

APPUNTI FONDAMENTI DI CONTROLLI AUTOMATICI

Matteo Franchini

February 2023

Indice

1 Il controllo attivo di un processo	5
1.1 Obiettivi del controllo attivo	5
1.2 Generalità sul concetto di sistema	6
1.3 Controllo ad azione diretta e in retroazione	11
1.3.1 Controllo ad azione diretta	11
1.3.2 Controllo in retroazione	12
1.3.3 Confronto tra il controllo ad azione diretta e in retroazione	13
1.3.4 Disamina delle strategie di controllo in condizioni perturbate	13
2 Modellistica ed equazioni differenziali lineari	15
2.1 Cenni di modellistica	15
2.2 Equazioni differenziali lineari	19
3 Cenni di analisi complessa	21
3.1 Integrali di linea nel piano complesso	23
3.1.1 Calcolo dell'integrale di linea	23
3.2 Poli di $f(s)$	26
3.3 Zeri di $f(s)$	26
3.4 continuazione analitica	28
4 Trasformata di Laplace	29
4.1 Linearità	30
4.2 Iniettività	30
4.3 Traformata inversa di Laplace	30
4.4 La trasformata della derivata	30
4.4.1 Derivate di ordine superiore	31
4.5 Trasformata dell'integrale	31
4.6 Teorema del valore finale	31
4.7 Teorema del valore iniziale	31
4.8 Traslazione nel tempo	32
4.9 Traslazione nella variabile complessa (s)	32
4.10 Teorema della convoluzione	33
4.11 Anttrasformazione delle funzioni razionali (il caso dei poli semplici)	34
5 Le funzioni impulsive e l'insieme dei behaviors	37
5.1 Cenni di teoria delle funzioni impulsive	40
5.2 Insieme dei behaviors	45
5.3 Relazioni fra le condizioni iniziali su istante di discontinuità	45
5.4 Relazioni di continuità ingresso-uscita	46
6 La funzione di trasferimento	47
6.1 La trasformata della derivata generalizzata	47
6.2 Derivate generalizzate di ordine superiore	48
6.3 Estensione dell'insieme dei behaviors	48
6.4 Problema fondamentale dell'analisi del dominio al tempo di un sistema Σ	48

6.5 Soluzione dell'equazione differenziale	49
6.6 Segnali tipici per l'ingresso di Σ	52
7 Sistemi dinamici elementari	55
7.1 Sistemi del primo ordine (strettamente propri)	55
7.2 Parametri della risposta al gradino unitario	56
7.3 Sistemi del secondo ordine (senza zeri)	56
7.4 Poli dominanti di un sistema dinamico	58
7.5 Specifiche sulla risposta al gradino per un sistema di controllo	61
8 La stabilità dei sistemi dinamici	63
8.1 Stabilità: definizioni e teoremi	63
8.2 Criterio di Routh	65
8.3 Casi singolari nella costruzione della tabella di Routh	67
8.3.1 Interpretazione della tabella di Routh nel caso di singolarità completa (caso b)	68
9 Analisi armonica e diagrammi di Bode	71
9.1 L'analisi armonica dei sistemi lineari	71
9.2 Guadagni del sistema lineare Σ	72
9.3 I diagrammi di Bode	72
9.4 Rappresentazioni e parametri della f.d.t	74
9.5 Parametri caratteristici della risposta armonica	75

Capitolo 1

Il controllo attivo di un processo

Definizione 1 *Processo: caratterizza l'evoluzione nel tempo di un sistema (fisico o meno)*

Un esempio di **controllo attivo** è quello delle banche centrali nel controllo dell'economia per ridurre o meno l'inflazione.

Durante il corso noi ci occuperemo quasi esclusivamente di **sistemi dinamici**.

Definizione 2 Controllo attivo: *c'è controllo attivo quando c'è un'azione di comando sul processo. I principi del controllo attivo sono due feedforward e feedback. Di solito nei sistemi di controllo ad alte prestazioni ci sono entrambe le caratteristiche, in questo corso ci occupremo soprattutto di retroazione*

Alcuni esempi di controllo attivo:

1. Robot industriale antropomorfo
2. Pale eoliche: qui ci sono tanti dispositivi di controllo attivo, uno evidente è che il piano delle pale deve essere perpendicolare alla direzione del vento per estrarre la maggior energia possibile del vento
3. Seedway: in questo dispositivo c'è un controllo attivo che riguarda il mantenimento della posizione verticale dell'oggetto e dell'utilizzatore controllando indipendentemente le due ruote
4. Grattacielo: in un grattacielo ci sono dei dispositivi di controllo attivo che devono diminuire le vibrazioni del grattacielo stesso. La vibrazione è attenuata sistemandone a $3/5$ dell'altezza del grattacielo una sfera d'acciaio che viene movimentata con degli attuatori magnetici al fine di stabilizzare e di minimizzare la vibrazione

1.1 Obiettivi del controllo attivo

- Risolve il problema di imporre una modalità di funzionamento desiderato ad un processo assegnato (il sistema controllato)
- **Modalità di funzionamento desiderato:** una variabile (scalare o vettoriale) del processo coincida con una variabile (scalare o vettoriale) pre-assegnata (segnaletico di riferimento o set-point). **Varibile controllata** = segnaletico di riferimento.
- **Segnale di riferimento costante:** problema di regolazione
- **Segnale di riferimento variabile:** problema di asservimento

Per esempio, nel caso della pala eolica abbiamo un problema di asservimento, perché il problema delle pale non è costante ma deve seguire la direzione perpendicolare del vento. Negli esempi tecnologici "storici" abbiamo esempi di regolazione.

1.2 Generalità sul concetto di sistema

Definizione 3 Una possibile definizione di *sistema*: un sistema è un complesso, normalmente costituito da più elementi interconnessi, in cui si possono distinguere grandezze soggette a variare nel tempo (le *variabili*)

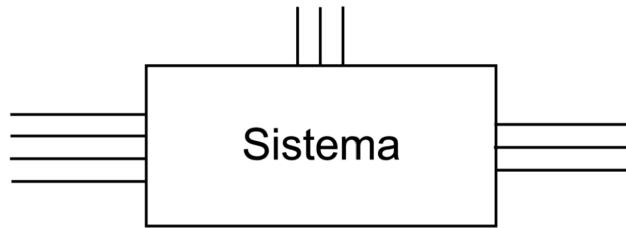


Figura 1.1

Definizione 4 Segnale: le funzioni che rappresentano l'andamento delle variabili nel tempo si dicono segnali.

Terminologia per le variabili:

- Variabili controllate (o regolate)
- Variabili di riferimento
- Variabili manipolabili (o di controllo)
- Variabili non manipolabili (o disturbi)
- Variabili osservate (permettono il feedback)

In questo corso noi considereremo per lo più **segnali o sistemi deterministici**. Il fatto che un sistema sia deterministico deve avere come caratteristiche che, dati certi input, sono in grado di determinare tutto quello che mi serve per conoscere l'intero sistema.

Definizione 5 Sistema orientato: quando abbiamo una distinzione tra variabili indipendenti (ingressi o cause) e quelle dipendenti (uscite o effetti)

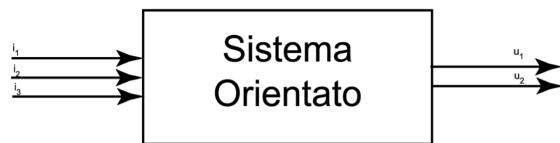


Figura 1.2

Esempio 1 .

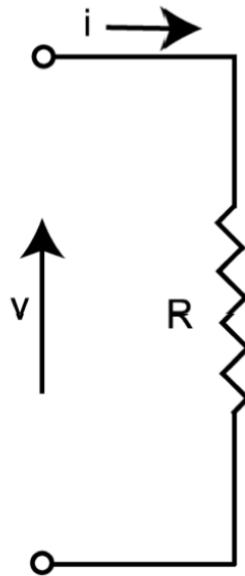


Figura 1.3

Di questo semplice sistema possiamo avere diversi sistemi orientati Nell'orientamento a) la resistenza

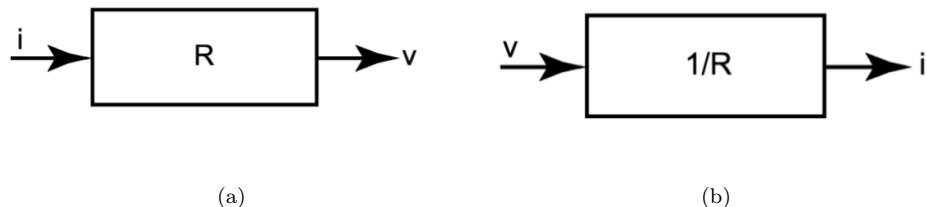


Figura 1.4

è collegata ad un generatore di corrente e quindi in base all'orientamento che sceglieremo cambia molto la situazione, infatti nel b) ho la resistenza collegata ad un generatore di tensione (input) e ho come guadagno non più R , ma ho $1/R$ e come uscita ho la corrente.

Esempio 2 Motore elettrico: converte energia elettrica in energia meccanica e ho due sistemi orientati possibili Meccanicamente cosa succede: ho una coppia resistente (C_r), l'albero motore è caratterizzato

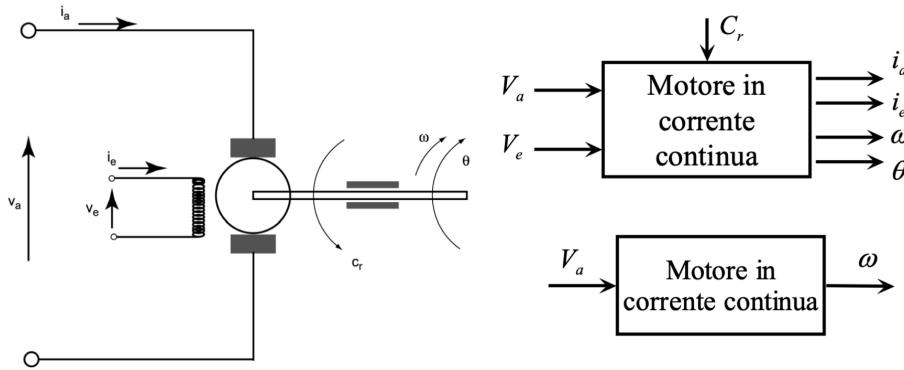


Figura 1.5

da due grandezze fondamentali, l'orientazione angolare θ e la sua derivata prima ω . Ho tre variabili:

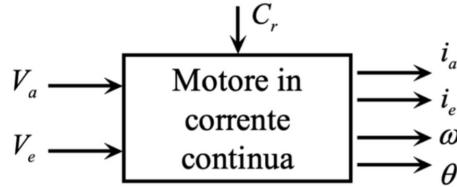


Figura 1.6

V_a, V_e, C_r però la coppia resistente non la posso controllare perché dipende dal sistema, come variabili dipendenti ho i_a, i_c, ω, θ .

Cerchiamo di semplificare considerando la tensione di eccitazione V_e costante e quindi anche la corrente i_e lo sarà e scarto anche la coppia resistente e posso anche dire che quello che è importante non è la posizione angolare ma la velocità angolare e quindi la considero come variabile di uscita e trovo la seguente semplificazione

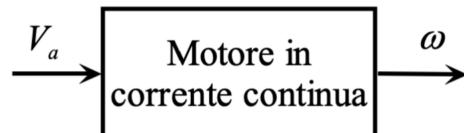


Figura 1.7

Definizione 6 Modello matematico: si dice modello matematico la descrizione di un sistema, per esempio con equazioni e parametri, che permette di determinare i segnali delle uscite noti i segnali degli ingressi e le (eventuali) condizioni iniziali

Questa definizione incorpora quella di **sistema deterministico**: avendo definito le condizioni iniziali deve essere possibile determinare univocamente le condizioni di uscita.

In questo corso ci concentriamo su due modelli matematici: **equazioni differenziali, funzioni di trasferimento e funzioni di risposta armonica**. Quando parlo di una funzione di trasferimento parlo di qualcosa che deve funzionare con un guadagno.

MIMO = sistemi multi variabili (Multi Input Multi Output)

SISO = Single Input Single Output

Definizione 7 Sistema statico: Un sistema è detto statico (o puramente algebrico) quando l'uscita al tempo t dipende esclusivamente dall'ingresso al medesimo tempo t

$$\exists f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | y(t) = f(u(t)) \forall t \in \mathbb{R}$$

Definizione 8 Sistema dinamico: Un sistema è detto dinamico quando l'uscita al tempo t dipende dal segnale dell'ingresso sull'intervallo $(-\infty, t]$

$$\exists F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y} | y(t) = F(u(\cdot))|_{(-\infty, t]} \forall t \in \mathbb{R}$$

- \mathcal{U} è l'insieme delle funzioni di entrata
- \mathcal{Y} è l'insieme delle funzioni di uscita
- F è un funzionale per il quale $y(t)$ dipende dall'ingresso e dalla sua storia

Esiste un test per capire se un sistema è statico o dinamico, applichiamo ad un sistema un comando e in base all'output vedo se è dinamico o statico Vediamo che è dinamico perché anche se l'ingresso (a

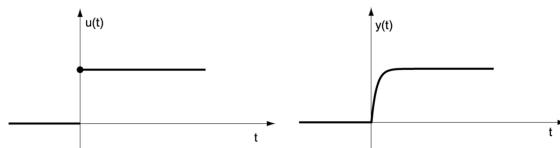


Figura 1.8

sinistra) è costante, l'uscita (a destra) dipende dal tempo.

Definizione 9 Sistema in equilibrio: quando i segnali di ingresso e di uscita rimangono costanti nel tempo

Definizione 10 Sistema in condizioni asintotiche (o stazionarie o sistema a regime): potremo avere un nuovo punto di equilibrio (avremo un transitorio ma poi abbiamo una condizione asintotica che definisce una nuova condizione di equilibrio)

$\omega = f(V_a)$, caratteristica statica del moto in corrente continua. Questa relazione che lega la tensione di armatura alla velocità angolare. All'aumentare di V_a aumenta ω ma ad un certo punto ω raggiunge un valore di saturazione massimo intorno al quale la velocità si stabilizza, infatti è una funzione a saturazione e quindi è da considerare statica.

Come posso lavorare in condizioni lineari con un modello statico come quello visto prima? Devo poter approssimare la caratteristica statica con una retta e per farlo individuo il punto di lavoro (es. origine degli assi) e in quel mando una tangente alla funzione, se mi sposto dal punto di lavoro la caratteristica statica è rappresentata da quella retta tangente.

Modelli linearizzati:

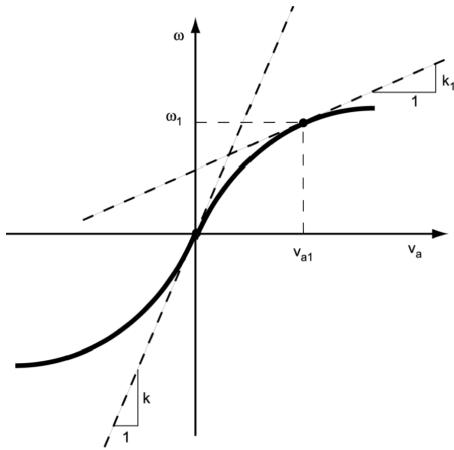


Figura 1.9

- in un intorno dell'origine $(0, 0)$:

$$\begin{aligned}\omega &= k \cdot V_a \\ k &= \frac{df}{dV_a} \Big|_{V_a=0}\end{aligned}$$

- in un intorno di (V_{a1}, ω_1)

$$\begin{aligned}\omega' &= k_1 \cdot V'_a \\ k_1 &= \frac{df}{dV_a} \Big|_{V_a=V_{a1}} \\ \omega' &= \omega - \omega_1 \\ V'_a &= V_a - V_{a1}\end{aligned}$$

Ho introdotto ω' , V'_a per poter lavorare con una legge statica più semplice possibile, dove ho un guadagno k_1 .

Qui vediamo un meccanismo di linearizzazione e lo possiamo usare anche per sistemi intrinsecamente dinamici, rimane dinamico ma da non lineare diventa lineare.

Definizione 11 \mathcal{B} insieme dei behaviors: \mathcal{B} è l'insieme di tutte le possibili coppie cause-effetto associate ad un sistema:

$$\mathcal{B} = \{(u(t), y(t)) : y(t) \text{ è l'uscita del sistema corrispondente all'ingresso } u(t), t \in (-\infty, +\infty)\}$$

$u(t)$ e $y(t)$ tipicamente appartengono agli spazi funzionali delle funzioni continue o differenziabili a tratti

Definizione 12 Linearità: un sistema si dice lineare quando soddisfa la proprietà di sovrapposizione degli effetti: $\forall (u_1, y_1), (u_2, y_2) \in \mathcal{B}$ e $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha_1(u_1, y_1) + \alpha_2(u_2, y_2) = (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \in \mathcal{B}$

Definizione 13 Stazionarietà: un sistema si dice stazionario (invariante nel tempo) se $\forall T \in \mathbb{R} : (u(t), y(t)) \in \mathcal{B} \Rightarrow (u(t-T), y(t-T)) \in \mathcal{B}$

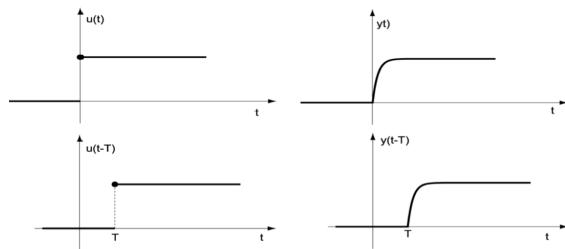


Figura 1.10

1.3 Controllo ad azione diretta e in retroazione

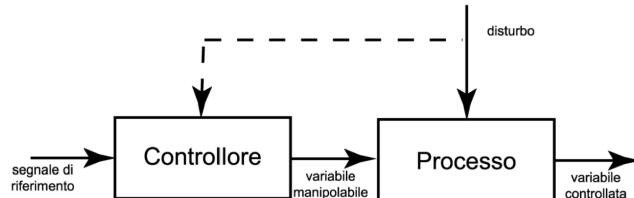
Il controllo (attivo) è distinguibile in:

- controllo ad azione diretta (**feedforward**) o ad anello aperto o in catena aperta
- controllo in retroazione (**feedback**) o ad anello chiuso o in catena chiusa

1.3.1 Controllo ad azione diretta

L'azione di comando dipende da:

1. L'obiettivo perseguito (es. segnale di riferimento)
2. Informazioni sul modello del sistema controllato
3. Eventualmente, ingressi agenti sul sistema controllato (disturbi)



Schema a blocchi di un sistema di controllo ad azione diretta

Figura 1.11

1.3.2 Controllo in retroazione

Quando l'azione di comando dipende da:

1. Obiettivo perseguito
2. Informazioni sul modello del sistema controllato
3. Eventualmente, ingressi agenti sul sistema controllato (disturbi)
4. **Variabile controllata**

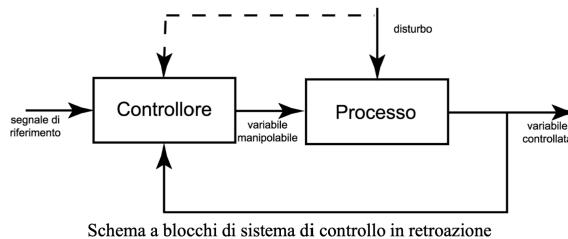
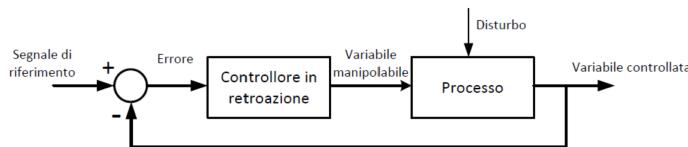
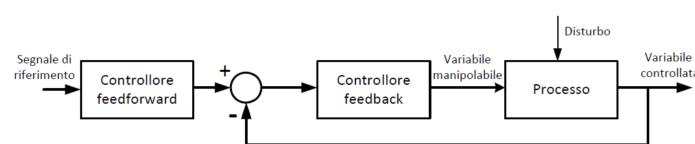


Figura 1.12

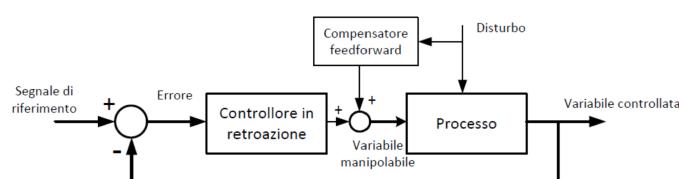
Lo schema generale di controllo in retroazione comprende i seguenti schemi:



(a)



(b)



(c)

Figura 1.13

1.3.3 Confronto tra il controllo ad azione diretta e in retroazione

Problema: regolazione di un processo statico di guardagno P

- $y =$ uscita del processo (v. controllata)
- $u =$ ingresso del processo (v. di controllo)
- $r =$ segnale di riferimento, $r(t) \equiv$ il guadagno
- $C_d =$ controllo ad azione diretta

Sistema di controllo ad anello aperto:

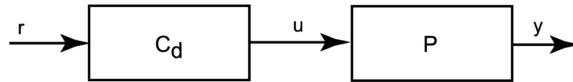


Figura 1.14

$$y = Pu = P(C_d r) = PC_d r \quad (1.1)$$

Dall'obbiettivo $r(t) \equiv y(t) \Rightarrow C_d = \frac{1}{P}$. Il controllore è sintetizzato come **sistema inverso** nel processo.

