

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle  
Telecomunicazioni

**Lezione n. 1 di Fondamenti di Controlli Automatici**  
**prof. Aurelio Piazzì**

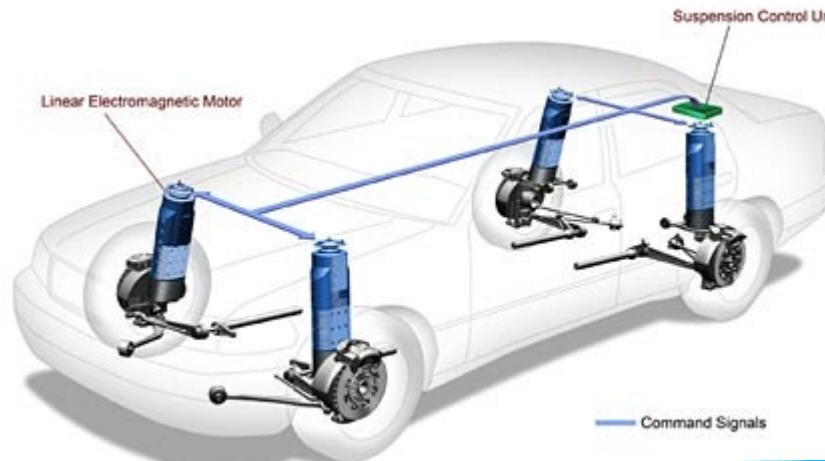
**Il controllo attivo di un processo**

Università degli Studi di Parma – a.a. 2020-2021

- Analisi e sintesi di un **controllo attivo** (sistema automatico di controllo)
- Generalità sul concetto di **sistema dinamico**
- I principi del controllo attivo: azione diretta (**feedforward**) e retroazione (**feedback**)

- Introduzione ai metodi di analisi e sintesi per il **controllo attivo** di un **processo**
- **Processo** = evoluzione nel tempo di ciò che caratterizza un **sistema** (fisico o non)
- **Controllo attivo**: strategia di controllo che prevede un'azione di comando esercitata sul processo

# Esempi di controllo attivo

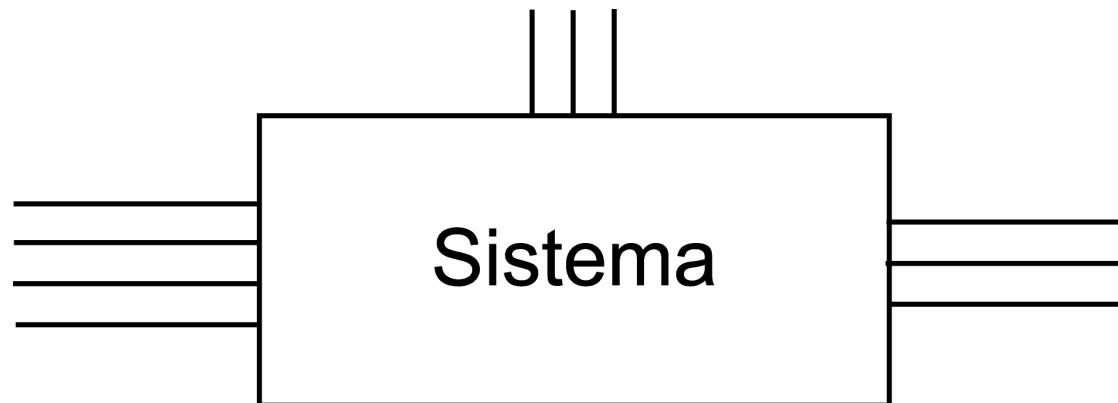


- Il controllo (attivo) risolve il problema di imporre una modalità di funzionamento desiderato ad un processo assegnato (il sistema controllato).
- **Modalità di funzionamento desiderato:** una variabile (scalare o vettoriale) del processo coincida con una variabile (sca. o vett.) preassegnata (segnale di riferimento o set-point):  
**Variabile controllata = Segnale di riferimento**
- Segnale di riferimento costante  $\Rightarrow$  **problema di regolazione**
- Segnale di riferimento variabile  $\Rightarrow$  **problema di asservimento**  
(*tracking problem*)

# Generalità sul concetto di sistema

- (Possibile) definizione di **Sistema**:

Un sistema è un complesso, normalmente costituito da più elementi interconnessi, in cui si possono distinguere grandezza soggette a variare nel tempo (le **variabili**).



- Def. di **Segnale**: Le funzioni che rappresentano l'andamento delle variabili nel tempo si dicono segnali.

Terminologia per le variabili:

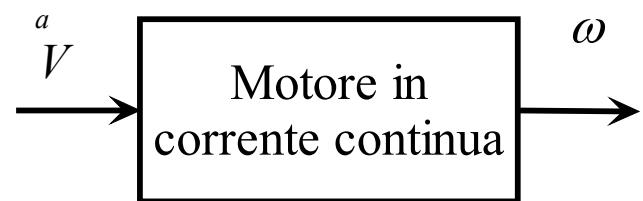
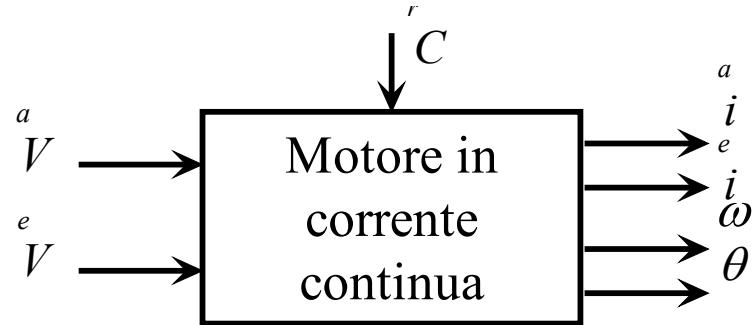
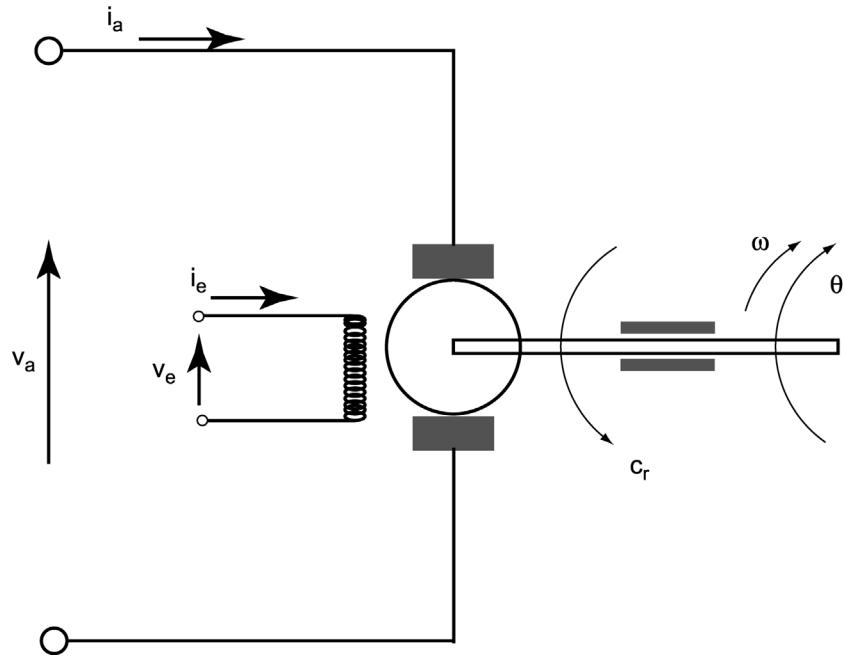
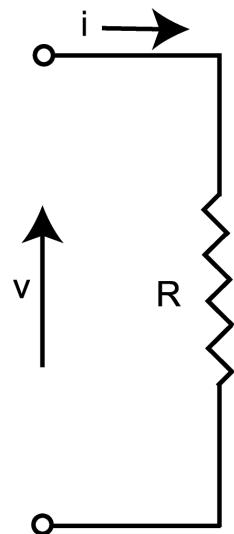
- Variabili controllate (o regolate)
- Variabile di riferimento
- Variabili manipolabili (o di controllo)
- Variabili non manipolabili (o disturbi)
- Variabili osservate (o misurate)

Nota: tratteremo solo segnali e sistemi deterministici ...

- La classificazione fondamentale delle variabili di un sistema le distingue in **variabili indipendenti** (**ingressi o cause**) e in **variabili dipendenti** (**uscite o effetti**).
- Questa classificazione porta al concetto di **sistema orientato**:



Esempi: una resistenza elettrica, un motore in corrente continua,...

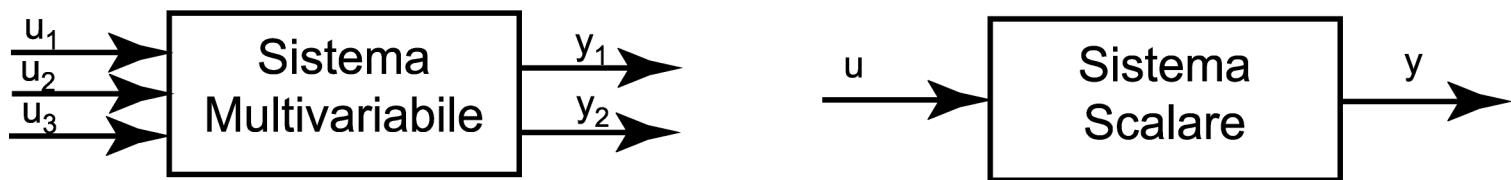


- def. di **Modello Matematico**:

Si dice m. m. la descrizione di un sistema, per esempio con equazioni e parametri, che permette di determinare i segnali delle uscite noti i segnali degli ingressi e le (eventuali) condizioni iniziali.

Esempi: equazioni differenziali, modelli operazionali, modelli frequenziali, modelli di stato,...

- Sistemi multivariabili (MIMO) e scalari (SISO):



Ci occuperemo di sistemi scalari a tempo continuo  
(ed anche a tempo discreto):  $u(t) \in \mathbb{R}$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  ( $t \in \mathbb{Z}$ )

- def. **Sistema statico**

Un sistema è detto statico (o puramente algebrico) quando l'uscita al tempo  $t$  dipende esclusivamente dall'ingresso al medesimo tempo  $t$ .

$$\left[ \exists f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \exists \quad y(t) = f(u(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R} \right]$$

Un sistema statico è descritto da  $y = f(u)$ .

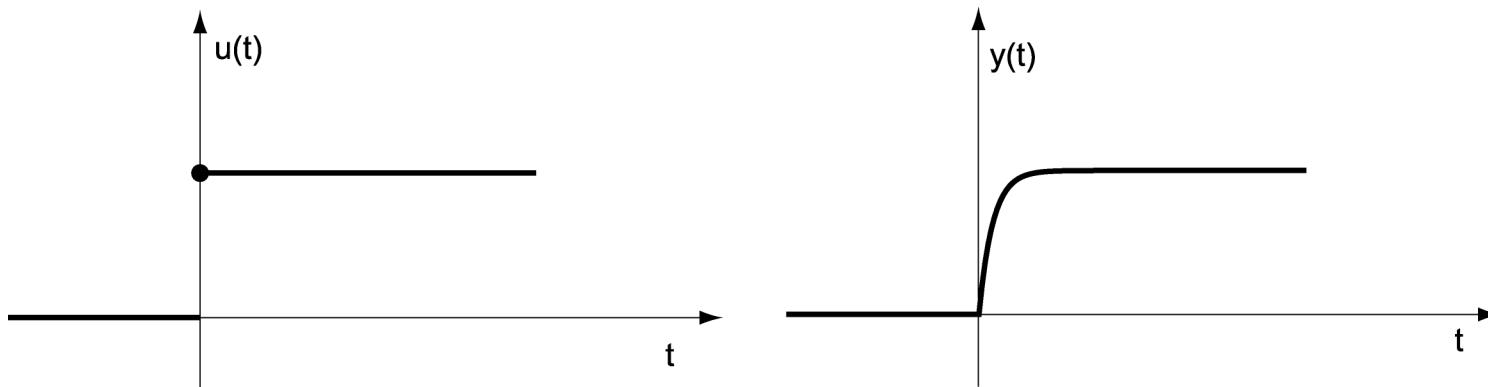
- def. **Sistema dinamico**

Un sistema è detto dinamico quando l'uscita al tempo  $t$  dipende dal segnale dell'ingresso sull'intervallo  $(-\infty, t]$ .

$$\left[ \exists F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y} \quad \exists \quad y(t) = F\left(u(\cdot)|_{(-\infty, t]}\right) \quad \forall t \in \mathbb{R} \right]$$

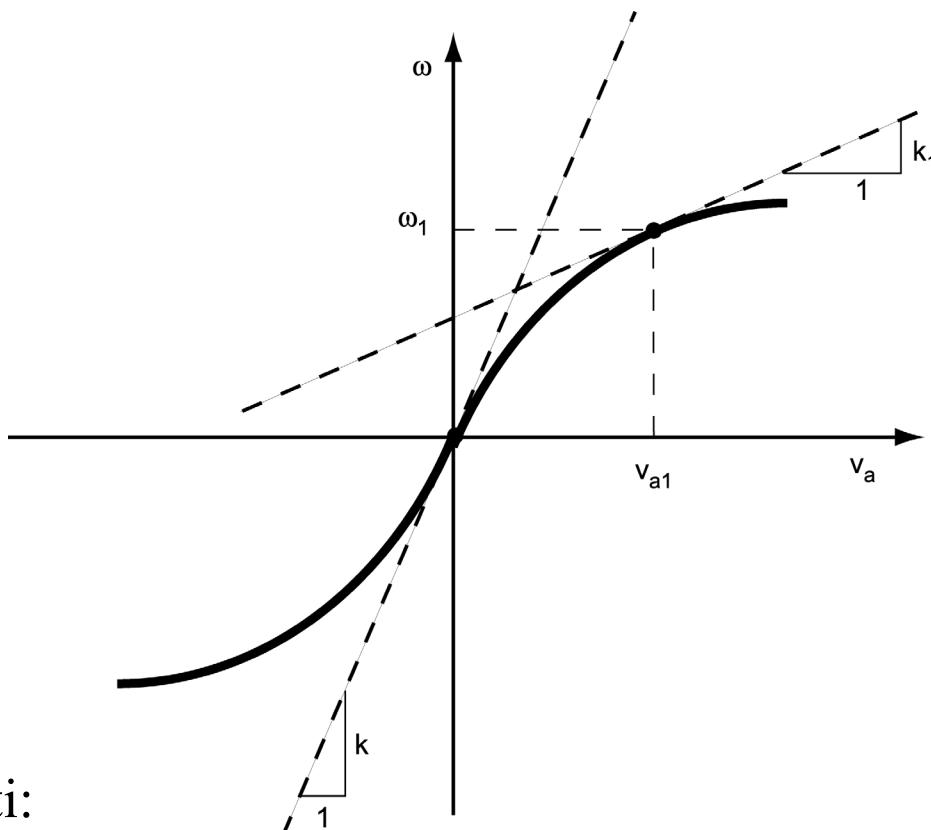
Sono sistemi con memoria: sono descrivibili con un funzionale o, più comunemente, da una equazione differenziale...

Esempio del comportamento di un sistema dinamico:



Per i sistemi dinamici si introducono i concetti di **sistema in quiete** (o in equilibrio) e di **sistema in condizioni asintotiche** (o stazionarie) o sistema a regime...

Esempio - Modello statico di un motore in corrente continua in condizioni stazionarie:  $\omega = f(V_a)$ , è la cosiddetta caratteristica statica del motore in c.c.



Modelli linearizzati:

in un intorno dell'origine  $(0,0)$ :  $\omega = k \cdot V_a$ ,  $k := \frac{df}{dV_a} \Big|_{V_a=0}$

in un intorno di  $(V_{a1}, \omega_1)$ :  $\omega' = k_1 \cdot V'_a$ ,  $k_1 := \frac{df}{dV_a} \Big|_{V_a=V_{a1}}$ ,  $\omega' := \omega - \omega_1$ ,  $V'_a := V_a - V_{a1}$

## def. : $\mathcal{B}$ , insieme dei behaviors o behavior

$\mathcal{B}$  è l'insieme di tutte le possibili coppie causa-effetto associate ad un sistema:

$$\mathcal{B} := \{(u(t), y(t)) : y(t) \text{ è l'uscita del sistema corrispondente all'ingresso } u(t), \quad t \in (-\infty, +\infty)\}$$

$u(t)$  e  $y(t)$  tipicamente appartengono agli spazi funzionali delle funzioni continue o differenziabili a tratti...

## def. Linearità

Un sistema si dice lineare quando soddisfa la proprietà di sovrapposizione degli effetti:  $\forall (u_1, y_1), (u_2, y_2) \in \mathcal{B}$  e  $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$

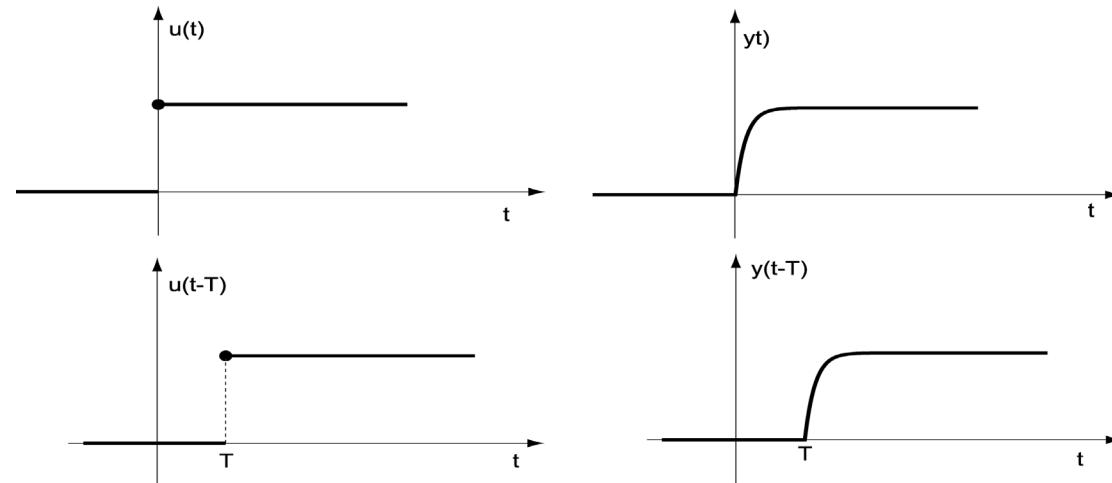
$$\alpha_1(u_1, y_1) + \alpha_2(u_2, y_2) := (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \in \mathcal{B}$$

## def. Stazionarietà

Un sistema si dice stazionario (invariante nel tempo) se  $\forall T \in \mathbb{R}$ :

$$(u(t), y(t)) \in \mathcal{B} \Rightarrow (u(t-T), y(t-T)) \in \mathcal{B}$$

Esempio:



- Ambito di studio: sistemi dinamici lineari, stazionari e a tempo continuo.

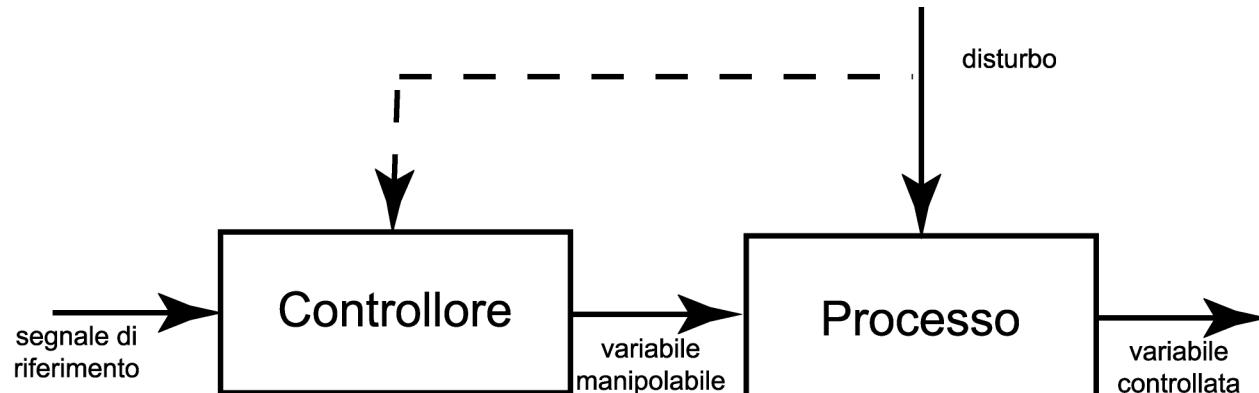
# Controllo ad azione diretta e in retroazione

Il controllo (attivo) è distinguibile in

- controllo ad **azione diretta (*feedforward*)** o ad anello aperto o in catena aperta;
- controllo in **retroazione (*feedback*)** o ad anello chiuso o in catena chiusa.

