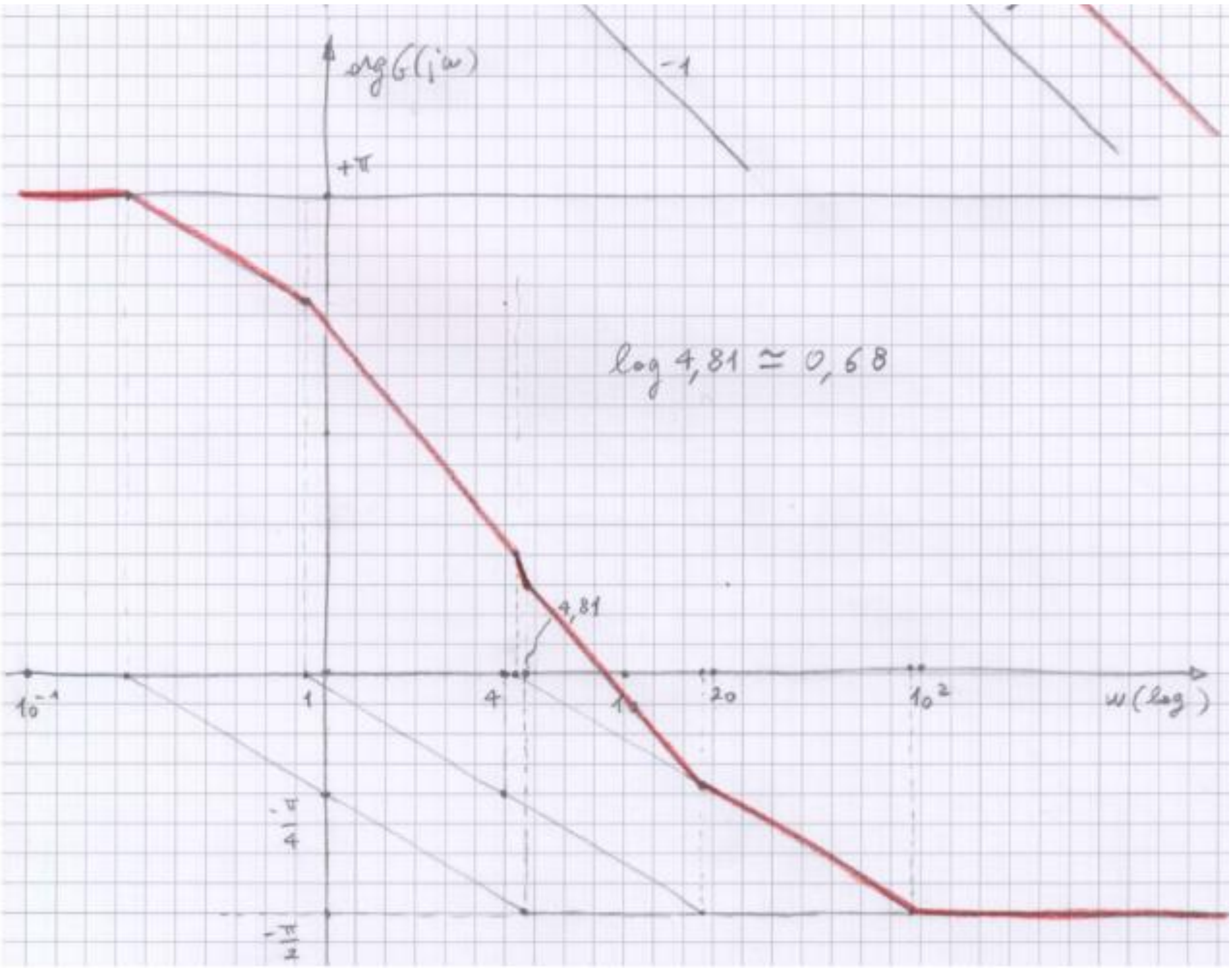
Diagrammi di Bode della f.d.t. $G(s)=50\dfrac{s-4}{(s+1)(s+20)}$

$$G(s)=50\,\frac{-4\left(1+\frac{1}{-4}s\right)}{(1+s)\cdot 20\cdot\left(1+\frac{1}{20}s\right)}=$$

$$G(s)=-200\cdot\frac{1+\left(-\frac{1}{4}\right)s}{20(1+s)\left(1+\frac{1}{20}s\right)}=-10\cdot\frac{1+\left(-\frac{1}{4}\right)s}{(1+s)\left(1+\frac{1}{20}s\right)}$$

$$G(j\omega)=-10\cdot\frac{1+\left(-\frac{1}{4}\right)j\omega}{(1+j\omega)\left(1+\frac{1}{20}j\omega\right)}$$





5. [punti 4] Tracciare i diagrammi di Bode asintotici (diagramma dei moduli e diagramma delle fasi della risposta armonica) associati alla funzione di trasferimento

$$G(s) = 10^3 \frac{1-s}{(1+s)(s+10)^2}$$

Suggerimenti:

i) per una decade delle pulsazioni si assegnino 10 quadretti del foglio protocollo;

ii) si riportano per comodità dello studente i logaritmi in base 10 degli interi da 2 a 9: $\log_{10} 2 \cong 0,30$, $\log_{10} 3 \cong 0,48$, $\log_{10} 4 \cong 0,60$, $\log_{10} 5 \cong 0,70$, $\log_{10} 6 \cong 0,78$, $\log_{10} 7 \cong 0,85$, $\log_{10} 8 \cong 0,90$, $\log_{10} 9 \cong 0,95$.

6

$$G(s) = 10^3 \frac{1-s}{(1+s)(s+10)^2}$$

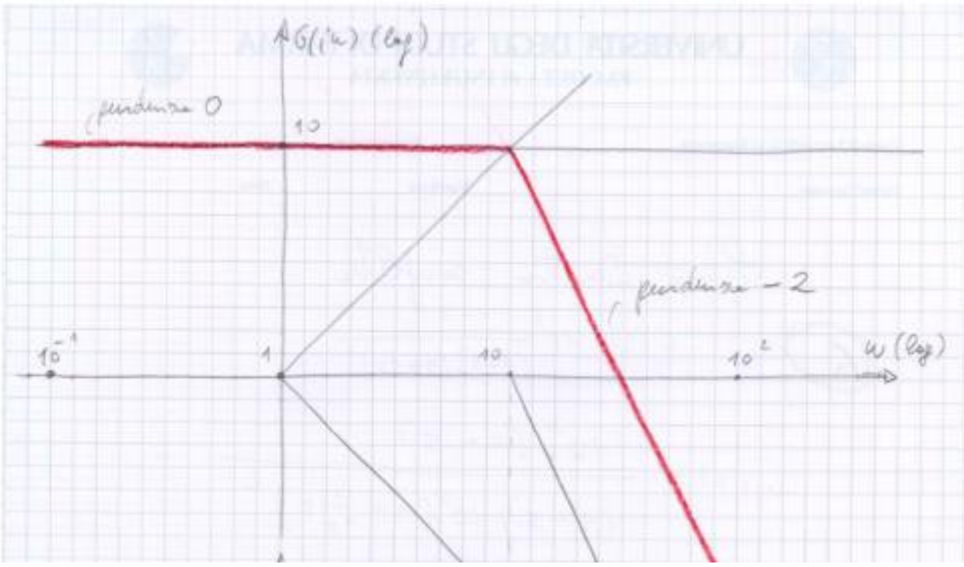
$$G(s) = \frac{10^3 (1-s)}{(1+s)\,10^2\left(1+\frac{1}{10}s\right)^2}$$

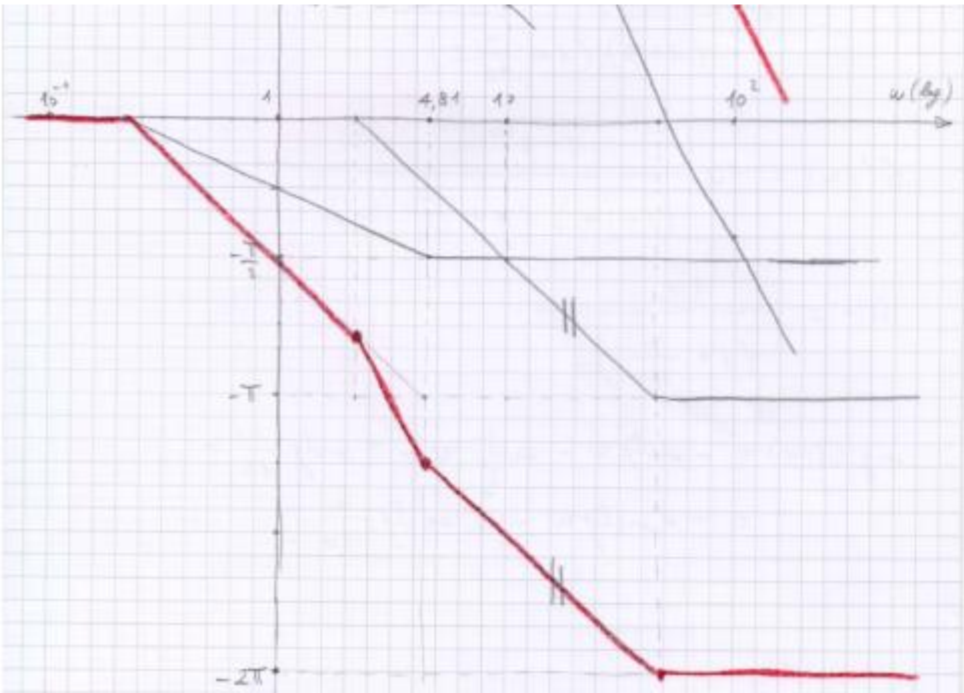
$$= 10 \frac{1-s}{(1+s)\left(1+\frac{1}{10}s\right)^2}$$

$$G(j\omega) = 10 \frac{1-j\omega}{(1+j\omega)\left(1+\frac{1}{10}j\omega\right)^2}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{10}{\left(1+\frac{\omega^2}{100}\right)}$$

$$\arg G(j\omega) = -\arctan \omega - \arctan \omega - 2\arctan\frac{\omega}{10} =$$
$$= -2\arctan \omega - 2\arctan\frac{\omega}{10}$$



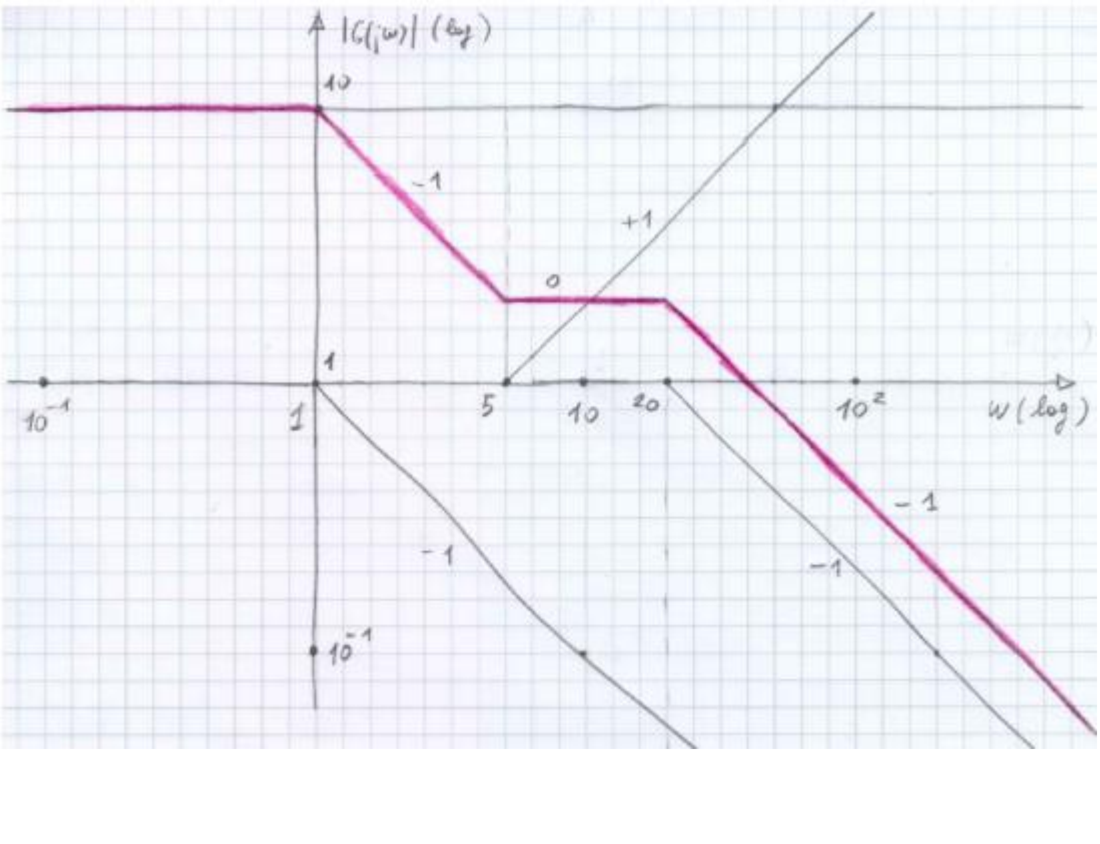


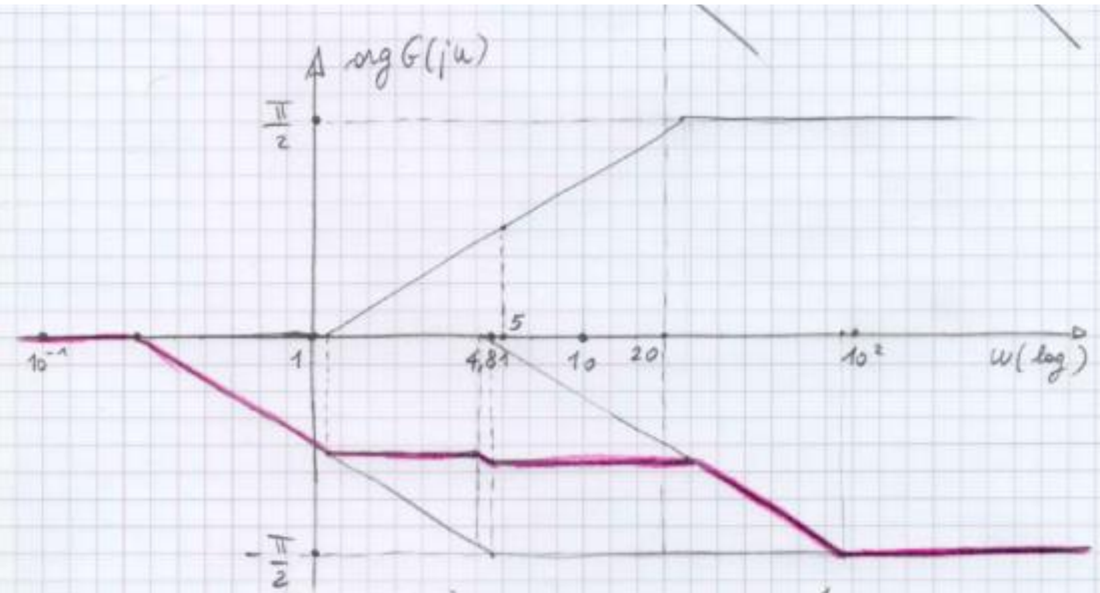
5. [punti 4] Tracciare i diagrammi di Bode asintotici (diagramma dei moduli e diagramma delle fasi della risposta armonica) associati alla funzione di trasferimento $G(s) = 40\dfrac{s+5}{(s+1)(s+20)}$

Suggerimenti:

i) per una decade delle pulsazioni si assegnino 10 quadretti del foglio protocollo;

ii) si riportano per comodità dello studente i logaritmi in base 10 degli interi da 2 a 9: $\log_{10} 2 \cong 0,30$, $\log_{10} 3 \cong 0,48$, $\log_{10} 4 \cong 0,60$, $\log_{10} 5 \cong 0,70$, $\log_{10} 6 \cong 0,78$, $\log_{10} 7 \cong 0,85$, $\log_{10} 8 \cong 0,90$, $\log_{10} 9 \cong 0,95$.

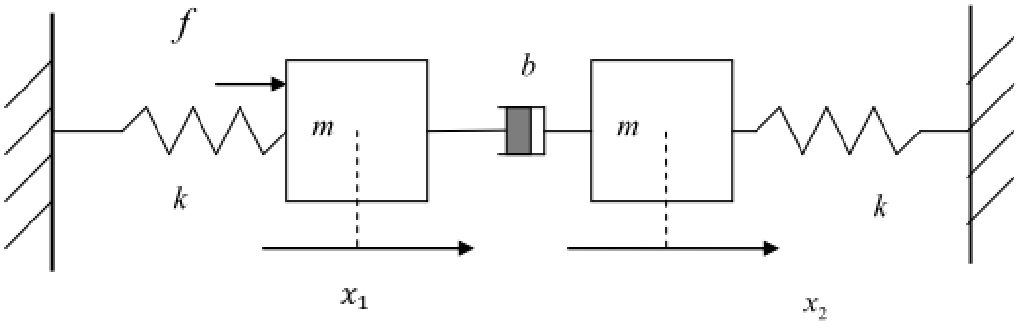




$$G(s) = 40\,\frac{5\left(1+\frac{1}{5}s\right)}{(1+s)\,20\left(1+\frac{1}{20}s\right)} = 10\,\frac{1+\frac{1}{5}s}{(1+s)\left(1+\frac{1}{20}s\right)}$$

$$G(jw) = 10\,\frac{1+\frac{1}{5}jw}{(1+jw)\left(1+\frac{1}{20}jw\right)}$$

2. [punti 5] Sia assegnato il sistema meccanico vibrante di figura



caratterizzato da due molle di costante elastica k e due corpi di massa m accoppiati da uno smorzatore viscoso di coefficiente b. Il corpo di sinistra sia soggetto ad una forza f e le posizioni delle due masse siano descritte dalle variabili x_1 e x_2 (quando il sistema è in quiete $x_1 = x_2 = 0$).

a) Determinare le equazioni differenziali che descrivono il moto delle due masse.
b) Determinare l'equazione differenziale che caratterizza il sistema vibrante (denominato Σ) orientato dall'ingresso f all'uscita x_2.
c) Scrivere il polinomio caratteristico e la funzione di trasferimento di Σ.
d) Dimostrare con i metodi e teoremi della tabella di Routh che Σ è **semplicemente stabile** per qualsivoglia valore dei parametri m, k, b (tutti positivi).
e) Giustificare con un ragionamento fisico il motivo per cui Σ, nonostante la presenza di un elemento dissipativo (lo smorzatore viscoso), **non è asintoticamente stabile**.

Guarda infondo

b) Determinare la funzione di trasferimento del sistema orientato dall'ingresso f all'uscita x_1.

a) Dall'equazione della dinamica otteniamo

$$\begin{cases} mD^2x_1 = f - kx_1 - b(Dx_1 - Dx_2) \\ mD^2x_2 = -kx_2 + b(Dx_1 - Dx_2) \end{cases}$$

b) Dall'espressione precedente otteniamo

$$\begin{cases} (mD^2 + bD + k)x_1 = f + bDx_2 \\ bDx_1 = mD^2x_2 + kx_2 + bDx_2 \end{cases}$$

applicando l'operatore $MD^2 + BD + k$ ad entrambi i membri della seconda equazione e BD a entrambi i membri della prima otteniamo

$$\begin{cases} bD(MD^2 + bD + k)x_1 = bD(f + bDx_2) \\ (mD^2 + bD + k)bDx_1 = (mD^2 + bD + k)(mD^2x_2 + kx_2 + bDx_2) \end{cases}$$

sottraendo membro a membro le due equazioni eliminiamo x_1 dal sistema e otteniamo

$$bD(f + bDx_2) = (mD^2 + bD + k)(mD^2x_2 + kx_2 + bDx_2)$$

da cui

$$m^2D^4x_2 + 2mbD^3x_2 + 2mkD^2x_2 + 2bkDx_2 + k^2x_2 = bDf$$

c) La funzione di trasferimento e'

$$T(s) = \frac{bs}{m^2 s^4 + 2mbs^3 + 2mks^2 + 2bks + k^2}$$

e il polinomio caratteristico

$$p(s) = m^2 s^4 + 2mbs^3 + 2mks^2 + 2bks + k^2$$

d)

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & m^2 & mk & k^2 \\ 3 & 2mb & 2bk & 0 \\ 2 & mk & k^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

l'ultima riga della tabella di Routh e' tutta nulla, si ottiene l'equazione ausiliaria

$$ms^2 + k = 0$$

da cui $s = \pm j\sqrt{\frac{k}{m}}$, la prima parte della tabella ha due permanenze di segno, quindi il sistema e' semplicemente stabile.

E) Quando il sistema è in evoluzione libera (f=0), a causa della simmetria del sistema vibrante, è possibile il moto armonico non smorzato delle due masse per il quale $x_1(t) \equiv x_2(t)$.
Conseguentemente lo smorzatore viscoso non dissipa energia in quanto $D(x_1 - x_2) \equiv 0$ (è come se, virtualmente, le due masse fossero connesse da un braccio rigido). Questo comportamento corrisponde ad un sistema semplicemente stabile.
Si osservi che con $f(t) \equiv 0$ la soluzione particolare

$$x_1(t) = x_2(t) = \varepsilon \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

soddisfa il sistema di equazioni differenziali del punto a).

b) Dalle equazioni precedenti trasformando secondo Laplace con condizioni iniziali tutte nulle otteniamo:

$$\begin{cases} ms^2X_1 = F - kX_1 + b(sX_2 - sX_1) \\ ms^2X_2 = -b(sX_2 - sX_1) - kX_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ms^2X_1 = F - kX_1 + b(sX_2 - sX_1) \\ (ms^2 + bs + k)X_2 = bsX_1 \end{cases}$$

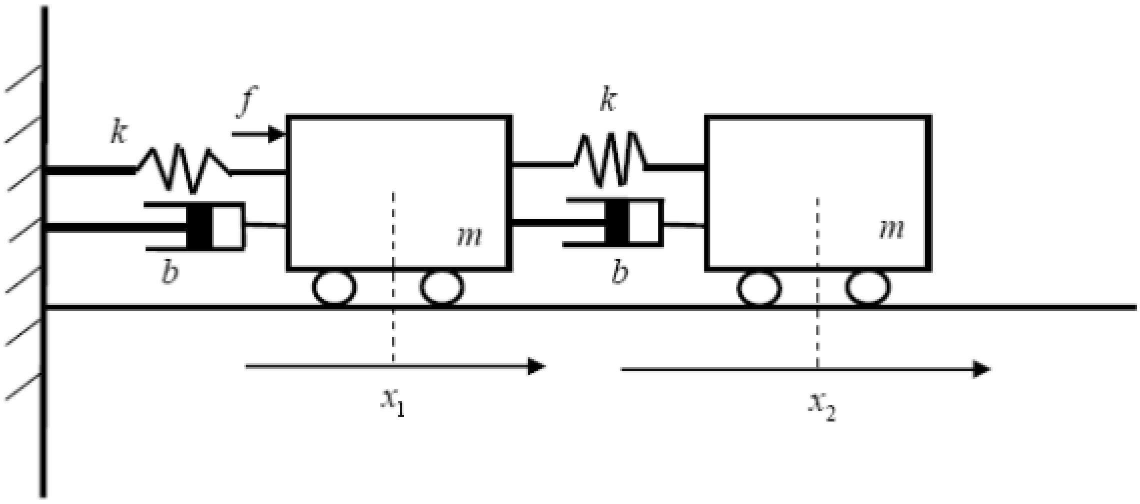
$$\begin{cases} X_2 = \dfrac{bsX_1}{(ms^2 + bs + k)} \\ (ms^2 + bs + k)X_1 = F + bsX_2 \end{cases}$$

$$(ms^2 + bs + k)X_1 = F + bs\frac{bsX_1}{(ms^2 + bs + k)}$$

$$G(s) := \frac{X_1}{F} = \frac{ms^2 + bs + k}{(ms^2 + bs + k)^2 - b^2s^2} =$$

$$= \frac{ms^2 + bs + k}{m^2s^4 + 2mbs^3 + 2mks^2 + 2bks + k^2}$$

2. [punti 4] Due carrelli di massa m collegati come mostrato in figura costituiscono un sistema dinamico Σ orientato da f (forza applicata al carrello di sinistra) ad x_1 (posizione del carrello di sinistra). In condizione di riposo delle molle sia $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$.



1. Determinare l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.
2. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ di Σ.

3. Verificare che Σ è asintoticamente stabile per ogni valore di $m, b, k > 0$.

2.

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = f - k x_1 - b D x_1 + k(x_2 - x_1) + b(D x_2 - D x_1) \\ m D^2 x_2 = -k(x_2 - x_1) - b(D x_2 - D x_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (bD + k) x_2 = m D^2 x_1 + 2 b D x_1 + 2 k x_1 - f \\ (m D^2 + b D + k) x_2 = b D x_1 + k x_1 \end{cases}$$

$$(m D^2 + b D + k)(m D^2 x_1 + 2 b D x_1 + 2 k x_1 - f) =$$
$$= (bD + k)(b D x_1 + k x_1)$$

$$(m D^2 + b D + k)(m D^2 + 2 b D + 2k) x_1 - (m D^2 + bD + k) f =$$
$$= (bD + k)^2 x_1$$

$$(m^2 D^4 + 3 b m D^3 + (3 k m + 2 b^2) D^2 + 4 b k D + 2 k^2) x_1$$
$$- (b^2 D^2 + 2 b k D + k^2) x_1 = (m D^2 + b D + k) f$$

1

$$\boxed{\begin{aligned} m^2 D^4 x_1 + 3 b m D^3 x_1 + (3 k m + b^2) D^2 x_1 + 2 b k D x_1 + k^2 x_1 = \\ = m D^2 f + b D f + k f \end{aligned}}$$

2

$$\boxed{G(s) = \frac{m s^2 + b s + k}{m^2 s^4 + 3 b m s^3 + (3 k m + b^2) s^2 + 2 b k s + k^2}}$$

3.

Verifica mediante applicazione del criterio di Routh:

4	m^2	$3km+b^2$	k^2
3	$3\cancel{b}m$	$2\cancel{b}k$	0
2	$\gamma_{2,1}$	$\gamma_{2,2}$	0
1	$\gamma_{3,1}$	0	
0	$\gamma_{2,2}$		

$$\gamma_{2,1} = 3m\cdot(3km+b^2) - 2km^2 = 9km^2 + 3b^2m - 2km^2$$
$$= 7km^2 + 3b^2m > 0 \quad \forall\, b,k,m>0 \quad \text{ok!}$$

$$\gamma_{2,2} = 3m\cdot k^2 = 3k^2m$$

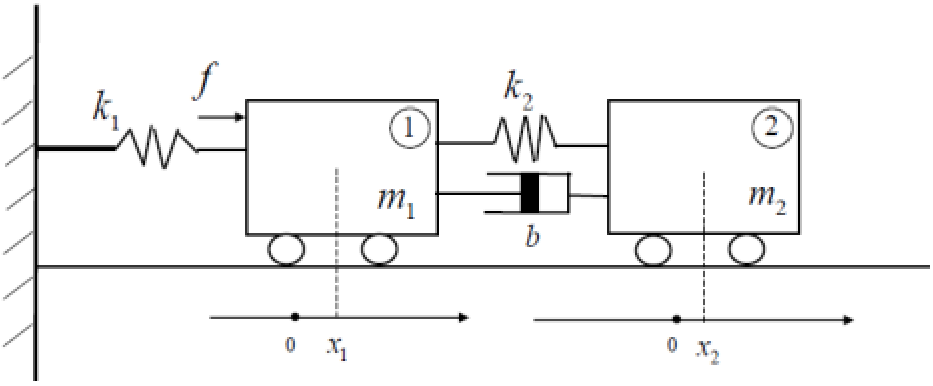
$$\gamma_{3,1} = \gamma_{2,1}\cdot 2k - \gamma_{2,2}\cdot 3m = 2k(7km^2+3b^2m) - 3k^2m\cdot 3m =$$
$$= 14k^2m^2 + 6b^2km - 9k^2m^2 = 5k^2m^2 + 6b^2km > 0$$
$$\forall\, b,k,m>0 \quad \text{ok!}$$

$\gamma_{22} > 0 \quad \forall\, b,k,m>0$ ok!

Tutte permanenze di segno nella prima colonna:

Σ è asintoticamente stabile.

2. [punti 7] Due carrelli di massa m_1 ed m_2 collegati come mostrato in figura costituiscono un sistema dinamico Σ orientato da f (forza applicata al carrello 1) ad x_2 (posizione del carrello 2). In condizione di riposo delle molle sia $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$.



1. Determinare l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.
2. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ di Σ.
3. Posto $m = m_1 = m_2$, $k = k_1 = k_2$ e $b = 0$ determinare poli e modi di Σ.

2.

1.
$$\begin{cases} m_1 D^2 x_1 = f - k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) + b(Dx_2 - Dx_1) \\ m_2 D^2 x_2 = -k_2(x_2 - x_1) - b(Dx_2 - Dx_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 D^2 x_1 = f - k_1 x_1 - k_2 x_1 - b D x_1 + k_2 x_2 + b D x_2 \\ m_2 D^2 x_2 = -k_2 x_2 - b D x_2 + k_2 x_1 + b D x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 D^2 x_1 + b D x_1 + (k_1 + k_2) x_1 = f + (k_2 + bD) x_2 \\ (k_2 + bD) x_1 = m_2 D^2 x_2 + b D x_2 + k_2 x_2 \end{cases}$$

$$[m_1 D^2 + bD + (k_1 + k_2)](m_2 D^2 + bD + k_2) x_2 =$$
$$= (k_2 + bD)^2 x_2 + (k_2 + bD) f$$

$$[m_1 m_2 D^4 + m_1 b D^3 + m_1 k_2 D^2 + m_2 b D^3 + \cancel{b^2 D^2} + b k_2 D + m_2 (k_1 + k_2) D^2 +$$
$$+ b(k_1 + k_2) D + k_2(k_1 + \cancel{k_2})] x_2 = (\cancel{k_2^2} + 2 k_2 b D + \cancel{b^2 D^2}) x_2$$
$$+ (k_2 + bD) f$$

$$[m_1 m_2 D^4 + (m_1 + m_2) b D^3 + (m_1 k_2 + m_2 k_1 + m_2 k_2) D^2 + k_1 b D + k_1 k_2] x_2 = (k_2 + bD) f$$

2.
$$G(s) = \frac{bs + k_2}{m_1 m_2 s^4 + (m_1 + m_2) b s^3 + (m_1 k_2 + m_2 k_1 + m_2 k_2) s^2 + k_1 b s + k_1 k_2}$$

3.

$m = m_1 = m_2$, $K = K_1 = K_2$ e $b = 0$

$$G(s) = \frac{K}{m^2 s^4 + 3mK s^2 + K^2}$$

$m^2 s^4 + 3mK s^2 + K^2 = 0$ $\quad s^2 = \dfrac{-3mK \pm \sqrt{9m^2K^2 - 4m^2K^2}}{2m^2} =$

$$= \frac{-3mK \pm mK\sqrt{5}}{2m^2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{K}{m}$$

poli di Σ:

$$p_{1,2} = \pm j \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{K}{m}} \qquad p_{3,4} = \pm j \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{K}{m}}$$

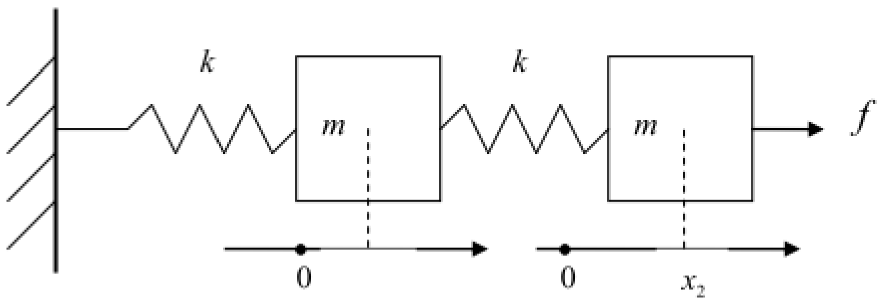
modi di Σ

$$\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{K}{m}} \cdot t + \varphi_1\right), \ \mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{K}{m}} \cdot t + \varphi_2\right)$$

anche esprimibili come

$$\mathrm{sen}\left(1{,}618 \cdot \sqrt{\frac{K}{m}} \cdot t + \varphi_1\right), \ \mathrm{sen}\left(0{,}618 \cdot \sqrt{\frac{K}{m}} \cdot t + \varphi_2\right)$$

2. [punti 5] Sia assegnato il sistema meccanico vibrante di figura



caratterizzato da due molle di costante elastica k e due corpi di massa m. Il corpo di destra sia soggetto ad una forza f e le posizioni delle due masse siano descritte dalle variabili x_1 e x_2 (quando il sistema è in quiete con le molle a riposo $x_1 = x_2 = 0$). Si consideri il sistema dinamico Σ orientato da f ad x_1 (posizione del corpo di sinistra).

a) Determinare l'equazione differenziale che descrive il sistema Σ.
b) Determinare la funzione di trasferimento $T(s)$ di Σ.
c) Determinare i modi di Σ.

$$\begin{cases} m\,D^2 x_1 = -k x_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\,D^2 x_2 = f - k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (mD^2+k)\cdot \\ k\cdot \end{array} \begin{cases} k x_2 = m\,D^2 x_1 + 2k x_1 \\ (m D^2 + k)\,x_2 = f + k x_1 \end{cases}$$

$$(mD^2+k)(mD^2x_1 + 2kx_1) = kf + k^2 x_1$$

$$m^2 D^4 x_1 + 2km\,D^2 x_1 + km\,D^2 x_1 + 2k^2 x_1 = kf + k^2 x_1$$

$$\boxed{m^2 D^4 x_1 + 3km\,D^2 x_1 + k^2 x_1 = kf} \quad \text{Eq. diff.}$$

$$T(s) = \frac{k}{m^2 s^4 + 3km\,s^2 + k^2} \qquad \text{f.d.t.}$$

$$m^2 s^4 + 3km\,s^2 + k^2 = 0 \qquad s^2 = \frac{-3km \pm \sqrt{9k^2m^2 - 4k^2m^2}}{2m^2} =$$

$$= \frac{-3k \pm \sqrt{5}\cdot k}{2m} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}$$

poli di Σ:

$$P_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}} \qquad P_{3,4} = \pm j\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}}$$

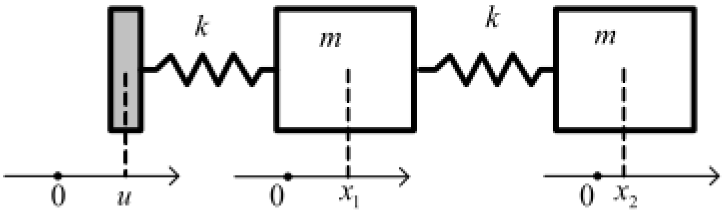
modi di Σ:

$$\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}}\cdot t + \varphi_1\right),\ \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}}\cdot t + \varphi_2\right)$$

più semplicemente

$$\operatorname{sen}\left(1{,}618\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t + \varphi_1\right),\ \operatorname{sen}\left(0{,}618\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t + \varphi_2\right)$$

2. [punti 6] Un azionamento elettrico lineare che può imporre una posizione desiderata u viene utilizzato per movimentare due masse su di una guida rettilinea (vedi figura). Gli accoppiamenti fra le masse e con l'azionamento elettrico sono costituiti da molle ideali con costante elastica k. Le posizioni delle due masse sono descritte dalle variabili x_1 e x_2. Si vuole studiare la dinamica del sistema meccanico orientato da u (ingresso) ad x_1 (uscita) ipotizzando che in condizioni di quiete si abbia $u = 0$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. Di questo sistema si determini: 1) l'equazione differenziale, 2) la funzione di trasferimento, 3) gli zeri, 4) i poli, 5) i modi, 6) il guadagno statico.



2

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = -k(x_1 - u) + k(x_2 - x_1) \\ m D^2 x_2 = -k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (mD^2+k) \\ k \end{array} \begin{cases} k x_2 = m D^2 x_1 + 2k x_1 - k u \\ (m D^2 + k) x_2 = k x_1 \end{cases}$$

$$(m D^2 + k)\left[(m D^2 + 2k) x_1 - k u\right] = k^2 x_1$$

$$\boxed{m^2 D^4 x_1 + 3km D^2 x_1 + k^2 x_1 = km D^2 u + k^2 u} \quad \text{eq. diff.}$$

f.d.t. $G(s) = \dfrac{km s^2 + k^2}{m^2 s^4 + 3km s^2 + k^2} = \dfrac{k(m s^2 + k)}{m^2 s^4 + 3km s^2 + k^2}$

zeri: $m s^2 + k = 0$, $\quad z_{1,2} = \pm j \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

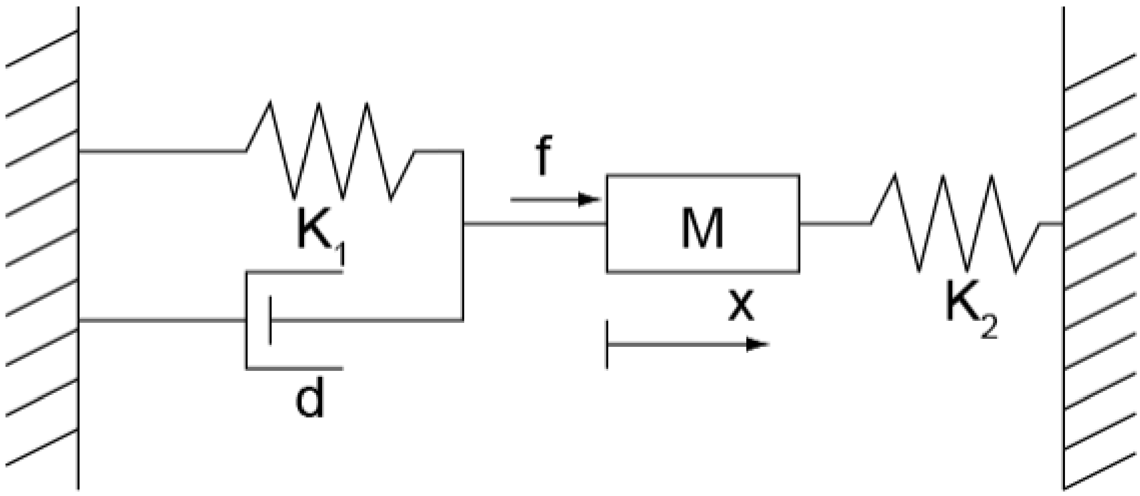
poli: $m^2 s^4 + 3km s^2 + k^2 = 0$, $\quad s^2 = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \dfrac{k}{m}$

$$p_{1,2} = \pm j \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad p_{3,4} = \pm j \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

modi: $\operatorname{sen}\left(\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{k}{m}} \cdot t + \varphi_1\right)$, $\operatorname{sen}\left(\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{k}{m}} \cdot t + \varphi_2\right)$

guadagno statico $G(0) = 1$.

2. [punti 5] Sia dato il seguente sistema meccanico



dove x rappresenta la posizione della massa rispetto ad un sistema di riferimento orizzontale, scelto in modo tale che per x=0 il sistema si trovi in equilibrio, K_1 e K_2 sono le costanti delle due molle, d la constante dello smorzatore e f è una forza esterna agente sulla massa.

1) Determinare l'equazione differenziale che determina il moto della massa.
2) Determinare la funzione di trasferimento $P(s)$ tra la forza f e la posizione della massa x
3) Posto $m = 1\text{kg}$, $K_1 = K_2 = 5\text{N/m}$, $d = 2\text{Ns/m}$, tracciare i diagrammi di Bode (diagramma dei moduli e diagramma delle fasi) della risposta armonica di $P(s)$ e calcolare la pulsazione di risonanza del sistema.

2.

1) L'equazione del sistema è

$$M\ddot{x} = -K_1 x - d\dot{x} - K_2 x + f$$

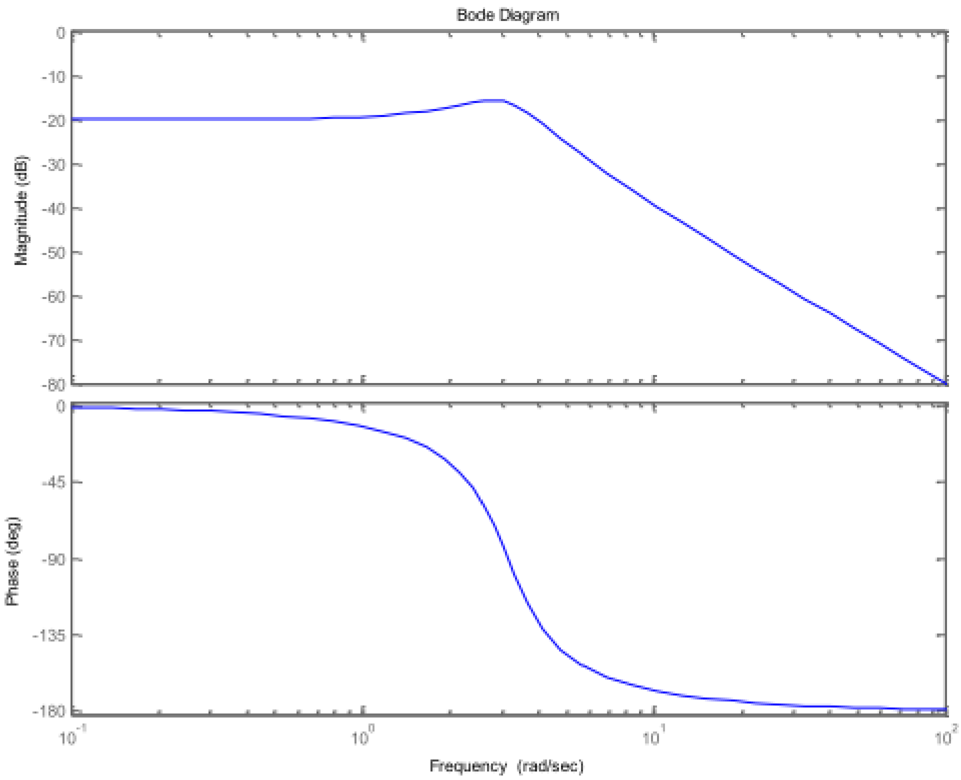
2)da cui la funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{1}{Ms^2 + ds + K_1 + K_2}$$

3)sostituendo i valori indicati otteniamo

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 10}$$

il diagramma di bode di questo sistema del secondo ordine è



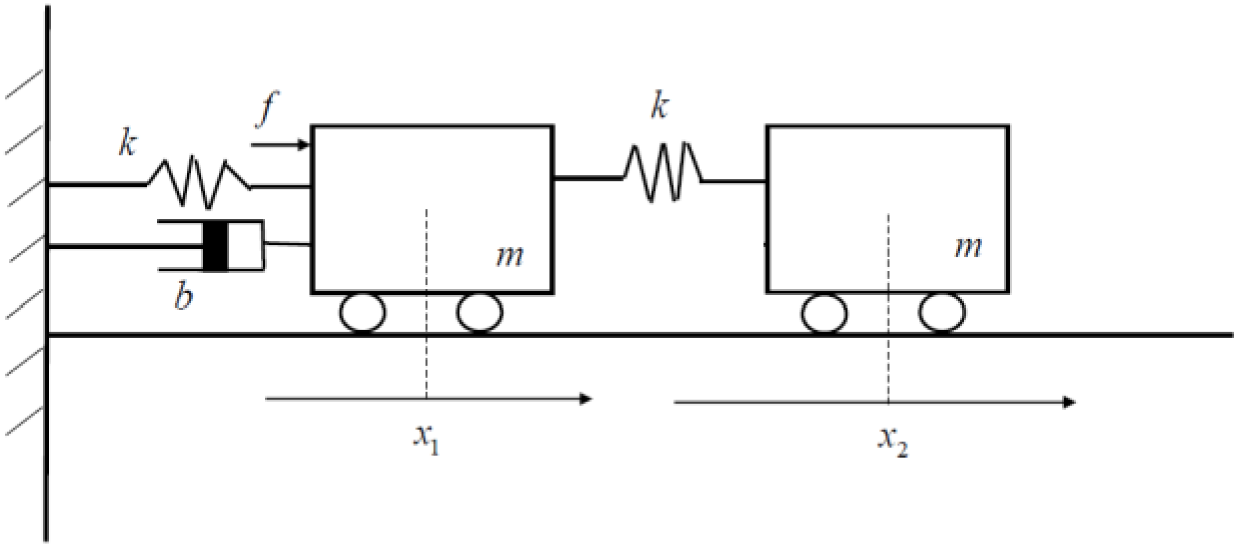
$P(s)$ si può scrivere nella forma

$$P(s) = \frac{1}{10(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \delta \frac{2s}{\omega_n} + 1)}$$

con $\omega_n = \sqrt{10}$ e $\delta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, la pulsazione di risonanza risulta

$$\omega_R = w_n \sqrt{1 - 2\delta^2} = \sqrt{10}\sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \sqrt{8}\text{rad/s} \cong 2{,}828 \ \text{rad/s}$$

2. [punti 4] Due carrelli di massa m collegati come mostrato in figura costituiscono un sistema dinamico Σ orientato da f (forza applicata al carrello di sinistra) ad x_1 (posizione del carrello di sinistra). In condizione di riposo delle molle sia $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$.



1. Determinare l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.
2. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ di Σ.
3. Determinare il guadagno statico e gli zeri di Σ.

2

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = f - k x_1 - b D x_1 + k(x_2 - x_1) \\ m D^2 x_2 = -k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = f - 2k x_1 - b D x_1 + k x_2 \\ m D^2 x_2 = -k x_2 + k x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k x_2 = m D^2 x_1 + b D x_1 + 2k x_1 - f \\ m D^2 x_2 + k x_2 = k x_1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} (mD^2+k) \\ k \end{array} \begin{cases} k x_2 = m D^2 x_1 + b D x_1 + 2k x_1 - f \\ (m D^2 + k) x_2 = k x_1 \end{cases}$$

$$(mD^2+k)(mD^2+bD+2k)x_1 - (mD^2+k) f = k^2 x_1$$

$$(m^2D^4 + mbD^3 + 2kmD^2 + kmD^2 + kbD + \cancel{2}k^2)x_1 - \cancel{k^2 x_1} = (mD^2+k) f$$

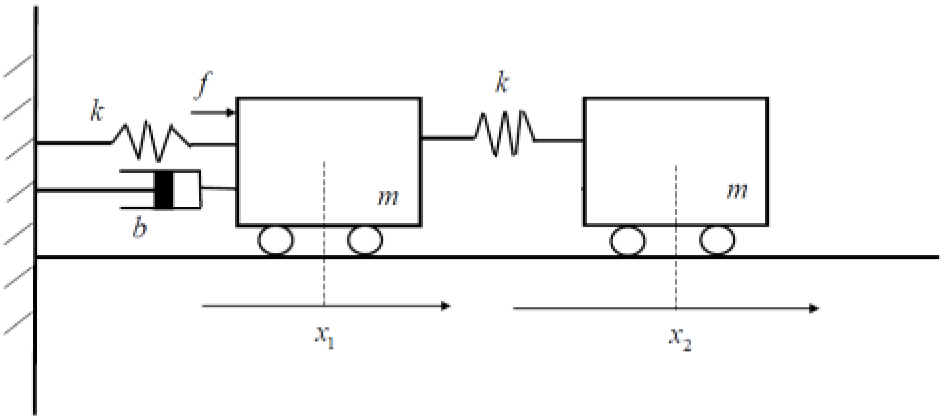
eq. diff. $m^2D^4x_1 + mbD^3x_1 + 3kmD^2x_1 + kbDx_1 + k^2x_1 = mD^2 f + k f$

f.d.t. $G(s) = \dfrac{ms^2+k}{m^2s^4 + mbs^3 + 3kms^2 + kbs + k^2}$

3. Il guadagno statico è G(0)=1/k.

Gli zeri sono $z_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{k}{m}}$

2. [punti 5] Due carrelli di massa m collegati come mostrato in figura costituiscono un sistema dinamico Σ orientato da f (forza applicata al carrello di sinistra) ad x_2 (posizione del carrello di destra). In condizione di riposo delle molle sia $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$.



1. Determinare l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.
2. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ di Σ.

2.

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = f - k x_1 - b D x_1 + k(x_2 - x_1) \\ m D^2 x_2 = -k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

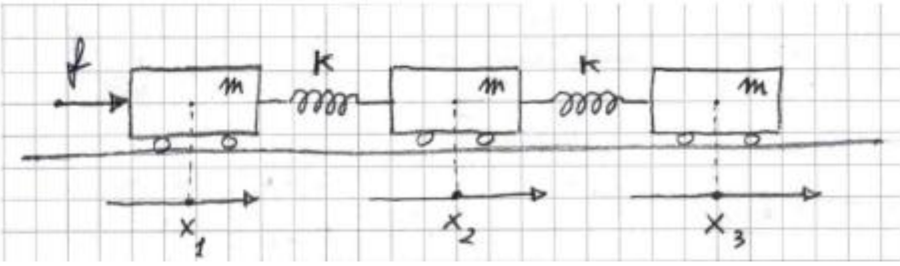
$$\begin{cases} (m D^2 + b D + 2k) x_1 = k x_2 + f \\ k x_1 = (m D^2 + k) x_2 \end{cases}$$

$$(m D^2 + b D + 2k)(m D^2 + k) x_2 = k^2 x_2 + k f$$

$$\boxed{m^2 D^4 x_2 + b m D^3 x_2 + 3 k m D^2 x_2 + k b D x_2 + k^2 x_2 = k f}$$

$$\text{f.d.t. } G(s) = \frac{k}{m^2 s^4 + b m s^3 + 3 k m s^2 + k b s + k^2}$$

2. [punti 6] Tre carrelli, ciascuno di massa m, e collegati fra di loro con molle di costante elastica pari a k come mostrato in figura costituiscano un sistema dinamico orientato da f ad x_1, rispettivamente forza applicata e posizione del carrello di sinistra. Nelle condizioni iniziali di quiete e con le molle a riposo si abbia $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$. Trascurando gli attriti si determinino l'equazione differenziale e la funzione di trasferimento di tale sistema.



$$\begin{cases} m D^2 x_1 = f - k(x_1 - x_2) \Rightarrow k x_2 = m D^2 x_1 + k x_1 - f \\ m D^2 x_2 = k(x_1 - x_2) - k(x_2 - x_3) \\ m D^2 x_3 = k(x_2 - x_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k x_3 = m D^2 x_2 + 2k x_2 - k x_1 \\ m D^2 x_3 + k x_3 = k x_2 \end{cases} \qquad (m D^2 + k) x_3 = k x_2$$

$$(mD^2 + k)(mD^2 x_2 + 2k x_2 - k x_1) = k^2 x_2$$

$$(mD^2 + k)(mD^2 + 2k) x_2 - k(mD^2 + k) x_1 = k^2 x_2$$

$$(m^2 D^4 + 2km D^2 + km D^2 + 2k^2 - k^2) x_2 = k(mD^2 + k) x_1$$

$$(m^2 D^4 + 3km D^2 + k^2) x_2 = k(mD^2 + k) x_1$$

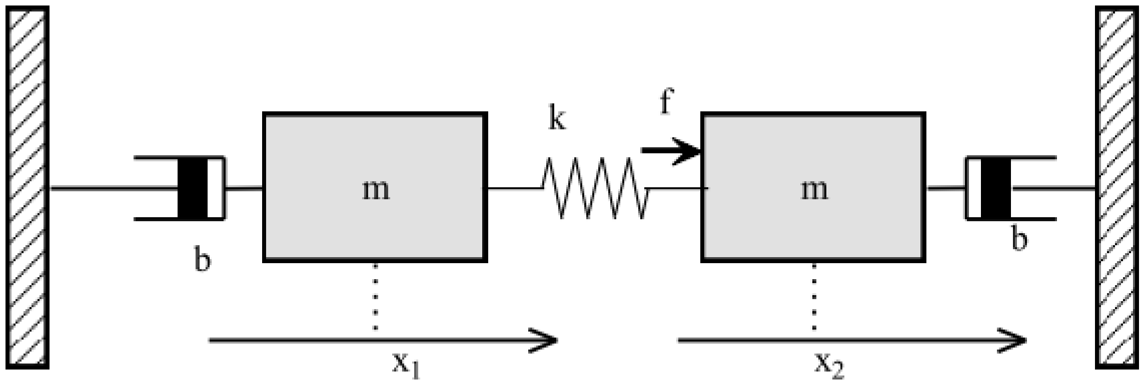
$$(m^2 D^4 + 3km D^2 + k^2)(mD^2 x_1 + k x_1 - f) = k^2 (mD^2 + k) x_1$$

$$(m^2 D^4 + 3km D^2 + k^2)(mD^2 + k) x_1 - k^2 (mD^2 + k) x_1 = (m^2 D^4 + 3km D^2 + k^2) f$$

$$(m^2 D^4 + 3km D^2)(mD^2 + k) x_1 = (m^2 D^4 + 3km D^2 + k^2) f$$

$$\text{f.d.t. } G(s) = \frac{m^2 s^4 + 3km s^2 + k^2}{(m^2 s^4 + 3km s^2)(m s^2 + k)} = \frac{m^2 s^4 + 3km s^2 + k^2}{m \cdot s^2 (m s^2 + 3k)(m s^2 + k)}$$

2. [punti 5] Due parti meccaniche di massa m siano collegate come in figura.