Sistema di controllo ad anello chiuso:

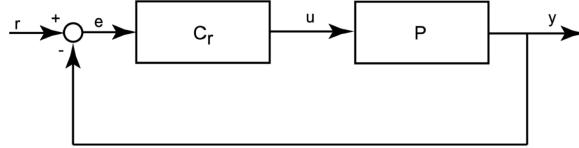


Figura 1.15

$$\{e = r - y, y = PC_r e\} \Rightarrow y = PC_r(r - y) \quad (1.2)$$

$$y = \frac{PC_r}{1 + PC_r} r \quad (1.3)$$

L'obbiettivo $y(t) \equiv r(t)$ è irraggiungibile ma si può ottenere $y(t) \simeq r(t)$.
Progettando C_r affinché $PC_r \gg 1$: $C_r \gg \frac{1}{P}$

1.3.4 Disamina delle strategie di controllo in condizioni perturate

$$P \rightarrow \tilde{P} = P + \Delta P$$

per esempio $\Delta P = \pm \frac{1}{5} P$

- nel controllo ad azione diretta

$$y = \tilde{P}C_d r = (P + \Delta P)\frac{1}{P}r = r \pm \frac{1}{5}r \Rightarrow \text{errore in \%} \pm 20$$

- nel controllo in retroazione:

si ipotizza $PC_r = 200 \Rightarrow C_r = \frac{200}{P}$, $T_{yr} = \frac{PC_r}{1 + PC_r} \simeq 0,995$, in condizioni normali, l'errore di inseguimento è circa 0,5%

$$\tilde{T}_{yr} = \frac{\tilde{P}C_r}{1 + \tilde{P}C_r} = \frac{PC_r + \Delta PC_r}{1 + PC_r + \Delta PC_r} \in [0,9959; 0,9938]$$

l'errore di inseguimento è compreso tra 0,415% e 0,621%

Si noti che nel primo caso l'errore è fisso, mentre nel secondo è molto più complicato da determinare.
CONCLUSIONE: il controllo in retroazione è efficace anche in presenza di perturbazioni sul processo. Parimenti, si potrebbe dimostrare che il controllo in retroazione è efficace anche in presenza di disturbi agenti sulla variabile controllata.

Lo svantaggio del controllo in retroazione è che è più complesso perché richiede un controllo istante per istante dell'uscita controllata e quindi è più costosa.

Anche se un sistema controllato è per sua natura stabile, però messo in retroazione con dei valori scorretti potrebbe diventare instabile.

Capitolo 2

Modellistica ed equazioni differenziali lineari

2.1 Cenni di modellistica

Definizione 14 *Modellistica: costruzione di modelli matematici dei sistemi*

Modellistica:

1. A partire da leggi fondamentali
2. A partire da dati sperimentali

Alcuni cenni di ripasso sui circuiti elettrici:

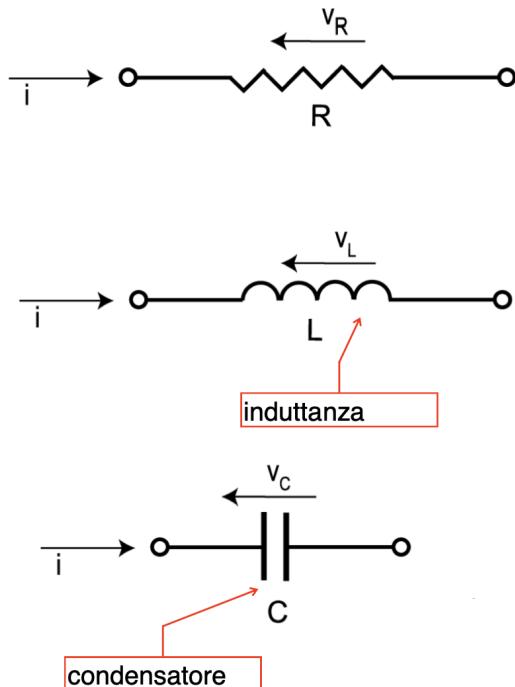


Figura 2.1

- Resistenza:

$$v_R = Ri \quad (2.1)$$

- Induttanza:

$$v_L = L \frac{di}{dt} = LDi \quad (2.2)$$

- Capacità:

$$v_C = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \Rightarrow Dv_C = \frac{i}{C} \quad (2.3)$$

Esempio 3 Circuito RLC

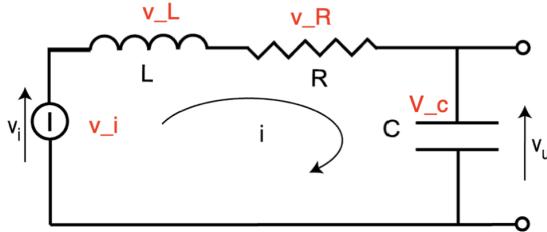


Figura 2.2

$$\begin{aligned} v_i &= v_L + v_R + v_C \\ v_i(t) &= LDi(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Costruzione del modello matematico del circuito RLC orientato da v_i (ingresso) ad i (uscita) Eq.



Figura 2.3

differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$LD^2i + RDi + \frac{1}{C}i = Dv_i \quad (2.4)$$

Nell'equazione sopra abbiamo scambiato la parte di destra con quella di sinistra, perché esiste una **convenzione** per cui la funzione di uscita va messa a sinistra e quella di ingresso a destra. L'equazione 2.1 può essere anche rappresentata come:

$$\left(LD^2 + RD + \frac{1}{C} \right) i = Dv_i$$

Dove $LD^2 + RD + \frac{1}{C}$ rappresenta l'operatore differenziale a coefficienti costanti.

Proviamo a cambiare orientamento per vedere come cambia l'equazione: Vediamo la costruzione del



Figura 2.4

modello matematico del circuito RLC orientato da v_i (ingresso) ad v_u (uscita):

$$Dv_u = \frac{1}{C} \Rightarrow i = CDv_u$$

$$v_i = LD(CDv_u) + R(CDv_u) + v_u$$

Otteniamo l'equazione

$$LCD^2v_u + RCDv_u + v_u = v_i \quad (2.5)$$

Che possiamo anche riscrivere come

$$(LCD^2 + RCD + 1)v_u = v_i$$

Vediamo alcuni esempi di sistemi meccanici.

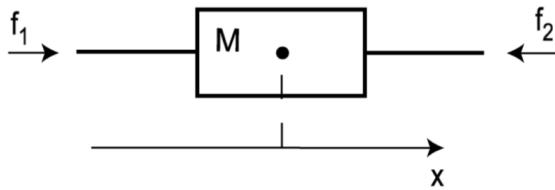


Figura 2.5

Immaginiamo che vengano applicate due forze f_1 e f_2 , quindi vale la seconda legge di Newton

$$\underbrace{M D^2x(t)}_a = f_1(t) - f_2(t) \quad (2.6)$$

Ora vediamo una molla:

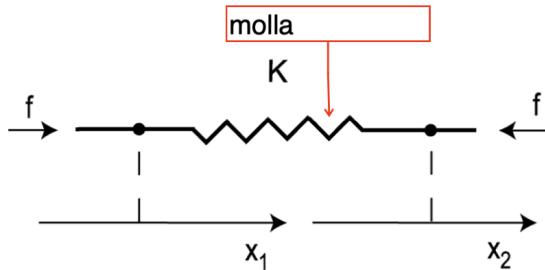


Figura 2.6

Immaginiamo che la molla sia costretta a muoversi su una linea rettilinea, quindi devo individuare sui due assi x_1 e x_2 ovvero gli estremi della molla. Aggiungiamo un'altra ipotesi: in condizioni di equilibrio la distanza fra le origini dei due assi coincide con la distanza dei due estremi, quindi se posiziono l'estremo sinistro e l'estremo destro sono nella condizione in cui la molla non è né estesa né compressa (condizioni di equilibrio). Abbiamo una forza positiva f entrante.

L'equazione risultante è:

$$f(t) = K(x_1(t) - x_2(t)) \quad (2.7)$$

Dove $x_1 - x_2$ è la misura della compressione o estensione della molla. Ipotizziamo che $x_1 - x_2$ sia positivo, quando questo accade sto comprimendo la molla; viceversa quando $x_1 - x_2$ è negativo abbiamo una situazione di estensione della molla (che è possibile solo quando f è negativa).

Ora vediamo un ammortizzatore:

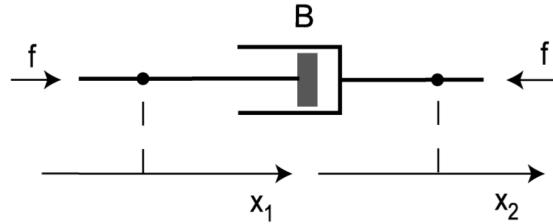


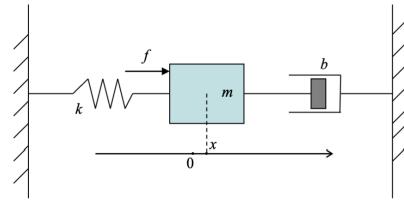
Figura 2.7

Abbiamo una sorta di pistone all'interno di un cilindro e abbiamo dei fori in modo tale che ci sia passaggio di liquido da una camera all'altra, quindi si innesca un meccanismo viscoso

$$f(t) = B(v_1(t) - v_2(t)) \quad (2.8)$$

$$f(t) = BD(x_1(t) - x_2(t)) \quad (2.9)$$

Esempio 4 Sistema meccanico vibrante



$$mD^2x(t) = -kx(t) - bDx(t) + f(t)$$

Figura 2.8

Quando il sistema è a riposo abbiamo $x = 0$.

Dato che $ma = \sum_i F_i$

$$mD^2x(t) = -kx(t) - bDx(t) + f(t) \quad (2.10)$$

La molla estesa tira il corpo verso sinistra, lo stesso fa l'ammortizzatore, mentre la forza spinge nel verso opposto.

Data la seguente orientazione:

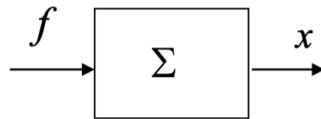


Figura 2.9

Equazione del sistema orientato da f ad x :

$$mD^2x(t) + bDx(t) + kx(t) = f(t) \quad (2.11)$$

Vediamo ora l'equazione differenziale del sistema orientato da f (forza applicata) a Dx (velocità della massa)

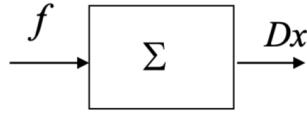


Figura 2.10

Devo fare la derivata perché questa volta la funzione di uscita è la derivata di x , non x come prima

$$mD^3x + bD^2x + kDx = Df$$

Definiamo $y = Dx$ e Otteniamo

$$mD^2y + bDy + ky = Df \quad (2.12)$$

Esempio 5 Circuiti elettrici con amplificatori operazionali u è la tensione in ingresso, mentre y è la

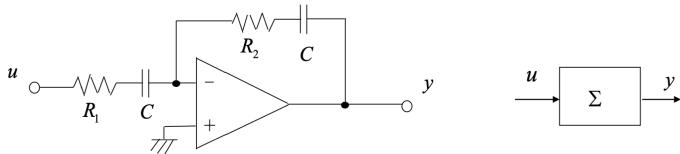


Figura 2.11

tensione in uscita. Si può dedurre:

$$R_1 CDy + y = -R_2 CDu - u \quad (2.13)$$

2.2 Equazioni differenziali lineari

Sistemi scalari rappresentati da equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

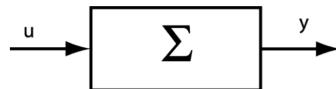


Figura 2.12

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u \quad (2.14)$$

Dove n e m caratterizzano l'ordine dell'equazione differenziale e l'ordine del sistema.

È un modello matematico formale del sistema dinamico (orientato) Σ . $\rho = n - m$ = ordine relativo o grado relativo di Σ

Definizione 15 Insieme dei behaviors \mathcal{B} di Σ

Ovvero è l'insieme delle coppie di ingresso e uscita dal sistema.

$\mathcal{B} = \{u(t), y(t)\}$: la coppia dei segnali causa-effetto soddisfa l'equazione differenziale $\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u$

Se $u(t)$ e $y(t)$ sono derivabili tante volte quanto necessario ($u(\cdot) \in C^m$ e $y(\cdot) \in C^n$), soddisfa significa:

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y(t) = \sum_{i=0}^m b_i D^i u(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Quindi istante per istante il membro di sinistra coincide con il membro di destra.

Proprietà del sistema \sum :

- È lineare¹
- È stazionario²

Un problema fondamentale nell'analisi di un sistema \sum è: noto il segnale di ingresso $u(t)|_{[0,+\infty)}$ e le condizioni iniziali $y(0), Dy(0), \dots, D^{n-1}y(0)$ determinare il segnale di uscita $y(t)|_{[0,+\infty)}$

¹Per la dimostrazione di questa proprietà vedi slide 14 lezione 2

²Per la dimostrazione di questa proprietà vedi slide 15 lezione 2

Capitolo 3

Cenni di analisi complessa

Definizione 16

$$\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) = \lambda$$

$\forall \epsilon > 0 \exists \rho > 0$ tale che: se s soddisfa

$$0 < |s - s_0| < \rho \Rightarrow |f(s) - \lambda| < \epsilon$$

Questa è la **definizione di limite di Cauchy**.

$s - s_0$ sono numeri complessi, quindi è una sorta di distanza geometrica

Vediamo l'interpretazione geometrica del limite: sia $B(z, r) = \{s \in \mathbb{C} : |s - z| < r\}$ (cerchio aperto di raggio r , centrato in z).

$\forall \epsilon > 0 \exists \rho > 0$ tale che $f(B(s_0, \rho) - \{s_0\}) \subseteq B(\lambda, \epsilon)$

Definizione 17 Continuità

$f(s)$ è continua in $s = s_0$ se $\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) = f(s_0)$

LEMMA: $f(s)$ è continua in $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ se e solo se le funzioni reali $u(\sigma, \omega), v(\sigma, \omega)$ sono continue in (σ_0, ω_0) .

Definizione 18 Derivabilità

$f(s)$ è derivabile in $s = s_0$ se esiste il limite:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{f(s_0 + \Delta s) - f(s_0)}{\Delta s}$$

Questo limite viene indicato con le notazioni $f'(s_0), \dots$

Definizione 19 Analiticità

$f(s)$ è analitica (o olomorfa) in $s = s_0$.

Se $f(s)$ è derivabile su di un intorno¹ aperto contenente s_0 .

Esempi di analiticità:

- $f(s) = 4s^2 + 5s + 3$ è analitica su \mathbb{C}
- $f(s) = \frac{1}{s-1}$ analitica su $\mathbb{C} - \{1\}$, se prendo qualunque punto che non sia 1 esiste un qualunque intorno in cui è sicuramente derivabile
- $f(s) = |s|^2$ è derivabile in $s = 0$ ma non è analitica in $s = 0$, infatti

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta s|^2 - |0|^2}{\Delta s} &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta s|^2}{\Delta s} = \\ (\Delta s = re^{j\varphi}) \text{ facciamo un campo di variabile} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|re^{j\varphi}|^2}{re^{j\varphi}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2}{re^{j\varphi}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r}{re^{j\varphi}} = 0 \quad \forall \varphi \end{aligned}$$

Questa non è analitica, tra qualche istante vedremo il motivo

¹Intorno: un insieme di punti in cui il nostro punto è interno a questo insieme

Introduciamo una proprietà, ragioniamo sul fatto che $f(s)$ sia derivabile in $s = s_0$:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{f(s_0 + \Delta s) - f(s_0)}{\Delta s} = f'(s_0)$$

Questo limite sussiste per ogni direzione di convergenza a zero di Δs : Se lo calcoliamo in una qualunque

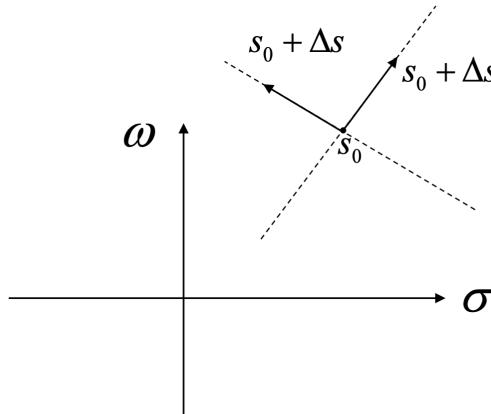


Figura 3.1

qua delle due direzioni deve essere uguale.

Calcoliamo $f'(s_0)$ con $\Delta s = \Delta\sigma \in \mathbb{R}$, in questo caso Δs è puramente reale, calcoliamo anche $\Delta s = j\Delta\omega \in j\mathbb{R}$, in questo caso è puramente immaginario.: $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ od anche $s_0 = (\sigma_0, \omega_0)$.

$$f^{(1)}(s_0) = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{f(s_0 + \Delta\sigma) - f(s_0)}{\Delta\sigma} = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{u(\sigma_0 + \Delta\sigma, \omega_0) + jv(\sigma_0 + \Delta\sigma, \omega_0) - u(\sigma_0, \omega_0) - jv(\sigma_0, \omega_0)}{\Delta\sigma} =$$

Ora non faccio altro che spezzare questa frazione in una parte reale e in una parte immaginaria e ciascuna parte corrisponde rispettivamente alla derivata parziale di u e di v rispetto a σ :

$$= \frac{\partial u}{\partial \sigma}(s_0) + j \frac{\partial v}{\partial \sigma}(s_0).$$

Facciamo lo stesso per l'altro Δs :

$$f^{(1)}(s_0) = \lim_{j\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{f(s_0 + j\Delta\omega) - f(s_0)}{j\Delta\omega} = \frac{\partial v}{\partial \omega}(s_0) - j \frac{\partial u}{\partial \omega}(s_0) \quad \text{Il valore in rosso e quello in blu devono coincidere, essendo complessi, sia nella parte reale che in quella immaginaria.}$$

Quindi $\frac{\partial u}{\partial \sigma}(s_0) = \frac{\partial v}{\partial \omega}(s_0)$ e $\frac{\partial u}{\partial \omega}(s_0) = -\frac{\partial v}{\partial \sigma}(s_0)$. Queste due condizioni verranno chiamate **condizioni di Cauchy-Rieman**

Definizione 20 Condizioni di Cauchy-Rieman

$u(\sigma, \omega)$, $v(\sigma, \omega)$ soddisfano le condizioni (equazioni) di Chauchy-Riemann se:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{\partial v}{\partial \omega} \\ \frac{\partial u}{\partial \omega} = -\frac{\partial v}{\partial \sigma} \end{cases} \quad (3.1)$$

La prima equazione è la parte reale, la seconda quella immaginaria.

Teorema 1 Sia $f(s) = u(s) + jv(s)$

1. Se esiste $f^{(1)}(s_0)$ con $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ allora esistono le derivate parziali di $u(\sigma, \omega)$ e $v(\sigma, \omega)$ in (σ_0, ω_0) e soddisfano le condizioni di Cauchy-Rieman
2. Se $u(\sigma, \omega)$ e $v(\sigma, \omega)$ e le loro derivate parziali sono continue in (σ_0, ω_0) e soddisfano le condizioni di Cauchy-Rieman, allora esiste $f^{(1)}(s_0)$ con $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$. Le derivate parziali di u e v che soddisfano le condizioni di C-R devono essere derivabili in un punto.

Ritornando all'esempio $f(s) = |s|^2 = \sigma^2 + \omega^2$

$$\begin{aligned} u &= \sigma^2 + \omega^2, \quad v = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \sigma} &= 2\sigma, \quad \frac{\partial v}{\partial \omega} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \omega} &= 2\omega, \quad -\frac{\partial v}{\partial \sigma} = 0 \\ &\left\{ \begin{array}{l} 2\sigma = 0 \\ 2\omega = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Le condizioni di C-R sono soddisfatte se sono soddisfatte queste due condizioni e questo avviene solo nell'origine del piano complesso, questo è l'unico punto in cui la funzione è derivabile e perciò non è analitica.

$f(s)$ è derivabile solo in $0 + j0$ e quindi in $s = 0$ non può essere analitica. **COROLLARIO:** sia $f(s) = u(s) + jv(s)$ con $u(\sigma, \omega), v(\sigma, \omega)$ e le loro derivate parziali contine su di un dominio aperto $U \subseteq \mathbb{C}$. Allora $f(s)$ è analitica su U se e solo se $u(\sigma, \omega), v(\sigma, \omega)$ soddisfano, su U , le condizioni di C-R

Teorema 2 *Sia $f(s)$ analitica su di una regione aperta $U \subseteq \mathbb{C}$. Allora la derivata $Df(s)$ è anch'essa una funzione analitica su U .*

Questo teorema ci dice che, data una funzione analitica, anche la sua derivata è ancora analitica

COROLLARIO: se $f(s)$ è analitica sulla regione aperta U , allora $f(s)$ è ivi derivabile indefinitamente.

3.1 Integrali di linea nel piano complesso

Definizione 21 *Integrale*

Data una funzione $f(s)$ ed una curva Γ , la consideriamo continua rispetto all'ascissa curvilinea (misura di distanza misurata lungo la curva stessa) su \mathbb{C} , percorsa da s_a a s_b , definiamo

$$\int_{\Gamma} f(s) ds \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(s_i)(s_i - s_{i-1}) \quad (3.2)$$

dove s_0, s_1, \dots, s_n ($s_0 = s_a, s_n = s_b$) è una discretizzazione uniforme della curva Γ . Se vado a prendere due punti contigui e ne misuro la distanza lungo la curva, tutte le distanze sono uguali tra di loro. Quindi se misuro tra s_0 e s_1 è la stessa che ho tra s_1 e s_2 e così via.