**Controllo ad Azione diretta** (*controllo feedforward*): quando l'azione di comando dipende da

1. obiettivo perseguito (p.e. segnale di riferimento)
2. informazioni sul modello del sistema controllato
3. eventualmente, ingressi agenti sul sistema contr. (disturbi)



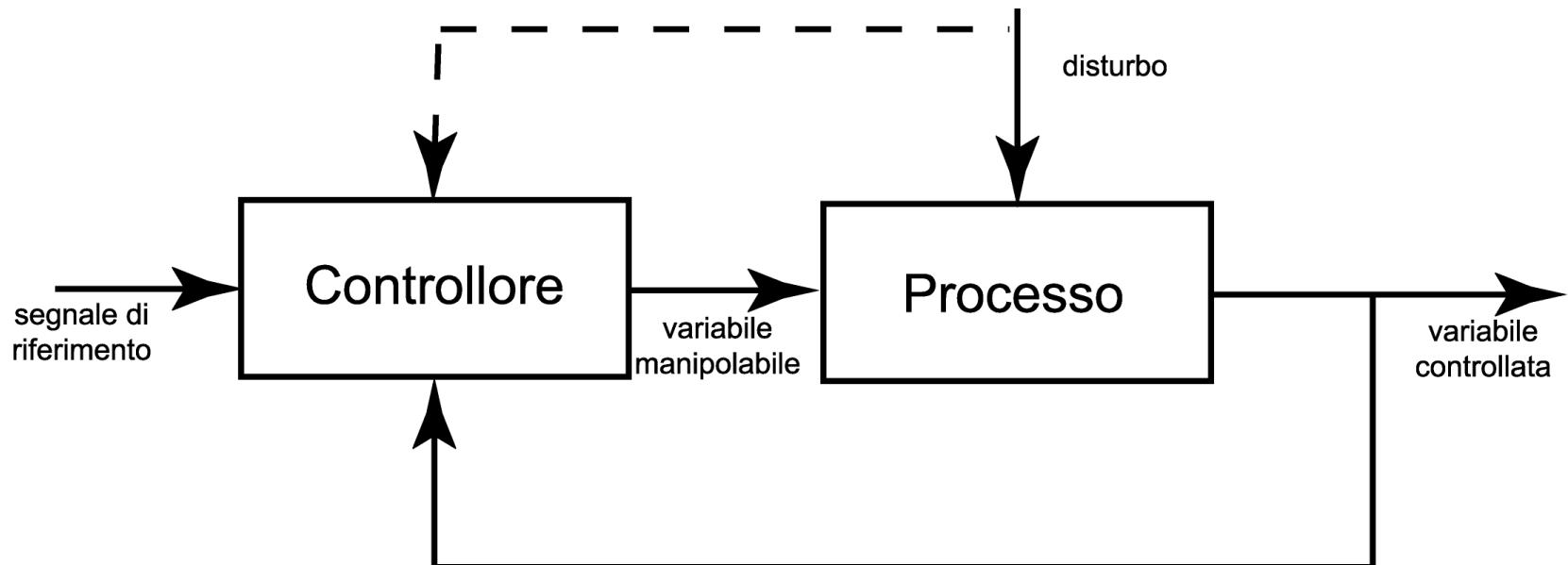
Schema a blocchi di un sistema di controllo ad azione diretta

# Controllo in Retroazione

(*controllo feedback o controllo feedforward/feedback*):

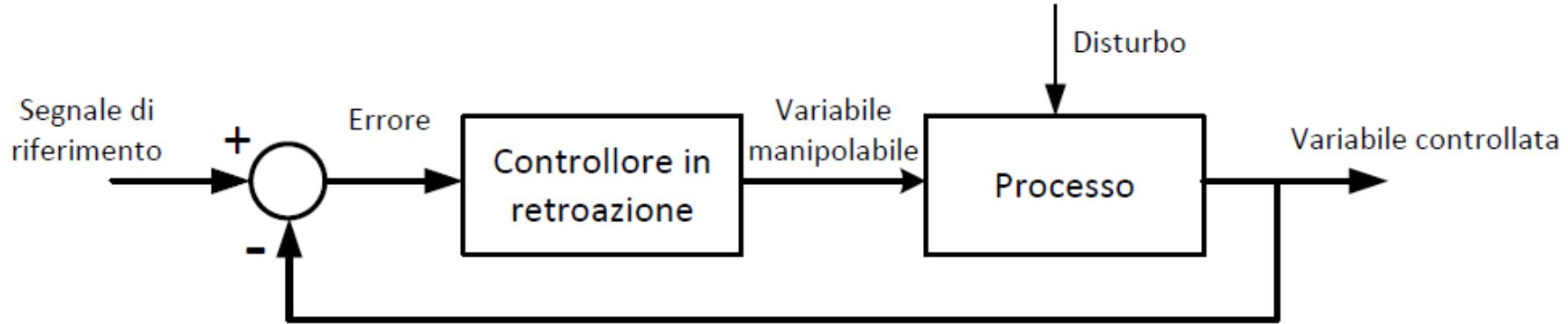
quando l'azione di comando dipende da

1. obiettivo perseguito (p.e. segnale di riferimento)
2. informazioni sul modello del sistema controllato
3. eventualmente, ingressi agenti sul sistema contr. (disturbi)
4. **variabile controllata**

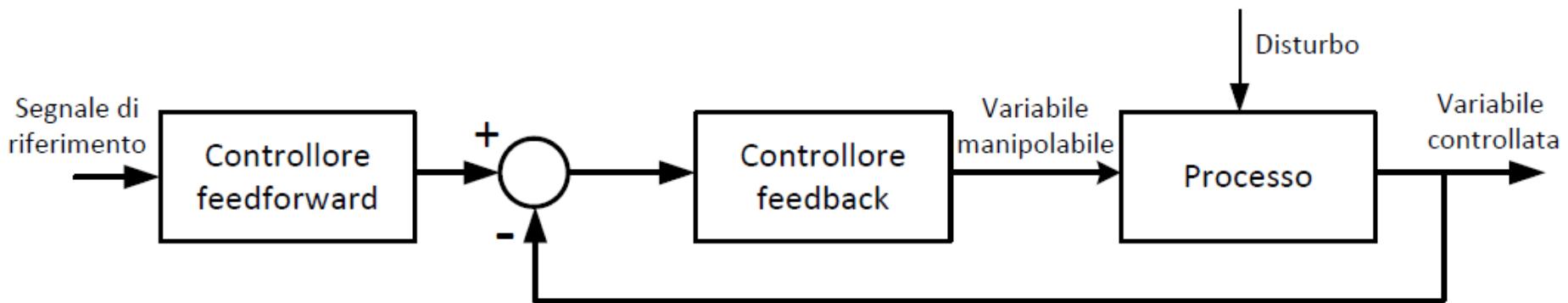


Schema a blocchi di sistema di controllo in retroazione

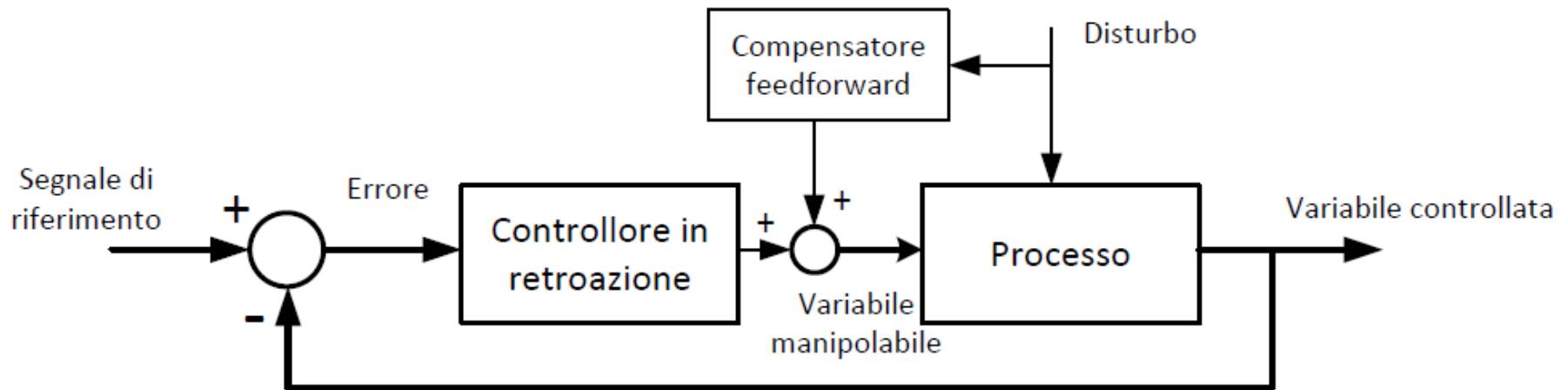
Lo schema generale di controllo in retroazione comprende i seguenti schemi:



Controllo feedback sull'errore di inseguimento



Controllo feedforward/feedback a due gradi di libertà (*two-degrees-of-freedom control, Horowitz 1963*)



Controllo feedback sull'errore di inseguimento con compensazione feedforward del disturbo

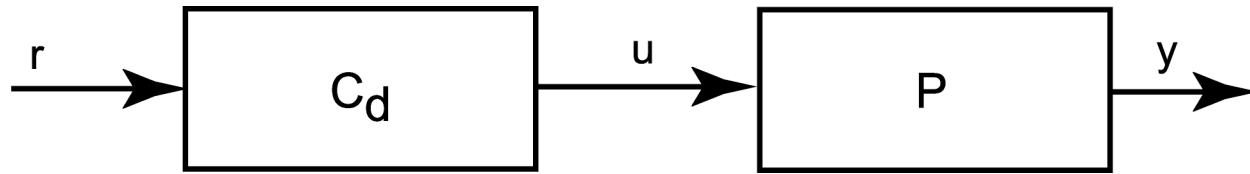
# Confronto fra il controllo ad azione diretta e in retroazione

Problema: Regolazione di un processo statico di guadagno P

$y$  = uscita del processo (v. controllata);

$u$  = ingresso del processo (v. di controllo);  $r$  = segnale di riferimento.

- Sistema di controllo ad anello aperto:

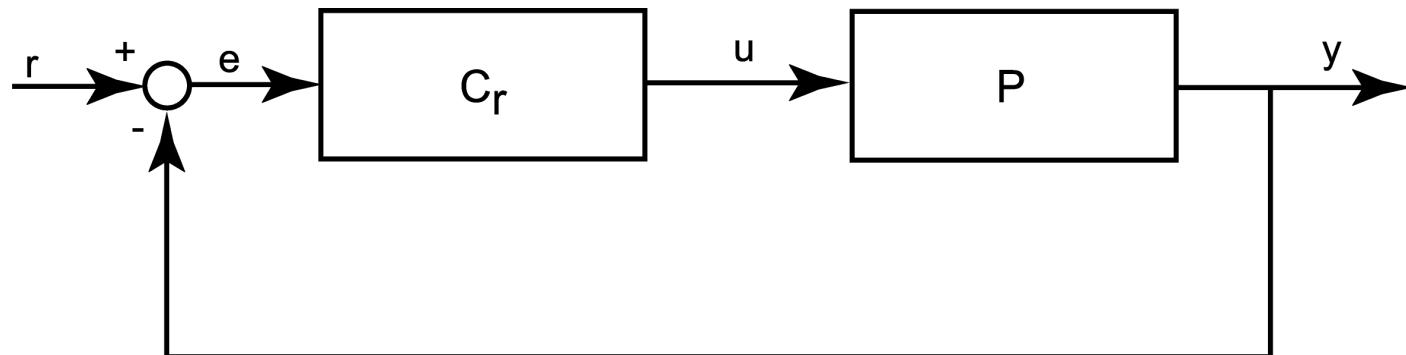


$$y = Pu = P(C_d r) = PC_d r$$

$$\text{dall'obiettivo } r(t) \equiv y(t) \Rightarrow C_d = \frac{1}{P}$$

Il controllore è sintetizzato come **sistema inverso** del processo

- Sistema di controllo ad anello chiuso:



$$\{e = r - y, y = PC_r e\} \Rightarrow y = PC_r(r - y)$$

$$y = \frac{PC_r}{1 + PC_r} \cdot r$$

L'obiettivo  $y(t) \equiv r(t)$  è irraggiungibile ma si può ottenere  $y(t) \approx r(t)$

progettando  $C_r$  affinché  $PC_r \gg 1$ :  $C_r \gg \frac{1}{P}$

## Disamina delle strategie di controllo in condizioni perturbate

$$P \rightarrow \tilde{P} = P + \Delta P, \text{ per esempio } \Delta P = \pm \frac{1}{5} P$$

- nel controllo ad azione diretta

$$y = \tilde{P} C_d r = (P + \Delta P) \frac{1}{P} r = r \pm \frac{1}{5} r \Rightarrow \boxed{\text{errore in \% } \pm 20}$$

- nel controllo in retroazione

$$\text{si ipotizza } PC_r = 200 \Rightarrow C_r = \frac{200}{P}, T_{yr} := \frac{PC_r}{1 + PC_r} \cong 0,995$$

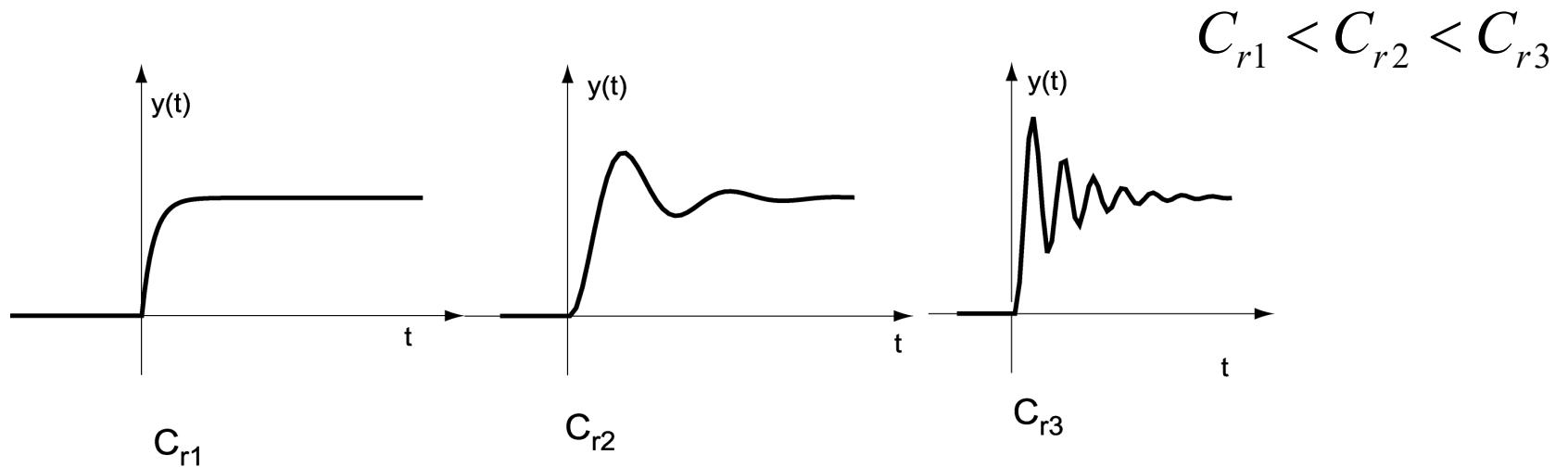
(in condizioni nominali, l'errore di inseguimento è circa 0,5%)

$$\tilde{T}_{yr} = \frac{\tilde{P} C_r}{1 + \tilde{P} C_r} = \frac{PC_r + \Delta PC_r}{1 + PC_r + \Delta PC_r} \in [0,9959; 0,9938]$$

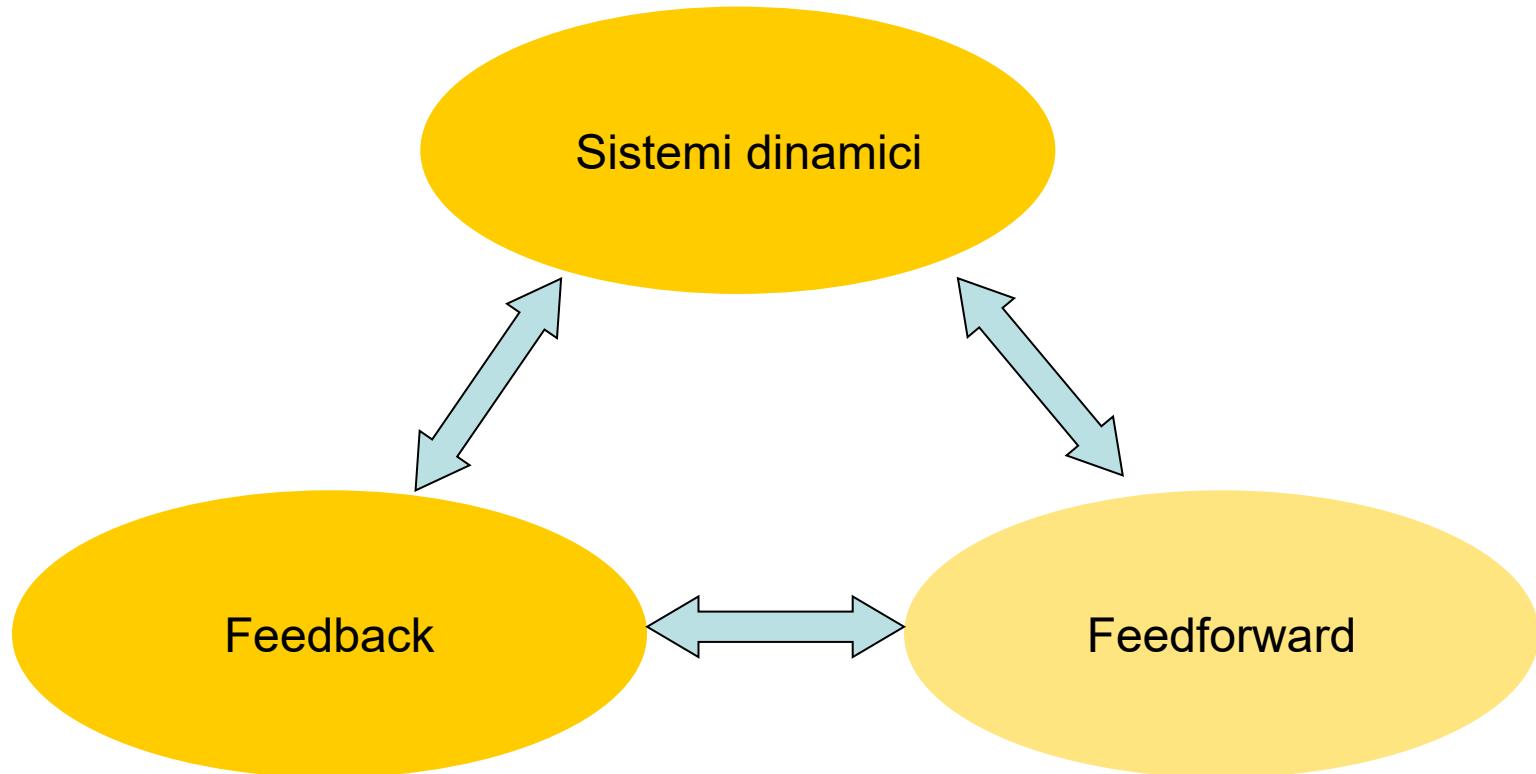
l'errore di inseguimento è compreso fra  $\boxed{0,415\% \text{ e } 0,621\%}$

- **Conclusione:** Il controllo in retroazione è efficace anche in presenza di perturbazioni sul processo. Parimenti, si potrebbe dimostrare che il controllo in retroazione è efficace anche in presenza di disturbi agenti sulla variabile controllata.
- Il controllo in retroazione può presentare fenomeni di instabilità (anche se il sistema controllato è stabile).

Esempio: In un sistema retroazionato all'aumentare del guadagno di anello tipicamente si innesca una instabilità (p.e. auto-oscillazioni divergenti) :

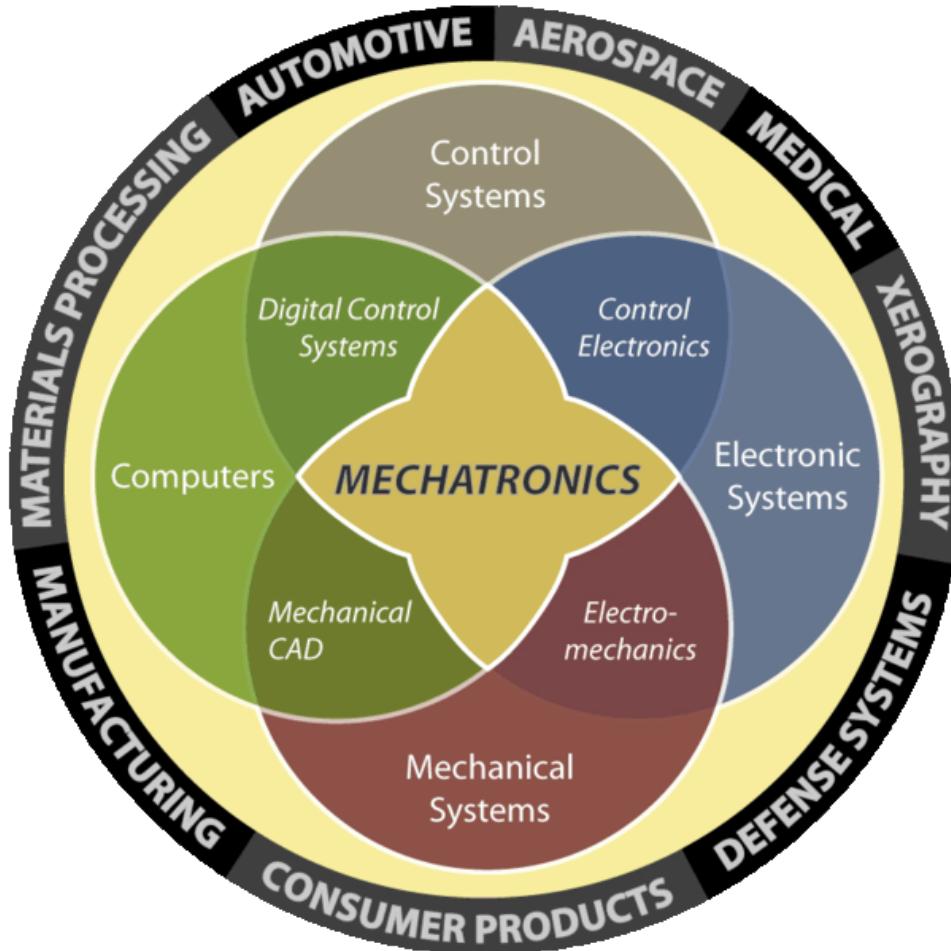


# La scienza del controllo attivo



# Il controllo attivo nelle applicazioni: la meccatronica

**MECHATRONICS:** French standard NF E 01-010 gives the following definition: “approach aiming at the synergistic integration of mechanics, electronics, control theory, and computer science within product design and manufacturing, in order to improve and/or optimize its functionality”.



# Il programma in sintesi

- Metodi di analisi dei sistemi dinamici lineari scalari (SISO)
- Stabilità e sistemi in retroazione
- Progetto dei sistemi di controllo (sintesi)
- Elementi di controllo digitale
- Cenni di modellistica

Da segnalare, ma non compresi nel programma

- Progettazione al calcolatore e simulazioni:  
**MATLAB** (Control Systems Toolbox, Simulink); **Octave**; **Scilab** (Xcos); ecc.
- Tecnologie dei sistemi di controllo:  
Sensori, attuatori, azionamenti elettrici,  
PLC (programmable logic controller), microcontrollori, ecc.  
Fieldbus (CAN, Modbus, Profibus, ecc.), Real-time Ethernet  
(Profinet, Powerlink, EtherCAT, ecc.)

# Informazioni

- Diapositive pdf delle lezioni, materiali, avvisi su Elly:  
<http://dia.unipr.it/it/didattica/elly-piattaforma-didattica-line>
- Libri consigliati:  
G. Marro, “Controlli Automatici”, quinta edizione, Zanichelli, 2004;  
P. Bolzern, R. Scattolini, N. Schiavoni, “Fondamenti di Controlli Automatici”, quarta edizione, McGraw-Hill, 2015.

Per una visione storica dell’automazione: app **Automation Story** su iTunes

- Tutorato: attivo dai primi di maggio a cura di Juxhino Kavaja
- Modalità dell’esame
  - Prova scritta a distanza con Microsoft Teams costituito da un test (18 domande) e 6 esercizi usualmente suddivisi in tre parti: Parte A (test), Parte B (3 esercizi), Parte C (3 esercizi)
  - Su Elly sono disponibili: facsimile del file di convocazione alla prova scritta con informazioni e modalità di partecipazione, testi e soluzioni di prove passate
  - Iscrizioni su ESSE3 (attenzione al periodo di iscrizione)
  - Date d’esame: 10 giugno, 7 luglio, 28 luglio, 2 settembre, 17 settembre 2021

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle  
Telecomunicazioni

**Lezione n. 2 di Fondamenti di Controlli Automatici**  
**prof. Aurelio Piazzì**

**Modellistica ed equazioni differenziali  
lineari**

Università degli Studi di Parma – a.a. 2020-2021

- Cenni di modellistica (circuiti elettrici e sistemi meccanici)
- L'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti quale modello di un sistema dinamico scalare

# Cenni di Modellistica

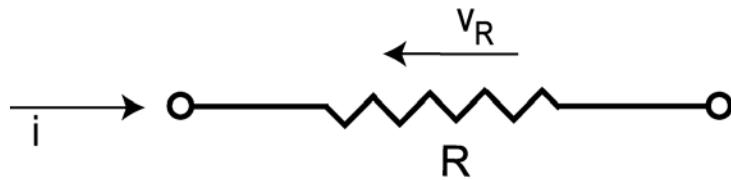
Modellistica = costruzione dei modelli matematici dei sistemi

Modellistica:

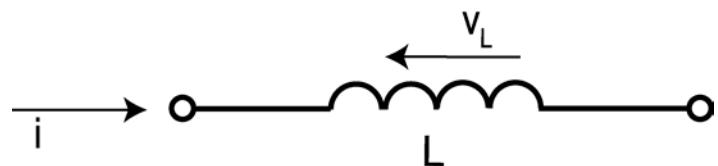
1. a partire da leggi fondamentali
2. a partire da dati sperimentali (identificazione)

Scegliendo il primo approccio riportiamo qualche cenno su circuiti elettrici e sistemi meccanici.