Si definisca un sistema dinamico Σ orientato da f (forza applicata alla massa di destra) ad x_1 (posizione della massa di sinistra). Si trascurino gli attriti nel movimento delle parti meccaniche e nelle condizioni iniziali di quiete con la molla a riposo si abbia $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$.

- **a.** Determinare l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.
- **b.** Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema Σ.
- **c.** Dimostrare che Σ è semplicemente stabile.

2.

a.

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = +k(x_2 - x_1) - b D x_1 \\ m D^2 x_2 = -k(x_2 - x_1) - b D x_2 + f \end{cases}$$

$$\begin{cases} k x_2 = (m D^2 + b D + k) x_1 \\ (m D^2 + b D + k) x_2 = f + k x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (m D^2 + b D + k)^2 x_1 = k f + k^2 x_1$$

$$\boxed{m^2 D^4 x_1 + 2 m b D^3 x_1 + (b^2 + 2 m k) D^2 x_1 + 2 b k D x_1 = k f}$$

b.

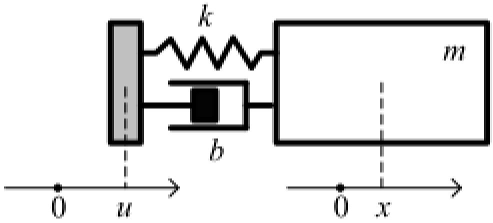
$$G(s)=\frac{k}{s\left[m^2 s^3+2mbs^2+(b^2+2mk)s+2bk\right]}$$

c.

$$\begin{array}{c|ccc}
3 & m^2 & b^2+2mk & 0 \\
2 & \cancel{2}m\cancel{b} & \cancel{2}bk & 0 \\
1 & \underbrace{b^2m+2m^2k-km^2}_{b^2m+m^2k} & 0 & 0 \\
0 & k & 0 &
\end{array}$$

La prima colonna della tabella ha tutti elementi positivi e quindi tutte permanenze di segno. Per il criterio di Routh il polinomio $m^2s^3+2mbs^2+(b^2+2mk)s+2bk$ è hurwitziano. Quindi Σ ha un polo semplice nell'origine ed i rimanenti poli con parte reale negativa. Per il teorema sulla stabilità delle perturbazioni Σ è SEMPLICEMENTE STABILE.

2. [punti 5] Una parte meccanica di massa m che si muove su di una guida lineare orizzontale è attuata da un azionamento lineare programmabile che può imporre una posizione desiderata u (vedi figura sotto). Ipotizzando che il collegamento fra azionamento e massa sia descritto da una molla di costante elastica k e da un ammortizzatore di costante viscosa b **si determini l'equazione differenziale e la funzione di trasferimento** del sistema orientato da u (ingresso) ad x (uscita, posizione della massa m). Si ipotizza che in condizioni di quiete del dispositivo si abbia $u=0$ e $x=0$. **Si determini inoltre una condizione sui parametri** per la quale non si abbiano modi armonici del sistema.



2.

$$m D^2 x = -k(x-u) - b(Dx - Du)$$

$$m D^2 x = -kx + ku - bDx + bDu$$

$$\boxed{m D^2 x + b Dx + k x = b Du + ku}$$

f. d. t. $G(s) = \dfrac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$

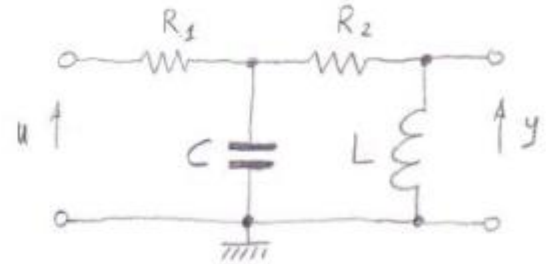
$ms^2 + bs + k$ è il polinomio caratteristico del sistema.

$\Delta = b^2 - 4mk$

Non si hanno modi armonici quando $\Delta \geq 0$ ovvero quando

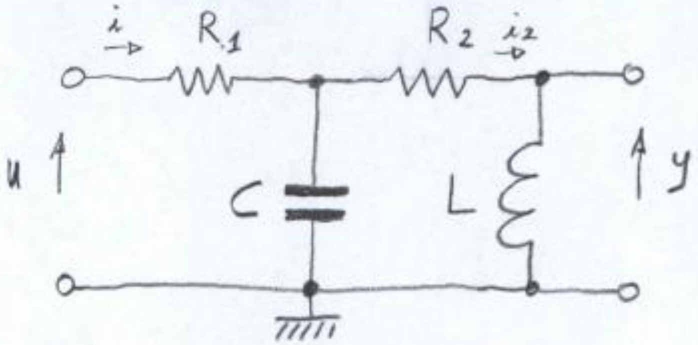
$$b \geq 2\sqrt{mk}$$

2. [punti 4] Il circuito elettrico di figura definisca un sistema dinamico orientato da u (tensione elettrica) ad y (tensione elettrica).



Determinare per questo sistema:
1. la funzione di trasferimento;
2. l'equazione differenziale;
3. il guadagno statico.

2.



$$Z(s) = R_1 + \frac{\frac{1}{sC}(R_2 + Ls)}{\frac{1}{sC} + R_2 + Ls} \qquad I(s) = \frac{U(s)}{Z(s)}$$

$$I_2 = I \cdot \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC} + R_2 + Ls} \; ; \quad Y = Ls \cdot I_2$$

$$Y(s) = \frac{Ls}{LR_1Cs^2 + (L + R_1R_2C)s + R_1 + R_2} \cdot U(s) \triangleq G(s)U(s)$$

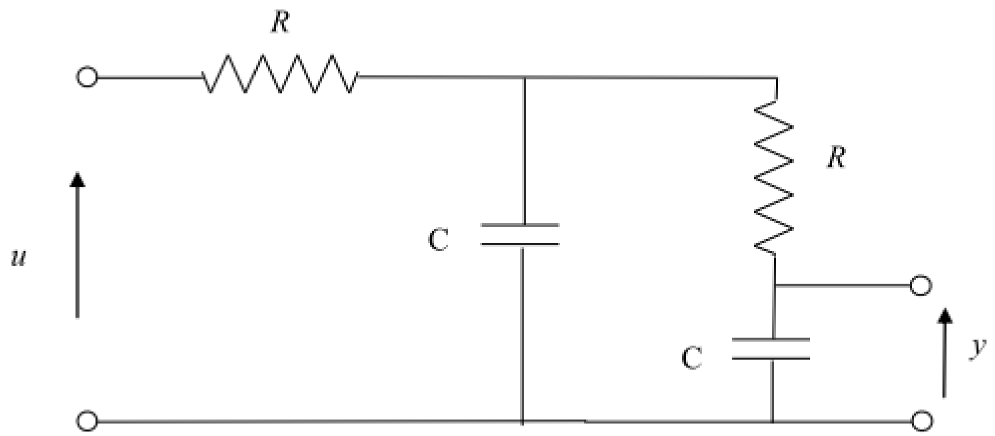
$$\text{f.d.t.} \quad G(s) = \frac{Ls}{LR_1Cs^2 + (L + R_1R_2C)s + R_1 + R_2}$$

eq. diff. $L R_1 C D^2 y(t) + (L + R_1 R_2 C) D y(t) + (R_1 + R_2) y(t) =$

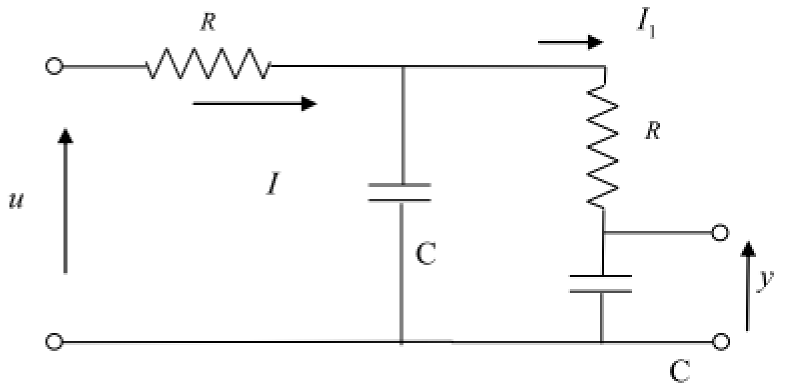
$$= L D u(t)$$

guadagno statico $G(0) = 0$.

1. [punti 6] La rete elettrica di figura definisca un sistema dinamico orientato dalla tensione u (ingresso) alla tensione y (uscita).



Di questo sistema si determini: 1) la funzione di trasferimento, 2) i modi, 3) l'equazione differenziale.



$$U = ZI$$

$$Z = R + \frac{RCs+1}{Cs(RCs+2)}$$

$$Y = \frac{1}{Cs}\cdot I_1 = \frac{1}{Cs}\cdot I\,\frac{\frac{1}{Cs}}{\frac{1}{Cs}+R+\frac{1}{Cs}} = \frac{1}{Cs}\cdot\frac{U}{Z}\,\frac{\frac{1}{Cs}}{\frac{1}{Cs}+R+\frac{1}{Cs}}$$

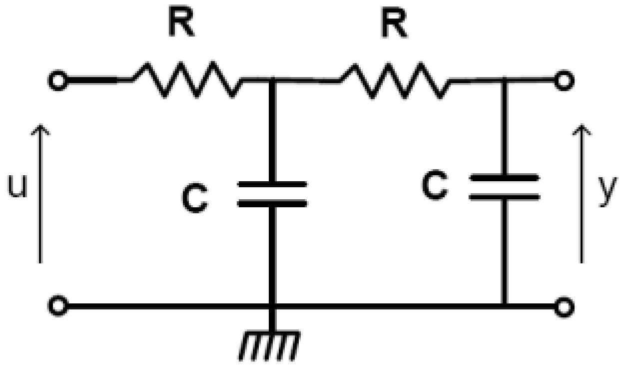
$$G(s) := \frac{Y}{U} = \frac{1}{T^2s^2+3Ts+1}$$

2) I poli del sistema sono $\frac{-3-\sqrt{5}}{2T}$, $\frac{-3+\sqrt{5}}{2T}$ e quindi i corrispondenti modi sono $\exp\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2T}\cdot t\right)$, $\exp\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2T}\cdot t\right)$.

3) L'equazione differenziale associata a G(s) è

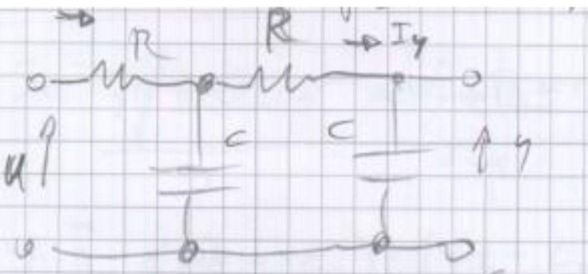
$$T^2D^2y + 3TDy + y = u$$

2. [punti 4.5] La rete elettrica di figura definisce un sistema dinamico orientato da u (tensione all'ingresso) ad y (tensione all'uscita).



Di questo sistema si determini:
1. la funzione di trasferimento;
2. l'equazione differenziale;
3. gli zeri, i poli, i modi ed il guadagno statico.

2.



$$Z_{t1} = R + \frac{\frac{1}{sC}\cdot\left(R+\frac{1}{sC}\right)}{\frac{1}{sC}+R+\frac{1}{sC}} = R + \frac{\frac{1}{sC}\cdot\left(R+\frac{1}{sC}\right)}{R+\frac{2}{sC}}$$

$$I = \frac{U}{Z_t} \qquad I_y = I \cdot \frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{2}{sC}}$$

$$Y = \frac{1}{sC}\cdot I_y = \frac{1}{sC}\cdot\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{2}{sC}}\cdot I =$$

$$Y = \frac{1}{sC} \cdot \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{2}{sC}} \cdot \frac{U}{R + \frac{\frac{1}{sC}\left(R + \frac{1}{sC}\right)}{R + \frac{2}{sC}}} =$$

$$= \frac{1}{sC} \cdot \frac{\frac{1}{sC}\, U}{R^2 + \frac{2R}{sC} + \frac{R}{sC} + \frac{1}{(sC)^2}} =$$

$$= \frac{U}{1 + 3R(sC) + R^2 (sC)^2} = \frac{U}{(RC)^2 s^2 + 3RCs + 1}$$

eq. diff. $(RC)^2 D^2 y + 3RC\, Dy + y = u$

zeri: assenti

poli $T := RC \qquad T^2 s^2 + 3Ts + 1 = 0$

$$p_{1,2} = \frac{-3T \pm \sqrt{9T^2 - 4T^2}}{T^2} =$$

$$= \frac{-3T \pm \sqrt{5} \cdot T}{T^2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{T}$$

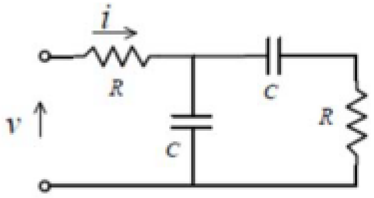
modi: $\left\{ e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{T} \cdot t},\ e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{T} t} \right\}$

Guadagno statico: $G(0) = 1$

funzione di trasferimento $(T := RC)$

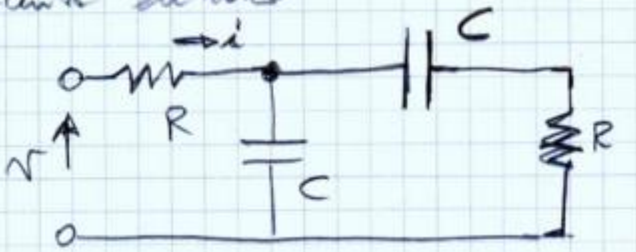
$$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 3Ts + 1}$$

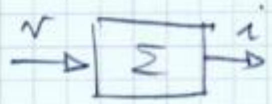
1. [punti 6] La rete elettrica di figura definisca un sistema dinamico orientato dalla tensione v (ingresso) alla corrente i (uscita).



Di questo sistema si determini (con $T := RC$):
1) la funzione di trasferimento, 2) gli zeri, 3) i poli, 4) i modi, 5) il guadagno statico, 6) l'equazione differenziale.

1) Circuito elettrico





$T := RC$

$$V = Z_{tot}\, I \qquad I = \frac{1}{Z_{tot}} V$$

$$\text{f.d.t.} = G(s) = \frac{1}{Z_{tot}}$$

$$Z_{tot} = R + \frac{\frac{1}{Cs}\left(\frac{1}{Cs} + R\right)}{\frac{1}{Cs} + \frac{1}{Cs} + R} = R + \frac{\frac{1}{Cs} \cdot \frac{1+RCs}{Cs}}{\frac{2}{Cs} + R} =$$

$$= R + \frac{\frac{1+RCs}{(Cs)^2}}{\frac{2+RCs}{Cs}} = R + \frac{\frac{1+RCs}{Cs}}{2+RCs} =$$

$$= R + \frac{1+RCs}{Cs(2+RCs)} = \frac{RCs(2+RCs) + 1 + RCs}{Cs(2+RCs)} =$$

$$= \frac{2RCs + (RC)^2 s^2 + RCs + 1}{Cs(RCs+2)} = \frac{(RC)^2 s^2 + 3RCs + 1}{Cs(RCs+2)}$$

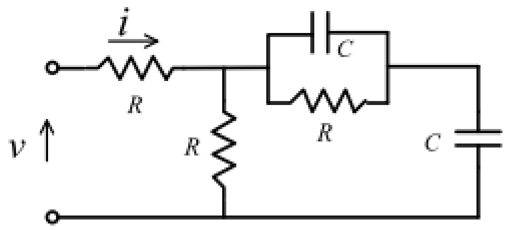
$$G(s) = \frac{Cs(RCs+2)}{(RC)^2 s^2 + 3RCs + 1} = \frac{Cs(Ts+2)}{T^2 s^2 + 3Ts + 1}$$

zeri: $z_1 = 0$, $z_2 = -\frac{2}{RC}$ poli: $p_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2T}$, $p_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2T}$

modi: $\left\{ \exp\left\{-\frac{3+\sqrt{5}}{2T} t\right\}, \exp\left\{-\frac{3-\sqrt{5}}{2T} t\right\} \right\}$, guadagno statico $G(0) = 0$

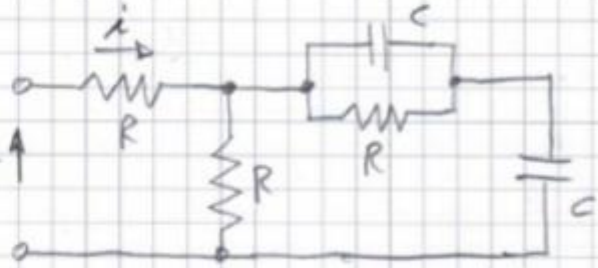
eq. diff. $T^2 D^2 i(t) + 3T D i(t) + i(t) = CT D^2 v(t) + 2C D v(t)$

2. [punti 4,5] La rete elettrica di figura definisca un sistema dinamico orientato dalla tensione v (ingresso) alla corrente i (uscita).



Di tale sistema si determini (per semplicità si definisce $T := RC$):
1) la funzione di trasferimento, 2) gli zeri, 3) i modi, 4) l'equazione differenziale.

2.



$v \equiv$ tensione

$i \equiv$ corrente

$V(s) = Z_{tot} \cdot I(s)$

$I(s) = \dfrac{1}{Z_{tot}} \cdot V(s)$

$$Z_{tot} = R + \frac{R \cdot \left(\frac{1}{Cs} + \frac{R \cdot \frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} \right)}{R + \frac{1}{Cs} + \frac{R \cdot \frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}}}$$

$T := RC$

Quindi $Z_{tot}(s) = R \cdot \dfrac{R^2C^2s^2 + 5RCs + 2}{R^2C^2s^2 + 3RCs + 1} = R \cdot \dfrac{T^2s^2 + 5Ts + 2}{T^2s^2 + 3Ts + 1}$

La funzione di trasferimento è $G(s) := \dfrac{1}{Z_{tot}(s)}$

$$G(s) = \frac{T^2s^2 + 3Ts + 1}{R(T^2s^2 + 5Ts + 2)}$$

zeri : $T^2s^2 + 3Ts + 1 = 0 \Rightarrow z_1 = -\dfrac{3+\sqrt{5}}{2T}$, $z_2 = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2T}$

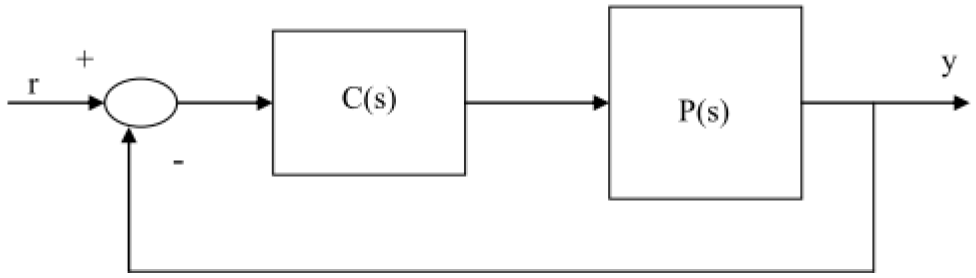
poli : $T^2s^2 + 5Ts + 2 = 0 \Rightarrow p_1 = -\dfrac{5+\sqrt{17}}{2T}$, $p_2 = \dfrac{-5+\sqrt{17}}{2T}$

modi : $\left\{ \exp\left(-\dfrac{5+\sqrt{17}}{2T} \cdot t\right), \exp\left(\dfrac{-5+\sqrt{17}}{2T} \cdot t\right) \right\}$

Eq. differenziale :

$$RT^2D^2i(t) + 5RTDi(t) + 2R \cdot i(t) = \\ = T^2D^2v(t) + 3TDv(t) + v(t)$$

7. **[punti 5]** Si consideri il seguente sistema di controllo



dove $P(s) = \dfrac{1}{(s-1)^2}$. Si progetti un controllore $C(s)$ proprio di ordine 2 affinché:

a) l'errore a regime in risposta ad un gradino di comando del set-point sia nullo.
b) La costante di velocità del sistema retroazionato K_v sia pari a 10 : $K_v = 10$.
c) I poli dominanti del sistema retroazionato siano -1 e -2 .

7.
Scelta una funzione propria del secondo ordine per il controllore *C(s)* del tipo

$$C(s) = \frac{bs^2 + cs + d}{s(s+a)}$$

in modo che sia rispettata la specifica sull'errore a regime in risposta al gradino, il guadagno di anello risulta:

$$F(s) := \frac{bs^2 + cs + d}{s(s+a)} \cdot \frac{1}{(s-1)^2}\,.$$

Dalla specifica su K_v si ricava

$$K_v = \lim_{s \to 0} sF(s) = \frac{d}{a} = 10\,.$$

Considerando l'equazione caratteristica:

$$1 + \frac{bs^2 + cs + d}{s(s+a)} \cdot \frac{1}{(s-1)^2} = 0$$

si ottiene il seguente polinomio caratteristico:

$$s^4 + (a-2)s^3 + (1-2a+b)s^2 + (a+c)s + d\,.$$

Il polinomio caratteristico desiderato può essere scelto come

$$(s+1)(s+2)(s+6)(s+e) =$$
$$s^4 + (s+e)s^3 + (9e+20)s^2 + (20e+12)s + 12e$$

Dal principio di identità dei polinomi e dalla specifica su K_v si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} a-2 = 9+e \\ 1-2a+b = 9e+20 \\ a+c = 20e+12 \\ d = 12e \\ \dfrac{d}{a} = 10 \end{cases}$$

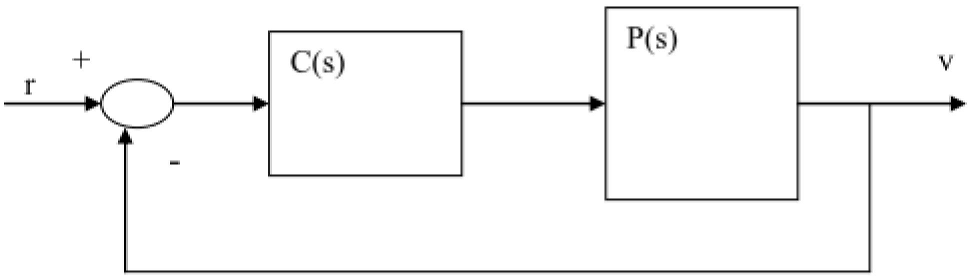
le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} a = 66 \\ b = 646 \\ c = 1046 \\ d = 660 \\ e = 55 \end{cases}$$

Si noti che il valore trovato per e fissa un ulteriore polo del sistema retroazionato in –55 e questo garantisce il rispetto della specifica sui poli dominanti.
Il controllore trovato è quindi:

$$C(s) = \frac{646s^2 + 1046s + 660}{s(s+66)}$$

7. **[punti 5]** Si consideri il seguente sistema di controllo



dove $P(s) = \dfrac{100(s+1)}{(s+2)^2(s+10)}$. Si chiede di progettare un controllore di struttura (rete ritardatrice) $C(s) = K\dfrac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}$, $K \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0,1)$, $\tau \in \mathbb{R}^+$ affinché:

a) l'errore a regime e_R in risposta ad un gradino unitario del set-point abbia valore assoluto pari a 0,02: $|e_R| = 0,02$.
b) Il margine di fase M_F sia pari a 50°: $M_F = 50^\circ$.

b) Il margine di fase sia $M_F = 45^\circ$.

7.

La specifica a) equivale a $\left|\frac{1}{1+K_p}\right| = \frac{1}{50} \quad \Leftrightarrow \quad K_p = 49$ oppure $K_p = -51$. Dato che $K_p = K\frac{5}{2}$ ed è opportuno scegliere $K > 0$ (al fine dell'ottenimento di una facile stabilizzabilità) si impone

$$K_p = 49 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{98}{5}$$

Definiamo

$$L(s) := KP(s) = 1960\frac{s+1}{(s+2)^2(s+10)}$$

$$L'(s) := C(s)P(s) = 1960\frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}\frac{s+1}{(s+2)^2(s+10)}$$

Si propone di progettare α e τ mediante le formule di inversione.

$$L(j\omega) = 1960\frac{j\omega+1}{(j\omega+2)^2(j\omega+10)}$$

$$\arg L(j\omega) = \text{arctg}\ \omega - 2\ \text{arctg}\ \frac{\omega}{2} - \text{arctg}\ \frac{\omega}{10}$$

$$|L(j\omega)| = 1960\frac{\sqrt{1+\omega^2}}{(4+\omega^2)\sqrt{100+\omega^2}}$$

Il diagramma polare di $L(j\omega)$ è riportato in figura.

Si determina (per tentativi) ω_0 (sarà la pulsazione critica di $L'(j\omega)$):

$\omega_0 = 10$ rad/s

$\arg L(j\omega_0) = -2{,}0611$ rad $\quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = 0{,}2079$ rad

$|L(j\omega_0)| = 13{,}393$

verifica validità di ω_0 : $\left(|L(j\omega_0)|, \varphi_0\right) \in C$?

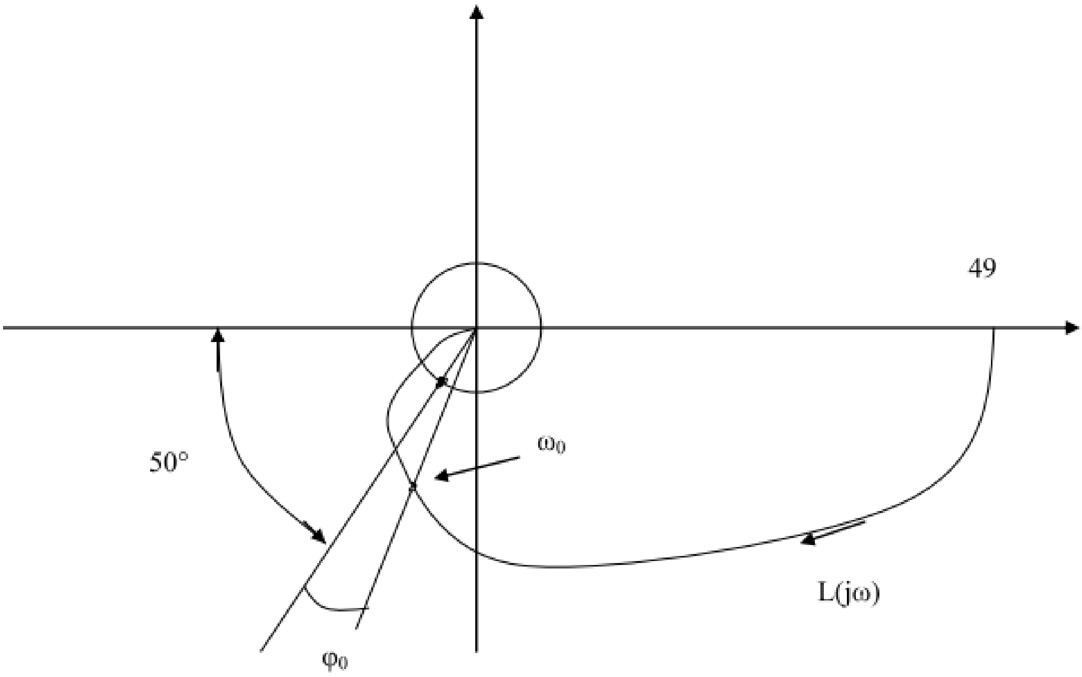
sì, perchè $\cos\varphi_0 > 1/|L(j\omega_0)|$: $0{,}9785 > 0{,}0747$.

Si definisce $M := |L(j\omega)|$ e $\varphi := \varphi_0$ e si impone, mediante le formule di inversione, che

$$\frac{1}{M}e^{-j\varphi} = \frac{1+\alpha\tau j\omega_0}{1+\tau j\omega_0}$$

Quindi:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{M\cos\varphi - 1}{M(M-\cos\varphi)} = 0{,}07280 \\[2ex] \tau = \dfrac{M-\cos\varphi}{\omega_0\ \text{sen}\ \varphi} = 6{,}016\ \text{s} \end{cases}$$



ω0
50°
L(jω)
φ0

Parte b con Mf 45

La specifica a) equivale a $\frac{1}{1+K_p}=\frac{1}{50} \quad \Leftrightarrow \quad K_p=49$. Dato che $K_p=K\frac{5}{2}$ si ottiene $K=\frac{98}{5}$

Definiamo

$$L(s):=KP(s)=1960\frac{s+1}{(s+2)^2(s+10)}$$

$$L'(s):=C(s)P(s)=1960\frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}\frac{s+1}{(s+2)^2(s+10)}$$

Si propone di progettare α e τ mediante le formule di inversione.

$$L(j\omega)=1960\frac{j\omega+1}{(j\omega+2)^2(j\omega+10)}$$

$$\arg L(j\omega)=\text{arctg}\ \omega-2\ \text{arctg}\ \frac{\omega}{2}-\ \text{arctg}\ \frac{\omega}{10}$$

$$|L(j\omega)|=1960\frac{\sqrt{1+\omega^2}}{(4+\omega^2)\sqrt{100+\omega^2}}$$

Il diagramma polare di $L(j\omega)$ è riportato in figura.

Si determina (per tentativi) ω_0 (sarà la pulsazione critica di $L'(j\omega)$):

$$\omega_0=10 \ \text{ rad/s}$$

$$\arg L(j\omega_0)=-2{,}0611 \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad \varphi_0=0{,}2951 \text{ rad}$$

$$|L(j\omega_0)|=13{,}393$$

verifica validità di ω_0 : $\left(|L(j\omega_0)|,\varphi_0\right)\in C$?

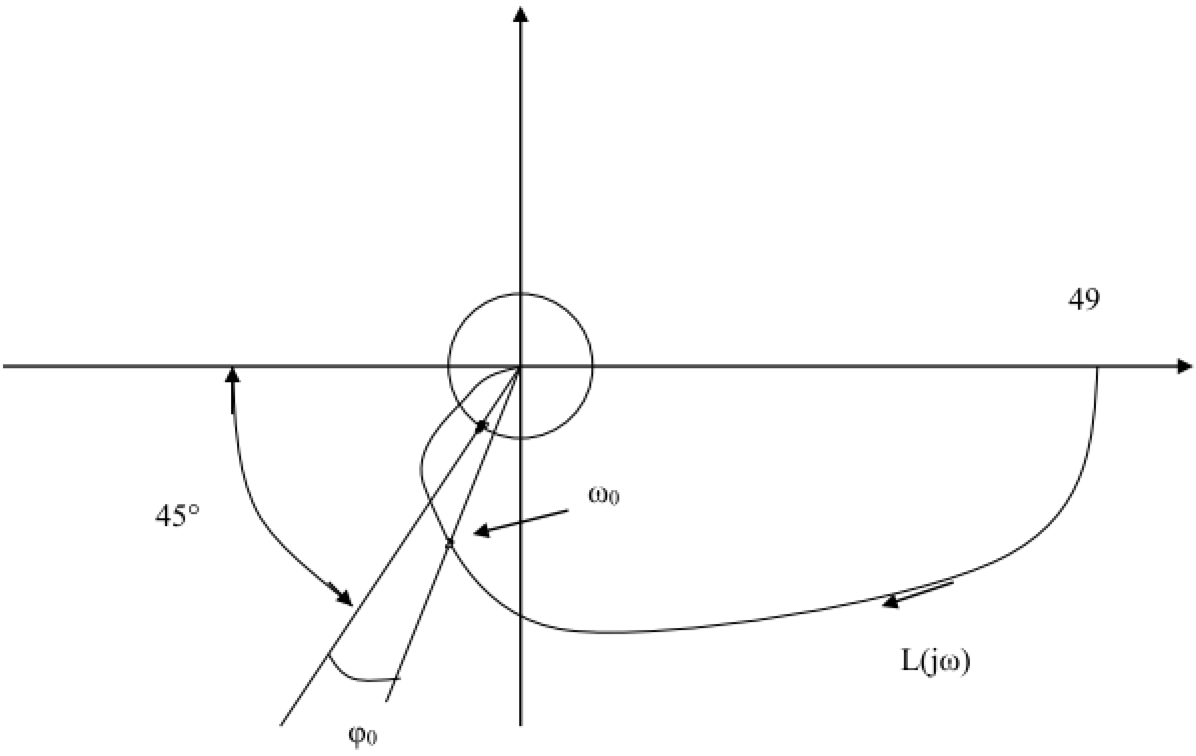
sì, perchè $\cos\ \varphi_0>1/|L(j\omega_0)|$: 0,9568 > 0,0747.

Si definisce $M:=|L(j\omega)|$ e $\varphi:=\varphi_0$ e si impone, mediante le formule di inversione, che

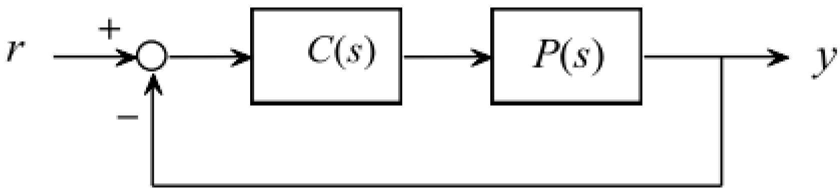
$$\frac{1}{M}e^{-j\varphi}=\frac{1+\alpha\tau j\omega_0}{1+\tau j\omega_0}$$

Quindi:

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{M\cos\ \varphi-1}{M(M-\cos\ \varphi)}=0.0709\\[2ex] \tau=\dfrac{M-\cos\ \varphi}{\omega_0\ \text{sen}\ \varphi}=4.276\ \text{s}\end{cases}$$



7. [punti 5] Sia dato il sistema in retroazione di figura



dove $P(s)=\dfrac{10}{(1+s)(1+0,4s)^2}$. Progettare un controllore con struttura di rete a ritardo e anticipo $C(s)=\dfrac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)+\tau_{12}s}$ affinché il sistema retroazionato sia stabile asintoticamente con margine di fase $M_F=45^\circ$ (si assuma $\dfrac{\tau_1}{\tau_2}=10$).

$$P(j\omega) = \frac{10}{(1+j\omega)(1+0{,}4j\omega)^2}$$

$$\omega_0 ? \Rightarrow \arg P(j\omega_0) = -\pi + \frac{45}{180}\cdot\pi = -2{,}3562$$

$$\arg P(j\omega_0) = -\operatorname{arctg} \omega_0 - 2\operatorname{arctg} 0{,}4\cdot\omega_0$$

$$\arg P(j\omega_0) = -\operatorname{arctg} \omega_0 - 2\operatorname{arctg} 0{,}4\cdot\omega_0$$

ω_0	$\arg P(j\omega_0)$
1	−1,5464
2	−2.4566
1.8	−2.3117
1.86	−2.3568

Impongo

$$w_n = w_o = 1,86 \ rad/sec$$

$$\begin{cases} \text{attenuazione in centro banda} = \dfrac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}} = \dfrac{1}{|P(jw_o)|} = \\ \dfrac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} = w_n \qquad \dfrac{1}{\tau_1 \tau_2} = w_n^2 \qquad \dfrac{1}{10 \tau_2^2} = w_n^2 \\ \dfrac{\tau_1}{\tau_2} = 10 \qquad \tau_1 = 10 \tau_2 \end{cases}$$

$$\tau_2^2 = \frac{1}{10 \cdot w_n^2} \Rightarrow \tau_2 = \frac{1}{\sqrt{10} \cdot w_n} = 0,170 \ sec$$

$$\tau_1 = 10 \tau_2 = 1,70 \ sec$$

$$|P(jw_o)| = \frac{10}{\sqrt{1 + w_o^2} \cdot (1 + (0,4 \cdot w_o)^2)} =$$

$$= \frac{10}{\#} = 3,0481$$

$$\frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1+\tau_2+\tau_{12}} = \frac{1}{|P(j\omega_0)|}$$

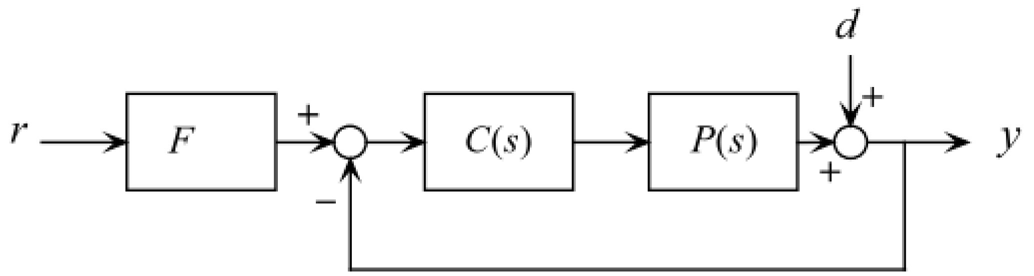
$$(\tau_1+\tau_2)\cdot|P(j\omega_0)| = (\tau_1+\tau_2)+\tau_{12}$$

$$\tau_{12} = (\tau_1+\tau_2)\left[\,|P(j\omega_0)|-1\,\right]$$

$$= (1{,}70+0{,}170)\left[2{,}0481\right]$$

$$= 1{,}87\cdot 2{,}0481 \cong 3{,}83 \text{ sec}$$

5. [punti 6] Sia dato lo schema di sistema di controllo di figura



dove $P(s)=\dfrac{4}{s+2}$. Determinare un controllore $C(s)$ di ordine minimo ed il blocco algebrico $F\in\mathbb{R}$ affinché il sistema di controllo soddisfi le seguenti specifiche:

1. reiezione infinita asintotica al disturbo sinusoidale $d(t)=3\sin(2t+4)$;
2. sistema retroazionato con poli dominanti in $-2,\ -3$;
3. costante di posizione $K_p=4$;
4. in condizioni nominali l'errore a regime in risposta ad un gradino del riferimento sia nullo.

$$C(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2+4}$$

$$L(s) \triangleq C(s)\,P(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2+4} \cdot \frac{4}{s+2} \quad ; \quad L(0) = \frac{b_0}{2}$$

$$K_p = L(0) = \frac{b_0}{2} \quad . \quad \text{Da } K_p = 4 \Rightarrow b_0 = 8$$

$$1 + L(s) = 0 \qquad 1 + \frac{4(b_2 s^2 + b_1 s + 8)}{(s^2+4)(s+2)} = 0$$

$$(s^2+4)(s+2) + 4(b_2 s^2 + b_1 s + 8) = 0$$

polinomio caratteristico associato al controllore:

$$P_c(s) \triangleq s^3 + (4b_2+2)s^2 + (4b_1+4)s + 40$$

Il polinomio caratteristico desiderato è

$$P_d(s) \triangleq (s+2)(s+3)(s+c) = s^3 + (c+5)s^2 + (5c+6)s + 6c$$

con $c \gg 3$

Si impone $P_c(s) \equiv P_d(s)$

$$\begin{cases} 4b_2 + 2 = c+5 & \Rightarrow b_2 = \frac{29}{12} \\ 4b_1 + 4 = 5c+6 & \Rightarrow b_1 = \frac{53}{6} \\ 40 = 6c & \Rightarrow c = \frac{20}{3} \gg 3 \quad \text{ok!} \end{cases}$$

$$T_{ry}(0) = 1 \qquad F \cdot \frac{L(0)}{1+L(0)} = 1 \qquad F \cdot \frac{4}{1+4} = 1 \qquad F = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

2. sistema retroazionato con poli dominanti in $-2 \pm j$,

2. Sistema retroazionato con poli dominanti in $-2 \pm j$.
Polinomio caratteristico:

$$p_c(s) = (s^2+4)(s+2)+4\,b_2\,s^2+4\,b_1\,s+32 = 0 \;\Rightarrow\; p_c(s) = s^3+(4\,b_2+2)s^2+(4\,b_1+4)s+40 = 0$$

Polinomio desiderato:

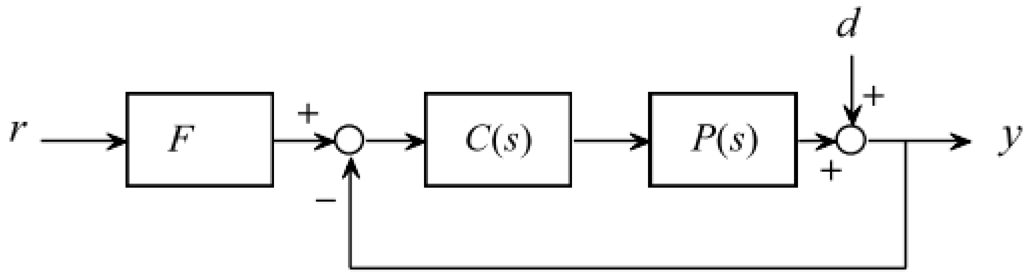
$$p_d(s) = [(s+2)^2+1]\,(s+\alpha) = s^3+(\alpha+4)\,s^2+(4\,\alpha+5)\,s+5\,\alpha$$

Si impone $p_c(s) = p_d(s)$ e si ottiene:

$$\begin{cases} \alpha+4 = 4\,b_2+2 \\ 4\,\alpha+5 = 4\,b_1+4 \\ 5\,\alpha = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 8.25 \\ b_2 = 2.5 \\ \alpha = 8 \end{cases}$$

Verifico: $-\alpha = -8 << -2 \Rightarrow$ i poli $-2 \pm j$ sono dominanti

5. [punti 6] Sia dato lo schema di sistema di controllo di figura



dove $P(s) = \dfrac{4}{s+2}$. Determinare un controllore $C(s)$ di ordine minimo ed il blocco algebrico $F \in \mathbb{R}$ affinché il sistema di controllo soddisfi le seguenti specifiche:

1. reiezione infinita asintotica al disturbo sinusoidale $d(t) = 4\sin(3t)$,
2. sistema retroazionato con poli dominanti in $-2 \pm j$,
3. costante di posizione $K_p = 4$,
4. in condizioni nominali l'errore a regime in risposta ad un gradino del riferimento sia nullo.

(3) Il controllore di ordine minimo può avere la struttura.

$$C(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + 9}$$

$$L(s) = C(s) P(s) = \frac{4(b_2 s^2 + b_1 s + b_0)}{(s^2+9)(s+2)}$$

$$K_p = \frac{4 b_0}{9 \cdot 2} = 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b_0 = 18}$$

$$1 + L(s) = 0 \qquad 1 + \frac{4(b_2 s^2 + b_1 s + 18)}{s^3 + 2s^2 + 9s + 18} = 0$$

$$s^3 + 2s^2 + 9s + 18 + 4 b_2 s^2 + 4 b_1 s + 72 = 0$$

$$= s^3 + (2 + 4 b_2) s^2 + (9 + 4 b_1) s + 90 = 0$$

$$\boxed{P_c(s) = s^3 + (2 + 4 b_2) s^2 + (9 + 4 b_1) s + 90}$$

Il polinomio caratteristico desiderato è

$$P_d(s) = (s + 2 - j)(s + 2 + j)(s + c)$$

dove $c >> 2$

$$P_d(s) = \left[(s+2)^2+1\right](s+c) =$$

$$= (s^2+4s+5)(s+c) =$$

$$= s^3+4s^2+5s +$$

$$+ cs^2 + 4cs + 5c =$$

$$\boxed{P_d(s) = s^3 + (4+c)s^2 + (5+4c)s + 5c}$$

Imponiamo

$$P_d(s) \equiv P_c(s)$$

$$\begin{cases} 2+4b_2 = 4+c \\ 9+4b_1 = 5+4c \\ 90 = 5c \end{cases}$$

È un sistema di tre eq. lineari in tre incognite.

$$\boxed{c = 18}$$

$$4b_2 = 20 \Rightarrow \boxed{b_2 = 5}$$

$$4b_1 = -4+72 = 68 \Rightarrow \boxed{b_1 = 17}$$

$$c >> 2$$

$$\boxed{C(s) = \frac{5s^2+17s+18}{s^2+9}}$$

$$C(s) = 5\frac{(s+1{,}7+j0{,}8426)(s+1{,}7-j0{,}8426)}{(s+3j)(s-3j)}$$

Calcolo di F:

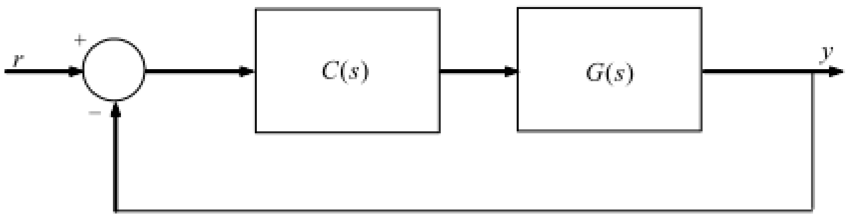
$$T_{zy}(s) = F \cdot \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

Imponiamo $T_{zy}(0) = 1$

$$F\frac{L(0)}{1+L(0)} = 1 \quad ; \quad k_p = L(0) = 4$$

$$F\frac{4}{1+4} = 1 \Rightarrow \boxed{F = \frac{5}{4} = 1{,}25}$$

7. [punti 5] Sia dato il sistema in retroazione unitaria



dove $G(s) = \dfrac{10}{s(s+2)^2}$.

1) Posto $C(s) = 1$ verificare la stabilità asintotica del sistema retroazionato con il criterio di Nyquist determinando il corrispondente margine di ampiezza M_A;
2) Progettare un controllore di struttura

$$C(s) = K_c \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}\ ,\ K_c > 0,\quad \tau > 0,\quad \alpha \in (0,1)$$

affinché il sistema retroazionato sia stabile con margine di ampiezza $M_A = 5$ ed abbia la costante di velocità $K_v = 10$.

1) Sia $F(s) := C(s)G(s) = \dfrac{10}{s(s+2)^2}$

$$F(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\omega+2)^2}$$

$$\left|F(j\omega)\right| = \frac{10}{\omega\left(\omega^2+4\right)}$$

$$\arg F(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 2arctg\frac{\omega}{2}$$

Studio del diagramma polare di $F(j\omega)$:

Comportamento per $\omega \to 0^+$:
Il diagramma polare presenta un asintoto parallelo all'asse immaginario
$\sigma) = -2.5$

$$\lim_{\omega\to 0^+} \arg F(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

Comportamento per $\omega \to \infty$:
Il diagramma termina nell'origine tangente a uno degli assi coordinati, essendo

$$\lim_{\omega\to\infty} \left|F(j\omega)\right| = 0$$

$$\lim_{\omega\to\infty} \arg F(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi$$

La rotazione complessiva intorno all'origine per ω variabile da 0 a ∞ è di $-\pi$.

L'intersezione con l'asse reale negativo si può calcolare con il metodo della tabella di Routh, imponendo che l'equazione $F(s)+\eta$ abbia radici puramente immaginarie, con $\eta \in \mathbb{R}^+$.

$$\frac{10}{s(s+2)^2} + \eta = 0$$

$$s^3 + 4s^2 + 4s + \frac{10}{\eta} = 0$$

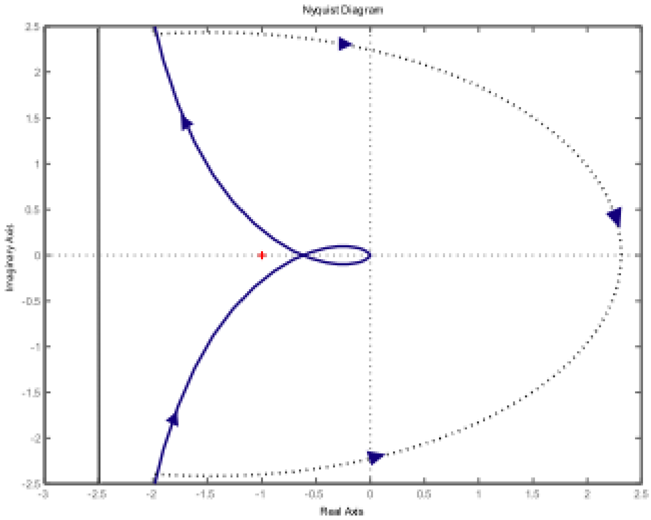
3	1	4
2	2	$\frac{5}{\eta}$
1	$8 - \frac{5}{\eta}$	0

$$0 \;\big|$$

Si deve cercare la soluzione (con $\eta > 0$) tale che sia nulla la riga 1:

$$8 - \frac{5}{\eta} = 0 \Rightarrow \eta = \frac{5}{8}$$

L'attraversamento dell'asse reale avverrà nel punto $-5/8$.



Si può concludere che per il criterio di Nyquist il sistema retroazionato è stabile con margine di ampiezza $M_A = \dfrac{8}{5} = 1.6$, infatti il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto critico -1.

2) Si può progettare la rete anticipatrice per cancellazione polo-zero fissando $\tau = 0.5\sec$.

$$C(s) = K_c \frac{1+0.5s}{1+\alpha 0.5s} = K_c \frac{2+s}{2+\alpha s}$$

Posto

$$L(s) = C(s)F(s) = K_c \frac{2+s}{2+\alpha s} \cdot \frac{10}{s(s+2)^2} = K_c \frac{10}{s(2+\alpha s)(s+2)}$$

Dalla specifica sulla costante di velocità si ricava:

$$k_v = \lim_{s \to 0} sL(s) = \frac{10k_c}{4}$$

$$k_v = 10 \quad \Rightarrow \quad k_c = 4$$

e quindi

$$L(s) = \frac{40}{s(s+2)(\alpha s+2)}$$

Qualitativamente il diagramma polare di $L(j\omega)$ è dello stesso tipo di quello tracciato per $F(j\omega)$. La stabilità è assicurata con $M_A = 5$ se l'intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo avviene in $-1/5$.