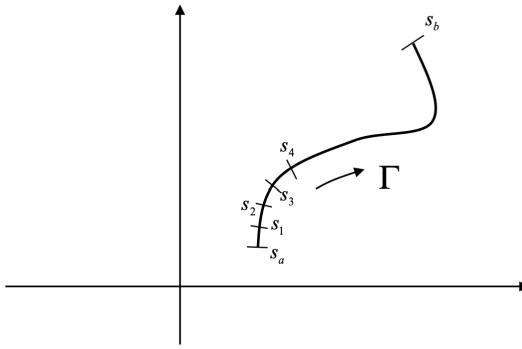


Figura 3.2

3.1.1 Calcolo dell'integrale di linea

Sia Γ una curva parametrica di classe C^1 :

$$\Gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$u \rightarrow \Gamma(u)$$

$$\int_{\Gamma} f(s) ds = \int_a^b f(\Gamma(u)) \frac{d\Gamma}{du} du \quad (3.3)$$

Definizione 22 Curva chiusa semplice

Una curva continua $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $u \rightarrow \Gamma(u)$ è curva chiusa semplice se $\Gamma(a) = \Gamma(b)$ e $\Gamma(u_1) \neq \Gamma(u_2)$, $\forall u_1 \neq u_2 \in (a, b)$

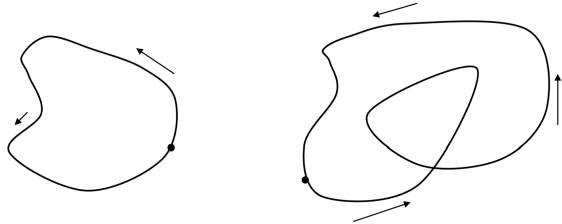


Figura 3.3

Teorema 3 Teorema di Jordan

Se Γ è una curva chiusa semplice in \mathbb{C} questa suddivide il piano complesso in due regioni distinte, una esterna e una interna.

$$\mathbb{C} - \Gamma = E \cup I, \quad E \cap I = \emptyset, \quad \partial E = \partial I = \Gamma$$

E è la parte esterna, I è la parte interna

Definizione 23 Insieme connesso

Un insieme $R \subseteq \mathbb{C}$ è connesso se per ogni coppia di punti appartenenti all'insieme esiste una curva continua Γ che li congiunge tutta contenuta in R

Definizione 24 Insieme semplicemente connesso

Un insieme $R \subseteq \mathbb{C}$ è semplicemente connesso se è connesso e per ogni curva chiusa semplice Γ appartenente all'insieme la regione interna di Γ è tutta contenuta in R

Teorema 4 Teorema dell'integrale di Cauchy

Sia $f(s)$ una funzione analitica su una regione aperta e semplicemente connessa U e Γ una curva chiusa semplice ivi contenuta, allora $\oint_{\Gamma} f(s) ds = 0$

COROLLARIO: sia $f(s)$ una funzione analitica su una regione aperta e semplicemente connessa U e Γ una curva ivi contenuta che congiunge s_a ad s_b . Allora l'integrale di linea $\int_{\Gamma} f(s) ds$ non dipende dal percorso Γ ma solo da s_a, s_b e $f(s)$:

$$\int_{\Gamma} f(s) ds = \int_{s_a}^{s_b} f(s) ds \quad (3.4)$$

Teorema 5 Sviluppo in serie di Taylor

Sia $f(s)$ una funzione analitica su di un cerchio $B(s_0, r_0)$ centrato su s_0 e con raggio r_0 . Allora $\Delta s \in B(s_0, r_0)$.

$$f(s) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (s - s_0)^i = c_0 + c_1 (s - s_0) + c_2 (s - s_0)^2 + \dots + c_i (s - s_0)^i + \dots$$

dove ($i = 0, 1$)

$$c_i = \frac{f^{(i)}(s_0)}{i!} = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{f(s)}{(s - s_0)^{i+1}} ds \quad (3.5)$$

Anziché calcolare la derivata i -esima vado a calcolare un integrale di linea

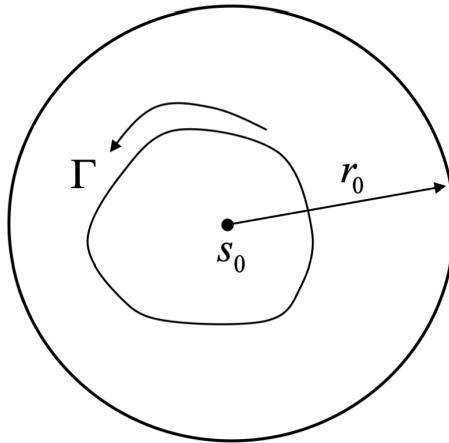


Figura 3.4

COROLLARIO: formula integrale di Cauchy, se la funzione è analitica e l'insieme è semplicemente connesso posso calcolare $f(s_0)$ con questa formula:

$$f(s_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{f(s)}{s - s_0} ds \quad (3.6)$$

Teorema 6 Sviluppo in serie di Laurent

Sia $f(s)$ una funzione analitica sul cerchio $B(s_0, r_0)$ ad eccezione del suo centro s_0 .

Allora $\forall s \in B(s_0, r_0) - \{s_0\}$, potrebbe succedere che nel punto s_0 manchi l'analiticità, però siamo certi che la funzione è analitica su tutto il cerchio escluso il centro e possiamo costruire uno sviluppo in serie ma non sarà quello di Taylor, infatti non parte da $i = 0$, ma parte da $-\infty$ e va a ∞

$$f(s) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i (s - s_0)^i \quad (3.7)$$

dove

$$c_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{f(s)}{(s - s_0)^{i+1}} ds \quad \forall i \in \mathbb{Z} \quad (3.8)$$

Classificazione del punto isolato s_0 :

- Se $c_i = 0 \forall i \in \mathbb{Z}^-$ ($i = -1, -2, \dots$) definendo $f(s_0) = c_0$ risulta $f(s)$ analitica in $s = s_0$.
Es. $f(s) = \frac{(s-1)(s+3)}{(s-1)(s-2)(s+1)}$, con $s_0 = 1$, $f(s) = -2 - \frac{3}{2}(s-1) - \frac{7}{4}(s-1)^2 + \dots$
- Se $c_i \neq 0$ per qualche $i \in \mathbb{Z}^-$ s_0 è una **singolarità** di $f(s)$:
 1. **Singolarità di polo:** quando i $c_i \neq 0$ con i negativo in numero finito; sia $-n = \min\{i \in \mathbb{Z}^- : c_i \neq 0\}$: s_0 è **polo di ordine n**
 2. **Singolarità essenziale:** quando i $c_i \neq 0$ con i negativo sono infiniti

Proprietà: assumiamo $f(s)$ analitica in $B(s_0, r_0) - \{s_0\}$, s_0 è una singolarità di $f(s)$ se e solo se $f(s)$ assume valori illimitati in un intorno di s_0 .

Teorema 7 Teorema di Picard

Sia s_0 una singolarità essenziale di $f(s)$. In ogni intorno di s_0 , la funzione $f(s)$ assume ogni valore complesso infinite volte con l'eventuale eccezione di un solo particolare valore.

Ovvero: in un intorno di s_0 , esistono sempre infinite radici dell'equazione $f(s) = c$ tranne, al più, per un valore eccezionale di c

Definizione 25 Residuo

Sia s_0 una singolarità di $f(s)$. Il coefficiente c_{-1} dello sviluppo in serie di Laurent si dice **RESIDUO**, $\text{Res}\{f, s_0\}$ della funzione $f(s)$ in s_0 .

Esempio 6

$$\begin{aligned} \text{Res}\{f, s_0\} &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} f(s) \, ds \\ f(s) &= \dots + \frac{c_{-2}}{(s - s_0)^2} + \frac{\text{Res}f, s_0}{(s - s_0)} + c_0 + c_1(s - s_0) + c_2(s - s_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

Teorema 8 Teorema dei residui di Cauchy

Sia Γ una curva chiusa semplice e $f(s)$ una funzione analitica su Γ e nella sua regione interna ad eccezione dei punti singolari s_1, s_2, \dots, s_n in essa contenuti. Allora:

$$\oint_{\Gamma} f(s) \, ds = 2\pi j \sum_{i=1}^n \text{Res}\{f, s_i\} \quad (3.9)$$

L'equazione 3.9 è una funzione analitica sulla curva gamma, quindi c'è la condizione di analiticità sulla regione interna con eccezione dei punti singolari.

3.2 Poli di $f(s)$

Proprietà: sia s_0 una singolarità polo di $f(s)$. Allora s_0 è polo di ordine n se e solo se esiste $g(s)$ analitica in s_0 con $g(s_0) \neq 0$ tale che:

$$f(s) = \frac{g(s)}{(s - s_0)^n} \quad (3.10)$$

Tutte le volte che c'è una singolarità di tipo polare è sempre possibile scrivere in questo modo, questo fatto è semplice da riscontrare quando la funzione è una funzione razionale (ovvero è il rapporto tra due polinomi)

Esempio 7

$$f(s) = \frac{s(s+6)^3}{(s-2)(s+3)^2(s+5)^4}$$

- 2 è un polo di ordine 1
- -3 è un polo di ordine 2
- -5 è un polo di ordine 4

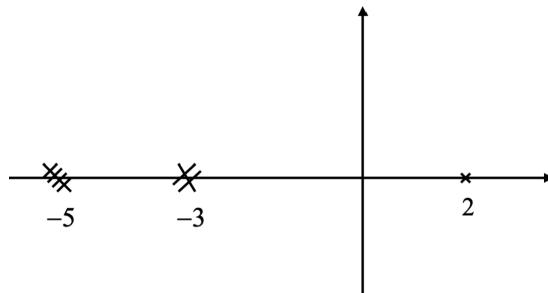


Figura 3.5

Se mettiamo un croce intendiamo che sia un polo, se ne abbiamo uno mettiamo una crocetta, se abbiamo un polo di ordine 2 ne mettiamo due e così via

3.3 Zeri di $f(s)$

Sia $f(s)$ analitica in z .

Definizione 26 z è detto zero di f se $f(z) = 0$. Considerato lo sviluppo di Taylor $f(s) = c_1(s - z) + c_2(s - z)^2 + \dots$ ed $n = \min\{i \in \mathbb{N} : c_i \neq 0\}$, z è detto zero di ordine n di $f(s)$.

Proprietà: z è zero di ordine n se e solo se esiste $g(s)$ analitica in z con $g(z) \neq 0$ tale che $f(s) = (s - z)^n g(s)$

Esempio 8

$$f(s) = \frac{s(s+6)^3}{(s-2)(s+3)^2(s+5)^4}$$

- 0 è uno zero di ordine 1
- -6 è uno zero di ordine 3

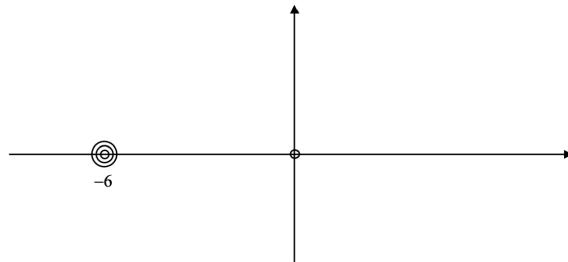


Figura 3.6

Come notazione grafica mettiamo questo cerchio per indicare gli zeri, metteremo un cerchio per ogni ordine.

Proprietà: se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ha una singolarità polare in p di ordine n allora:

$$\text{Res}\{f, p\} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{s \rightarrow p} D^{n-1} (f(s)(s-p)^n) \quad (3.11)$$

Anche esprimibile come

$$\text{Res}\{f, p\} = \frac{1}{(n-1)!} D^{n-1} (f(s)(s-p)^n) \Big|_{s=p} \quad (3.12)$$

Esempio 9

$$f(s) = \frac{s+4}{(s-2)^3(s+1)^2(s-7)}$$

e $p = 2$, $n = 3$. Possiamo calcolare il residuo della funzione in 2 usando la formula e usando la cancellazione polo-zero e quindi andiamo a cancellare lo zero, poi dobbiamo calcolare la derivata.

$$f(s)(s-p)^n = \frac{s+4}{(s-2)^3(s+1)^2(s-7)} \cancel{(s-2)^3} = \frac{s+4}{(s+1)^2(s-7)}$$

Ora su quello che rimane dobbiamo calcolare la derivata

3.4 continuazione analitica

Data una funzione $f(s)$ definita da uno sviluppo in serie di Taylor su di un cerchio $B_0(s_0, r_0)$ è possibile estendere la definizione di $f(s)$ all'esterno di B_0 mediante lo sviluppo in serie di Taylor di altri punti di B_0 . Il procedimento è ricorsivo: $B_0 \rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow \dots$ Tutti i punti che stanno dentro B_1 possono



Figura 3.7

essere rappresentati dal secondo sviluppo di Taylor, la cosa si può iterare prendendo un altro punto e quindi avrà un altro cerchio B_2 con un altro sviluppo di Taylor estendendo ancora $f(s)$ e in questo modo faccio la cosiddetta continuazione analitica.

Capitolo 4

Trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace è un operatore funzionale che converte un'equazione differenziale in un'equazione algebrica.

Il metodo basato sulla trasformata di Laplace permette di risolvere un'equazione differenziale lineare con condizioni iniziali arbitrarie.

Permette di analizzare fenomeni transitori ed asintotici di una grande varietà di sistemi (elettrici, meccanici, termici, ecc.)

Definizione 27 La **trasformata di Laplace** è un'operatore funzionale che si applica ad una funzione f di variabile reale con codominio \mathbb{R} (o \mathbb{C}) tale che:

1. $f \in C_p^\infty(\mathbb{R})$

2. f è di **ordine esponenziale**: esistono costanti $M, \alpha > 0$ per le quali $|f(t)| \leq M \exp(\alpha|t|)$, $t \in \mathbb{R}$

Definiamo ascissa di convergenza di $f(t)$:

$$\sigma_c = \inf \left\{ \sigma \in \mathbb{R} : \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt < +\infty \right\} \quad (4.1)$$

Definizione 28 Trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace di un segnale (funzione) $f(t)$ è la funzione $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ definita da:

$$F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (4.2)$$

Per i valori $s \in \mathbb{C}$ per i quali l'integrale converge. Avendo fatto l'ipotesi di F di ordine esponenziale, questi s esistono, quindi ci sono dei valori per cui questo integrale è convergente.

Perché abbiamo 0^- ? Se ricordiamo quello detto prima, ovvero che f è di classe C_p^∞ , non ho necessità di metterci 0^- , potrei mettere sia 0 che 0^+ e il risultato non cambierebbe. Però noi ci mettiamo 0^- perché nelle prossime lezioni useremo anche altre funzioni (quelle impulsive) e quindi dobbiamo avere 0^- .

Consideriamo $s = \sigma + j\omega$, ovvero sostituiamo s con la sua rappresentazione cartesiana.

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(\sigma+j\omega)t} dt \\ |F(s)| &\leq \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt = \dots = \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt \end{aligned}$$

$F(s)$ è ben definito per $\sigma > \sigma_c$ ovvero $\text{Res} > \sigma_c$. **Proprietà**: la trasformata di Laplace $F(s)$ è una funzione analitica sul semipiano $\{s \in \mathbb{C} : \Re s > \sigma_c\}$

Proprietà: $F(\bar{s}) = F(\bar{s})$ (NB la barra indica il coniugato)

Esempio 10 Esempio: segnale gradino unitario $1(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$

$$\mathcal{L}[1(t)] = \int_{0^-}^{\infty} 1(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

Calcolo corretto se $e^{-st} \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$: vero per $\operatorname{Re} s > 0$. Infatti se $e^{-st} = e^{-(\sigma+j\omega)t} = e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}$. $\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$ è la trasformata di Laplace della funzione gradino, questa è ben definita e analitica per $\operatorname{Re} s > 0$.

Utilizzando la continuazione analitica $\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s} \forall s \in \mathbb{C} - \{0\}$

Esempio 11 Segnale esponenziale e^{at}

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \int_{0^-}^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \dots = \frac{1}{s-a}$$

$e^{-(s-at)t} \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$ quando $\Re(s-a) > 0 \Rightarrow \Re s > a$.

$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$ è ben definita ed analitica per $\Re s > a$.

Utilizzando la continuazione analitica $\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \forall s \in \mathbb{C} - \{a\}$.

La trasformata è valida anche quando $a \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \forall s \in \mathbb{C} - \{a\}, \sigma_c = \Re a$$

4.1 Linearità

La trasformata di Laplace è un operatore lineare: per ogni segnale $f_1(t)$ e $f_2(t)$ e per ogni scalare c_1 e c_2

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)] \quad (4.3)$$

Esempio 12

$$\mathcal{L}[4 + 6e^{-t}] = 4\mathcal{L} + 6\mathcal{L}[e^{-t}] = 4\frac{1}{s} + 6\frac{1}{s - (-1)} = \frac{10s + 4}{s(s + 1)}$$

4.2 Iniettività

La trasformata di Laplace è iniettiva: se $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)] \Rightarrow f(t) = g(t)$ su $[0, +\infty]$.

$F(s)$ determina univocamente $f(t)$ su $[0, +\infty)$. È quindi ben definita la **trasformata inversa di Laplace** \mathcal{L}^{-1}

Esempio 13

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10s + 4}{s(s + 1)}\right] = 4 + 6e^{-t}$$

4.3 Traformata inversa di Laplace

Definizione 29 Sia $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ allora:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (4.4)$$

per ogni $\sigma_0 > \sigma_c$. Si indica $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$

L'integrale di linea deve essere calcolato nella regione in cui la funzione è analitica, quindi i valori di s la cui parte reale è maggiore di σ_C

4.4 La trasformata della derivata

Definizione 30 Sia $f \in \mathbb{C}^{-1}(\mathbb{R}_{>0})$ segue

$$\mathcal{L}[Df(t)] = sF(s) - f(0+) \quad (4.5)$$

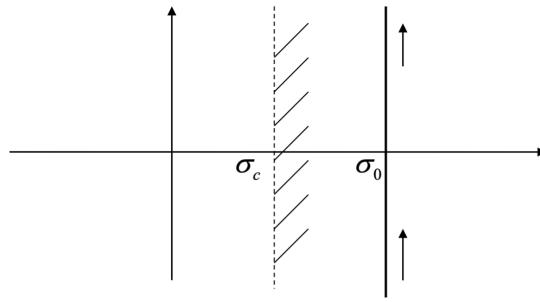


Figura 4.1

4.4.1 Derivate di ordine superiore

Sia $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$ segue:

$$\mathcal{L}[D^2 f] = s^2 F(s) - sf(0+) - Df(0+) \quad (4.6)$$

Generalizzando con ricorsione [$f \in \mathbb{C}^i(\mathbb{R}_+)$]:

$$\mathcal{L}[D^i f] = s^i F(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-1-j} f_+ \quad (4.7)$$

4.5 Trasformata dell'integrale

Definizione 31

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(v) dv\right] = \frac{1}{s} F(s) \quad (4.8)$$

Esempio 14

$$\mathcal{L}[t] = \mathcal{L}\left[\int_0^t 1 \cdot dv\right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} \quad (4.9)$$

Si noti:

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}[t \cdot 1(t)] \quad (4.10)$$

4.6 Teorema del valore finale

Definizione 32 Sia $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$ con f e Df aventi ascisse di convergenza non positive. Se esiste il limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ vale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (4.11)$$

Esempio 15

$$\begin{aligned} f(t) &= 4 + 6e^{-t} \Rightarrow F(s) = \frac{10s+4}{s(s+1)} \quad \sigma_c = 0 \\ Df(t) &= -6e^{-t} \Rightarrow \mathcal{L}[Df] = -6 \frac{1}{s+1}, \quad \sigma_c = -1 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10s+4}{s+1} = 4 \end{aligned}$$

4.7 Teorema del valore iniziale

Definizione 33 Sia $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$. Se esiste il limite $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ vale $f(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$

Esempio 16

$$f(t) = 4 + 6e^{-t}, \quad F(s) = \frac{10s + 4}{s(s + 1)}$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{10s + 4}{s + 1} = 10 = f(0+)$$

4.8 Traslazione nel tempo

Definizione 34 Per ogni $t_0 \geq 0$ vale:

$$\mathcal{L}[f(t - t_0) \cdot 1(t - t_0)] = e^{-t_0 s} F(s) \quad (4.12)$$

COROLLARIO: se $f(t) = 0$ per $t < 0$ allora $\forall t_0 \geq 0$ vale $\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{t_0 s} F(s)$.