## • Circuiti elettrici

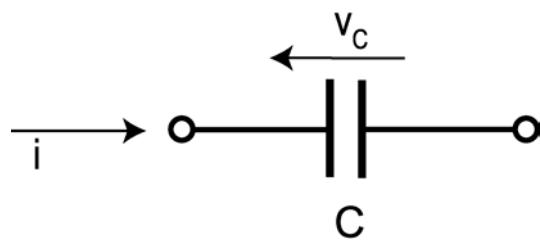


Resistenza:  $v_R = Ri$



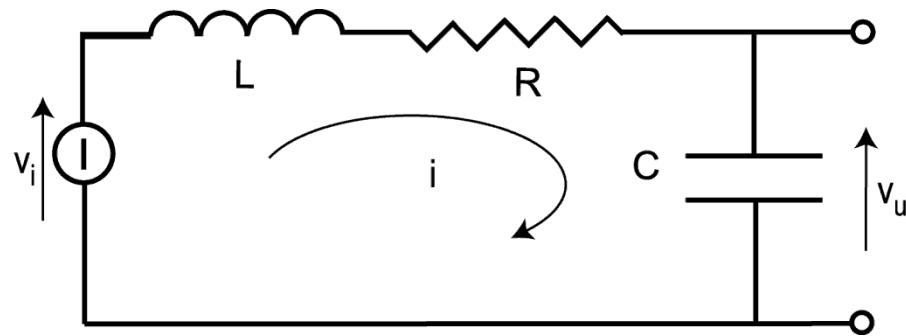
Induttanza:  $v_L = L \frac{di}{dt} = LDi$

$D \equiv$  operatore derivata



Capacità:  $v_C = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \Rightarrow Dv_C = \frac{i}{C}$

- Esempio: circuito RLC



$$v_i = v_L + v_R + v_C$$

$$v_i(t) = LDi(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

Costruzione del m.m. del circuito RLC orientato da  $v_i$  (ingresso) ad  $i$  (uscita):



Eq. differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$LD^2i + RDi + \frac{1}{C}i = Dv_i$$

Rappresentabile anche come:

$$\left( LD^2 + RD + \frac{1}{C} \right) i = Dv_i$$

Costruzione del m.m. del circuito RLC orientato da  $v_i$  (ingresso) ad  $v_u$  (uscita):

$$Dv_u = \frac{i}{C} \Rightarrow i = CDv_u$$

$$v_i = LD(CDv_u) + R(CDv_u) + v_u$$

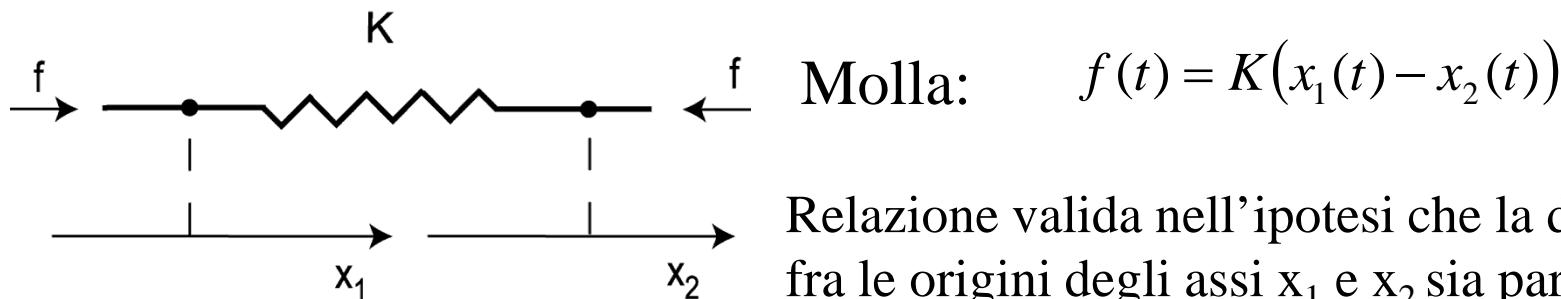
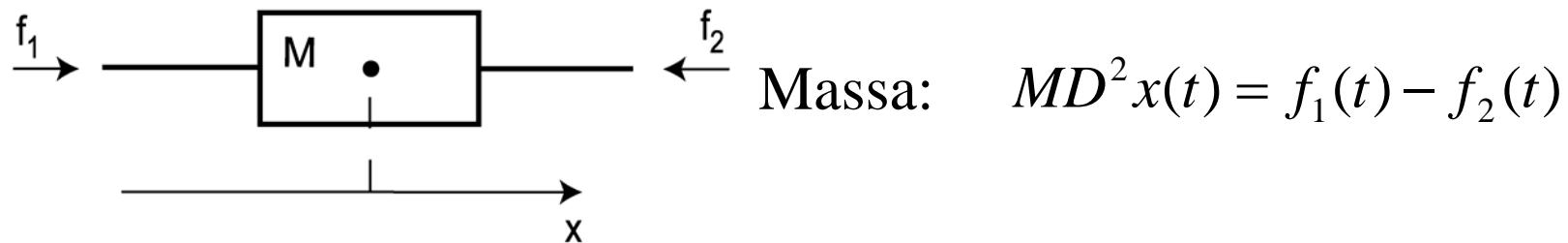


$$LCD^2v_u + RCDv_u + v_u = v_i$$

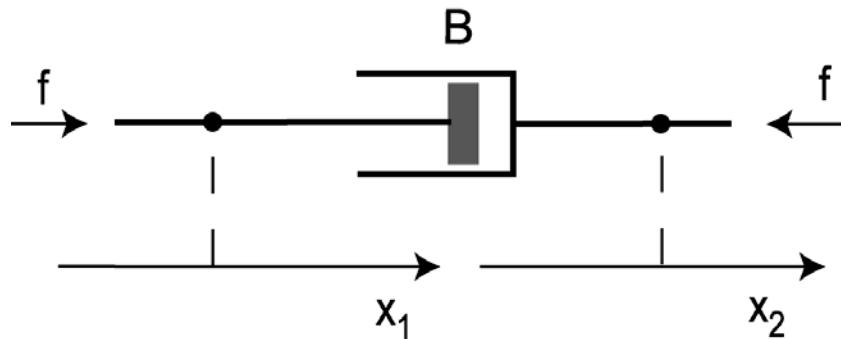
$$(LCD^2 + RCD + 1)v_u = v_i$$

## • Sistemi meccanici

leggi del moto unidimensionale per “componenti” meccanici



Relazione valida nell’ipotesi che la distanza fra le origini degli assi  $x_1$  e  $x_2$  sia pari alla lunghezza della molla non caricata.



Ammortizzatore:

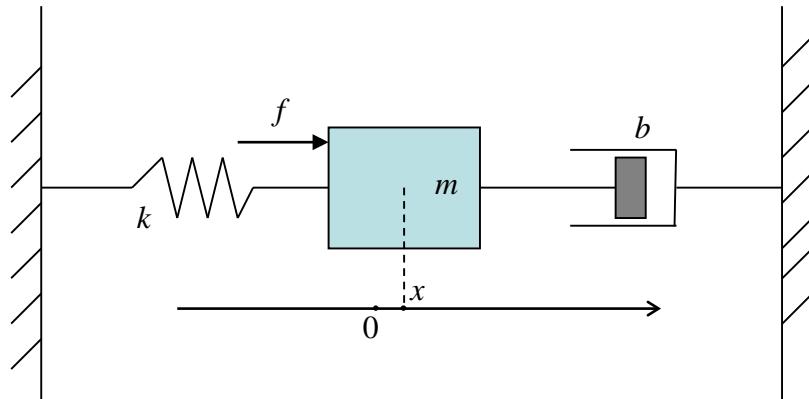
$$f(t) = B(v_1(t) - v_2(t))$$

$$f(t) = BD(x_1(t) - x_2(t))$$

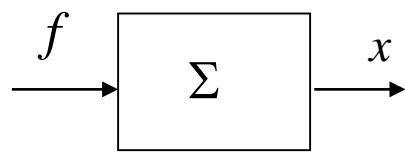
Legge che descrive un fenomeno di attrito viscoso: forza proporzionale alla velocità relativa ...

- Esempio: sistema meccanico vibrante

(quando il sistema è a riposo abbiamo  $x = 0$  )



$$mD^2x(t) = -kx(t) - bDx(t) + f(t)$$



equazione del sistema orientato da  $f$  ad  $x$ :

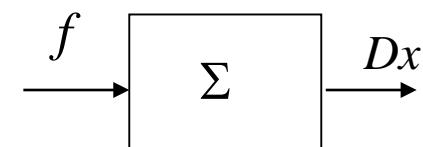
$$mD^2x(t) + bDx(t) + kx(t) = f(t)$$

Equazione diff. del sistema orientato da  $f$  (forza applicata) a  $Dx$  (velocità della massa):

$$mD^3x + bD^2x + kDx = Df$$

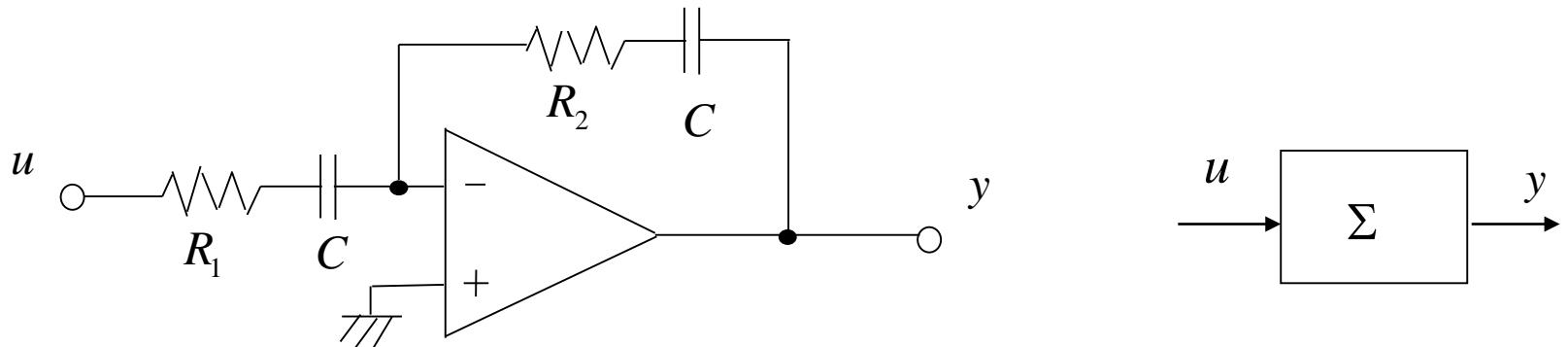
$$y := Dx$$

$$mD^2y + bDy + ky = Df$$



## • Circuiti elettrici con amplificatori operazionali

Esempio:



$u$  è la tensione in ingresso (variabile manipolabile o indipendente)

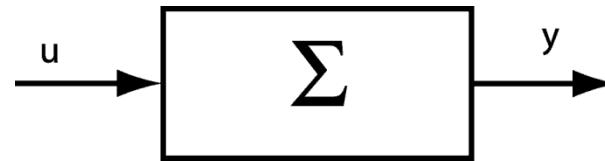
$y$  è la tensione in uscita (variabile dipendente)

Si può dedurre...

$$R_1 CDy + y = -R_2 CDu - u$$

# Equazioni differenziali lineari

- Sistemi scalari rappresentati da eq. differenziali lineari a coefficienti costanti



$$a_n D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \dots + a_1 D y + a_0 y = b_m D^m u + \dots + b_1 D u + b_0 u$$

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u$$

È un modello matematico formale del sistema dinamico (orientato)  $\Sigma$ ,  $y$  = variabile d'uscita,  $u$  = variabile d'ingresso;  $a_n \neq 0$ ,  $b_m \neq 0$ .

$n$  = ordine dell'eq. diff., per estensione ordine di  $\Sigma$ ,  $n \geq m$ ;

$\rho := n - m$  ordine relativo o grado relativo di  $\Sigma$ .

- Insieme dei behaviors  $\mathcal{B}$  di  $\Sigma$ :

$\mathcal{B} := \left\{ (u(t), y(t)) : \text{la coppia dei segnali causa-effetto "soddisfa" l'equazione differenziale } \sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u \right\}$

Se  $u(t)$  e  $y(t)$  sono derivabili tante volte quanto necessario

$$(u(\cdot) \in C^m \text{ e } y(\cdot) \in C^n)$$

"soddisfa" significa:

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y(t) = \sum_{i=0}^m b_i D^i u(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

•**Proprietà:** Il sistema  $\Sigma$  è lineare.

**Dim.**

Siano  $(u_i(\cdot), y_i(\cdot)) \in \mathcal{B}$ ,  $i = 1, 2$ . Allora  $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  segue:

$$(\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t), \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)) \in \mathcal{B}$$

Infatti (per semplicità  $n = 1$ ,  $m = 0$ ):

$$\begin{cases} a_1 D y_1(t) + a_0 y_1(t) = b_0 u_1(t) \\ a_1 D y_2(t) + a_0 y_2(t) = b_0 u_2(t) \end{cases}$$

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}: \begin{cases} a_1 D [\alpha_1 y_1(t)] + a_0 [\alpha_1 y_1(t)] = b_0 [\alpha_1 u_1(t)] \\ a_1 D [\alpha_2 y_2(t)] + a_0 [\alpha_2 y_2(t)] = b_0 [\alpha_2 u_2(t)] \end{cases}$$

sommmando le equazioni:

$$a_1 D [\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)] + a_0 [\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)] = b_0 [\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)]$$

$$\Rightarrow (\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t), \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)) \in \mathcal{B}$$

□

•**Proprietà:** Il sistema  $\Sigma$  è stazionario.

**Dim.**  $(u(t), y(t)) \in \mathcal{B} \Rightarrow (\textcolor{red}{u}(t-T), y(t-T)) \in \mathcal{B} \quad \forall T \in \mathbb{R}$

Infatti (ancora per semplicità  $n = 1, m = 0$ ):

$$a_1 \frac{d}{d\tau} y(\tau) + a_0 y(\tau) = b_0 u(\tau) \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \forall t, T \in \mathbb{R}: \quad a_1 \frac{d}{d\tau} y(t-T) + a_0 y(t-T) = b_0 u(t-T)$$

$$\frac{d}{dt} y(t-T) = \left. \frac{d}{d\tau} y(\tau) \right|_{\tau=t-T} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{d}{d\tau} y(t-T)$$

$$\Rightarrow \textcolor{red}{a_1} \frac{d}{dt} y(t-T) + a_0 y(t-T) = b_0 u(t-T) \quad \forall t, T \in \mathbb{R}$$

□

Un problema fondamentale nell'analisi di un sistema  $\Sigma$ :

Noto il segnale di ingresso  $u(t)|_{[0,+\infty)}$   
e le condizioni iniziali  $y(0), Dy(0), \dots, D^{n-1}y(0)$   
determinare il segnale di uscita  $y(t)|_{[0,+\infty)}$ .

•Esempi:  $\Sigma$  definito da  $Dy(t) - y(t) = u(t)$

1)  $u(t) = 0, t \geq 0$  e  $y(0) = 1$  (eq. omogenea)

$y(t) = ce^t, c \in \mathbb{R}$  (insieme di tutte le soluzioni)

$$y(0) = 1 \Rightarrow c = 1$$

Soluzione:  $y(t) = e^t, t \geq 0.$

2)  $u(t) = 5, t \geq 0$  e  $y(0) = 1$  (eq. non omogenea)

Individuata una soluzione particolare  $y_p(t)$

$y(t) = ce^t + y_p(t), c \in \mathbb{R}$  è l'insieme di tutte le soluzioni.

$$y_p(t) ? \Rightarrow y_p(t) = -5 \Rightarrow y(t) = ce^t - 5$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow c - 5 = 1 \Rightarrow c = 6$$

Soluzione:  $y(t) = 6e^t - 5, t \geq 0.$

•Esempio:

$$\Sigma \text{ definito da } D^2y(t) + 3Dy(t) + 2y(t) = u(t)$$

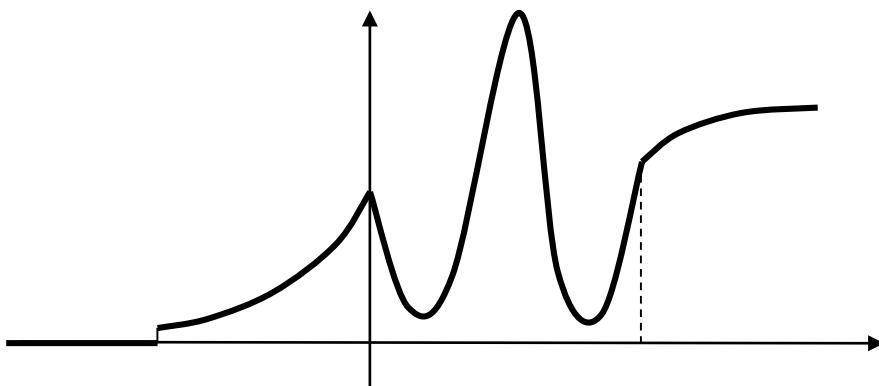
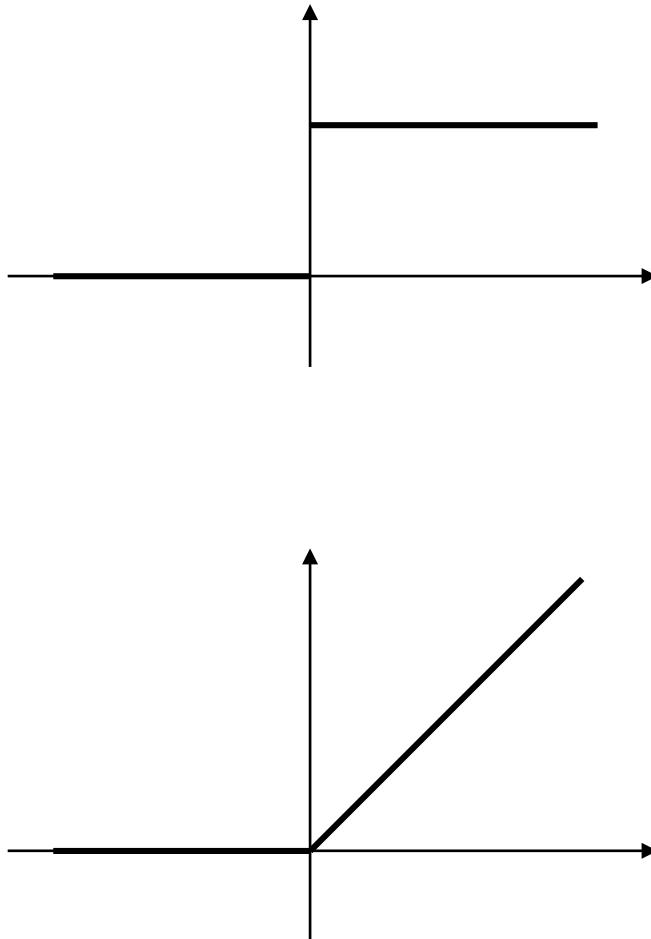
Noto  $u(t), t \geq 0$

e le condizioni iniziali  $y(0) = 1$  e  $Dy(0) = 1$   
trovare  $y(t), t \geq 0$  ?

Emerge la necessità di:

- 1) disporre di un metodo generale per determinare il segnale di uscita noto il segnale di ingresso e le condizioni iniziali;
- 2) trattare anche il caso di segnali di ingresso e uscita continui e derivabili a tratti.

Esempi di segnali  $u(t)$  per il controllo attivo:



La classe dei segnali che utilizzeremo è  $C_p^\infty$ , insieme delle funzioni infinitamente derivabili a tratti (*piecewise  $C^\infty$ -functions*).

Notazione:  $f^{(n)}(t^-) := \lim_{v \rightarrow t^-} f^{(n)}(v)$ ,  $f^{(n)}(t^+) := \lim_{v \rightarrow t^+} f^{(n)}(v)$ .

Def. (insieme sparso)

Un insieme  $S \subset \mathbb{R}$  è detto *sparso* se per ogni intervallo reale  $[a, b]$ ,  $S \cap [a, b]$  ha cardinalità finita oppure è l'insieme vuoto.

Def. ( $C_p^\infty$ )

Una funzione appartiene a  $C_p^\infty$ , insieme delle funzioni infinitamente derivabili a tratti (o delle funzioni di classe  $C^\infty$  a tratti), se esiste un insieme sparso  $S$  per il quale  $f \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus S, \mathbb{R})$  e per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e per ogni  $t \in S$  i limiti  $f^{(n)}(t^-)$  e  $f^{(n)}(t^+)$  esistono e sono finiti.

Quando  $f$  è definita in  $t \in S$ , convenzionalmente  $f(t) := f(t^+)$ ; in particolare  $C^{-1} := C_p^\infty(\mathbb{R})$  definisce l'insieme delle funzioni di classe  $C^\infty$  a tratti definite su tutto  $\mathbb{R}$ .

Note:  $C^\infty \subset C_p^\infty(\mathbb{R}) \subset C_p^\infty$ ,  $S = \{t_1, t_2, \dots, t_k, \dots\}$ .

## Esempi di funzioni in $C_p^\infty$

$$1(t) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}, \text{ gradino unitario} \quad 1(t) \in C_p^\infty(\mathbb{R})$$

$D1(t) = 0 \quad \forall t \neq 0$ , non definita in  $t = 0$ ;  $D1(t) \in C_p^\infty$  ma  $D1(t) \notin C_p^\infty(\mathbb{R})$

$$\int_0^t D1(v)dv = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^t 1(v)dv = t1(t), \text{ rampa unitaria}$$

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & t < 0 \\ 1 + \cos t & t \geq 0 \end{cases}$$

$f^{(i)}(0^-) = f^{(i)}(0^+)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  ma  $f(t)$  non è derivabile in  $t = 0$ .