Per fare in modo che ciò avvenga bisogna imporre che l'equazione $L(s)+\frac{1}{5}=0$ abbia radici puramente immaginarie.

$$\frac{40}{s(s+2)(\alpha s+2)} + \frac{1}{5} = 0$$

$$\alpha s^2 + (2+2\alpha)s^2 + 4s + 200 = 0$$

3	α	4
2	$1+\alpha$	100
1	$4(1+\alpha)-100\alpha$	0
0		

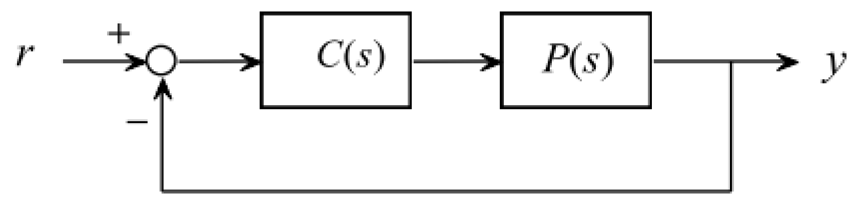
Bisogna imporre $4(1+\alpha)-100\alpha=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha=\frac{4}{96}\simeq 0.0417$ (soluzione ammissibile in quanto $\alpha\in(0,1)$).

In definitiva la rete correttrice cercata è

$$C(s)=4\frac{1+0.5s}{1+\frac{4}{96}\cdot 0.5s}$$

Il problema poteva essere risolto anche utilizzando le formule di inversione …….

7. [punti 5] Sia dato il sistema in retroazione di figura



dove $P(s)=\frac{s-1}{s^2+2s+2}$. Progettare un controllore $C(s)$ di ordine minimo affinché in risposta ad un gradino del segnale di comando si abbia: 1) l'errore a regime nullo; 2) tempo di assestamento $T_a\simeq 9$ secondi ; 3) sovraelongazione $S\simeq 0$%.

5. Tentativamente si cerca con un controllore di ordine 1 di soddisfare tutte le specifiche imposte:

$C(s)=\frac{b_1 s+b_0}{s}$, $b_0, b_1 \in \mathbb{R}$ parametri di progetto

$1+C(s)P(s)=0 \iff s^3+(b_1+2)s^2+(b_0-b_1+2)s-b_0=0$

$$\boxed{P_c(s) \triangleq s^3+(b_1+2)s^2+(b_0-b_1+2)s-b_0}$$

$T_a=\frac{3}{\sigma_s}$, da $T_a=9$ sec. $\Rightarrow \sigma_s=\frac{1}{3}$

Si sceglie un polinomio caratteristico desiderato che soddisfi le specifiche 2) e 3):

$P_d(s)=(s+\frac{1}{3})(s+\alpha)(s+\beta)$ con $\alpha,\beta>\frac{1}{3}$

$$\boxed{P_d(s)=s^3+(\tfrac{1}{3}+\alpha+\beta)s^2+(\alpha\beta+\tfrac{1}{3}(\alpha+\beta))s+\tfrac{1}{3}\alpha\beta}$$

Si impone $P_c(s) \equiv P_d(s)$

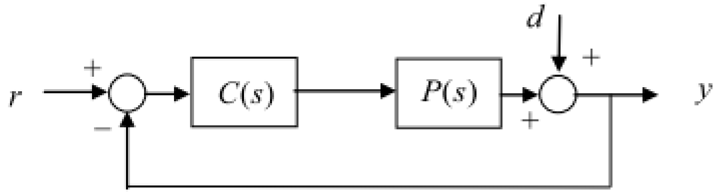
$$\begin{cases} b_1 + 2 = \frac{1}{3} + \alpha + \beta \\ b_0 - b_1 + 2 = \alpha\beta + \frac{1}{3}(\alpha+\beta) \\ -b_0 = \frac{1}{3}\alpha\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{11-4\beta}{4\beta+4}$$

Scegliamo $\beta = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2} > \frac{1}{3}$. Quindi $\begin{cases} b_0 = -\frac{1}{4} \\ b_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$

$$C(s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{s - \frac{3}{4}}{s}$$

È un controllore di ordine minimo che soddisfa le specifiche richieste.

7. [punti 5] Sia dato il seguente sistema



dove $P(s) = \dfrac{9}{s+5}$.

Determinare un controllore proprio di ordine minimo $C(s)$ affinché le seguenti specifiche siano soddisfatte:

1. reiezione infinita asintotica al disturbo composito $d(t) = 5 + 11\cdot\cos(3t+2)$;
2. costante di velocità $K_v = 4$;
3. sistema retroazionato asintoticamente stabile con tre poli dominanti in $-2, -2 \pm j$.

Soluzione

$$C(s) = \frac{\gamma_3 s^3 + \gamma_2 s^2 + \gamma_1 s + \gamma_0}{s(s^2+9)}$$

$$L(s) = CP = \frac{9\cdot(\gamma_3 s^3 + \gamma_2 s^2 + \gamma_1 s + \gamma_0)}{s(s^2+9)(s+5)}$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\,L(s) = \frac{\cancel{9}\cdot\gamma_0}{\cancel{9}\cdot 5} = \frac{\gamma_0}{5} = 4$$

$$\gamma_0 = 20 \quad \text{ovvero} \quad \frac{9\gamma_0}{9\cdot 5} = 4$$

$1 + L(s) = 0$

$s(s^2+9)\cdot(s+5) + 9(\gamma_3 s^3 + \gamma_2 s^2 + \gamma_1 s + \gamma_0)$

$((s+2)^2+1)(s+2)(s+c)$

$9\gamma_3 + 5 = 6 + c \qquad 9\gamma_3 + 5 = 24 \qquad 9\gamma_3 = 19 \qquad \gamma_3 = \frac{19}{9}$

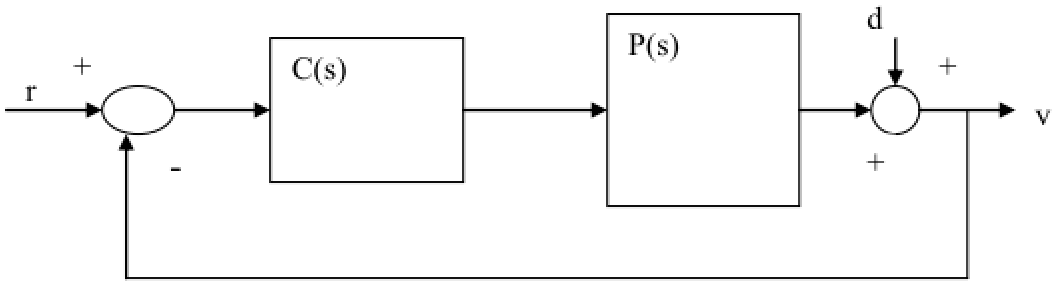
$9\gamma_2 + 9 = 13 + 6c \qquad 9\gamma_2 + 9 = 13 + 108 \qquad 9\gamma_2 = 112 \qquad \gamma_2 = \frac{112}{9}$

$9\gamma_1 + 45 = 10 + 13c \qquad 9\gamma_1 + 45 = 10 + 234 \qquad 9\gamma_1 = 199 \qquad \gamma_1 = \frac{199}{9}$

$180 = 10c \Rightarrow c = 18 \qquad c >> 2$ ok!

$$C(s) = \frac{2{,}11 s^3 + 12{,}4 s^2 + 13{,}2 s + 20}{s(s^2+9)}$$

7. **[punti 5]** Sia dato il seguente sistema retroazionato



dove $P(s) = \dfrac{10}{s+5}$. Progettare un controllore C(s) proprio affinché:

a) Il sistema sull'uscita controllata y abbia reiezione infinita (asintoticamente) del disturbo armonico $d(t) = 3{,}5 \text{ sen}(2t)$.

b) Il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile con poli dominanti $-10 \pm j2$.

$$T_{dy}(s) = \frac{1}{1 + C(s)P(s)}$$

$$T_{dy}(j\omega) = \frac{1}{1 + C(j\omega)P(j\omega)}$$

$$T_{dy}(j2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C(j2) = +\infty$$

$\Rightarrow \quad C(s) := \dfrac{y(s)}{(s^2+4)x(s)}$ controllore di ordine l biproprio

$$y(s) := y_0 s^l + y_1 s^{l-1} + \cdots + y_l$$

$$x(s) := s^{l-2} + x_1 s^{l-3} + \cdots + x_{l-2}$$

$$P(s) := \frac{b(s)}{a(s)}$$

equazione caratteristica:

$$1 + C(s)P(s) = 0$$

$$x(s)(s^2+4)a(s) + y(s)b(s) = 0$$

Quindi il polinomio caratteristico associato alla struttura scelta per il controllore è un polinomio monico di grado $l+1$:

$$(s^2+4)(s+5)x(s) + 10y(s)$$

Sia d(s) il polinomio caratteristico desiderato (polinomio monico di grado $l+1$). Imponendo che d(s) coincida col pol. caratteristico sopra si ottengono $l+1$ equazioni (lineari) con $l+1+(l-2) = 2l-1$ incognite . Richiedendo che $l+1 = 2l-1$ si ottiene $l = 2$.

Scelta di d(s):

$$d(s) := [(s+10)^2 + 4](s+30) = s^3 + 50s^2 + 704s + 3120$$

Polinomio caratteristico associato al controllore:

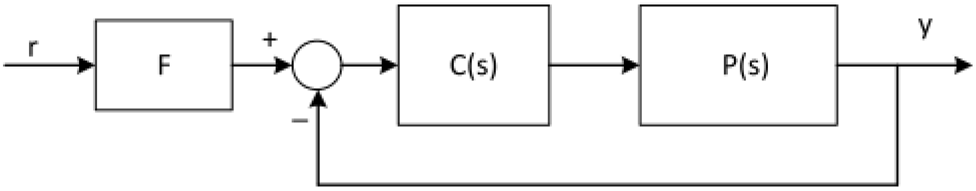
$$s^3 + (5+10y_0)s^2 + (4+10y_1)s + 20 + 10y_2$$

Quindi

$$\begin{cases} 5 + 10y_0 = 50 & \Rightarrow y_0 = 4,5 \\ 4 + 10y_1 = 704 & \Rightarrow y_1 = 70 \\ 20 + 10y_2 = 3120 & \Rightarrow y_2 = 310 \end{cases}$$

In conclusione: $C(s) = \dfrac{4,5s^2 + 70s + 310}{s^2+4}$

5. [punti 6] Sia dato il sistema di controllo schematizzato in figura



dove $P(s) = \dfrac{8}{(s+2)^4}$. Determinare un controllore con struttura di rete ritardatrice $C(s) = K\dfrac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}$ ed il blocco algebrico $F \in \mathbb{R}$ affinché le seguenti specifiche siano soddisfatte:

a) $K_p = 5$ (costante di posizione del sistema retroazionato);

b) $M_F = 35°$ (margine di fase del sistema retroazionato);

c) $e_r = 0$ (errore a regime in risposta ad un gradino del riferimento r).

$$L(s) \triangleq C(s)P(s) = K\frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}\cdot\frac{8}{(s+2)^4}$$

$$L(0) = K\frac{8}{16} = \frac{K}{2}\,; \qquad K_p = L(0)$$

La specifica è $K_p = 5 \Rightarrow \dfrac{K}{2} = 5 \Rightarrow \boxed{K = 10}$

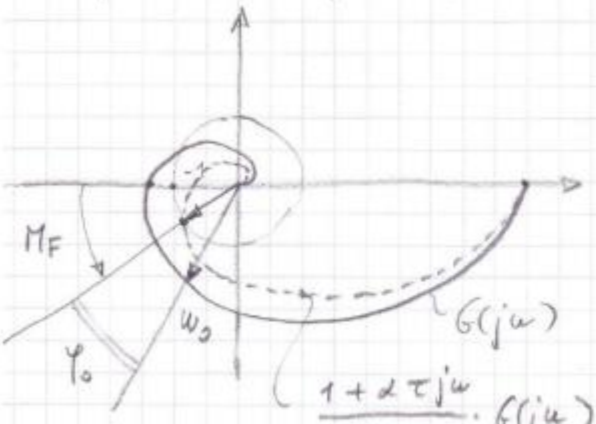
$$L(s) = \frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}\cdot\frac{80}{(s+2)^4} \triangleq \frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}\cdot G(s)$$

$$G(s) = \frac{80}{(s+2)^4}\,, \quad G(j\omega) = \frac{80}{(j\omega+2)^4}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{80}{(\omega^2+4)^2}\,, \quad \arg G(j\omega) = -4\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{2}$$

$$\arg G(j\omega) = -\pi\,, \quad -4\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{2} = -\pi\,, \quad \omega_p = 2 \text{ rad/sec}$$

$|G(j\omega_p)| = 1,25 \,, \quad G(j\omega_p) = -1,25$



Scelgo $\omega_0 = 1$ rad/sec

$|G(j\omega_0)| = 3,2 \quad \arg G(j\omega_0) = -1,8546$

$\varphi_0 = \pi + \arg G(j\omega_0) - \frac{35}{180}\cdot\pi = 0,6761$

$\cos\varphi_0 > \dfrac{1}{|G(j\omega_0)|} \qquad 0,78 > 0,3125$ ok!

$M \triangleq 3,2 \quad \varphi = 0,6761$

$\tau = \dfrac{M - \cos\varphi}{\omega_0 \operatorname{sen}\varphi} = 3,867$ sec

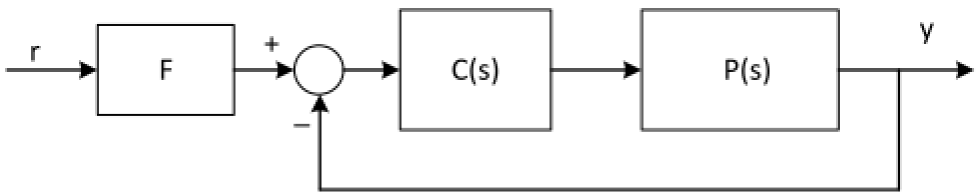
$\alpha = \dfrac{M\cos\varphi - 1}{M(M - \cos\varphi)} = 0,1932$

Determinazione di F:

$F \cdot \dfrac{L(0)}{1+L(0)} = 1$

$F \cdot \dfrac{5}{1+5} = 1 \,, \qquad F = \dfrac{6}{5} = 1,2$

7. [punti 5] Sia dato il sistema di controllo schematizzato in figura



dove $P(s) = \dfrac{8}{(s+2)^4}$. Determinare un controllore con struttura di rete anticipatrice $C(s) = K\dfrac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}$ ed il blocco algebrico $F \in \mathbb{R}$ affinché le seguenti specifiche siano soddisfatte:

a) $K_p = 3{,}5$ (costante di posizione del sistema retroazionato);

b) $M_F = 30°$ (margine di fase del sistema retroazionato);

c) $e_r = 0$ (errore a regime in risposta ad un gradino del riferimento r).

$$L(s) = C(s)\,P(s) = k\,\frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}\cdot\frac{8}{(s+2)^4}$$

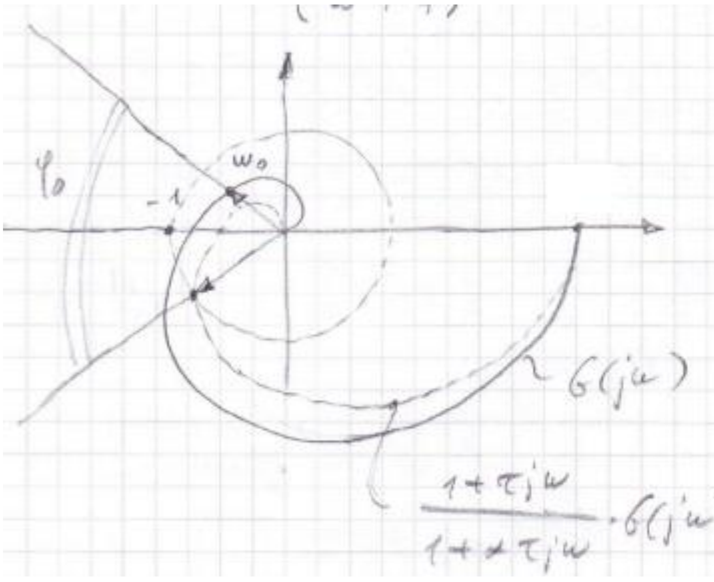
$$L(0) = k\cdot\frac{\cancel{8}^{\,1}}{\cancel{16}_{\,2}} = \frac{k}{2} \qquad K_p = L(0)$$

$$3{,}5 = \frac{k}{2} \Rightarrow k = 7$$

$$L(s) = \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}\cdot\frac{56}{(s+2)^4} \triangleq \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}\cdot G(s)$$

$$G(s) = \frac{56}{(s+2)^4} \qquad G(j\omega) = \frac{56}{(j\omega+2)^4}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{56}{(\omega^2+4)^2} \qquad \arg G(j\omega) = -4\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{2}$$



$\arg G(j\omega) = -\pi$

$-4 \operatorname{arctg} \frac{\omega}{2} = -\pi$

$\omega_p = 2$ rad/sec

$|G(j\omega_p)| = 0,8750$

$G(j\omega_p) = -0.8750$

Scelgo $\omega_0 = 2,5$ rad/sec

$|G(j\omega_0)| = 0,5330 \qquad \varphi_0 = -\arg G(j\omega_0) - \pi + M_F =$

$= 4 \operatorname{arctg}\frac{2.5}{2} - \pi + \frac{30}{180}\cdot\pi = 0,9662$ rad/sec

$\cos\varphi_0 > |G(j\omega_0)| \qquad 0,5684 > 0,5330$ ok!

$M \triangleq \frac{1}{|G(j\omega_0)|} = 1,8761 \qquad \varphi \triangleq \varphi_0$

$\tau = \frac{M - \cos\varphi}{\omega_0 \sin\varphi} = \frac{1,8761 - 0,5684}{2,5 \cdot 0,8227} = 0,636$ sec

ok

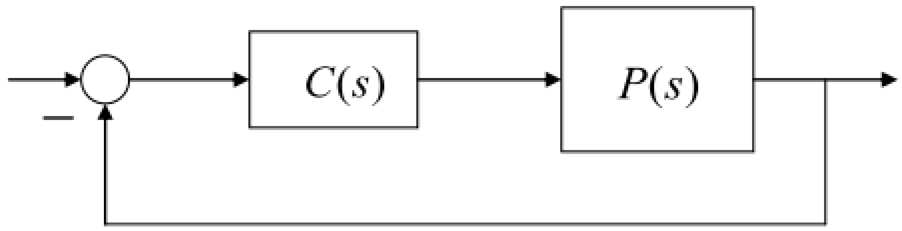
$\alpha = \frac{M\cos\varphi - 1}{M(M - \cos\varphi)} = \frac{1,8761 \cdot 0,5684 - 1}{1,8761 \cdot (1,8761 - 0,5684)} = 0,0271$

Determinazione di F:

$F \cdot \frac{L(0)}{1 + L(0)} = 1 \qquad F \cdot \frac{3,5}{1 + 3,5} = 1$

$F = \frac{1 + 3,5}{3,5} = \frac{4,5}{3,5} = 1,2857$

7. [punti 4] Sia dato il sistema retroazionato di figura



dove $P(s) = \dfrac{1}{s(s+2)(s+4)}$ e $C(s) = K \in \mathbb{R}$ è un controllore proporzionale.

1. Determinare i valori di K per i quali è assicurata la stabilità asintotica del sistema retroazionato.
2. Determinare i valori di K per i quali il sistema retroazionato ammette $G_S \geq 0,2\ \mathrm{s}^{-1}$ ($G_S \equiv$ grado di stabilità nel piano complesso).

7. L'equazione caratteristica del sistema in retroazione è

$$s^3 + 6s^2 + 8s + k = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è:

3	1	8	0
2	6	k	0
1	48-k	0	
0	k		

Per la stabilità asintotica debbono valere le seguenti disequazioni:

$48 - k > 0$

$k > 0$

Il campo corrispondente alla stabilità asintotica asintotica del sistema è $k \in (0,\ 48)$.

1. Ricordando che il grado di stabilità (nel piano complesso) *Gs* di un sistema asintoticamente stabile è definito come

$G_s = -\max\{\mathrm{Re}\, p_1, \mathrm{Re}\, p_2, ..., \mathrm{Re}\, p_n\}$, i=1..n, dove i *pi* sono i poli del sistema

e rappresenta la distanza minima dei poli del sistema dall'asse immaginario, il problema può essere risolto effettuando la traslazione nel piano complesso $s = z - 0.2$.

Ponendo $s = z - 0.2$ si ottiene:

$$z^3 + 5.4z^2 + 5.72z - 1.368 + k = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è:

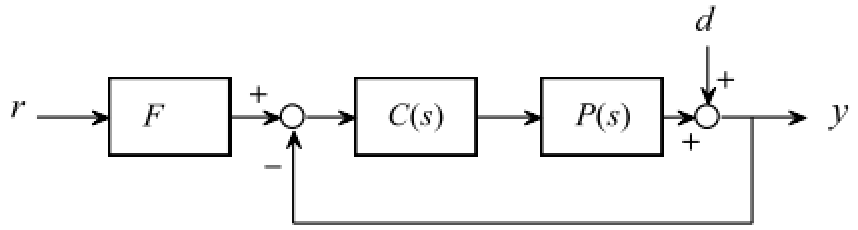
3	1	5.72	0
2	5.4	-1.368+k	0
1	30.888-(k-1.368)	0	
0	-1.368+k		

Per cui i valori di k per cui il sistema retroazionato ammette $G_s \geq 0.2 s^{-1}$ sono quelli soddisfacenti il sistema di disequazioni:

$$-1.368 + k > 0$$
$$30.888 - (k - 1.368) > 0$$

cioè $k \in [1.368,\ 32.256]$.

7. [punti 5] Sia dato lo schema di sistema di controllo di figura



dove $P(s) = \dfrac{1}{s+4}$. Determinare un controllore $C(s)$ di ordine 4 (quattro) ed il blocco algebrico $F \in \mathbb{R}$ affinché il sistema di controllo soddisfi le seguenti specifiche:

1. reiezione infinita asintotica al disturbo $d(t) = 7\sin(2t) + 9\sin(t+5)$;
2. sistema retroazionato con poli dislocati in $-1, -2, -3, -5, -6$;
3. in condizioni nominali l'errore a regime in risposta ad un gradino del riferimento sia nullo.

Il controllore (di ordine quattro) è del tipo

$$C(s) = \frac{b_4\, s^4 + b_3\, s^3 + b_2\, s^2 + b_1\, s + b_0}{(s^2+4)\,(s^2+1)}$$

in cui i quattro poli coniugati in $\pm j2$ e $\pm j1$ servono a rimuovere il disturbo $d(t)$.

Il guadagno ad anello è $L(s) = C(s)\,P(s)$ e dall'equazione $1 + L(s) = 0$ si ricava il polinomio caratteristico

$$\begin{aligned} p_c(s) &= (s^2+1)\,(s^2+4)\,(s+4) + b_4\, s^4 + b_3\, s^3 + b_2\, s^2 + b_1\, s + b_0 = \\ &= s^5 + (4+b_4)\, s^4 + (5+b_3)\, s^3 + (20+b_2)\, s^2 + (4+b_1)\, s + 16 + b_0 \end{aligned}$$

Dalle specifiche si ricava il polinomio desiderato

$$\begin{aligned} p_d(s) &= (s+1)(s+2)(s+3)(s+5)(s+6) = \\ &= s^5 + 17\, s^4 + 107\, s^3 + 307\, s^2 + 396\, s + 180 \end{aligned}$$

Impostando l'identità polinomiale $p_c(s) = p_d(s)$ si determina il seguente sistema

$$\begin{cases} b_4 + 4 = 17 \\ b_3 + 5 = 107 \\ b_2 + 20 = 307 \\ b_1 + 4 = 396 \\ b_0 + 16 = 180 \end{cases}$$

risolvendo il quale si ricava

$$b_4 = 13 \quad b_3 = 102 \quad b_2 = 287 \quad b_1 = 392 \quad b_0 = 164$$

Il controllore è quindi

$$C(s) = \frac{13\, s^4 + 102\, s^3 + 287\, s^2 + 392\, s + 164}{(s^2+4)\,(s^2+1)}$$

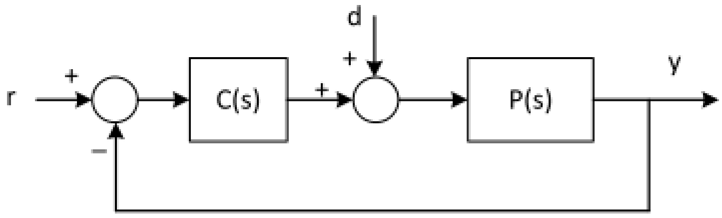
Perchè l'errore a regime in condizioni nominali sia nullo, si deve avere $T_{ry}(0) = 1$ da cui

$$F\, \frac{C(0)P(0)}{1 + C(0)\, P(0)} = F\, \frac{\frac{164}{4}\,\frac{1}{4}}{1 + \frac{164}{4}\,\frac{1}{4}} = F\, \frac{41}{45} = 1$$

Si impone quindi

$$F = \frac{45}{41} = 1.0976$$

7. [punti 5] Si consideri il sistema di controllo di figura



dove $P(s)=\dfrac{10}{(s+2)^2}$. Progettare un controllore $C(s)$ di ordine minimo affinché si abbia

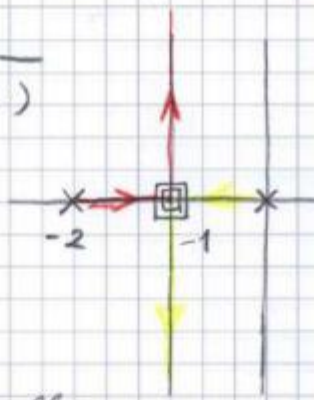
1) reiezione asintotica infinita di un disturbo costante all'ingresso dell'impianto controllato;
2) sovraelongazione $S=0$ e tempo di assestamento $T_a \simeq 3$ sec. in risposta ad un gradino del riferimento (S e T_a da valutarsi in assenza di disturbo all'ingresso dell'impianto).

Con il controllore così progettato si determinino:
a) il margine di ampiezza M_A e quello di fase M_F del sistema retroazionato;
b) l'errore a regime e_∞ in risposta ad un gradino del riferimento.

$C(s) = K\dfrac{s+\alpha}{s}$; α determinato con cancellazione polo-zero

$\alpha = 2 \Rightarrow L(s) = C(s)P(s) = K\dfrac{10}{s(s+2)}$

eq. caratteristica : $1 + K\dfrac{10}{s(s+2)} = 0$



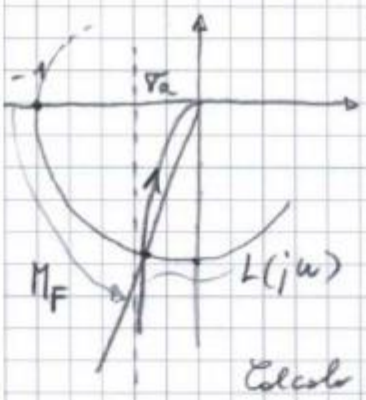
$T_a = \dfrac{3}{\sigma_s}$, $T_a = 3 \Leftrightarrow \sigma_s = 1$ rad/sec.

$\sigma_s = 1$ quando il valore di K corrisponde alla radice doppia -1 :

$1 + K\dfrac{10}{(-1)\cdot(1)} = 0 \Rightarrow K = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$

$$\boxed{C(s) = 0{,}1 \cdot \frac{s+2}{s}}$$

a) $L(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega(j\omega+2)} = \dfrac{0,5}{j\omega(1+0,5\,j\omega)}$



$M_A = +\infty$

$\sigma_a = 0,5\,(-0,5) = -0,25$

Calcolo approssimato di M_F : $0,25 = 1 \cdot \cos M_F$

$M_F = \arccos 0,25 = 75^\circ\!,5$

Calcolo esatto di M_F : $|L(j\omega)| = 1 \Rightarrow \omega = \sqrt{-2+\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \omega = 0,4859$ rad/sec è la pulsazione critica

$M_F = 180^\circ + \arg L(j\,0,4859) = 180^\circ - 90^\circ - \operatorname{arctg} \dfrac{0,4859}{2}$
$= 90^\circ - 13^\circ\!,66 = 76^\circ\!,34$

b) $e_\infty = 0$ perché il sistema è di tipo 1.

Un approccio alternativo, più generale, per determinare il controllore è il seguente:

$C(s) = \dfrac{b_1 s + b_0}{s}$ (imposizione specifica 1)

$T_a = 3$ sec. $\Rightarrow \sigma_s = 1$ rad./sec. $\left.\begin{matrix}\\ \\ \end{matrix}\right\}$ imposizione specifica 2
$S = 0$

Quindi il polinomio caratteristico desiderato può essere descritto come

$P_d(s) = (s+1)\,(s^2 + \alpha s + \beta)$

radici $s_{1,2}$ del polinomio $s^2 + \alpha s + \beta$: $\operatorname{Re} s_{1,2} < -1$

Sia $z = s+1$, $s = z-1$, $\operatorname{Re} s < -1 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z < 0$

$(z-1)^2 + \alpha(z-1) + \beta = 0$

$z^2 + (\alpha - 2)\,z + \beta - \alpha + 1 = 0$

Quindi $\begin{cases} \alpha - 2 > 0 \\ \beta - \alpha + 1 > 0 \end{cases}$

$$P_d(s) = s^3 + (\alpha+1)s^2 + (\alpha+\beta)s + \beta$$

$$1 + \frac{b_1 s + b_0}{s} \cdot \frac{10}{(s+2)^2} = 0$$

$$s(s+2)^2 + 10 b_1 s + 10 b_0 = 0$$

$$P_c(s) = s^3 + 4s^2 + (4 + 10 b_1)s + 10 b_0$$

Si impone $P_d(s) \equiv P_c(s)$

$$\begin{cases} \alpha + 1 = 4 & \Rightarrow \alpha = 3 \quad \text{ok!} \quad \beta > 2 \\ \alpha + \beta = 4 + 10 b_1 & \beta = 1 + 10 b_1 \\ \beta = 10 b_0 & \beta = 10 b_0 \end{cases}$$

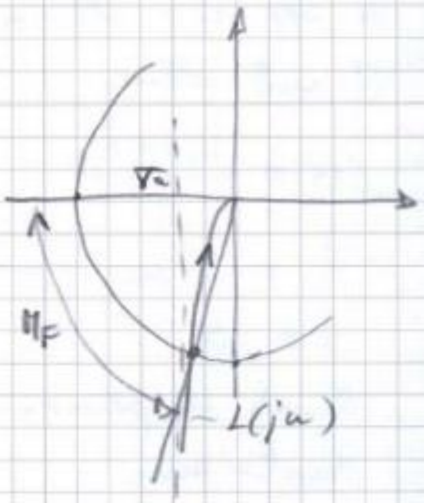
I poli non dominanti sono $-1.5 \pm \frac{1}{2}\sqrt{9 - 4\beta}$

Scegliamo β : $9 - 4\beta = 0$, $\beta = \frac{9}{4}$ ($\beta > 2$ ok!)

$b_0 = \frac{9}{40} = 0.225 \qquad b_1 = \frac{5}{40} = 0.125$

$$\boxed{C(s) = \frac{0.125 \cdot s + 0.225}{s}}$$

a) $L(s) = C(s)P(s) = \frac{9}{16} \cdot \frac{1 + \frac{5}{9}s}{s\left(1 + \frac{1}{2}s\right)^2}$



$$L(j\omega) = \frac{9}{16} \cdot \frac{1 + \frac{5}{9} j\omega}{j\omega\left(1 + \frac{1}{2} j\omega\right)^2}$$

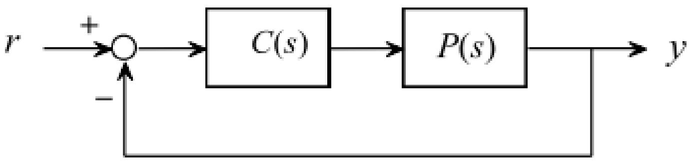
$$\sigma_a = \frac{9}{16}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \left(-\frac{5}{9}\right)\right) = -\frac{1}{4} = -0.25$$

calcolo app. di M_F : $0,25 = 1 \cdot \cos M_F$

$$M_F \simeq \arccos 0.25 = 75^\circ,5$$

$$M_F = +\infty$$

7. [punti 4,5] Sia dato il sistema in retroazione di figura dove $P(s) = \frac{1}{s^3}$.



1. Progettare un controllore $C(s)$ di ordine due affinché i poli del sistema retroazionato siano posti in $-1, -2, -4, -5, -6$.

2. Con il controllore progettato al punto **1,** si applichi un gradino $r(t) = 3 \cdot 1(t)$ al sistema retroazionato e si determini una stima del tempo di assestamento T_a e l'errore di regolazione a regime e_r. $\left[e_r := \lim_{t \to +\infty} r(t) - y(t) \right]$

$$P(s) = \frac{1}{s^3}$$

$$C(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$1 + CP = 0 \qquad 1 + \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 (s^2 + a_1 s + a_0)} = 0$$

$$s^3 (s^2 + a_1 s + a_0) + b_2 s^2 + b_1 s + b_0 = 0$$

$$s^5 + a_1 s^4 + a_0 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0 = 0$$

$$P_c(s) \triangleq s^5 + a_1 s^4 + a_0 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0$$

poli ut. desiderati : $-1, -2, -4, -5 - 6$

$$
\begin{aligned}
P_d(s) &= (s+1)(s+2)(s+4)(s+5)(s+6) \\
&= (s^2+3s+2)(s^2+9s+20)(s+6) \\
&= (s^4+9s^3+20s^2+3s^3+27s^2+60s \\
&\quad +2s^2+18s+40)(s+6) = \\
&= (s^4+12s^3+49s^2+78s+40)(s+6) = \\
&= s^5+12s^4+49s^3+78s^2+40s+ \\
&\quad +6s^4+72s^3+294s^2+468s+240 = \\
&= s^5+18s^4+121s^3+372s^2+508s+240
\end{aligned}
$$

ok!

da $P_d(s) \equiv P_c(s) \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 18, \quad a_0 = 121 \\ b_2 = 372, \; b_1 = 508, \; b_0 = 240 \end{cases}$

$$
C(s) = \frac{372s^2+508s+240}{s^2+18s+121}
$$

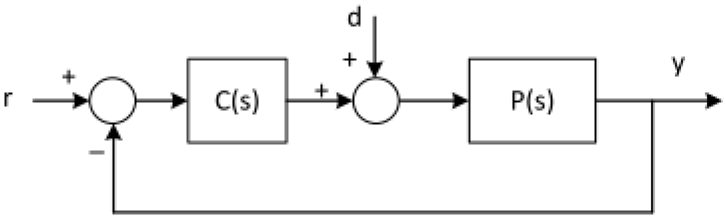
OK!

1. Si applichi un gradino $r(t) = 3 \cdot 1(t)$ al sistema retroazionato e si determini l'errore a regime $\left[e_r := \lim_{t \to \infty} (r(t) - y(t))\right]$ ed ~~il tem~~ una stima del tempo di assestamento

$e_r = 0$ perché è un sistema di tipo 3

$$T_a \simeq \frac{3}{\sigma_s} = \frac{3}{1} \simeq 3 \text{ sec.}$$

7. [punti 5] Sia dato il sistema retroazionato di figura



dove $P(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$. Progettare un controllore $C(s)$ di ordine minimo che soddisfi le seguenti specifiche:

1. errore a regime nullo in risposta ad un gradino del segnale di riferimento $r(t) = r_0 1(t)$;
2. errore a regime nullo in risposta ad un disturbo costante all'ingresso dell'impianto controllato $d(t) = d_0 1(t)$;
3. poli dominanti del sistema retroazionato dislocati in $-1 \pm j$.

Per soddisfare la specifica 1 basterebbe un controllore proporzionale (di ordine zero) in quanto nell'impianto è già presente un polo nell'origine. La specifica 2 richiede la presenza di un polo nell'origine per il controllore $C(s)$.

1° tentativo

$C(s) = K \dfrac{s+b}{s}$, $K, b \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $L(s) := CP = K \dfrac{s+b}{s^2(s+1)}$

eq. caratteristica $1 + L(s) = 0$, $1 + K \dfrac{s+b}{s^2(s+1)} = 0$

$s^2(s+1) + K(s+b) = 0$ $\qquad s^3 + s^2 + Ks + Kb = 0$

$P_c(s) \triangleq s^3 + s^2 + Ks + Kb$

$P_d(s) = [(s+1)^2 + 1](s+\alpha) = s^3 + (2+\alpha)s^2 + (2+2\alpha)s + 2\alpha$

Si impone $P_c(s) \equiv P_d(s)$

$$\begin{cases} 1 = 2+\alpha \\ K = 2+2\alpha \\ Kb = 2\alpha \end{cases} \implies \alpha = -1$$ il sistema retroazionato risulta <u>instabile</u>!

Conclusione: un controllore di ordine 1 non può soddisfare le specifiche richieste.

<u>2° tentativo</u>

$$C(s) = K\,\frac{(s+1)(s+b)}{s(s+a)}$$ (per semplificare il progetto si è imposta una cancellazione polo-zero fra C e P)

eq. caratteristica $1 + K\dfrac{s+b}{s^2(s+a)} = 0$, $s^3 + a s^2 + Ks + Kb = 0$

$P_c(s) \triangleq s^3 + a s^2 + Ks + Kb$, $P_d(s)$ come sopra e si impone $P_c(s) \equiv P_d(s)$

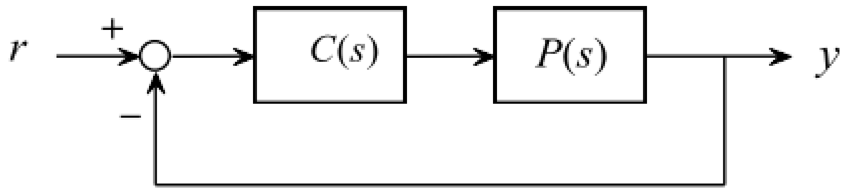
$$\begin{cases} a = 2+\alpha \\ K = 2+2\alpha \\ Kb = 2\alpha \end{cases}$$

Scegliamo $\alpha = 5$ affinché $-1 \pm j$ siano i poli dominanti.

$\implies a = 7$, $K = 12$, $b = \frac{5}{6} = 0{,}8\bar{3}$

$$\boxed{C(s) = 12 \cdot \frac{(s+1)(s+0{,}8\bar{3})}{s(s+7)}}$$

7. **[punti 5]** Sia dato il sistema in retroazione di figura



dove $P(s)=\dfrac{10}{(s+1)^3}$. Progettare un controllore con struttura di rete ritardatrice $C(s)=K\cdot\dfrac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}$ affinché si abbia: 1) costante di posizione $K_p=20$; 2) stabilità con margine di fase $M_F=40^\circ$.

$$K_p=\lim_{s\to 0} C(s)P(s)=\lim_{s\to 0} K\frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}\cdot\frac{10}{(s+1)^3}=10K$$

$$K_p=20 \Rightarrow \boxed{K=2}$$

Sia $L(s)\triangleq\dfrac{20}{(s+1)^3}$ (guadagno di anello non compensato)

e $L_c(s)=\dfrac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}\cdot L(s)$ (g. di anello compensato)

È richiesto $M_F=40^\circ=0.6981317$ rad

$$L(j\omega)=\frac{20}{(j\omega+1)^3},\quad |L(j\omega)|=\frac{20}{(1+\omega^2)^{3/2}},\quad \arg L(j\omega)=-3\,\mathrm{arctg}\,\omega$$

Scegliamo per tentativi una pulsazione ω_0 affinché

$$\varphi_0\triangleq\arg L(j\omega_0)+\pi-M_F>0 \quad e \quad \cos\varphi_0>\frac{1}{|L(j\omega_0)|}.$$

Sia $\omega_0=1$ rad/sec

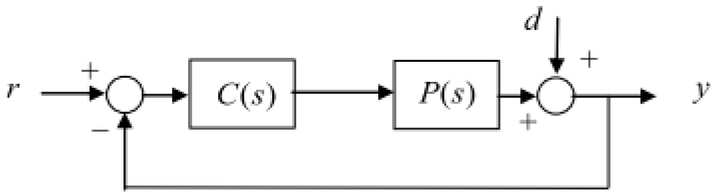
$\varphi_0 = 0.0873$ rad $(\sim 5^\circ)$, $|L(j\omega_0)| = 7.0711$

$\cos\varphi_0 = 0.9962 > \dfrac{1}{|L(j\omega_0)|} = 0.1414$ ok!

$\varphi := \varphi_0$, $M := |L(j\omega_0)|$

$$\tau = \frac{M - \cos\varphi}{\omega_0 \sin\varphi} = \boxed{69.67 \text{ sec}}, \quad \alpha = \frac{M\cos\varphi - 1}{M(M - \cos\varphi)} = \boxed{0.1407}$$

7. [punti 4.5] Sia dato il seguente sistema



con $P(s) = \dfrac{1}{1+s}$. Determinare un controllore proprio di ordine minimo $C(s)$ che soddisfi alle seguenti specifiche: 1) reiezione infinita asintotica al disturbo sinusoidale $d(t) = 4\sin 2t$; 2) sistema retroazionato asintoticamente stabile con poli dominanti in $-1 \pm j$; 3) costante di posizione $K_p = 4$.

Il controllore è del tipo

$$C(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{(s^2+4)}$$

in cui la coppia di poli immaginari coniugati al denominatore serve per rimuovere il disturbo. Il guadagno ad anello aperto è

$$P(s)C(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{(s^2+4)(s+1)}$$

dalla specifica 3) si ha che $\dfrac{b_0}{4} = 4$, da cui $b_0 = 16$, dalla specifica 2) si ha la seguente equazione

$$(s^2+4)(s+1) + b_2 s^2 + b_1 s + b_0 = (s^2+2s+2)(s+c)$$

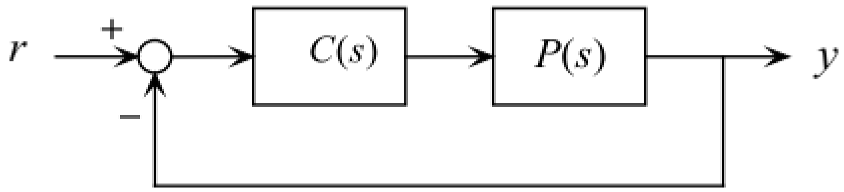
da cui otteniamo

$$b_2 = 11, b_1 = 18, b_0 = 16, c = 10$$

il controllore è quindi

$C(s) = \dfrac{11s^2 + 18s + 16}{s^2+4}$.

7. **[punti 4.5]** Sia dato il sistema in retroazione di figura



dove $P(s) = \dfrac{10}{(s-1)^2}$. Progettare un controllore di struttura $C(s) = \dfrac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s(s+20)}$ affinché il sistema retroazionato sia stabile asintoticamente con poli dominanti in $-1 \pm j\dfrac{1}{2}$ e abbia costante di velocità $K_v = 4$. Per tale controllore determinare inoltre tutti i poli del sistema retroazionato.

guadagno di anello $L(s) := C(s)P(s)$

$$K_v = \lim_{s \to 0} s\,L(s) = \frac{b_0}{20} \cdot 10 = \frac{b_0}{2}$$

Da $K_v = 4$ si ottiene $\boxed{b_0 = 8}$.

Eq. caratteristica associata al controllore:

$$1 + \frac{b_2 s^2 + b_1 s + 8}{s(s+20)} \cdot \frac{10}{(s-1)^2} = 0$$

$$s(s+20)(s-1)^2 + 10 b_2 s^2 + 10 b_1 s + 80 = 0$$

$$P_c(s) := s^4 + 18 s^3 + (10 b_2 - 39) s^2 + (10 b_1 + 20) s + 80$$

Il polinomio caratteristico desiderato è

$$P_d(s) = \left[(s+1)^2 + \frac{1}{4}\right](s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0)$$
$$= s^4 + (\alpha_1 + 2) s^3 + \left(\alpha_0 + 2\alpha_1 + \frac{5}{4}\right) s^2 + \left(2\alpha_0 + \frac{5}{4}\alpha_1\right) s + \frac{5}{4}\alpha_0$$

Imponendo $P_c(s) \equiv P_d(s)$ si ottiene

$$\begin{cases} 18 = \alpha_1 + 2 \\ 10 b_2 - 39 = \alpha_0 + 2\alpha_1 + \frac{5}{4} \\ 10 b_1 + 20 = 2\alpha_0 + \frac{5}{4}\alpha_1 \\ 80 = \frac{5}{4}\alpha_0 \end{cases}$$

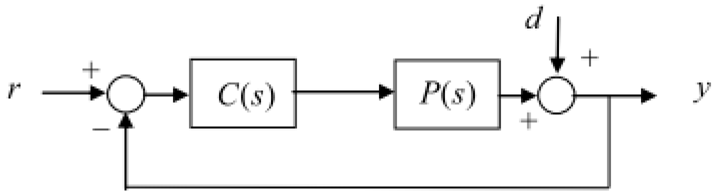
$\alpha_1 = 16$, $\alpha_0 = 64$

$\boxed{b_1 = 12.8}$ $\boxed{b_2 = \frac{109}{8} = 13.625}$

$$C(s) = \frac{13.625\, s^2 + 12.8\, s + 8}{s(s+20)}$$

Le radici di $s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$ sono $s_{1,2} = -8, -8$; quindi i poli $-1 \pm j\frac{1}{2}$ sono effettivamente dominanti. I poli del sistema retroazionato sono evidentemente $-1 \pm j\frac{1}{2}, -8, -8$.

5. [punti 6] Sia dato il seguente sistema



dove $P(s) = \dfrac{9}{s+4}$.

Determinare un controllore proprio di ordine minimo $C(s)$ affinché le seguenti specifiche siano soddisfatte:

1. reiezione infinita asintotica al disturbo composito $d(t) = 7 + 10 \cdot \cos(3t+1)$;
2. costante di velocità $K_v = 4$;
3. sistema retroazionato asintoticamente stabile con tre poli dominanti in $-2, -2 \pm j$.

$$C(s) = \frac{\gamma_3 s^3 + \gamma_2 s^2 + \gamma_1 s + \gamma_0}{s(s^2+9)}$$

$$L(s) = C(s)P(s) = 9 \cdot \frac{\gamma_3 s^3 + \gamma_2 s^2 + \gamma_1 s + \gamma_0}{s(s^2+9)(s+4)}$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} s L(s) = \frac{9 \cdot \gamma_0}{9 \cdot 4} = \frac{\gamma_0}{4}$$

$$K_v = 4 \Rightarrow \frac{\gamma_0}{4} = 4, \quad \boxed{\gamma_0 = 16}$$

Il polinomio caratteristico desiderato è

$$p_d(s) = \left[(s+2)^2 + 1\right](s+2)(s+c) \quad \text{con } c > 2 .$$

$$p_d(s) = s^4 + (6+c)s^3 + (6c+13)s^2 + (13c+10)s + 10c$$

Il polinomio caratteristico associato al controllore scelto è

$$P_c(s) = s(s^2+9)(s+4) + 9(\gamma_3 s^3 + \gamma_2 s^2 + \gamma_1 s + \gamma_0)$$

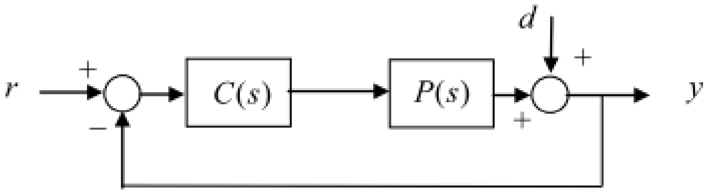
$$P_c(s) = s^4 + (4+9\gamma_3)s^3 + (9+9\gamma_2)s^2 + (36+9\gamma_1)s + 9\gamma_0$$

Si impone che $P_c(s) \equiv P_d(s)$

$$\begin{cases} 4+9\gamma_3 = 6+c \\ 9+9\gamma_2 = 13+6c \\ 36+9\gamma_1 = 10+13c \\ 9\gamma_0 = 10c \end{cases} \Rightarrow c = \frac{144}{10} = 14.4 \quad \text{ok! } c \gg 2.$$

$$\boxed{\gamma_1 = 17.91 \ , \quad \gamma_2 = 10.04 \ , \quad \gamma_3 = 1.822}$$

7. [punti 4,5] Sia dato il seguente sistema



dove $P(s) = \dfrac{5}{s+3}$.

Determinare un controllore proprio di ordine minimo $C(s)$ affinché le seguenti specifiche siano soddisfatte:

1. reiezione infinita asintotica al disturbo armonico $d(t) = 7\cos(3t+2)$;
2. costante di posizione $K_p = 5$;
3. sistema retroazionato asintoticamente (internamente) stabile con poli dominanti in $-3 \pm j$.

7.
Il controllore è del tipo

$$C(s)=\frac{y_2 s^2+y_1 s+y_0}{(s^2+9)}$$

in cui la coppia di poli immaginari coniugati al denominatore serve per rimuovere il disturbo. Il guadagno ad anello aperto è

$$P(s)C(s)=\frac{5\left(y_2 s^2+y_1 s+y_0\right)}{(s^2+9)(s+3)}$$

Dalla specifica 2) si ha $\frac{5y_0}{27}=5$ da cui $y_0=18$. Dalla specifica 3) si imposta la seguente identità polinomiale

$$(s^2+9)(s+3)+5\left(y_2 s^2+y_1 s+27\right)=((s+3)^2+1)(s+c)$$

da cui otteniamo

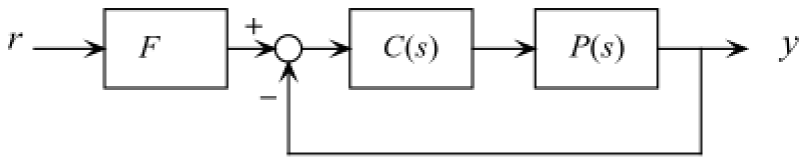
$$c=16{,}2 \quad y_1=19{,}64 \quad y_2=3{,}84$$

Si osservi che la soluzione è soddisfacente in quanto il parametro c = 16,2 corrisponde al polo $-16{,}2$ la cui dinamica è trascurabile rispetto ai poli $-3\pm j$.

Il controllore è quindi

$$C(s)=\frac{3{,}84s^2+19{,}64s+27}{s^2+9}.$$

7. [punti 4,5] Sia dato lo schema di sistema di controllo in figura dove $P(s)=\frac{10}{(s+2)(s+5)(s+10)}$.