Esempio 17 $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \in [t_1, t_2] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad \text{con } 0 < t_1 < t_2 \text{ (impulso rettangolare)}$

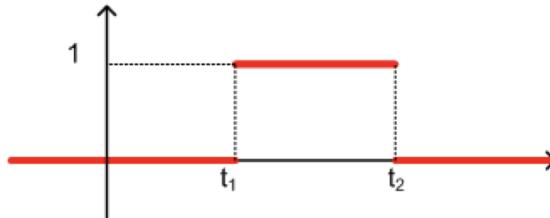


Figura 4.2

Consideriamo l'impulso rettangolare come somma di due segnali $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$

$$f_1(t) = 1 \cdot 1(t - t_1) \quad (4.13)$$

$$f_2(t) = (-1) \cdot 1(t - t_2) \quad (4.14)$$

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) = \left(\frac{1}{s}\right) e^{-t_1 s} + \left(-\frac{1}{s}\right) e^{-t_2 s} = \frac{e^{-t_1 s} - e^{-t_2 s}}{s} \quad (4.15)$$

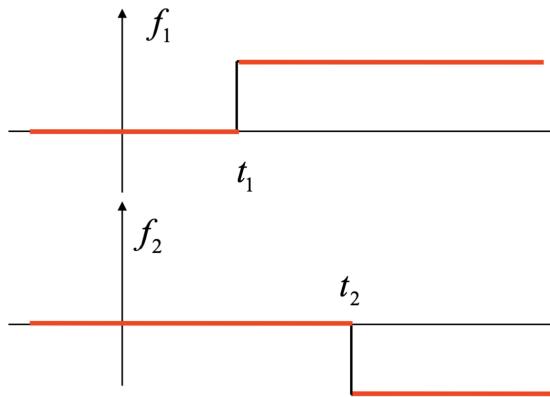


Figura 4.3

4.9 Traslazione nella variabile complessa (s)

Definizione 35 Per ogni $a \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ vale

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s - a) \quad (4.16)$$

Esempio 18

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[t] &= \frac{1}{s^2} \Rightarrow \mathcal{L}[te^{at}] = \frac{1}{(s-a)^2} \\
 \mathcal{L}[t^n e^{at}] &=? \\
 \mathcal{L}\left[\int_0^t v^{n-1} dv\right] &= \frac{1}{s} \mathcal{L}[t^{n-1}] \quad (\text{teo. dell'integrale}) \\
 \int_0^t v^{n-1} dv &= \frac{t^n}{n} \\
 \mathcal{L}\left[\frac{t^n}{n}\right] &= \frac{1}{s} \mathcal{L}[t^{n-1}] \Rightarrow \mathcal{L}[t^n] = \frac{n}{s} \mathcal{L}[t^{n-1}] \\
 \mathcal{L}[t^n] &= \dots = \frac{n!}{s^{n+1}} \\
 \mathcal{L}[t^n e^{at}] &= \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad (\text{dal teo. della trans. in } s)
 \end{aligned}$$

4.10 Teorema della convoluzione

Si abbia $f(t) = g(t) = 0$ per $t < 0$. La convoluzione dei segnali f e g , spesso indicata come $f * g$, è il segnale:

$$\int_0^t f(v)g(t-v)dv$$

rappresentabile anche come $(f * g = g * f)$

$$\int_0^t g(v)f(t-v)dv$$

La trasformata della convoluzione è

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(v)g(t-v)dv\right] = F(s)G(s) \quad (4.17)$$

Esempio 19 \sum denita da $D^2y(t) + 3Dy(t) + 2y(t) = u(t)$. Noto $u(t), t \geq 0$ e le condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $Dy(0) = 1$ trovare $y(t), t \geq 0$?

Sia $u(t) \in C^0$ e conseguentemente assumiamo che $y(t) \in C^2$.

Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione differenziale:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(D^2y(t) + 3Dy(t) + 2y(t)) &= \mathcal{L}(u(t)) \\
 &\dots \\
 s^2Y(s) - sy(0) - Dy(0) + 3(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) &= U(s) \\
 &\dots \\
 s^2Y(s) - s - 1 + 3(sY(s) - 1) + 2Y(s) &= U(s) \\
 (s^2 + 3s + 2)Y(s) - s - 4 &= U(s) \\
 (s^2 + 3s + 2)Y(s) &= U(s) + s + 4
 \end{aligned}$$

Soluzione nello spazio delle trasformate:

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \frac{U(s)}{s^2 + 3s + 2} + \frac{s+4}{s^2 + 3s + 2} \\
 y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{U(s)}{s^2 + 3s + 2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+4}{s^2 + 3s + 2}\right], \quad t \geq 0
 \end{aligned}$$

Andiamo a fattorizzare il polinomio denominatore per trovare le radici e poi andiamo a fare lo sviluppo in fratti semplici:

$$\begin{aligned} \frac{s+4}{s^2+3s+2} &= \frac{s+4}{(s+1)(s+2)} = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s+2} \\ s+4 &= a(s+2) + b(s+1) \Leftrightarrow s+4 = (a+b)s + 2a + b \\ \begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=4 \end{cases} &\Rightarrow a=3, b=-2 \end{aligned}$$

Andiamo a riscrivere la trasformata inversa con la funzione scomposta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+4}{s^2+3s+2}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s+1} - \frac{2}{s+2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+2}\right] = 3e^{-t} - 2e^{-2t} \\ G(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} &\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{U(s)}{s^2+3s+2}\right] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)] \\ \frac{1}{s^2+3s+2} &= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \Rightarrow g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = e^{-t} - e^{-2t} \\ \text{Dal teorema della convoluzione: } \mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)] &= \int_0^t (e^{-(t-v)} - e^{-2(t-v)}) u(v) dv \end{aligned}$$

Si giunge alla soluzione ($t \geq 0$)

$$y(t) = \int_0^t (e^{-(t-v)} - e^{-2(t-v)}) u(v) dv + 3e^{-t} - 2e^{-2t}$$

L'espressione di $y(t)$ individuata è valida in realtà per ogni $t \in \mathbb{R}$ (può essere dimostrato con calcolo diretto).

4.11 Antitrasformazione delle funzioni razionali (il caso dei poli semplici)

Sia $F(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ funzione razionale con coefficienti reali strettamente propria ($\deg b(s) < \deg a(s)$). Inoltre i polinomi $a(s)$ e $b(s)$ siano coprimi fra loro ed $n = \deg a(s)$. Assumiamo che i poli di $F(s)$ siano tutti semplici. Si determini

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

Soluzione:

$$F(s) = \frac{b(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} \quad \text{con } p_i \neq p_j \text{ sei } i \neq j$$

Idea: sviluppo in fratti semplici di $F(s)$

$$\begin{aligned} \exists! k_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \\ F(s) = \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_2}{s-p_2} + \dots + \frac{k_n}{s-p_n} \end{aligned}$$

k_i è il residuo di $F(s)$ in p_i . Come calcolare i k_i ? In generale abbiamo:

$$k_i = (s-p_i)F(s)|_{s=p_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k_1}{s-p_1} + \dots + \frac{k_n}{s-p_n}\right] = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k_1}{s-p_1}\right] + \dots + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k_n}{s-p_n}\right] = \\ &= k_1 e^{p_1 t} + \dots + k_n e^{p_n t} \end{aligned}$$

$$f(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{p_i t} \quad (4.19)$$

Esempio 20

$$\frac{s+4}{(s+1)(s+2)} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2}$$

$$k_1 = \left. \frac{s+4}{s+2} \right|_{s=-1} = 3$$

$$k_2 = \left. \frac{s+4}{s+1} \right|_{s=-2} = -2$$

Capitolo 5

Le funzioni impulsive e l'insieme dei behaviors

Consideriamo un sistema dinamico Σ descritto da

$$Dy(t) + 2y(t) = 2Du(t) + 2u(t)$$

ed assumiamo che per i tempi negativi sia $y(t) = e^{2t}$ e $u(t) = 0$ con $t < 0$.
Questa coppia di funzioni soddisfa l'equazione differenziale

$$Dy(t) = -2e^{-2t} \Rightarrow (-2e^{-2t}) + 2(e^{-2t}) = 0 \quad \forall t < 0$$

Per i tempi negativi ho individuato che questa coppia sta nei behaviors.

$$(0, e^{-2t})|_{(-\infty, 0)} \in \mathcal{B}$$

Introduciamo nel sistema una "azione forzante"

$$u(t) = 1 \quad \text{per } t \geq 0$$

Quindi $u(t) = 1(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ (è un gradino unitario).

PROBLEMA: determinare $y(t)$ per $t \geq 0$.

Posso vedere quello che avviene all'ingresso ma non quello che succede all'uscita:

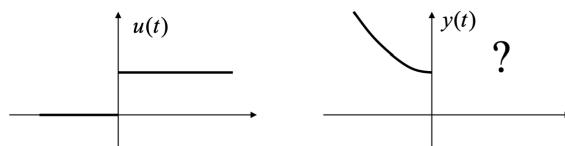


Figura 5.1

Condizioni iniziali:

$$u(0-) = 0, \quad (0+) = 1, \quad y(0-) = 1, \quad y(0+) = ?$$

Se fosse noto $y_+ = y(0+)$ potremo applicare la trasformata di Laplace:

$$\begin{aligned} sY(s) - y_+ + 2Y(s) &= 2(sU(s) - u(0+)) + 2U(s) \\ (s+2)Y(s) - y_+ &= 2(sU(s) - 1) + 2U(s) \\ (s+2)Y(s) &= (2s+2)U(s) + y_+ - 2 \\ Y(s) &= \frac{2s+2}{s+2}U(s) + \frac{y_+-2}{s+2}; \quad U(s) = \mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s} \\ Y(s) &= \frac{2s+2}{s+2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{y_+-2}{s+2} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} + \frac{y_+-2}{s+2} \end{aligned}$$

Figura 5.2

$$y(t) = 1 + e^{-2t} + (y_+ - 2)e^{-2t}, \quad \text{per } t \geq 0$$

La coppia di funzioni:

$$\begin{aligned} u(t) &= 1(t) \quad t \in \mathbb{R} \\ y(t) &= \begin{cases} e^{-2t} & \text{per } t < 0 \\ 1 + e^{-2t} + (y_+ - 2)e^{-2t} & \text{per } t \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

soddisfa l'equazione differenziale $Dy(t) + 2y(t) = 2Du(t) + 2u(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} - \{0\}$ per qualunque valore del parametro y_+ . La risposta $y(t)$ su $[0, +\infty)$ deve esistere ed essere unica (ambito dei sistemi deterministici). Quindi non è possibile definire l'insieme dei behaviors come

$$\mathcal{B} = \{(u(t), y(t)) \in C_p^\infty(\mathbb{R})^2 : Dy + 2y = 2Du + 2u \quad \forall t \in \mathbb{R} - \{t_1, t_2, \dots\}\}$$

Figura 5.3

Quindi abbiamo esclusione dei punti di discontinuità.

Però non possiamo usare questa definizione perché se fosse così avrei infinite soluzioni, ma non va bene perché siamo in ambito deterministico per cui deve esistere UNIVOCAMENTE l'uscita, quindi non è possibile utilizzare una definizione semplice per questo caso. Si osserva che:

$$\{(u, y) \in C_p^\infty(\mathbb{R})^2 : u, y \in C^1, Dy(t) + 2y(t) = 2Du(t) + 2u(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{B}$$

Come risolvere il problema?

IDEA: definisco l'azione forzante come:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 3\frac{t^2}{\tau^2} - 2\frac{t^3}{\tau^3} & \text{per } t \in [0, \tau] \\ 1 & \text{per } t \geq \tau \end{cases} \quad (5.1)$$

Quindi metto un polinomio interpolante tra 0 e 1 in modo da garantire una continuità di classe C^1 .

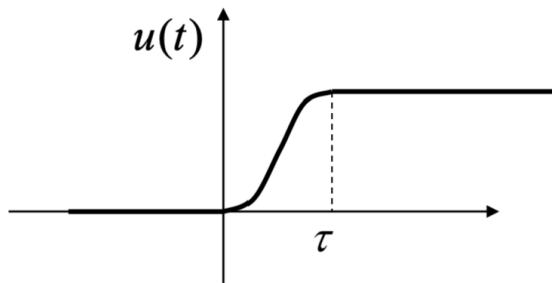


Figura 5.4

$$\begin{aligned}
 u(0-) &= u(0+) = 0 \\
 u(\tau-) &= u(\tau+) = 1 \\
 Du(0-) &= Du(0+) = 0 \\
 Du(\tau-) &= Du(\tau+) = 0 \\
 \Rightarrow u(t) &\in C^1 \quad \forall \tau > 0
 \end{aligned}$$

Assumiamo $y(t) \in C^1 \Rightarrow y(0-) = y(0+) = 1$

Posso quindi determinare $y(t)$ per $t > 0$ con le condizioni iniziali al tempo $0+$: $u(0+) = 0$ e $y(0+) = 1$.
SOLUZIONE:

$$\begin{aligned}
 t \in [0, \tau) : y(t) &= 6 \frac{t^2}{\tau^2} - 4 \frac{t^3}{\tau^3} - 2e^{-2t} \int_0^t e^{2v} \left(3 \frac{v^2}{\tau^2} - 2 \frac{v^3}{\tau^3} \right) dv + e^{-2t} \\
 t \geq \tau : y(t) &= 1 + e^{-2t} - 2e^{-2t} \int_0^\tau e^{2v} \left(3 \frac{v^2}{\tau^2} - 2 \frac{v^3}{\tau^3} \right) dv + e^{-2(t-\tau)}
 \end{aligned}$$

Vale $y(t) \in C^1 \forall \tau > 0$ ed inoltre la coppia $(u(t), y(t))$ soddisfa:

$$Dy(t) + 2y(t) = 2Du(t) + 2u(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall \tau > 0$$

RIASSUMENDO: abbiamo Osserviamo che per $\tau \rightarrow 0+$:

$$u(t) := \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 3 \frac{t^2}{\tau^2} - 2 \frac{t^3}{\tau^3} & \text{per } t \in [0, \tau) \\ 1 & \text{per } t \geq \tau \end{cases}$$

(a)

$$y(t) = \begin{cases} e^{-2t} & t < 0 \\ 6 \frac{t^2}{\tau^2} - 4 \frac{t^3}{\tau^3} - 2e^{-2t} \int_0^t e^{2v} \left(3 \frac{v^2}{\tau^2} - 2 \frac{v^3}{\tau^3} \right) dv + e^{-2t} & t \in [0, \tau) \\ 1 + e^{-2t} - 2e^{-2t} \int_0^\tau e^{2v} \left(3 \frac{v^2}{\tau^2} - 2 \frac{v^3}{\tau^3} \right) dv + e^{-2(t-\tau)} & t \geq \tau \end{cases}$$

(b)

Figura 5.5

$$u(t) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } t > 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

$$y(t) \rightarrow \begin{cases} e^{-2t} & \text{per } t < 0 \\ 1 + 2e^{-2t} & \text{per } t > 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

Da $\lim_{t \rightarrow 0^+} 1 + 2e^{-2t} = 3$ ovvero $y_+ = 3$.

Questa è la soluzione che vorremo trovare subito senza utilizzare il metodo di *smoothing*.

Quando $\tau \rightarrow 0+$ $Du(t)$ in un intorno dell'origine diverge all'infinito!

$Du(t) = 6\frac{t}{\tau^2} - 6\frac{t^2}{\tau^3}$ per $t \in [0, \tau]$ $\Rightarrow \max_{t \in [0, \tau]} Du(t)|_{t=\frac{\tau}{2}} = \frac{3}{2\tau}$ $Du(t)$ converge ad una "funzione" impulsiva (distribuzione) chiamata **delta di Dirac** ($\delta(t)$).

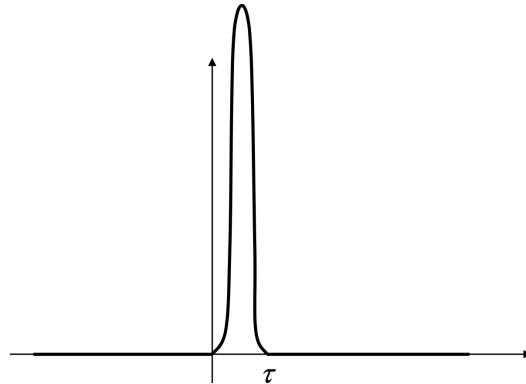


Figura 5.6

5.1 Cenni di teoria delle funzioni impulsive

$$\text{Gradino unitario: } 1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Introduciamo } f(t, \tau) \in C^0 : f(t; \tau) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\tau}t & 0 \leq t \leq \tau \\ 1 & t > \tau \end{cases}$$

$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} f(t; \tau) = 1(t)$ Definiamo formalmente $\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} Df(t; \tau)$:

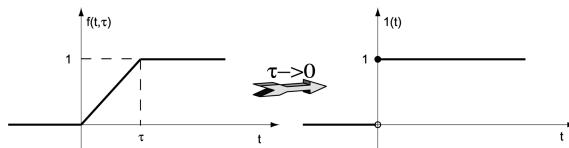


Figura 5.7

$$Df(t; \tau) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\tau} & 0 \leq t < \tau \\ 0 & t \geq \tau \end{cases}$$

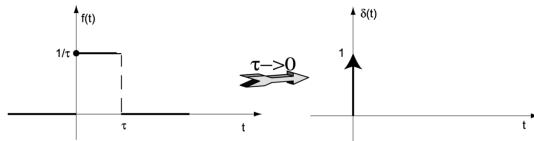


Figura 5.8

$\delta(t)$ è una distribuzione o, più informalmente, una funzione impulsiva.
 $\delta(t)$ è la derivata generalizzata del gradino unitario:

$$\delta(t) = D^* 1(t) \quad (5.4)$$

D^* è la derivata generalizzata o più precisamente è la derivata (in senso) distribuzionale.

Proprietà della delta di Dirac: assumendo che $t_a < T < t_b$:

$$\int_{t_a}^{t_b} \delta(t - T) dt = 1$$

$$\int_{t_a}^{t_b} \delta(t - T) dt = f(T)$$

Introduciamo le derivate generalizzate di $\delta(t)$: $D^{*i} \delta(t)$ = derivata generalizzata di ordine i della delta di Dirac

$$\delta^{(i)}(t) = D^{i*} \delta(t) \quad (5.5)$$

Costruzione di $\delta^{(1)}(t)$ mediante limite di una funzione continua a tratti: mi costruisco un'interpolazione per avere una funzione $f(t, \tau)$ di classe C^1 .

$$f(t; \tau) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2\tau^2} t^2 & 0 \leq t \leq \tau \\ -\frac{1}{2\tau^2} t^2 + \frac{2}{\tau} t - 1 & \tau \leq t \leq 2\tau \\ 1 & t > 2\tau \end{cases}; \quad f(t; \tau) \in C^1$$

$$Df(t; \tau) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\tau^2} t & 0 \leq t \leq \tau \\ -\frac{1}{\tau^2} t + \frac{2}{\tau} & \tau \leq t \leq 2\tau \\ 0 & t > 2\tau \end{cases}$$

$$D^2 f(t; \tau) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\tau^2} & 0 \leq t \leq \tau \\ -\frac{1}{\tau^2} & \tau \leq t \leq 2\tau \\ 0 & t > 2\tau \end{cases}$$

$$1(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} f(t; \tau) \quad \delta(t) := D^* 1(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} Df(t; \tau)$$

Figura 5.9

$$\delta^{(1)}(t) = D^* \delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} D^2 f(t; \tau) \quad (5.6)$$

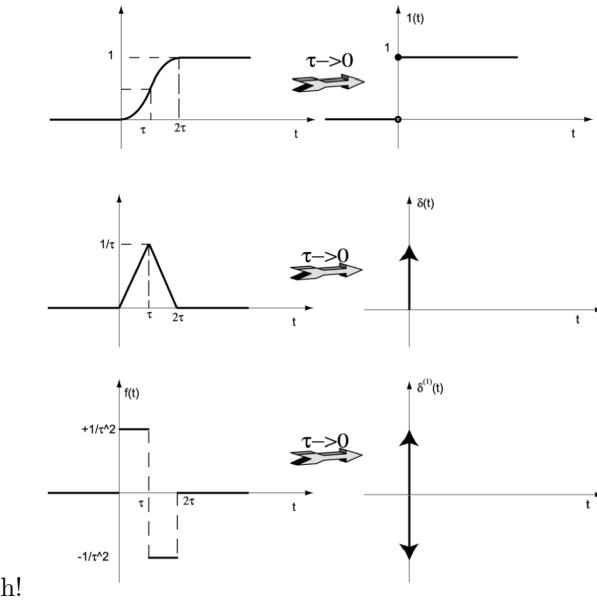


Figura 5.10

Questo metodo costruttivo si può estendere per mostrare il significato di $\delta^{(i)}(t)$, $i > 1$. Derivate generalizzate nel gradino unitario:

$$\begin{aligned} D^* 1(t) &= \delta(t) \\ D^2 * 1(t) &= D^*(D^* 1(t)) = D^* \delta(t) = \delta^{(1)}(t) \\ D^3 * 1(t) &= D^*(D^2 * 1(t)) = D^* \delta^{(1)}(t) = \delta^{(2)}(t) \\ &\dots \\ D^{*n} 1(t) &= \delta^{(n-1)}(t) \end{aligned}$$

Derivate generalizzate della funzione gradino $f(t) = k1(t)$

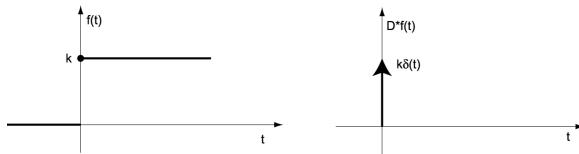


Figura 5.11

La funzione a destra la troviamo sfruttando la linearità di D^* , è un termine impulsivo ma di valore diverso.

$$\begin{aligned} D^*(k1(t)) &= kD^*(1(t)) = k\delta(t) \\ D^{2*}(k1(t)) &= kD^{*2}(1(t)) = k\delta^{(1)}(t) \\ &\dots \\ D^{*n}(k1(t)) &= k\delta^{(n-1)}(t) \end{aligned}$$

Derivate generalizzate di una funzione discontinua: $f \in C_P^\infty(\mathbb{R})$ e sia $t = 0$ il solo istante di discontinuità della f

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & t < 0 \\ f(t) - (f_+ - f_-) & t \geq 0 \end{cases} ; \quad g(t) \in C^0 \quad (5.7)$$

Quando scrivo $(f_+ - f_-)$ ottengo il salto di discontinuità che la funzione fa in 0.

$$\Rightarrow g(t) = f(t) \underbrace{-(f_+ - f_-)1(t)}_{\text{funzione gradino}} \quad (5.8)$$

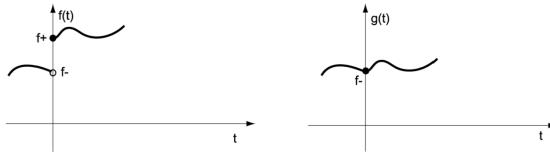


Figura 5.12

Rappresentazione della funzione discontinua $f(t)$ (relazione di ordine zero):

$$f(t) = g(t) + (f_+ - f_-)1(t) \quad (5.9)$$

ovvero:

$$\text{f. discontinua} = \text{f. continua} + \text{f. a gradino}$$

l'ampiezza della funzione gradino è uguale al salto di discontinuità che fa la funzione in $t = 0$