## Proprietà di $C_p^\infty$

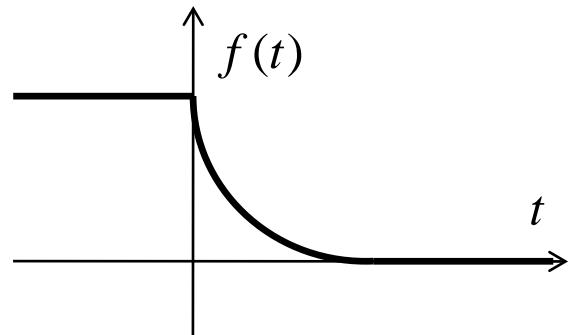
Se  $f(t) \in C_p^\infty \Rightarrow Df(t) \in C_p^\infty$  ed anche  $\forall a \in \mathbb{R}$ ,  $\int_a^t f(v)dv \in C_p^\infty$ .

$$C^\infty \subset \cdots \subset C^k \subset C^{k-1} \subset \cdots \subset C^1 \subset C^0$$

e  $C^\infty \subset C_p^\infty$  ma in generale  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $C^k \not\subset C_p^\infty$

Esempio:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t < 0 \\ 1 - \sqrt{1 - (t-1)^2} & \text{per } t \in [0,1] \\ 0 & \text{per } t > 1 \end{cases} ; \quad f \in C^0 \wedge f \notin C_p^\infty$$



Considereremo la classe

$$C^k \cap C_p^\infty = \left\{ f \in C_p^\infty : f(t) \text{ è derivabile con derivata continua fino all'ordine } k \right\}$$

$$C_p^{k,\infty} := C^k \cap C_p^\infty \quad C^\infty \subset \cdots \subset C_p^{k,\infty} \subset C_p^{k-1,\infty} \subset \cdots \subset C_p^{1,\infty} \subset C_p^{0,\infty} \subset C_p^\infty$$

# Grado di continuità di una funzione o segnale

## definizioni

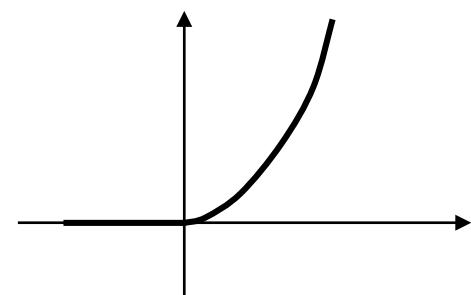
Se  $f \in C_p^{k,\infty}$ ,  $k$  è il grado di continuità di  $f$ .

$$\overline{C_p^{k,\infty}} := \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \in C_p^{k,\infty} \wedge f \notin C_p^{k+1,\infty} \right\}$$

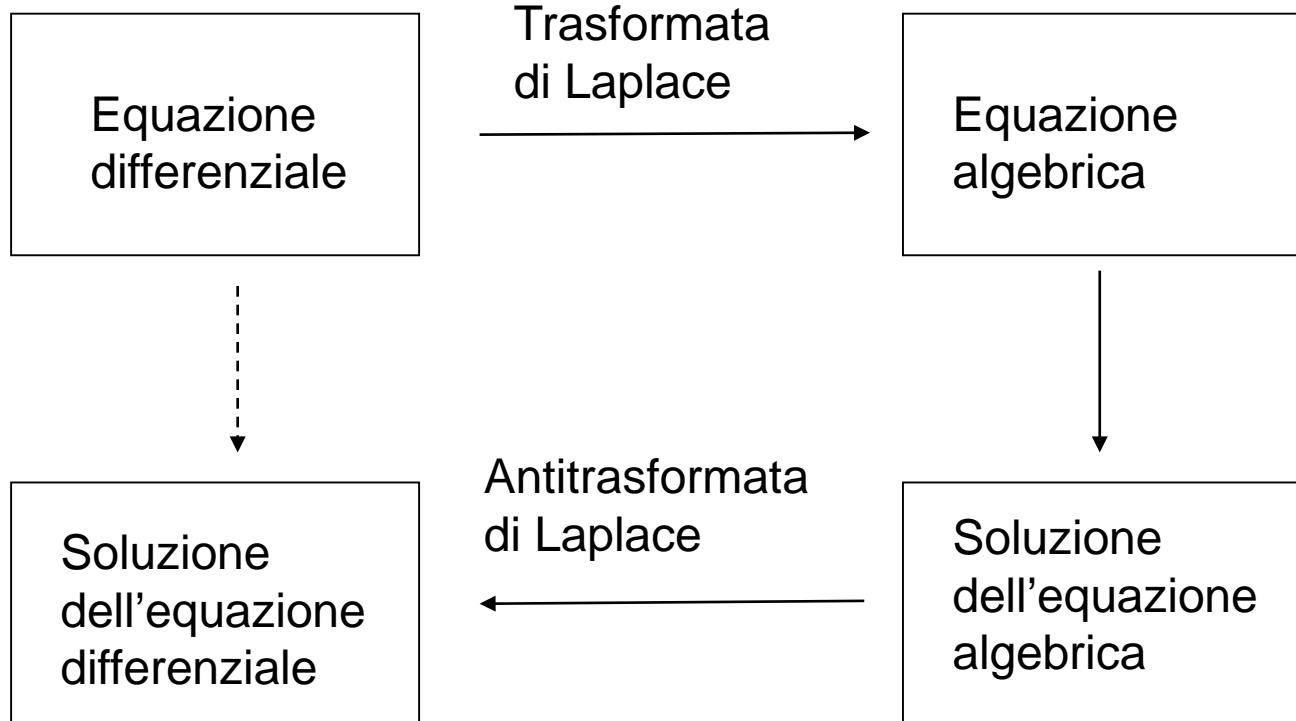
Se  $f \in \overline{C_p^{k,\infty}}$  allora  $k$  è il grado massimo di continuità di  $f$ .

Esempio:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^3 & t \geq 0 \end{cases}, f \in C_p^{0,\infty}, C_p^{1,\infty}, C_p^{2,\infty}, \overline{C_p^{2,\infty}}$$



- Il metodo generale proposto per “integrare” l’equazione differenziale di  $\Sigma$  si basa sulla **trasformata di Laplace**.
- La comprensione del metodo della trasformata di Laplace richiede l’introduzione di cenni di teoria delle funzioni complesse di variabile complessa (**analisi matematica complessa**)



## I concetti introdotti dalla lezione:

- Le leggi elementari per la modellistica elettrica e dei componenti meccanici.
- L'equazione differenziale lineare quale modello matematico di un sistema dinamico orientato.
- L'insieme dei behaviors.
- Il problema della determinazione dell'uscita di  $\Sigma$  noto l'ingresso e le condizioni iniziali.
- La classe delle funzioni a tratti indefinitivamente derivabili.
- Grado di continuità di un segnale.

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle  
Telecomunicazioni

**Lezione n. 3 di Fondamenti di Controlli Automatici**  
**prof. Aurelio Piazzì**

**Cenni di analisi complessa**

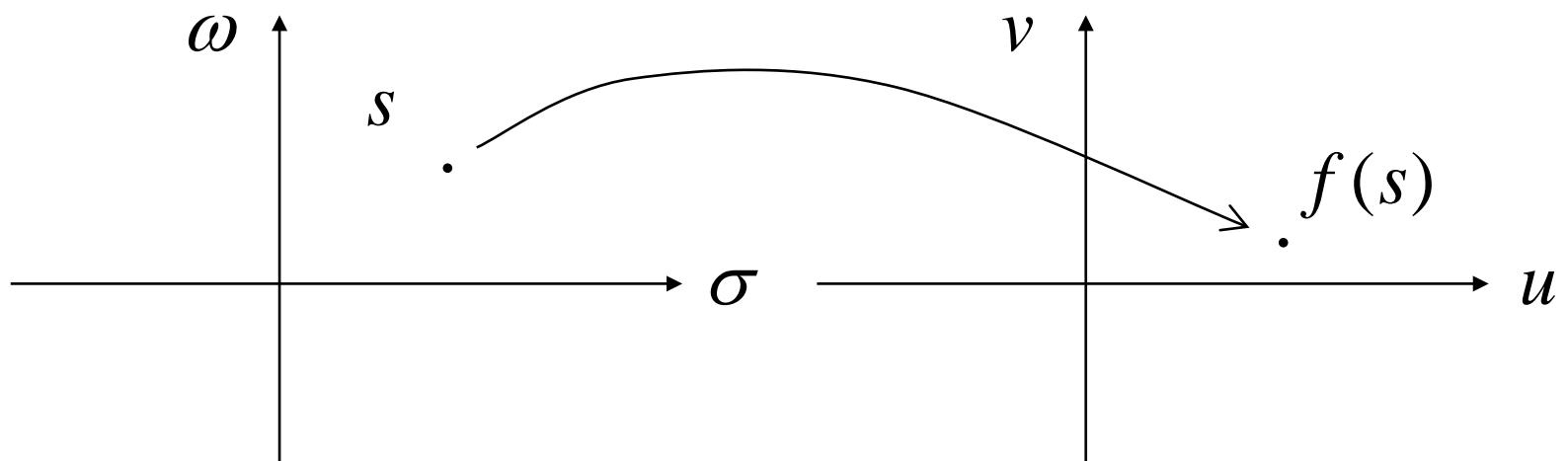
Università degli Studi di Parma – a.a. 2020-2021

# Funzione complessa di variabile complessa

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$s \rightarrow f(s)$$

Se  $s = \sigma + j\omega \Rightarrow f(s) = u(\sigma, \omega) + jv(\sigma, \omega)$



Definizione di limite:  $\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) = \lambda$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \rho > 0$  tale che

se  $s$  soddisfa  $0 < |s - s_0| < \rho \Rightarrow |f(s) - \lambda| < \varepsilon$

Interpretazione geometrica:

Sia  $B(z, r) := \{s \in \mathbb{C} : |s - z| < r\}$

(cerchio aperto di raggio  $r$ , centrato in  $z$ )

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \rho > 0$  tale che  $f(B(s_0, \rho) - \{s_0\}) \subseteq B(\lambda, \varepsilon)$

## Def. Continuità

$f(s)$  è continua in  $s = s_0$  se  $\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) = f(s_0)$

## Lemma

$f(s)$  è continua in  $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$  se e solo se le funzioni reali  $u(\sigma, \omega), v(\sigma, \omega)$  sono continue in  $(\sigma_0, \omega_0)$ .

Esempi:

$f(s) = 4s^2 + 5s + 3$  è continua su  $\mathbb{C}$ .

$f(s) = \frac{1}{s-1}$  è continua su  $\mathbb{C} - \{1\}$ .

## Def. Derivabilità

$f(s)$  è derivabile in  $s = s_0$  se esiste il limite

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{f(s_0 + \Delta s) - f(s_0)}{\Delta s}$$

Questo limite viene indicato con le notazioni  $f'(s_0)$ ,  $f^{(1)}(s_0)$ ,  $\frac{df}{ds}(s_0)$ ,  $Df(s_0)$ .

Le regole base di derivabilità già note dall'analisi reale rimangono valide.

Esempi:

$$f(s) = 4s^2 + 5s + 3 \Rightarrow Df(s) = 8s + 5 \quad [f(s) \text{ è derivabile su } \mathbb{C}]$$

$$f(s) = \frac{1}{s-1} \Rightarrow Df(s) = -\frac{1}{(s-1)^2} \quad [f(s) \text{ è derivabile su } \mathbb{C} - \{1\}]$$

## Def. **Analiticità**

$f(s)$  è **analitica** ( o **olomorfa**) in  $s = s_0$

se  $f(s)$  è derivabile su di un intorno aperto contenente  $s_0$ .

Esempi:  $f(s) = 4s^2 + 5s + 3$  è analitica su  $\mathbb{C}$ ;  $f(s) = \frac{1}{s-1}$  analitica su  $\mathbb{C} - \{1\}$ .

$f(s) = |s|^2$  è derivabile in  $s = 0$  ma non è analitica in  $s = 0$ .

Infatti

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta s|^2 - |0|^2}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta s|^2}{\Delta s} = \quad (\Delta s := r e^{j\varphi})$$

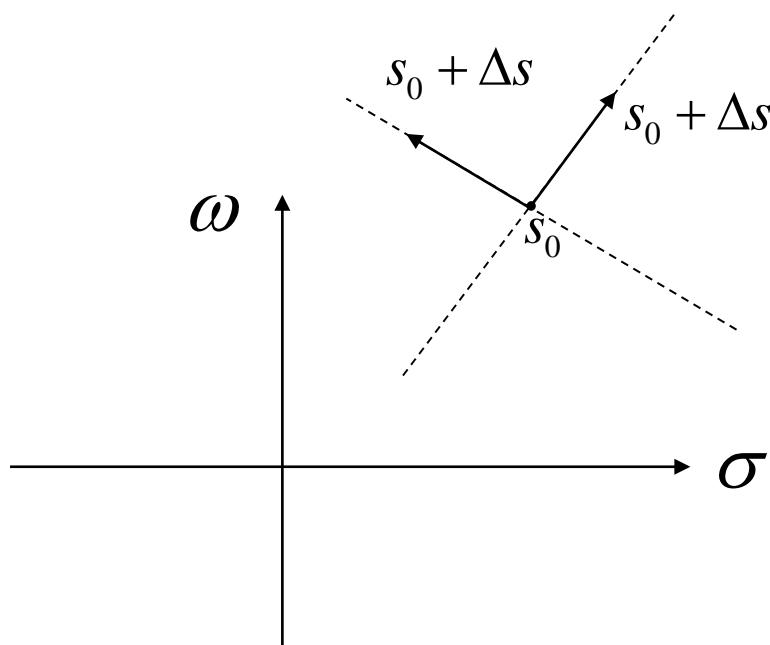
$$= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|r e^{j\varphi}|^2}{r e^{j\varphi}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2}{r e^{j\varphi}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r}{e^{j\varphi}} = 0 \quad \forall \varphi$$

Non è analitica perchè...

Sia  $f(s)$  derivabile in  $s = s_0$ :

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{f(s_0 + \Delta s) - f(s_0)}{\Delta s} = f^{(1)}(s_0)$$

Questo limite sussiste per ogni direzione di convergenza a zero di  $\Delta s$ :



Calcoliamo  $f^{(1)}(s_0)$  con  $\Delta s = \Delta\sigma \in \mathbb{R}$  e  $\Delta s = j\Delta\omega \in j\mathbb{R}$  ( $\Delta\omega \in \mathbb{R}$ ):

$s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$  od anche  $s_0 \equiv (\sigma_0, \omega_0)$

$$\begin{aligned}
 f^{(1)}(s_0) &= \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{f(s_0 + \Delta\sigma) - f(s_0)}{\Delta\sigma} = \\
 &= \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{u(\sigma_0 + \Delta\sigma, \omega_0) + jv(\sigma_0 + \Delta\sigma, \omega_0) - u(\sigma_0, \omega_0) - jv(\sigma_0, \omega_0)}{\Delta\sigma} = \\
 &= \frac{\partial u}{\partial \sigma}(s_0) + j \frac{\partial v}{\partial \sigma}(s_0) \\
 f^{(1)}(s_0) &= \lim_{j\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{f(s_0 + j\Delta\omega) - f(s_0)}{j\Delta\omega} = \\
 &= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{u(\sigma_0, \omega_0 + \Delta\omega) + jv(\sigma_0, \omega_0 + \Delta\omega) - u(\sigma_0, \omega_0) - jv(\sigma_0, \omega_0)}{j\Delta\omega} = \\
 &= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{ju(\sigma_0, \omega_0 + \Delta\omega) - v(\sigma_0, \omega_0 + \Delta\omega) - ju(\sigma_0, \omega_0) + v(\sigma_0, \omega_0)}{-\Delta\omega} = \\
 &= \frac{\partial v}{\partial \omega}(s_0) - j \frac{\partial u}{\partial \omega}(s_0)
 \end{aligned}$$

Quindi  $\frac{\partial u}{\partial \sigma}(s_0) + j \frac{\partial v}{\partial \sigma}(s_0) = \frac{\partial v}{\partial \omega}(s_0) - j \frac{\partial u}{\partial \omega}(s_0)$  da cui si ottiene

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma}(s_0) = \frac{\partial v}{\partial \omega}(s_0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial \omega}(s_0) = -\frac{\partial v}{\partial \sigma}(s_0)$$

### Def. **Condizioni di Cauchy-Riemann**

$u(\sigma, \omega), v(\sigma, \omega)$  soddisfano le condizioni (equazioni) di Chauchy-Riemann se

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{\partial v}{\partial \omega} \\ \frac{\partial u}{\partial \omega} = -\frac{\partial v}{\partial \sigma} \end{cases}$$

## Teorema

Sia  $f(s) = u(s) + jv(s)$ .

1. Se esiste  $f^{(1)}(s_0)$  con  $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$  allora esistono le derivate parziali di  $u(\sigma, \omega)$  e  $v(\sigma, \omega)$  in  $(\sigma_0, \omega_0)$  e soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann.
2. Se  $u(\sigma, \omega)$  e  $v(\sigma, \omega)$  e le loro derivate parziali sono continue in  $(\sigma_0, \omega_0)$  e soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann, allora esiste  $f^{(1)}(s_0)$  con  $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ .

Ritorniamo all'esempio  $f(s) = |s|^2 = \sigma^2 + \omega^2$

$$\Rightarrow u = \sigma^2 + \omega^2, \quad v = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = 2\sigma, \quad \frac{\partial v}{\partial \omega} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \omega} = 2\omega, \quad -\frac{\partial v}{\partial \sigma} = 0$$

$$\begin{cases} 2\sigma = 0 \\ 2\omega = 0 \end{cases}$$

$f(s)$  è derivabile solo in  $0 + j0$

e quindi in  $s = 0$  non può essere analitica.

## Corollario

Sia  $f(s) = u(s) + jv(s)$  con  $u(\sigma, \omega)$ ,  $v(\sigma, \omega)$  e le loro derivate parziali continue su di un dominio aperto  $U \subseteq \mathbb{C}$ . Allora  $f(s)$  è analitica su  $U$  se e solo se  $u(\sigma, \omega)$ ,  $v(\sigma, \omega)$  soddisfano, su  $U$ , le condizioni di Cauchy-Riemann.

## Teorema

Sia  $f(s)$  analitica su di una regione aperta  $U \subseteq \mathbb{C}$ .

Allora la derivata  $Df(s)$  è anch'essa una funzione analitica su  $U$ .

## Corollario

Se  $f(s)$  è analitica sulla regione aperta  $U$

allora  $f(s)$  è ivi derivabile indefinitamente.

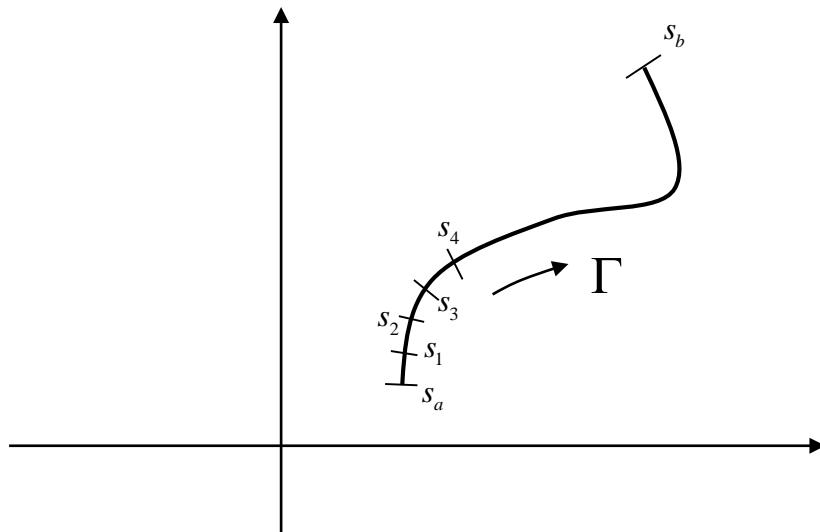
# Integrali di linea nel piano complesso

## Def. Integrale

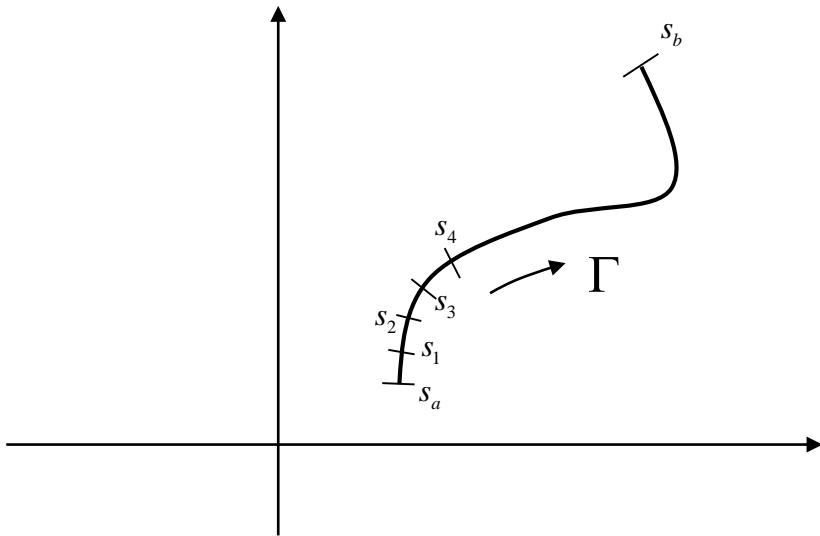
Data una funzione  $f(s)$  ed una curva  $\Gamma$  su  $\mathbb{C}$ , percorsa da  $s_a$  a  $s_b$ , definiamo

$$\int_{\Gamma} f(s) ds \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(s_i)(s_i - s_{i-1})$$

dove  $s_0, s_1, \dots, s_n$  ( $s_0 = s_a, s_n = s_b$ ) è una discretizzazione uniforme della curva  $\Gamma$ .



# Calcolo dell'integrale di linea



Sia  $\Gamma$  una curva parametrica  
di classe  $C^1$ :

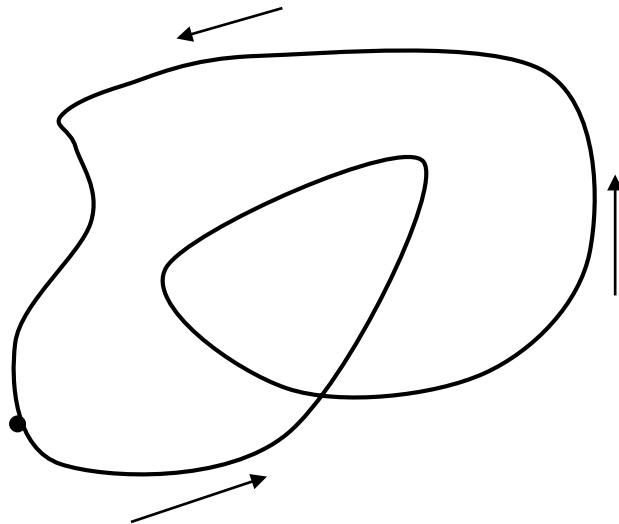
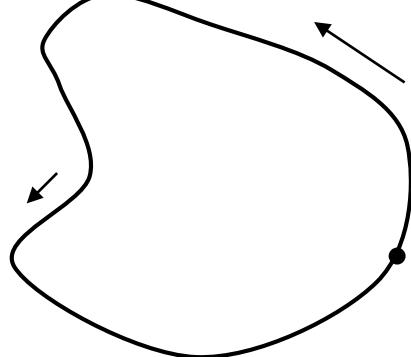
$$\Gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$u \rightarrow \Gamma(u)$$

$$\int_{\Gamma} f(s) ds = \int_a^b f(\Gamma(u)) \frac{d\Gamma}{du} du$$

## Def. Curva chiusa semplice

Una curva continua  $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $u \mapsto \Gamma(u)$  è curva chiusa semplice se  $\Gamma(a) = \Gamma(b)$  e  $\Gamma(u_1) \neq \Gamma(u_2) \forall u_1 \neq u_2 \in (a, b)$ .



## Teorema di Jordan

Se  $\Gamma$  è una curva chiusa semplice in  $\mathbb{C}$  questa suddivide il piano complesso in due regioni distinte, una esterna ed una interna.

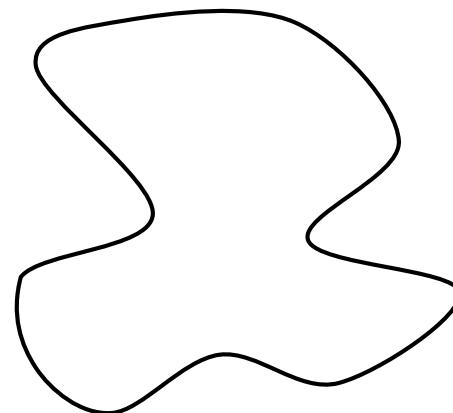
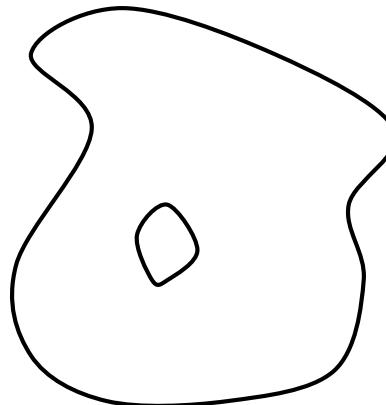
$$[\mathbb{C} - \Gamma = E \cup I, \quad E \cap I = \emptyset, \quad \partial E = \partial I = \Gamma]$$

## Def. Insieme connesso

Un insieme  $R \subseteq \mathbb{C}$  è connesso se per ogni coppia di punti appartenenti all'insieme esiste una curva continua  $\Gamma$  che li congiunge tutta contenuta in  $R$  [ $\Gamma \subseteq R$ ].