Determinare un controllore dinamico $C(s)$ con struttura di rete anticipatrice ed il blocco algebrico $F\in\mathbb{R}$ affinché il sistema di controllo soddisfi le seguenti specifiche:

1. costante di posizione $K_p=19$,
2. margine di ampiezza $M_A=2$,
3. in condizioni nominali l'errore a regime in risposta ad un gradino del riferimento sia nullo.

b. $$C(s) = k\,\frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}$$

$$L(0) = \frac{k}{10} \qquad K_p = L(0) = 19$$

$k = 190$ impongo $-\frac{1}{\tau} = -2$ (CANCELLAZIONE POLO-ZERO)

$$\tau = \frac{1}{2}$$

$$L(s) = \frac{1+\frac{1}{2}s}{1+\alpha\frac{1}{2}s}\cdot\frac{1900}{(s+2)(s+5)(s+10)} =$$

$$= \frac{\cancel{s+2}}{(\alpha s+2)}\cdot\frac{1900}{\cancel{(s+2)}(s+5)(s+10)} =$$

$$= \frac{1900}{(\alpha s+2)(s+5)(s+10)}$$

$L(s;\alpha) + \frac{1}{2} = 0$ ottengo radici pur. immaginarie

$$3800 + (\alpha s+2)(s^2+15s+50) = 0$$

$$\alpha s^3 + (15\alpha + 2)s^2 + (50\alpha + 30)s + 3900 = 0$$

$$\begin{array}{c|ll}
3 & \alpha & 50\alpha + 30 \\
2 & 15\alpha + 2 & 3900 \\
1 & f(\alpha) &
\end{array}$$

$$f(\alpha) = (15\alpha + 2)(50\alpha + 30) - 3900\,\alpha =$$

$$= 100\alpha + 60 + 750\alpha^2 + 450\alpha - 3900\alpha =$$

$$= 750\alpha^2 - 3350\alpha + 60$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{+1675 \pm \sqrt{1675^2 - 60 \cdot 750}}{750} = \frac{1675 \pm \sqrt{2\,760\,625}}{750}$$

$$= \frac{1675 \pm 1\,661{,}5123}{750} = \begin{cases} 4{,}4487 & \text{da SCARTARE} \\ 0{,}0180 & [0{,}0179828\ldots] \end{cases}$$

$$\alpha \in (0,1) \Rightarrow \alpha = 0{,}0180$$

$$C(s) = 180\,\frac{1 + \frac{1}{2}s}{1 + 0{,}0180 \cdot \frac{1}{2}s}$$

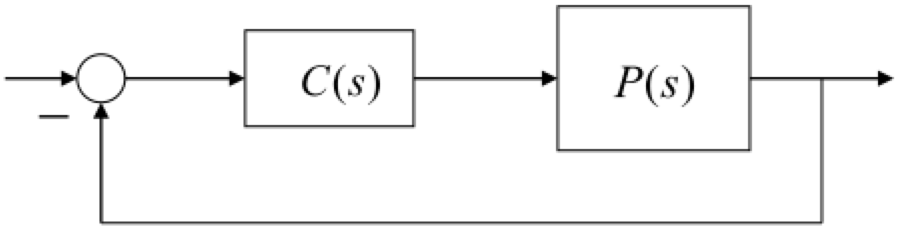
Calcolo di F :

$$T_{ry}(s) = F \cdot \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

$$T_{ry}(0) = 1 \qquad F \cdot \frac{L(0)}{1+L(0)} = 1$$

$$F \cdot \frac{19}{1+19} = 1 \qquad \boxed{F = \frac{20}{19} = 1,0526}$$

7. [punti 4,5] Sia dato il sistema retroazionato di figura



dove $P(s) = \dfrac{1}{s(s+2)(s+4)}$ e $C(s) = K \in \mathbb{R}$ è un controllore proporzionale.

1. Determinare i valori di K per i quali è assicurata la stabilità asintotica del sistema retroazionato.
2. Determinare i valori di K per i quali il sistema retroazionato ammette $G_S \geq 0,2\ \text{s}^{-1}$ ($G_S \equiv$ grado di stabilità nel piano complesso).

7.
L'equazione caratteristica del sistema in retroazione è

$$s^3 + 6s^2 + 8s + k = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è:

3	1	8	0
2	6	k	0
1	48-k	0	
0	k		

Per la stabilità asintotica debbono valere le seguenti disequazioni:

$48 - k > 0$

$k > 0$

Il campo corrispondente alla stabilità asintotica asintotica del sistema è $k \in (0,\ 48)$.

1. Ricordando che il grado di stabilità (nel piano complesso) *Gs* di un sistema asintoticamente stabile è definito come

$G_s = -\max\{\operatorname{Re} p_1, \operatorname{Re} p_2, ..., \operatorname{Re} p_n\}$, i=1..n, dove i *pi* sono i poli del sistema

e rappresenta la distanza minima dei poli del sistema dall'asse immaginario, il problema può essere risolto effettuando la traslazione nel piano complesso $s = z - 0.2$.

Ponendo $s = z - 0.2$ si ottiene:

$$z^3 + 5.4z^2 + 5.72z - 1.368 + k = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è:

3	1	5.72	0
2	5.4	-1.368+k	0
1	30.888-(k-1.368)	0	
0	-1.368+k		

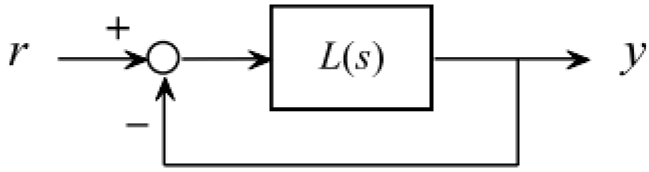
Per cui i valori di k per cui il sistema retroazionato ammette $G_s \geq 0.2 s^{-1}$ sono quelli soddisfacenti il sistema di disequazioni:

$$-1.368 + k > 0$$

$$30.888 - (k - 1.368) > 0$$

cioè $k \in [1.368,\ 32.256]$.

5. [punti 5] Sia dato il seguente sistema retroazionato



dove $L(s)=2\dfrac{1+5s}{(1+s)^2(1+0,5s)^2}$.

a) Tracciare il diagramma polare associato alla funzione di trasferimento $L(s)$ determinando in particolare le intersezioni con l'asse reale.

b) Studiare la stabilità del sistema retroazionato utilizzando il Criterio di Nyquist.

5.

a)

$$L(j\omega)=2\frac{1+5j\omega}{(1+j\omega)^2(1+0,5j\omega)^2}$$

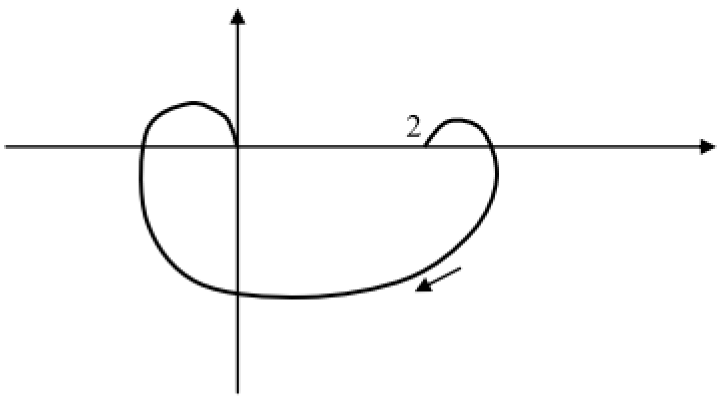
$$|L(j\omega)|=2\frac{\sqrt{1+25\omega^2}}{(1+\omega^2)(1+\omega^2/4)}$$

$$\arg L(j\omega)=\arctan(5\omega)-2\arctan(\omega)-2\arctan(0,5\omega)$$

$$L(j0)=2$$

$$\lim_{\omega\to\infty}|L(j\omega)|=0 \qquad \lim_{\omega\to\infty}\arg L(j\omega)=-\frac{3}{2}\pi$$

Per ω piccolo vale $\arg L(j\omega)\simeq 5\omega-2\omega-2\cdot 0,5\omega=2\omega>0$ e $|L(j\omega)|>|L(j0)|$. Ne consegue quindi il seguente tracciamento qualitativo del diagramma polare:



Si prevedono quindi la presenza di due intersezioni del diagramma con l'asse reale (escluse quelle in 0 e 2). Le pulsazioni corrispondenti a tali intersezioni possono essere determinate risolvendo l'equazione

$$\arg L(j\omega) = 0 \quad (-\pi)$$

ovvero

$$\arctan(5\omega) + 0 \ (+\pi) = 2\arctan\omega + 2\arctan(0,5\omega)$$

Applicando la funzione $\tan(\cdot)$ ad entrambi i membri si ottiene:

$$5\omega = \frac{\dfrac{2\omega}{1-\omega^2} + \dfrac{\omega}{1-\dfrac{1}{4}\omega^2}}{1 - \dfrac{2\omega}{1-\omega^2}\dfrac{\omega}{1-\dfrac{1}{4}\omega^2}}$$

Eliminando la soluzione $\omega = 0$ e ponendo $x := \omega^2$ si giunge all'equazione algebrica di secondo grado

$$5x^2 - 59x + 8 = 0$$

da cui le soluzioni $x_1 = 0,137188$ e $x_2 = 11,6628$. Considerando le soluzioni positive di ω otteniamo

$$\begin{cases} \omega_1 = 0,37038 \quad \text{rad/sec} \\ \omega_2 = 3,41508 \quad \text{rad/sec} \end{cases}$$

Le intersezioni cercate sono quindi

$$\begin{cases} L(j\omega_1) = 3,5788 \\ L(j\omega_2) = -0,6899 \end{cases}$$

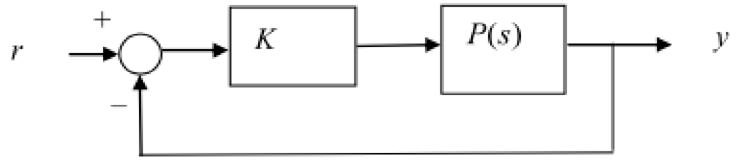
b)

Il guadagno di anello L(s) non ha poli a parte reale positiva ed il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto critico -1. Per il Criterio di Nyquist il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Si noti che il margine di ampiezza associato è facilmente determinabile come

$$M_A = \frac{1}{|L(j\omega_2)|} \cong 1,45$$

5. [punti 4,5] Sia dato il seguente sistema retroazionato



dove $K = 10$ e $P(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$.

a. Determinare il guadagno di anello del sistema retroazionato e tracciarne il diagramma polare. Calcolare in particolare l'intersezione del diagramma con l'asse reale negativo e la corrispondente pulsazione ω_p (pulsazione di fase pi greco).

b. Studiare la stabilità del sistema retroazionato applicando il Criterio di Nyquist. Determinare il margine di ampiezza (M_A) ed il margine di fase (M_F).

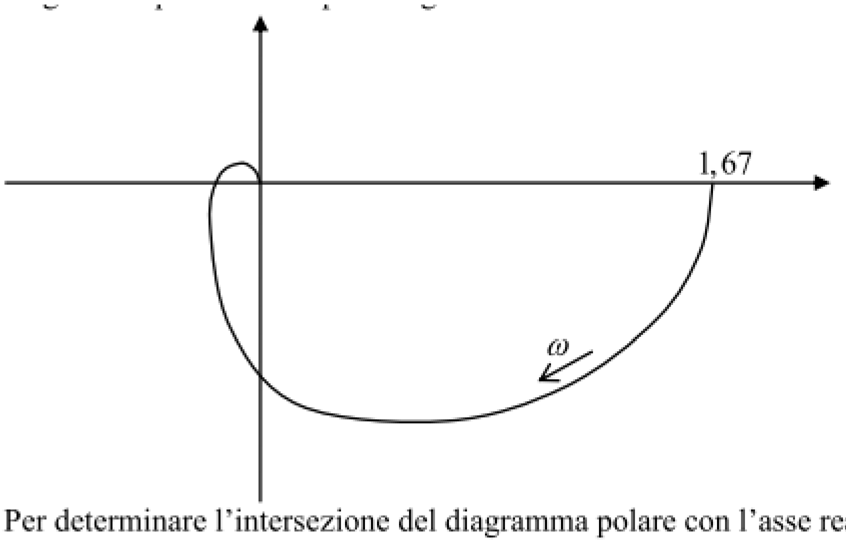
a.

$$L(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}; \quad L(j\omega) = \frac{10}{(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)}$$

$$\left|L(j\omega)\right| = \frac{10}{\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{4+\omega^2}\sqrt{9+\omega^2}}$$

$$\arg L(j\omega) = -\arctan\omega - \arctan\frac{\omega}{2} - \arctan\frac{\omega}{3}$$

Si osservi che $L(j0) = \dfrac{5}{3} \cong 1,67$ e $\lim\limits_{\omega\to+\infty}\left|L(j\omega)\right| = 0$, $\lim\limits_{\omega\to+\infty}\arg L(j\omega) = -3\dfrac{\pi}{2}$. Il modulo e l'argomento della risposta armonica sono funzioni monotone decrescenti. Un tracciamento qualitativo del diagramma polare è dunque il seguente:



Per determinare l'intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo si risolva l'equazione $\arg L(j\omega_p) = -\pi$:

$$\arctan\frac{\omega_p}{2} + \arctan\frac{\omega_p}{3} = \pi - \arctan\omega_p$$

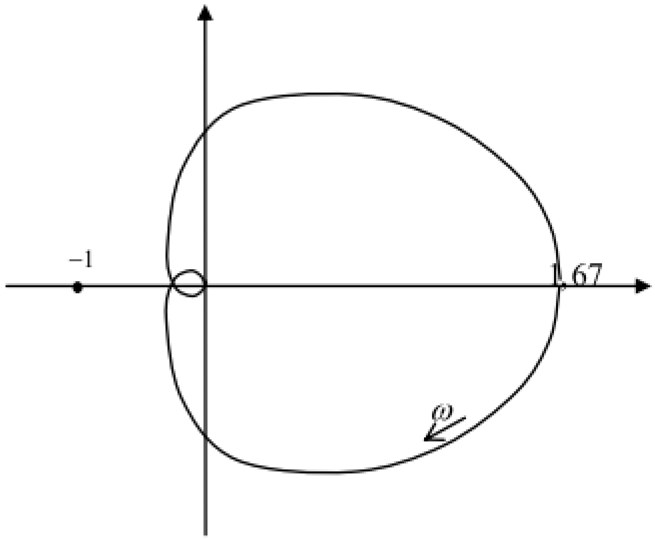
Applicando la funzione tangente ad ambo i membri dell'equazione si ottiene $\omega_p^2 - 11 = 0$ da cui $\omega_p = \sqrt{11} \cong 3,32$ rad/s.

$$|L(j\omega_p)| = \frac{10}{\sqrt{12}\sqrt{15}\sqrt{20}} = \frac{1}{6}$$

L'intersezione avviene quindi in $-\frac{1}{6}$. $\left(L(j\omega_p) = -\frac{1}{6} \right)$.

b.

Tracciamento del diagramma polare completo:



Il guadagno di anello non ha poli a parte reale positiva e il diagramma polare completo non circonda il punto critico -1. Per il Criterio di Nyquist il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Il margine di ampiezza è $M_A = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$.

Calcolo del margine di fase:

$$|L(j\omega_c)| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{100}{(1+\omega_c^2)(4+\omega_c^2)(9+\omega_c^2)} = 1$$

$$x := \omega_c^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{100}{(1+x)(4+x)(9+x)} = 1$$

$\Rightarrow x = 1$ (soluzione dedotta per ispezione diretta dell'equazione;

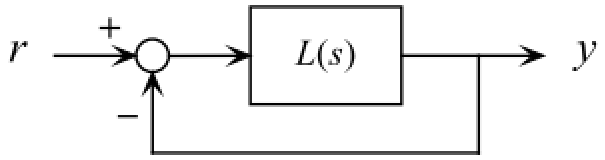
in alternativa soluzione approssimata con metodo iterativo).

$\Rightarrow \omega_c = 1$ rad/s

$$\arg L(j\omega_c) = -\arctan 1 - \arctan\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{3} = -\frac{\pi}{2}$$

$$M_F = 180^0 + \arg L(j\omega_c) = 90^0$$

5. [punti 4,5] Sia dato il sistema retroazionato di figura dove $L(s) = 10\dfrac{s+1}{s^3(s+2)}$.



a. Tracciare il diagramma di Nyquist di $L(j\omega)$ determinando le eventuali intersezioni con l'asse reale negativo.
b. Studiare la stabilità del sistema retroazionato applicando il Criterio di Nyquist.

a) $L(j\omega) = 10\dfrac{j\omega+1}{(j\omega)^3(j\omega+2)}$, $\arg L(j\omega) = \dfrac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}\,\omega - \mathrm{arctg}\dfrac{\omega}{2}$

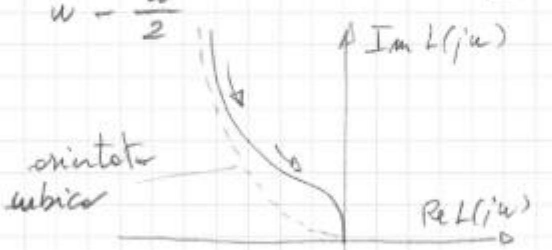
$\omega \to 0 \quad \arg L(j\omega) \to \dfrac{\pi}{2} \quad |L(j\omega)| \to +\infty$

$\omega \to +\infty \quad \arg L(j\omega) \to \dfrac{\pi}{2} \quad |L(j\omega)| \to 0$

Per ω piccolo e positivo $\arg L(j\omega) \simeq \dfrac{\pi}{2} + \omega - \dfrac{\omega}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\omega}{2} > \dfrac{\pi}{2}$; quindi l'emergenza del d.p. avviene nel II quadrante.

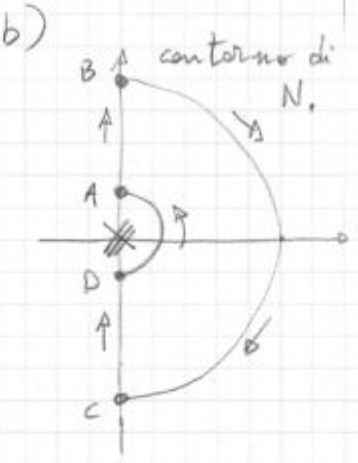
$\arg L(j\omega) = \pi \qquad \mathrm{arctg}\,\omega - \mathrm{arctg}\dfrac{\omega}{2} = \dfrac{\pi}{2} \qquad$ per $\omega > 0$

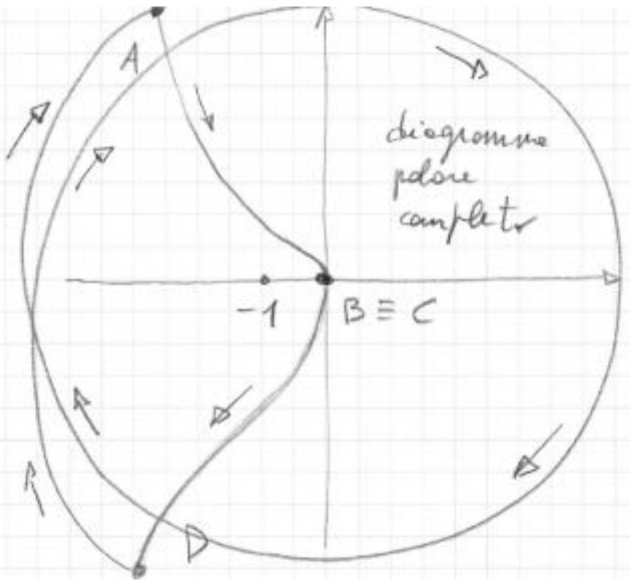
$\dfrac{1 + \omega \cdot \frac{\omega}{2}}{\omega - \frac{\omega}{2}} = 0 \qquad 1 + \dfrac{\omega^2}{2} = 0$ nessuna soluzione



Quindi nessuna intersezione con l'asse reale negativo del diagramma polare

b)





L(s) non ha poli a parte reale negativa. Per il criterio di N. la stabilità sussiste quando il d.p.c. non circonda né tocca −1. In questo caso il d.p.c. circonda 2 volte −1. Quindi il sistema retroazionato è instabile.

5. [punti 4,5 1) Tracciare il diagramma polare associato alla funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{10(1-s)^2}{s(s+1)^3}$$

determinando in particolare asintoti e le intersezioni con l'asse reale negativo.
2) Utilizzando il Criterio di Nyquist si studino le radici dell'equazione caratteristica $1 + P(s) = 0$ (quante a parte reale negativa, quante puramente immaginarie, quante a parte reale positiva).

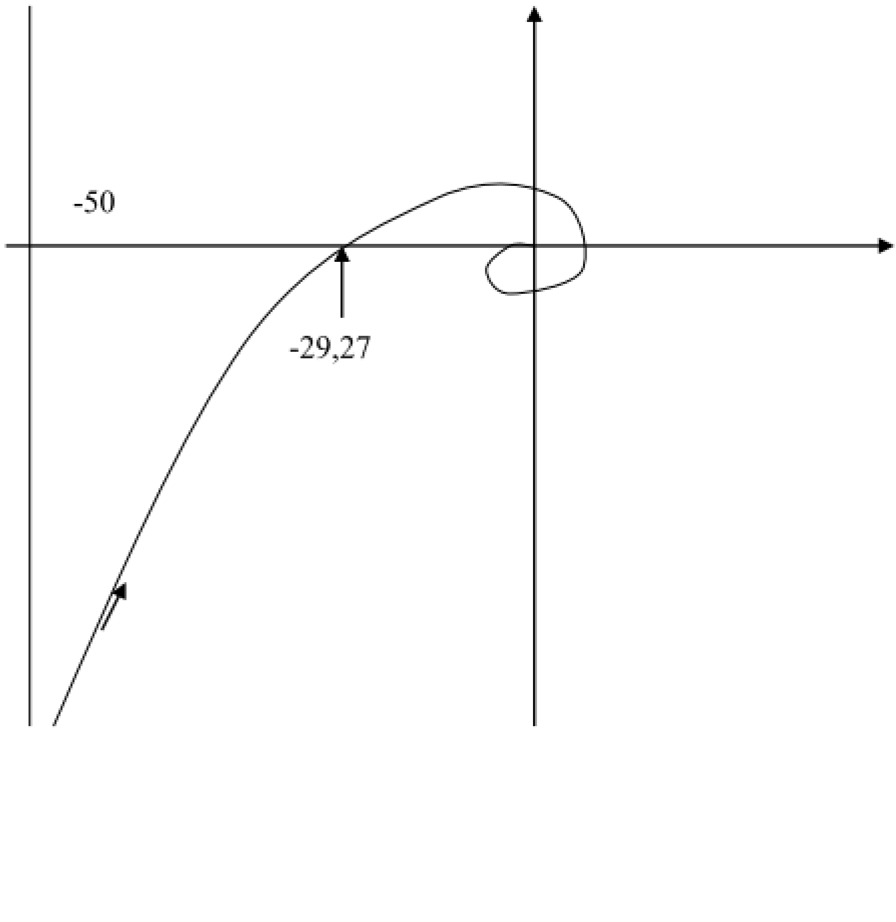
$$P(j\omega) = \frac{10(1-j\omega)^2}{(j\omega)(1+j\omega)^3}$$

$$\arg P(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 5 \text{ arctg } \omega$$

$$|P(j\omega)| = \frac{10}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}$$

L'asintoto è verticale (il sistema è di tipo 2) e la sua ascissa è $\sigma_a = 10[(-1-1)-(1+1+1)] = -50$.

$$\omega \to \infty \qquad \arg P(j\omega) \to -2\pi - \pi$$



Calcolo intersezione con l'asse reale negativo:

$$\arg P(j\omega_p) = -\pi$$

$$5 \text{ arctg } \omega_p = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega_p = \text{ tg } \frac{\pi}{10} = 0,3249 \text{ rad}$$

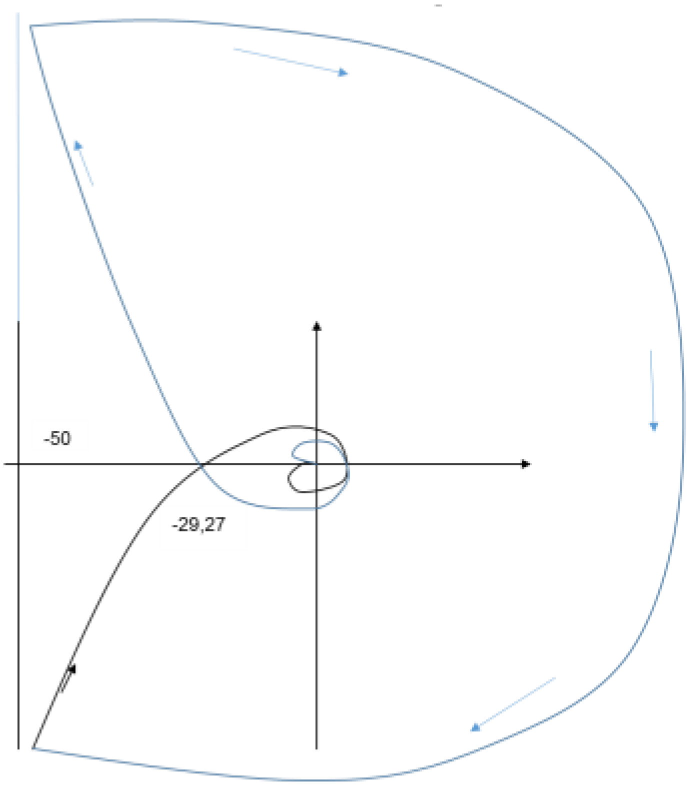
$$\left|P(j\omega_p)\right| = 29,27 \quad \Rightarrow \quad P(j\omega_p) = -29,27$$

2) Considerato che P(s) non ha poli a parte reale positiva, il caso particolare del Criterio di Nyquist afferma che l'eq. 1 + P(s) = 0 ha tutte le radici a parte reale negativa (sistema retroazionato asintoticamente stabile) se e solo se il diagramma polare completo (vedi disegno qui sotto) non tocca né circonda il punto critico - 1. Dal diagramma sopra riportato risulta invece che il d.p.c. circonda 2 volte (in senso orario) il punto – 1. Si conclude quindi:

numero radici $\in \mathbb{C}_+ = 2$

numero radici $\in j\mathbb{R} = 0$

numero radici $\in \mathbb{C}_- = 4 - 2 = 2$



5. [punti 4,5]

1) Tracciare il diagramma polare associato alla funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{100(1-s)^2}{s(s+2)^3}$$

determinando in particolare l'asintoto e l'intersezione con l'asse reale negativo.

2) Utilizzando il Criterio di Nyquist si studino le radici dell'equazione caratteristica $1 + P(s) = 0$ (quante a parte reale negativa, quante puramente immaginarie, quante a parte reale positiva).

a) Funzione di Trasferimento:

$$P(s) = 100\,\frac{(1-s)^2}{s\,(s+2)^3} \;\Rightarrow\; P(j\omega) = 12.5\,\frac{(1-j\omega)^2}{j\omega\,(1+0.5\,j\omega)^3}$$

Ascissa dell'asintoto: $\nabla_a = 12.5\,(-1-1-0.5-0.5-0.5) = -43.75$
Argomento della funzione di trasferimento:

$$\arg P(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 3\ \arctan(0.5\,\omega) - 2\ \arctan\omega$$

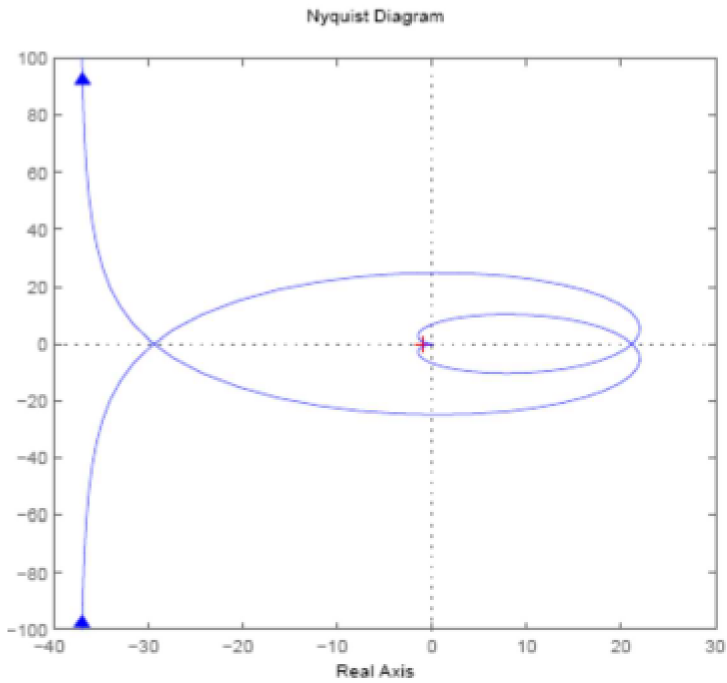
$$\text{per}\,\omega \to 0 \;\Rightarrow\; \arg P(j\omega) \to -\frac{\pi}{2} \qquad \text{per}\,\omega \to +\inf \;\Rightarrow\; \arg P(j\omega) \to -3\,\pi$$

Intersezione con l'asse reale negativo:

$$\arg P(j\omega_p) = -\pi \Rightarrow 3\ \arctan\frac{\omega_p}{2} + 2\ \arctan\omega_p = \frac{\pi}{2}$$

Attraverso una stima numerica si ottiene: $\omega_p \simeq 0,47$ [rad/s]
Intesezione:

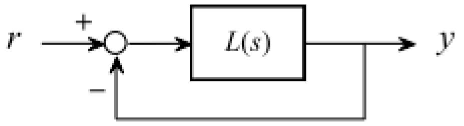
$$|P(j\omega_p)| = 12.5\,\frac{(1+\omega_p^2)}{\omega_p\,\left(1+(\frac{\omega_p}{2})^2\right)^{\frac{3}{2}}} \simeq 29.95$$



b) Il diagramma polare completo circonda due volte in senso orario il punto -1 e il guadagno di anello non ha poli a parte reale positiva, quindi le radici di $1+P(s)$ sono:

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{C}_+ &: \quad 2 \\ n \in \mathbb{C}_- &: \quad 2\ \ (4-2) \\ n \in j\,\mathbb{R} &: \quad 0 \end{aligned}$$

5. [punti 5] Sia dato il seguente sistema retroazionato



dove $L(s) = 16\dfrac{1-s}{(s+2)^4}$.

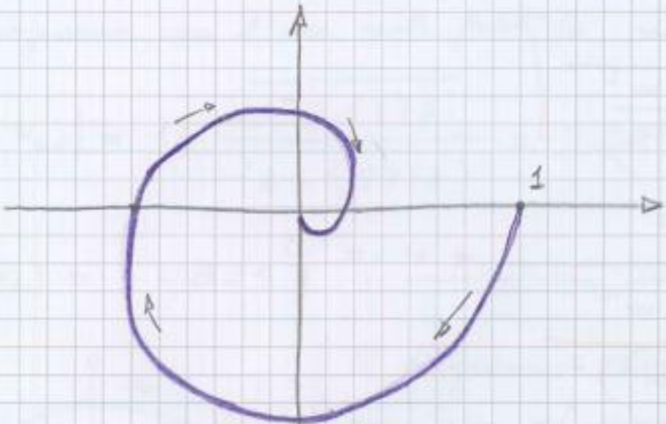
a) Tracciare il diagramma polare associato alla funzione di trasferimento $L(s)$ determinando in particolare l'intersezione con l'asse reale negativo.

b) Dimostrare mediante il criterio di Nyquist che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile e determinare il corrispondente margine di ampiezza M_A.

a) $L(j\omega) = 16\dfrac{1-j\omega}{(j\omega+2)^4}$; $L(j0) = 1$

$$|L(j\omega)| = 16\frac{\sqrt{1+\omega^2}}{(4+\omega^2)^2}$$

$$\arg L(j\omega) = -4\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{2} - \mathrm{arctg}\,\omega$$



$$\lim_{\omega\to+\infty} L(j\omega) = -5\frac{\pi}{2} = -2\pi - \frac{\pi}{2}$$

Calcola intersezione con l'asse reale negativo :

$$\arg L(j\omega) = -\pi$$

$$+4\,\text{arctg}\,\frac{\omega}{2} + \text{arctg}\,\omega = +\pi$$

$$\text{tg}\left(4\,\text{arctg}\,\frac{\omega}{2}\right) + \omega = 0$$

$$\frac{2\,\text{tg}\left(2\,\text{arctg}\,\frac{\omega}{2}\right)}{1-\left[\text{tg}\left(2\,\text{arctg}\,\frac{\omega}{2}\right)\right]^2} + \omega = 0$$

$$\frac{2\left[\dfrac{\omega}{1-\frac{\omega^2}{4}}\right]}{1-\left[\dfrac{\omega}{1-\frac{\omega^2}{4}}\right]^2} + \omega = 0$$

$$\frac{2\,\dfrac{4\omega}{4-\omega^2}}{1-\dfrac{16\omega^2}{(4-\omega^2)^2}} + \omega = 0$$

$$\frac{\dfrac{8\omega}{\cancel{4-\omega^2}}}{\dfrac{(4-\omega^2)^2-16\omega^2}{(4-\omega^2)^{\cancel{2}}}} + \omega = 0$$

$$\frac{8w(4-w^2)}{(4-w^2)^2-16w^2}+w=0$$

Si scarta la soluzione $w=0$

$$8(4-w^2)+(4-w^2)^2-16w^2=0$$

$$x \triangleq w^2$$

$$8(4-x)+(4-x)^2-16x=0$$

$$32-8x+16+x^2-8x-16x=0$$

$$x^2-32x+48=0$$

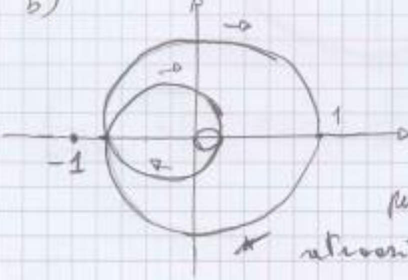
$$x_{1,2} = \begin{cases} 30,4222 \\ 1,5778 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} w_1 &= 5,5156 \text{ rad/sec} \\ w_2 &= 1,2561 \text{ rad/sec} \end{aligned}$$

Si scarta la soluzione w_1 corrispondente all'intersezione del diagramma con l'asse reale positivo.

$$|L(jw_2)| = 16\,\frac{\sqrt{1+1,5778}}{(4+1,5778)} = 0,8257$$

$$L(jw_2) = -0,8257 \quad \text{(intersezione cercata)}$$

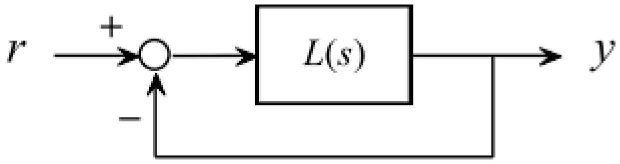
b)



Il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto critico -1. Considerato che $L(s)$ non ha poli a parte reale positiva per il C. di Nyquist il sistema retroazionato è quindi stabile.

$$M_A = \frac{1}{0,8257} \simeq 1,21$$

5. [punti 4] Sia dato il seguente sistema retroazionato



dove $L(s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(1-s)^2}{s(1+s)^2}$.

1. Tracciare il diagramma polare di $L(j\omega)$ determinando in particolare l'asintoto, il comportamento per $\omega \to +\infty$ e l'intersezione con l'asse reale negativo.
2. Stabilire mediante applicazione del criterio di Nyquist che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Determinare inoltre il margine di ampiezza (M_A) ed il margine di fase (M_F).

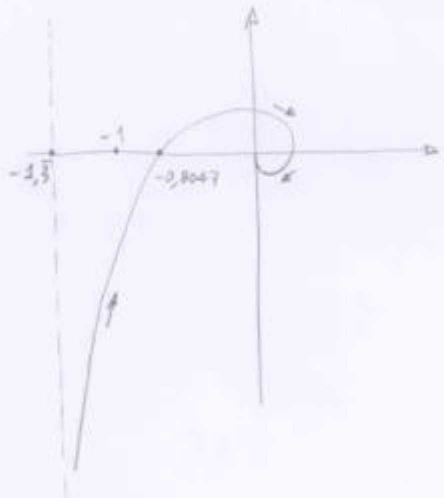
1. $L(j\omega) = \frac{1}{3} \frac{(1-j\omega)^2}{j\omega(1+j\omega)^2}$; $|L(j\omega)| = \frac{1}{3\omega}$; $\arg L(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 4 \operatorname{arctg} \omega$

asintoto per $\omega \to 0+$ $\quad \sigma_a = \frac{1}{3}\left(-1-1-(1+1)\right) = -\frac{4}{3} = -1,\overline{3}$

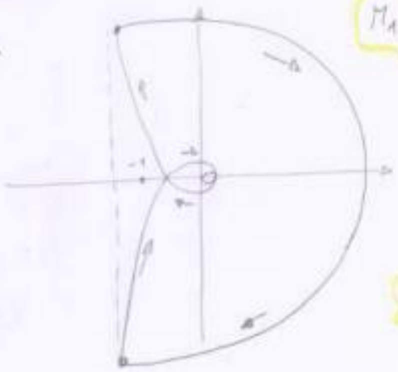
$\omega \to +\infty \quad |L(j\omega)| \to 0 \quad \arg L(j\omega) \to -5 \cdot \frac{\pi}{2}$

$\arg L(j\omega_p) = -\pi \Rightarrow \operatorname{arctg} \omega_p = \frac{\pi}{8}$, $\quad \omega_p = \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = 0,4142$

$|L(j\omega_p)| = 0,8047 \Rightarrow L(j\omega_p) = -0,8047$



2.



$M_A = \frac{1}{0,8047} \cong 1,24$

M_F :

$|L(j\omega_c)| = 1$

$\omega_c = \frac{1}{3}$

$\arg L(j\omega_c) = -163°,74$

$M_F = 16°,26$

L(s) non ha poli a parte reale positiva e il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto −1. Quindi per il c. di N. il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

5. [punti 5] Dato un sistema retroazionato con guadagno di anello

$$L(s) = 100\frac{(s+1)^2}{s^3(s+10)}$$

1. Tracciare il diagramma polare di $L(j\omega)$ determinando le eventuali intersezioni con l'asse reale.
2. Studiare la stabilità del sistema retroazionato con il Criterio di Nyquist.

1) Sia $L(s) := \dfrac{100(s+1)^2}{s^3(s+10)}$

$$L(j\omega) = \frac{100(j\omega+1)^2}{(j\omega)^3(j\omega+10)}$$

$$\left|L(j\omega)\right| = \frac{100\left(1+\omega^2\right)}{\omega^3\left(100+\omega^2\right)^{1/2}}$$

$$\arg L(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi - arctg\,0.1\omega + 2arctg\,\omega$$

Studio del diagramma polare di $L(j\omega)$:

Comportamento per $\omega \to 0^+$:
Il diagramma polare parte da un punto all'infinito

$$\lim_{\omega\to\infty}\left|L(j\omega)\right| = \infty$$

$$\lim_{\omega\to 0^+}\arg L(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi$$

Comportamento per $\omega \to \infty$:
Il diagramma termina nell'origine tangente a uno degli assi coordinati, essendo

$$\lim_{\omega\to\infty} \left| L(j\omega) \right| = 0$$

$$\lim_{\omega\to\infty} \arg L(j\omega) = -\pi$$

La rotazione complessiva intorno all'origine per ω variabile da 0 a ∞ è di $-\pi$.

Calcolo dell'intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo:

$$\arg L(j\omega_p) = -\pi$$

$$-\frac{3}{2}\pi - arctg 0.1\omega + 2arctg\omega = -\pi$$

$$-arctg 0.1\omega + 2arctg\omega = \frac{\pi}{2}$$

$$1 + tg(2arctg\omega) \cdot 0.1\omega = 0$$

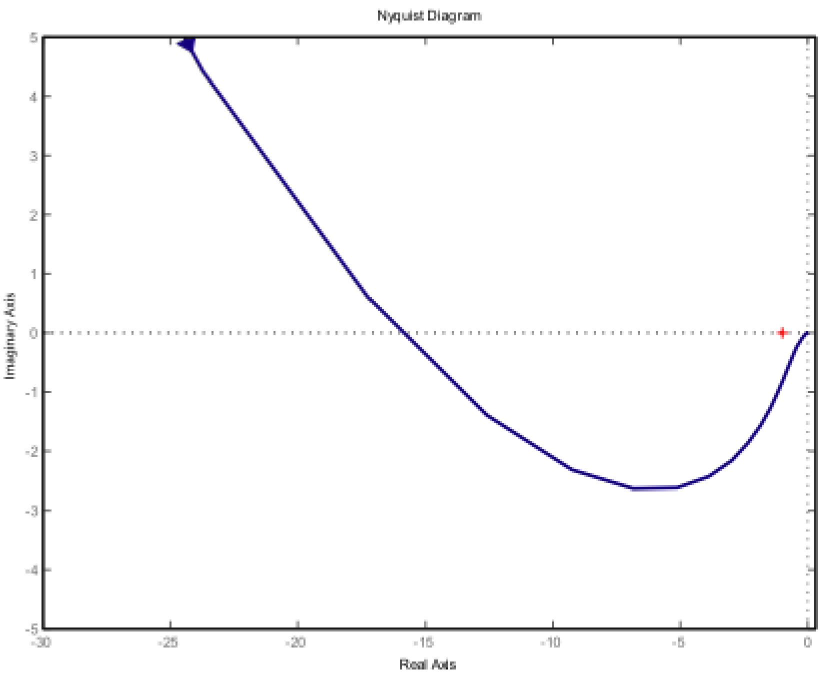
$$1 + \frac{2\omega}{1-\omega^2} - \frac{\omega}{10} = 0$$

$$\omega_p = \sqrt{5/4} \simeq 1.118 rad/\sec$$

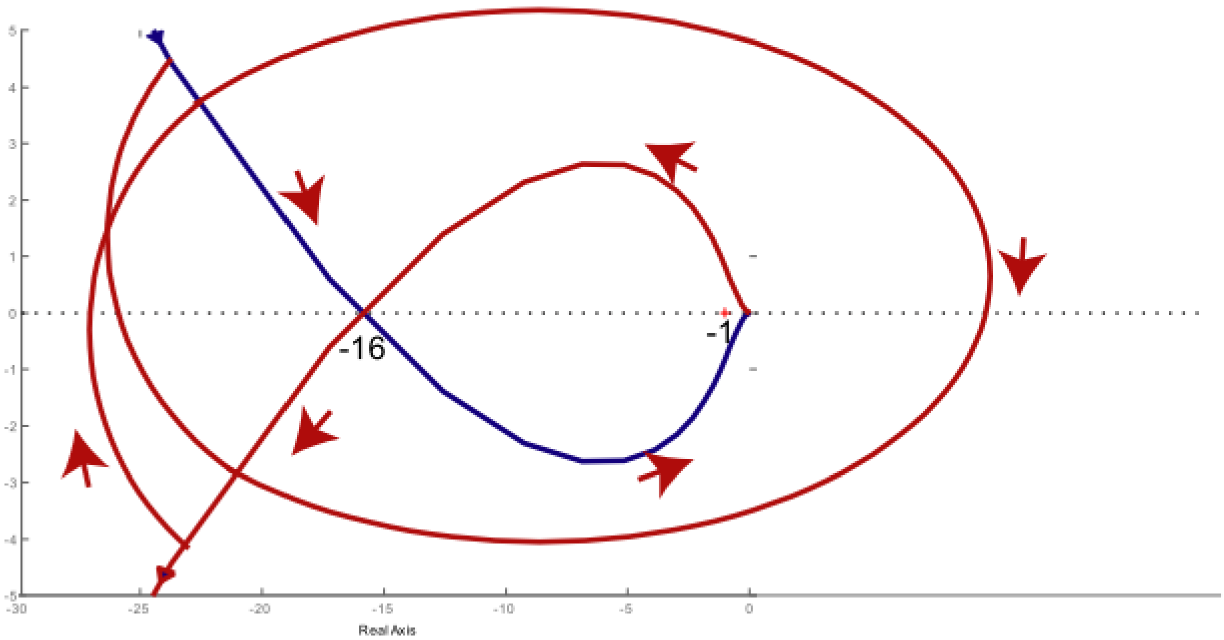
$$\left| L(j\omega_p) \right| = 16$$

$$L(j\omega_p) = -16$$

Il diagramma polare del guadagno di anello risulta pertanto:

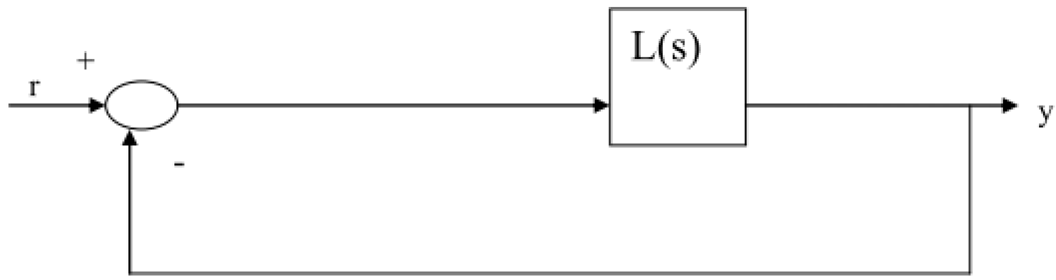


2) Il diagramma polare completo è:



Si può concludere che per il criterio di Nyquist il sistema retroazionato è **asintoticamente stabile**, infatti il numero totale di giri del diagramma polare completo attorno al punto critico -1 è nullo.

5. [punti 5] Sia dato il seguente sistema retroazionato



dove $L(s) = 100\dfrac{(1-s)^2}{(s+1)^2(s+10)^2}$.

a) Tracciare il diagramma polare associato alla funzione di trasferimento $L(s)$ determinando in particolare le intersezioni con l'asse reale negativo.
b) Studiare la stabilità del sistema retroazionato mediante il criterio di Nyquist.

5.
Il sistema ammette la seguente funzione di risposta armonica

$$L(j\omega) = 100\frac{(1-j\omega)^2}{(1+j\omega)^2(10+j\omega)^2}$$

il cui modulo è dato da

$$|L(j\omega)| = 100\frac{(1+\omega^2)}{(1+\omega^2)(100+\omega^2)} = \frac{100}{(100+\omega^2)}$$

e la cui fase è data da

$$\arg L(j\omega) = -2\arctan\omega - 2\arctan\omega - 2\arctan\frac{\omega}{10} = -4\arctan\omega - 2\arctan\frac{\omega}{10}.$$

Valutando i valori al limite si ottiene

$$\lim_{\omega\to 0}|L(j\omega)| = 1 \qquad \lim_{\omega\to 0}\arg L(j\omega) = 0$$

$$\lim_{\omega\to\infty}|L(j\omega)| = 0 \qquad \lim_{\omega\to\infty}\arg L(j\omega) = -4\frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{2} = -3\pi\,.$$

Al fine di ottenere un miglior tracciamento e di valutare la stabilità del sistema è necessario valutare l'intersezione del diagramma di Nyquist con l'asse reale negativo

$$\arg L(j\omega_p) = -\pi$$

$$-4\arctan\omega_p - 2\arctan\frac{\omega_p}{10} = -\pi$$

$$2\arctan\omega_p + \arctan\frac{\omega_p}{10} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\tan\left(2\arctan\omega_p\right) + \frac{\omega_p}{10}}{1 - \tan\left(2\arctan\omega_p\right)\frac{\omega_p}{10}} = \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$1 - \tan\left(2\arctan\omega_p\right)\frac{\omega_p}{10} = 0$$

Poiché si ha che

$$\tan\left(2\arctan\omega_p\right) = \tan\left(\arctan\omega_p + \arctan\omega_p\right) = \frac{\omega_p + \omega_p}{1 - \omega_p\omega_p} = \frac{2\omega_p}{1 - \omega_p^2}$$

l'equazione da risolvere sarà

$$1 - \frac{2\omega_p}{1-\omega_p^2}\frac{\omega_p}{10} = 1 - \frac{\omega_p^2}{5(1-\omega_p^2)} = 0$$

$$5 - 5\omega_p^2 - \omega_p^2 = 5 - 6\omega_p^2 = 0$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{5}{6}} = 0{,}9129\,\text{rad/s}$$

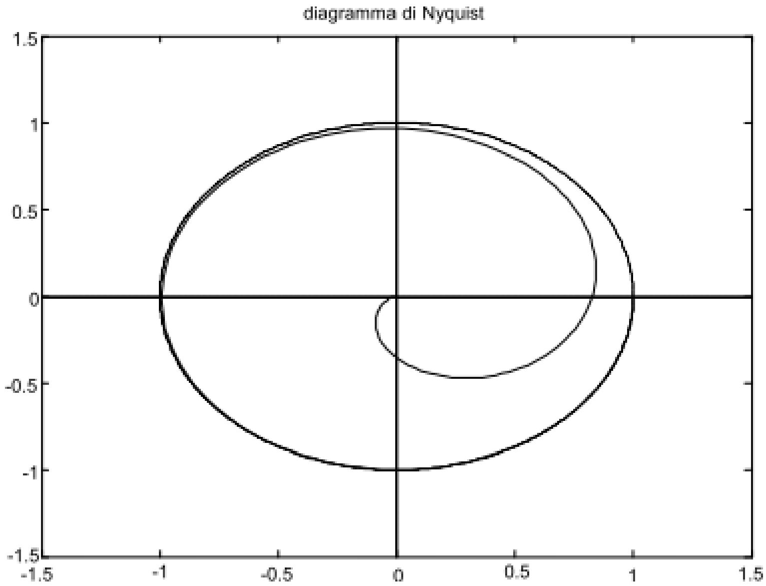
e l'intersezione sarà data da

$$|L(j\omega_p)| = \frac{100}{(100+\omega_p^2)} = \frac{100}{\left(100+\frac{5}{6}\right)} = 0.9917$$

Pertanto

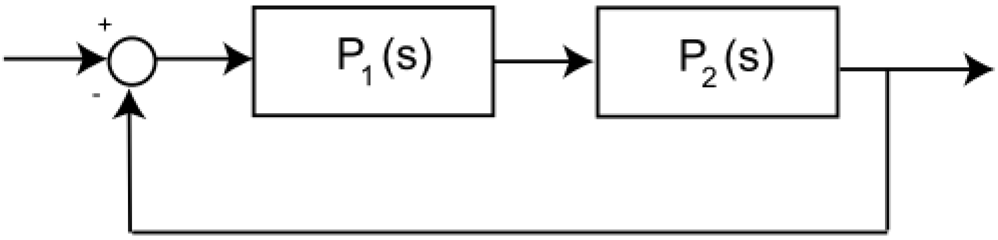
$$L(j\omega_p) = -0{,}9917$$

In accordo con i risultati ottenuti, il diagramma complessivo sarà il seguente



b) Il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto critico -1. Considerato che L(s) non presenta poli a parte reale negativa ne consegue, per il Criterio di Nyquist, che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Si osservi che tale stabilità è, da un punto di vista realizzativo, alquanto precaria in virtù di un margine di ampiezza estremamente piccolo (M_A=1,0083).

5. [punti 5] Sia dato il sistema retroazionato di figura



dove $P_1(s)=\dfrac{1}{s(1+s)^2(1-s)}$.

1. Posto $P_2(s)=1$ tracciare il diagramma di Nyquist del guadagno di anello *L(s)* del sistema determinando in particolare asintoti e intersezioni con l'asse reale.
2. Nelle condizioni di cui al punto 1) studiare la stabilità del sistema retroazionato utilizzando il criterio di Nyquist.
3. Posto $P_2(s)=\exp(-s)$ (ritardo finito di 1 secondo) studiare la stabilità del sistema retroazionato utilizzando il criterio di Nyquist.