Derivando in senso usuale $Df(t) = Dg(t) \forall t \neq 0$

Assunzione: la deriva generalizzata di una funzione continua sia:

$$D^*g(t) = Dg(t^+)$$

Applichiamo alla relazione di ordine zero l'operatore D^* :

$$D^*f(t) = D^*g(t) + D^*((f_+ - f_-)1(t))$$

$$D^*f(t) = Dg(t^+) + (f_+ - f_-)\delta(t)$$

$$D^*f(t) = Df(t^+) + (f_+ - f_-)\delta(t) \quad (5.10)$$

derivata generale di ordine 1 = f. discontinua + f. impulsiva (di ordine 0)

- Se $t < 0$ o $t > 0$: $D^*f(t) = Df(t)$
- Se $t = 0$: $D^*f(0) = Df(0^+) + (f_+ - f_-)\delta(0) = (f_+ - f_-)\delta(0)$

La funzione discontinua $Df(t^+)$ può essere scomposta nella somma di una funzione continua ed una funzione a gradino:

$$g_1(t) = Df(t^+) - (Df_+ - Df_-)1(t) \Rightarrow g_1(t) \in C^0$$

$$D^*f(t) = g_1(t) + (Df_+ - Df_-)1(t) + (f_+ - f_-)\delta(t)$$

derivata generalizzata di ordine 1 = f. continua + f. gradino + f. impulsiva di ordine 0

Applicando la derivata generalizzata alla relazione che esprime $D^*f(t)$:

$$D^{*2}f(t) = Dg_1(t^+) + (Df_+ - Df_-)\delta(t) + (f_+ - f_-)\delta^{(1)}(t) \quad (5.11)$$

- se $t < 0$ o $t > 0$: $D^{*2}f(t) = D^2f(t)$
- se $t = 0$: $D^{*2}f(0) = (Df_+ - Df_-)\delta(0) + (f_+ - f_-)\delta^{(1)}(0)$

$$g_2(t) = D^2f(t^+) - (D^2f_+ - D^2f_-)1(t) \Rightarrow g_2(t) \in C^0$$

$$D^{*2}f(t) = g_2(t) + (D^2f_+ - D^2f_-)1(t) + (Df_+ - Df_-)\delta(t) + (f_+ - f_-)\delta^{(1)}(t)$$

Più in generale: $f \in C_p^\infty(\mathbb{R})$ con t_1, t_2, \dots istanti di possibile discontinuità.

$$\begin{aligned} D^{*n}f(t) &= D^n f(t^+) + \\ &+ (D^{n-1}(t_1^+) - D^{n-1}(t_1^-))\delta(t-t_1) + \dots + (f(t_1^+) - f(t_1^-))\delta^{(n-1)}(t-t_1) + \\ &+ (D^{n-1}(t_2^+) - D^{n-1}(t_2^-))\delta(t-t_2) + \dots + (f(t_2^+) - f(t_2^-))\delta^{(n-1)}(t-t_2) + \\ &+ \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^{*n}f(t) &= D^n f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} - \{t_1, t_2, \dots\} \\ D^{*n}f(t_1) &= (D^{n-1}(t_1^+) - D^{n-1}(t_1^-))\delta(0) + \dots + (f(t_1^+) - f(t_1^-))\delta^{(n-1)}(0) \\ D^{*n}f(t_2) &= (D^{n-1}(t_2^+) - D^{n-1}(t_2^-))\delta(0) + \dots + (f(t_2^+) - f(t_2^-))\delta^{(n-1)}(0) \\ &\dots \end{aligned}$$

Figura 5.13

d. gen di ordine 1 = f. cont + f. a gradino + f. impul. di ordine 0 + f. impuls di ordine 1

Iterando il ragionamento si ottiene:

$$D^{*n}f(t) = D^n f(t^+) + (D^{n-1}f_+ - D^{n-1}f_-)\delta(t) + \dots + (f_+ - f_-)\delta^{(n-1)}(t) \quad (5.12)$$

- se $t < 0$ o $t > 0$: $D^{*n}f(t) = D^n f(t)$
- se $t = 0$: $D^{*n}f(0) = (D^{n-1}f_+ - D^{n-1}f_-)\delta(0) + \dots + (f_+ - f_-)\delta^{(n-1)}(0)$

Definizione 36 Principio di identità delle funzioni impulsive

Le funzioni impulsive:

$$c_{-1} + c_0\delta(0) + c_1\delta^{(1)}(0) + \dots + c_{k_1}\delta^{k_1}(0)$$

e

$$d_{-1} + d_0\delta(0) + d_1\delta^{(1)}(0) + \dots + d_{k_2}\delta^{k_2}(0)$$

sono uguali fra loro se:

$$c_i = d_i, \quad i = 0, 1, \dots, \min\{k_1, k_2\}$$

se $k_1 > k_2$ $c_i = 0, \quad i = k_2 + 1, \dots, k_1$

se $k_1 < k_2$ $d_i = 0, \quad i = k_1 + 1, \dots, k_2$

Esempi

$$7 + 3\delta(0) + 9\delta^{(1)}(0) = 1 + 3\delta(0) + 9\delta^{(1)}(0) \quad \text{Vero}$$

$$7 + 3\delta(0) + 9\delta^{(1)}(0) = 7 + 3\delta(0) + 4\delta^{(1)}(0) \quad \text{Falso}$$

$$7 + 3\delta(0) + 9\delta^{(1)}(0) = 7 + 3\delta(0) + 9\delta^{(1)}(0) + 2\delta^{(2)}(0) \quad \text{Falso}$$

Figura 5.14

Ritorniamo all'esempio iniziale: l'equazione differenziale di \sum interpretata in senso distribuzionale è:

$$D^*y(t) + 2y(t) = 2D^*u(t) + 2u(t)$$

Deve essere soddisfatta per ogni $t \in \mathbb{R}$ compresi gli istanti di discontinuità.

Per $t = 0$

$$\begin{aligned} (y_+ - y_-)\delta(0) + 2y_+ &= 2(u_+ - u_-)\delta(0) + 2u_+ \\ y_+ - y_- &= 2(u_+ - u_-) \\ \Rightarrow y_+ &= y_- + 2(u_+ - u_-) = 1 + 2(1 - 0) = 3 \end{aligned}$$

5.2 Insieme dei behaviors

Definizione 37 Dato un insieme dinamico Σ descritto dall'equazione differenziale

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u \quad (5.13)$$

si definisce insieme dei behaviors, o behavior, di Σ

$$\mathcal{B} = \left\{ (u, y) \in C_p^\infty(\mathbb{R})^2 : \sum_{i=0}^n a_i D^{*i} y = \sum_{i=0}^m b_i D^{*i} u \right\} \quad (5.14)$$

L'equazione differenziale è soddisfatta in senso distribuzionale per ogni $t \in \mathbb{R}$

Le condizioni iniziali associate a Σ al tempo $t = 0$ sono:

$$\begin{aligned} & y(0), Dy(0), \dots, D^{(n-1)}y(0) \\ & u(0), Du(0), \dots, D^{(m-1)}u(0) \end{aligned}$$

se $t = 0$ è istante di discontinuità emergono le condizioni al tempo $0-$ e al tempo $0+$.
la relazione fra i valori al tempo $0-$

$$y_-, Dy_-, \dots, D^{n-1}y_-; u_-.Du_-, \dots, D^{m-1}u_-$$

e quelli al tempo $0+$

$$y_+, Dy_+, \dots, D^{n-1}y_+; u_+, Du_+, \dots, D^{m-1}u_+$$

sono determinabili uguagliando le espressioni impulsive dell'eq. differenziale al tempo $t = 0$

5.3 Relazioni fra le condizioni iniziali su istante di discontinuità

NB : $\rho = n - m$ Il secondo vettore sono i salti che fanno le derivate della y a partire dalla derivata di

$$\begin{aligned} & y_+ = y_-, Dy_+ = Dy_-, \dots, D^{\rho-1}y_+ = D^{\rho-1}y_- \quad (\text{assenti se } \rho = 0) \\ & \begin{bmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{\rho+2} & & \ddots & a_n \\ a_{\rho+1} & a_{\rho+2} & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^\rho y_+ - D^\rho y_- \\ D^{\rho+1}y_+ - D^{\rho+1}y_- \\ \vdots \\ D^{n-1}y_+ - D^{n-1}y_- \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} b_m & 0 & \cdots & 0 \\ b_{m-1} & b_m & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ b_2 & & \ddots & b_m \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-1} & b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_+ - u_- \\ Du_+ - Du_- \\ \vdots \\ D^{m-1}u_+ - D^{m-1}u_- \end{bmatrix} \quad (\text{assenti se } m = 0) \end{aligned}$$

Figura 5.15

ordine ρ fino a quella di $n - 1$, mentre il quarto è il vettore dei salti dell'ingresso.

In un'applicazione pratica conosciamo le condizioni a $0-$ e a $0+$ dell'ingresso (in virtù del fatto che sto studiando un fenomeno), in questo istante di discontinuità compare l'azione forzante.

Inoltre conosco i valori della y al tempo $0-$, l'eventuale incognita sono le derivate delle condizioni iniziali.

5.4 Relazioni di continuità ingresso-uscita

Vediamo tre proprietà:

- Sia $(u, y) \in \mathcal{B}$. Allora $y \in C^{\rho-1}$. Se ho un elemento del behavior qualunque sia y è di classe $C^{\rho-1}$
- Sia $(u, y) \in \mathcal{B}$ e $p \in \mathbb{Z}$ con $p \geq -1$. Allora $u \in C^p$ se e solo se $y \in C^{\rho+p}$. Quando $\rho > 1$ l'effetto di uscita è più liscio di quello di entrata, e questo può essere espresso dal grado di levigatezza del sistema
- Sia $(u, y) \in \mathcal{B}$. L'ingresso u ha grado di levigatezza k se e solo se l'uscita y ha grado di levigatezza $\rho + k$

Capitolo 6

La funzione di trasferimento

Definizione 38 Spazio delle sequenze impulsive:

$$\mathcal{I}^* \triangleq \left\{ d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^* : d(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=0}^{r_i} c_{ij} \delta^{(j)}(t - t_i), c_{ij} \in \mathbb{R} \right\} \quad (6.1)$$

Quindi, una funzione fa parte dello spazio delle sequenze impulsive quando soddisfa queste due condizioni:

- La sequenza è nulla ovunque tranne che in un numero finito di punti
- I valori non nulli della sequenza sono infiniti o tendono all'infinito

Estensione distribuzionale delle funzioni derivabili a tratti: $C_p^\infty(\mathbb{R}) \triangleq C_p^\infty(\mathbb{R}) + \mathcal{I}^*$

Esempio 21

$$\begin{aligned} d(t) &= 7\delta(t) + 4\delta^{(1)}(t-10) + 2\delta^{(2)}(t-10) \in I^* \\ f(t) &= 1(t) + 2t \cdot 1(t-5) \in C_p^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \text{non è impulsiva} \\ D^*f(t) &= \delta(t) + 2 \cdot 1(t-5) + 10\delta(t-5) \in C_p^\infty(\mathbb{R})^* \end{aligned}$$

Esempio 22 Esempi di trasformate di Laplace di funzini impulsive:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\delta(t)] &= \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-s \cdot 0} = 1 \\ \mathcal{L}[\delta^{(1)}(t)] &= \int_{0^-}^{+\infty} \delta^{(1)}(t) e^{-st} dt = \left[\delta(t) e^{-st} \right]_{0^-}^{+\infty} - \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t) (-se^{-st}) dt = s \\ \mathcal{L}[\delta(t) + 2\delta^{(1)}(t) + 9\delta^{(2)}(t)] &= 1 + 2s + 9s^2 \\ \mathcal{L}[7t^3 + \delta(t)] &= 7 \frac{3!}{s^4} + 1 = \frac{s^4 + 42}{s^4} \\ \mathcal{L}[te^{-3t} + \delta(t-2)] &= \frac{1}{(s+3)^2} + e^{-2s} \end{aligned}$$

Figura 6.1

6.1 La trasformata della derivata generalizzata

Definizione 39 Sia $f \in C_p^\infty(\mathbb{R})(C_p^\infty(\mathbb{R})^*)$ segue

$$\mathcal{L}[D^*f(t)] = sF(s) - f(0-) \quad (6.2)$$

6.2 Derivate generalizzate di ordine superiore

$$\mathcal{L}[D^{*2}f] = \mathcal{L}[D^*(D^*f)] = s\mathcal{L}[D^*f] - D^*f(0-) = s(sF(s) - f(0-)) - Df(0-) = s^2F(s) - sf(0-) - Df(0-) \quad (6.3)$$

Generalizzando:

$$\mathcal{L}[D^{*i}f] = s^iF(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-1-j} f_- \quad (6.4)$$

Esempio 23

$$\begin{aligned} f(t) &= \begin{cases} 1 & \text{per } 0 \leq t < 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \\ f(t) &= 1(t) - 1(t-2) \\ \mathcal{L}[D^*f] &= sF(s) - f(0-) = s\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-2s}\right) = 1 - e^{-2s} \end{aligned}$$

Con calcolo diretto: $\mathcal{L}[D^*f] = \mathcal{L}[\delta(f) - \delta(t-2)] = 1 - e^{-2s}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\delta^{(1)}(t)] &= \mathcal{L}[D^*\delta(t)] = s\mathcal{L}[\delta(t)] - \delta(0-) = s1 - 0 = s \\ \mathcal{L}[\delta^{(2)}(t)] &= \mathcal{L}[D^{2*}\delta(t)] = s^2\mathcal{L}[\delta(t)] - s\delta(0-) - \delta^{(1)}(0-) = s^2 \\ &\Rightarrow \mathcal{L}[\delta^{(i)}(t)] = s^i, i \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

6.3 Estensione dell'insieme dei behaviors

Definizione 40 Dato un insieme dinamico Σ descritto dall'equazione differenziale:

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u \quad (6.5)$$

si definisce estensione impulsiva dei behaviors o behavior esteso di Σ :

$$\mathcal{B}^* = \left\{ (u, y) \in C_p^\infty(\mathbb{R})^* \times C_p^\infty(\mathbb{R})^* : \sum_{i=0}^n a_i D^{*i} y = \sum_{i=0}^m b_i D^{*i} u \right\} \quad (6.6)$$

Ancora l'equazione differenziale è soddisfatta in senso distribuzionale per ogni $t \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{B}^*$$

PROPRIETÀ: sia $(u, y) \in \mathcal{B}^*$, segue $(D^*u, D^*y) \in \mathcal{B}^*$

Definizione 41 Un segnale di ingresso $u(t) \neq 0$ per $t > 0$ è detto **azione forzante** (su Σ). Sia $(u, y) \in \mathcal{B}$ con $u(t)$ azione forzante e con condizioni iniziali al tempo $t = 0-$ tutte nulle:

$$y_- = 0, Dy_- = 0, \dots, D^{n-1}y_- = 0 \quad \text{e} \quad u_- = 0, Du_- = 0, \dots, D^{m-1}u_- = 0$$

Il segnale $y(t)$ per $t > 0$ è detto **risposta (evoluzione) forzata** (di Σ).

Proprietà della coppia azione forzante-risposta forzata: sia $(u, y) \in \mathcal{B}^*$ con $u(t)$ azione forzante ed $y(t)$ risposta forzata. Segue:

$$\left(\int_{0-}^t u(v) dv, \int_{0-}^t y(v) dv \right) \in \mathcal{B}^* \quad (6.7)$$

6.4 Problema fondamentale dell'analisi del dominio al tempo di un sistema Σ

Note le condizioni iniziali al tempo $0-$

$$y_-, Dy_-, \dots, D^{n-1}y_- \quad \text{e} \quad u_-, Du_-, \dots, D^{m-1}u_-$$

e l'azione forzante $u(t)$, $t \geq 0$ determinare la risposta $y(t)$, $t \geq 0$

6.5 Soluzione dell'equazione differenziale

I segnali $u(t)$ e $y(t)$ soddisfano in senso distribuzionale l'equazione differenziale di σ :

$$\sum_{i=0}^n a_i D^{*i} y(t) = \sum_{i=0}^m b_i D^{*i} u(t)$$

Applichiamo all'equazione differenziale la trasformata di Laplace: L'ultima equazione la possiamo

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i \mathcal{L}[D^{*i} y(t)] &= \sum_{i=0}^m b_i \mathcal{L}[D^{*i} u(t)] \\ \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{L}[D^{*i} y(t)] + a_0 Y(s) &= \sum_{i=1}^m b_i \mathcal{L}[D^{*i} u(t)] + b_0 U(s) \end{aligned}$$

(a)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i \left(s^i Y(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-1-j} y_- \right) + a_0 Y(s) &= \sum_{i=1}^m b_i \left(s^i U(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-1-j} u_- \right) + b_0 U(s) \\ \left(\sum_{i=0}^n a_i s^i \right) Y(s) - \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=0}^{i-1} D^{i-1-j} y_- s^j &= \left(\sum_{i=0}^m b_i s^i \right) U(s) - \sum_{i=1}^m b_i \sum_{j=0}^{i-1} D^{i-1-j} u_- s^j \end{aligned}$$

$$Y(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} U(s) + \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} a_i D^{i-1-j} y_- s^j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{i-1} b_i D^{i-1-j} u_- s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

(b)

Figura 6.2

dividere in due parti:

- La prima parte della somma (il termine sinistro) lo possiamo interpretare come la trasformata della y quando le condizioni iniziali sono tutte nulle, allora ho il risultato che è dato da questa espressione. Questa è la trasformata della risposta forzata. La funzione razionale è la funzione di trasferimento.
- la seconda parte è la funzione razionale strettamente propria, qualunque sia il valore iniziale il grado massimo del numeratore è $n-1$, mentre al denominatore abbiamo come grado massimo n

Quando vado a fare l'antitrasformata la posso fare "a pezzi", però dobbiamo fare l'antitrasformata di una funzione razionale strettamente propria (quella a destra).

$$\begin{aligned} Y_{\text{for.}}(s) &:= \mathcal{L}[y_{\text{for.}}(t)] := \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} U(s) \\ Y_{\text{lib.}}(s) &:= \mathcal{L}[y_{\text{lib.}}(t)] := \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} a_i D^{i-1-j} y_- s^j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{i-1} b_i D^{i-1-j} u_- s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \\ Y(s) &= Y_{\text{for.}}(s) + Y_{\text{lib.}}(s) \\ \Rightarrow y(t) &= y_{\text{for.}}(t) + y_{\text{lib.}}(t), \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

$y_{\text{for.}}(t)$ è la risposta forzata di Σ all'azione forzante
 $y_{\text{lib.}}(t)$ è definita quale risposta (evoluzione) libera di Σ

Figura 6.3

Definizione 42 Funzione di trasferimento

Si definisce f.d.t. di un sistema la funzione di variabile complessa $G(s)$ per la quale è valida la relazione:

$$\mathcal{L}[y(t)] = G(s)\mathcal{L}[u(t)] \quad (6.8)$$

$\forall(u(t), y(t)) \in \mathcal{B}$ con $u(t) = 0, y(t) = 0$ per $t < 0$

PROPRIETÀ: la fdt del sistema dinamico Σ introdotto è:

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \quad \left(\equiv \frac{b(s)}{a(s)} \right) \quad \xrightarrow{\text{u}} \boxed{\mathbf{G}(s)} \xrightarrow{\text{y}}$$

Figura 6.4

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} = \frac{b(s)}{a(s)} \quad (6.9)$$

È un modello matematico alternativo all'equazione differenziale.

Se le condizioni iniziali sono tutte nulle (sistema in quiete per $t = 0-$):

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (6.10)$$

$$Y_{for}(s) = G(s)U(s) \rightarrow \text{trasformata della risposta forzata} \quad (6.11)$$

Sia $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$ con $g(t) = 0, t < 0$; $g(t)$ è la risposta all'impulso a partire da una condizione di quiete: $(\delta(t), g(t) \in \mathcal{B}^*)$.

Dal teorema di convoluzione:

$$y_{for}(t) = \int_0^t g(t-v)u(v)dv \quad (6.12)$$

oppure

$$y_{for}(t) = \int_0^t u(t-v)g(v)dv \quad (6.13)$$

Definizione 43 Soluzione generale dell'equazione differenziale ($t \geq 0$)

$$y(t) = \int_0^t g(t-v)u(v)dv + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} a_i D^{i-1-j} y_- s^j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{i-1} b_i D^{i-1-j} u_- s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \right] \quad (6.14)$$

Esempio 24 Riprendiamo il sistema Σ descritto da:

$$Dy(t) + 2y(t) = 2Du(t) + 2u(t)$$

con $y(t) = e^{-2t}, t < 0$ e $u(t) = 1(t)$

Determinare $y(t), t \geq 0$.

Condizioni iniziali al tempo $0-$: $y_- = 1, u_- = 0$

$$D^*y(t) + 2y(t) = 2D^*u(t) + 2u(t)$$

applichiamo $\mathcal{L}[\cdot]$:

$$\begin{aligned}
 (sY(s) - y_-) + 2Y(s) &= 2(sU(s) - u_-) + 2U(s) \\
 (s+2)Y(s) &= (2s+2)U(s) + y_- - 2u_- \\
 Y(s) &= \frac{2s+2}{s+2}U(s) + \frac{y_- - 2u_-}{s+2} \\
 G(s) &= \frac{2s+2}{s+2} \text{ è la funzione di trasferimento} \\
 \frac{y_- - 2u_-}{s+2} &\text{ è la trasformata di Laplace della risposta libera} \\
 g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[2 - \frac{2}{s+2}\right] = 2\delta(t) - 2e^{-2t} \\
 y(t) &= \int_0^t (2\delta(t-v) - 2e^{-2(t-v)})u(v)dv + (y_- - 2u_-)e^{-2t} \\
 u(t) &= 1(t) \quad e \quad y_- = 1, \quad u_- = 0 \\
 y(t) &= \int_0^t (2\delta(t-v) - 2e^{-2(t-v)})dv + e^{-2t} = \\
 &= \left(2 - 2 \int_0^t e^{-2(t-v)}dv\right) + e^{-2t} = (2 - (1 - e^{-2t})) + e^{-2t} = \\
 &= (1 + e^{-2t}) + e^{-2t} = 1 + 2e^{-2t}
 \end{aligned}$$

Quando $U(s)$ è una funzione razionale è normale e più conveniente antitrasformare direttamente $Y_{for}(S)$ e $Y_{lib}(s)$:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s+2}{s+2} \frac{1}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]$$

Definizione 44 Un sistema Σ si dice (*strettamente*) **proprio** se la sua funzione di trasferimento è (*strettamente*) **propria**.