## Def. Insieme semplicemente connesso

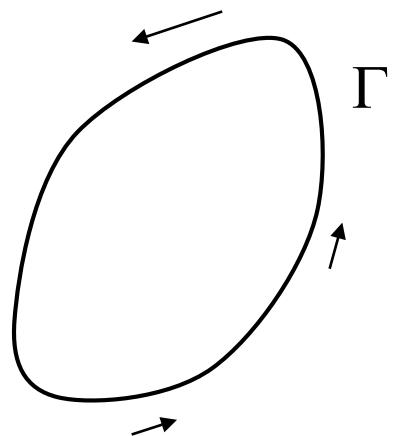
Un insieme  $R \subseteq \mathbb{C}$  è semplicemente connesso se è connesso e per ogni curva chiusa semplice  $\Gamma$  appartentente all'insieme la regione interna di  $\Gamma$  è tutta contenuta in  $R$ .



## Teorema dell'integrale di Cauchy

Sia  $f(s)$  una funzione analitica su di una regione aperta e semplicemente connessa  $U$  e  $\Gamma$  una curva chiusa semplice ivi contenuta.

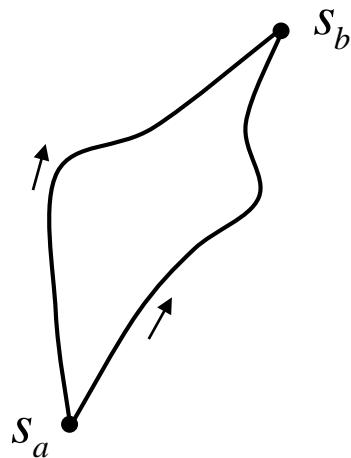
Allora  $\oint_{\Gamma} f(s)ds = 0$



## Corollario

Sia  $f(s)$  una funzione analitica su di una regione aperta e semplicemente connessa  $U$  e  $\Gamma$  una curva ivi contenuta che congiunge  $s_a$  ad  $s_b$ . Allora l'integrale di linea  $\int_{\Gamma} f(s)ds$  non dipende dal percorso  $\Gamma$  ma solo da  $s_a, s_b$  e  $f(s)$ :

$$\int_{\Gamma} f(s)ds = \int_{s_a}^{s_b} f(s)ds$$



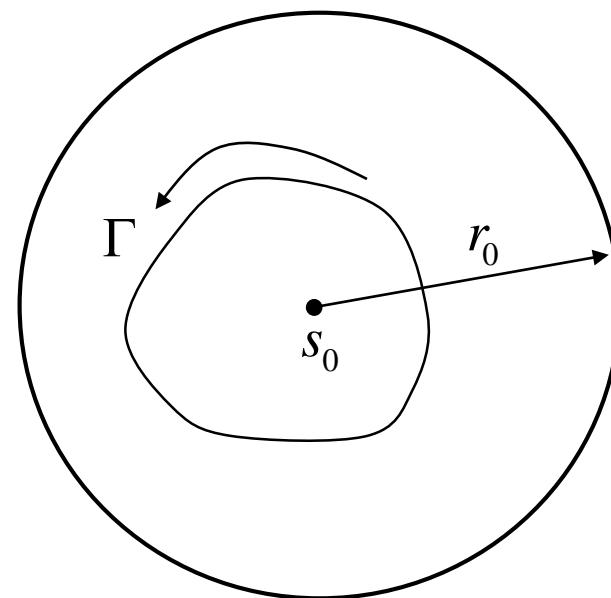
## Teorema – Sviluppo in Serie di Taylor

Sia  $f(s)$  una funzione analitica su di un cerchio  $B(s_0, r_0)$  centrato su  $s_0$  e con raggio  $r_0$ . Allora  $\forall s \in B(s_0, r_0)$

$$f(s) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (s - s_0)^i = c_0 + c_1 (s - s_0) + c_2 (s - s_0)^2 + \cdots + c_i (s - s_0)^i + \cdots$$

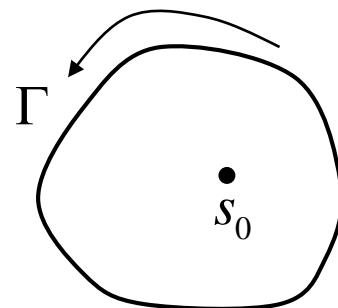
dove ( $i = 0, 1, \dots$ )

$$c_i = \frac{f^{(i)}(s_0)}{i!} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{f(s)}{(s - s_0)^{i+1}} ds.$$



## Corollario – Formula integrale di Cauchy

$$f(s_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{f(s)}{s - s_0} ds.$$



$$f(s) = c_0 + c_1(s - s_0) + c_2(s - s_0)^2 + \cdots + c_i(s - s_0)^i + \cdots$$

## Esempio

$$c_i = \frac{f^{(i)}(s_0)}{i!}, \quad i \in \mathbb{N}$$

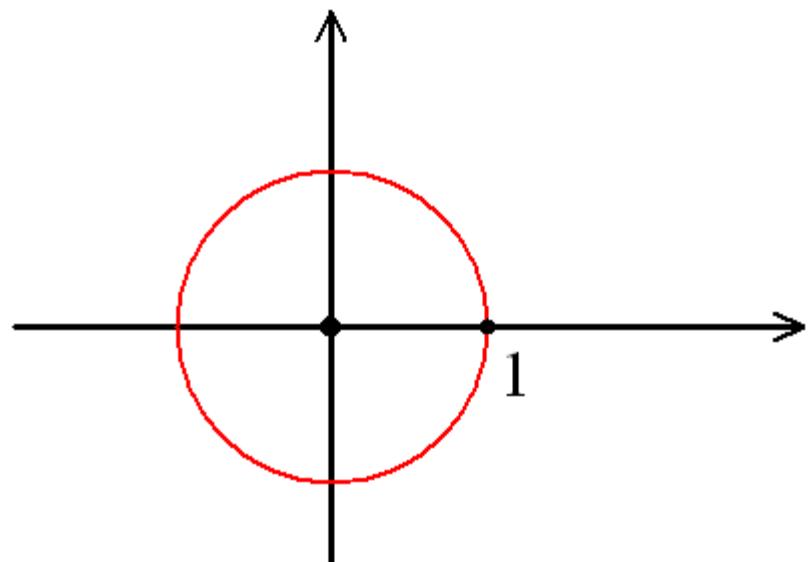
$$f(s) = \frac{1}{1-s}$$

Sviluppiamo  $f(s)$  in serie di Taylor in un intorno dell'origine ( $s_0 = 0$ ).

$f(s)$  è analitica in  $B(0,1) = \{s \in \mathbb{C} : |s| < 1\}$ .

$$f^{(i)}(s) = \frac{i!}{(1-s)^{i+1}} \Rightarrow f^{(i)}(0) = i!$$

$$f(s) = 1 + s + s^2 + s^3 + s^4 + s^5 + s^6 + \cdots$$



## Teorema – Sviluppo in Serie di Laurent

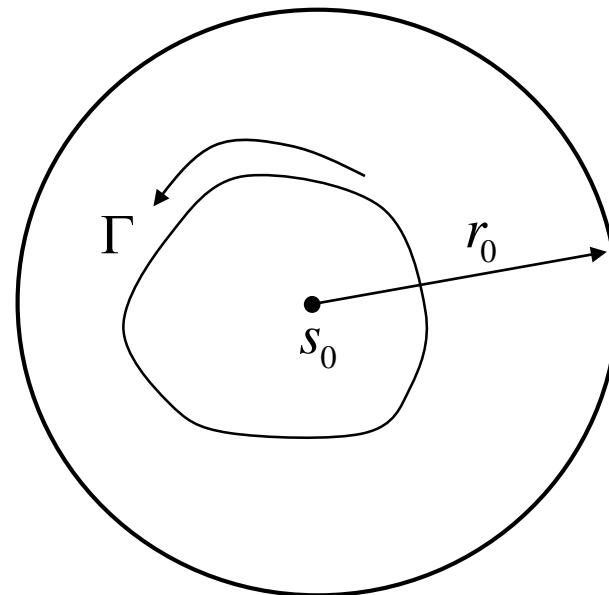
Sia  $f(s)$  una funzione analitica sul cerchio  $B(s_0, r_0)$  ad eccezione del suo centro  $s_0$ .

Allora  $\forall s \in B(s_0, r_0) - \{s_0\}$

$$f(s) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i (s - s_0)^i = \dots + \frac{c_{-2}}{(s - s_0)^2} + \frac{c_{-1}}{(s - s_0)} + c_0 + c_1 (s - s_0) + c_2 (s - s_0)^2 + \dots$$

dove

$$c_i = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{f(s)}{(s - s_0)^{i+1}} ds \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$



$$f(s) = \dots + \frac{c_{-2}}{(s-s_0)^2} + \frac{c_{-1}}{(s-s_0)} + c_0 + c_1(s-s_0) + c_2(s-s_0)^2 + \dots$$

Classificazione del punto isolato  $s_0$ :

- Se  $c_i = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}^- (i = -1, -2, \dots)$

definendo  $f(s_0) = c_0$  risulta  $f(s)$  analitica in  $s = s_0$ .

$$\text{Es.: } f(s) = \frac{(s-1)(s+3)}{(s-1)(s-2)(s+1)}, \quad \text{con } s_0 = 1 \quad f(s) = -2 - \frac{3}{2}(s-1) - \frac{7}{4}(s-1)^2 + \dots$$

- Se  $c_i \neq 0$  per qualche  $i \in \mathbb{Z}^-$   $s_0$  è una **SINGOLARITA'** di  $f(s)$ :

1) **Singolarità POLO** quando i  $c_i \neq 0$  con  $i$  negativo sono in numero finito;

sia  $-n = \min \{i \in \mathbb{Z}^- : c_i \neq 0\}$ :  $s_0$  è **polo di ordine  $n$** .

$$\text{Es.: } f(s) = \frac{s+3}{(s-1)^2(s+1)}, \quad \text{con } s_0 = 1 \quad f(s) = 2(s-1)^{-2} - \frac{1}{2}(s-1)^{-1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}(s-1) + \frac{1}{16}(s-1)^2 + \dots$$

$$\text{Con } s_0 = -1 \quad f(s) = \frac{1}{2}(s+1)^{-1} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8}(s+1) + \frac{7}{16}(s+1)^2 + \dots$$

2) **Singolarità ESSENZIALE** quando i  $c_i \neq 0$  con  $i$  negativo sono infiniti.

$$\text{Es.: } f(s) = e^{\frac{1}{s}}, \quad \text{con } s_0 = 0 \quad f(s) = 1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{2!s^2} + \frac{1}{3!s^3} + \dots$$

## Proprietà

Assumiamo  $f(s)$  analitica in  $B(s_0, r_0) - \{s_0\}$ .

$s_0$  è una singolarità di  $f(s)$  se e solo se  $f(s)$  assume valori illimitati in un intorno di  $s_0$ .

### Teorema di Picard

Sia  $s_0$  una singolarità essenziale di  $f(s)$ . In ogni intorno di  $s_0$ , la funzione  $f(s)$  assume ogni valore complesso infinite volte con l'eventuale eccezione di un solo particolare valore.

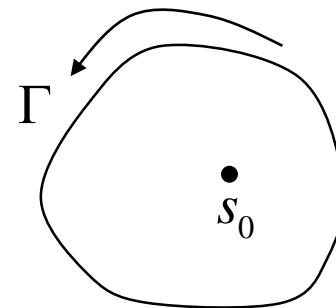
[ovvero: In ogni intorno di  $s_0$ , esistono sempre infinite radici dell'equazione  $f(s) = c$  tranne, al più, per un valore eccezionale di  $c$ .]

$$f(s) = \dots + \frac{c_{-2}}{(s - s_0)^2} + \frac{c_{-1}}{(s - s_0)} + c_0 + c_1(s - s_0) + c_2(s - s_0)^2 + \dots$$

## Def. Residuo

Sia  $s_0$  una singolarità di  $f(s)$ . Il coefficiente  $c_{-1}$  dello sviluppo in serie di Laurent si dice RESIDUO,  $\text{Res}\{f, s_0\}$  della funzione  $f(s)$  in  $s_0$ .

$$\text{Res}\{f, s_0\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} f(s) ds$$



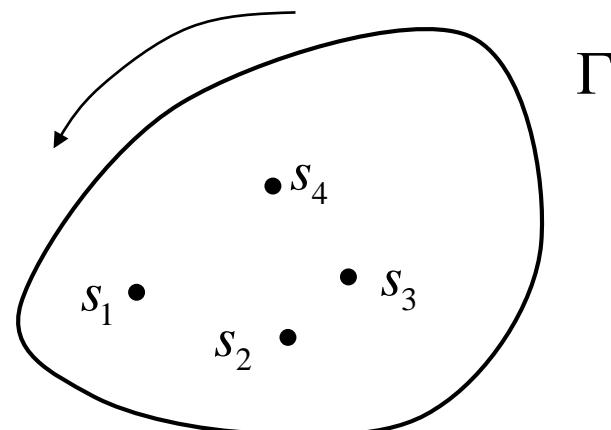
$$f(s) = \dots + \frac{c_{-2}}{(s - s_0)^2} + \frac{\text{Res}\{f, s_0\}}{(s - s_0)} + c_0 + c_1(s - s_0) + c_2(s - s_0)^2 + \dots$$

## Teorema dei residui di Cauchy

Sia  $\Gamma$  una curva chiusa semplice e  $f(s)$  una funzione analitica su  $\Gamma$  e nella sua regione interna ad eccezione dei punti singolari  $s_1, s_2, \dots, s_n$  in essa contenuti.

Allora

$$\oint_{\Gamma} f(s) ds = 2\pi j \sum_{i=1}^n \text{Res}\{f, s_i\}$$



## Poli di $f(s)$

### Proprietà :

Sia  $s_0$  una singolarità polo di  $f(s)$ . Allora  $s_0$  è polo di ordine  $n$  se e solo se esiste  $g(s)$  analitica in  $s_0$  con  $g(s_0) \neq 0$  tale che

$$f(s) = \frac{g(s)}{(s - s_0)^n}$$

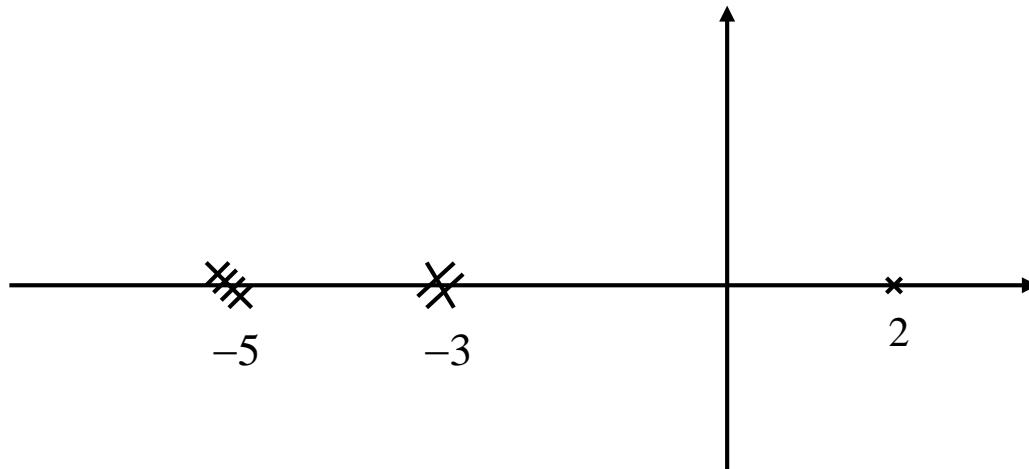
Esempio:

$$f(s) = \frac{s(s+6)^3}{(s-2)(s+3)^2(s+5)^4}$$

2 è un polo di ordine 1,

-3 è un polo di ordine 2,

-5 è un polo di ordine 4.



## Zeri di $f(s)$

Sia  $f(s)$  analitica in  $z$ .

**Def.:**

$z$  è detto zero di  $f$  se  $f(z) = 0$ . Considerato lo sviluppo di Taylor

$$f(s) = c_1(s - z) + c_2(s - z)^2 + \dots \text{ ed } n := \min \{i \in \mathbb{N} : c_i \neq 0\},$$

$z$  è detto zero di ordine  $n$  di  $f(s)$ .

**Proprietà :**

$z$  è zero di ordine  $n$  se e solo se esiste  $g(s)$  analitica in  $z$  con  $g(z) \neq 0$

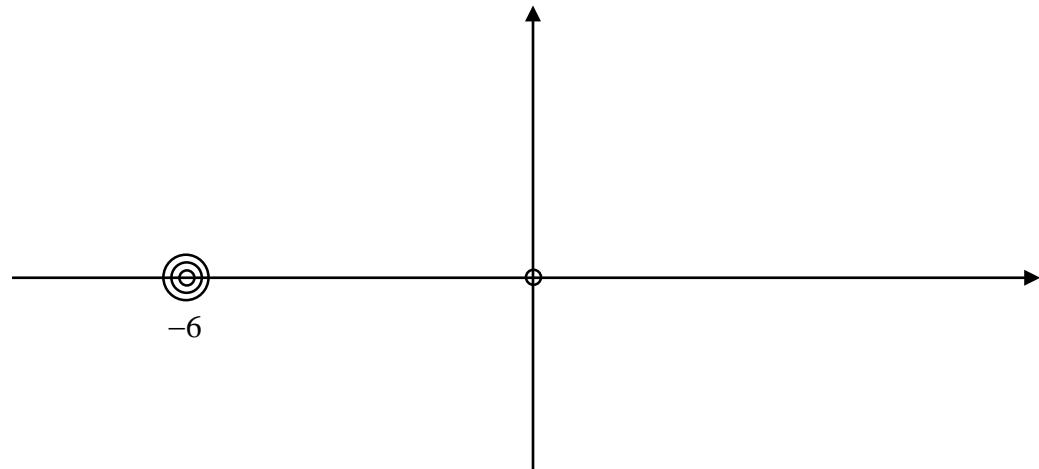
tale che  $f(s) = (s - z)^n g(s)$ .

Esempio:

$$f(s) = \frac{s(s+6)^3}{(s-2)(s+3)^2(s+5)^4}$$

0 è uno zero di ordine 1,

-6 è uno zero di ordine 3.



## Proprietà

Se  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ha una singolarità polare in  $p$  di ordine  $n$  allora

$$\text{Res}\{f, p\} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{s \rightarrow p} D^{n-1} \left( f(s)(s-p)^n \right)$$

anche esprimibile come

$$\text{Res}\{f, p\} = \frac{1}{(n-1)!} D^{n-1} \left( f(s)(s-p)^n \right) \Big|_{s=p}$$

se si assume di effettuare la cancellazione polo-zero fra  $f(s)$  e  $(s-p)^n$ .

**Esempio:**

$$f(s) = \frac{s+4}{(s-2)^3(s+1)^2(s-7)} \quad \text{e} \quad p=2, n=3$$

$$f(s)(s-p)^n = \frac{s+4}{\cancel{(s-2)^3} (s+1)^2(s-7)} \cancel{(s-2)^3} = \frac{s+4}{(s+1)^2(s-7)}$$

$$\text{Res}\{f, p\} = \frac{1}{(n-1)!} D^{n-1} \left( f(s)(s-p)^n \right) \Big|_{s=p}$$

**Dim.:**

$$f(s) = \frac{c_{-n}}{(s-p)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(s-p)^{n-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(s-p)} + c_0 + c_1(s-p) + c_2(s-p)^2 + \cdots$$

$$f(s)(s-p)^n = c_{-n} + c_{-n+1}(s-p) + c_{-n+2}(s-p)^2 + \cdots + c_{-1}(s-p)^{n-1} \\ + c_0(s-p)^n + c_1(s-p)^{n+1} + \cdots$$

$$D(f(s)(s-p)^n) = c_{-n+1} + c_{-n+2} 2(s-p) + \cdots + c_{-1}(n-1)(s-p)^{n-2} + c_0 n(s-p)^{n-1} + \cdots$$

$$D^2(f(s)(s-p)^n) = c_{-n+2} 2 + \cdots + c_{-1}(n-1)(n-2)(s-p)^{n-3} + c_0 n(n-1)(s-p)^{n-2} + \cdots$$

...

$$D^{n-1}(f(s)(s-p)^n) = c_{-1}(n-1)(n-2) \cdots 1 + c_0 n(n-1) \cdots 2 \cdot (s-p) + \cdots$$

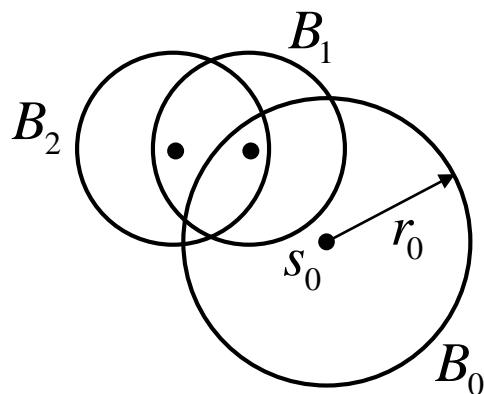
$$D^{n-1}(f(s)(s-p)^n) \Big|_{s=p} = c_{-1}(n-1)(n-2) \cdots 1 = c_{-1}(n-1)!$$

□

## Continuazione analitica

Data una funzione  $f(s)$  definita da uno sviluppo in serie di Taylor su di un cerchio  $B_0(s_0, r_0)$  è possibile estendere ("continuare") la definizione di  $f(s)$  all'esterno di  $B_0$  mediante lo sviluppo in serie di Taylor di altri punti di  $B_0$ . Il procedimento è ricorsivo:

$$B_0 \rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow \dots$$



Possono emergere funzioni a più valori! (funzioni polidrome)

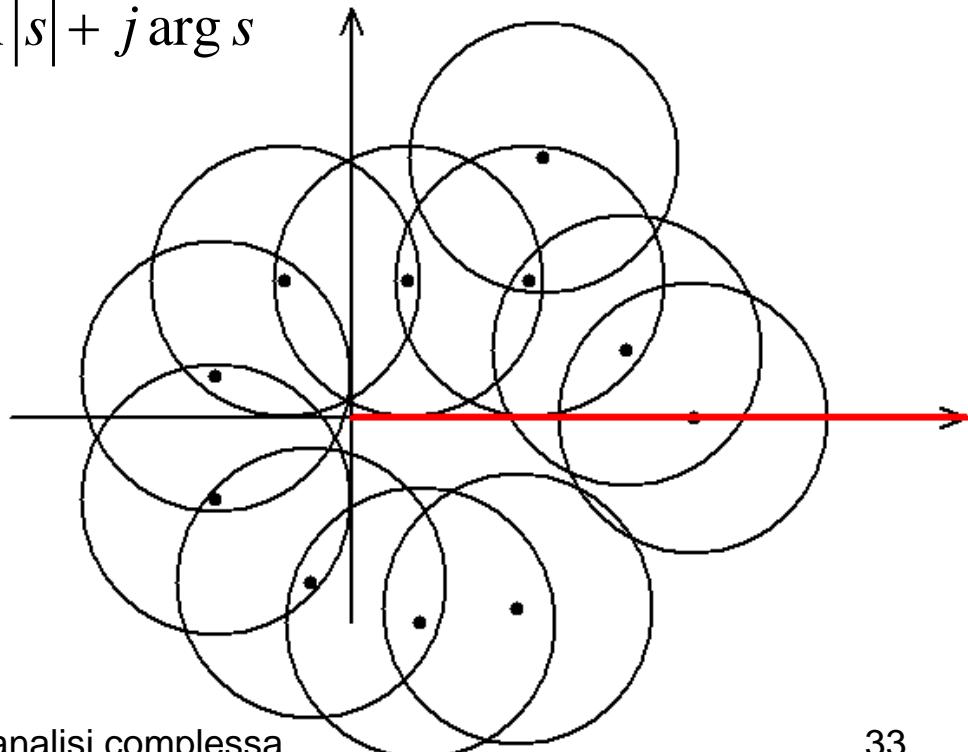
Esempio: estendere la definizione del logaritmo naturale dall'asse reale positivo al piano complesso mediante continuazione analitica. Si potrebbe dimostrare che

$$\ln s = \ln |s| + j \arg s$$

Deduzione euristica:  $s = |s| e^{j \arg s}$

$$\Rightarrow \ln |s| e^{j \arg s} = \ln |s| + \ln e^{j \arg s} = \ln |s| + j \arg s$$

E' una funzione polidroma.