1) Sia $L(s) := P_1(s)\cdot P_2(s) = \dfrac{1}{s(1+s)^2(1-s)}$

$$L(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1+j\omega)^2(1-j\omega)}$$

$$\left|L(j\omega)\right| = \frac{1}{\omega\left(1+\omega^2\right)\left(1+\omega^2\right)^{1/2}}$$

$$\arg L(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 2arctg\omega + arctg\omega = -\frac{\pi}{2} - arctg\omega$$

Studio del diagramma polare di $L(j\omega)$:

Comportamento per $\omega \to 0^+$:
Il diagramma polare presenta un asintoto parallelo all'asse immaginario
$\sigma = 1(-1-1+1) = -1$

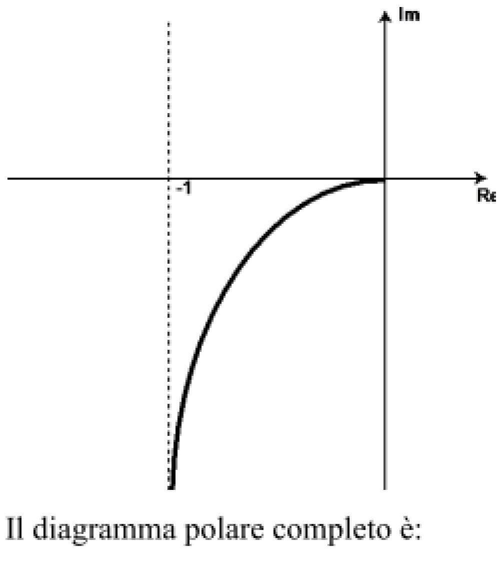
$$\lim_{\omega\to 0^+} \arg L(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

Comportamento per $\omega \to \infty$:
Il diagramma termina nell'origine tangente a uno degli assi coordinati, essendo
$\lim_{\omega\to\infty} \left|L(j\omega)\right| = 0$

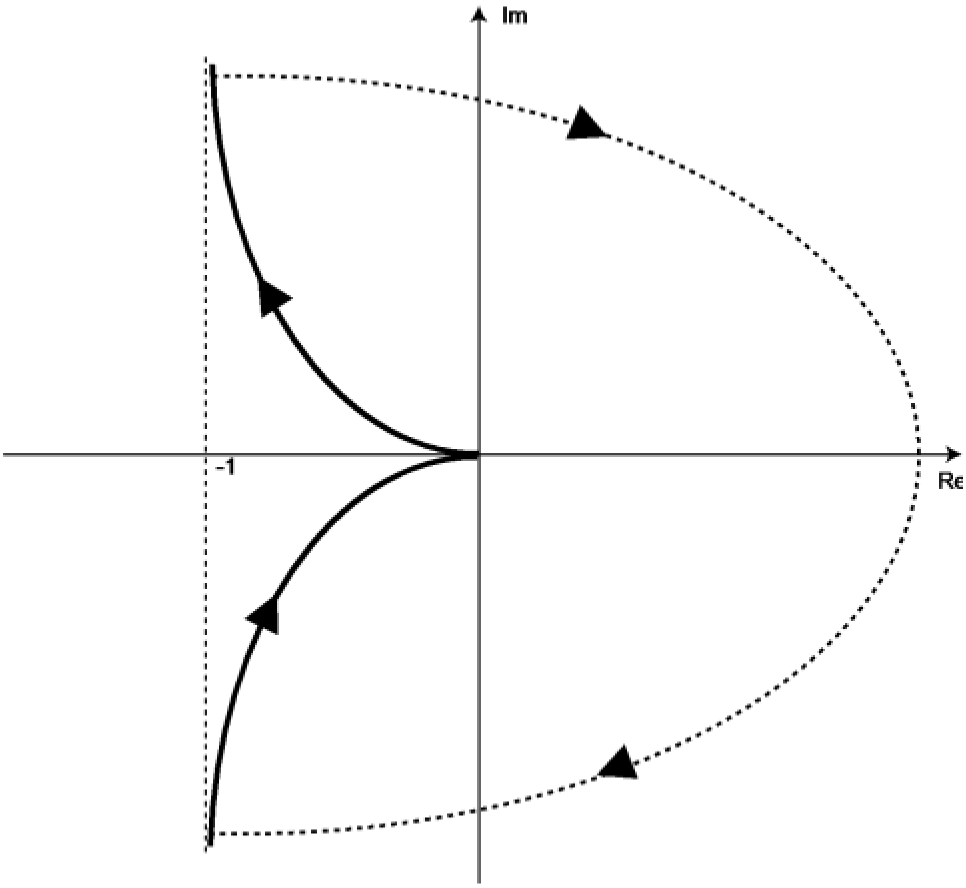
$$\lim_{\omega\to\infty} \arg L(j\omega) = -\pi$$

Si può subito dedurre che il diagramma polare non presenta intersezioni con l'asse reale.

Il diagramma polare del guadagno di anello risulta pertanto:



2) Il diagramma polare completo è:



Si può concludere che per il criterio di Nyquist il sistema retroazionato è **instabile** poichè il diagramma polare completo non circonda in senso antiorario 1 volta il punto critico -1. (Si ricorda che il guadagno di anello presenta 1 polo a parte reale positiva).

3) $$L(j\omega)=\frac{1}{j\omega(1+j\omega)^2(1-j\omega)}e^{-j\omega}$$

$$\arg L(j\omega)=-\frac{\pi}{2}-arctg\omega-\omega$$

osservando che

$\omega\to 0^+ \qquad e^{-j\omega}\to 1-j\omega$

L'asintoto verticale ha ascissa

$\sigma=1[-1-1]=-2$

Si può calcolare la prima intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo:

$$\arg L\left(j\omega_p\right) = -\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} - arctg\omega_p - \omega_p = -\pi$$

$$arctg\omega_p + \omega_p = \frac{\pi}{2}$$

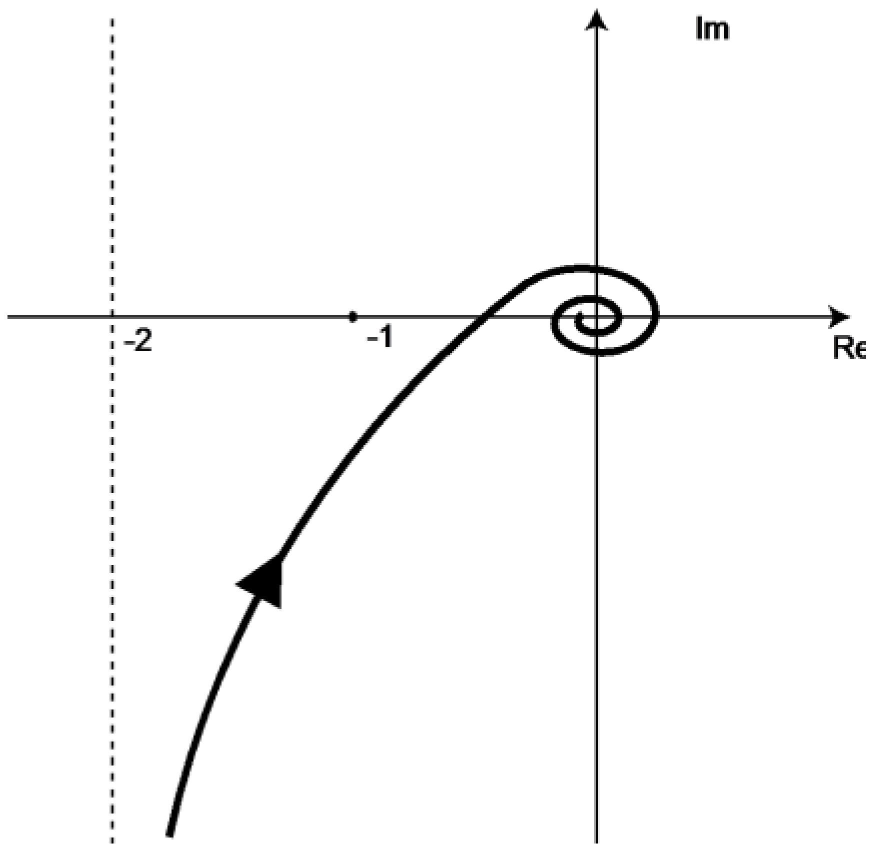
La soluzione a questa equazione può essere ricavata mediante una procedura numerica per tentativi e si ottiene

$$\omega_p \simeq 0.86 rad / \sec$$

$$\left|L\left(j\omega_p\right)\right| = \frac{1}{\omega_p\left(1+\omega_p^{\ 2}\right)\left(1+\omega_p^{\ 2}\right)^{1/2}} \simeq 0.501$$

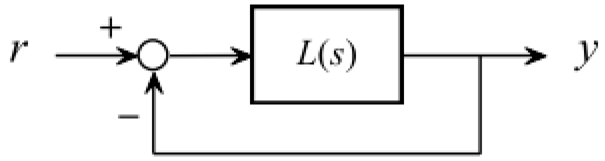
$$L\left(j\omega_p\right) \simeq -0.501$$

Il diagramma polare del guadagno di anello è del tipo:



Si può concludere che per il criterio di Nyquist il sistema retroazionato è ancora **instabile** poiché il d.p.c. non circonda in senso antiorario il punto critico -1+j0.

5. [punti 4] Sia dato il sistema retroazionato di figura dove $L(s) = \dfrac{1000}{(s+1)(s+2)(s+5)(s+10)}$.



a. Tracciare il diagramma di Nyquist di $L(j\omega)$ determinando in particolare l'intersezione con l'asse reale negativo.
b. Applicando il criterio di Nyquist studiare la stabilità del sistema retroazionato.

a. $L(jw) = \dfrac{1000}{(jw+1)(jw+2)(jw+5)(jw+10)}$

$L(j0) = 10$

$w \to +\infty \quad |L(jw)| \to 0 \quad \arg L(jw) \to -2\pi$

$1 + K L(s) = 0$ abbia radici puramente immaginarie

$1 + K \dfrac{1000}{(s+1)(s+2)(s+5)(s+10)} = 0 \qquad \beta := 1000\,K$

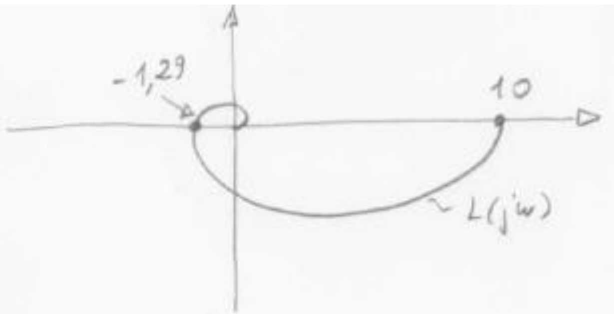
$s^4 + 18 s^3 + 97 s^2 + 180 s + 100 + \beta = 0$

4	1	97	$100+\beta$
3	$\cancel{18}$ 1	$\cancel{180}$ 10	0
2	87	$100+\beta$	0
1	$870-100-\beta$		

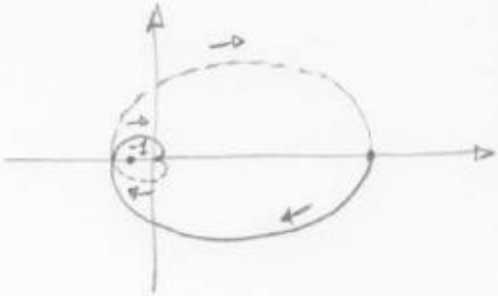
$770 - \beta = 0 \qquad \beta = 770$

$K = \dfrac{77}{100} = 0{,}77$

L'intersezione avviene in $-\dfrac{1}{K} = -\dfrac{100}{77} = -1{,}2987$

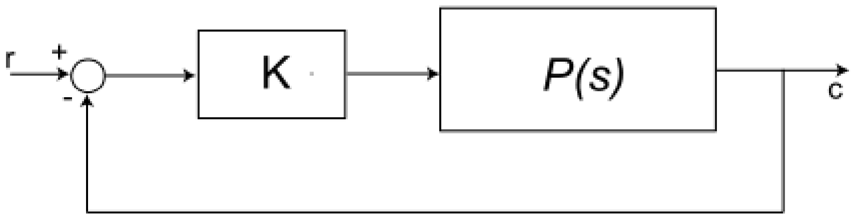


b.



Il diagramma polare completo circonda due volte, in senso orario, il punto critico −1. L(s) non ha poli a parte reale positiva, quindi per il Criterio di N. il sistema retroazionato è instabile.

5. [punti 4.5] Sia dato il sistema retroazionato di figura



dove $P(s) = \dfrac{s^2}{(s^3 - 8)(s-1)}$.

1. Posto $K = 10$ tracciare il diagramma di Nyquist del guadagno di anello *L(s)* del sistema determinando in particolare le intersezioni con l'asse reale.
2. Nelle condizioni di cui al punto 1) studiare la stabilità del sistema retroazionato utilizzando il criterio di Nyquist.

Sia $L(s) := K \cdot P(s) = \dfrac{10s^2}{(s^3-8)(s-1)}$

$$L(j\omega) = \frac{10(j\omega)^2}{\left[(j\omega)^3-8\right](j\omega-1)} = \frac{10\omega^2}{(j\omega^3+8)(j\omega-1)}$$

$$|L(j\omega)| = \frac{10\omega^2}{(\omega^6+64)^{1/2}\cdot(\omega^2+1)^{1/2}}$$

$$\arg L(j\omega) = \pi - arctg\frac{\omega^3}{8} + arctg\omega$$

Studio del diagramma polare di $L(j\omega)$:

Comportamento per $\omega \to 0^+$:
Il diagramma polare parte da un punto dell'asse reale e precisamente da:

$$\lim_{\omega\to 0^+} |L(j\omega)| = 0$$

$$\lim_{\omega\to 0^+} \arg L(j\omega) = \pi$$

Comportamento per $\omega \to \infty$:
Il diagramma termina nell'origine tangente a uno degli assi coordinati, essendo

$$\lim_{\omega\to\infty} |L(j\omega)| = 0$$

$$\lim_{\omega\to\infty} \arg L(j\omega) = \pi$$

Calcolo dell'intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo:

$$\arg L(j\omega_p) = -\pi$$

$$\pi - arctg\frac{\omega_p{}^3}{8} + arctg\omega_p = -\pi$$

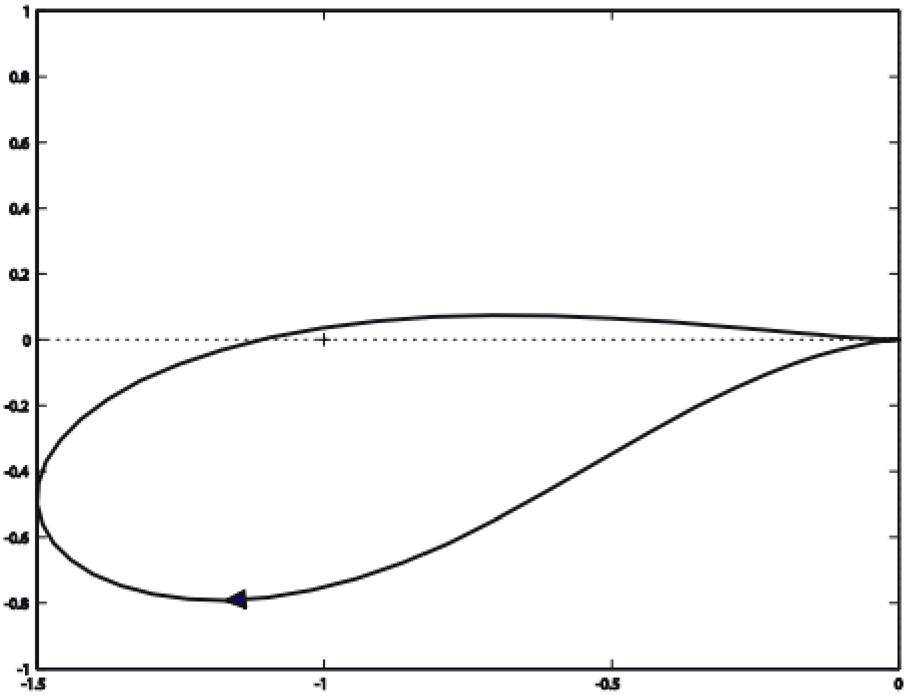
$$arctg\omega_p - arctg\frac{\omega_p{}^3}{8} = -2\pi$$

$$\omega_p = 2\sqrt{2}rad/\sec$$

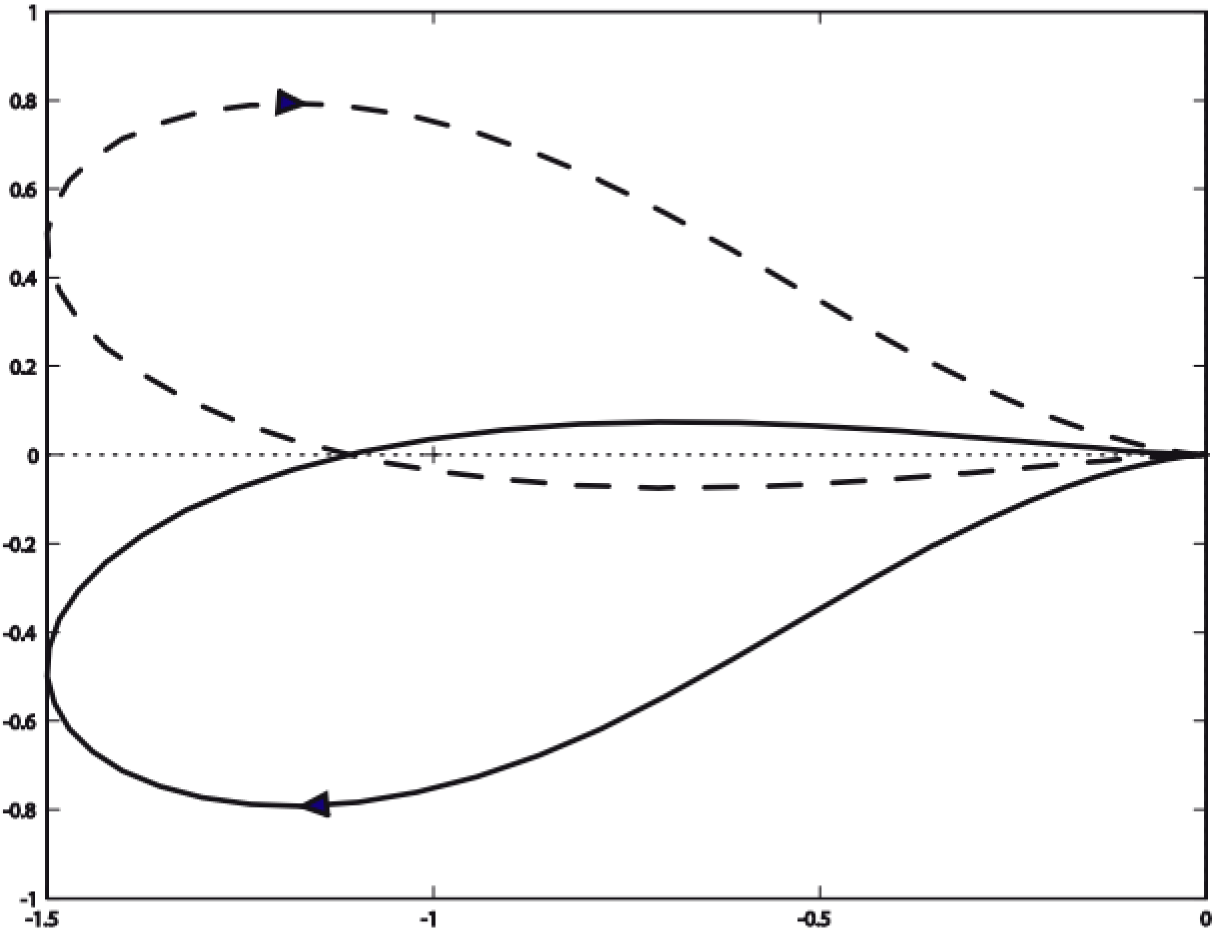
$$|L(j\omega_p)| = \frac{10\cdot(2\sqrt{2})^2}{\left((2\sqrt{2})^6+64\right)^{1/2}\cdot\left((2\sqrt{2})^2+1\right)^{1/2}} = 1.1111$$

$$L(j\omega_p) = -1.1111$$

Il diagramma polare del guadagno di anello risulta pertanto:



2) Il diagramma polare completo è:

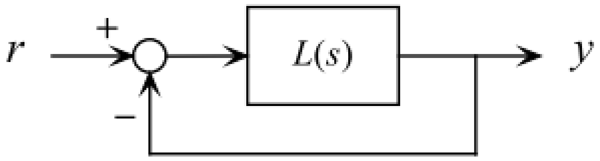


Mediante divisione polinomiale (col metodo di Ruffini per esempio) si constata che $s^3-8=(s-2)(s^2+2s+4)$; quindi s^3-8 ha una radice (semplice) a parte reale positiva ($+2$) e due radici a parte reale negativa.

Il sistema ad anello aperto presenta dunque due poli a parte reale positiva (+1, +2) quindi per il Criterio di Nyquist il sistema retroazionato è asintoticamente stabile se e solo se il d.p.c. circonda due volte in senso antiorario il punto critico -1.

Considerato che in effetti il d.p.c. circonda due volte il punto critico <u>in senso orario</u> si conclude che il sistema retroazionato è **instabile** (a causa di quattro poli a parte reale positiva)

5. [punti 4.5] Sia dato il sistema retroazionato di figura dove $L(s)=10\dfrac{(s+1)(s+2)}{s^3}$.



a. Tracciare il diagramma di Nyquist di $L(j\omega)$ determinando le eventuali intersezioni con l'asse reale negativo.
b. Studiare la stabilità del sistema retroazionato applicando il Criterio di Nyquist.

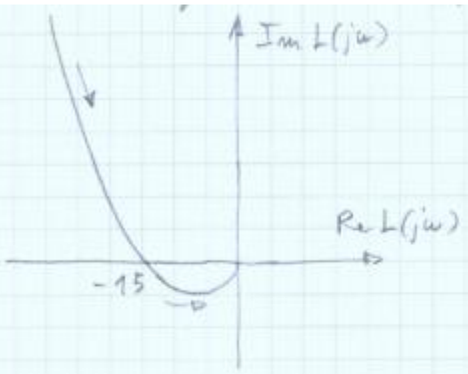
a) $L(j\omega) = 10\,\dfrac{(j\omega+1)(j\omega+2)}{(j\omega)^3}$

$\arg L(j\omega) = \text{arctg}\,\omega + \text{arctg}\,\dfrac{\omega}{2} - 3\cdot\dfrac{\pi}{2}$

$\omega \to 0+ \quad |L(j\omega)| \to +\infty \quad \arg L(j\omega) \to -3\cdot\dfrac{\pi}{2}$

$\omega \to +\infty \quad |L(j\omega)| \to 0 \quad \arg L(j\omega) \to -\dfrac{\pi}{2}$

Per ω piccolo e positivo $\arg L(j\omega) \simeq \omega + \dfrac{\omega}{2} - 3\cdot\dfrac{\pi}{2} > -3\dfrac{\pi}{2}$, quindi il diagramma di N. emerge da un punto all'infinito del secondo quadrante di $\mathbb{C}$.



Determinazione dell'intersezione con l'asse reale

$$1+K\frac{(s+1)(s+2)}{s^3}=0\ ,\quad K\neq 0$$

$$s^3+Ks^2+3Ks+2K=0$$

3 | 1   3K   0

2 | K   2K   0

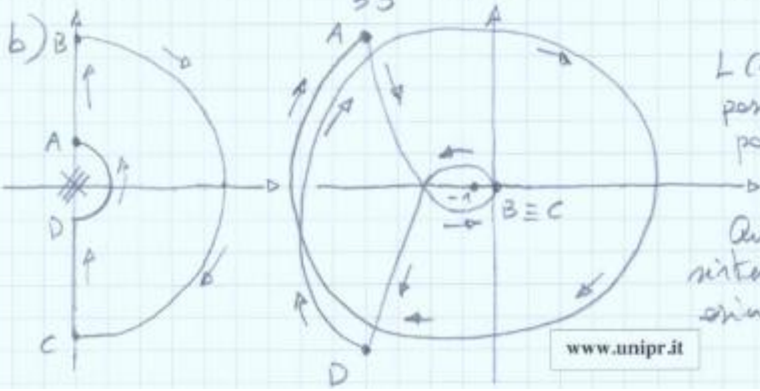
1 | $3K^2-2K$ 0

$$K(3K-2)=0 \qquad K=\frac{2}{3}$$

L'eq. $1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}L(s)=0$ ha radici puramente immaginarie.

$\exists\ \omega>0 \ni 1+\frac{2}{30}L(j\omega)=0 \qquad L(j\omega)=-15$

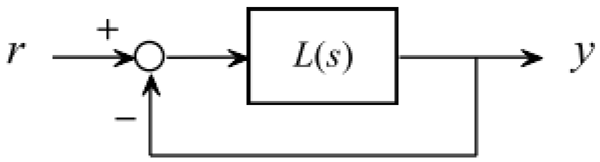
b)



L(s) non ha poli a parte reale positiva. Il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto −1.

Quindi per il criterio di N. il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

2. [punti 6] Sia dato il sistema retroazionato di figura dove $L(s)=10\dfrac{s+2}{s^2(s+1)}$.



a. Tracciare il diagramma di Nyquist di $L(j\omega)$ determinando le eventuali intersezioni con l'asse reale negativo.
b. Studiare la stabilità del sistema retroazionato applicando il Criterio di Nyquist.

a)
$$L(j\omega) = 10\,\frac{j\omega+2}{(j\omega)^2(j\omega+1)}$$

$$\arg L(j\omega) = -\pi + \operatorname{arctg}\frac{\omega}{2} - \operatorname{arctg}\omega$$

$\omega \to 0 \quad \arg L(j\omega) \to -\pi \qquad |L(j\omega)| \to +\infty$

$\omega \to +\infty \quad \arg L(j\omega) \to -\pi \qquad |L(j\omega)| \to 0$

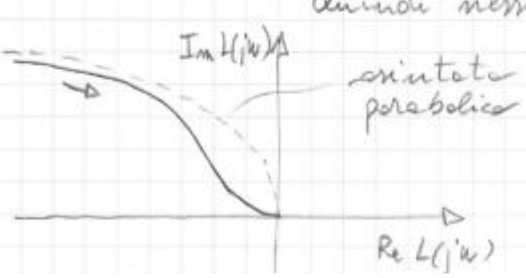
Per ω piccolo e positivo : $\arg L(j\omega) \cong -\pi + \frac{\omega}{2} - \omega = -\pi - \frac{\omega}{2} < -\pi$

$\Rightarrow$ emergenza del diagramma polare dal secondo quadrante.

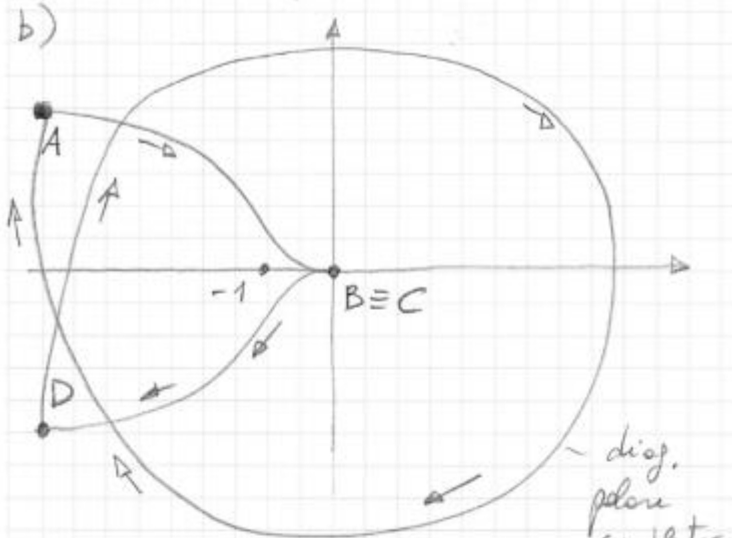
$\arg L(j\omega) = -\pi$ con $\omega > 0$: $\operatorname{arctg}\frac{\omega}{2} - \operatorname{arctg}\omega = 0$

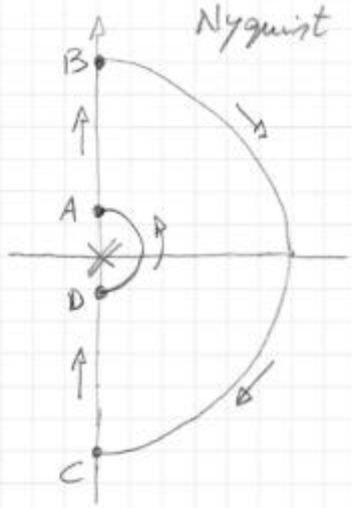
$$\frac{\frac{\omega}{2} - \omega}{1 + \frac{\omega}{2}\cdot\omega} = 0 \qquad -\frac{1}{2}\omega = 0$$ nessuna soluzione per $\omega > 0$

Quindi nessuna intersezione con l'asse reale negativo.



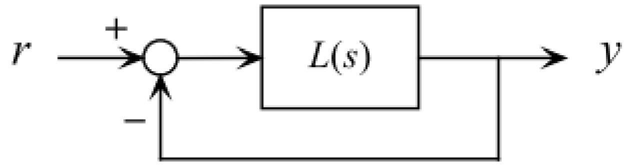
b)





$L(s)$ non ha poli a parte reale positiva. Per il Criterio di N. la stabilità asint. sussiste quando il d.p.c. non circonda né tocca il punto -1. In questo caso il d.p.c. circonda 2 volte -1. Quindi il sistema ret. è instabile.

5. [punti 4,5] Sia dato il seguente sistema retroazionato



dove $L(s) = 10 \cdot \dfrac{1+10s}{(s+1)(s+2)(s+3)}$.

1. Tracciare il diagramma polare di $L(j\omega)$ determinando le eventuali intersezioni con l'asse reale.
2. Studiare mediante il criterio di Nyquist la stabilità del sistema retroazionato.

5.

$\boxed{1.}$ $L(j\omega) = 10 \dfrac{1+10j\omega}{(1+j\omega)(2+j\omega)(3+j\omega)}$

$\arg L(j\omega) = \mathrm{arctg}\, 10\omega - \mathrm{arctg}\, \omega - \mathrm{arctg}\, \frac{\omega}{2} - \mathrm{arctg}\, \frac{\omega}{3}$

per ω piccolo $\arg L(j\omega) \simeq 10\omega - \omega - \frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{3} = \frac{49}{6}\omega$,

quindi per ω piccolo e positivo $\arg L(j\omega) > 0$.

$\omega \to +\infty$ $\arg L(j\omega) \to -\pi$, $|L(j\omega)| \to 0$

$L(j0) = \frac{5}{3} = 1.\bar{6}$

Calcolo intersezioni: $1 + \eta L(s) = 0$ abbia radici pur. im.

$1 + \eta \cdot 10 \dfrac{1+10s}{(s+1)(s+2)(s+3)} = 0$, $K := 10\eta$

$$1 + K\frac{1+10s}{(s^2+3s+2)(s+3)} = 0, \quad s^3+6s^2+(11+10K)s+6+K=0$$

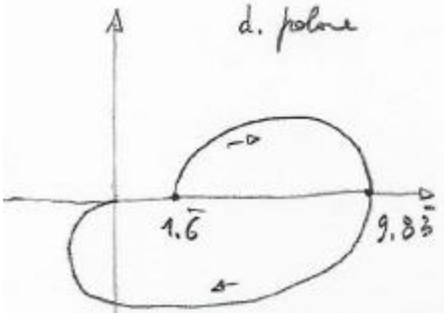
$$\begin{array}{c|ccc}
3 & 1 & 11+10K & 0 \\
2 & 6 & 6+K & 0 \\
1 & 60+59K & 0 &
\end{array}$$

Si impone $60+59K=0$

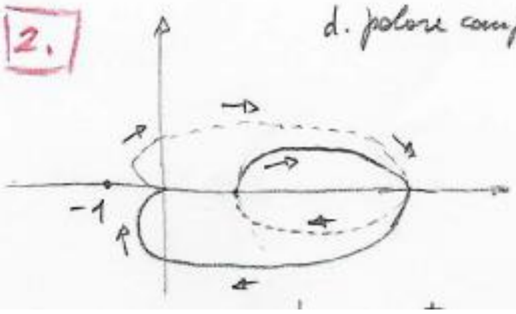
$K=-\frac{60}{59}$. Per questo valore l'eq. ausiliaria $6s^2+6+K=0$ ammette radici pur. im.

$$\eta = \frac{K}{10} = -\frac{6}{59}$$

Da $1+\eta L(j\omega)=0$ segue $L(j\omega) = -\frac{1}{\eta} = \frac{59}{6} = 9.8\bar{3}$



$\boxed{2.}$



Il diagramma polare completo non tocca né circonda -1 e $L(s)$ non ha poli a parte reale positiva. Per il criterio di N. il sistema retroazionato è asintoticamente stabile

5. [punti 4.5] Dato un sistema retroazionato con guadagno di anello

$$L(s) = 50\frac{(s+1)^2}{s^3(s+10)}$$

1. Tracciare il diagramma polare di $L(j\omega)$ determinando le eventuali intersezioni con l'asse reale.
2. Studiare la stabilità del sistema retroazionato con il Criterio di Nyquist.

5.

1)

$$L(j\omega) = \frac{50(j\omega+1)^2}{(j\omega)^3(j\omega+10)}$$

$$|L(j\omega)| = \frac{50(1+\omega^2)}{\omega^3(100+\omega^2)^{1/2}}$$

$$\arg L(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi - arctg0.1\omega + 2arctg\omega$$

Studio del diagramma polare di $L(j\omega)$:

Comportamento per $\omega \to 0^+$:
Il diagramma polare parte da un punto all'infinito

$$\lim_{\omega\to 0+} \left| L(j\omega) \right| = \infty$$

$$\lim_{\omega\to 0^+} \arg L(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi$$

Comportamento per $\omega \to \infty$:
Il diagramma termina nell'origine tangente a uno degli assi coordinati, essendo

$$\lim_{\omega\to\infty} \left| L(j\omega) \right| = 0$$

$$\lim_{\omega\to\infty} \arg L(j\omega) = -\pi$$

Calcolo dell'intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo:

$$\arg L(j\omega_p) = -\pi$$

$$-\frac{3}{2}\pi - arctg 0.1\omega + 2 arctg\omega = -\pi$$

$$-arctg 0.1\omega + 2 arctg\omega = \frac{\pi}{2}$$

$$1 + tg(2 arctg\omega) \cdot 0.1\omega = 0$$

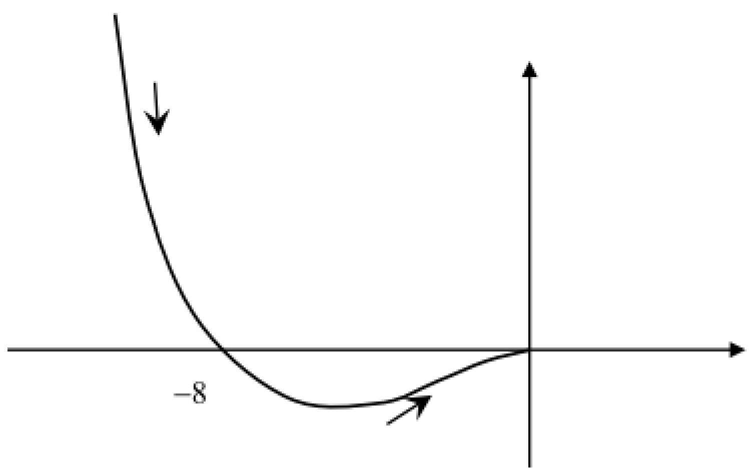
$$1 + \frac{2\omega}{1-\omega^2} \cdot \frac{\omega}{10} = 0$$

$$\omega_p = \sqrt{5/4} \simeq 1.118 rad/\sec$$

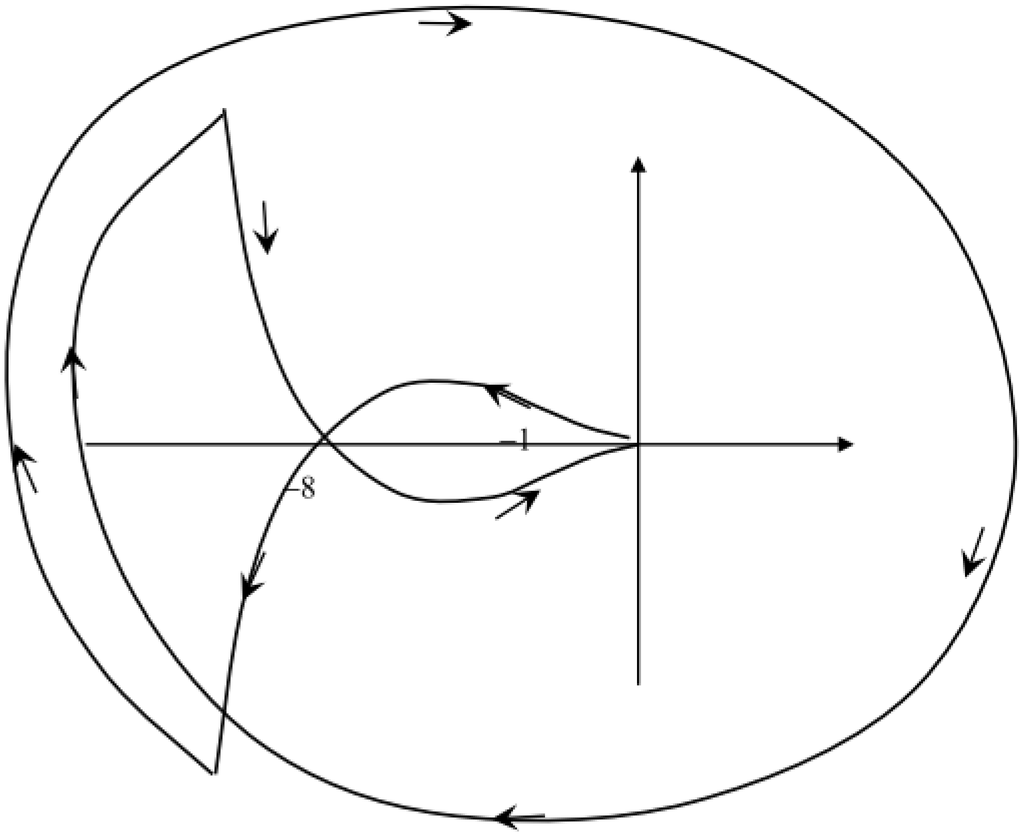
$$\left| L(j\omega_p) \right| = 8$$

$$L(j\omega_p) = -8$$

Il diagramma polare del guadagno di anello risulta pertanto:



2) Il diagramma polare completo è:



Si può concludere che per il criterio di Nyquist il sistema retroazionato è **asintoticamente stabile**. Infatti considerato che non ci sono poli a parte reale positiva del guadagno di anello, il numero totale di giri del diagramma polare completo attorno al punto critico -1 è nullo.

3. [punti 5] Dato un sistema di equazione $D^2y+4Dy+4y=D^2u+2Du+u$ sia noto che per $t<0$ ingresso ed uscita evolvono secondo le leggi: $u(t)=2e^{-t}$, $y(t)=e^{-2t}$. All'istante $t=0$ viene applicato il segnale $u(t)=10,\ t\geq 0$:

1) verificare la correttezza dell'evoluzione del sistema per $t<0$;
2) determinare l'uscita $y(t)$ del sistema per $t\geq 0$.

3.

1) $Du=-2e^{-t}$ $\quad D^2u=2e^{-t}$ $\quad Dy=-2e^{-2t}$ $\quad D^2y=4e^{-2t}$

$$4e^{-2t}+4(-2e^{-2t})+4(e^{-2t})=$$

$$=2e^{-t}+2(-2e^{-t})+2e^{-t}$$ OK! vero $\forall t<0$

2) determinazione delle condizioni iniziali al tempo $t=0-$.

$y(t)=e^{-2t} \Rightarrow y(0-)=1$

$Dy=-2e^{-2t} \Rightarrow Dy(0-)=-2$

$u(t)=2e^{-t} \Rightarrow u(0-)=2$

$Du(t)=-2e^{-t} \Rightarrow Du(0-)=-2$

$$s^2Y(s)-sy(0-)-Dy(0-)+4\big(sY(s)-y(0-)\big)+4Y(s)=$$

$$=s^2U(s)-su(0-)-Du(0-)+2\big(sU(s)-u(0-)\big)+U(s)$$

$$s^2Y(s)-s+2+4\big(sY(s)-1\big)+4Y(s)=$$

$$=s^2U(s)-2s+2+2\big(sU(s)-2\big)+U(s)$$

$$(s^2+4s+4)\,Y(s) - s - \cancel{2} =$$

$$= (s^2+2s+1)\,U(s) - 2s - \cancel{2}$$

$$(s^2+4s+4)\,Y(s) = (s^2+2s+1)\,U(s) - s$$

$$Y(s) = \frac{s^2+2s+1}{s^2+4s+4}\,U(s) - \frac{s}{s^2+4s+4}$$

$$Y(s) = \frac{(s+1)^2}{(s+2)^2}\cdot\frac{10}{s} - \frac{s}{(s+2)^2}$$

$$= \frac{10(s+1)^2 - s^2}{s(s+2)^2} =$$

$$= \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{(s+2)^2} + \frac{K_{22}}{s+2}$$

$$K_1 = \left.\frac{10(s+1)^2 - s^2}{(s+2)^2}\right|_{s=0} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$K_{21} = \left.\frac{10(s+1)^2 - s^2}{s}\right|_{s=-2} = \frac{10-4}{-2} = -3$$

$$K_1 + K_{22} = 9 \implies K_{22} = 9 - \frac{5}{2} = \frac{18-5}{2} = \frac{13}{2}$$

(OK! verificato con altro metodo)

$$Y(s) = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{s} - 3\cdot\frac{1}{(s+2)^2} + \frac{13}{2}\cdot\frac{1}{s+2}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{5}{2} - 3\,t\,e^{-2t} + \frac{13}{2}\,e^{-2t}}$$

3. [punti 4] Dato un sistema con funzione di trasferimento $G(s)=\frac{1}{s+1}$, a partire da condizioni iniziali nulle, determinarne la risposta $y(t),\ t\in[0,+\infty)$ al segnale di ingresso così definito:

$$u(t)=\begin{cases} 2t+2 & 0\le t<\frac{1}{2} \\ 1 & t\ge\frac{1}{2} \end{cases}$$

* $y(t),\ t\in[0,\frac{1}{2})$

$$U(s)=2\cdot\frac{1}{s^2}+2\cdot\frac{1}{s}=2\cdot\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}+1\right)=2\frac{1}{s}\cdot\frac{1+s}{s}$$

$$Y(s)=G(s)U(s)=\frac{1}{\cancel{s+1}}\cdot\frac{2\cancel{(1+s)}}{s^2}=\frac{2}{s^2}$$

$$y(t)=2t,\quad 0\le t<\frac{1}{2}$$

* $y(t),\quad t\in[\frac{1}{2},+\infty)$

$G(s)$ è asintoticamente stabile, quindi

$$y(t)=G(0)\cdot 1+y_{tran.}(t)=1+y_{tran.}(t)$$

$$y_{tran.}(t)=c\cdot e^{-t},\quad c\in\mathbb{R}\quad (\text{evoluzione libera})$$

$$y(t)\in C^{g-1}(\mathbb{R});\quad g=1\Rightarrow y(t)\in C^{0}(\mathbb{R})$$

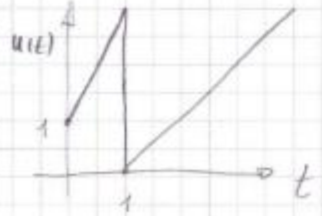
$$y\left(\tfrac{1}{2}-\right)=y\left(\tfrac{1}{2}+\right)$$

$$2\cdot\frac{1}{2}=1+c\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\right\}\quad \text{da cui}\quad c=0$$

Quindi $y(t)=1,\quad t\geq\frac{1}{2}.$

3. [punti 5] Dato un sistema con funzione di trasferimento $G(s)=\dfrac{1}{s+1}$, a partire da condizioni iniziali nulle, determinarne la risposta $y(t),\ t\in[0,+\infty)$ al segnale di ingresso così definito:

$$u(t)=\begin{cases}1+2t & 0\le t<1\\ t-1 & t\ge 1\end{cases}$$



$$G(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$u(t)=\begin{cases}1+2t & t\in[0,1)\\ t-1 & t\geq 1\end{cases}$$

1° metodo

$$u(t)=1+2t-(1+2t)1(t-1)+(t-1)\cdot 1(t-1)$$
$$=1+2t-(t+2)1(t-1)=1+2t-\left[(t-1)+3\right]1(t-1)$$

$$G(s)=\frac{1}{s+1}\qquad u(t)=1+2t-\left[(t-1)+3\right]\cdot 1(t-1)$$

$$U(s)=\frac{1}{s}+2\cdot\frac{1}{s^2}-e^{-s}\left(\frac{1}{s^2}+3\cdot\frac{1}{s}\right)$$
$$=\frac{s+2}{s^2}-e^{-s}\cdot\frac{1+3s}{s^2}$$

$$Y(s)=G(s)U(s)=\frac{1}{s+1}\cdot\frac{s+2}{s^2}-e^{-s}\frac{1+3s}{s^2}\cdot\frac{1}{s+1}=$$
$$=\frac{s+2}{s^2(s+1)}-e^{-s}\cdot\frac{1+3s}{s^2(s+1)}$$

$$\frac{s+2}{s^2(s+1)}=\frac{c_{11}}{s^2}+\frac{c_{12}}{s}+\frac{c_2}{s+1}=\frac{2}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}$$

$$c_{11}=\left.\frac{s+2}{s+1}\right|_{s=0}=2\qquad c_2=\left.\frac{s+2}{s^2}\right|_{s=-1}=1$$

$$c_{12}+c_2=0\qquad c_{12}=-c_2=-1$$

$$\frac{1+3s}{s^2(s+1)} = \frac{c_{11}}{s^2} + \frac{c_{12}}{s} + \frac{c_2}{s+1} = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1}$$

$$c_{11} = \left.\frac{1+3s}{s+1}\right|_{s=0} = 1 \qquad c_2 = \left.\frac{1+3s}{s^2}\right|_{s=-1} = -2$$

$$c_{12} + c_2 = 0 \qquad c_{12} = 2$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1}\right)\right] =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1}\right](t-1) \cdot 1(t-1)$$

$$= 2t - 1 + e^{-t} - \left[(t-1) + 2 - 2e^{-(t-1)}\right] \cdot 1(t-1)$$

Se $t \in [0,1)$ $\quad y(t) = 2t - 1 + e^{-t}$

Se $t \in [1,+\infty)$

$$y(t) = 2t - 1 + e^{-t} - \left[t - 1 + 2 - 2 \cdot e^{-(t-1)}\right]$$

$$= t - 2 + e^{-t} + 2e^{-(t-1)}$$

$$= t - 2 + e^{-t}(1 + 2e)$$

3. [punti 5] Determinare l'evoluzione forzata $y(t)$ in risposta alla rampa $u(t) = 2t \cdot 1(t)$ di un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{1}{(s+2)^3(s+1)}$. Determinare inoltre il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$.

$$U(s) = \mathcal{L}[2t \cdot 1(t)] = \frac{2}{s^2}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2}{s^2(s+2)^3(s+1)}$$

$$Y(s) = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_{21}}{(s+2)^3} + \frac{K_{22}}{(s+2)^2} + \frac{K_{23}}{s+2} + \frac{K_3}{s+1}$$

$$K_{11} = \left.\frac{2}{(s+2)^3(s+1)}\right|_{s=0} = \frac{1}{4}$$

$$K_{21} = \left.\frac{2}{s^2(s+1)}\right|_{s=-2} = -\frac{1}{2} \qquad K_3 = \left.\frac{2}{s^2(s+2)^3}\right|_{s=-1} = 2$$

$$K_{12} = D\left[\frac{2}{(s+2)^3(s+1)}\right]_{s=0} = -\frac{5}{8}$$

$$K_{22} = D\left[\frac{2}{s^2(s+1)}\right]_{s=-2} = -1$$

$$K_{12} + K_{23} + K_3 = 0 \Rightarrow K_{23} = -\frac{11}{8}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{4}t - \frac{5}{8} - \frac{1}{4}t^2 e^{-2t} - t e^{-2t} - \frac{11}{8} e^{-2t} + 2e^{-t}$$

per $t > 0$

Si noti che $u(t) \in \overline{C^{0,\infty}}$ ed il grado relativo di $G(s)$ è $\rho = 4$. Dalla nota proprietà

$$u(t) \in \overline{C^{0,\infty}} \Leftrightarrow y(t) \in \overline{C^{4,\infty}}$$

Quindi il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$ è 4.

3. [punti 4,5] Sia dato un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \frac{s^2+1}{(s+2)^2}$ in cui si introduce l'ingresso $u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 5\sin(t) & t \geq 0 \end{cases}$.
Determinare le condizioni iniziali sull'uscita al tempo 0^-, $y(0^-)$ e $Dy(0^-)$ affinché l'uscita sia identicamente nulla per $t \geq 0$: $y(t) = 0, t \geq 0$.

$$G(s) = \frac{s^2+1}{s^2+4s+4}$$

Eq. differenziale $D^{*2}y(t) + 4D^{*}y(t) + 4y(t) = D^{*2}u(t) + u(t)$

$y_- := y(0^-) \quad Dy_- := Dy(0^-)$

$$s^2 Y - y_- s - Dy_- + 4(sY - y_-) + 4Y = s^2 U + U$$

$$(s^2+4s+4)Y = (s^2+1)U + y_- s + Dy_- + 4y_-$$

$$Y(s) = \frac{s^2+1}{s^2+4s+4} U(s) + \frac{y_- s + Dy_- + 4y_-}{s^2+4s+4}$$

$$U(s) = \mathcal{L}[5\sin(t)] = 5 \cdot \frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{\cancel{s^2+1}}{s^2+4s+4} \cdot \frac{5}{\cancel{s^2+1}} + \frac{y_- s + Dy_- + 4y_-}{s^2+4s+4}$$

Impongo $Y(s) = 0 \Leftrightarrow y(t) = 0, t \geq 0$

$$5 + y_- s + Dy_- + 4y_- = 0 \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} y_- = 0 \\ Dy_- = -5 \end{cases}}$$

Altro metodo:

$$\begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ a_1 & a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_+ - y_- \\ Dy_+ - Dy_-\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 & 0 \\ b_1 & b_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_+ - u_- \\ Du_+ - Du_-\end{bmatrix}$$

$$y(t)=0,\ t\geq 0 \Rightarrow y_+=0,\ Dy_+=0$$

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 5\sin(t) & t\geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u_-=0, & Du_-=0\\ u_+=0 & Du_+=5\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -y_- \\ -Dy_-\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 5\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}-y_-=0\\ -4y_- - Dy_- = 5\end{cases} \qquad \begin{cases}y_-=0\\ Dy_-=-5\end{cases}$$

3. [punti 4,5] Determinare la risposta forzata $y(t)$ di un sistema dinamico avente funzione di trasferimento $G(s)=\dfrac{32}{(s+2)^3(s+4)}$ al segnale di ingresso $u(t)=t\cdot 1(t)$. Determinare inoltre il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$.

$$U(s)=\frac{1}{s^2} \qquad Y(s)=G(s)\,U(s)=\frac{32}{s^2(s+2)^3(s+4)}$$

$$=\frac{K_{11}}{s^2}+\frac{K_{12}}{s}+\frac{K_{21}}{(s+2)^3}+\frac{K_{22}}{(s+2)^2}+\frac{K_{23}}{s+2}+\frac{K_3}{s+4}$$

RESIDUI

$$K_{11}=\left.\frac{32}{(s+2)^3(s+4)}\right|_{s=0}=\frac{32}{32}=1$$

$$K_{21}=\left.\frac{32}{s^2(s+4)}\right|_{s=-2}=\frac{32}{4\cdot 2}=4$$

$$K_3=\left.\frac{32}{s^2(s+2)^3}\right|_{s=-4}=\frac{32}{4\cdot 4\cdot(-8)}=-\frac{1}{4}$$

$$K_{12}+K_{23}+K_3=0 \qquad \boxed{K_{12}+K_{23}=\frac{1}{4}}$$

calcolo di K_{12}: $K_{12}=D\left[\dfrac{32}{(s+2)^3(s+4)}\right]_{s=0}=-\dfrac{7}{4}$

$$=-(32)\left.\frac{3(s+2)^2(s+4)+(s+2)^3}{(s+2)^6(s+4)^2}\right|_{s=0}=-32\cdot\frac{3\cdot4\cdot4+4\cdot2}{2^6\cdot4^2}=-8\,\frac{3\cdot4+2}{2^3\cdot2\cdot4}=$$

3. [punti 4,5] Un sistema dinamico ha funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}$. L'ingresso applicato è $u(t) = 0$ per ogni $t \geq 0$ e dell'uscita si conosce che $y(0+) = 0$ e $Dy(0+) = 1$. Determinare $y(t)$ per $t \geq 0$.