Quindi: se $n \geq m$ ($\rho \geq 0$) $\leftrightarrow \Sigma$ proprio; se $n > m$ ($\rho \geq 1$) $\leftrightarrow \Sigma$ strettamente proprio.

Definizione 45 *Guadagno statico di Σ*

È il rapporto fra il valore costante dell'uscita e il valore costante dell'ingresso ($\neq 0$) quando Σ è all'equilibrio:

$$K = \frac{y_c}{u_c} \text{ con } (u_c, y_c) \in \mathcal{B} \text{ e } u_c \neq 0 \quad (6.15)$$

Dall'equazione differenziale si deduce: $K = \frac{b_0}{a_0} \Rightarrow K = G(0)$

Definizione 46 *Polinomio caratteristico di Σ*

Dato il sistema Σ descritto dall'equazione differenziale $\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u$ il polinomio $a(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$ è detto polinomio caratteristico di Σ

Definizione 47 *Poli e zeri di Σ*

Sono i poli e gli zeri della funzione di trasferimento $G(s)$ di Σ .

Normalmente i poli sono le radici di $a(s) = 0$, ma se $G(s) = \frac{s^2+5s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)^2}$, gli $\{\text{zeri di } \Sigma\} = \{-4\}$, $\{\text{poli di } \Sigma\} = \{-2, -3, -3\}$

Definizione 48 *Modi del sistema dinamico Σ* Sono le funzioni tipiche associate ai poli di Σ seconda la regola:

- Se p è un polo reale di molteplicità h : $e^{pt}, te^{pt}, \dots, t^{h-1} p^{pt}$
- Se $\sigma \pm j\omega$ è una coppia di poli complessi coniugati di molteplicità h :

$$e^{\sigma t} \sin(\omega t + \phi_1), te^{\sigma t} \sin(\omega t + \phi_2), \dots, t^{h-1} e^{\sigma t} \sin(\omega t + \phi_h)$$

oppure equivalentemente

$$e^{\sigma t} \sin(\omega t), e^{\sigma t} \cos(\omega t), te^{\sigma t} \sin(\omega t), te^{\sigma t} \cos(\omega t), \dots, t^{h-1} e^{\sigma t} \sin(\omega t), t^{h-1} e^{\sigma t} \cos(\omega t)$$

$$\text{Esempio: } G(s) = \frac{(s+1)(s^2 + 2s + 7)}{(s+4)^3(s+5)[(s+1)^2 + 4]^2}$$

{modi di Σ } = { $e^{-4t}, te^{-4t}, t^2e^{-4t}, e^{-5t}, e^{-t}\sin(2t + \varphi_1), te^{-t}\sin(2t + \varphi_2)$ } oppure
 {modi di Σ } = { $e^{-4t}, te^{-4t}, t^2e^{-4t}, e^{-5t}, e^{-t}\sin(2t), e^{-t}\cos(2t), te^{-t}\sin(2t), te^{-t}\cos(2t)$ }

Figura 6.5

PROPRIETÀ: sia Σ un sistema per il quale i poli coincidono con le radici del polinomio caratteristico ($a(s)$ e $b(s)$ sono coprimi fra loro). Allora la risposta libera è una combinazione lineare dei suoi modi.

Non tutti i sistemi dinamici lineari e stazionari sono caratterizzati da funzioni di trasferimento razionali.

Esempio 25 Il sistema denominato **ritardo finito**. Se $u(t)$ è il segnale all'ingresso, il segnale all'uscita è $y(t) = u(t - t_0)$ dove t_0 è il tempo di ritardo

$$\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[u(t - t_0)] = \mathcal{L}[u(t)]e^{t_0 s} \Rightarrow G(s) = e^{t_0 s} \quad (6.16)$$

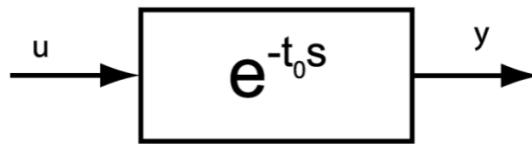


Figura 6.6

In generale i sistemi dinamici lineari e stazionari retti da equazioni differenziali alle derivate parziali hanno funzioni di trasferimento trascendenti (non razionali).

6.6 Segnali tipici per l'ingresso di Σ

- $\delta(t)$ impulso unitario (delta di Dirac): $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$
- $1(t)$ gradino unitario: $\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$
- $t \cdot 1(t)$ rampa unitaria: $\mathcal{L}[t \cdot 1(t)] = \frac{1}{s^2}$
- $\frac{1}{2}t^2 \cdot 1(t)$ parabola unitaria: $\mathcal{L}[\frac{1}{2}t^2 \cdot 1(t)] = \frac{1}{s^3}$

Definizione 49 Risposta canonica:

È la risposta forzata di Σ ad un segnale tipico all'ingresso.

Le risposte canoniche usualmente adottate sono:

- $g(t) =$ risposta all'impulso $\delta(t)$ o **risposta impulsiva**
- $g_s(t) =$ risposta al gradino $1(t)$ o **risposta indiciale**

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)], g_s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}G(s)\right] \quad (6.17)$$

PROPRIETÀ:

$$\int_{0^-}^t g(v)dv = g_s(t) \quad (6.18)$$

$$g(t) = D^* g_s(t) \quad (6.19)$$

(per i sistemi strettamente propri $g(t) = Dg_s(t^+)$)

Proprietà (integrali di Vaschy): nota la risposta al gradino $g_s(t)$, la risposta forzata $y_{for}(t)$, $t \geq 0$ effetto dell'azione forzante $u(t)$, $t \geq 0$ è determinabile come:

$$y_{for}(t) = \int_0^t u'(v)g_s(t-v)dv + u(0_+)g_s(t) \quad (6.20)$$

$$y_{for}(t) = \int_0^t g_s(v)u'(t-v)dv + u(0_+)g_s(t) \quad (6.21)$$

Capitolo 7

Sistemi dinamici elementari

7.1 Sistemi del primo ordine (strettamente propri)

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau s} \quad (7.1)$$

(guadagno statico normalizzato ad 1)

Eq. diff. $\tau Dy + y = u$ $\tau \equiv$ costante di tempo (> 0)

$$\{\text{poli di } \Sigma\} = \left\{ -\frac{1}{\tau} \right\} \quad (7.2)$$

$$\{\text{modi di } \Sigma\} = \left\{ e^{-\frac{1}{\tau}t} \right\} \quad (7.3)$$

Determinazione di $g_s(t)$ (risposta al gradino unitario)

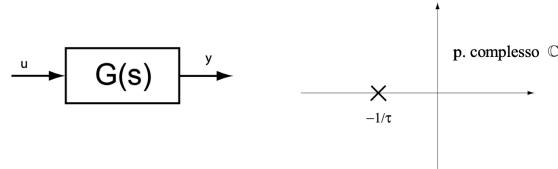


Figura 7.1

$$g_s(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{1 + \tau s} \cdot \frac{1}{s} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\frac{1}{\tau}}{(s + \frac{1}{\tau})s} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right] = 1 - e^{-t/\tau}, \quad t \geq 0 \quad (7.4)$$

Per $t = 3\tau$ (5τ) l'uscita y raggiunge il 95 % (99,3 %) del valore di regime

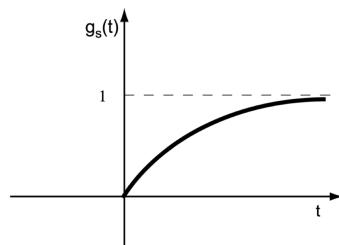


Figura 7.2

7.2 Parametri della risposta al gradino unitario

Spesso la risposta al gradino unitario di un sistema dinamico generico ha l'andamento di figura dove si evidenziano "parametri" caratteristici

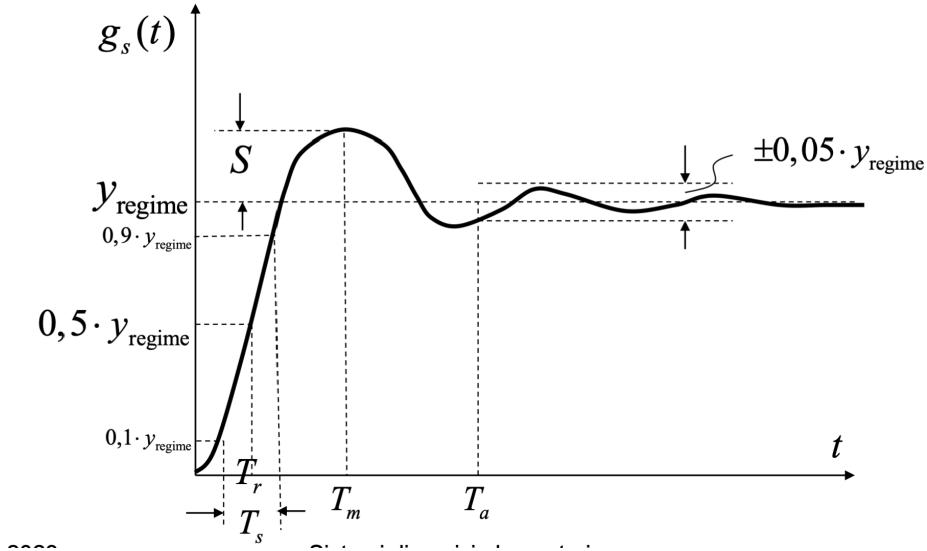


Figura 7.3

- S = massima sovraelongazione
- T_r = tempo di ritardo
- T_s = tempo di salita
- T_m = istante di massima sovraelongazione
- T_a = tempo di assestamento
- $T_a = \inf\{T > 0 : |g_s(t) - y_{regime}| \leq 0.05y_{regime} \forall t \geq T\}$

7.3 Sistemi del secondo ordine (senza zeri)

La funzione di trasferimento $G(s)$ sia così parametrizzata:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad G(0) = 1 \quad (7.5)$$

Eq. Diff. $D^2y + 2\delta\omega_n Dy + \omega_n^2 y = \omega_n^2 u$

- ω_n = pulsazione naturale (> 0)
- δ = coefficiente di smorzamento, $\in (0, 1)$

$$\{poli\ di\ G(s)\} = \{-\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\} \quad (7.6)$$

$$\{modi\ di\ G(s)\} = \{e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}t + \phi_1)\} \quad (7.7)$$

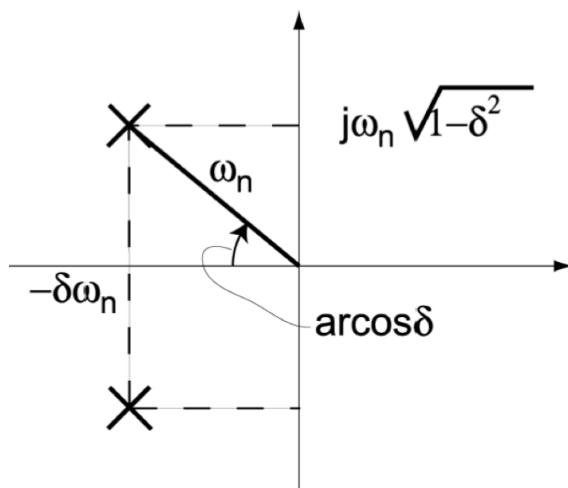


Figura 7.4

Determinazione della risposta al gradino unitario

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)} \right] = 1 - Ae^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega t + \phi) \quad (7.8)$$

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \delta^2}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}}$$

$$\phi = \arccos(\delta)$$

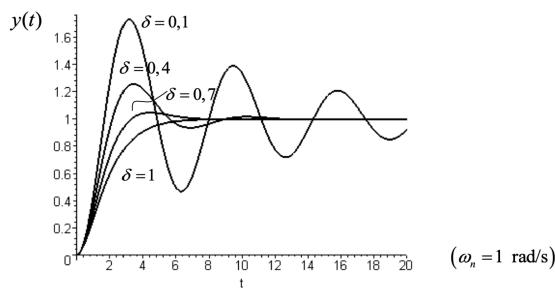


Figura 7.5

per $\delta = 0 \Rightarrow y(t) = 1 - \sin(\omega_n t + \frac{\pi}{2}) = 1 - \cos(\omega_n t)$

per $\delta = 1$ non posso utilizzare l'espressione precedente ($A = +\infty$) ma rifacendo i calcoli $y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega_n^2}{s(s+\omega_n)^2} \right] = 1 - e^{-\omega_n t} t e^{-\omega_n t}$.

Calcolo della **massima sovraelongazione S**

$$\begin{aligned}
 Dy(t) &= 0 \\
 A\delta\omega_n e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega t + \phi) - Ae^{-\delta\omega_n t} \omega \cos(\omega t + \phi) &= 0 \\
 \delta \sin(\omega t + \phi) &= \sqrt{1 - \delta^2} \cos(\omega t + \phi) \\
 \tan(\omega t + \phi) &= \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta} \Leftrightarrow \omega t = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\
 t &= \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}} \quad n = 0, 1, 2, \dots \\
 y(t)|_{min,max} &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}} \exp \left\{ -\frac{\delta n\pi}{\sqrt{1 - \delta^2}} \right\} \sin(n\pi + \phi) = \\
 \text{Dato che } \phi &= \arcsin \sqrt{1 - \delta^2} \Rightarrow \sin(n\pi + \phi) = (-1)^n \sqrt{1 - \delta^2} \\
 y(t)|_{min,max} &= 1 - (-1)^n \exp \left\{ -\frac{\delta n\pi}{\sqrt{1 - \delta^2}} \right\} \\
 y(t)_{min,max} &= 1 - (-1)^n \exp\{-\delta\omega_n t\} \text{ dove } t = \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}} \quad n = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

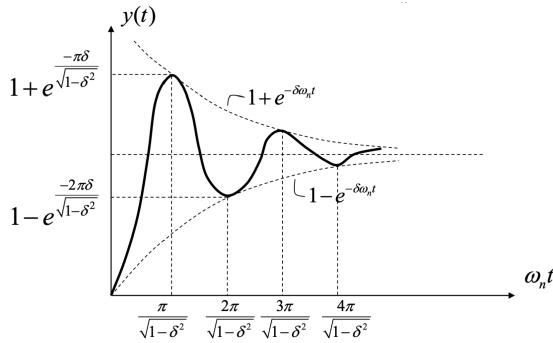


Figura 7.6

$$S = 100 \exp \left\{ -\frac{\delta\pi}{\sqrt{1 - \delta^2}} \right\} \quad (7.9)$$

Calcolo del **tempo di assestamento** T_a

Una stima può essere determinata risolvendo l'equazione: $e^{-\delta\omega_n T_a} = 0,05$ $-\delta\omega_n T_a = \ln 0,05 \simeq -3$

$$T_a \simeq \frac{3}{\delta\omega_n} \quad (7.10)$$

Calcolo del **tempo di salita** T_s

$$T_s \approx \frac{1,8}{\omega_n} \quad (7.11)$$

È una relazione approssimata dedotta interpolando dati numerici

7.4 Poli dominanti di un sistema dinamico

Sistema Σ con fdm $G(s) = b(s)/a(s)$, n poli ed m zeri, tutti i poli hanno parte reale negativa (tutti i modi convergono a zero per $t \rightarrow +\infty$)

Esempio 26

$$G_1(s) = \frac{20}{(s+1)(s+4)(s+5)}$$

$$\{\text{poli di } \Sigma_1\} = \{-1, -4, -5\} \quad \{\text{modi di } \Sigma_1\} = \{e^{-t}, e^{-4t}, e^{-5t}\}$$

-1 è il polo dominante. Si può costruire una fdt approssimante $G_{1a}(s) \simeq G_1(s)$ con questo solo polo. $G_{1a}(s) = \frac{c}{s+1}$, la costante c è determinata da $G_{1a}(0) = G_1(0) \Rightarrow c = 1$

$$G_{1a}(s) = \frac{1}{s+1}$$

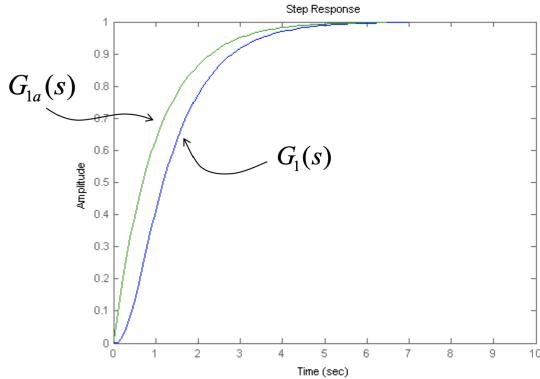


Figura 7.7

Esempio 27

$$G_2(s) = \frac{20(s + 0.98)}{(s + 1)(s + 4)(s + 5)}$$

potrei $G_{2a-errata}(s) = \frac{0.98}{s+1}$ però è chiaro che questo non funziona perché il polo $s+1$ è quasi cancellato dal polo in 0.98, non è una cancellazione polo-zero ma una quasi cancellazione, così abbiamo che il polo dominante vero è -4 (da $s+4$), che è quello più vicino all'asse immaginario.

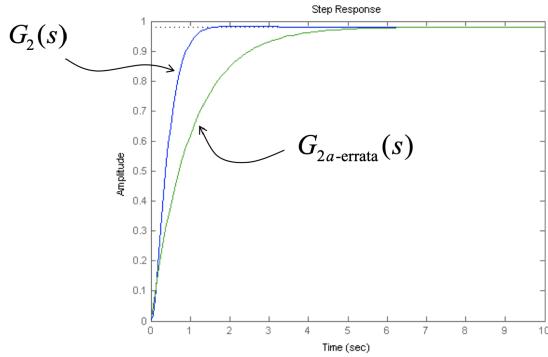


Figura 7.8

Il polo dominante, escluso il polo -1 quasi cancellato dallo zero -0.98 , è $-4 \Rightarrow G_{2a}(s) = \frac{3.92}{s+4}$.

Vado a costruire questa G_{2a} con $s+4$ e vedo che l'approssimazione funziona bene, quindi la G_{2a} esatta e quella approssimata sono simili

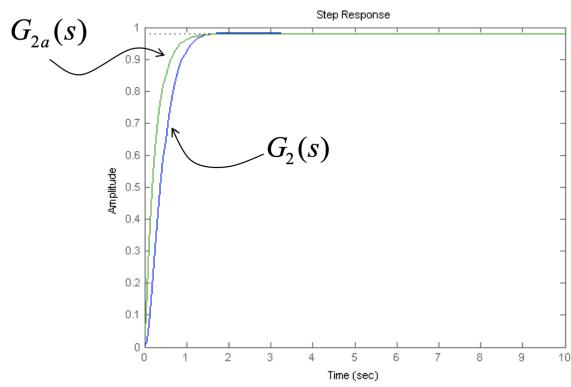


Figura 7.9

Esempio 28

$$G_3(s) = \frac{80(s+7)[(s+2)^2 + 4.1]}{[(s+2)^2 + 4][(s+3)^2 + 5](s+5)} \Rightarrow G_{3a}(s) = \frac{113.4}{[(s+3)^2 + 5]}$$

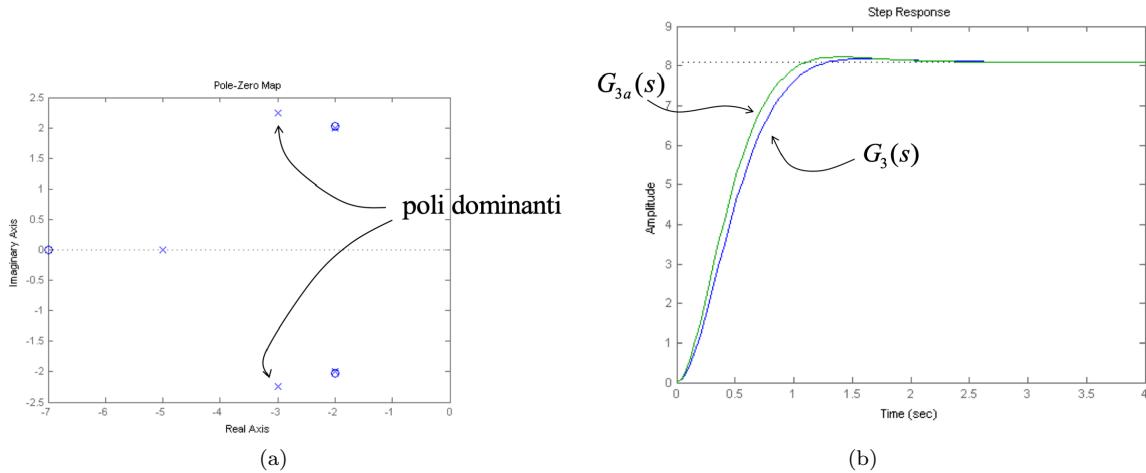


Figura 7.10

Anche qui si vede che c'è una quasi cancellazione, i poli dominanti sono quelli che sono stati quasi cancellati.

Definizione 50 Poli dominanti

Sono i poli (normalmente una coppia), non soggetti a quasi cancellazione polo-zero, più vicini all'asse immaginario

Proprietà qualitativa: la risposta al gradino unitario dipende approssimativamente dai soli poli dominanti di Σ

Conseguenza: se i poli dominanti sono complessi coniugati i parametri della risposta S, T_a, T_s sono determinabili approssimativamente dalle relazioni presentate per i sistemi di ordine due.