## I concetti introdotti dalla lezione:

- Limiti e derivate di funzioni complesse di variabili complesse
- Funzioni analitiche
- Condizioni di Cauchy-Riemann
- Integrali su curve del piano complesso
- Teorema dell'integrale di Cauchy
- Sviluppo in serie di Taylor
- Formula integrale di Cauchy
- Sviluppo in serie di Laurent
- Teorema dei residui di Cauchy
- Poli e zeri di una funzione
- Continuazione analitica e funzioni polidrome

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle  
Telecomunicazioni

**Lezione n. 4 di Fondamenti di Controlli Automatici**  
**prof. Aurelio Piazzì**

**La trasformata di Laplace**

Università degli Studi di Parma – a.a. 2020-2021

- La **trasformata di Laplace** è un operatore funzionale che converte (“trasforma”) una equazione differenziale in una equazione algebrica.
- Il metodo basato sulla trasformata di Laplace permette di risolvere una equazione differenziale lineare con condizioni iniziali arbitrarie.
- Permette di analizzare i fenomeni transitori ed asintotici di una grande varietà di sistemi (elettrici, meccanici, termici, ecc.)

La **trasformata di Laplace** è un operatore funzionale che si applica ad una funzione  $f$  di variabile reale con codominio  $\mathbb{R}$  (o  $\mathbb{C}$ ):

**1.** Assumiamo  $f \in C_p^\infty(\mathbb{R})$

**2.**  $\exists \sigma \in \mathbb{R}$  per il quale  $\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt < +\infty$

**Note :**

- spesso assumeremo  $f(t) = 0$  per  $t < 0$
- se vale la condizione 2 allora  $\forall \sigma_1 > \sigma : \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\sigma_1 t} dt < +\infty$

**Def. ascissa di convergenza di  $f(t)$**

$$\sigma_c := \inf \left\{ \sigma \in \mathbb{R} : \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt < +\infty \right\}$$

## Def.: Trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace di un segnale (funzione)  $f(t)$  è la funzione  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$  definita da

$$F(s) = \int_{0-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

per i valori  $s \in \mathbb{C}$  per i quali l'integrale converge.

- $F$  è una funzione complessa di variabile complessa,  $\mathcal{L}[\cdot]$  indica l'operatore di Laplace.
- Notazione usuale: le lettere minuscole denotano segnali e funzioni, le corrispondenti lettere maiuscole denotano le trasformate di Laplace, p.e.,  $Y(s)$  indica  $\mathcal{L}[y(t)]$ ,  $E$  indica  $\mathcal{L}[e]$ , ecc.

Consideriamo  $s = \sigma + j\omega$

$$F(s) = \int_{0-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$$

$$|F(s)| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t}| dt = \int_0^{+\infty} |f(t)| |e^{-\sigma t}| |e^{-j\omega t}| dt = \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt$$

$F(s)$  è ben definito per  $\sigma > \sigma_c$  ovvero  $\operatorname{Re} s > \sigma_c$ .

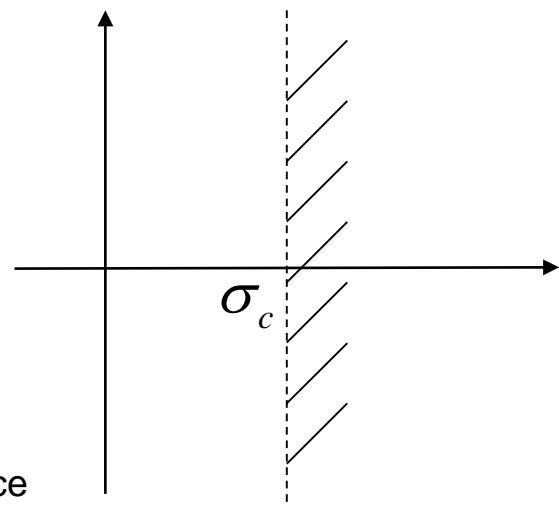
## Proprietà

La trasformata di Laplace  $F(s)$  è una funzione analitica sul semipiano  $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \sigma_c\}$ .

## Proprietà

$$\overline{F(s)} = F(\bar{s})$$

(La barra  $\bar{\phantom{x}}$  indica il coniugato)



Esempio: **segnale gradino unitario**  $1(t) := \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$

$$\mathcal{L}[1(t)] = \int_{0-}^{+\infty} 1(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \left[ \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{+\infty} = \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=+\infty} - \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=0} = \frac{1}{s}$$

Calcolo corretto se  $e^{-st} \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ : vero per  $\operatorname{Re} s > 0$  ( $\sigma_c = 0$ ).

Infatti  $e^{-st} = e^{-(\sigma+j\omega)t} = e^{-\sigma t} e^{-j\omega t}$ .

$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$  è ben definita e analitica per  $\operatorname{Re} s > 0$ .

Utilizzando la continuazione analitica  $\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s} \quad \forall s \in \mathbb{C} - \{0\}$ .

Esempio: **segnale esponenziale**  $e^{at}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{at}] &= \int_{0^-}^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} dt = \left[ \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right]_0^{+\infty} = \\ &= \left. \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right|_{t=+\infty} - \left. \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right|_{t=0} = \frac{1}{s-a}\end{aligned}$$

$e^{-(s-a)t} \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$  quando  $\operatorname{Re}(s-a) > 0 \Rightarrow \operatorname{Re}s > a$  ( $\sigma_c = a$ ).

$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$  è ben definita ed analitica per  $\operatorname{Re}s > a$ .

Utilizzando la continuazione analitica  $\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \quad \forall s \in \mathbb{C} - \{a\}$ .

La trasformata è valida anche quando  $a \in \mathbb{C}$ :

$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \quad \forall s \in \mathbb{C} - \{a\}, \quad \sigma_c = \operatorname{Re}a$

## Linearità

La trasformata di Laplace è un operatore lineare: per ogni segnale  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  e per ogni scalare  $c_1$  e  $c_2$

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)]$$

**Dim.:** è immediata conseguenza della linearità dell'integrale... □

## Esempio

$$\mathcal{L}[4 + 6e^{-t}] = 4\mathcal{L}[1] + 6\mathcal{L}[e^{-t}] = 4\frac{1}{s} + 6\frac{1}{s - (-1)} = \frac{10s + 4}{s(s + 1)}$$

## Iniettività

La trasformata di Laplace è iniettiva:

$$\text{se } \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)] \Rightarrow f(t) = g(t) \text{ su } [0, +\infty)$$

- $F(s)$  determina univocamente  $f(t)$  su  $[0, +\infty)$ . E' quindi ben definita la **trasformata inversa di Laplace**  $\mathcal{L}^{-1}$ .

**Esempio** (slide precedente)

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10s+4}{s(s+1)}\right] = 4 + 6e^{-t}$$

In altre parole, l'unica funzione  $f(t)$  tale che  $F(s) = \frac{10s+4}{s(s+1)}$  è  
 $f(t) = 4 + 6e^{-t}$ .

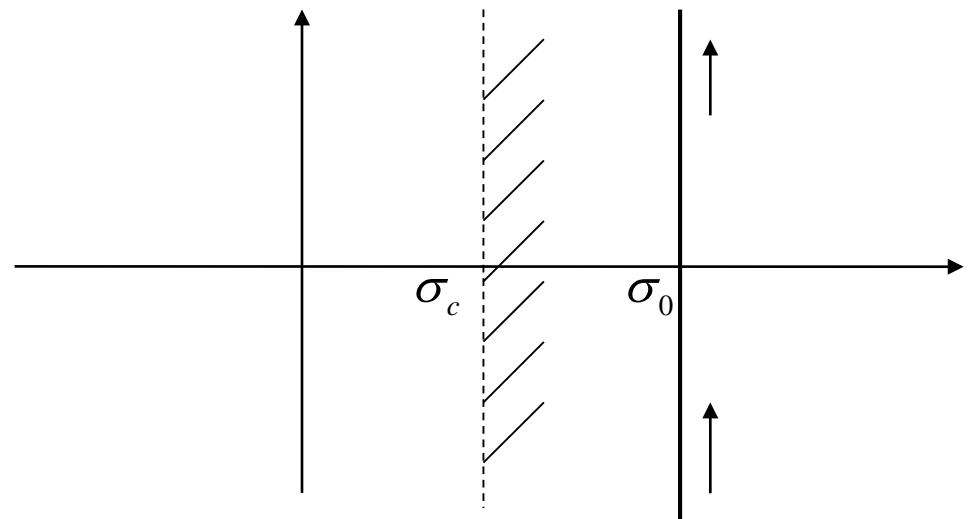
# La trasformata inversa di Laplace

Sia  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$  allora

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

per ogni  $\sigma_0 > \sigma_c$ .

- Si indica  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ .



## La trasformata della derivata

Sia  $f \in C^1(\mathbb{R}_{>0})$  segue

$$\mathcal{L}[Df(t)] = sF(s) - f(0+)$$

**Dim.:**

$$\begin{aligned} \int_{0-}^{+\infty} Df(t)e^{-st} dt &= \int_{0+}^{+\infty} Df(t)e^{-st} dt = \left[ f(t)e^{-st} \right]_{0+}^{+\infty} - \int_{0+}^{+\infty} f(t)(-se^{-st}) dt = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)e^{-st} - \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)e^{-st} + s \int_{0+}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)e^{-st} - f(0+) + sF(s) \end{aligned}$$

Se  $\operatorname{Re} s > \sigma_c$  (ascissa di convergenza di  $f(t)$ )

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)e^{-st} = 0$$

□

## derivate di ordine superiore

Sia  $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$  segue

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[D^2 f] &= \mathcal{L}[D(Df)] = s\mathcal{L}[Df] - Df(0+) = \\ &= s(sF(s) - f(0+)) - Df(0+) = \\ &= s^2 F(s) - sf(0+) - Df(0+)\end{aligned}$$

generalizzando con ricorsione  $[f \in C^i(\mathbb{R}_+)]$ :

$$D^i f_+ \coloneqq D^i f(0+) \text{ con } i = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mathcal{L}[D^i f] = s^i F(s) - s^{i-1} f_+ - s^{i-2} Df_+ - \dots - s D^{i-2} f_+ - D^{i-1} f_+$$

$$\mathcal{L}[D^i f] = s^i F(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-1-j} f_+$$

## Trasformata dell'integrale

$$\mathcal{L} \left[ \int_0^t f(v) dv \right] = \frac{1}{s} F(s)$$

### Esempio

$$\mathcal{L}[t] = \mathcal{L} \left[ \int_0^t 1 \cdot dv \right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

si noti

$$\mathcal{L}[t] = \mathcal{L}[t \cdot 1(t)]$$

## Teorema del valore finale

Sia  $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$  con  $f$  e  $Df$  aventi ascisse di convergenza non positive. Se esiste il limite  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$  vale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

### Esempio

$$f(t) = 4 + 6e^{-t} \Rightarrow F(s) = \frac{10s + 4}{s(s + 1)}, \quad \sigma_c = 0$$

$$Df(t) = -6e^{-t} \Rightarrow \mathcal{L}[Df] = -6 \cdot \frac{1}{s + 1}, \quad \sigma_c = -1$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10s + 4}{s + 1} = 4$$

## Teorema del valore iniziale

Sia  $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$ . Se esiste il limite  $\lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s)$  vale

$$f(0+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s)$$

### Esempio

$$f(t) = 4 + 6e^{-t}, \quad F(s) = \frac{10s + 4}{s(s + 1)}$$

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{10s + 4}{s + 1} = 10 = f(0+)$$

## Traslazione nel tempo

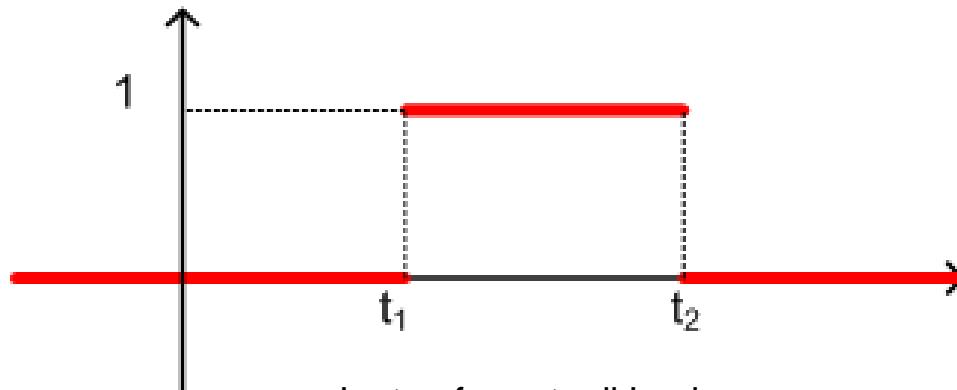
Per ogni  $t_0 \geq 0$  vale

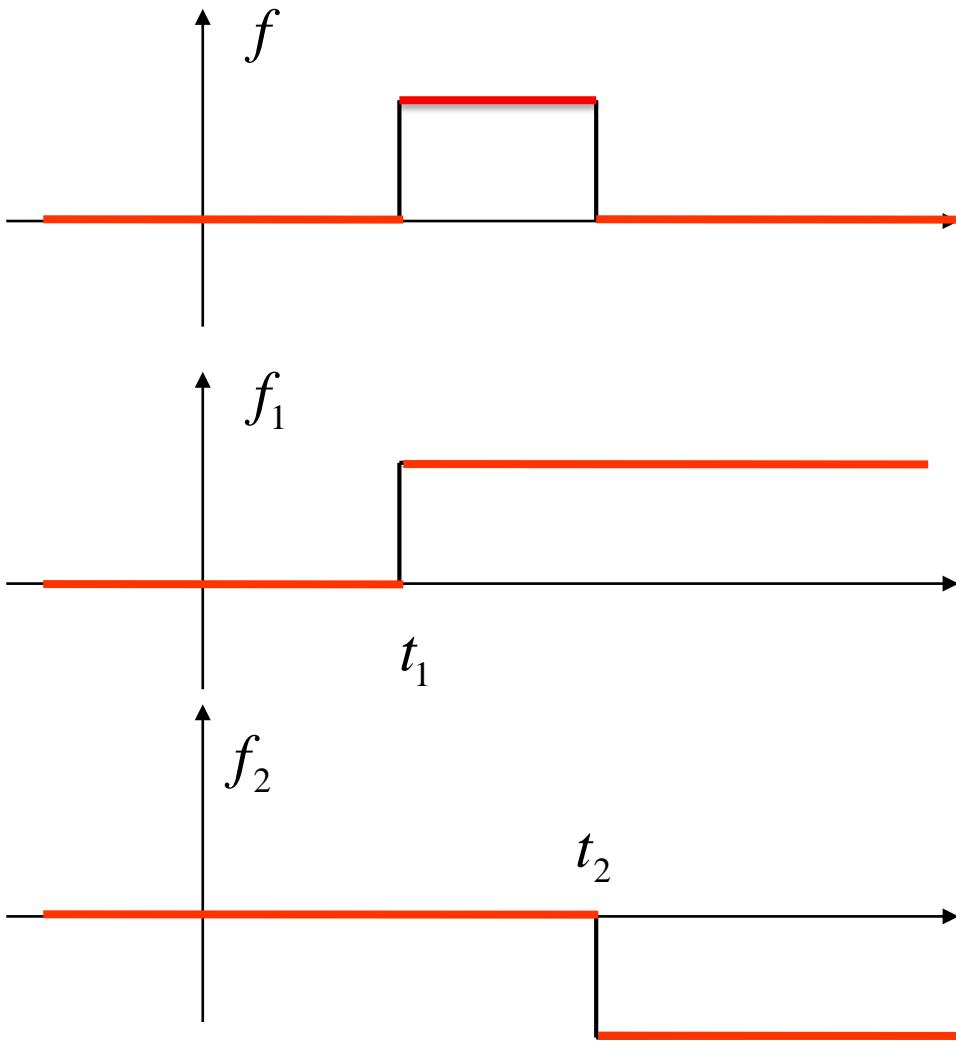
$$\mathcal{L}[f(t - t_0) \cdot 1(t - t_0)] = e^{-t_0 s} F(s)$$

Corollario: Se  $f(t) = 0$  per  $t < 0$  allora  $\forall t_0 \geq 0$  vale  $\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 s} F(s)$

### Esempio

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \in [t_1, t_2] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad \text{con } 0 < t_1 < t_2 \quad (\text{impulso rettangolare})$$





$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

$$f_1(t) := 1 \cdot 1(t - t_1)$$

$$f_2(t) := (-1) \cdot 1(t - t_2)$$

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s)$$

$$= \left( \frac{1}{s} \right) e^{-t_1 s} + \left( -\frac{1}{s} \right) e^{-t_2 s}$$

$$= \frac{e^{-t_1 s} - e^{-t_2 s}}{s}$$

# Traslazione nella variabile complessa (s)

Per ogni  $a \in \mathbb{R}$  ( $\mathbb{C}$ ) vale

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s - a)$$

**Dim.**:

$$\int_{0-}^{+\infty} e^{at} f(t) e^{-st} dt = \int_{0-}^{+\infty} f(t) e^{-(s-a)t} dt = F(s - a)$$

**Esempio**

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \mathcal{L}[te^{at}] = \frac{1}{(s-a)^2}$$

$$\mathcal{L}[t^n e^{at}] = ?$$

$$\mathcal{L} \left[ \int_0^t v^{n-1} dv \right] = \frac{1}{s} \mathcal{L} \left[ t^{n-1} \right] \quad (\text{dal teorema dell'integrale})$$

$$\int_0^t v^{n-1} dv = \left[ \frac{v^n}{n} \right]_0^t = \frac{t^n}{n}$$

$$\mathcal{L} \left[ \frac{t^n}{n} \right] = \frac{1}{s} \mathcal{L} \left[ t^{n-1} \right] \Rightarrow \mathcal{L} \left[ t^n \right] = \frac{n}{s} \mathcal{L} \left[ t^{n-1} \right]$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[ t^n \right] &= \frac{n}{s} \mathcal{L} \left[ t^{n-1} \right] = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \mathcal{L} \left[ t^{n-2} \right] = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdot \frac{n-2}{s} \mathcal{L} \left[ t^{n-3} \right] = \\ &= \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdot \frac{n-2}{s} \cdot \dots \cdot \frac{2}{s} \mathcal{L} \left[ t \right] = \frac{n!}{s^{n-1}} \cdot \mathcal{L} \left[ t \right] = \frac{n!}{s^{n-1}} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{n!}{s^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L} \left[ t^n e^{at} \right] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad (\text{dal teorema della traslazione in s})$$

## Teorema di convoluzione

Si abbia  $f(t) = g(t) = 0$  per  $t < 0$ . La convoluzione dei segnali  $f$  e  $g$ , spesso indicata come  $f * g$ , è il segnale

$$\int_0^t f(v)g(t-v)dv$$

rappresentabile anche come  $(f * g = g * f)$

$$\int_0^t g(v)f(t-v)dv.$$

La trasformata della convoluzione è

$$\mathcal{L} \left[ \int_0^t f(v)g(t-v)dv \right] = F(s)G(s).$$

...riprendiamo il problema:

$$\Sigma \text{ definito da } D^2y(t) + 3Dy(t) + 2y(t) = u(t)$$

Noto  $u(t)$ ,  $t \geq 0$

e le condizioni iniziali  $y(0) = 1$  e  $Dy(0) = 1$

trovare  $y(t)$ ,  $t \geq 0$  ?

Sia  $u(t) \in C_p^{0,\infty}$  e conseguentemente assumiamo  
che  $y(t) \in C_p^{2,\infty}$ .

Applichiamo la trasformata di Laplace all'eq. differenziale:

$$\mathcal{L}(D^2y(t) + 3Dy(t) + 2y(t)) = \mathcal{L}(u(t))$$



$$s^2Y(s) - sy(0) - Dy(0) + 3(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = U(s)$$



$$s^2Y(s) - s - 1 + 3(sY(s) - 1) + 2Y(s) = U(s)$$

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) - s - 4 = U(s)$$

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = U(s) + s + 4$$

Eq. algebrica del primo ordine!

Soluzione nello spazio delle trasformate:

$$Y(s) = \frac{U(s)}{s^2 + 3s + 2} + \frac{s+4}{s^2 + 3s + 2}$$



$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{U(s)}{s^2 + 3s + 2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+4}{s^2 + 3s + 2}\right], \quad t \geq 0$$

$$\frac{s+4}{s^2 + 3s + 2} = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)} = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s+2}$$

$$s+4 = a(s+2) + b(s+1) \Leftrightarrow s+4 = (a+b)s + 2a + b$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=4 \end{cases} \Rightarrow a=3, b=-2 \quad (\text{vedremo un metodo più efficiente...})$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+4}{s^2+3s+2}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s+1} - \frac{2}{s+2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+2}\right] \\ &= 3e^{-t} - 2e^{-2t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G(s) := \frac{1}{s^2 + 3s + 2} &\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{U(s)}{s^2 + 3s + 2}\right] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)] \\ \frac{1}{s^2 + 3s + 2} &= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \Rightarrow g(t) := \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = e^{-t} - e^{-2t}\end{aligned}$$

dal teorema di convoluzione

$$\mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)] = \int_0^t \left( e^{-(t-v)} - e^{-2(t-v)} \right) u(v) dv$$

Si giunge alla soluzione ( $t \geq 0$ )

$$y(t) = \int_0^t \left( e^{-(t-v)} - e^{-2(t-v)} \right) u(v) dv + 3e^{-t} - 2e^{-2t}$$

L'espressione di  $y(t)$  individuata è valida in realtà per ogni  $t \in \mathbb{R}$  (può essere dimostrato con calcolo diretto).

Interpretazione della soluzione...

# Antitrasformazione delle funzioni razionali (il caso dei poli semplici)

Dato  $F(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ , funzione razionale strettamente propria

$(\deg b(s) < \deg a(s))$  con poli tutti semplici si determini

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)].$$

Siano  $a(s)$  e  $b(s)$  polinomi con coefficienti reali ed  $n := \deg a(s)$ .

## Soluzione:

$$F(s) = \frac{b(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad \text{con } p_i \neq p_j \text{ se } i \neq j.$$

idea: **sviluppo in fratti semplici** di  $F(s)$

$$\exists! \ k_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \quad \exists$$

$$F(s) = \frac{k_1}{(s - p_1)} + \frac{k_2}{(s - p_2)} + \dots + \frac{k_n}{(s - p_n)}$$

$k_i$  è il residuo di  $F(s)$  in  $p_i$  (perchè? ...)