Soluzione

Metodo dei modi: $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$

$Dy(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t}$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 - 2c_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} c_2 = -c_1 \\ -c_1 - 2(-c_1) = 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} c_2 = -1 \\ c_1 = 1 \end{matrix}$$

Quindi $y(t) = e^{-t} - e^{-2t}$

Metodo dell'eq. differenziale: $G(s) = \dfrac{s+3}{s^2+3s+2}$

$D^2 y(t) + 3Dy(t) + 2y(t) = Du(t) + 3u(t)$

Applichiamo la Trasformata di Laplace

$s^2 Y - y(0+)s - Dy(0+) + 3(sY - y(0+)) + 2Y = 0$

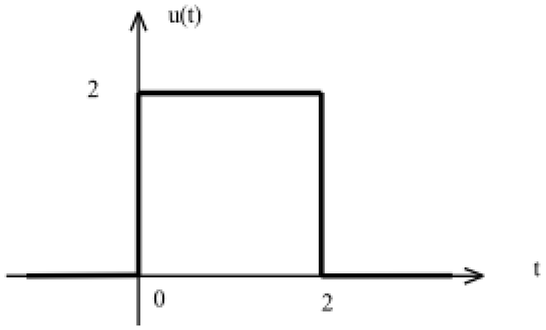
$(s^2+3s+2)Y - 1 = 0 \qquad Y = \dfrac{1}{s^2+3s+2}$

$Y(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} = \dfrac{K_1}{s+1} + \dfrac{K_2}{s+2} = \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s+2}$

$K_1 = \left.\dfrac{1}{s+2}\right|_{s=-1} = 1 \qquad K_1 + K_2 = 0 \qquad K_2 = -1$

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = e^{-t} - e^{-2t}$

3. [punti 4] Dato un sistema con funzione di trasferimento $G(s)=\dfrac{8}{(s+2)(s+4)}$ determinare la risposta forzata $y(t)$ (per $t>0$) al segnale di ingresso definito in figura:



$$u(t) = 2\cdot 1(t) - 2\cdot 1(t-2)$$

$$U(s) = 2\cdot\frac{1}{s} - 2\cdot e^{-2s}\cdot\frac{1}{s}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{8}{(s+2)(s+4)}\left\{2\cdot\frac{1}{s} - 2\,e^{-2s}\cdot\frac{1}{s}\right\} =$$

$$= \frac{16}{s(s+2)(s+4)} - e^{-2s}\cdot\frac{16}{s(s+2)(s+4)}$$

$$y_1(t) \triangleq \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{16}{s(s+2)(s+4)}\right]$$

$$Y(s) = Y_1(s) - e^{-2s}\,Y_1(s)$$

$$y(t) = y_1(t) - y_1(t-2)$$

Calcolo di $y_1(t)$:

$$\frac{16}{s(s+2)(s+4)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+4}$$

$$K_1 = \left.\frac{16}{(s+2)(s+4)}\right|_{s=0} = 2$$

$$K_2 = \left.\frac{16}{s(s+4)}\right|_{s=-2} = \frac{16}{(-2)\,2} = -4$$

$$K_3 = \left.\frac{16}{s(s+2)}\right|_{s=-4} = \frac{16}{(-4)(-2)} = 2$$

$$y_1(t) = \left[2 - 4e^{-2t} + 2e^{-4t}\right] \cdot 1(t)$$

$$y(t) = \left[2 - 4e^{-2t} + 2e^{-4t}\right] \cdot 1(t) - \left[2 - 4e^{-2(t-2)} + 2e^{-4(t-2)}\right] \cdot 1(t-2)$$

Per $t \in (0, 2)$

$$y(t) = 2 - 4e^{-2t} + 2e^{-4t}$$

Per $t \in [2, +\infty)$

$$y(t) = \cancel{2} - 4e^{-2t} + 2e^{-4t} - \cancel{2} + 4e^{-2(t-2)} - 2e^{-4(t-2)} =$$

$$= \left(e^{4} - 1\right) 4e^{-2t} + \left(1 - e^{8}\right) 2e^{-4t}$$

3. [punti 4] Determinare, a partire da condizioni iniziali nulle, la risposta in uscita $y(t)$ per $t > 0$ del sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \frac{8}{s+2}$ al segnale armonico in ingresso $u(t) = 4\sin(2t) \cdot 1(t)$.

3.

$$Y(s) = G(s)L[4\sin(2t)] = \frac{8}{s+2}\cdot\frac{4\cdot 2}{s^2+4} = \frac{64}{(s+2)(s+j2)(s-j2)}$$

$$Y(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+j2} + \frac{B^*}{s-j2}$$

$$A = (s+2)\frac{64}{(s+2)(s^2+4)}\bigg|_{s=-2} = 8$$

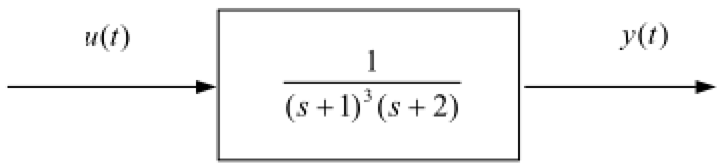
$$B = (s+j2)\frac{64}{(s+2)(s+j2)(s-j2)}\bigg|_{s=-j2} = -4+j4$$

Antitrasformando lo sviluppo in fratti semplici otteniamo:

$$y(t) = 8e^{-2t} + 2\left|-4+j4\right|\cos(-2t + \arg(-4+j4)) =$$
$$= 8e^{-2t} + 8\sqrt{2}\sin(2t - \pi/4)$$

Nota: Il termine armonico asintotico poteva essere dedotto direttamente utilizzando il Teorema di Analisi Armonica.

3. [punti 4] Sia dato il sistema di figura con funzione di trasferimento $P(s) = \dfrac{1}{(s+1)^3(s+2)}$.



Determinare l'evoluzione forzata $y(t)$ del sistema in figura in risposta al gradino unitario $u(t) = 1(t)$.

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)^3(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1)^3} + \frac{K_{22}}{(s+1)^2} + \frac{K_{23}}{s+1} + \frac{K_3}{s+2}$$

$$K_1 = \left.\frac{1}{(s+1)^3(s+2)}\right|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$K_{21} = \left.\frac{1}{s(s+2)}\right|_{s=-1} = \frac{1}{(-1)(1)} = -1$$

$$K_3 = \left.\frac{1}{s(s+1)}\right|_{s=-2} = \frac{1}{(-2)(-1)} = \frac{1}{2}$$

$$K_1 + K_{23} + K_3 = 0 \qquad K_{23} = -K_1 - K_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

$$K_{22} = \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s(s+2)}\right)\right|_{s=-1} = -\left.\frac{s+2+s}{s^2(s+2)^2}\right|_{s=-1} = 0$$

$$Y(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2 e^{-t} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \qquad t \geq 0$$

Il segnale u(t)=1(t) è discontinuo su R, quindi il grado massimo di continuità della risposta y(t) è {grado relativo} - 1 = 4 – 1 = 3

Il segnale u(t)=1(t) è discontinuo su R, quindi il grado massimo di continuità della risposta y(t) è {grado relativo} - 1 = 4 – 1 = 3

N.B.
Correzione sul calcolo di k_3:
k_3 = 1/(s (s+1)^3)|_{s=-2} = 1/2

3. [punti 5] Determinare la risposta $g_s(t)$ al gradino unitario di un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{1}{(s+2)\left[(s+1)^2+1\right]}$. Determinare inoltre la risposta $g(t)$ all'impulso unitario di tale sistema.

$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{1}{s(s+2)(s+1-j)(s+1+j)}$$

$$= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+1-j} + \frac{\overline{K_3}}{s+1+j}$$

$$K_1 = \left.\frac{1}{(s+2)\left[(s+1)^2+1\right]}\right|_{s=0} = \frac{1}{4}$$

$$K_2 = \left.\frac{1}{s\left[(s+1)^2+1\right]}\right|_{s=-2} = \frac{1}{(-2)[2]} = -\frac{1}{4}$$

$$K_3 = \left.\frac{1}{s(s+2)(s+1+j)}\right|_{s=-1+j} = \frac{1}{(-1+j)(-1+j+2)(-1+j+1+j)} =$$

$$= \frac{1}{(-1+j)(1+j)\,2j} = \frac{1}{[j^2-1]\,2j} = \frac{1}{(-2)\,2j} = \frac{1}{-4j}$$

$$= \frac{j}{-4j^2} = \frac{1}{4}j \qquad |K_3| = \frac{1}{4} \quad \arg K_3 = +\frac{\pi}{2}$$

$$g_s(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} + 2|K_3|\,e^{-t}\cdot\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = \quad \text{OK!!}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-t}\left[-\sin t\right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-t}\sin t$$

$$g_s(t) \in C^{\rho-1} \qquad \rho = 3 \qquad g_s(t) \in C^2$$

$$g(t) = D\,g_s(t) = \left(-\frac{1}{4}\right)(-2)e^{-2t} - \frac{1}{2}(-1)e^{-t}\sin t - \frac{1}{2}e^{-t}(\cos t) =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-t}\sin t - \frac{1}{2}e^{-t}\cos t \quad \text{ok!}$$

3. [punti 4] Determinare l'evoluzione forzata $y(t)$ in risposta alla rampa $u(t) = 2t \cdot 1(t)$ di un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{1}{(s+1)^4}$.

Determinare inoltre il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$.

$$u(t) = 2t \cdot 1(t) \qquad U(s) = \frac{2}{s^2}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2}{s^2(s+1)^4}$$

$$Y(s) = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1)^4} + \frac{K_{22}}{(s+1)^3} + \frac{K_{23}}{(s+1)^2} + \frac{K_{24}}{s+1}$$

$$K_{11} = \left.\frac{2}{(s+1)^4}\right|_{s=0} = 2 \qquad K_{21} = \left.\frac{2}{s^2}\right|_{s=-1} = 2$$

$$K_{12} = D\left[\frac{2}{(s+1)^4}\right]_{s=0} = -2\cdot\left.\frac{4(s+1)^{\cancel{3}\,0}}{(s+1)^{\cancel{8}\,5}}\right|_{s=0} = -8$$

$$K_{12} + K_{24} = 0 \implies K_{24} = -K_{12} = 8$$

$$K_{22} = D\left[\frac{2}{s^2}\right]_{s=-1} = -2\cdot\left.\frac{2\cancel{s}}{s^{\cancel{4}\,3}}\right|_{s=-1} = 4$$

$$K_{23} = \frac{1}{2}D^2\left[\frac{2}{s^2}\right]_{s=-1} = \frac{1}{2}(-4)\cdot D\left[\frac{1}{s^3}\right]_{s=-1} = -2\cdot(-1)\left.\frac{3\cdot s^2}{s^6}\right|_{s=-1} =$$

$$= 2\cdot\left.\frac{3}{s^4}\right|_{s=-1} = 6$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{8}{s} + \frac{2}{(s+1)^4} + \frac{4}{(s+1)^3} + \frac{6}{(s+1)^2} + \frac{8}{s+1}$$

$$y(t) = 2t - 8 + 2\cdot\frac{1}{3!}t^3e^{-t} + 4\cdot\frac{1}{2!}\cdot t^2\cdot e^{-t} + 6\cdot t\cdot e^{-t} + 8\cdot e^{-t}$$

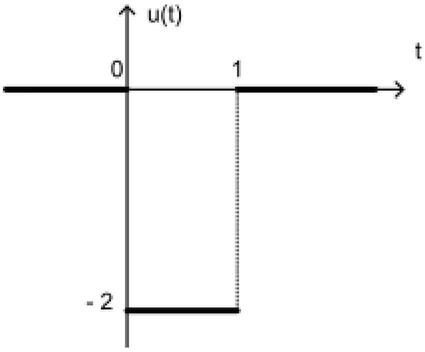
$$y(t) = 2t - 8 + \frac{1}{3}t^3e^{-t} + 2t^2e^{-t} + 6te^{-t} + 8\cdot e^{-t}$$

Si nota che $u(t) \in \overline{C^{0,\infty}}$ ed il grado relativo di $G(s)$ è $\rho = 4$.

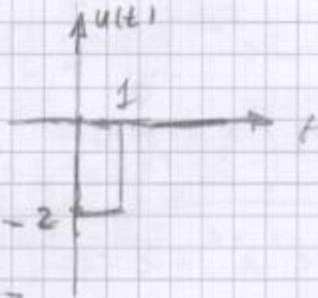
Quindi $u(t) \in \overline{C^{0,\infty}} \iff y(t) \in \overline{C^{4,\infty}}$.

Pertanto il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$ è 4.

3. [punti 4] Dato un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{8}{(s+1)(s+2)}$ determinare la risposta forzata $y(t),\ t \in [0, +\infty)$ al segnale di ingresso definito in figura:



B3. $G(s) = \dfrac{8}{(s+1)(s+2)}$



determinare $y(t)$ per $t > 0$

$u(t) = -2 \cdot 1(t)$ per $t \in [0,1]$

$U(s) = -2 \cdot \dfrac{1}{s}$ $\quad Y(s) = -2 \cdot \dfrac{1}{s} \cdot \dfrac{8}{(s+1)(s+2)} =$

$Y(s) = \dfrac{-16}{s(s+1)(s+2)} = \dfrac{K_1}{s} + \dfrac{K_2}{s+1} + \dfrac{K_3}{s+2}$

$K_1 = \left.\dfrac{-16}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=0} = \dfrac{-16}{1 \cdot 2} = -8 \qquad K_2 = \left.\dfrac{-16}{s(s+2)}\right|_{s=-1} = \dfrac{-16}{(-1)\cdot 1} = +16$

$K_1 + K_2 + K_3 = 0 \qquad K_3 = 8 - 16 = -8$

$y(t) = -8 + 16e^{-t} - 8e^{-2t} \qquad t \in [0,1]$

$Dy(t) = -16e^{-t} + 16e^{-2t}$

$Dy(0+) = -16 + 16 = 0 \qquad y(0+) = 0 \qquad$ ok!

$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$ per $t \geq 1$

$Dy(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t}$

$y(t) \in \overline{C^{g-1}}$, grado relativo $g = 2$

$\Rightarrow y(t) \in \overline{C^{1}}$

$$\begin{cases} y(1-) = y(1+) \\ Dy(1-) = Dy(1+) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8 + 16e^{-1} - 8e^{-2} = c_1 e^{-1} + c_2 e^{-2} \\ -16e^{-1} + 16e^{-2} = -c_1 e^{-1} - 2c_2 e^{-2} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} e^{-1} & e^{-2} \\ -e^{-1} & -2e^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8+16e^{-1}-8e^{-2} \\ -16e^{-1}+16e^{-2} \end{bmatrix}$$

$$c_1 = \frac{-2e^{-2}\left(-8+16e^{-1}-8e^{-2}\right) - \left(-16e^{-1}+16e^{-2}\right)e^{-2}}{-2e^{-1}\cdot e^{-2} + e^{-1}\cdot e^{-2}} =$$

$$= \frac{-2\left(-8+16e^{-1}-8e^{-2}\right) + 16e^{-1} - 16e^{-2}}{\underbrace{-2e^{-3}+e^{-3}}_{\cancel{\left(-e^{-3}\right)}\ \left(-e^{-1}\right)}} =$$

$$= \frac{16 - 32e^{-1} + \cancel{16e^{-2}} + 16e^{-1} - \cancel{16e^{-2}}}{-e^{-1}} = \frac{16-16e^{-1}}{-e^{-1}} =$$

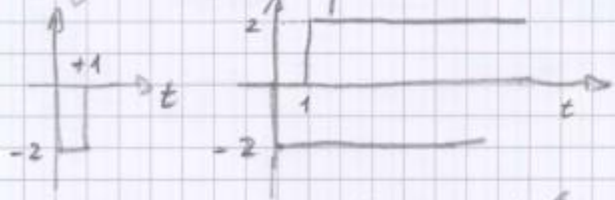
$$= -16\cdot e + 16 = 16 - 16\cdot e$$

$$c_2 = \frac{-\cancel{16e^{-2}} + 16e^{-3} - 8e^{-1} + \cancel{16e^{-2}} - 8e^{-3}}{-e^{-3}} =$$

$$= \frac{-8e^{-1} + 8e^{-3}}{-e^{-3}} = 8e^{2} - 8$$

determinazione di $y(t)\big|_{t \geq 0}$ con le sole proprietà della trasformata di Laplace

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-t_0 s}\mathcal{L}[f(t)]$$
$$f(t-t_0) = \mathcal{L}^{-1}[e^{-t_0 s}F(s)]$$



$$u(t) = -2 \cdot 1(t) + 2 \cdot 1(t-1)$$
$$U(s) = -2 \cdot \frac{1}{s} + 2 \cdot e^{-s} \cdot \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{-16}{s(s+1)(s+2)} + \frac{16}{s(s+1)(s+2)}e^{-s}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-16}{s(s+1)(s+2)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{16}{s(s+1)(s+2)}e^{-s}\right] =$$

$$= \left(-8 + 16e^{-t} - 8e^{-2t}\right)\cdot 1(t) + \left(+8 - 16e^{-(t-1)} + 8e^{-2(t-1)}\right)1(t-1)$$

Quindi per $t \in [0,1)$: $y(t) = -8 + 16e^{-t} - 8e^{-2t}$

Per $t \geq 1$ $\quad y(t) = -\cancel{8} + 16e^{-t} - 8e^{-2t} + \cancel{8} - 16e^{-(t-1)} + 8e^{-2(t-1)} =$

$$= 16e^{-t} - 16e^{-t}\cdot e - 8e^{-2t} + 8e^{-2t}\cdot e^{2}$$

$$= (16-16e)e^{-t} + (-8+8e^{2})e^{-2t} \qquad \text{ok!}$$

3. [punti 4] Determinare l'evoluzione forzata $y(t)$ in risposta al gradino unitario $u(t)=1(t)$ di un sistema con funzione di trasferimento $G(s)=\dfrac{s-2}{(s+2)^3(s+1)}$.

Determinare inoltre il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$.

$$Y(s)=\frac{s-2}{s(s+2)^3(s+1)}.$$

Dallo sviluppo in fratti semplici:

$$Y(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{(s+2)^3}+\frac{C}{(s+2)^2}+\frac{D}{s+2}+\frac{E}{s+1}$$

$$A=\left.\frac{s-2}{(s+2)^3(s+1)}\right|_{s=0}=-\frac{1}{4}$$

$$B=\left.\frac{s-2}{s(s+1)}\right|_{s=-2}=-2$$

$$E=\left.\frac{s-2}{s(s+2)^3}\right|_{s=-1}=3$$

L'ordine relativo di Y(s) è maggiore di uno:

$$\Rightarrow A+D+E=0 \Rightarrow D=-\frac{11}{4}$$

$$C=\left.\frac{d}{ds}\left[\frac{s-2}{s(s+1)}\right]\right|_{s=-2}=-\frac{5}{2}$$

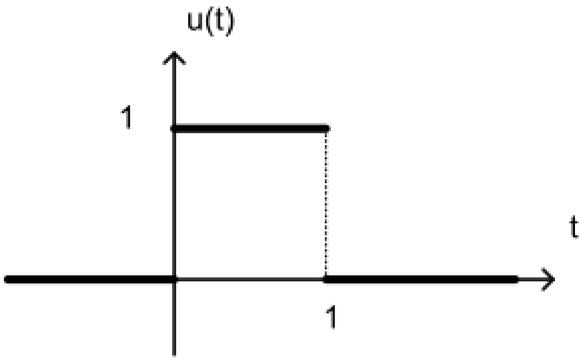
Antitrasformando si ottiene:

$$y(t)=A+B\frac{1}{2}t^2e^{-2t}+Cte^{-2t}+De^{-2t}+Ee^{-t} \quad \text{per } t\geq 0$$

$$y(t)=-\frac{1}{4}-t^2e^{-2t}-\frac{5}{2}te^{-2t}-\frac{11}{4}e^{-2t}+3e^{-t} \quad \text{per } t\geq 0$$

Il segnale in ingresso è discontinuo e $\rho=3\geq 1$, quindi $y(t)\in\overline{C^{\rho-1,\infty}}$, ovvero il grado massimo di continuità di $y(t)$ è 2.

3. [punti 5] Dato un sistema con funzione di trasferimento $G(s)=\dfrac{4}{(s+1)(s+2)}$ determinare la risposta forzata $y(t)$ al segnale di ingresso $u(t)=\begin{cases} 0 \ \text{ per } t<0 \\ 1 \ \text{ per } 0\le t<1 \\ 0 \ \text{ per } t\ge 1 \end{cases}$ (vedi figura).



1° metodo :

Calcolo di $y(t)$ per $0\le t<1$:

$u(t)=1,\ \ U(s)=\dfrac{1}{s} \ \ \Rightarrow \ \ Y(s)=G(s)U(s)=\dfrac{4}{s(s+1)(s+2)}$

$Y(s)=\dfrac{k_1}{s}+\dfrac{k_2}{s+1}+\dfrac{k_3}{s+2}$;

$k_1=\left.\dfrac{4}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=0}=2$; $\ k_2=\left.\dfrac{4}{s(s+2)}\right|_{s=-1}=-4$; $\ k_3=\left.\dfrac{4}{s(s+1)}\right|_{s=-2}=2$;

$y(t)=2-4e^{-t}+2e^{-2t}$

Calcolo di $y(t)$ per $t\ge 1$:

$y(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}$

Considerato che $\rho=2$ e $y\in\overline{C^{\rho-1,\infty}}(\mathbb{R}) \ \Rightarrow \ y\in\overline{C^{1,\infty}}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow\begin{cases} y(1-)=y(1+) \\ Dy(1-)=Dy(1+) \end{cases}$,

$Dy(t)=-c_1e^{-t}-2c_2e^{-2t}$ per $t\ge 1$; $\quad Dy(t)=4e^{-t}-4e^{-2t}$ per $0\le t<1$

$\begin{cases} 2-4e^{-1}+2e^{-2}=c_1e^{-1}+c_2e^{-2} \\ 4e^{-1}-4e^{-2}=-c_1e^{-1}-2c_2e^{-2} \end{cases} \ \Rightarrow \ c_1=4e-4$; $\ c_2=2-2e^2$;

$y(t)=4(e-1)\cdot e^{-t}+2(1-e^2)\cdot e^{-2t}$

3. [punti 4] Determinare l'evoluzione forzata $y(t)$ in risposta al gradino unitario $u(t) = 1(t)$ per un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = 10 \cdot \dfrac{1-s}{(s+1)(s+2)(s+5)}$.

Determinare il grado massimo di continuità su $\mathbb{R}$ di tale evoluzione forzata $y(t)$.

3.

$$Y(s) = 10 \cdot \frac{1-s}{s(s+1)(s+2)(s+5)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_3}{s+2} + \frac{k_4}{s+5}$$

Calcolando i residui con le formule usuali otteniamo $k_1 = 1$, $k_2 = -5$, $k_3 = 5$, $k_4 = -1$. Quindi

$$y(t) = 0 \quad \text{per } \ t < 0$$
$$y(t) = 1 - 5e^{-t} + 5e^{-2t} - e^{-5t} \qquad \text{per } t \geq 0$$

L'ingresso applicato al sistema $u(t) = 1(t)$ (gradino unitario) è una funzione discontinua e l'ordine relativo del sistema è $\rho = 2 \geq 1$. Quindi da una nota proprietà $y(t) \in \overline{C^{\rho-1,\infty}} = \overline{C^{1,\infty}}$, ovvero il grado massimo di continuità su $\mathbb{R}$ di $y(t)$ è 1.

3. [punti 5] Da una elaborazione di dati sperimentali su di un sistema dinamico è nota la risposta al gradino unitario $g_s(t) = \frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t}$.

a) Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema esprimendola nella forma standard con poli e zeri.

b) Determinare la risposta forzata $y(t),\ t \geq 0$ del sistema al segnale di ingresso $u(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1+t & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$

5 a. $\mathcal{L}[g_s(t)] = G(s) \cdot \frac{1}{s}$

$$\mathcal{L}[g_s(t)] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s+2}$$

$$G(s) = \frac{1}{2} + \frac{s}{s+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{s}{s+2} = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)}$$

$$G(s) = 2 \cdot \frac{s + 1/2}{(s+1)(s+2)}$$

b. $u(t) = 1(t) + t \cdot 1(t)$, $U(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$

$$Y(s) = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)} \cdot \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right) = \frac{2s+1}{\cancel{(s+1)}(s+2)} \cdot \frac{\cancel{s+1}}{s^2}$$

$$= \frac{2s+1}{s^2(s+2)} = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_2}{s+2}$$

$$K_{11} = \left.\frac{2s+1}{s+2}\right|_{s=0} = \frac{1}{2} \qquad K_2 = \left.\frac{2s+1}{s^2}\right|_{s=-2} = -\frac{3}{4}$$

$$K_{12} + K_2 = 0 \implies K_{12} = \frac{3}{4}$$

$$Y(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s+2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \left(\frac{1}{2}t + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}e^{-2t}\right) \cdot 1(t)$$

3. [punti 4.5] Di un sistema dinamico è nota la risposta all'impulso $g(t) = 15e^{-2t} - 10te^{-2t} - 15e^{-4t}$. Determinare la risposta al gradino unitario $g_s(t)$ di tale sistema.

3.

1° metodo:

$$g_s(t) = \int_0^t g(v)dv$$

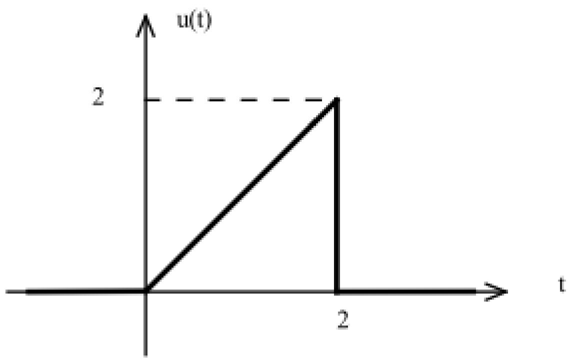
$$g_s(t) = \int_0^t \left(15e^{-2v} - 10ve^{-2v} - 15e^{-4v}\right)dv =$$

$$= 15\int_0^t e^{-2v}dv - 10\int_0^t ve^{-2v}dv - 15\int_0^t e^{-4v}dv =$$

$$= 15\left[-\frac{1}{2}\left(e^{-2t} - 1\right)\right] - 10\left[-\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4}\right] - 15\left[-\frac{1}{4}\left(e^{-4t} - 1\right)\right] =$$

$$= \frac{5}{4} - 5e^{-2t} + 5te^{-2t} + \frac{15}{4}e^{-4t}$$

3. [punti 4.5] Dato un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{10}{s+3}$ determinare la risposta forzata $y(t),\ \ t \in (0, +\infty)$ al segnale di ingresso definito in figura:



determiniamo la risposta forzata per $t \in (0,2)$

$u(t) = t \qquad U(s) = \frac{1}{s^2}$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{10}{s+3} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_2}{s+3}$$

$$K_{11} = \left.\frac{10}{s+3}\right|_{s=0} = \frac{10}{3}$$

$$K_2 = \left.\frac{10}{s^2}\right|_{s=-3} = \frac{10}{9}$$

$$K_{12} + K_2 = 0 \qquad K_{12} = -K_2 = -\frac{10}{9}$$

$$Y(s) = \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{10}{9}\,\frac{1}{s} + \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{s+3}$$

$$y(t) = \frac{10}{3}\,t - \frac{10}{9} + \frac{10}{9}\,e^{-3t}$$

ok!

per $t > 2$ il sistema è in evoluzione libera

$\Rightarrow \quad y(t) = c\,e^{-3t}$

Studio delle relazioni fra le condizioni iniziali al tempo $t = 2$.

$$y(2-) = \frac{10}{3} \cdot 2 - \frac{10}{9} + \frac{10}{9} e^{-6} =$$

$$= \frac{6 \cdot 10 - 10}{9} + \frac{10}{9} e^{-6} = \frac{50}{9} +$$

$y(2+) = ?$

$$= \frac{50}{9} + \frac{10}{9} e^{-6}$$

$$\rho = 1 \qquad u(t) \in C^{-1} \Rightarrow y(t) \in C^{-1+1} = C^{0}$$

$$\Rightarrow \quad y(2+) = y(2-)$$

$$y(2+) = c\, e^{-6}$$

$$\frac{50}{9} + \frac{10}{9} e^{-6} = c\, e^{-6}$$

$$c = \frac{50}{9} e^{6} + \frac{10}{9}$$

Quindi per $t > 2$

$$\boxed{y(t) = \left(\frac{50}{9} e^{6} + \frac{10}{9} \right) e^{-3t}}$$

3. [punti 4,5] Dato un sistema con funzione di trasferimento $G(s)=\dfrac{2s^2+1}{s^2+3s+2}$ determinare la risposta forzata $y(t),\ t\in[0,+\infty)$ al segnale di ingresso $u(t)=(1+t)\cdot 1(t)$.

3.

$$Y(s)=G(s)U(s)=\frac{2s^2+1}{s^2+3s+2}\cdot\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\right)=$$

$$=\frac{2s^2+1}{(s+1)(s+2)}\cdot\frac{s+1}{s^2}=\frac{2s^2+1}{s^2(s+2)}$$

$$Y(s)=\frac{K_{11}}{s^2}+\frac{K_{12}}{s}+\frac{K_2}{s+2}$$

$$K_{11}=\left.\frac{2s^2+1}{s+2}\right|_{s=0}=\frac{1}{2}\qquad K_2=\left.\frac{2s^2+1}{s^2}\right|_{s=-2}=\frac{9}{4}$$

$$K_{12}+K_2=2,\quad K_{12}=2-K_2=2-\frac{9}{4}=-\frac{1}{4}$$

$$y(t)=\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}+\frac{9}{4}\cdot e^{-2t}$$

3. [punti 4,5] Determinare l'evoluzione forzata $y(t)$ in risposta al gradino unitario $u(t) = 1(t)$ di un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{10}{(s+1)^4}$.

Determinare inoltre il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$.

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{10}{(s+1)^4} \cdot \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1)^4} + \frac{K_{22}}{(s+1)^3} + \frac{K_{23}}{(s+1)^2} + \frac{K_{24}}{s+1}$$

$$K_1 = \frac{10}{(s+1)^4}\bigg|_{s=0} = 10 \quad , \quad K_{21} = \frac{10}{s}\bigg|_{s=-1} = -10$$

$$K_1 + K_{24} = 0 \implies K_{24} = -K_1 = -10$$

$$K_{22} = \frac{1}{(2-1)!} D^{2-1}\left[\frac{10}{s}\right]_{|s=-1} = 10\left[-s^{-2}\right]_{|s=-1} = -10$$

$$K_{23} = \frac{1}{(3-1)!} D^{3-1}\left[\frac{10}{s}\right]_{|s=-1} = -10$$

$$Y(s) = \frac{10}{s} - \frac{10}{(s+1)^4} - \frac{10}{(s+1)^3} - \frac{10}{(s+1)^2} - \frac{10}{s+1}$$

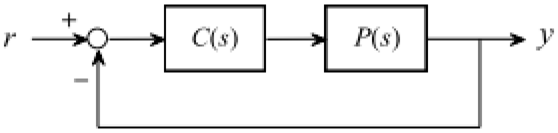
$$y(t) = 10 - \frac{5}{3} t^3 e^{-t} - 5t^2 e^{-t} - 10 t e^{-t} - 10 e^{-t}, \quad t \geq 0$$

Il gradino è una funzione discontinua, quindi $y(t) \in \overline{C^{\rho-1}}$.

$\rho = 4 \implies y(t) \in \overline{C^3}$ (il grado massimo di continuità dell'uscita è pari a 3).

6. [punti 5] Sia dato il sistema in retroazione di figura dove $P(s) = \dfrac{1}{s\left[(s+2)^2+1\right]}$ e $C(s) = K \in \mathbb{R}$.

.



a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K > 0$, determinando in particolare gli asintoti, le radici doppie e gli angoli di partenza del luogo.

b. Determinare il guadagno ottimo K^* del controllore affinché il grado di stabilità del sistema retroazionato sia massimo $\left[K^* = \arg\max_{K\in\mathbb{R}} G_s(K)\right]$.

c. Per il controllore progettato al punto b precedente $C(s) = K^*$ determinare l'errore a regime e_r in risposta alla rampa $r(t) = 5 \cdot t \cdot 1(t)$.

d. Per il controllore progettato al punto b precedente $C(s) = K^*$ tracciare il diagramma polare associato al guadagno di anello $L(s) := C(s)P(s)$ determinando l'asintoto verticale del diagramma. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_A del sistema retroazionato.

7

a. $1 + K \dfrac{1}{s\left[(s+2)^2+1\right]} = 0$, $K>0$, poli: $0, -2 \pm j$

Sono presenti tre asintoti con angoli $+60°, +180°, -60°$ e centro in $\sigma_a = -\frac{4}{3} = -1,\bar{3}$.

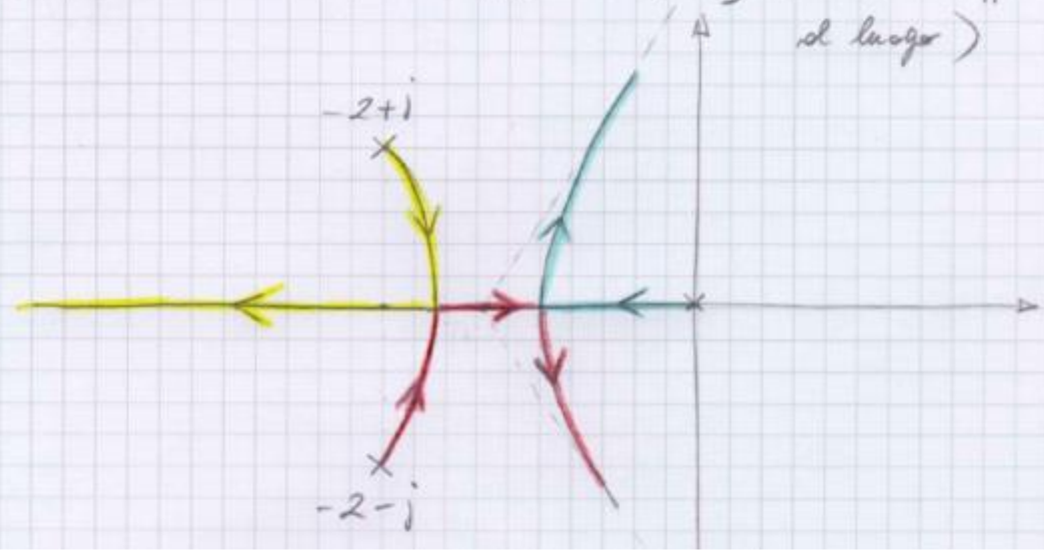
Il semiasse reale negativo appartiene al luogo. L'angolo di partenza dal polo 0 è $+180°$, l'angolo di partenza dal polo $-2+j$ è $\varphi \Rightarrow$

$$\varphi = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \text{arctg}\, 2\right) = -\text{arctg}\, 2 = -63°{,}43$$

l'angolo di partenza dal polo $-2-j$ è $+63°{,}43$

Calcolo delle radici doppie: $\frac{1}{s} + \frac{1}{s+2+j} + \frac{1}{s+2-j} = 0$

da cui $3s^2 + 8s + 5 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -1, -\frac{5}{3}$ (entrambi app. al luogo)



b. Dal luogo delle radici si evince che il guadagno ottimo K^* corrisponde alla radice doppia -1:

$$1 + K^* \frac{1}{s\left[(s+2)^2+1\right]}\Bigg|_{s=-1} = 0$$

$$\Rightarrow K^* = 2$$

c. $e_r = \frac{5}{K_r}$, $K_r = \lim_{s \to 0} s \frac{K^*}{s\left[(s+2)^2+1\right]} = \frac{2}{5}$

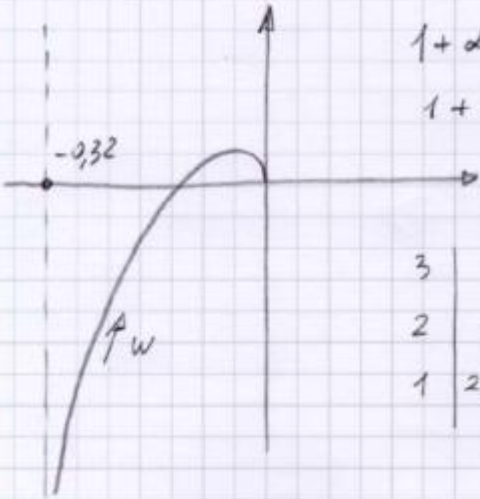
$$e_r = \frac{25}{2} = 12,5$$

d. $L(s) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{s\left(1 + \frac{4}{5}s + \frac{s^2}{5}\right)}$

$$L(j\omega) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{(j\omega)\left(1 - \frac{\omega^2}{5} + j\frac{4}{5}\omega\right)}$$

$$\sigma_a = \frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{8}{25} = -0,32$$

$$\lim_{\omega\to+\infty} \arg L(j\omega) = -3\frac{\pi}{2}$$



$1+\alpha L(s)=0$ abbia radici puram. immaginarie

$$1+\alpha\cdot\frac{2}{s[(s+2)^2+1]}=0\ ,\quad \beta \triangleq 2\alpha$$

$$s^3+4s^2+5s+\beta=0$$

3	1	5	0
2	4	β	0
1	$20-\beta$	0	

$20-\beta=0$ $\beta=20$

$\Rightarrow \alpha=10$

Intersezione in $-\frac{1}{\alpha}=-\frac{1}{10}$

$\Rightarrow M_A = 10$

6. [punti 4] Si tracci il luogo delle radici della seguente equazione caratteristica

$$1+K_1\frac{s-1}{(s+1)^3(s+2)^2}=0$$

per $K_1\in[0,+\infty)$. In particolare si determinino gli asintoti e si dimostri che non esistono radici doppie sul luogo.

La configurazione dei poli e zeri è la seguente:

- uno zero per $s=1$ con molteplicità 1
- uno zero per $s=-1$ con molteplicità 3
- uno polo per $s=-2$ con molteplicità 2

Essendo $n-m=4$ il luogo presenta quattro asintoti.
Tali asintoti formano una stella di raggi con centro nel punto dell'asse reale di ascissa

$$\sigma_a=\frac{1}{4}((-1-1-1-2-2)-1)=-2$$

Tenendo conto delle seguenti osservazioni (luogo diretto):

- un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zeri e di poli.
- il luogo delle radici ha 5 rami.
- gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli

  $\theta_{a,0} = \frac{\pi}{4}$; $\theta_{a,1} = \frac{3}{4}\pi$; $\theta_{a,2} = \frac{5}{4}\pi$; $\theta_{a,3} = \frac{7}{4}\pi$
- le radici doppie, se esistono, sono individuate dalle soluzioni della seguente equazione

  $\frac{1}{s-1} - 3\frac{1}{s+1} - 2\frac{1}{s+2} = 0$

  cioè

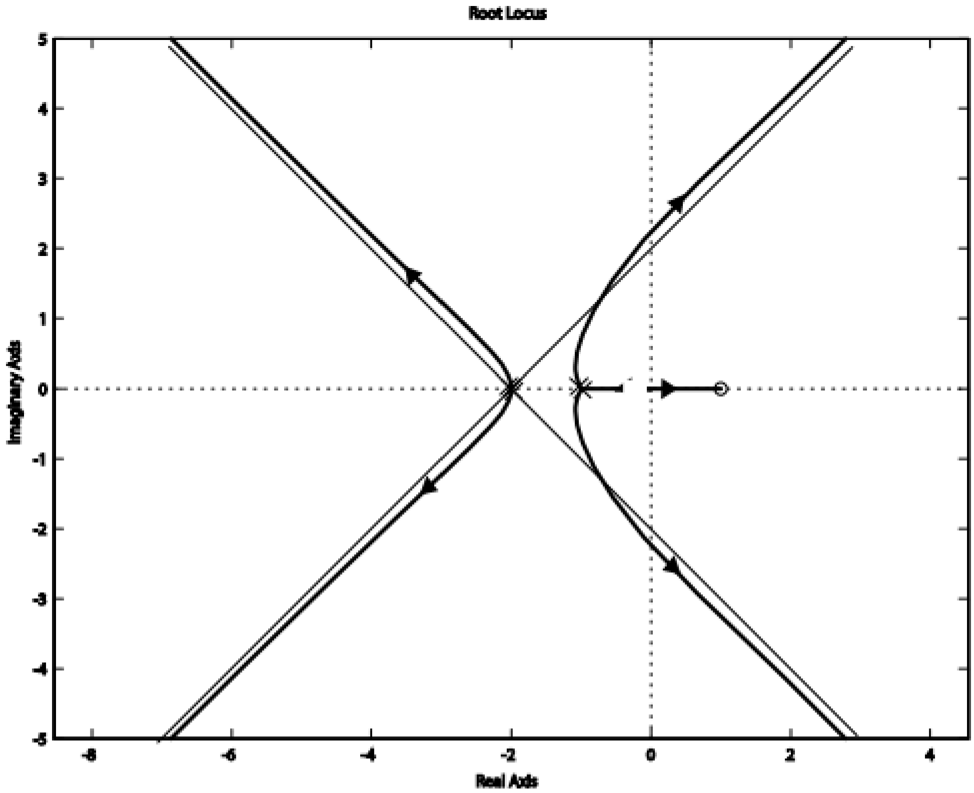
  $4s^2 - 10 = 0$

  e risultano essere

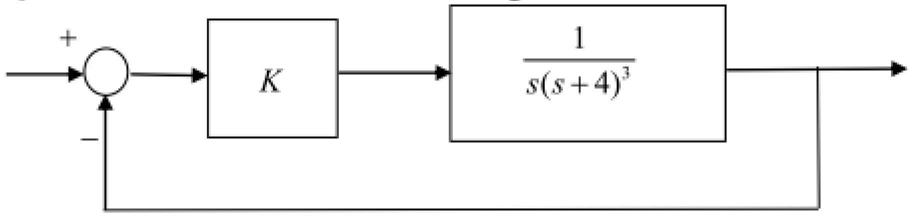
  $s_1 = -\sqrt{5/2} \cong -1{,}58$; $s_2 = \sqrt{5/2} \cong 1{,}58$.

  Queste soluzioni non appartengono al luogo delle radici e quindi non esistono radici doppie sul luogo.

si può dedurre che il luogo delle radici per $K_1 > 0$ ha l'andamento riportato in figura:



6. [punti 5] Sia dato il sistema retroazionato di figura



dove $K \in \mathbb{R}_+$.

1) Determinare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K \in (0,+\infty)$ determinando in particolare asintoti e radici doppie.
2) Determinare l'insieme dei valori $K \in \mathbb{R}_+$ per i quali sussiste la stabilità asintotica del sistema retroazionato.
3) Relativamente al luogo delle radici di cui al punto 1) determinare l'intersezione del luogo con l'asse immaginario.

3. Angoli di partenza del luogo.

c. Determinare il valore di K che massimizza il grado di stabilità del sistema retroazionato: $K^* = \arg\max_{K\in\mathbb{R}} G_S(K)$.

6.

1) L'eq. caratteristica è

$$1 + K\frac{1}{s(s+4)^3} = 0 \qquad K > 0.$$

Il luogo è composto da quattro rami convergenti a quattro asintototi rettilinei con angoli rispetto all'asse reale di $+\frac{\pi}{4}, +\frac{3}{4}\pi, -\frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{4}$. Il centro degli asintoti è dato da

$$\sigma_a = \frac{0-4-4-4}{4} = -3$$

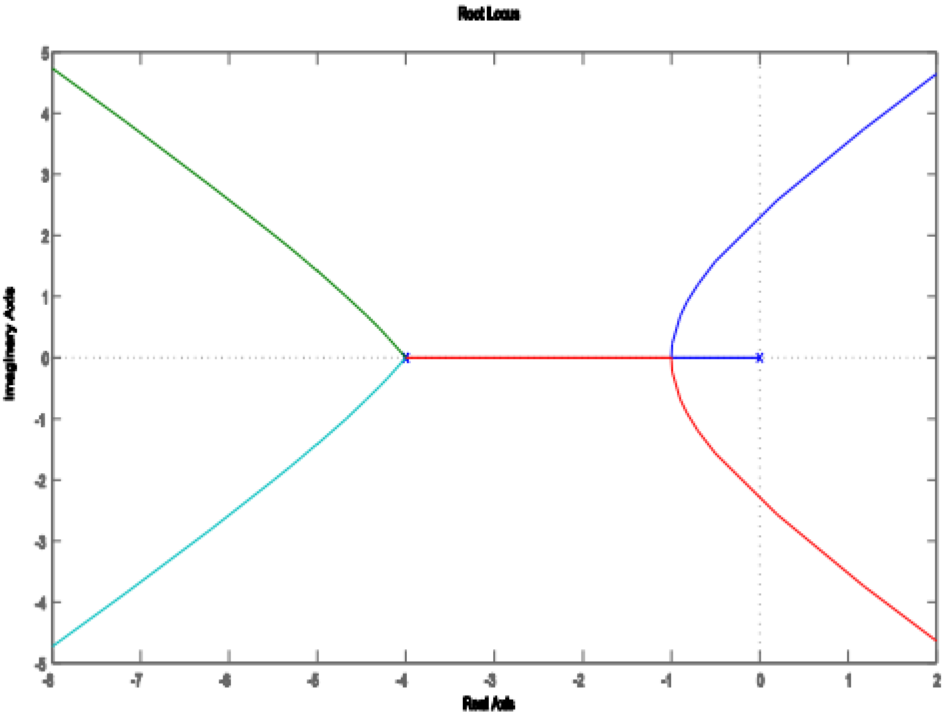
Il segmento dell'asse reale fra -3 e 0 appartiene al luogo ed in un suo punto interno si rivela una radice doppia determinabile risolvendo l'equazione:

$$\frac{1}{s} + \frac{3}{s+4} = 0 \qquad \text{radice doppia in } s = -1$$

Il luogo è riportato in figura:

Angolo di partenza dal polo in 0: $+180°$

Angolo di partenza dal polo triplo in -4: $0°$, $+120°$, $-120°$



2) L'equazione caratteristica in forma polinomiale è

$$s(s+4)^3 + K = 0$$

$$s^4 + 12s^3 + 48s^2 + 64s + K = 0$$

La tabella di Routh associata è

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 48 & K \\ 3 & 12 & 64 & 0 \\ 2 & 128 & 3K & 0 \\ 1 & 2048-9K & 0 & \\ 0 & 3K & & \end{array}$$

Considerato che $K > 0$, l'applicazione del Criterio di Routh impone $2048-9K>0$. Quindi l'insieme dei valori positivi di K per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile è

$$K \in (0, \frac{2048}{9}) \simeq (0,\ 227{,}56)$$

3) Dalla tabella di Routh si deduce l'equazione ausiliaria in corrispondenza del valore limite di K ($=2048/9$):

$$128s^2 + 3\cdot\frac{2048}{9} = 0$$

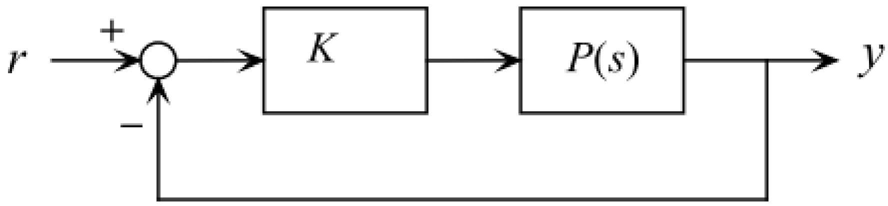
Le radici di questa equazione sono $s = \pm j\dfrac{4}{\sqrt{3}} \simeq \pm j2{,}309$. Quindi le intersezioni del luogo avvengono in $\pm j2{,}309$.

c) Grado di stabilità massimo nella radice doppia $s=-1$:

$$1 + K^* \left.\frac{1}{s\,(s+4)^3}\right|_{s=-1} = 0 \;\Rightarrow\; K^* = 27$$

Questo è un po nyquist un po radici

4[punti 7] Sia dato il sistema in retroazione di figura

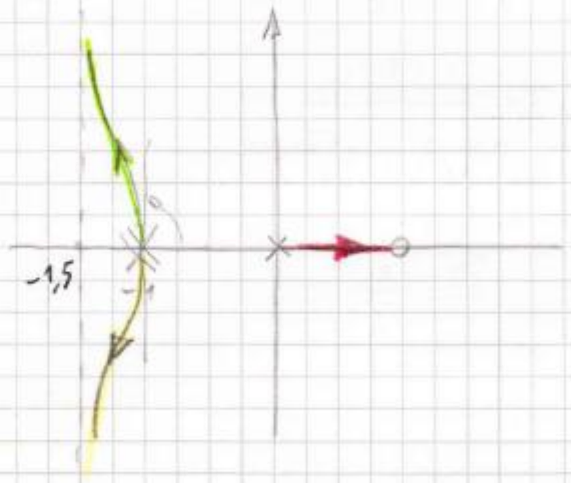


dove $P(s) = \dfrac{s-1}{s(s+1)^2}$.

a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K > 0$ determinando in particolare gli asintoti, gli angoli di partenza del luogo e le eventuali radici doppie.

b. Posto $K = -10$ tracciare il diagramma polare del guadagno di anello determinando in particolare le intersezioni con l'asse reale. Studiare inoltre la stabilità del sistema retroazionato applicando il criterio di Nyquist.

a) $1 + K \dfrac{s-1}{s(s+1)^2} = 0$



$$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} = \frac{-1-1-(1)}{2} = -\frac{3}{2} = -1{,}5$$

$p_1 = 0$

$p_2 = -1$

$p_3 = -1$

angoli di partenza $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = +90^\circ$, $\varphi_3 = -90^\circ$

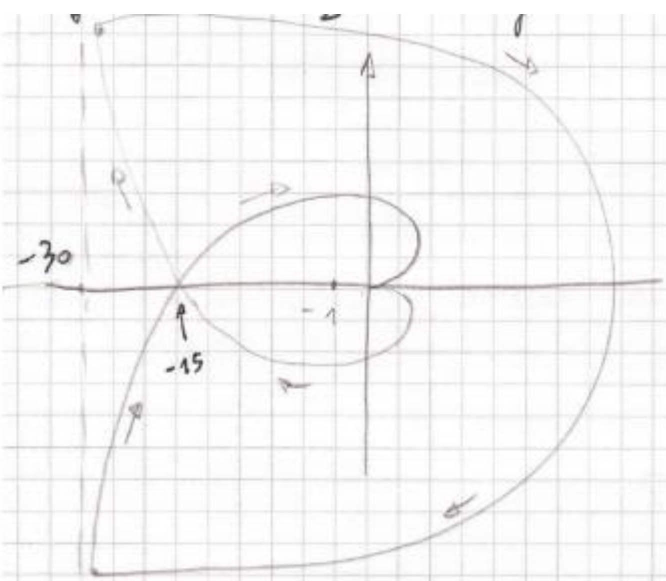
Non sono presenti radici doppie

$$L(s) = -10 \frac{s-1}{s(s+1)^2} = 10 \cdot \frac{1-s}{s(1+s)^2}$$

$$L(j\omega) = 10 \frac{1-j\omega}{(j\omega)(1+j\omega)^2}$$

$$\sigma_a = K\left(\sum_i \tau_i' - \sum_i \tau_i\right) = 10\left(-1-(1+1)\right) = 10(-3) = -30$$

$$\arg L(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 2\,\mathrm{arctg}\,\omega - \mathrm{arctg}\,\omega = -\frac{\pi}{2} - 3\,\mathrm{arctg}\,\omega$$



$$\arg L(j\omega_p) = -\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} - 3\,\mathrm{arctg}\,\omega_p = -\pi$$

$$3\,\mathrm{arctg}\,\omega_p = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{arctg}\,\omega_p = \frac{\pi}{6}$$

$$\omega_p = \mathrm{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 0.5774 \ \frac{rad}{sec}$$

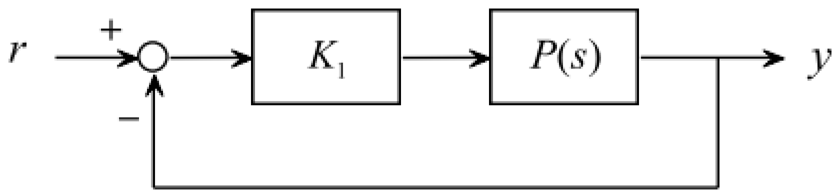
$$|L(j\omega_p)| = 10\,\frac{\sqrt{1+\omega_p^2}}{\omega_p\cdot(1+\omega_p^2)} = 10\cdot\frac{1}{\omega_p\sqrt{1+\omega_p^2}} =$$

$$= \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{1+\frac{1}{3}}} = \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}} = \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}} = 15$$

$$L(j\omega_p) = -15$$

Il diagramma polare completo circonda due volte in senso orario il punto -1. Il criterio di Ny. richiede che -1 non venga né toccato né circondato dal d.p.c. (il numero dei poli a parte reale positiva di $L(s)$ è zero). Quindi il sistema retroazionato è instabile a causa di due poli retroazionati aventi parte reale positiva.