Precisazioni:

1. Il concetto di poli dominanti porta ad una approssimazione del comportamento transiente che può essere anche molto rossa
2. Non è sempre possibile individuare un insieme significativo di poli dominanti

7.5 Specifiche sulla risposta al gradino per un sistema di controllo

$$S \leq S_{\max}, T_a \leq T_{a-\max}$$

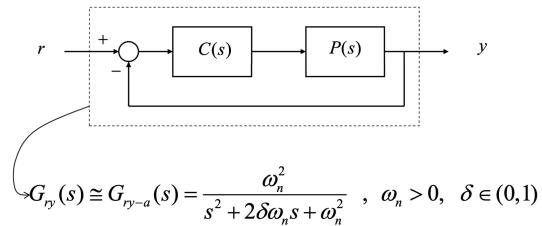


Figura 7.11

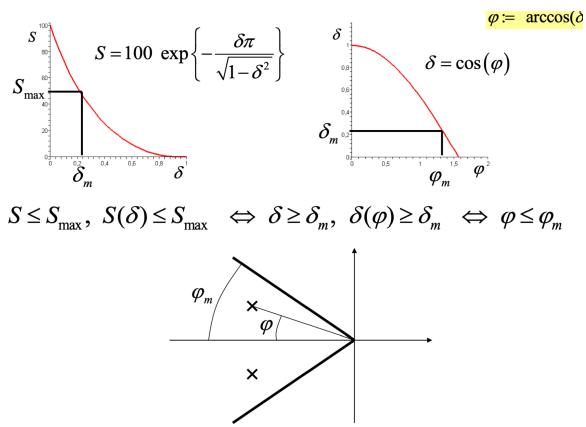


Figura 7.12

$$T_a \leq T_{a-\max}, \quad \frac{3}{\delta\omega_n} \leq T_{a-\max} \Leftrightarrow \delta\omega_n \geq \frac{3}{T_{a-\max}}$$

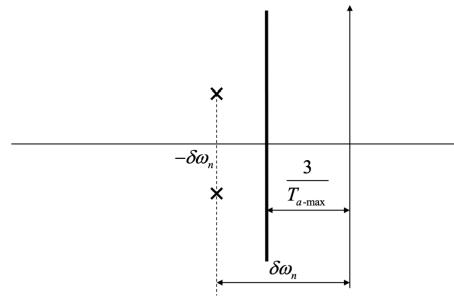


Figura 7.13

Le specifiche $S \leq S_{max}$ e $T_a \leq T_{a-max}$ devono essere soddisfatte entrambe. Quindi i poli $-\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \delta^2}$ devono appartenere al cono troncato di figura. In pratica, si impone che tutti i poli di $G_{ry}(s)$ appartengano al cono troncato.

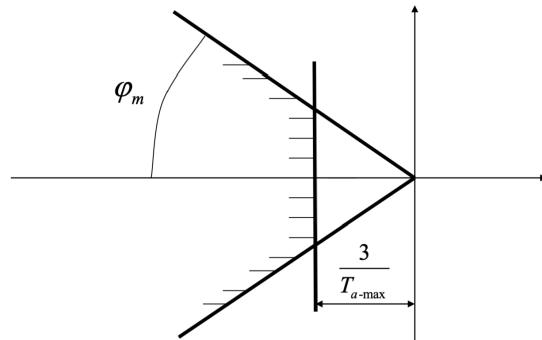


Figura 7.14

Capitolo 8

La stabilità dei sistemi dinamici

8.1 Stabilità: definizioni e teoremi

Si consideri il sistema dinamico Σ descritto dall'equazione differenziale

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u$$

I punti di equilibrio di Σ sono caratterizzati da valori costanti nel tempo di u e y ($u_c, y_c \in \mathbb{R}$) soddisfacenti la relazione:

$$y_c = G(0)u_c, \quad u_c \in \mathbb{R}$$

$G(s)$ f.d.t. di Σ , $G(0) = \frac{b_0}{a_0}$ guadagno statico di Σ

- Per lo studio della stabilità dei punti di equilibrio di Σ si scelga l'ordine della caratteristica statica di Σ : $u_c = 0, y_c = 0$
- Il punto di equilibrio $u_c = 0, y_c = 0$ venga perturbato nell'intervallo temporale $[t_0, 0), t_0 < 0$ mediante perturbazioni introdotte con il segnale di ingresso o con modifiche delle condizioni iniziali sull'uscita.

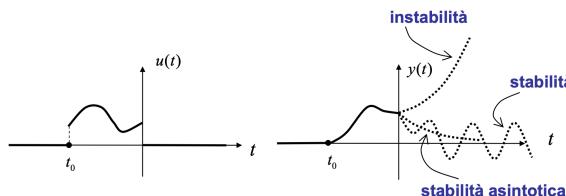


Figura 8.1

$$\begin{aligned} u(t) &= 0 \text{ per } t < t_0, \quad u(t) \neq 0 \text{ per } t \in [t_0, 0), \quad u(t) = 0 \text{ per } t \geq 0 \\ y(t) &= 0 \text{ per } t < t_0, \quad y(t) \neq 0 \text{ per } t \in [t_0, 0), \quad y(t) = y_{lib}(t) \text{ per } t \geq 0 \end{aligned}$$

Conseguenze: l'uscita è in evoluzione libera per $t \geq 0$

$$\begin{aligned} y_{lib}(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y_L(s)] \\ Y_{lib}(s) &= \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} a_i D^{i-1-j} y_- s^j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{i-1} b_i D^{i-1-j} u_- s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \end{aligned}$$

Estensione: stabilità alle perturbazioni di un punto di equilibrio $(u_c, y_c) \in \mathcal{B}$ o di un'evoluzione dinamica $(u(t), y(t)) \in \mathcal{B}$

Definizione 51 Perturbazione dell'evoluzione $(u(t), y(t)) \in \mathcal{B}$ Data la coppia (nominale) $(u(t), y(t)) \in \mathcal{B}$ una perturbazione di questa è caratterizzata da una modifica nell'intervallo $[t_0, 0)$ sia dell'ingresso sia dell'uscita determinando la coppia perturbata $(\tilde{u}(t), \tilde{y}(t)) \in \mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t) &= u(t), \quad \tilde{y}(t) = y(t) \quad t < t_0 \\ \tilde{u}(t) &\neq u(t), \quad \tilde{y}(t) \neq y(t) \quad t \in [t_0, 0) \\ \tilde{u}(t) &= u(t) \quad t \geq 0\end{aligned}$$

Proprietà: la differenza fra uscita perturbata e uscita nominale su $t \geq 0$ è una risposta libera: $\tilde{y}(t) - y(t) = y_{lib}(t), t \geq 0$

Conseguenza: la stabilità alle perturbazioni dei punti di equilibrio $(0, 0)$ o (u_c, y_c) o di un'evoluzione dinamica $(u(t), y(t)) \in \mathcal{B}$ è sempre caratterizzata dall'andamento della risposta libera $y_{lib}(t), t \geq 0$

Definizione 52 Stabilità (alle perturbazioni) di un sistema dinamico lineare

Il sistema lineare Σ si dice:

1. **STABILE** se per ogni perturbazione $y_{lib}(t)$ è limitata su $[0, +\infty)$
2. **ASINTOTICAMENTE STABILE** se è stabile ed inoltre $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_{lib}(t) = 0$ per ogni perturbazione introdotta
3. **SEMPLICEMENTE STABILE** se è stabile ed inoltre esiste una perturbazione per la quale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_{lib}(t) = y_\infty \neq 0 \vee \{\text{non esiste } \lim_{t \rightarrow +\infty} y_{lib}(t)\}$$

4. **INSTABILE** se non è stabile

Teorema 9 Poli di Σ e stabilità

Sia Σ un sistema lineare per il quale i poli coincidono con le radici del polinomio caratteristico $(a(s)$ e $b(s)$ sono coprimi fra loro).

- a. Σ è stabile se e solo se tutti i poli hanno parte reale non positiva e gli eventuali poli puramente immaginari sono semplici
- b. Σ è asintoticamente stabile se e solo se tutti i suoi poli hanno parte reale negativa
- c. Σ è semplicemente stabile se e solo se tutti i poli hanno parte reale non positiva e quelli puramente immaginari (che devono esistere) sono semplici
- d. Σ è instabile se e solo se esiste almeno un polo a parte reale positiva o un polo puramente immaginario con molteplicità maggiore di uno

NOTA: se $a(s)$ e $b(s)$ sono coprimi fra loro, il teorema di stabilità ammette la medesima formulazione sostituendo i "poli" con le "radici del polinomio caratteristico"

Esempi: Σ con f.d.t. $G(s) = b(s) / a(s)$

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+5)} \Rightarrow \Sigma \text{ è semplicemente stabile}$$

$$G(s) = \frac{(s+2)(s-5)}{s^2(s+12)(s+50)} \Rightarrow \Sigma \text{ è instabile}$$

$$G(s) = \frac{(s+2)(s-5)}{(s+7)^4(s+50)} \Rightarrow \Sigma \text{ è asintoticamente stabile}$$

$$G(s) = \frac{(s+2)(s-5)}{(s-3)(s+50)} \Rightarrow \Sigma \text{ è instabile}$$

Figura 8.2

Definizione 53 Stabilità ingresso-limitato uscita limitata (BIBO - Bounded-input bounded-output)

Σ è BIBO stabile se per ogni azione forzante limitata la corrispondente risposta forzata è anch'essa limitata.

Teorema 10 Stabilità BIBO

Σ è BIBO stabile se e solo $\int_0^\infty |g(\tau)|d\tau < +\infty$

Si assuma $a(s)$ e $b(s)$ coprimi fra loro. Vale quindi la seguente equivalenza.

Teorema 11 Equivalenza fra stabilità BIBO e stabilità asintotica

Σ è BIBO stabile se e solo se Σ è asintoticamente stabile.

8.2 Criterio di Routh

Si consideri il sistema lineare Σ descritto dall'equazione differenziale

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u$$

la sua fdt è $G(s) = b(s)/a(s)$ con $a(s)$ polinomio caratteristico di Σ

Definizione 54 Equazione caratteristica

Data il sistema Σ l'equazione $a(s) = 0$ ovvero

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

è detta equazione caratteristica di Σ

La stabilità di Σ è associata alle radici dell'equazione caratteristica.

Definizione 55 Polinomi di Hurwitz Un polinomio $a(s)$ è detto di Hurwitz se tutte le sue radici hanno parte reale negativa

Proprietà: si assume $a_n > 0$. Il polinomio $a(s)$ è hurwitziano solo se tutti i suoi coefficienti sono positivi

È possibile determinare il segno delle radici di $a(s)$ ($Re > 0, Re = 0, Re < 0$) mediante la cosiddetta tabella di Routh

n	$\gamma_{0,1}$	$\gamma_{0,2}$	$\gamma_{0,3}$	\cdots
$n-1$	$\gamma_{1,1}$	$\gamma_{1,2}$	$\gamma_{1,3}$	\cdots
$n-2$	$\gamma_{2,1}$	$\gamma_{2,2}$	$\gamma_{2,3}$	\cdots
$n-3$	$\gamma_{3,1}$	$\gamma_{3,2}$	$\gamma_{3,3}$	\cdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
\vdots				
2	$\gamma_{n-2,1}$	$\gamma_{n-2,2}$		
1	$\gamma_{n-1,1}$			
0	$\gamma_{n,1}$			

Figura 8.3: Costruzione della tabella di Routh

Regole di costruzione della T.d.R (algoritmo base)

- Le prime due righe riportano in modo alterno i coefficienti di $a(s)$:

$$\begin{aligned} \gamma_{0,1} &= a_n & \gamma_{0,2} &= a_{n-2} & \gamma_{0,3} &= a_{n-4} & \cdots \\ \gamma_{1,1} &= a_{n-1} & \gamma_{1,2} &= a_{n-3} & \gamma_{1,3} &= a_{n-5} & \cdots \end{aligned}$$

- Le righe successive vengono definite dalla regola ($k = 2, 3, \dots, n$):

$$\gamma_{k,j} = -\frac{\begin{bmatrix} \gamma_{k-2,1} & \gamma_{k-2,j+1} \\ \gamma_{k-1,1} & \gamma_{k-1,j+1} \end{bmatrix}}{\gamma_{k-1,1}} = \frac{\gamma_{k-1,1}\gamma_{k-2,j+1} - \gamma_{k-2,1}\gamma_{k-1,j+1}}{\gamma_{k-1,1}}$$

Teorema 12 Teorema di Routh

Si assume che la tabella di Routh possa essere completata. Allora ad ogni variazione di segno, degli elementi consecutivi della prima colonna, corrisponde una radice a parte reale positiva, ad ogni permanenza corrisponde una radice a parte reale negativa

Definizione 56 Criterio di Routh

Il polinomio $a(s)$ è hurwitziano se e solo se l'associata tabella di Routh può essere completata (con l'algoritmo base) e presenta nella prima colonna solo permanenze di segno

Esempio 29 .

Esempi : $a(s) = s^3 - 4s^2 + s + 6$ (radici $-1, 2, 3$)	$n_+(a) := \{\text{n. radici di } a(s) \in \mathbb{C}_+\}$ $n_-(a) := \{\text{n. radici di } a(s) \in \mathbb{C}_-\}$ $n_0(a) := \{\text{n. radici di } a(s) \in j\mathbb{R}\}$
$\begin{array}{c ccc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 6 & 0 \\ \hline 1 & \frac{-4-6}{-4} = \frac{5}{2} & 0 & \\ & -4 & & \\ 0 & 6 & & \end{array}$	
$\text{due variazioni} \Rightarrow n_+(a) = 2$ $\text{una permanenza} \Rightarrow n_-(a) = 1$	
$\begin{array}{c cccc} 4 & 2 & 3 & 10 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -7 & 10 & 0 & \\ 1 & \frac{45}{7} & 0 & & \\ 0 & 10 & & & \end{array}$	
$\text{due variazioni} \Rightarrow n_+(a) = 2$ $\text{due permanenze} \Rightarrow n_-(a) = 2$	

$a(s) = 2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10$ (radici $0.7555 \pm j1.4444, -1.0055 \pm j0.9331$)

Figura 8.4

Proprietà: durante la costruzione della tabella di Routh i termini di una stessa riga possono essere moltiplicati tutti per uno stesso coefficiente positivo senza che ciò modifichi le variazioni (o permanenze) di segno nella prima colonna.

Esempi : $a(s) = 4s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 2s + 1$	
$\begin{array}{c cccc} 4 & 4 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 7 & 3 & 0 & \text{(non si è diviso per 3)} \\ 1 & 5 & 0 & & \text{(non si è diviso per 7)} \\ 0 & 3 & & & \end{array}$	
$\text{Tutte permanenze} \Rightarrow \text{tutte radici con parte reale negativa}$	

Figura 8.5

8.3 Casi singolari nella costruzione della tabella di Routh

- a. Il primo elemento di una riga è zero
- b. Tutti gli elementi di una riga sono nulli

Prosecuzione della tabella nel caso a.

1. Metodo ϵ (è obsoleto: algoritmamente complesso e non sempre risolutivo)
2. Metodo di Benidir-Picinbono: algoritmamente semplice e sempre risolutivo

Definizione 57 *Metodo di Benidir-Picinbono*

Ogni riga, non nulla, che inizia con p zeri sommata con la riga da questa ottenuta moltiplicandola per $(-1)^p$ e traslandola verso sinistra p posizioni. La tabella di Routh viene poi continuata ed interpretata nel modo usuale

Prosecuzione della tabella nel caso b.

Tutti gli elementi di una riga sono nulli: quando il polinomio $a(s)$ non ha radici nell'origine ($a_0 \neq 0$) questo accade sempre su una riga dispari.

Esempio :	$a(s) = s^3 + 3s - 2 = 0$
3	1 3 0
2'	0 -2 0
2''	2 0 0
2	2 -2 0
1	4 0
0	-2

Figura 8.6

$$\begin{array}{c|cccccc} 2i & \gamma_{n-2i,1} & \gamma_{n-2i,2} & \gamma_{n-2i,3} & \cdots & \gamma_{n-2i,i+1} & 0 \\ 2i-1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}$$

Figura 8.7

Definizione 58 *Polinomio ausiliario* $\beta(s)$

$$\beta(s) = \gamma_{n-2i,1}s^{2i} + \gamma_{n-2i,2}s^{2i-2} + \gamma_{n-2i,3}s^{2i-4} + \dots + \gamma_{n-2i,i}s^2 + \gamma_{n-2i,i+1} \quad (8.1)$$

L'equazione ausiliaria è quindi $\beta(s) = 0$

Proprietà:

1. Il polinomio ausiliario $\beta(s)$ divide $a(s)$. Quindi esiste un polinomio $\alpha(s)$ tale che $a(s) = \alpha(s)\beta(s)$
2. La prima parte della tabella (fino alla riga $2i$) dà informazioni sul segno delle radici di $\alpha(s)$

Proprietà (simmetria delle radici del polinomio ausiliario): le radici del polinomio ausiliario $\beta(s)$ sono disposte simmetricamente rispetto all'origine del piano complesso.

Corollario: l'equazione ausiliaria $\beta(s) = 0$ ha tante radici a parte reale negativa quante sono quelle a parte reale positiva e può anche presentare radici puramente immaginarie.

Come proseguire la costruzione della tabella nel caso b:

1. Si deriva il polinomio ausiliario
2. I coefficienti del polinomio così ottenuto sostituiscono gli zeri della riga nulla
3. Si prosegue la tabella con l'algoritmo usuale: in questo caso però le permanenze corrispondono anche a radici puramente immaginarie

8.3.1 Interpretazione della tabella di Routh nel caso di singolarità completa (caso b)

1. La prima colonna della tabella dalla riga n alla riga $2i$ dà informazioni sul segno delle radici di $\alpha(s)$: una variazione \rightarrow una radice a parte reale positiva, una permanenza \rightarrow una radice a parte reale negativa
2. La prima colonna della tabella dalla riga $2i$ alla riga 0 dà informazioni sul segno delle radici di $\beta(s)$: una variazione \rightarrow una radice a parte reale positiva, una permanenza \rightarrow una radice a parte reale negativa oppure una radice puramente immaginaria.

La simmetria delle radici di $\beta(s)$ (pol. ausiliario) permette di stabilire il segno della parte reale di tutte le radici

Esempio : $a(s) = s^6 + s^5 - 2s^4 - 3s^3 - 7s^2 - 4s - 4$

$$\begin{array}{r|cccccc} 6 & 1 & -2 & -7 & -4 & 0 \\ 5 & 1 & -3 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & -4 & 0 & & \text{polinomio ausiliario } \beta(s) = s^4 - 3s^2 - 4 \\ \hline 3 & 2 & -3 & 0 & 0 & & D\beta(s) = 4s^3 - 6s \quad (\text{si è diviso per 2}) \\ 2 & -3 & -8 & 0 & & & \\ 1 & -25 & 0 & & & & \\ 0 & -8 & & & & & \end{array}$$

$n_+(a) = n_+(\alpha) + n_+(\beta) = 0 + 1 = 1$
 $n_-(a) = n_-(\alpha) + n_-(\beta) = 2 + 1 = 3$
 $n_0(a) = \deg(\beta) - 2 \cdot n_+(\beta) = 4 - 2 \cdot 1 = 2$

Figura 8.8

Capitolo 9

Analisi armonica e diagrammi di Bode

9.1 L'analisi armonica dei sistemi lineari

Esempio 30 Applichiamo il segnale armonico $u(t) = 2 \sin(t)$, $t \leq 0$ ad un sistema con fdt $G(s) = \frac{10}{s+1}$

$$Y(s) = \frac{10}{s+1} \mathcal{L}[2 \sin(t)] = \frac{10}{s+1} \cdot \frac{2}{s^2 + 1} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s-j} + \frac{\bar{k}_2}{s+j}$$

$$k_i = 10, \quad k_2 = \frac{10}{j(j+1)}$$

$$y(t) = 10e^{-t} + 2 \frac{10}{\sqrt{2}} \cos \left(t + \arg \left(\frac{10}{j(j+1)} \right) \right) = 10e^{-t} + 10\sqrt{2} \cos \left(t - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

Quando $t \rightarrow +\infty$: $y_\infty(t) = 10\sqrt{2} \sin \left(t - \frac{\pi}{4} \right)$

Più in generale consideriamo un sistema dinamico Σ asintoticamente stabile, descritto dall'equazione differenziale

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u$$

($a(s)$ e $b(s)$ siano coprimi fra loro). La fdt è $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$. Fenomeno di risposta armonica: col sistema

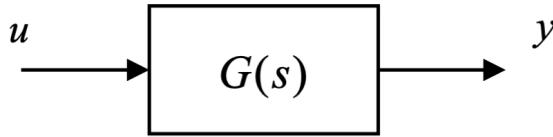


Figura 9.1

in quiete, all'istante $t = 0_-$, si applichi $u(t) = U \sin(\omega t)$, $\omega \leq 0$, $U > 0$. La risposta forzata di Σ per $t \rightarrow \infty$ assume la forma:

$$y_\infty(t) = Y(\omega) \sim (\omega t + \varphi(\omega)) \quad (9.1)$$

Definizione 59 Funzione di risposta armonica

$$F : \mathbb{R}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\omega \rightarrow F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{U} e^{j\varphi(\omega)} \quad (9.2)$$

In virtù della linearità di Σ , $F(\omega)$ è indipendente da U

Teorema 13 Teorema di analisi armonica

Sia Σ un sistema asintoticamente stabile con fdt $G(s)$ razionale.