Come calcolare i  $k_i$ ?

$$(s - p_1)F(s) = k_1 + \frac{k_2}{(s - p_2)}(s - p_1) + \dots + \frac{k_n}{(s - p_n)}(s - p_1)$$

$$\Rightarrow k_1 = (s - p_1)F(s) \Big|_{s=p_1}$$

$$\text{in generale} \quad k_i = (s - p_i)F(s) \Big|_{s=p_i} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{aligned}
f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_2}{s-p_2} + \dots + \frac{k_n}{s-p_n} \right] = \\
&= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{k_1}{s-p_1} \right] + \dots + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{k_n}{s-p_n} \right] = \\
&= k_1 e^{p_1 t} + \dots + k_n e^{p_n t}
\end{aligned}$$

$$f(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{p_i t}$$

□

## esempio

$$\frac{s+4}{(s+1)(s+2)} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2}$$

$$k_1 = \frac{s+4}{s+2} \Big|_{s=-1} = 3 \quad k_2 = \frac{s+4}{s+1} \Big|_{s=-2} = -2$$

I concetti introdotti dalla lezione:

- La trasformata di Laplace
- Linearità ed iniettività (invertibilità)
- La trasformata inversa di Laplace
- Teoremi: della derivata, dell'integrale, del valore finale, del valore iniziale, della traslazione nel tempo, della traslazione in s, di convoluzione.
- Antitrasformazione delle funzioni razionali nel caso dei poli semplici

## Trasformate notevoli

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$$

Corsi di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle  
Telecomunicazioni

**Lezione n. 5 di Fondamenti di Controlli Automatici  
prof. Aurelio Piazz**

**Le funzioni impulsive e l'insieme dei  
behaviors**

Università degli Studi di Parma – a.a. 2020-2021

Consideriamo un sistema dinamico  $\Sigma$  descritto da

$$Dy(t) + 2y(t) = 2Du(t) + 2u(t)$$

ed assumiamo che per i tempi negativi sia

$$y(t) = e^{-2t} \quad \text{e} \quad u(t) = 0 \quad \text{con} \quad t < 0$$

Questa coppia di funzioni soddisfa l'eq. diff.:

$$Dy(t) = -2e^{-2t}$$

$$\Rightarrow (-2e^{-2t}) + 2(e^{-2t}) = 0 \quad \forall t < 0$$

Quindi:

$$(0, e^{-2t}) \Big|_{(-\infty, 0)} \in \mathcal{B}$$

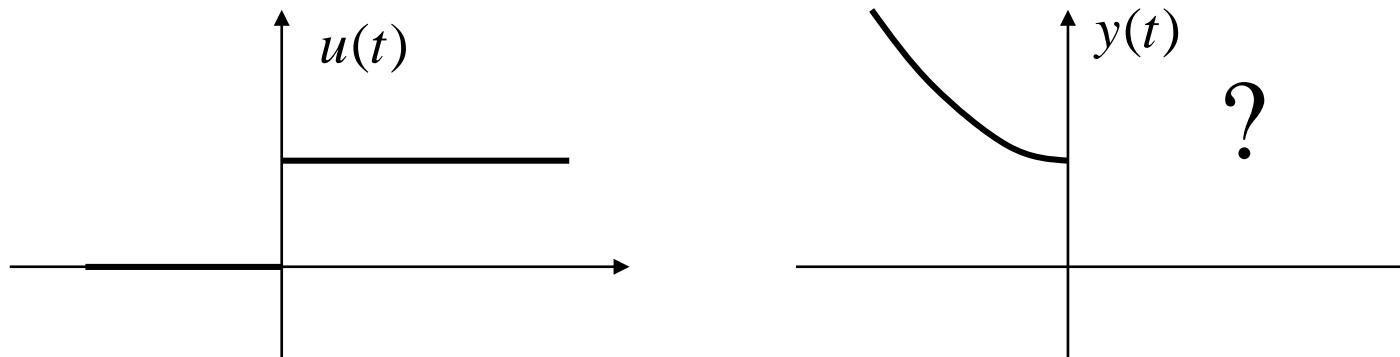
Introduciamo nel sistema una "azione forzante"

$$u(t) = 1 \quad \text{per } t \geq 0$$

Quindi  $u(t) = 1(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$  (è un gradino unitario)

**Problema:**

determinare  $y(t)$  per  $t \geq 0$



Condizioni iniziali:

$$u(0-) = 0, \quad u(0+) = 1, \quad y(0-) = 1, \quad y(0+) = ?$$

Se fosse noto  $y_+ := y(0+)$  potremmo applicare la t. di Laplace:

$$sY(s) - y_+ + 2Y(s) = 2(sU(s) - u(0+)) + 2U(s)$$

$$(s+2)Y(s) - y_+ = 2(sU(s) - 1) + 2U(s)$$

$$(s+2)Y(s) = (2s+2)U(s) + y_+ - 2$$

$$Y(s) = \frac{2s+2}{s+2}U(s) + \frac{y_+ - 2}{s+2}; \quad U(s) = \mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{2s+2}{s+2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{y_+ - 2}{s+2} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} + \frac{y_+ - 2}{s+2}$$

$$y(t) = 1 + e^{-2t} + (y_+ - 2)e^{-2t} \quad \text{per } t \geq 0$$

La coppia di funzioni:

$$u(t) = l(t) \quad t \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = \begin{cases} e^{-2t} & \text{per } t < 0 \\ 1 + e^{-2t} + (y_+ - 2)e^{-2t} & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

soddisfa l'eq. differenziale  $Dy + 2y(t) = 2Du(t) + 2u(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} - \{0\}$

per qualunque valore del parametro  $y_+$  (assurdo!). La risposta  $y(t)$  su  $[0, +\infty)$  deve esistere ed essere unica (ambito dei sistemi deterministici) quindi **non è possibile** definire l'insieme dei behaviors come

$$\mathcal{B} = \left\{ (u(t), y(t)) \in C_p^\infty(\mathbb{R})^2 : Dy + 2y = 2Du + 2u \quad \forall t \in \mathbb{R} - \{t_1, t_2, \dots\} \right\}$$

Si osserva che

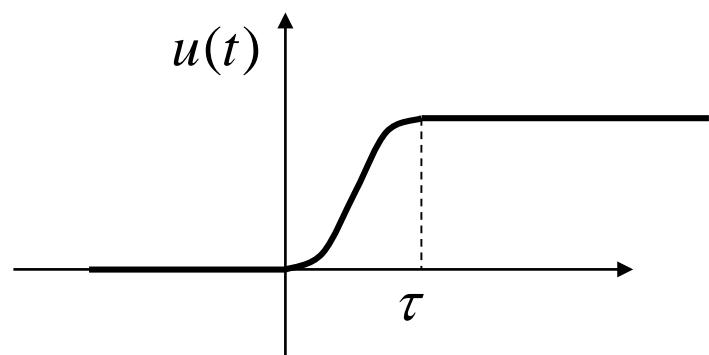
$$\left\{ (u(t), y(t)) \in (C_p^{1,\infty})^2 : Dy + 2y = 2Du + 2u \quad \forall t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{B}$$

Come risolvere l'impasse?

**Idea:** definisco l'azione forzante come

$$u(t) := \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 3\frac{t^2}{\tau^2} - 2\frac{t^3}{\tau^3} & \text{per } t \in [0, \tau) \\ 1 & \text{per } t \geq \tau \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(t) \in C_p^{1,\infty} \quad \forall \tau > 0$$



Assumendo  $y(t) \in C_p^{1,\infty}$  segue  $y(0-) = y(0+) = 1$ .

Posso quindi determinare  $y(t)$  per  $t > 0$  con le condizioni iniziali al tempo  $0+$ :  $u(0+) = 0$  e  $y(0+) = 1$ .

**Soluzione :**

$$t \in [0, \tau) : y(t) = 6 \frac{t^2}{\tau^2} - 4 \frac{t^3}{\tau^3} - 2e^{-2t} \int_0^t e^{2v} \left( 3 \frac{v^2}{\tau^2} - 2 \frac{v^3}{\tau^3} \right) dv + e^{-2t}$$

$$t \geq \tau : y(t) = 1 + e^{-2t} - 2e^{-2t} \int_0^\tau e^{2v} \left( 3 \frac{v^2}{\tau^2} - 2 \frac{v^3}{\tau^3} \right) dv + e^{-2(t-\tau)}$$

Si noti  $y(0-) = y(0+)$  e  $Dy(0-) = Dy(0+)$

$$y(\tau-) = y(\tau+) \text{ e } Dy(\tau-) = Dy(\tau+) \quad \forall \tau > 0.$$

Quindi è verificato che  $y(t) \in C_p^{1,\infty}$  ed inoltre la coppia

$(u(t), y(t))$  così definita soddisfa

$$Dy(t) + 2y(t) = 2Du(t) + 2u(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall \tau > 0.$$

$$u(t) := \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 3\frac{t^2}{\tau^2} - 2\frac{t^3}{\tau^3} & \text{per } t \in [0, \tau) \\ 1 & \text{per } t \geq \tau \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} e^{-2t} & t < 0 \\ 6\frac{t^2}{\tau^2} - 4\frac{t^3}{\tau^3} - 2e^{-2t} \int_0^t e^{2v} \left( 3\frac{v^2}{\tau^2} - 2\frac{v^3}{\tau^3} \right) dv + e^{-2t} & t \in [0, \tau) \\ 1 + e^{-2t} - 2e^{-2t} \int_0^\tau e^{2v} \left( 3\frac{v^2}{\tau^2} - 2\frac{v^3}{\tau^3} \right) dv + e^{-2(t-\tau)} & t \geq \tau \end{cases}$$

Osserviamo che per  $\tau \rightarrow 0+$

$$u(t) \rightarrow 1(t) \quad \text{e} \quad y(t) \rightarrow \begin{cases} e^{-2t} & \text{per } t < 0 \\ 1 + 2e^{-2t} & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

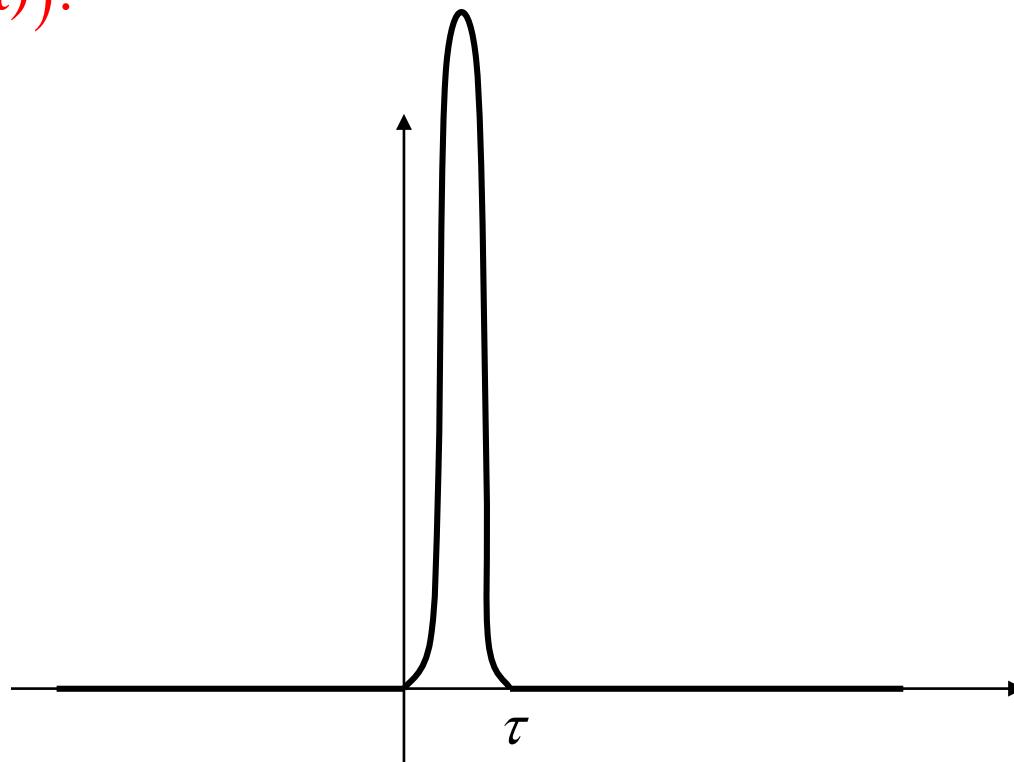
Da  $\lim_{t \rightarrow 0+} 1 + 2e^{-2t} = 3$  ovvero  $y_+ = 3$ .

Questa è la soluzione che vorremmo trovare subito senza utilizzare il metodo di *smoothing*.

Quando  $\tau \rightarrow 0+$   $Du(t)$  in un intorno dell'origine diverge all'infinito!

$$Du(t) = 6\frac{t}{\tau^2} - 6\frac{t^2}{\tau^3} \quad \text{per } t \in [0, \tau] \Rightarrow \max_{t \in [0, \tau]} Du(t) = Du(t) \Big|_{t=\frac{\tau}{2}} = \frac{3}{2\tau}$$

$Du(t)$  converge ad una "funzione" impulsiva (distribuzione) chiamata delta di Dirac ( $\delta(t)$ ).

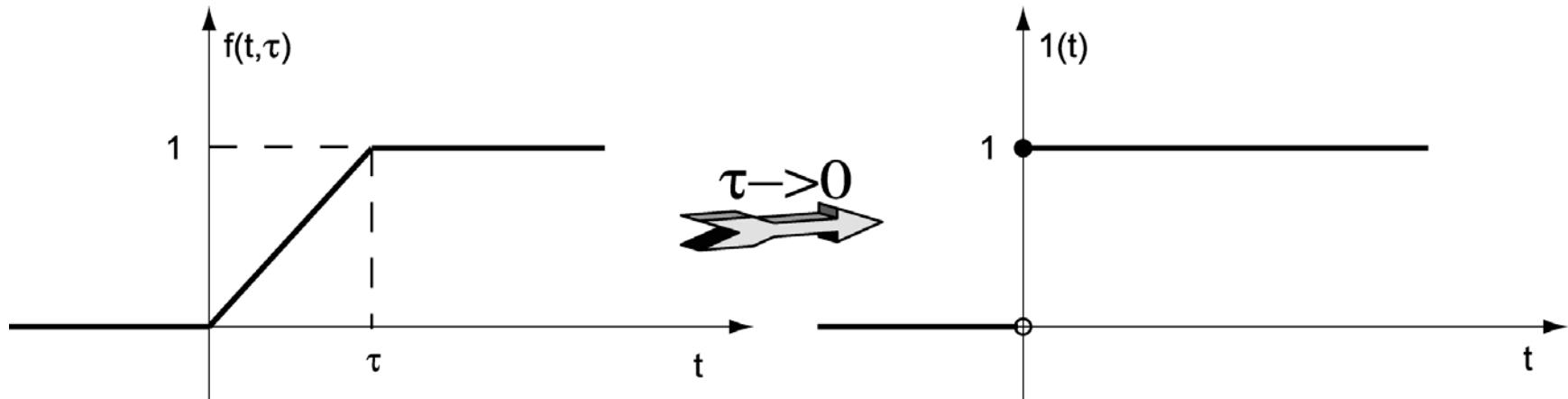


# Cenni di teoria delle funzioni impulsive

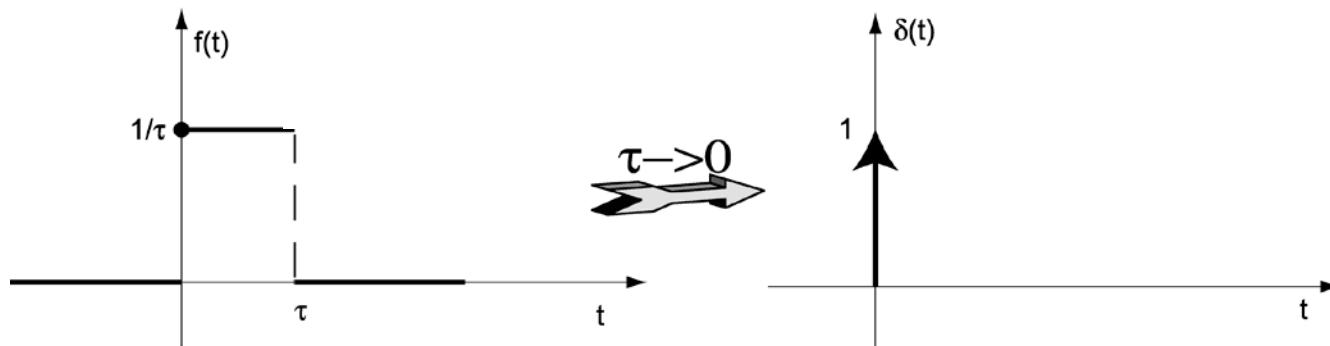
Gradino unitario:  $1(t) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$

Introduciamo  $f(t; \tau) \in C_p^{0,\infty}$ :  $f(t; \tau) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\tau}t & 0 \leq t \leq \tau \\ 1 & t > \tau \end{cases}$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} f(t; \tau) = 1(t)$$



$$Df(t; \tau) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\tau} & 0 \leq t < \tau \\ 0 & t \geq \tau \end{cases}$$



Formalmente definiamo  
 $\delta(t) := \lim_{\tau \rightarrow 0^+} Df(t; \tau)$   
(è la delta di Dirac)

$\delta(t)$  è una distribuzione o, più informalmente, una funzione impulsiva.

- **Interpretazione di  $\delta(t)$**

$\delta(t)$  è la **derivata generalizzata** del gradino unitario:  $\delta(t) := D^* 1(t)$

$D^*$  è l'operatore della derivata generalizzata: è un operatore lineare (come lo è  $D$ ).

Più precisamente,  $D^*$  è la derivata (in senso) distribuzionale.

- Proprietà della delta di Dirac:

assumendo  $t_a < T < t_b$ :

$$\int_{t_a}^{t_b} \delta(t - T) dt = 1; \quad \int_{t_a}^{t_b} f(t) \delta(t - T) dt = f(T)$$

- Introduciamo le derivate (generalizzate) di  $\delta(t)$ :

$D^{*i} \delta(t) \equiv$  derivata generalizzata di ordine  $i$  della delta di Dirac

$$\delta^{(i)}(t) := D^{*i} \delta(t)$$

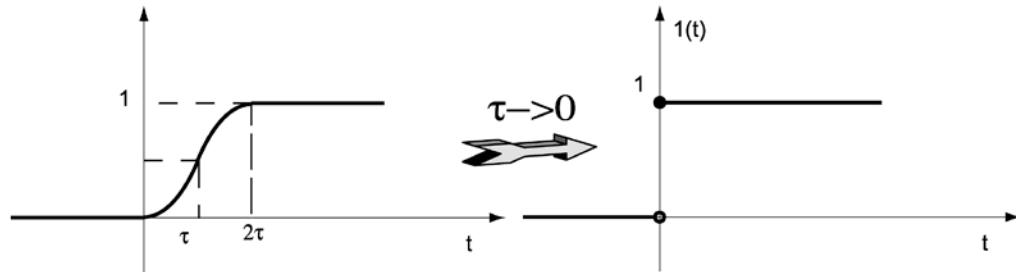
## Costruzione di $\delta^{(1)}(t)$ mediante limite di una funzione continua a tratti.

$$f(t; \tau) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2\tau^2}t^2 & 0 \leq t \leq \tau \\ -\frac{1}{2\tau^2}t^2 + \frac{2}{\tau}t - 1 & \tau \leq t \leq 2\tau \\ 1 & t > 2\tau \end{cases}; \quad f(t; \tau) \in C_p^{1,\infty}$$

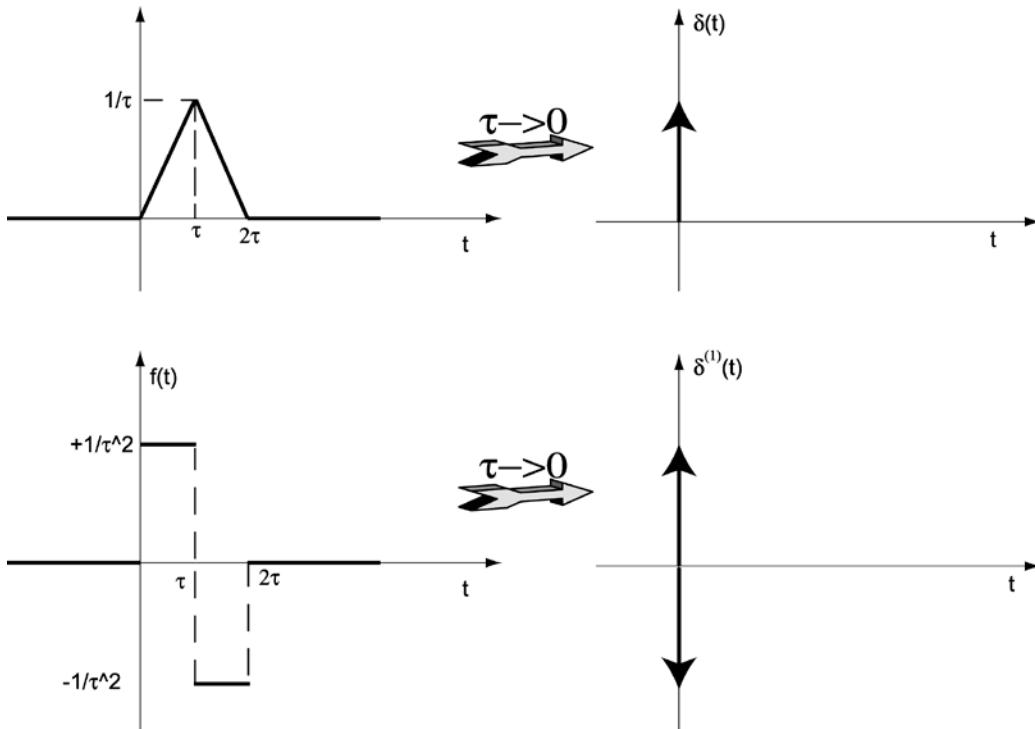
$$Df(t; \tau) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\tau^2}t & 0 \leq t \leq \tau \\ -\frac{1}{\tau^2}t + \frac{2}{\tau} & \tau \leq t \leq 2\tau \\ 0 & t > 2\tau \end{cases} \quad D^2f(t; \tau) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\tau^2} & 0 \leq t \leq \tau \\ -\frac{1}{\tau^2} & \tau \leq t \leq 2\tau \\ 0 & t > 2\tau \end{cases}$$

$$1(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} f(t; \tau) \quad \delta(t) := D^* 1(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} Df(t; \tau)$$

$$\delta^{(1)}(t) \coloneqq D^* \delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0+} D^2 f(t; \tau)$$



Questo metodo costruttivo si può estendere per mostrare il significato di  $\delta^{(i)}(t)$ ,  $i > 1$ .