6. [punti 5] Sia dato il sistema in retroazione di figura



dove $P(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+5)(s+10)}$.

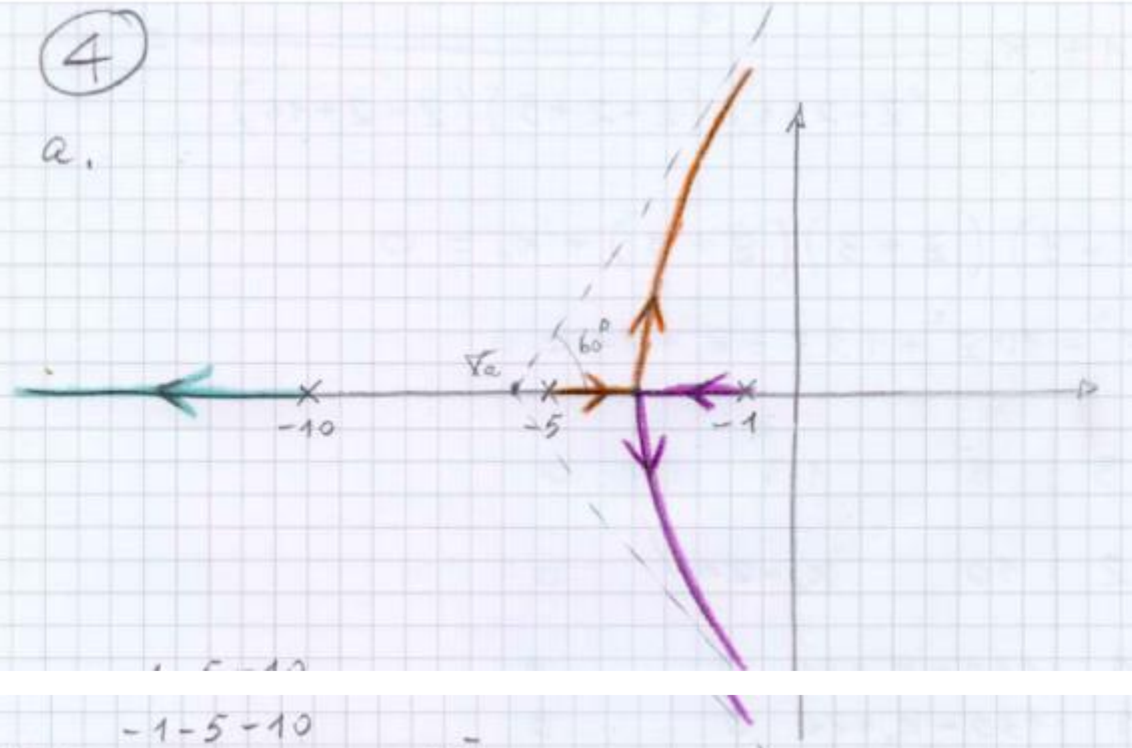
a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K_1 > 0$ determinando in particolare gli asintoti e le radici doppie.

b. Determinare i valori di $K_1 \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema retroazionato ha grado di stabilità $G_s \geq 2\ \text{s}^{-1}$.

c. Determinare il valore di K_1 che massimizza il grado di stabilità del sistema retroazionato: $K_1^* = \arg\max_{K_1\in\mathbb{R}} G_s(K_1)$.

4

a.



$$\sigma_a = \frac{-1-5-10}{3} = -5,\bar{3}$$

$$\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+5} + \frac{1}{s+10} = 0$$

$$(s+5)(s+10) + (s+1)(s+10) + (s+1)(s+5) = 0$$

$$3s^2 + 32s + 65 = 0 \quad \Rightarrow \quad s_{1,2} = \begin{cases} -2,7299 \\ -7,9367 \ \text{(da scartare)} \end{cases}$$

b. Cambio di variabile complessa $z = s + 2$

$$s = z - 2$$

$$1 + K_1 \frac{1}{(s+1)(s+5)(s+10)} = 0 \qquad \text{eq. carat.}$$

$$1 + K_1 \cdot \frac{1}{(z-2+1)(z-2+5)(z-2+10)} = 0$$

$$(z-1)(z+3)(z+8)+k_1=0$$

$$z^3+10z^2+13z+k_1-24=0$$

3	1	13	0
2	10	k_1-24	0
1	$130-k_1+24$	0	0
0	k_1-24		

$$\begin{cases} 154-k_1>0 & k_1<154 \\ k_1-24>0 & k_1>24 \end{cases}$$

Quindi $k_1 \in [24, 154]$

c.

$$1+K_1 G_1(s)=0$$

$$K_1^* \ni \quad 1+K_1^* G_1(-2{,}7299)=0$$

$$K_1^* = -\frac{1}{G_1(-2{,}7299)} =$$

$$= -(s+1)(s+5)(s+10)\Big|_{s=-2{,}7299} = 28{,}55$$

6. **[punti 4]** Si tracci il luogo delle radici della seguente equazione caratteristica:

$$1+K\frac{1-s}{(s+1)^3(s+2)^2}=0 \quad , \quad K\in[0,+\infty)$$

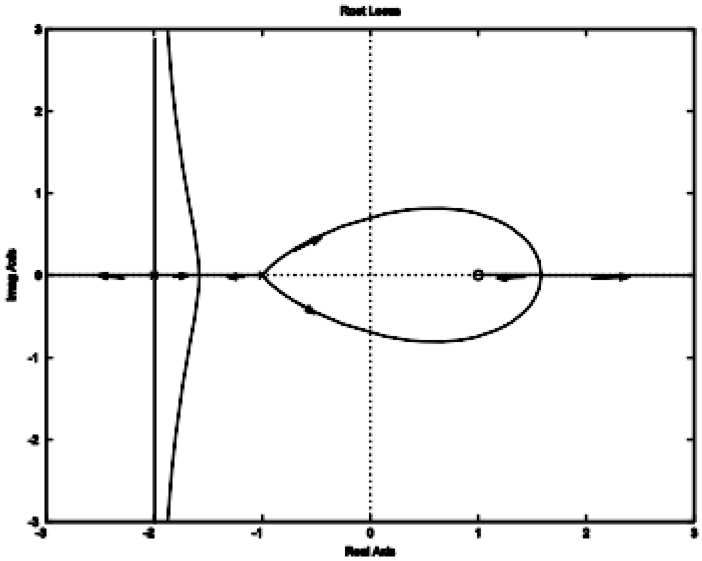
determinando in particolare asintoti e radici doppie.

L'equazione caratteristica è riscrivibile come

$$1+K_1\frac{s-1}{(s+1)^3(s+2)^2}=0 \quad \text{con } K_1=-K\in(-\infty,0]$$

e quindi si tratta di un luogo inverso. Presenta 4 asintoti il cui centro ha ascissa

$$\sigma_a=\frac{-1-1-1-2-2-(+1)}{5-1}=-2$$



Le radici doppie sono determinabili risolvendo l'equazione:

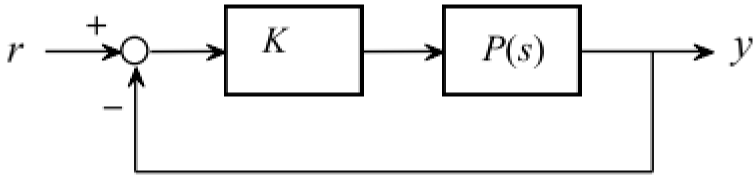
$$\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s-1}=0$$

$$\frac{3}{s+1}+\frac{2}{s+2}-\frac{1}{s-1}=0$$

$$4s^2-10=0$$

$$s_{1,2}=\pm\sqrt{5/2}=\pm1,5811$$

6. **[punti 5]** Sia dato il sistema in retroazione di figura



dove $P(s) = \dfrac{1}{s(s+2)^3}$.

a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K > 0$ determinando in particolare
   1. Asintoti del luogo.
   2. Eventuali radici doppie.
   3. Angoli di partenza del luogo.
b. Determinare i valori di $K \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Determinare inoltre le intersezioni del luogo delle radici dell'equazione caratteristica con l'asse immaginario del piano complesso.
c. Determinare il valore di K che massimizza il grado di stabilità del sistema retroazionato: $K^* = \arg\max_{K \in \mathbb{R}} G_S(K)$.

4. Eq. caratteristica $1 + K \dfrac{1}{s(s+2)^3} = 0$

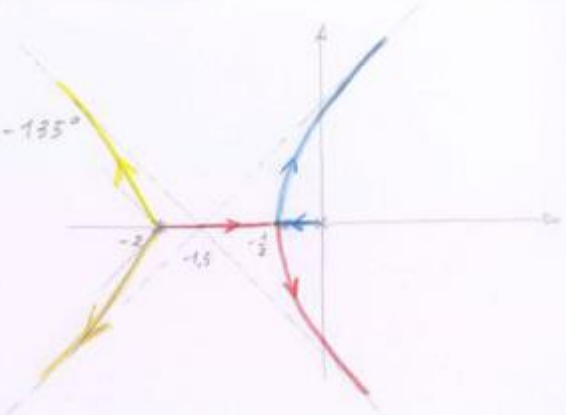
a) Asintoti del luogo: $\sigma_a = \dfrac{0-2-2-2}{4} = -1{,}5$

$\theta_{1,a} = +45°$, $\theta_{2,a} = +135°$, $\theta_{3,a} = -45°$, $\theta_{4,a} = -135°$

Radici doppie: $3\dfrac{1}{s+2} + \dfrac{1}{s} = 0 \Rightarrow s = -\frac{1}{2} = -0{,}5$

Angoli di partenza: da $p_1 = 0$ $\theta_1 = 180°$

da $p_2 = -2$ $\theta_{2,1} = 0°$, $\theta_{2,2} = +120°$, $\theta_{2,3} = -120°$



b) $s^4 + 6s^3 + 12s^2 + 8s + K = 0$

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 12 & K \\
3 & \cancel{6}\,3 & \cancel{8}\,4 & 0 \\
2 & 32 & 3K & 0 \\
1 & 128-9K & 0 & \\
0 & 3K & &
\end{array}$$

$\begin{cases} 128 - 9K > 0 \\ 3K > 0 \end{cases}$

$K \in \left(0, \dfrac{128}{9}\right) = (0, 14,\bar{2})$

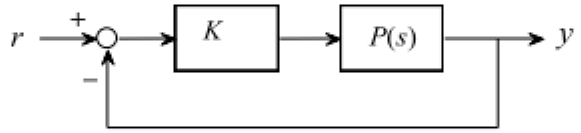
eq. ausiliaria per $K = \dfrac{128}{9}$: $32s^2 + 3\dfrac{128}{9} = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm j\sqrt{\dfrac{4}{3}} \simeq \pm j\,1{,}1547$

Le intersezioni del luogo con $j\mathbb{R}$ avvengono in $\pm j\,1{,}1547$.

c) Dalla geometria del luogo si deduce:

$1 + K^* P(-\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow 1 + K^* \dfrac{1}{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}+2)^3} = 0 \Rightarrow K^* = \dfrac{27}{16} = 1{,}6875$.

6. [punti 5] Sia dato il sistema in retroazione di figura



dove $P(s) = \dfrac{s+3}{s(s+2)^3}$.

a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K > 0$ determinando in particolare
   1. Asintoti del luogo.
   2. Eventuali radici doppie.
   3. Angoli di partenza del luogo.

b. Determinare i valori di $K \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Determinare inoltre le intersezioni del luogo delle radici dell'equazione caratteristica con l'asse immaginario del piano complesso.

c. Determinare il valore di K che massimizza il grado di stabilità del sistema retroazionato: $K^* = \arg\max_{K\in\mathbb{R}} G_S(K)$.

a) L'equazione caratteristica del sistema è data da $1 + L(s) = 0$ dove il guadagno di anello vale

$$L(s) = K\,\frac{s+3}{s\,(s+2)^3}$$

Il grado relativo è $\rho = 3$ e quindi avrò tre asintoti separati tra loro da angoli di 120° che si intersecano nel punto ∇_a che viene determinato nel modo seguente

$$\nabla_a = \frac{\sum_i p_i - \sum_i z_i}{\rho} = \frac{-2-2-2-0-(-3)}{3} = -1$$

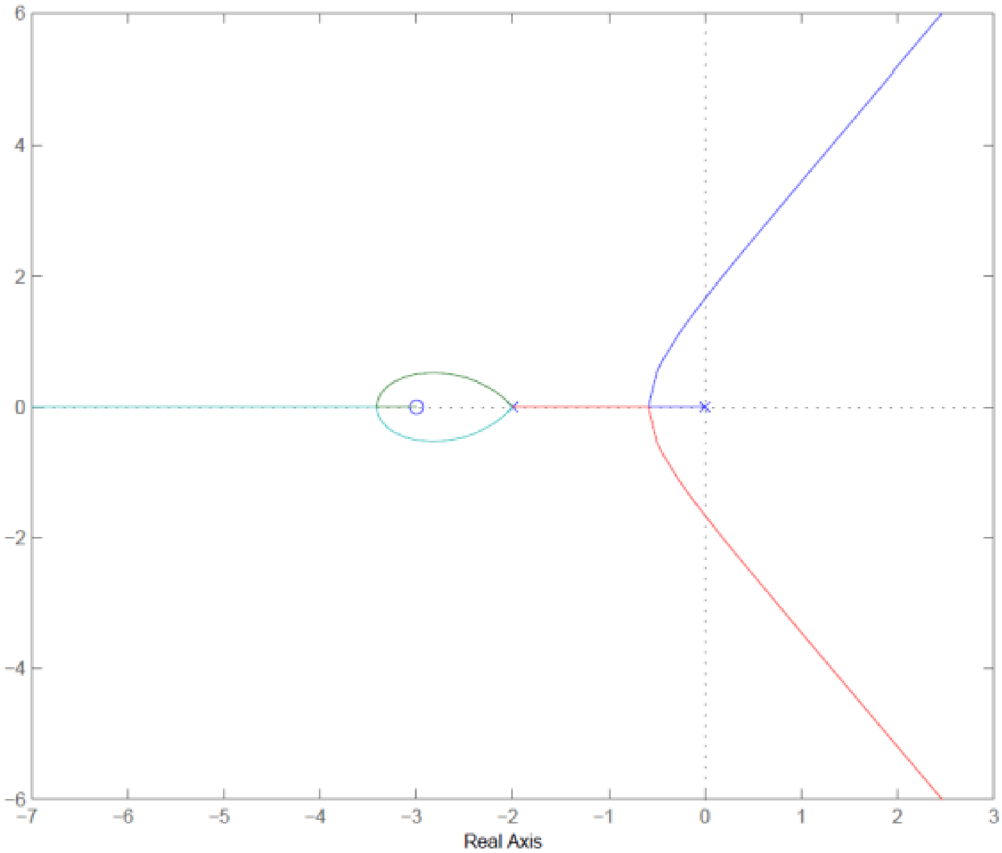
Si determinano le eventuali radici doppie come segue

$$\sum_i \frac{1}{s-p_i} - \sum_i \frac{1}{s-z_i} = \frac{1}{s} + \frac{3}{s+2} - \frac{1}{s+3} = 0$$

ottenendo l'equazione di secondo grado $s^2 + 4s + 2 = 0$ risolvendo la quale si ricava che le radici doppie sono in

$$s_1 = -0.5858 \qquad \text{e} \qquad s_2 = -3.4142$$

Per quanto riguarda gli angoli di partenza, è facile determinare che il polo nell'origine avrà angolo iniziale $\theta_1 = \pi$ mentre i tre poli in -2 avranno angoli di partenza $\theta_{1a} = 0$, $\theta_{1b} = \frac{2}{3}\pi$ e $\theta_{1b} = -\frac{2}{3}\pi$. Il luogo delle radici per $K > 0$ è quindi il seguente



b) L'equazione caratteristica è la seguente

$$1 + K\,\frac{s+3}{s\,(s+2)^3} = 0$$

dalla quale viene determinato il polinomio caratteristico

$$p_c(s;K) = s^4 + 6\,s^3 + 12\,s^2 + (8+K)\,s + 3\,K$$

Applichiamo il Criterio di Routh e costruiamo la seguente tabella

4	1	12	$3\,K$	0
3	6	$8+K$	0	0
2	64-K	18K	0	
1	$f(K)$	0		
0	$18\,K$	0		

dove $f(K) = -K^2 - 52\,K + 512$. Perchè il sistema sia asintoticamente stabile devono quindi valere le condizioni

$$\begin{cases} -K^2 - 52\,K + 512 > 0 \\ 18\,K > 0 \end{cases}$$

dove $f(K) = -K^2 - 52\,K + 512$. Perchè il sistema sia asintoticamente stabile devono quindi valere le condizioni

$$\begin{cases} -K^2 - 52\,K + 512 > 0 \\ 18\,K > 0 \end{cases}$$

Risolvendo la disequazione di secondo grado si ottiene che $f(K) > 0$ per $-60.4674 < K < 8.4674$, per cui, tenendo conto della seconda condizione ricavata dalla tabella di Routh, possiamo dire che il sistema è asintoticamaente stabile se

$$K \in (0, 8.4674)$$

Per determinare le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario, annulliamo la riga **1** della tabella di Routh, ponendo $f(K) = 0$ ed abbiamo che la tabella di Routh presenta una singolarità completa per $K = 8.4674$. Ora determino le radici del polinomio ausiliario

$$a_2(s; K) = (64 - K)\,s^2 + 18\,K$$

per $K = 8.4674$ ed ottengo che le intersezioni del luogo con l'asse immaginario sono in

$$s_{1,2} = \pm 1.6567$$

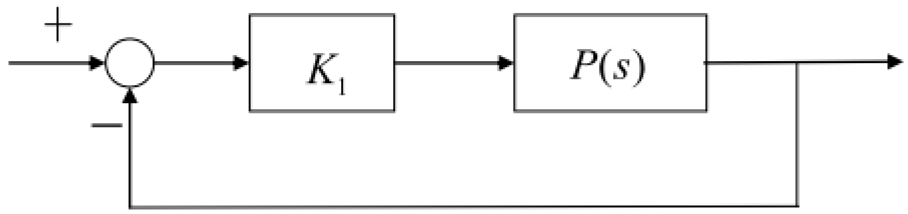
c) Dal luogo delle radici si nota facilmente che il grado di stabilità G_s è massimo nella radice doppia in -0.5858. Risolvendo l'equazione caratteristica $1 + K^* G(s) = 0$ in $s = -0.5858$ si ha che

$$K^* = -\frac{1}{G(-0.5858)}$$

e si ottiene che il guadagno K^* che massimizza G_s vale

$$K^* = 0.6863$$

4. [punti 6] Sia dato il sistema retroazionato di figura:



dove K_1 è un parametro reale e $P(s) = \dfrac{s+1}{s^2(s+4)(s+8)}$.

1. Determinare l'insieme dei valori di K_1 per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
2. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica associata al sistema retroazionato per $K_1 \in (0, +\infty)$. Determinare in particolare gli asintoti del luogo e le intersezioni del luogo con l'asse immaginario del piano complesso.

4.

1) L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1+K_1\frac{s+1}{s^2(s+4)(s+8)}=0$$

Questa in forma polinomiale diventa:

$$s^4+12s^3+32s^2+K_1s+K_1=0$$

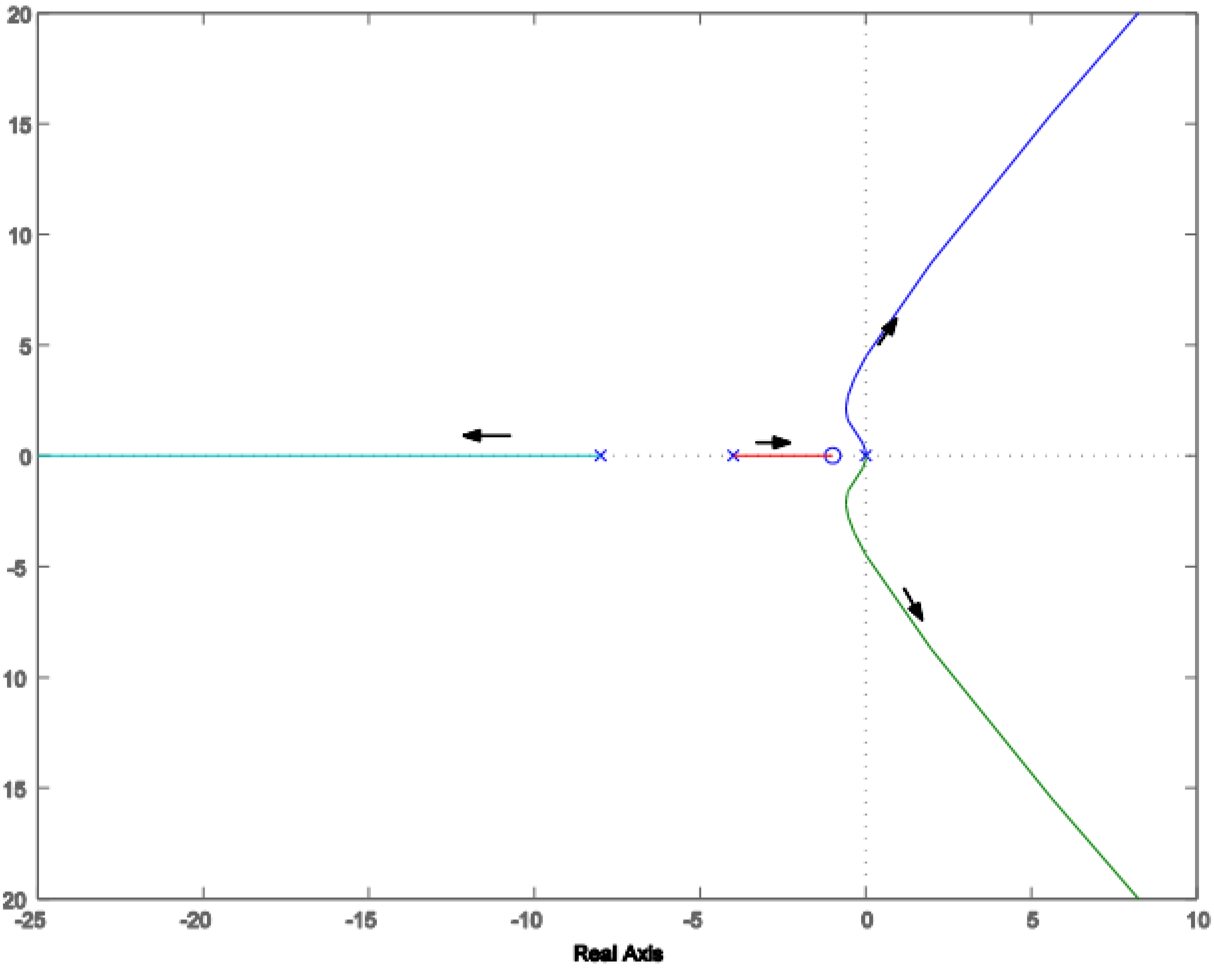
La tabella di Routh corrispondente è

$$\begin{array}{c|cccc}
4 & 1 & 32 & K_1 & 0\\
3 & 12 & K_1 & 0 & 0\\
2 & 384-K_1 & 12K_1 & 0 & \\
1 & K_1(240-K_1) & 0 & & \\
0 & 12K_1 & & &
\end{array}$$

Imponendo la positività degli elementi della prima colonna si ottiene $K_1\in(0,\ 240)$, valori per i quali il sistema è asintoticamente stabile (Criterio di Routh).

2) Il luogo presenta tre asintoti rettilinei $\left(\vartheta_{a,1}=+60°,\ \vartheta_{a,2}=+180°,\ \vartheta_{a,3}=-60°\right)$ con centro in

$$\sigma_a=\frac{-4-8-(-1)}{3}=-\frac{11}{3}\cong-3,67$$



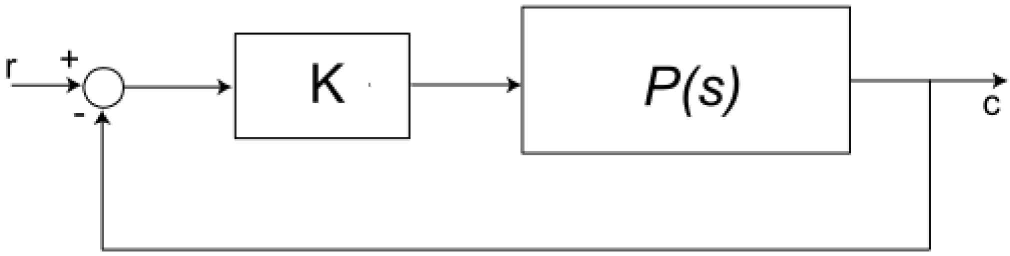
Le intersezioni del luogo si hanno in corrispondenza del valore limite di $K_1 = 240$. Per tale valore la tabella di Routh evidenzia l'equazione ausiliaria

$$(384-240)s^2 + 12 \cdot 240 = 0$$

$$s^2 + 20 = 0$$

Quindi le intersezioni avvengono in $s = \pm j\sqrt{20} \cong \pm j4,47$.

4. [punti 6] Sia dato il sistema retroazionato di figura



dove $P(s) = \dfrac{s\left(s^2+1\right)}{\left(s^2+4\right)\left(s+1\right)\left(s+2\right)}$

1. Determinare i valori di K per i quali è assicurata la stabilità asintotica del sistema retroazionato.
2. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica associata al sistema retroazionato per $K \in [0,+\infty)$. Si determini l'angolo di partenza dal polo $+2j$ e l'angolo di arrivo sullo zero $+j$. Infine si determinino le eventuali intersezioni con l'asse immaginario $j\mathbb{R}$.

4.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + k\frac{s\left(s^2+1\right)}{\left(s^2+4\right)(s+1)(s+2)} = 0$$

$$s^4 + (3+k)s^3 + 6s^2 + (12+k)s + 8 = 0$$

I valori di k per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile sono quelli che che garantiscono la positività della prima colonna della tabella di Routh associata all'equazione caratteristica.

4	1	6
	8	
3	3+k	12+k
	0	
2	α(k)	24+8k
	0	
1	β(k)	0
0	24+8k	

$\alpha(k) = 6(3+k) - 12 - k = 5k + 6$
$\beta(k) = (5k+6)(12+k) - (3+k)(24+8k) = -3k^2 + 18k$

Il sistema di disequazioni risultante ha come soluzione $0 < k < 6$.

2) Si osservi innanzitutto che si ha la seguente configurazione di poli e zeri:

- uno zero per $s = 0$ con molteplicità 1
- uno zero per $s = +j$ con molteplicità 1
- uno zero per $s = -j$ con molteplicità 1
- uno polo per $s = -1$ con molteplicità 1
- uno polo per $s = -2$ con molteplicità 1
- uno polo per $s = -2j$ con molteplicità 1
- uno polo per $s = +2j$ con molteplicità 1

Essendo $n - m = 1$ il luogo presenta un asintoto.

Tenendo conto delle seguenti osservazioni (luogo diretto):

- un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zeri e di poli.
- il luogo delle radici ha 4 rami.
- Angolo di partenza del luogo dal polo +2j:

$$\{\text{angolo di p. da } p_i\} = \pi + \sum_{j=1}^{m} \arg(p_i - z_j) - \sum_{j \neq i} \arg(p_i - p_j)$$

$$\{\text{angolo di p. dal polo +2j}\} = \pi + \left[\arg(2j) + \arg(2j + j) + \arg(2j - j)\right] +$$
$$-\left[\arg(2j + 2j) + \arg(2j + 1) + \arg(2j + 2)\right] =$$
$$\pi + \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} + arctg(2) + arctg(1)\right) = -108.43°$$

- Angolo di arrivo del luogo sullo zero 2j:

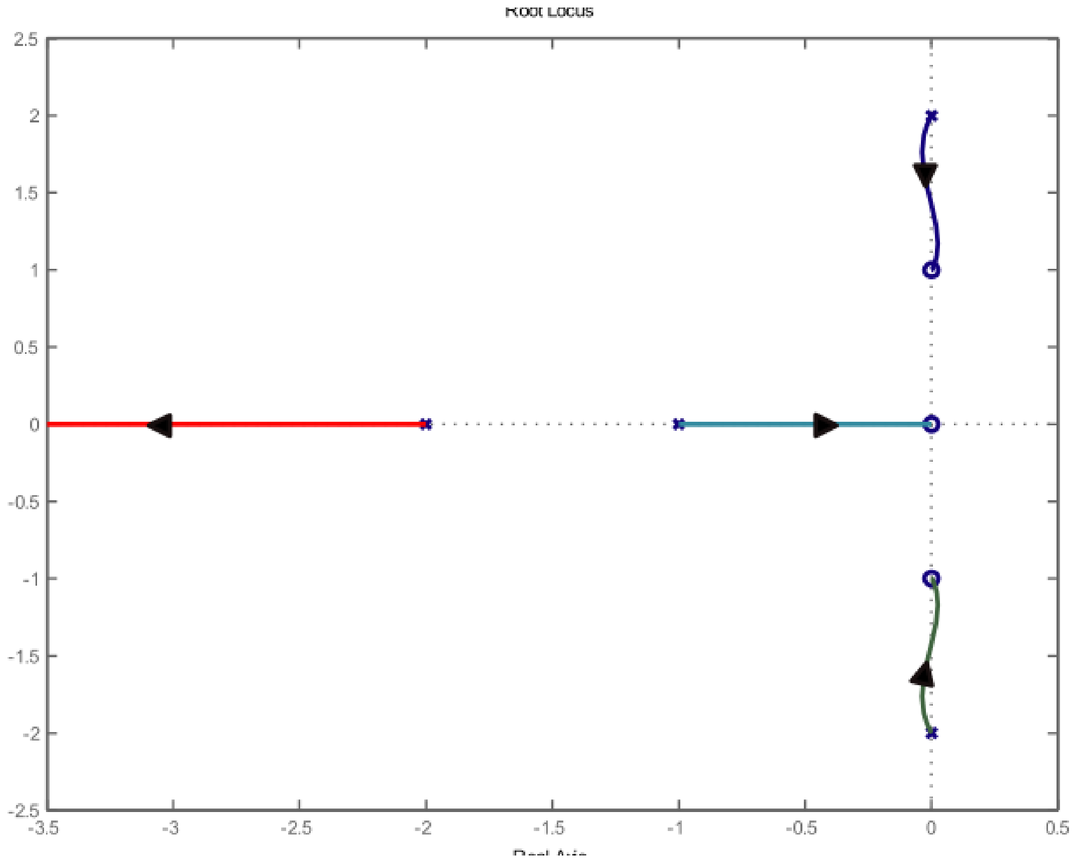
$$\{\text{angolo di a. su } z_i\} = \pi + \sum_{j=1}^{n} \arg(z_i - p_j) - \sum_{j \neq i} \arg(z_i - z_j)$$

$$\{\text{angolo di a. sullo zero +j}\} = \pi + \left[\arg(j + 2j) + \arg(j - 2j) + \arg(j + 1) + \arg(j + 2)\right] +$$
$$-\left[\arg(j + j) + \arg(j)\right] =$$
$$\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + arctg(1) + arctg(1/2)\right) - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 71.56°$$

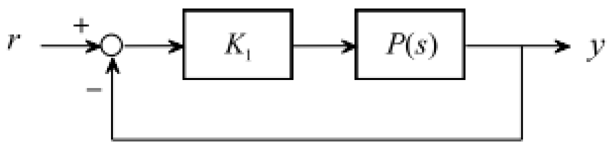
- Intersezioni del luogo con l'asse immaginario
  Le intersezioni del luogo con l'asse immaginario si possono ottenere come soluzioni dell'equazione ausiliaria associata alla tabella di Routh in 1) per k=6:
  $(5 \cdot 6 + 6)s^2 + 24 + 8 \cdot 6 = 0$

  $36s^2 + 72 = 0 \quad \rightarrow \quad s = \pm j\sqrt{2} = \pm\, j1.41$

si può dedurre che il luogo delle radici per $K_1 > 0$ ha l'andamento riportato in figura:



6. **[punti 4,5]** Sia dato il sistema in retroazione di figura



dove $P(s)=\dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}$.

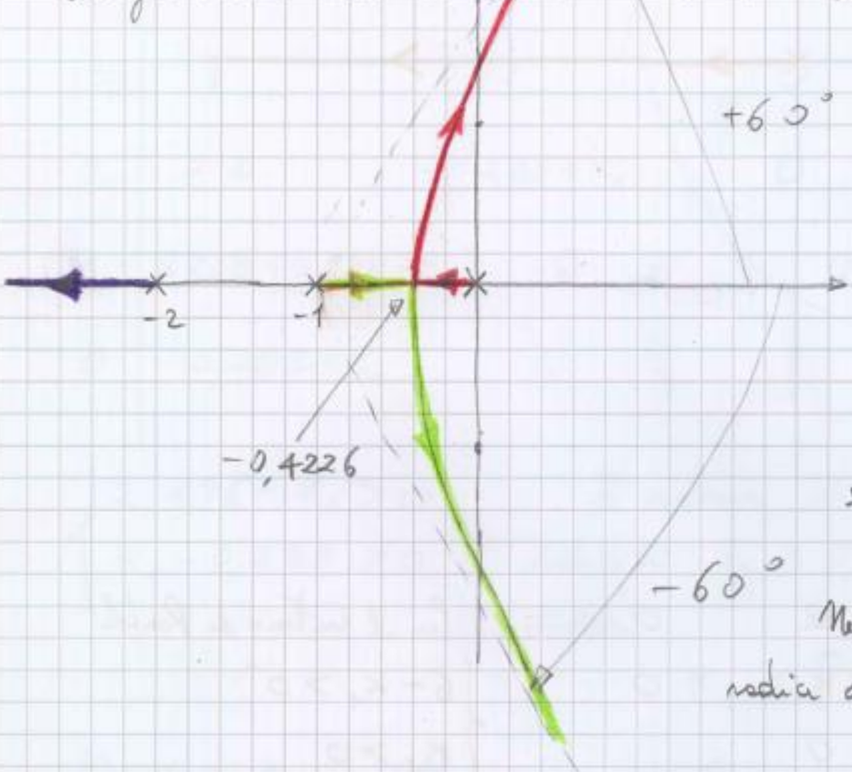
a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K_1>0$ e $K_1<0$ determinando gli asintoti e le eventuali radici doppie.

b. Determinare i valori di $K_1\in\mathbb{R}$ per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

c. Determinare i valori di $K_1\in\mathbb{R}$ per i quali il sistema retroazionato ha grado di stabilità $G_s\geq 0,2\ \mathrm{s}^{-1}$.

d. Determinare il valore di K_1 che massimizza il grado di stabilità del sistema retroazionato: $K_1^*=\arg\max_{K_1\in\mathbb{R}} G_s(K_1)$.

Luogo delle radici diretto ($K_1 > 0$)



$$\sigma_a = \frac{0-1-2}{3} = -1$$

Calcolo radici doppie:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} = 0$$

$$3s^2 + 6s + 2 = 0$$

$$s_{1,2} = \begin{cases} -1,5774 \\ -0,4226 \end{cases}$$

Nel luogo diretto l'unica radice doppia è $-0,4226$

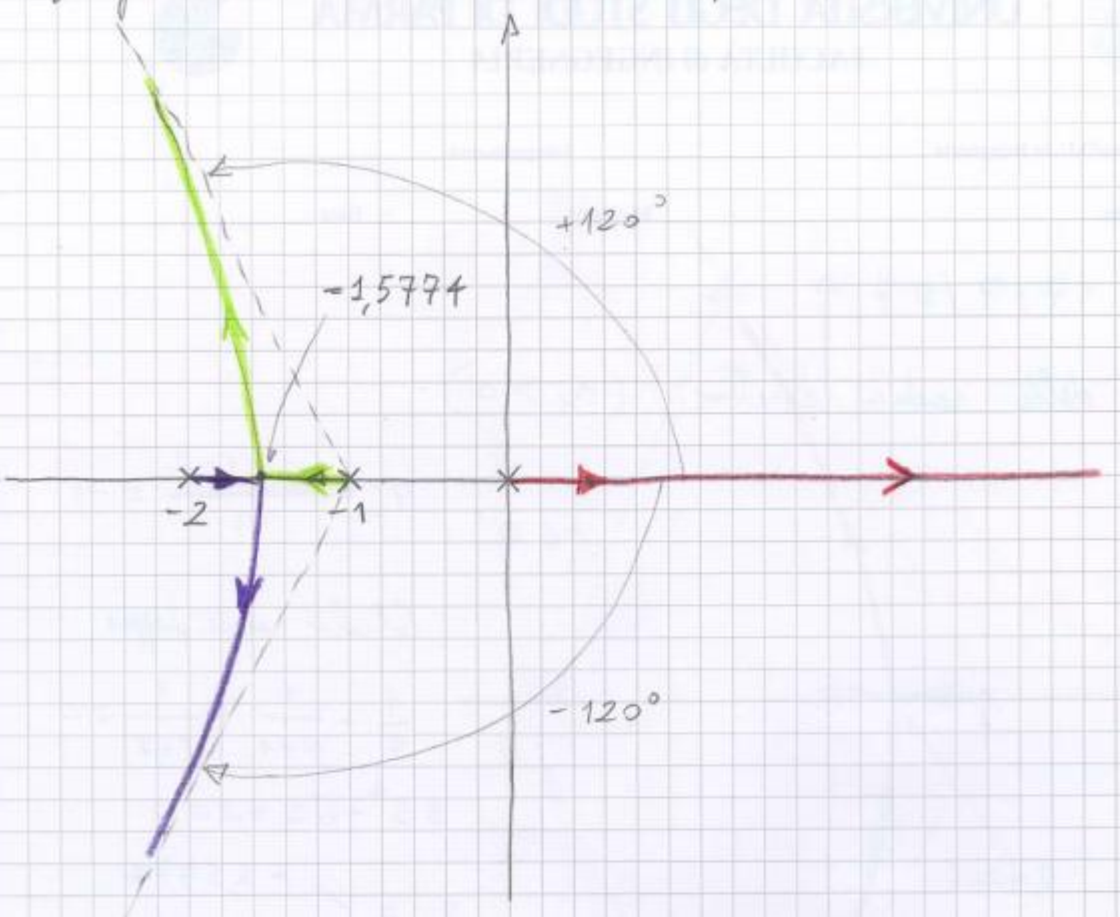
Eq. caratteristica $1 + K_1\, P(s) = 0$

$$1 + K_1 \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

$$(s^2+s)(s+2) + K_1 = 0$$

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K_1 = 0$$

Luogo delle radici inverso $(K_1 < 0)$



b)

3	1	2	0
2	3	K_1	0
1	$6-K_1$	0	
0	K_1		

Per il Criterio di Routh

$$\begin{cases} 6-K_1 > 0 \\ K_1 > 0 \end{cases}$$

Il sistema retroazionato è asint. stabile per tutti e soli valori

$$K_1 \in (0, 6)$$

c) Cambio di variabile complessa $z = s + 0,2$

$$\mathrm{Re}\, z < 0 \iff \mathrm{Re}\, s < -0,2$$

$$s = z - 0,2$$

$$(z-0,2)^3 + 3(z-0,2)^2 + 2(z-0,2) + K_1 = 0$$

$$z^3 + 2,4\, z^2 + 0,92\, z - 0,288 + K_1 = 0$$

3	1	$0,92$	0
2	$2,4$	$-0,288+K_1$	0
1	$2,208+0,288-K_1$	0	0
0	$-0,288+K_1$		

$$\begin{cases} 2,496 - K_1 > 0 \\ K_1 - 0,288 > 0 \end{cases}$$

Il sistema retroazionato ha grado di stabilità $G_s \geq 0,2$ per tutti e soli valori

$$K_1 \in [0,288 \, , \, 2,496]$$

d) Dal luogo delle radici diretto si evince che per il valore ottimo K_1^* l'eq. caratteristica ha fra le sue radici, la radice doppia $-0,4226$. Quindi

$$K_1^* = -s(s+1)(s+2)\Big|_{s=-0,4226} \cong 1,456$$

Attenzione: il valore corretto di K_1^* è 0,3849

6. [punti 4] Si tracci il luogo delle radici della seguente equazione caratteristica:

$$1+K_1\frac{(s-1)^2}{s^3(s+5)^2}=0 \quad , \quad K_1\in[0,+\infty)$$

determinando in particolare asintoti e radici doppie.

6.
Si noti che si ha:

- uno zero s=1 con molteplicità 2
- un polo s=0 con molteplicità 3
- un polo s=-5 con molteplicità 2

Essendo la $K_1\in[0;+\infty)$ un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zero e di poli.

Essendo $n-m=3$ il luogo delle radici presenta 3 asintoti.
Gli asintoti del luogo delle radici formano una stella di raggi con centro nel punto dell'asse reale di ascissa:

$$\sigma_a=\frac{1}{3}[-5-5-(1+1)]=-4$$

Gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli:

$$\theta_{a,0}=\frac{\pi}{3} \qquad \theta_{a,1}=\pi \quad \theta_{a,2}=\frac{5}{3}\pi$$

Per la determinazione delle radici doppie si ha:

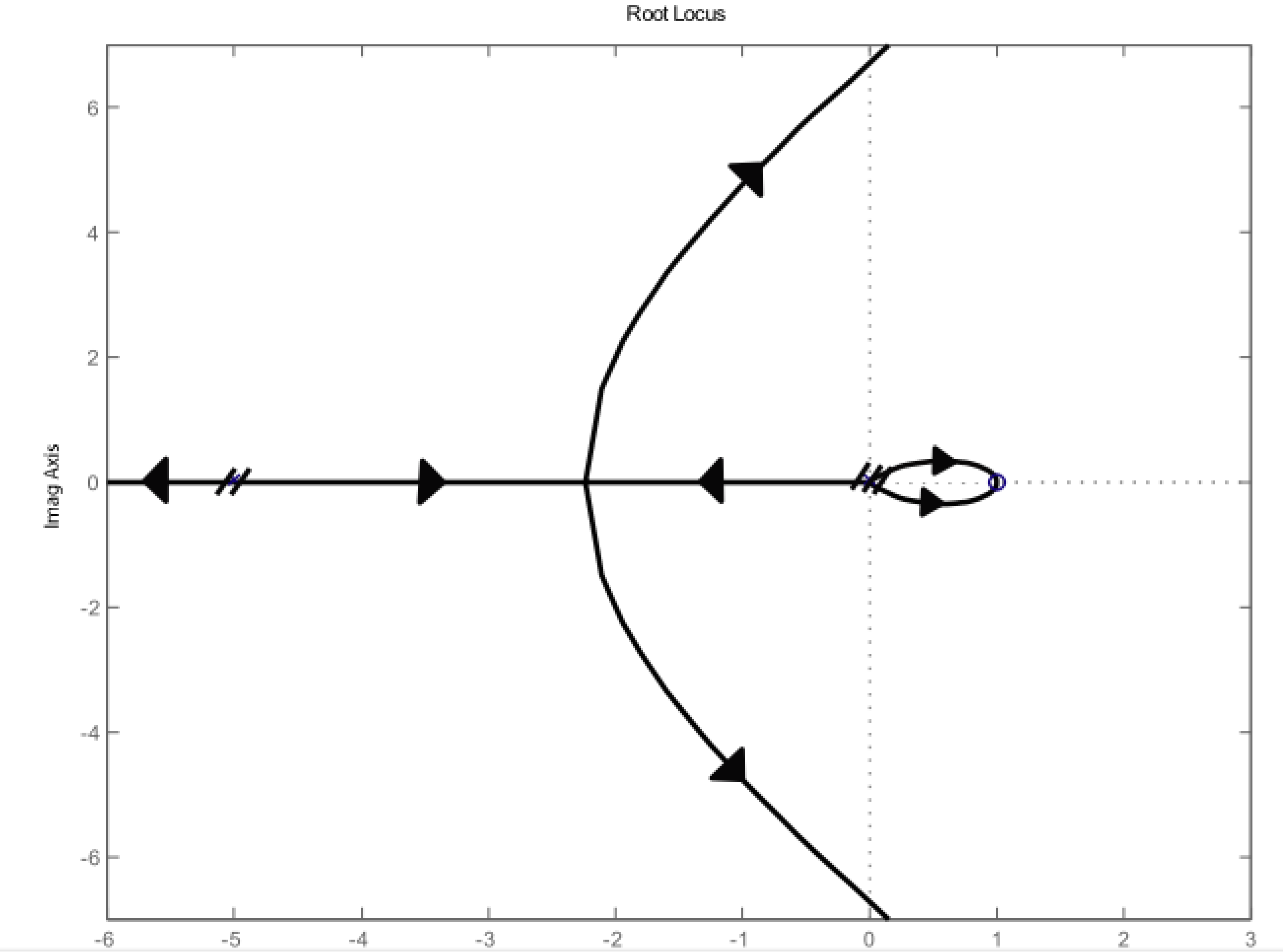
$$\frac{2}{s-1}-\frac{3}{s}-\frac{2}{s+5}=0$$

Risolvendo l'equazione si ottiene:

$$3s^2-15=0\Rightarrow s=\pm\sqrt{5}=\pm 2.236$$

Dalle considerazioni fatte sopra si osserva che solo $s=-2.236$ appartiene al luogo delle radici.

Di seguito è riportato il luogo delle radici.



6. [punti 5] Tracciare il luogo delle radici dell'equazione

$$1+\frac{s+a}{(s+1)(s+2)(s+2a)}=0 \quad \text{per } a \geq 0.$$

Si determinino mediante una stima numerica le radici doppie presenti nel luogo. Esporre dettagliatamente il metodo numerico scelto considerando che un errore di $\pm 10\%$ nella stima è accettabile al fine del tracciamento qualitativo richiesto.

$$(s^2+3s+2)(s+2a)+s+a=0$$

$$s^3+3s^2+2s+2a(s^2+3s+2)+s+a=0$$

$$s^3+3s^2+3s+2a\left(s^2+3s+2+\frac{1}{2}\right)=0$$

$$1+2a\,\frac{s^2+3s+5/2}{s(s^2+3s+3)}=0$$

$$1+2a\,\frac{\left(s+\frac{3}{2}+j\frac{1}{2}\right)\left(s+\frac{3}{2}-j\frac{1}{2}\right)}{s\left(s+\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(s+\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=0$$

Calcolo delle radici doppie:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s+\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{1}{s+\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{1}{s+\frac{3}{2}+j\frac{1}{2}}-\frac{1}{s+\frac{3}{2}-j\frac{1}{2}}=0$$

$$\frac{1}{s}+\frac{2(s+1{,}5)}{(s+1{,}5)^2+0{,}75}-\frac{2(s+1{,}5)}{(s+1{,}5)^2+0{,}25}=0$$

$$f(s)\triangleq\frac{1}{s}+2(s+1{,}5)\left[\frac{1}{(s+1{,}5)^2+0{,}75}-\frac{1}{(s+1{,}5)^2+0{,}25}\right]$$

L'asse reale negativo appartiene al luogo ($a>0$) e quindi, tentativamente, si cercano le radici nell'intervallo $[-5,-1]$

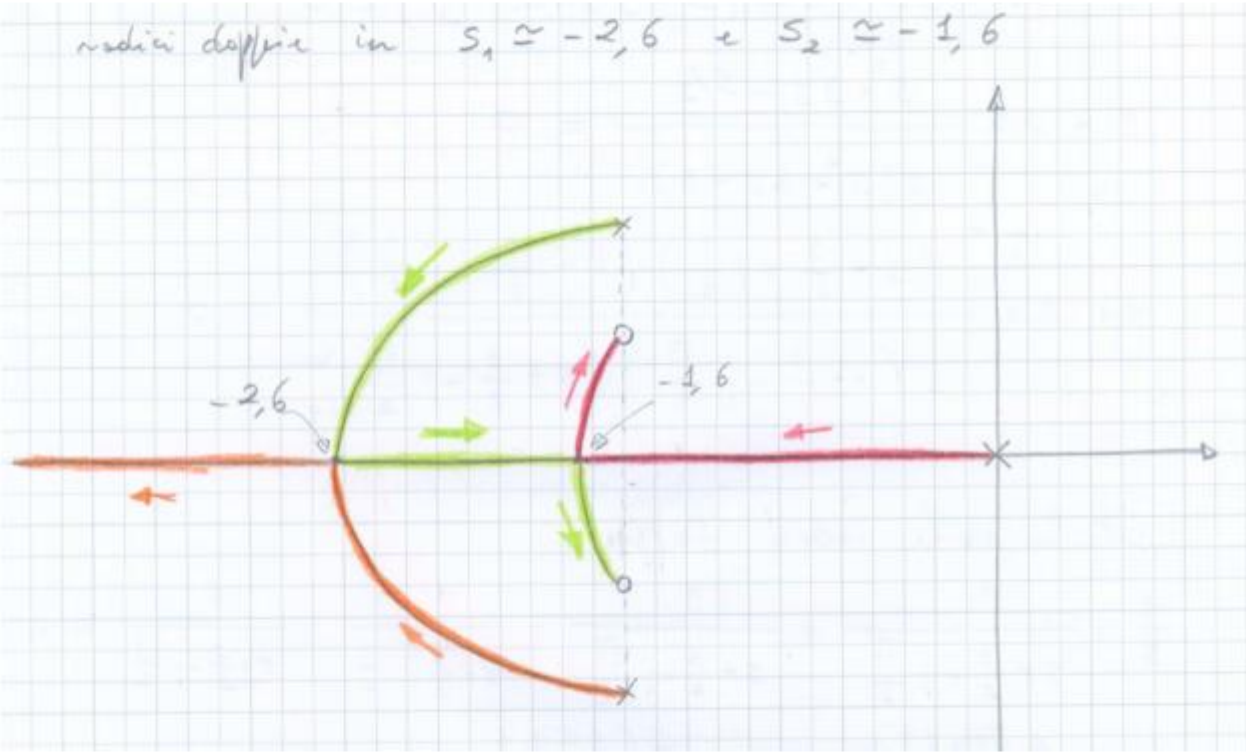
$f(-5)=-0{,}178$

$f(-4)=-0{,}195$

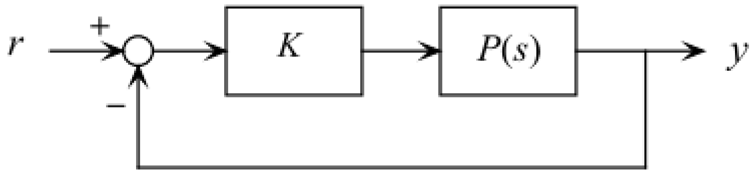
$\left.\begin{array}{l} f(-3)=-0{,}133 \\ f(-2)=0{,}5 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-2{,}5)=0{,}057\,;\ f(-2{,}6)=-0{,}0002$

$\left.\begin{array}{l} f(-2)=0{,}5 \\ f(-1)=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-1{,}5)=-0{,}666$

$f(-1{,}6)=-0{,}118$



6. [punti 4.5] Sia assegnato il seguente sistema retroazionato dove $P(s) = \dfrac{s+4}{s^2(s+2)^2}$.