La risposta forzata di Σ ad un segnale armonico all'ingresso è ancora, a regime ($t \rightarrow +\infty$), un segnale armonico con la stessa frequenza dell'ingresso. La funzione di risposta armonica associata soddisfa la relazione:

$$F(\omega) = G(j\omega) \quad (9.3)$$

La funzione di risposta armonica $F(\omega)$ è un modello matematico di Σ (alternativo all'equazione differenziale, fdt, risposta all'impulso, risposta al gradino, ecc.)

$F(\omega)$ può essere determinata sperimentalmente.

Sfruttando la relazione $F(\omega) = G(j\omega)$ la funzione di risposta armonica è definibile anche per i sistemi non asintoticamente stabili.

Proprietà: sia dato un sistema dinamico con funzione di trasferimento $G(s)$. Allora:

$$(U \sin(\omega t), U|G(j\omega)| \sin(\omega t + \arg G(j\omega))) \in \mathcal{B} \quad (9.4)$$

Per ogni $U \leq 0$ e $\omega \leq 0$

Relazioni fra la risposta armonica $G(j\omega)$ e la risposta all'impulso $g(t)$

$$\begin{cases} G(j\omega) = \int_{0-}^{+\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt \\ g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \end{cases} \quad (9.5)$$

9.2 Guadagni del sistema lineare Σ

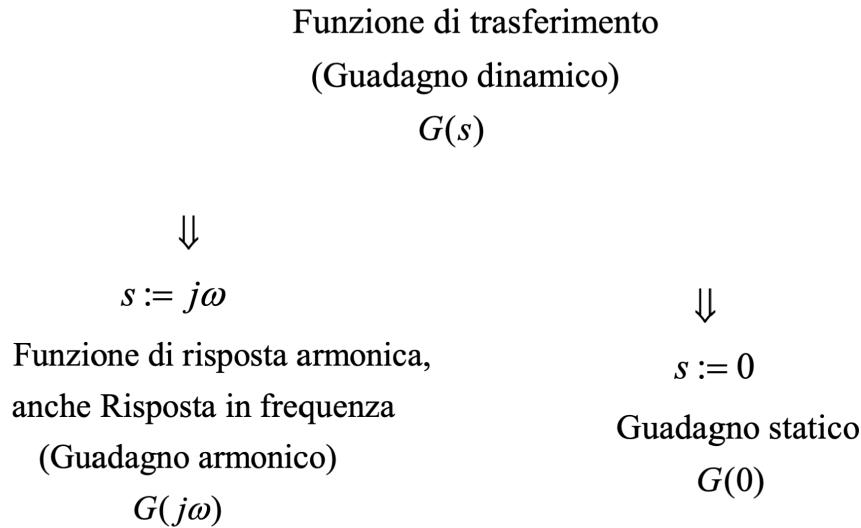


Figura 9.2

9.3 I diagrammi di Bode

I diagrammi di Bode sono diagrammi (cartesiani) logaritmici della risposta armonica

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= |G(j\omega)|e^{j \arg G(j\omega)} \\ \ln G(j\omega) &= \ln |G(j\omega)| + j \arg G(j\omega) = \alpha + j\beta \\ \alpha &= \ln |G(j\omega)| \approx 2,3026 \log_{10} |G(j\omega)| \\ \beta &= \arg G(j\omega) \end{aligned}$$

- **Diagramma delle ampiezze o dei moduli o diagramma α :** riporta il logaritmo del modulo della r.a. in funzione del logaritmo della pulsazione ω
- **Diagramma delle fasi o degli argomenti o diagramma β :** riporta l'argomento della r.a. in funzione del logaritmo della pulsazione ω

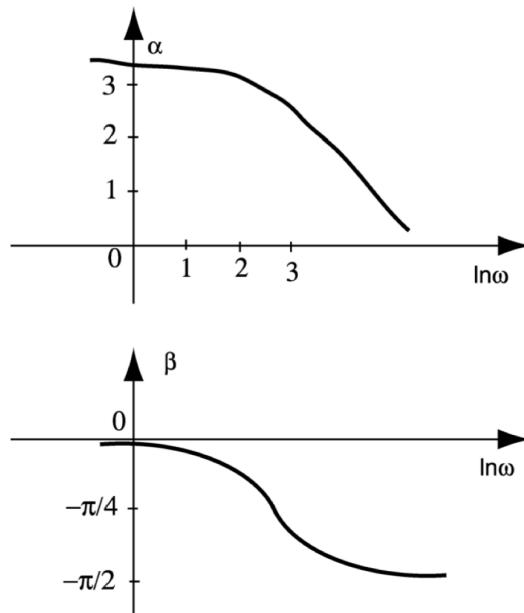
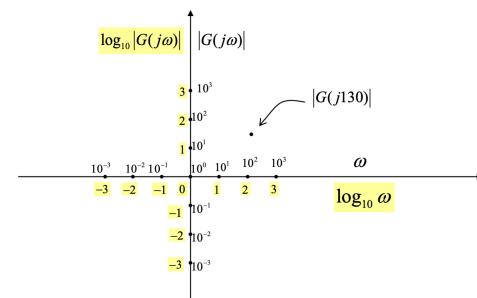


Figura 9.3

- Usualmente nelle ascisse vengono riportati direttamente i valori delle pulsazioni utilizzando una scala logaritmica in base 10
- Analogamente, per i diagrammi dei moduli, nelle ordinate vengono riporatti direttamente i valori dei moduli (utilizzando una scala logaritmica in base 10)

Costruzione del grafico logaritmico di $|G(j\omega)|$ (diagramma del modulo)



Esempio:

a $|G(j130)| = 21$ corrisponde il punto $(\log_{10} 130, \log_{10} 21) \approx (2.114, 1.322)$
delle scale lineari ed il punto $(130, 21)$ delle scale logaritmiche.

Figura 9.4

Esempio : $G(j\omega) = 50 \frac{\left(1 + j \frac{\omega}{50}\right)}{\left(1 + j \frac{\omega}{10}\right)\left(1 + j \frac{\omega}{100}\right)}$

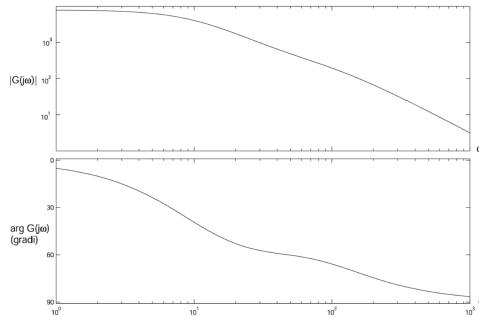


Figura 9.5

Alternativamente, per i diagrammi dei moduli, si riporta nelle ordinate il modulo della r.a. espresso in decibel (in questo caso, la scala delle ordinate è quella solita, cioè lineare):

$$dB = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$$

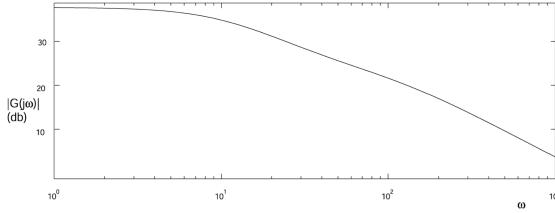


Figura 9.6

In generale, i decibel della r.a. non rappresentano una grandezza adimensionale
Vantaggi della rappresentazione logaritmica:

1. È possibile rappresentare grandezze varabili in campi molto estesi
2. È possibile sommare i diagrammi di sistemi in cascata
3. È possibile costruire i diagrammi come sommare i diagrammi elementari

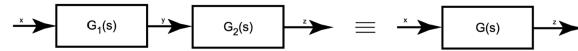


Figura 9.7

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) \quad \text{e quindi } G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega)$$

$$\begin{cases} \ln |G(j\omega)| = \ln |G_1(j\omega)| + \ln |G_2(j\omega)| \\ \arg G(j\omega) = \arg G_1(j\omega) + \arg G_2(j\omega) \end{cases}$$

9.4 Rappresentazioni e parametri della f.d.t

Una f.d.t razionale $G(s) = b(s)/a(s)$ si può scrivere nella **forma (standard) con i polinomi monici**:

$$G(s) = K_1 \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (9.6)$$

o nella **forma (standard)** con poli e zeri:

$$G(s) = K_1 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (9.7)$$

K_1 = costante di trasferimento

Forma (standard) con le costanti di tempo:

$$G(s) = K \frac{(1 + \tau'_1 s)(1 + \tau'_2 s) \dots \left(1 + 2\delta'_1 \frac{s}{\omega'_{n1}} + \frac{s^2}{\omega'^2_{n1}}\right) \dots}{s^h (1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \dots \left(1 + 2\delta_1 \frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega^2_{n1}}\right) \left(1 + 2\delta_2 \frac{s}{\omega_{2n}} + \frac{s^2}{\omega^2_{2n}}\right) \dots} \quad (9.8)$$

dove

$$K = K_1 \frac{\omega'^2_{n1} \omega'^3_{n2} \dots \tau_1 \tau_2 \dots}{\omega^2_{n1} \omega^2_{n2} \dots \tau'_1 \tau'_2 \dots}$$

- se $h = 0$ (Σ di tipo zero), K = guadagno statico
- se $h = 1$ (Σ di tipo uno), K = guadagno di velocità
- se $h = 2$ (Σ di tipo due), K = guadagno di accelerazione

Rappresentazione della r.a. con le costanti di tempo:

$$G(j\omega) = K \frac{(1 + \tau'_1 j\omega)(1 + \tau'_2 j\omega) \dots \left(1 + 2\delta'_1 \frac{j\omega}{\omega'_{n1}} + \frac{j\omega^2}{\omega'^2_{n1}}\right) \dots}{j\omega^h (1 + \tau_1 j\omega)(1 + \tau_2 j\omega) \dots \left(1 + 2\delta_1 \frac{j\omega}{\omega_{n1}} + \frac{j\omega^2}{\omega^2_{n1}}\right) \left(1 + 2\delta_2 \frac{j\omega}{\omega_{2n}} + \frac{j\omega^2}{\omega^2_{2n}}\right) \dots} \quad (9.9)$$

Diagrammi elementari associati a:

1. K
2. $(j\omega)^{-h}$
3. $(1 + \tau j\omega)^{\pm 1}$
4. $\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2\delta \frac{j\omega}{\omega_n}\right)^{\pm 1}$

9.5 Parametri caratteristici della risposta armonica

1. Pulsazione di risonanza ω_R : $\omega_R = \arg \max_{\omega \in \mathbb{R}_{\leq 0}} |G(j\omega)|$
2. Picco di risonanza M_R : $M_R = \frac{|G(j\omega_R)|}{|G(j0)|}$ oppure $M_R = |G(j\omega_R)|$
3. Larghezza di banda B_ω : $B_\omega = \omega_{t2} - \omega_{t1}$; $\omega_{t2} > \omega_{t1} \leq 0$
 ω_{t2} = pulsazione di taglio superiore, ω_{t1} = pulsazione di taglio inferiore
 con una r.a. del tipo passa-basso: $\omega_{t1} = 0$, $\omega_{t2} \ni |G(j\omega_{t2})| = \frac{|G(j0)|}{\sqrt{2}}$
 con una r.a. del tipo passa-banda:

$$\omega_{t1} \ni |G(j\omega_{t1})| = \frac{|G(j\omega_R)|}{\sqrt{2}} \quad e \quad \omega_{t1} < \omega_R$$

$$\omega_{t2} \ni |G(j\omega_{t2})| = \frac{|G(j\omega_R)|}{\sqrt{2}} \quad e \quad \omega_{t2} < \omega_R$$

1. $G(j\omega) = K$

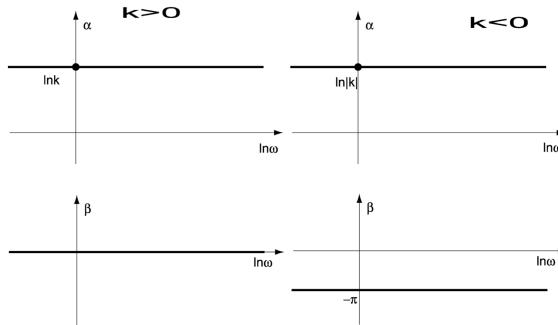


Figura 9.8

2. $G(j\omega) = (j\omega)^{-h} : \quad \ln(j\omega)^{-h} = -h \ln j\omega = -h (\ln |\omega| + j \frac{\pi}{2}) = -h \ln \omega - j \frac{\pi}{2} h$

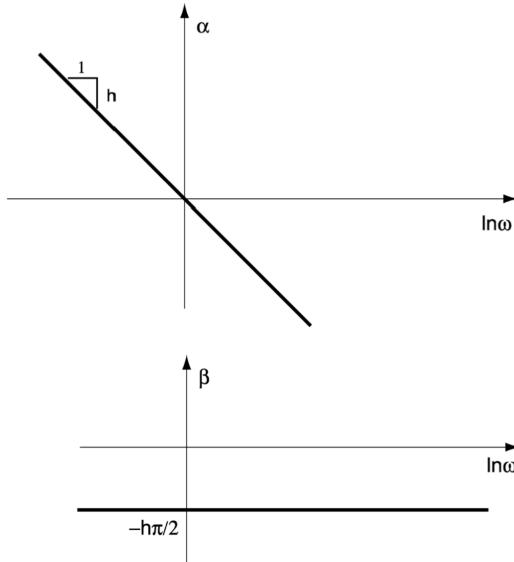


Figura 9.9

3.

$$\begin{aligned}
 G(j\omega) &= (1 + j\omega\tau)^{-1} \\
 \ln G(j\omega) &= \ln \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} + j(-\arctan \omega\tau) \\
 \text{Se } \omega << \frac{1}{\tau} &\Rightarrow \alpha \approx 0 \\
 \text{Se } \omega >> \frac{1}{\tau} &\Rightarrow \alpha \approx \ln \frac{1}{\omega\tau} \\
 \alpha &\approx \ln \frac{1}{\omega} + \ln \frac{1}{\tau} = -\ln \omega + \ln \frac{1}{\tau}
 \end{aligned}$$

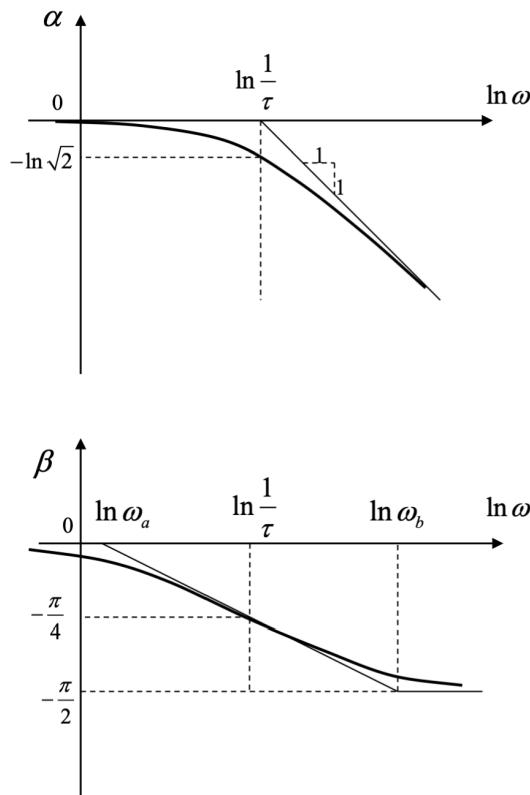


Figura 9.10

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau} = \text{pulsazione d'angolo}$$

Determinazione pulsazioni ω_a e ω_b : $\beta = -\arctan \omega \tau$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\beta}{d(\ln \omega)} \right|_{\omega=\omega_0} &= \left. \frac{d\beta}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{d(\ln \omega)} \right|_{\omega=\omega_0} = -\frac{\tau}{1 + \omega_0^2 \tau^2} \omega_0 = -\frac{1}{2} \\ \frac{\pi/4}{\ln \omega_0 - \ln \omega_a} &= \frac{\pi/4}{\ln \omega_b - \ln \omega_0} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln \frac{\omega_0}{\omega_a} = \ln \frac{\omega_b}{\omega_0} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\omega_0}{\omega_a} = \frac{\omega_b}{\omega_0} = e^{\frac{\pi}{2}} \simeq 4,81 \\ \begin{cases} \omega_a = \frac{\omega_0}{4,81} \\ \omega_b = \omega_0 \cdot 4,81 \end{cases} \quad & \begin{cases} \ln \omega_a = \ln \omega_0 - \ln 4,81 \\ \ln \omega_b = \ln \omega_0 + \ln 4,81 \end{cases} \end{aligned}$$

I diagrammi di $G(j\omega) = 1 + j\omega\tau$ si ottengono per simmetria ribaltando i precedenti rispetto all'asse delle ascisse

Se $\tau < 0$, si ribalta il diagramma degli argomenti

$$4. G(j\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2\delta \frac{j\omega}{\omega_n}\right)^{-1}$$

$$\ln G(j\omega) = \ln \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\delta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} + j\beta$$

$$\beta = \begin{cases} -\arctan \frac{2\delta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} & \omega < \omega_n \\ -\frac{\pi}{2} & \omega = \omega_n \\ -\arctan \frac{2\delta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} - \pi & \omega > \omega_n \end{cases}$$

Se $\omega \ll \omega_n \Rightarrow \alpha \approx 0$

Se $\omega \gg \omega_n \Rightarrow \alpha \approx \ln \frac{1}{\omega^2/\omega_n^2} = \ln \frac{\omega_n^2}{\omega^2} = \ln \omega_n^2 - \ln \omega^2 = -2 \ln \omega + 2 \ln \omega_n$

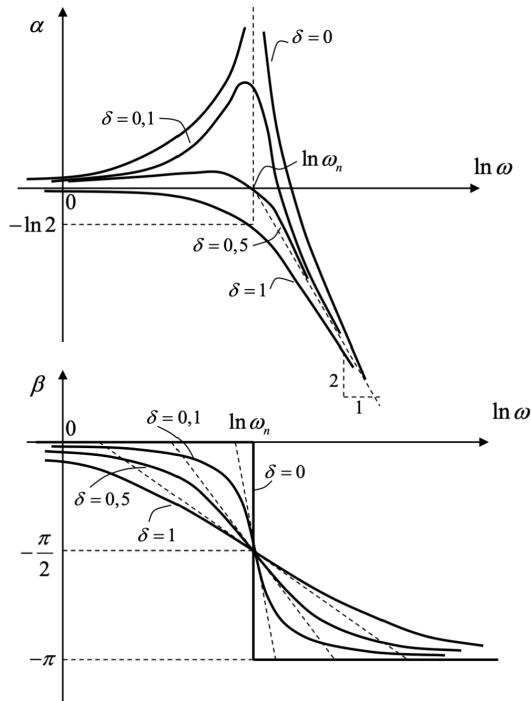


Figura 9.11

$$\begin{cases} \ln \omega_a = \ln \omega_n - \ln 4,811^\delta \\ \ln \omega_b = \ln \omega_n + \ln 4,811^\delta \end{cases}$$

Determinazione del picco di risonanza ω_R :

$$u = \frac{\omega}{\omega_n}$$

$$\min_{u>0} [(1-u^2)^2 + 4\delta^2 u^2]$$

$$2(1-u^2)(-2u) + 8\delta^2 u = 0$$

$$-4u + 4u^3 + 8\delta^2 u = 0 \leftrightarrow u^2 = 1 - 2\delta^2 \leftrightarrow u = \sqrt{1 - 2\delta^2}$$

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2}$$

c'è risonanza per $1 - 2\delta^2 > 0$, $\delta < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$

$$Quindi M_R = \frac{|G(j\omega_R)|}{|G(j0)|} = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$$

$$\begin{cases} \delta \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ c'è risonanza} \\ \delta \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right] \text{ non c'è risonanza} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta \in [0, \frac{1}{2}] \text{ il d. } \alpha \text{ è tutto al di sopra del d. asintotico} \\ \delta \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ il d. } \alpha \text{ interseca l'asse delle pulsazioni a sinistra di } \ln \omega_n(\omega_n) \\ \delta \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right] \text{ il d. } \alpha \text{ è tutto al di sotto del d. asintotico} \end{cases}$$

- Perché il diagramma α (dei moduli) diverge per $\delta = 0$ ed $\omega = \omega_n$?

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)} = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + \omega_n^2)}$$

$$u(t) = U \sin \omega_n t, \quad U(s) = \frac{U\omega_n}{s^2 + \omega_n^2}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + \omega_n^2)} \cdot \frac{U\omega_n}{s^2 + \omega_n^2} = \frac{U\omega_n^3}{(s^2 + \omega_n^2)^2} = \frac{U\omega_n^3}{(s - j\omega_n)^2(s + j\omega_n)^2} =$$

$$= \frac{k_{11}}{(s - j\omega_n)^2} + \frac{k_{12}}{s - j\omega_n} + \frac{\bar{k}_{11}}{(s + j\omega_n)^2} + \frac{\bar{k}_{12}}{s + j\omega_n} = \left(\frac{k_{12}}{s - j\omega_n} + \frac{\bar{k}_{12}}{s + j\omega_n} \right) + \left(\frac{k_{11}}{(s - j\omega_n)^2} + \frac{\bar{k}_{11}}{(s + j\omega_n)^2} \right)$$

quindi $\exists c_1, c_2, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$ $\exists y(t) = c_1 \sin (\omega_n t + \varphi_1) + c_2 t \sin (\omega_n t + \varphi_2)$

Figura 9.12

Larghezza di banda B_ω (come filtro passa - basso):

$$B_\omega = \omega_n \sqrt{(1 - 2\delta^2) + \sqrt{(1 - 2\delta^2)^2 + 1}}$$

I diagrammi di $G(j\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2\delta \frac{j\omega}{\omega_n}$ si ottengono ribaltando i precedenti rispetto all'asse delle ascisse.

Se $\delta < 0$, si ribalta il diagramma delle fasi