Tracciare il luogo delle radici relativo all'equazione caratteristica $1 + KP(s) = 0$ per $K > 0$. Determinare in particolare gli asintoti, le eventuali radici doppie e gli angoli di partenza dai poli di $P(s)$.

6.

Gli angoli di partenza da 0 e – 2 sono +/- 90°

Gli asintoti sono tre, hanno centro in 0 + j0, con angoli +60°, +180°, -60° .

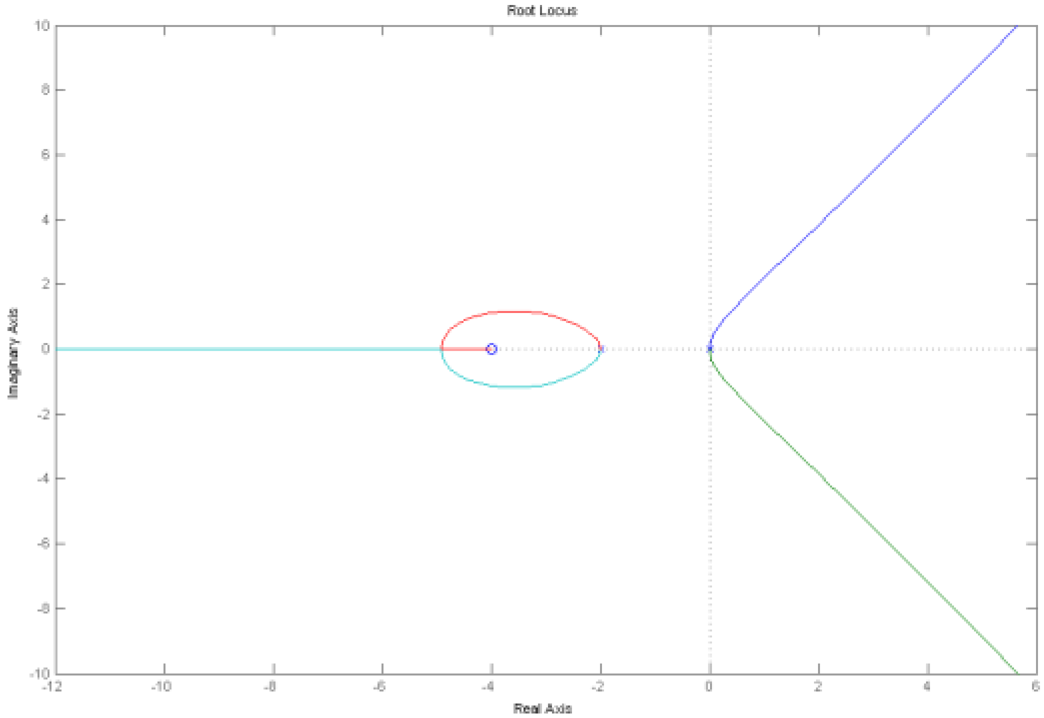
Calcolo delle radici doppie:

$$2 \cdot \frac{1}{s} + 2 \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+4} = 0$$

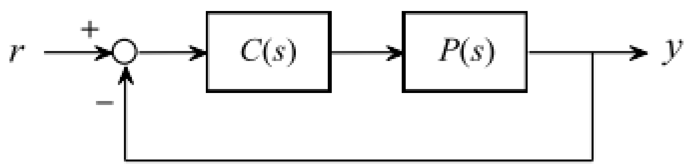
$$3s^2 + 18s + 16 = 0$$

$$s_{1,2} = -1,0851 \quad -4,9149$$

si scarta la prima radice in quanto non appartiene al luogo diretto



4. [punti 6] Sia dato il sistema in retroazione di figura dove $P(s)=\dfrac{1}{s\left[(s+2)^2+16\right]}$ e $C(s)=K\in\mathbb{R}.$.



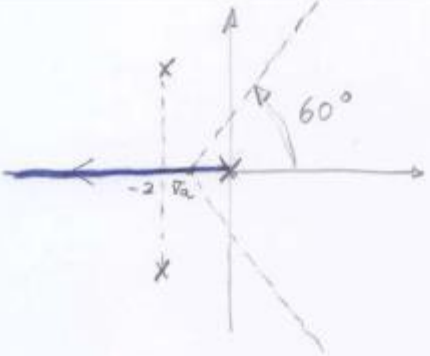
a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K>0$. In particolare 1) determinare gli asintoti del luogo, 2) determinare gli angoli di partenza del luogo, 3) dimostrare che non esistono radici doppie reali nel luogo.
b. Determinare il guadagno ottimo K^* del controllore affinché il grado di stabilità del sistema retroazionato sia massimo $\left[K^*=\arg\max_{K\in\mathbb{R}} G_s(K)\right]$.

a. Eq. caratteristica del sistema retroazionato

$$1+K\frac{1}{s\left[(s+2)^2+16\right]}=0\ ,\quad K>0$$

Poli ad anello aperto: $p_1=0$, $p_{2,3}=-2\pm j4$

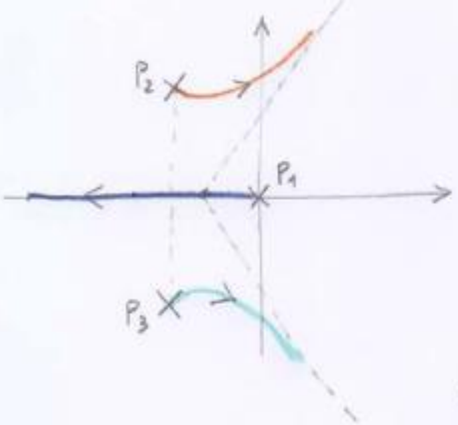
ASINTOTI: centro in $\sigma_a=\dfrac{p_1+p_2+p_3}{3}=-\dfrac{4}{3}$



L'asse reale negativo appartiene al luogo.

RADICI DOPPIE:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s+2-j4} + \frac{1}{s+2+j4} = 0$$



$$3s^2 + 8s + 20 = 0$$

$$s = \frac{-4 \pm \sqrt{16-60}}{3} \notin \mathbb{R}$$

Quindi non esistono radici doppie reali nel luogo.

ANGOLI DI PARTENZA:

$$\theta_2 = \pi - \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}\,\frac{2}{4} \right] =$$

$$= -\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} = -0{,}4636 = -26{,}57^\circ$$

$$\theta_3 = +26{,}57^\circ \qquad \theta_1 = +180^\circ$$

b.

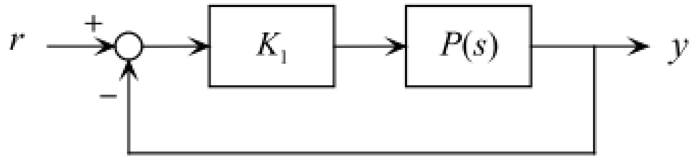
La configurazione dei poli retroazionati in corrispondenza del guadagno ottimo K^* è σ, $\sigma + j\omega$, $\sigma - j\omega$ $[\sigma, \omega \in \mathbb{R}]$.

Dal teorema del baricentro $3\sigma = -4 \Rightarrow \sigma = -\frac{4}{3}$

Quindi $K^* \ni 1 + K^* \dfrac{1}{\left(-\frac{4}{3}\right)\left[\left(-\frac{4}{3}+2\right)^2 + 16\right]} = 0$

$\Rightarrow K^* \cong 21{,}9$

6. [punti 4,5] Sia dato il sistema in retroazione di figura

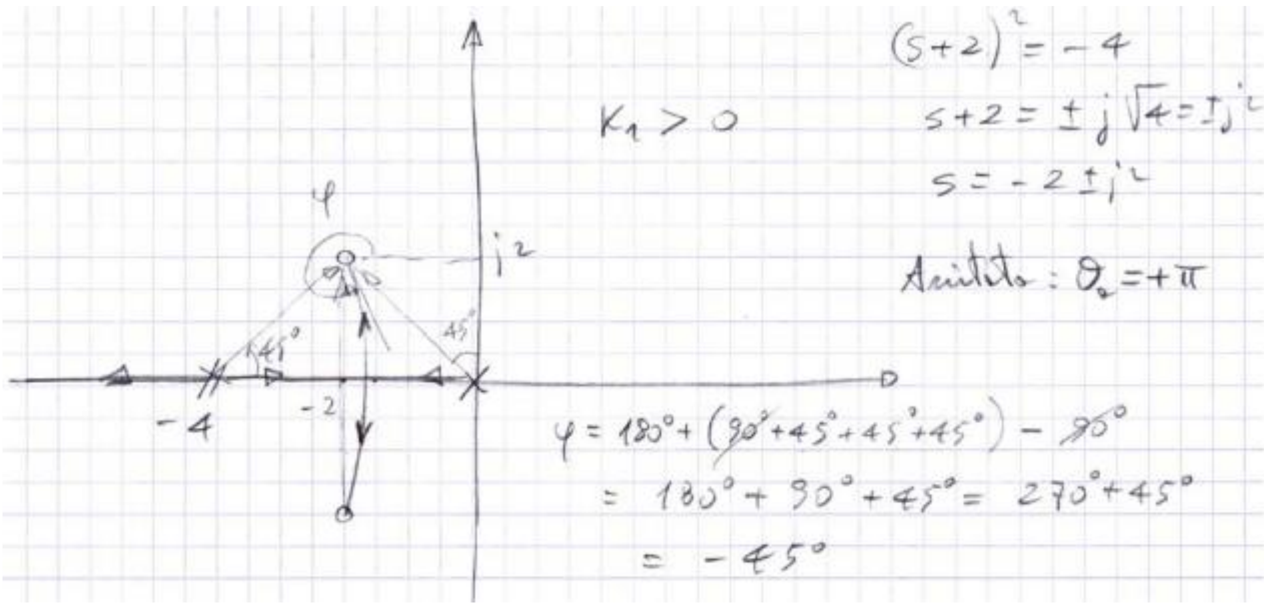


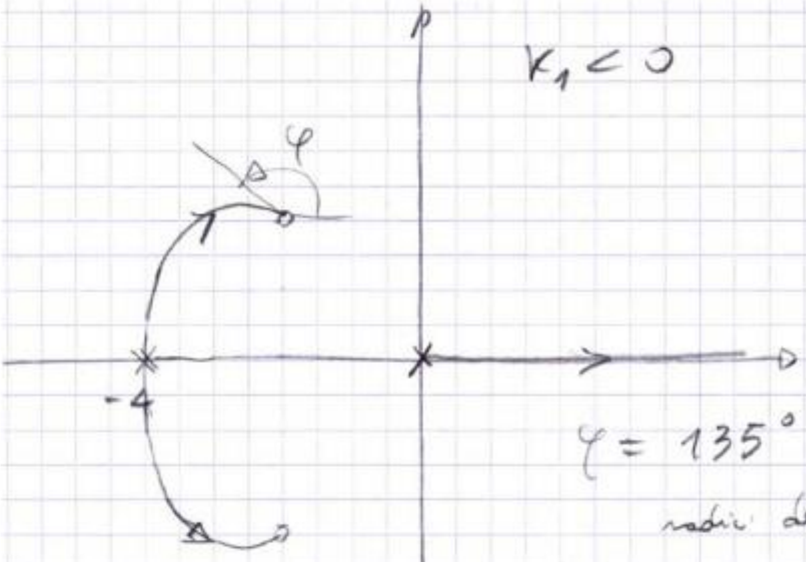
dove $P(s) = \dfrac{\left[(s+2)^2+4\right]}{s(s+4)^2}$.

a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K_1 > 0$ (luogo diretto) e $K_1 < 0$ (luogo inverso) determinando in entrambi i luoghi gli asintoti, le eventuali radici doppie e gli angoli di arrivo.

b. Determinare i valori di $K_1 \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

N.B.: L'equazione che determina le radici doppie al punto **a** è equivalente ad un'equazione polinomiale di terzo grado che ammette una sola radice reale. Questa venga stimata con una procedura numerica ed una precisione di circa l'1%.





$K_1 < 0$

Asintoti: $\vartheta_0 = 0°$

$\varphi = 135°$

radici doppie:

$$\frac{1}{s} + \frac{2}{s+4} - \frac{1}{s+2-j2} - \frac{1}{s+2+j2} = 0$$

radici doppie:

$$\frac{1}{s} + \frac{2}{s+4} - \frac{1}{s+2-j2} - \frac{1}{s+2+j2} = 0$$

$$\frac{1}{s} + \frac{2}{s+4} - \left(\frac{s+2\cancel{+j2}+s+2\cancel{-j2}}{(s+2)^2+4} \right) = 0$$

$$\frac{1}{s} + \frac{2}{s+4} - \frac{2(s+2)}{(s+2)^2+4} = 0$$

$$(s+4)\left(s^2+4s+8\right) + 2s\left(s^2+4s+8\right) - 2\left(s^2+2s\right)(s+4) = 0$$

$$(3s+4)\left(s^2+4s+8\right) - 2\left(s^3+2s^2+4s^2+8s\right) = 0$$

$$(3s+4)\left(s^2+4s+8\right) - 2\left(s^3+6s^2+8s\right) = 0$$

$$3s^3 + \cancel{12s^2} + 24s + 4s^2 + \cancel{16s} + 32$$

$$-2s^3 - \cancel{12s^2} - \cancel{16s} = 0$$

$$s^3 + 4s^2 + 24s + 32 = 0$$

$$f(s) = s^3 + 4s^2 + 24s + 32$$

s	$f(s)$
-2	-8
$-2,2$	-12
$-1,8$	$-4,072$
$-1,6$	$-0,2560$
$-1,5$	$1,625$
$-1,58$	$0,12$
-1.59	-0.0673

radice doppia $\simeq -1,59$

b) Dal luogo delle radici si deduce che la stabilità asintotica del sistema ret. è data dalla condizione

$$K_1 > 0$$

Verifica con il criterio di Routh.

$$s(s^2 + 8s + 16) + K_1(s^2 + 4s + 8) = 0$$

$$s^3 + 8s^2 + 16s + K_1 s^2 + 4K_1 s + 8K_1 = 0$$

$$s^3 + (8 + K_1)s^2 + (16 + 4K_1)s + 8K_1 = 0$$

$$\begin{array}{c|ll}
3 & 1 & 16 + 4K_1 \\
2 & 8 + K_1 & 8K_1 \\
1 & (8+K_1)(16+4K_1) - 8K_1 & \\
0 & 8K_1 &
\end{array}$$

$8 + K_1 > 0 \quad K_1 > -8$

$8K_1 > 0 \quad K_1 > 0$

$128 + 32K_1 + 16K_1 + 4K_1^2 - 8K_1 > 0$

$4K_1^2 + 40K_1 + 128 > 0$

radici

$$K_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 512}}{4}$$

è sempre > 0

$$\Delta = -112 < 0 \Rightarrow \forall K_1 \in \mathbb{R} \,!$$

6. [punti 4,5] Si tracci il luogo delle radici della seguente equazione caratteristica:

$$1+5\frac{1+\tau s}{(1+2\tau s)(1+s)}=0 \quad , \quad \tau\in[0,+\infty)$$

determinando in particolare asintoti e radici doppie

6.
L'equazione caratteristica

$$1+10\frac{1+\tau s}{(1+2\tau s)(1+s)}=0 \qquad K\in[0,+\infty)$$

e' riscrivibile come

$$(1+2\tau s)(1+s)+10+\tau(10s)=0$$

$$(1+s)+\tau[2s(1+s)]+10+\tau(10s)=0$$

$$s+11+\tau[2s(1+s)+10s]=0$$

$$1+\tau\cdot 2\frac{s+s^2+5s}{s+11}=0$$

$$1+2\tau\frac{s^2+6s}{s+11}=0$$

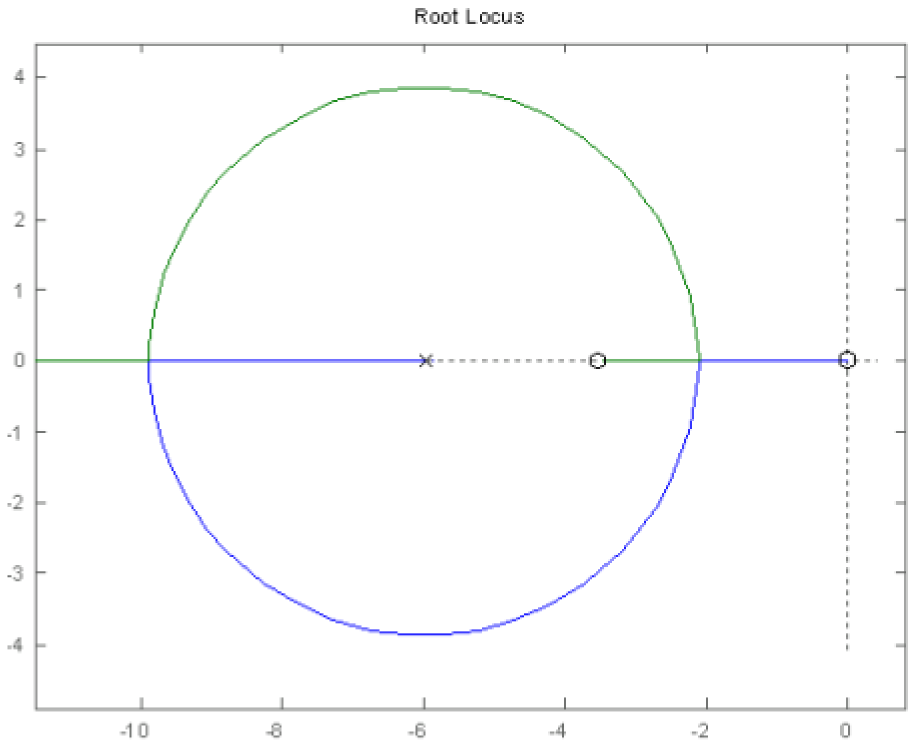
$$1+2\tau\frac{s^2+6s}{s+11}=0$$

$$1+2\tau\frac{s(s+6)}{s+11}$$

e quindi, posto $K_1:=2\tau$, come

$$1+K_1\frac{s(s+6)}{s+11}=0 \qquad K_1\in[0,+\infty)$$

Si tratta di un luogo diretto. E' noto che il luogo delle radici in oggetto e' formato anche da una



circonferenza di raggio $R = \sqrt{d_1 d_2} = \sqrt{5 \cdot 11}$ e centro in -11.

Le radici doppie sono determinabili anche risolvendo l'equazione:

$$\frac{1}{s+6} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{7}{2}} = 0$$

e valgono $s_1 = -6 + \sqrt{6^2 - 21} = -9.87$ e $s_2 = -6 + \sqrt{6^2 - 42} = -2.12$.

6. [punti 4,5] Si tracci il luogo delle radici dell'equazione caratteristica

$$1 + K_1 \frac{s-1}{(s+1)(s+7)} = 0$$

per $K_1 > 0$ (luogo diretto) e per $K_1 < 0$ (luogo inverso) determinando in entrambi i casi gli asintoti e le eventuali radici doppie.

Si osservi innanzitutto che si ha la seguente configurazione di poli e zeri:

- uno zero per $s = 1$ con molteplicità 1
- uno polo per $s = -1$ con molteplicità 1
- uno polo per $s = -7$ con molteplicità 1

Essendo $n - m = 1$ il luogo (sia diretto che inverso) presenta un asintoto.

LUOGO DIRETTO ($K_1 \in [0, +\infty)$ **):**

Tenendo conto delle seguenti osservazioni

- un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zeri e di poli.
- il luogo delle radici ha 2 rami.

si può dedurre che il luogo delle radici (per $K_1 > 0$) ha l'andamento riportato in figura 1.

LUOGO INVERSO ($K_1 \in (-\infty, 0]$ **):**

Tenendo conto delle seguenti osservazioni

- un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale pari di zeri e di poli.
- il luogo delle radici ha 2 rami.
- Il luogo, oltre a due porzioni dell'asse reale, comprende una circonferenza con centro nello zero e raggio $R = \sqrt{d_1 d_2} = 4$ (con $d_1 = 2$ e $d_2 = 8$).

si può dedurre che il luogo delle radici (per $K_1 < 0$) ha l'andamento riportato in figura 2 e interseca l'asse reale nei punti di ascissa -3 e 5.

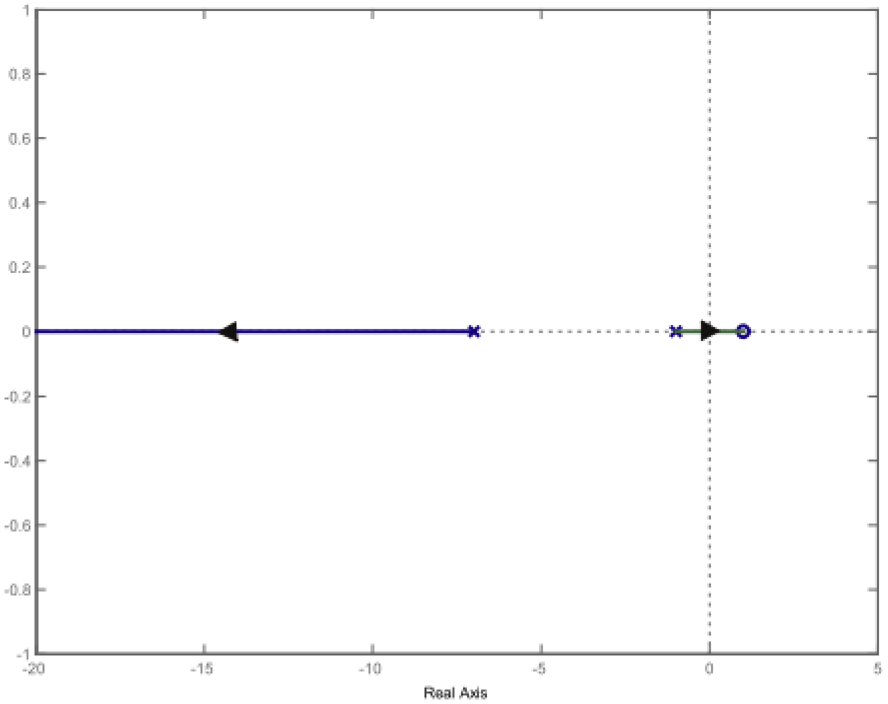


Figura 1. Luogo diretto

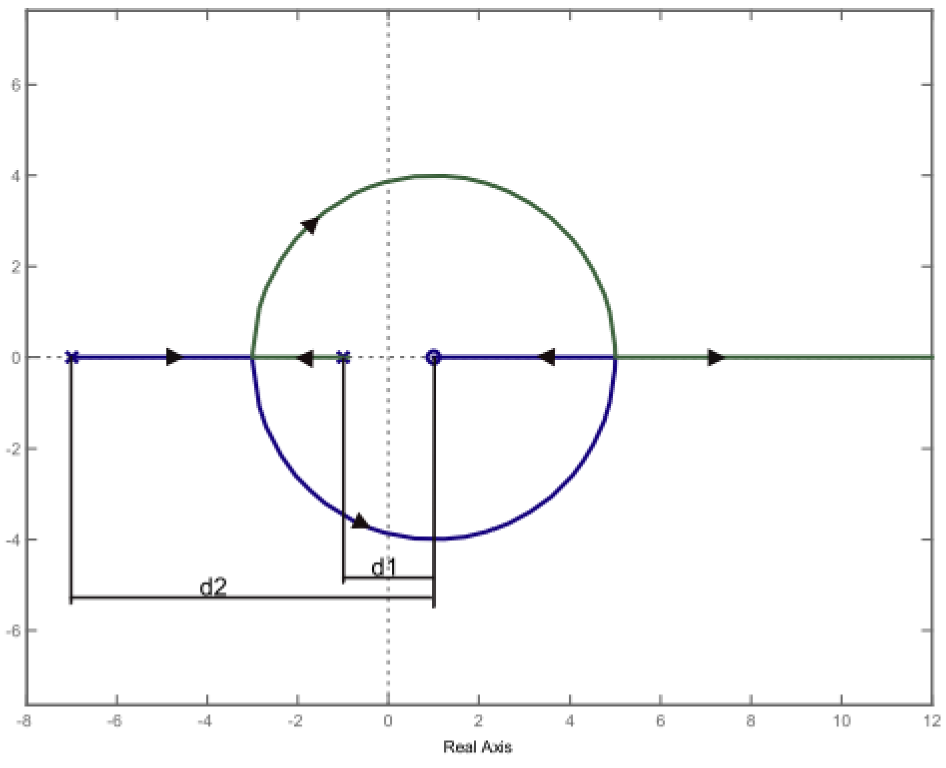


Figura 2. Luogo inverso

8. [punti 4,5] Un sistema a tempo discreto, orientato dall'ingresso u all'uscita y, è descritto dalla seguente equazione alle differenze

$$y(k+5)-0.6y(k+4)-0.71y(k+3)+0.24y(k+2)+0.16y(k+1)=u(k+3) \ .$$

a) Determinare la funzione di trasferimento del sistema.
b) Studiare la stabilità asintotica del sistema applicando il criterio di Jury.

a) ordine n di $\Sigma_d = k+5-(k+1) = 4$

grado relativo ρ di $\Sigma_d = k+5-(k+3) = 2$

Sostituzione $k \leftarrow k-5$ (si ottiene l'eq. in forma standard)

$$y(k)-0.6\,y(k-1)-0.71\,y(k-2)+0.24\,y(k-3)+0.16\,y(k-4) = u(k-2)$$

$$H(z) = \frac{z^2}{z^4-0.6\,z^3-0.71\,z^2+0.24\,z+0.16} =: \frac{b(z)}{a(z)}$$

b) Si applica il criterio di Jury al pol. $a(z)$

1) $a(1) = 1-0.6-0.71+0.24+0.16 = 0.09 > 0$ ok!

2) $(-1)^4 a(-1) = a(-1) = 1+0.6-0.71-0.24+0.16 = 0.81 > 0$ ok!

3) $|a_0| < a_n$, $0.16 < 1$ ok!

1	0.16	0.24	-0.71	-0.6	1
2	1	-0.6	-0.71	0.24	0.16
3	-0.9744	0.6384	0.5964	-0.336	
4	-0.336	0.5964	0.6384	-0.9744	
5	0.83655936	*	-0.36662976		

4) $|b_0| > |b_3|$, $0.9744 > 0.336$ ok!

5) $|c_0| > |c_2|$, $0.83655936 > 0.3666297$ ok!

Tutte le radici di $a(z)$ hanno modulo minore di uno, quindi Σ_d è asintoticamente stabile.

6. [punti 6] Un sistema a tempo discreto è in evoluzione libera (ingresso identicamente nullo) e la trasformata zeta dell'uscita è $Y_{\text{lib}} = \dfrac{z^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 (z^2+1)}$. Determinare l'evoluzione libera dell'uscita $y_{\text{lib}}(k),\ k \geq 0$.

$$Y_{lib} = z \cdot \frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 (z^2+1)} \triangleq z \cdot Y_1(z)$$

$$Y_1(z) = \frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 (z-j)(z+j)} = \frac{K_{11}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{K_{12}}{z-\frac{1}{2}} + \frac{K_2}{z-j} + \frac{\overline{K_2}}{z+j}$$

$$K_{11} = \left.\frac{z}{z^2+1}\right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$K_2 = \left.\frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 (z+j)}\right|_{z=j} = \frac{1}{2\left(-\frac{1}{2}+j\right)^2} = -\frac{6}{25} + \frac{8}{25} j$$

$$K_{12} + K_2 + \overline{K_2} = 0 \qquad K_{12} = -K_2 - \overline{K_2} = \frac{12}{25}$$

$$Y_{lib} = \frac{2}{5} \cdot \frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{12}{25} \cdot \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \left(-\frac{6}{25} + \frac{8}{25} j\right) \frac{z}{z-j} + \left(-\frac{6}{25} - \frac{8}{25} j\right) \cdot \frac{z}{z+j}$$

$$\left| -\frac{6}{25} + \frac{8}{25} j \right| = \frac{2}{5} \qquad \arg\left(-\frac{6}{25} + \frac{8}{25} j\right) = \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$|j| = 1 \qquad \arg(j) = \frac{\pi}{2}$$

$$y_{lib}(k) = \frac{2}{5} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \frac{12}{25}\left(\frac{1}{2}\right)^k + 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} k + \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{4}{5} k \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{12}{25}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{4}{5} \cos\left(\frac{\pi}{2} k - \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\right), \ k \geq 0$$

anche esprimibile come

$$y_{lib}(k) = \frac{4}{5} k \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{12}{25}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{12}{25} \cos\left(\frac{\pi}{2} k\right) - \frac{16}{25} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} k\right)$$

8. [punti 4,5] Sia dato un sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento

$$H(z)=\frac{z^2-z-1}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)}.$$

a) Determinare l'equazione alle differenze che caratterizza il sistema.

b) Determinare la risposta forzata $y(k)$ all'ingresso $u(k)=k\cdot 1(k)$.

8.

a) $H(z)=\dfrac{z^2-z-1}{z^2-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}}$, quindi l'equazione alle differenze è

$$y(k)-\frac{1}{2}y(k-1)-\frac{1}{2}y(k-2)=u(k)-u(k-1)-u(k-2)$$

b)

$$Y(z)=H(z)U(z)=\frac{z^2-z-1}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{z}{(z-1)^2}=\frac{z(z^2-z-1)}{(z-1)^3\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

$$Y\cdot z^{-1}=\frac{z^2-z-1}{(z-1)^3\left(z+\frac{1}{2}\right)}=\frac{c_{1,1}}{(z-1)^3}+\frac{c_{1,2}}{(z-1)^2}+\frac{c_{1,3}}{z-1}+\frac{c_2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{-\frac{2}{3}}{(z-1)^3}+\frac{\frac{10}{9}}{(z-1)^2}+\frac{-\frac{2}{27}}{z-1}+\frac{\frac{2}{27}}{\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

$$Y=-\frac{2}{3}\frac{z}{(z-1)^3}+\frac{10}{9}\frac{z}{(z-1)^2}-\frac{2}{27}\frac{z}{z-1}+\frac{2}{27}\frac{z}{\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

$$y(k)=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}k(k-1)+\frac{10}{9}k-\frac{2}{27}+\frac{2}{27}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k,\ k\geq 0$$

$$y(k)=-\frac{1}{3}k^2+\frac{13}{9}k-\frac{2}{27}+\frac{2}{27}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k,\ k\geq 0$$

8. [punti 4,5] Un sistema a tempo discreto è in evoluzione libera (ingresso identicamente nullo) e la trasformata zeta dell'uscita è $Y_{\text{lib}} = \dfrac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 (z^2-1)}$. Determinare l'evoluzione libera dell'uscita $y_{\text{lib}}(k),\ k \geq 0$.

$$Y = \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 (z^2-1)} = \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 (z+1)(z-1)}$$

$$= \frac{K_{11}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{K_{12}}{z-\frac{1}{2}} + \frac{K_2}{z+1} + \frac{K_3}{z-1}$$

$$K_{11} = \left.\frac{1}{(z^2-1)}\right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{\frac{1-4}{4}} = -\frac{4}{3}$$

$$K_2 = \left.\frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 (z-1)}\right|_{z=-1} = \frac{1}{\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2(-2)} = \frac{1}{\frac{9}{4}(-2)} = -\frac{1}{\frac{9}{2}} = -\frac{2}{9}$$

$$K_3 = \left.\frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 (z+1)}\right|_{z=1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 2} = \frac{1}{\frac{1}{4}\cdot 2} = 2$$

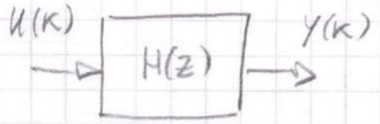
$$K_{12} + K_2 + K_3 = 0 \Rightarrow K_{12} = -K_2 - K_3 = \frac{2}{9} - 2 = \frac{2-18}{9} = -\frac{16}{9}$$

$$y(k) = -\frac{4}{3}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}\cdot 1(k-1) - \frac{16}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\cdot 1(k-1)$$
$$-\frac{2}{9}(-1)^{k-1}\cdot 1(k-1) + 2\cdot 1(k-1) \qquad , k \geq 0$$

anche esprimibile come

$$y(k) = 2 - 4\delta(k) - \frac{16}{3}k\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{16}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{2}{9}(-1)^k, \ k \geq 0$$

8. [punti 4,5] Determinare la risposta forzata $y(k)$ all'ingresso $u(k) = 1(k)$ di un sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento $H(z) = \dfrac{z^2+z+1}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)}$.



$$H(z) = \frac{z^2+z+1}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)} \qquad u(k) = 1(k)$$

$$U(z) = \frac{z}{z-1} \qquad Y(z) = H(z)U(z) = \frac{(z^2+z+1)\,z}{(z-1)^2\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

$$Y(z)\cdot z^{-1} = \frac{z^2+z+1}{(z-1)^2\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \frac{c_{11}}{(z-1)^2} + \frac{c_{12}}{z-1} + \frac{c_2}{z+\frac{1}{2}}$$

$$c_{11} = \left.\frac{z^2+z+1}{z+\frac{1}{2}}\right|_{z=1} = \frac{3}{\frac{3}{2}} = 2$$

$$c_2 = \left.\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1}{\frac{9}{4}} = \frac{\frac{1-2+4}{4}}{\frac{9}{4}} = \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{9}_{3}} = \frac{1}{3}$$

$$c_{12} + c_2 = 1 \qquad c_{12} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$Y(z) = 2\,\frac{z}{(z-1)^2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{z}{z-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{z}{z+\frac{1}{2}}$$

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[Y(z)\right] = 2\,k\cdot 1(k) + \frac{2}{3}\,1(k) + \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k 1(k)$$

8. [punti 4,5] Determinare la risposta forzata $y(k)$ all'ingresso $u(k) = 1(k)$ (gradino unitario) di un sistema a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze

$$y(k) + \frac{1}{4} y(k-1) - \frac{1}{8} y(k-2) = u(k) + 4u(k-1) + 4u(k-2) \ .$$

La funzione di trasferimento è

$$H(z) = \frac{z^2 + 4z + 4}{z^2 + \frac{1}{4} z - \frac{1}{8}} = \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

$$Y(z) = H(z)\,U(z) = \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)} \cdot \frac{z}{z-1}$$

$$Y(z) = z \cdot \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)(z-1)} = z \cdot \left(\frac{K_1}{z-1} + \frac{K_2}{z+\frac{1}{2}} + \frac{K_3}{z-\frac{1}{4}} \right)$$

$$K_1 = \left. \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)} \right|_{z=1} = 8$$

$$K_2 = \left. \frac{(z+2)^2}{\left(z-\frac{1}{4}\right)(z-1)} \right|_{z=-\frac{1}{2}} = 2$$

$$K_1 + K_2 + K_3 = 1 \Rightarrow K_3 = -9$$

$$Y(z) = 8\,\frac{z}{z-1} + 2\,\frac{z}{z+\frac{1}{2}} - 9\,\frac{z}{z-\frac{1}{4}}$$

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[Y(z)\right] = 8 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 9\left(\frac{1}{4}\right)^k, \quad k \geq 0$$

8. [punti 4,5] Un sistema a tempo discreto, orientato dall'ingresso u all'uscita y, è descritto dalla seguente equazione alle differenze

$$y(k) - 8y(k+2) + 16y(k+4) = 16u(k+4) + 16u(k+1) \; .$$

a) Determinare la funzione di trasferimento del sistema.

b) Verificare la stabilità asintotica del sistema applicando il criterio di Jury.

La differenza massima fra gli argomenti della funzione $y(\cdot)$ è 4.
Quindi l'ordine del sistema è $n = 4$.
Si effettua la sostituzione $(k-4) \to k$:

$$y(k-4) - 8y(k-4+2) + 16y(k-4+4) = 16u(k-4+4) + 16u(k-4+1)$$

$$16y(k) - 8y(k-2) + y(k-4) = 16u(k) + 16u(k-3)$$

La funzione di trasferimento è

$$H(z) = \frac{16z^4 + 16z}{16z^4 - 8z^2 + 1} \triangleq \frac{b(z)}{a(z)}$$

Per un sistema del 4° ordine il criterio di Jury afferma:
Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia asintoticamente stabile è che le seguenti disuguaglianze siano soddisfatte:

1) $a(1) > 0$: $16 - 8 + 1 = 9 > 0$ ok!
2) $(-1)^4 a(-1) > 0$: $16 - 8 + 1 = 9 > 0$ ok!
3) $|a_0| < a_4$: $1 < 16$ ok!
4) $|b_0| > |b_3|$: $255 > 0$ ok!
5) $|c_0| > |c_2|$: $255^2 > 255 \cdot 120$ ok!

Tabella di Jury

1	1	0	-8	0	16
2	16	0	-8	0	1
3	-255	0	120	0	
4	0	120	0	-255	
5	255^2	0	$-255 \cdot 120$		

8. **[punti 4,5]** Determinare la risposta forzata $y(k)$ all'ingresso $u(k) = 2\cdot 1(k)$ di un sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento $H(z) = \dfrac{z^2+1}{(z+1)^2(2z+1)}$.

6. $u(k) = 2\cdot 1(k) \qquad U(z) = 2\cdot \dfrac{z}{z-1}$

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{z^2+1}{(z+1)^2(2z+1)}\cdot\frac{2\cdot z}{z-1}$$

$$= \frac{(z^2+1)\cdot\cancel{2}\cdot z}{(z+1)^2\cdot\cancel{2}\left(z+\frac{1}{2}\right)\cdot(z-1)} = \frac{z(z^2+1)}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z-1)(z+1)^2}$$

$$\frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z-1)(z+1)^2} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z+\frac{1}{2}} + \frac{c_{31}}{(z+1)^2} + \frac{c_{32}}{z+1}$$

$$c_1 = \left.\frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+1)^2}\right|_{z=1} = \frac{\cancel{2}}{\frac{3}{2}\cdot 2^{\cancel{2}}} = \frac{1}{3}$$

$$c_2 = \left.\frac{z^2+1}{(z-1)(z+1)^2}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}+1}{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{5}{\cancel{4}}}{-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}} = -5\cdot\frac{2}{3} = -\frac{10}{3}$$

$$c_{31} = \left.\frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z-1)}\right|_{z=-1} = \frac{2}{\left(-\frac{1}{2}\right)(-2)} = 2$$

$$c_1 + c_2 + c_{32} = 0 \qquad c_{32} = -c_1 - c_2 = -\frac{1}{3} + \frac{10}{3} = 3$$

$$Y(z) = \frac{1}{3}\cdot\frac{z}{z-1} - \frac{10}{3}\cdot\frac{z}{z+\frac{1}{2}} + 2\cdot\frac{z}{(z+1)^2} + 3\,\frac{z}{z+1}$$

$$y(k) = \frac{1}{3} - \frac{10}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k + 2\cdot k\cdot(-1)^{k-1} + 3\cdot(-1)^k \;, \quad k \geq 0$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{10}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2\cdot k\cdot(-1)^k + 3\cdot(-1)^k \;, \quad k \geq 0$$

6. [punti 6] Un sistema a tempo discreto, con ingresso u ed uscita y, è descritto dalla seguente equazione alle differenze

$$y(k) - 0.5y(k-2) + 0.06y(k-4) = u(k-1) \; .$$

a) Determinarne la funzione di trasferimento.
b) Verificarne la stabilità asintotica applicando il criterio di Jury.

a) $H(z) = \dfrac{z^3}{z^4 - 0.5z^2 + 0.06} \triangleq \dfrac{b(z)}{a(z)}$

b) $a(z) = a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$

$\equiv z^4 - 0.5 z^2 + 0.06$

Si applica il Criterio di Jury

1) $a(1) > 0$, $a(1) = 1 - 0.5 + 0.06 > 0$ ok!

2) $(-1)^4 a(-1) > 0$, $a(-1) = 1 - 0.5 + 0.06 > 0$ ok!

3) $|a_0| < a_4$, $0.06 < 1$ ok!

4) $|b_0| > |b_3|$, $0.9964 > 0$ ok!

5) $|c_0| > |c_2|$, $0.99281 > 0.4683$ ok!

Tabella di Jury

1	0.06	0	−0.5	0	1
2	1	0	−0.5	0	0.06
3	−0.9964	0	0.47	0	
4	0	0.47	0	−0.9964	
5	0.99281	*	−0.4683		

Tutte le disequaglianze di Jury sono soddisfatte e quindi il sistema è asintoticamente stabile.

8. [punti 4,5] Determinare la risposta forzata $y(k)$ all'ingresso $u(k) = 1(k)$ (gradino unitario) di un sistema a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze

$$y(k) - \frac{1}{4} y(k-2) = u(k) + u(k-2) \ .$$

La funzione di trasferimento è $H(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2 - \frac{1}{4}} = \dfrac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{z}{z-1} = z \cdot A(z)$$

$$A(z) = \frac{z^2+1}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z+\frac{1}{2}} + \frac{c_3}{z-\frac{1}{2}}$$

$$c_1 = \left.\frac{z^2+1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\right|_{z=1} = \frac{8}{3} \qquad c_2 = \left.\frac{z^2+1}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{5}{6}$$

$$c_3 = \left.\frac{z^2+1}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)}\right|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{5}{2}$$

$$Y(z) = \frac{8}{3} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{5}{6} \cdot \frac{z}{z+\frac{1}{2}} - \frac{5}{2} \cdot \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{y(k) = \frac{8}{3} + \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^k - \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k \ , \quad k \geq 0}$$

8. [punti 4,5] Determinare la risposta forzata $y(k)$ all'ingresso $u(k)=1(k)$ (gradino unitario) di un sistema a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze

$$y(k)+y(k-1)+\frac{1}{4}y(k-2)=u(k)+4u(k-1)+4u(k-2) \ .$$

La funzione di trasferimento è $H(z)=\dfrac{z^2+4z+4}{z^2+z+\frac{1}{4}}=\dfrac{(z+2)^2}{(z+\frac{1}{2})^2}$

$$Y(z)=H(z)U(z)=\frac{(z+2)^2}{(z+\frac{1}{2})^2}\cdot\frac{z}{z-1}\overset{\triangle}{=} z\cdot A(z)$$

$$A(z)=\frac{(z+2)^2}{(z-1)(z+\frac{1}{2})^2}=\frac{c_1}{z-1}+\frac{c_{21}}{(z+\frac{1}{2})^2}+\frac{c_{22}}{z+\frac{1}{2}}$$

$$c_1=\left.\frac{(z+2)^2}{(z+\frac{1}{2})^2}\right|_{z=1}=4 \qquad c_{21}=\left.\frac{(z+2)^2}{z-1}\right|_{z=-\frac{1}{2}}=-\frac{3}{2}$$

$$c_1+c_{22}=1 \Rightarrow c_{22}=1-c_1=1-4=-3$$

$$Y(z)=4\frac{z}{z-1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{z}{(z+\frac{1}{2})^2}-3\frac{z}{z+\frac{1}{2}} \ , k\geq 0$$

$$y(k)=4-\frac{3}{2}k\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}-3\left(-\frac{1}{2}\right)^k=$$

$$=4+3k\left(-\frac{1}{2}\right)^k-3\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\boxed{y(k)=4+3(k-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^k, \ k\geq 0}$$

8. **[punti 4,5]** Dato il sistema a tempo discreto definito dall'equazione

$$y(k)+0.5y(k-1)+0.5y(k-2)+0.5y(k-3)=u(k-3)$$

ed orientato da $u(k)$ (ingresso) a $y(k)$ (uscita) se ne studi la stabilità alle perturbazioni.

La funzione di trasferimento del sistema a tempo discreto è

$$H(z)=\frac{1}{z^3+0.5z^2+0.5z+0.5}$$

La stabilità alle perturbazioni è determinata dalle radici del polinomio $a(z) \triangleq z^3+0.5z^2+0.5z+0.5$ per il quale si applica il Criterio di Jury

1) $a(1)>0$ ok!

2) $(-1)^3 a(-1)>0$

$(-1)(-1+\cancel{0.5}-\cancel{0.5}+0.5)>0$ ok!

3) $|a_0|<a_n$

$|0.5|<1$ ok!

4) $|b_0|>|b_{n-1}|$

1	0.5	0.5	0.5	1
2	1	0.5	0.5	0.5
3	-0.75	*	-0.25	

$|-0.75|>|-0.25|$ ok!

Il sistema è asintoticamente stabile.

8. [punti 4,5] Determinare la risposta forzata $y(k)$ all'ingresso $u(k) = k \cdot 1(k)$ (rampa unitaria) di un sistema a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze

$$y(k) + y(k-1) + \frac{1}{4} y(k-2) = u(k) + 4u(k-1) + 4u(k-2) \; .$$

$$\mathcal{Z}\left[k \cdot 1(k) \right] = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\mathcal{Z}\left[\binom{k}{n-1} a^{k-(n-1)} \cdot 1(k) \right] = \frac{z}{(z-a)^n}$$

$$H(z) = \frac{z^2 + 4z + 4}{z^2 + z + \frac{1}{4}} = \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$Y(z) = H(z)\,U(z) = \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} = z \cdot Y_1(z)$$

$$Y_1(z) = \frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 (z-1)^2}$$

$$Y_1(z) = \frac{c_{11}}{(z-1)^2} + \frac{c_{12}}{z-1} + \frac{c_{21}}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{c_{22}}{z+\frac{1}{2}} \neq$$

$$c_{11} = \left.\frac{(z+2)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}\right|_{z=1} = \frac{3^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3^2}{\frac{3^2}{2^2}} = 4$$

$$c_{21} = \left.\frac{(z+2)^2}{(z-1)^2}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{\left(-\frac{1}{2}+2\right)^2}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{\left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\frac{3^2}{2^2}}{\frac{3^2}{2^2}} = 1$$

$$c_{12} + c_{22} = 0$$

$$C_{12} = \frac{d}{dz}\left[\frac{(z+2)^2}{(z+\frac{1}{2})^2}\right]_{|z=1} =$$

$$= \frac{2(z+2)(z+\frac{1}{2})^2 - (z+2)^2 2(z+\frac{1}{2})}{(z+\frac{1}{2})^4}\Bigg|_{z=1} =$$

$$= \frac{2\cdot 3\cdot(\frac{3}{2})^2 - (3)^2\cdot 2\cdot\frac{3}{2}}{(\frac{3}{2})^4} =$$

$$= \frac{2\cdot 3\cdot\frac{3^2}{2^2} - 3^2\cdot 3}{\frac{3^4}{2^4}} = \frac{\frac{3^3}{2} - 3^3}{\frac{3^4}{2^4}} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{3}{2^4}} =$$

$$= \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)\cdot\frac{2^{\cancel{4}\,3}}{3} = -\frac{8}{3}$$

$$C_{22} = -C_{12} = \frac{8}{3}$$

$$Y(z) = 4\cdot\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{8}{3}\cdot\frac{z}{z-1} + \frac{z}{(z+\frac{1}{2})^2} + \frac{8}{3}\cdot\frac{z}{z+\frac{1}{2}}$$

$$y(k) = 4k - \frac{8}{3} + k\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \frac{8}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= 4k - \frac{8}{3} + k\left(-\frac{1}{2}\right)^k\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} + \frac{8}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k =$$

$$= 4k - \frac{8}{3} - 2k\left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{8}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

6. [punti 6] Un sistema a tempo discreto, con ingresso u ed uscita y, è descritto dalla seguente equazione alle differenze

$$y(k) - 0.5y(k-2) + 0.5y(k-3) + 0.06y(k-4) = u(k-1) \; .$$

a) Determinarne la funzione di trasferimento.

b) Verificarne la stabilità asintotica applicando il criterio di Jury.

a) $H(z) = \dfrac{z^3}{z^4 - 0{,}5\, z^2 + 0{,}5\, z + 0{,}06} \triangleq \dfrac{b(z)}{a(z)}$

b) $a(z) = a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$

$\equiv z^4 - 0{,}5\, z^2 + 0{,}5\, z + 0{,}06$

Si applica il criterio di Jury

1) $a(1) > 0$, $\quad 1 - 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}06 = 1{,}06 > 0$ ok!

2) $(-1)^4 a(-1) > 0$, $\quad 1 - 0{,}5 - 0{,}5 + 0{,}06 = 0{,}06 > 0$ ok!

3) $|a_0| < a_4$, $\quad 0{,}06 < 1$ ok!

Tabella di Jury

1	0,06	0,5	−0,5	0	1
2	1	0	−0,5	0,5	0,06
3	−0,9964	0,03	0,47	−0,5	
4	−0,5	0,47	0,03	−0,9964	
5	0,7428	*	0,2051		

4) $|b_0| > |b_3| \qquad |-0{,}9964| > |-0{,}5|$ ok!

5) $|c_0| > |c_2| \qquad |0{,}7428| > |0{,}2051|$ ok!

Tutte le disuguaglianze sono soddisfatte: il sistema è asintoticamente stabile.