- Derivate generalizzate del gradino unitario:

$$D^* 1(t) = \delta(t)$$

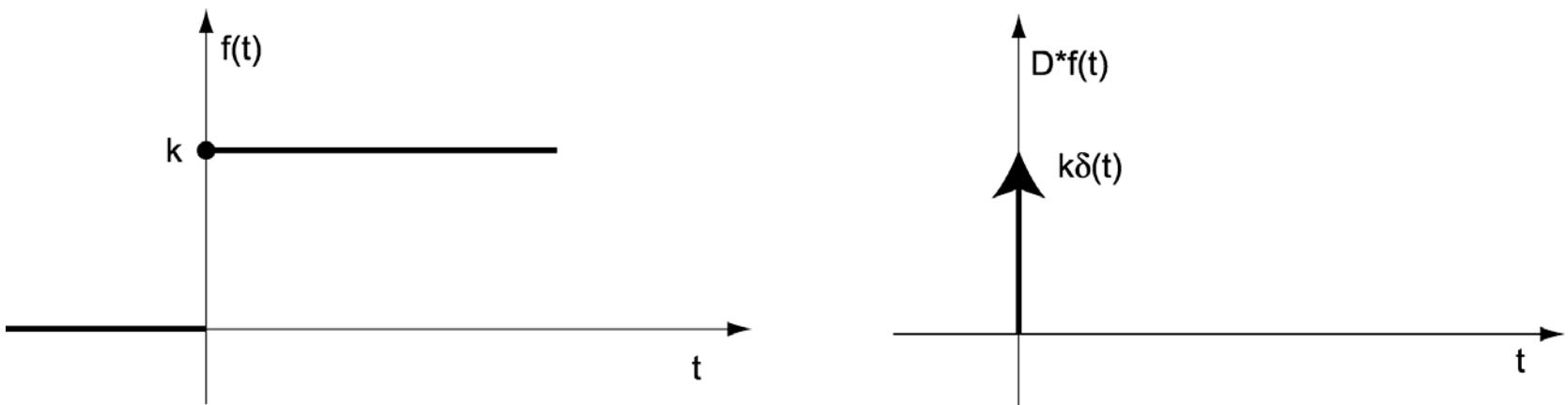
$$D^{*2} 1(t) = D^* (D^* 1(t)) = D^* \delta(t) = \delta^{(1)}(t)$$

$$D^{*3} 1(t) = D^* (D^{*2} 1(t)) = D^* \delta^{(1)}(t) = \delta^{(2)}(t)$$

.....

$$D^{*n} 1(t) = \delta^{(n-1)}(t)$$

- Derivate generalizzate della funzione gradino  $f(t) = k1(t)$



$$D^*(k1(t)) = kD^*(1(t)) = k\delta(t)$$

$$D^{*2}(k1(t)) = kD^{*2}(1(t)) = k\delta^{(1)}(t)$$

.....

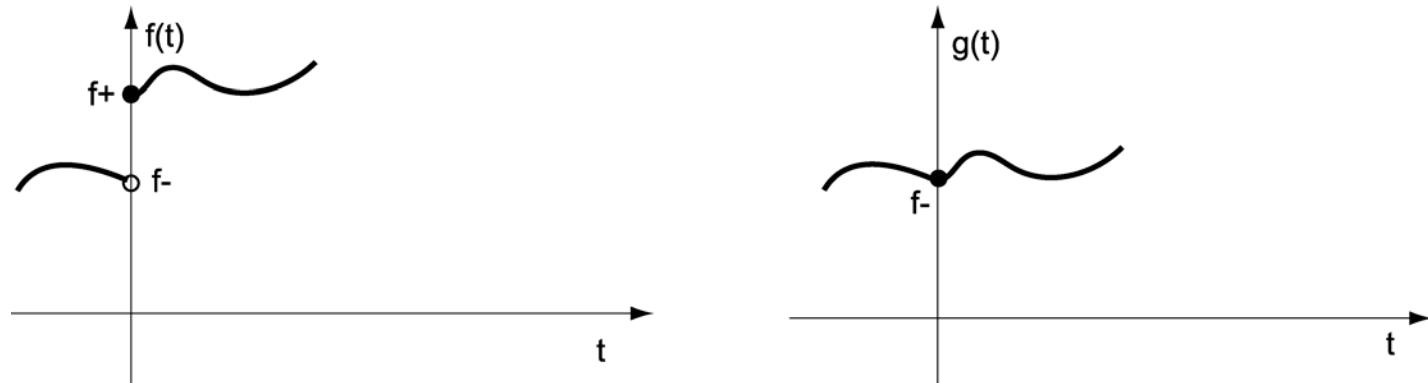
$$D^{*n}(k1(t)) = k\delta^{(n-1)}(t)$$

## • Derivate generalizzate di una funzione discontinua

$f \in C_p^\infty(\mathbb{R})$  e sia  $t = 0$  il solo istante di discontinuità della f.

$$g(t) := \begin{cases} f(t) & t < 0 \\ f(t) - (f_+ - f_-) & t \geq 0 \end{cases} ; \quad g(t) \in C_p^{0,\infty}$$

$$\Rightarrow g(t) = f(t) - (f_+ - f_-)1(t)$$



Rappresentazione della funzione discontinua  $f(t)$  (relazione di ordine zero):

$$f(t) = g(t) + (f_+ - f_-)l(t)$$

ovvero

$$\text{f. discontinua} = \text{f. continua} + \text{f. a gradino}$$

$$f(t) = g(t) + (f_+ - f_-)l(t)$$

Derivando in senso usuale  $Df(t) = Dg(t) \quad \forall t \neq 0$ .

**Assunzione:** la derivata generalizzata di una funzione continua sia:  $D^*g(t) := Dg(t^+)$

Applichiamo alla relazione di ordine zero l'operatore  $D^*$ :

$$D^*f(t) = D^*g(t) + D^*((f_+ - f_-)l(t))$$

$$D^*f(t) = Dg(t^+) + (f_+ - f_-)\delta(t)$$

$$D^*f(t) = Df(t^+) + (f_+ - f_-)\delta(t)$$

derivata gen. di ordine 1 = f. discontinua + f. impulsiva (di ordine 0)

$$D^* f(t) = Df(t^+) + (f_+ - f_-) \delta(t)$$

Se  $t < 0$  o  $t > 0$ :  $D^* f(t) = Df(t)$

Se  $t = 0$ :  $D^* f(0) = Df(0^+) + (f_+ - f_-) \delta(0) = (f_+ - f_-) \delta(0)$



La funzione discontinua  $Df(t^+)$  può essere scomposta nella somma di una funzione continua ed una funzione a gradino:

$$g_1(t) := Df(t^+) - (Df_+ - Df_-) \mathbf{1}(t) \Rightarrow g_1(t) \in C_p^{0,\infty}$$

$$D^* f(t) = g_1(t) + (Df_+ - Df_-) \mathbf{1}(t) + (f_+ - f_-) \delta(t)$$

d. generalizzata di ordine 1 = f. continua + f. a gradino + f. impulsiva di ordine 0

$$g_1(t) = Df(t^+) - (Df_+ - Df_-)1(t)$$

$$D^*f(t) = g_1(t) + (Df_+ - Df_-)1(t) + (f_+ - f_-)\delta(t)$$

Applicando la derivata generalizzata alla relazione che esprime  $D^*f(t)$ :

$$D^{*2}f(t) = Dg_1(t^+) + (Df_+ - Df_-)\delta(t) + (f_+ - f_-)\delta^{(1)}(t)$$

Dalla definizione di  $g_1(t)$ :  $Dg_1(t) = D^2f(t)$

$$D^{*2}f(t) = D^2f(t^+) + (Df_+ - Df_-)\delta(t) + (f_+ - f_-)\delta^{(1)}(t)$$

Se  $t < 0$  o  $t > 0$ :  $D^{*2}f(t) = D^2f(t)$

Se  $t = 0$ :  $D^{*2}f(0) = (Df_+ - Df_-)\delta(0) + (f_+ - f_-)\delta^{(1)}(0)$

$$g_2(t) := D^2f(t^+) - (D^2f_+ - D^2f_-)1(t) \Rightarrow g_2(t) \in C^{0,\infty}$$

$$D^{*2}f(t) = g_2(t) + (D^2f_+ - D^2f_-)1(t) + (Df_+ - Df_-)\delta(t) + (f_+ - f_-)\delta^{(1)}(t)$$

[ d. gen. di ord. 2 = f. cont. + f. a gradino + f. impul. di ord. 0 + f. impul. di ord. 1 ]

Iterando il ragionamento si ottiene:

$$D^{*n} f(t) = D^n f(t^+) + \left( D^{n-1} f_+ - D^{n-1} f_- \right) \delta(t) + \cdots + \left( f_+ - f_- \right) \delta^{(n-1)}(t)$$

Se  $t < 0$  o  $t > 0$ :  $D^{*n} f(t) = D^n f(t)$

Se  $t = 0$ :  $D^{*n} f(0) = \left( D^{n-1} f_+ - D^{n-1} f_- \right) \delta(0) + \cdots + \left( f_+ - f_- \right) \delta^{(n-1)}(0)$

Più in generale:  $f \in C_p^\infty(\mathbb{R})$  con  $t_1, t_2, \dots$  istanti di possibile discontinuità.

$$\begin{aligned}
D^{*n} f(t) &= D^n f(t^+) + \\
&+ \left( D^{n-1}(t_1^+) - D^{n-1}(t_1^-) \right) \delta(t - t_1) + \cdots + \left( f(t_1^+) - f(t_1^-) \right) \delta^{(n-1)}(t - t_1) + \\
&+ \left( D^{n-1}(t_2^+) - D^{n-1}(t_2^-) \right) \delta(t - t_2) + \cdots + \left( f(t_2^+) - f(t_2^-) \right) \delta^{(n-1)}(t - t_2) + \\
&+ \dots
\end{aligned}$$

$$D^{*n} f(t) = D^n f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} - \{t_1, t_2, \dots\}$$

$$D^{*n} f(t_1) = \left( D^{n-1}(t_1^+) - D^{n-1}(t_1^-) \right) \delta(0) + \cdots + \left( f(t_1^+) - f(t_1^-) \right) \delta^{(n-1)}(0)$$

$$D^{*n} f(t_2) = \left( D^{n-1}(t_2^+) - D^{n-1}(t_2^-) \right) \delta(0) + \cdots + \left( f(t_2^+) - f(t_2^-) \right) \delta^{(n-1)}(0)$$

...

# Principio di identità delle funzioni impulsive

Le funzioni impulsive

$$c_{-1} + c_0 \delta(0) + c_1 \delta^{(1)}(0) + \cdots + c_{k_1} \delta^{(k_1)}(0) \quad \text{e}$$

$$d_{-1} + d_0 \delta(0) + d_1 \delta^{(1)}(0) + \cdots + d_{k_2} \delta^{(k_2)}(0)$$

sono uguali fra loro se e solo se

$$c_i = d_i, \quad i = 0, 1, \dots, \min\{k_1, k_2\}$$

$$\text{se } k_1 > k_2 \quad c_i = 0, \quad i = k_2 + 1, \dots, k_1$$

$$\text{se } k_1 < k_2 \quad d_i = 0, \quad i = k_1 + 1, \dots, k_2$$

## Esempi

$$7 + 3\delta(0) + 9\delta^{(1)}(0) = 1 + 3\delta(0) + 9\delta^{(1)}(0) \quad \text{Vero}$$

$$7 + 3\delta(0) + 9\delta^{(1)}(0) = 7 + 3\delta(0) + 4\delta^{(1)}(0) \quad \text{Falso}$$

$$7 + 3\delta(0) + 9\delta^{(1)}(0) = 7 + 3\delta(0) + 9\delta^{(1)}(0) + 2\delta^{(2)}(0) \quad \text{Falso}$$

Ritorniamo all'esempio iniziale: l'eq. diff. di  $\Sigma$  interpretata in senso distribuzionale è

$$D^*y(t) + 2y(t) = 2D^*u(t) + 2u(t)$$

Deve essere soddisfatta per ogni  $t \in \mathbb{R}$  compresi gli istanti di discontinuità.

Per  $t = 0$

$$(y_+ - y_-)\delta(0) + 2y_+ = 2(u_+ - u_-)\delta(0) + 2u_+$$

$$y_+ - y_- = 2(u_+ - u_-)$$

$$\Rightarrow \textcolor{red}{y_+} = y_- + 2(u_+ - u_-) = 1 + 2(1 - 0) = 3 !$$

## Insieme dei behaviors

Dato un sistema dinamico  $\Sigma$  descritto dall'eq. differenziale

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u$$

si definisce insieme dei behaviors, o **behavior**, di  $\Sigma$

$$\mathcal{B} := \left\{ (u, y) \in C_p^\infty(\mathbb{R})^2 : \sum_{i=0}^n a_i D^{*i} y = \sum_{i=0}^m b_i D^{*i} u \right\}$$

L'equazione differenziale è soddisfatta in senso distribuzionale per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

Le condizioni iniziali associate a  $\Sigma$  al tempo  $t = 0$  sono

$$y(0), D y(0), \dots, D^{n-1} y(0)$$

$$u(0), D u(0), \dots, D^{m-1} u(0)$$

Se  $t = 0$  è istante di discontinuità emergono le condizioni al tempo  $0-$  e al tempo  $0+$ .

Le relazioni fra i valori al tempo  $0-$

$$y_-, D y_-, \dots, D^{n-1} y_-; \quad u_-, D u_-, \dots, D^{m-1} u_-$$

e quelli al tempo  $0+$

$$y_+, D y_+, \dots, D^{n-1} y_+; \quad u_+, D u_+, \dots, D^{m-1} u_+$$

sono determinabili uguagliando le espressioni impulsive dell'eq. differenziale al tempo  $t = 0$ .

## Relazioni fra le condizioni iniziali in un istante di discontinuità ( $\rho \geq 1$ )

$$y_+ = y_- , D y_+ = D y_- , \dots , D^{\rho-1} y_+ = D^{\rho-1} y_- \quad [\rho = n - m]$$

$$\begin{bmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & D^\rho y_+ - D^\rho y_- \\ a_{\rho+2} & & \ddots & a_n & 0 \\ a_{\rho+1} & a_{\rho+2} & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^{\rho+1} y_+ - D^{\rho+1} y_- \\ \vdots \\ D^{n-1} y_+ - D^{n-1} y_- \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} b_m & 0 & \cdots & 0 \\ b_{m-1} & b_m & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & u_+ - u_- \\ b_2 & & \ddots & b_m & 0 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-1} & b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Du_+ - Du_- \\ \vdots \\ D^{m-1} u_+ - D^{m-1} u_- \end{bmatrix}$$

## Relazioni fra le condizioni iniziali in un istante di discontinuità ( $\rho = 0$ )

$$\begin{bmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_2 & & \ddots & a_n & 0 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} y_+ - y_- \\ Dy_+ - Dy_- \\ \vdots \\ D^{n-1}y_+ - D^{n-1}y_- \end{bmatrix} = \\
 = \begin{bmatrix} b_n & 0 & \cdots & 0 \\ b_{n-1} & b_n & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ b_2 & & \ddots & b_n & 0 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} u_+ - u_- \\ Du_+ - Du_- \\ \vdots \\ D^{n-1}u_+ - D^{n-1}u_- \end{bmatrix}$$

## Relazioni di continuità ingresso - uscita

### Proprietà

Sia  $(u, y) \in \mathcal{B}$ . Allora  $y \in C^{\rho-1}$ .

### Proprietà

Sia  $(u, y) \in \mathcal{B}$  e  $p \in \mathbb{Z}$  con  $p \geq -1$ . Allora  $u \in C^p$  se e solo se  $y \in C^{\rho+p}$ .

### Def. Grado massimo di continuità

Dato un segnale  $f \in C_p^\infty(\mathbb{R})$  ( $=: C^{-1}$ ) questo ha grado massimo di continuità  $k \geq -1$  se  $f \in C^k$  e  $f \notin C^{k+1}$ .

Grado massimo di continuità o «grado di levigatezza» (*smoothness degree*) del segnale.

### Proprietà

Sia  $(u, y) \in \mathcal{B}$ . L'ingresso  $u$  ha grado di levigatezza  $k$  se e solo se l'uscita  $y$  ha grado di levigatezza  $\rho + k$ .

## Un cenno storico sulle funzioni impulsive

**Heaviside** (1893) – calcolo operazionale

**van der Pol** (1929) – introduce il termine “funzione impulsiva”

**Dirac** (1930) – introduce la “delta”

**Sobolev** (1936) – concetto di “soluzione debole”

**Schwartz** (1951) – sistemazione rigorosa  
dell’argomento: teoria delle **distribuzioni**.

## I concetti introdotti dalla lezione:

- Il problema delle funzioni discontinue ed il metodo di smoothing
- Introduzione euristica alle funzioni impulsive
- Derivata generalizzata (distribuzionale) di una funzione derivabile a tratti
- Definizione distribuzionale dell'insieme dei behaviors
- Relazioni fra le condizioni iniziali in un istante di discontinuità
- Relazione fra i gradi di continuità dei segnali di ingresso e di uscita

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle  
Telecomunicazioni

**Lezione n. 6 di Fondamenti di Controlli Automatici**  
**prof. Aurelio Piazzì**

**La funzione di trasferimento**

Università degli Studi di Parma – a.a. 2020-2021

# Spazio delle sequenze impulsive:

$$\mathcal{I}^* \triangleq \left\{ d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^* : d(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=0}^{r_i} c_{ij} \delta^{(j)}(t - t_i), \ c_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

Estensione distribuzionale delle funzioni derivabili

a tratti:  $C_p^\infty(\mathbb{R})^* \triangleq C_p^\infty(\mathbb{R}) + \mathcal{I}^*$

Esempi :

$$d(t) = 7\delta(t) + 4\delta^{(1)}(t) + 32\delta(t-10) + 2\delta^{(2)}(t-10) \in \mathcal{I}^*$$

$$f(t) = 1(t) + 2t \cdot 1(t-5) \in C_p^\infty(\mathbb{R})$$

$$D^* f(t) = \delta(t) + 2 \cdot 1(t-5) + 10\delta(t-5) \in C_p^\infty(\mathbb{R})^*$$

$$D^{*2} f(t) = \delta^{(1)}(t) + 2\delta(t-5) + 10\delta^{(1)}(t-5) \in \mathcal{I}^* \subset C_p^\infty(\mathbb{R})^*$$

$$\mathcal{L}[f(t)] \triangleq \int_{0-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$\int_{0-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = \lim_{t_a \rightarrow 0-} \lim_{t_b \rightarrow +\infty} \int_{t_a}^{t_b} f(t) e^{-st} dt$$

## Esempi di trasformate di Laplace di funzioni impulsive :

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{0-}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-s \cdot 0} = 1$$

$$\mathcal{L}[\delta^{(1)}(t)] = \int_{0-}^{+\infty} \delta^{(1)}(t) e^{-st} dt = [\delta(t) e^{-st}]_{0-}^{+\infty} - \int_{0-}^{+\infty} \delta(t) (-s e^{-st}) dt = s$$

$$\mathcal{L}[\delta(t) + 2\delta^{(1)}(t) + 9\delta^{(2)}(t)] = 1 + 2s + 9s^2$$

$$\mathcal{L}[7t^3 + \delta(t)] = 7 \frac{3!}{s^4} + 1 = \frac{s^4 + 42}{s^4}$$

$$\mathcal{L}[te^{-3t} + \delta(t-2)] = \frac{1}{(s+3)^2} + e^{-2s}$$

## La trasformata della derivata generalizzata

Sia  $f \in C_p^\infty(\mathbb{R})\left(C_p^\infty(\mathbb{R})^*\right)$  segue

$$\mathcal{L}\left[D^*f(t)\right] = sF(s) - f(0-)$$

**Dim.:**

Per semplicità si abbia un solo istante di discontinuità in  $t = 0$ :

$$D^*f(t) = Df(t^+) + (f_+ - f_-) \delta(t)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[D^*f(t)\right] &= \mathcal{L}\left[Df(t^+)\right] + (f_+ - f_-) \mathcal{L}\left[\delta(t)\right] \\ &= sF(s) - f_+ + (f_+ - f_-) \end{aligned}$$

□

## derivate generalizzate di ordine superiore

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[D^{*2}f] &= \mathcal{L}[D^*(D^*f)] = s\mathcal{L}[D^*f] - D^*f(0-) = \\ &= s(sF(s) - f(0-)) - Df(0-) = \\ &= s^2F(s) - sf(0-) - Df(0-)\end{aligned}$$

generalizzando:

$$D^i f_- := D^i f(0-) \text{ con } i = 0, 1, 2, \dots$$

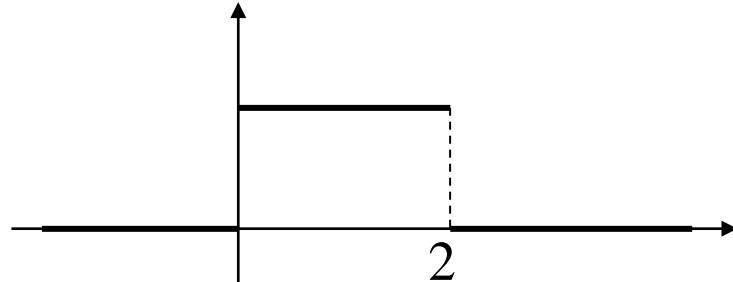
$$\mathcal{L}[D^{*i}f] = s^i F(s) - s^{i-1} f_- - s^{i-2} Df_- - \dots - s D^{i-2} f_- - D^{i-1} f_-$$

$$\mathcal{L}[D^{*i}f] = s^i F(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-1-j} f_-$$

## Esempi:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 \leq t < 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$f(t) = 1(t) - 1(t-2)$$



$$\mathcal{L}[D^* f] = sF(s) - f(0-) = s\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-2s}\right) = 1 - e^{-2s}$$

$$\text{con calcolo diretto: } \mathcal{L}[D^* f] = \mathcal{L}[\delta(t) - \delta(t-2)] = 1 - e^{-2s}$$

$$\mathcal{L}[\delta^{(1)}(t)] = \mathcal{L}[D^* \delta(t)] = s\mathcal{L}[\delta(t)] - \delta(0-) = s \cdot 1 - 0 = s$$

$$\mathcal{L}[\delta^{(2)}(t)] = \mathcal{L}[D^{*2} \delta(t)] = s^2 \mathcal{L}[\delta(t)] - s\delta(0-) - \delta^{(1)}(0-) = s^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[\delta^{(i)}(t)] = s^i, \quad i \in \mathbb{N}$$

## Estensione dell'insieme dei behaviors

Dato un sistema dinamico  $\Sigma$  descritto dall'eq. differenziale

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u$$

si definisce estensione impulsiva dei behaviors o **behavior esteso** di  $\Sigma$

$$\mathcal{B}^* := \left\{ (u, y) \in C_p^\infty(\mathbb{R})^* \times C_p^\infty(\mathbb{R})^* : \sum_{i=0}^n a_i D^{*i} y = \sum_{i=0}^m b_i D^{*i} u \right\}$$

Ancora l'equazione differenziale è soddisfatta in senso distribuzionale per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{B}^*$$

# Proprietà

Sia  $(u, y) \in \mathcal{B}^*$ , segue  $(D^*u, D^*y) \in \mathcal{B}^*$ .

**Dim.:**

$$\sum_{i=0}^n a_i D^{*i} y = \sum_{i=0}^m b_i D^{*i} u$$

Applico l'operatore  $D^*$  ad entrambi i membri dell'eq.:

$$\sum_{i=0}^n a_i D^{*i+1} y = \sum_{i=0}^m b_i D^{*i+1} u$$

$$\sum_{i=0}^n a_i D^{*i} (D^* y) = \sum_{i=0}^m b_i D^{*i} (D^* u) \quad \square$$

**Def.:**

Un segnale di ingresso  $u(t) \not\equiv 0$  per  $t > 0$  è detto **azione forzante** (su  $\Sigma$ ).

Sia  $(u, y) \in \mathcal{B}$  con  $u(t)$  azione forzante e con condizioni iniziali al tempo  $t = 0^-$  tutte nulle:

$$y_- = 0, Dy_- = 0, \dots, D^{n-1}y_- = 0 \quad \text{e} \quad u_- = 0, Du_- = 0, \dots, D^{m-1}u_- = 0$$

Il segnale  $y(t)$  per  $t > 0$  è detto **risposta (evoluzione) forzata** (di  $\Sigma$ ).

## Proprietà (della coppia azione forzante - risposta forzata)

Sia  $(u, y) \in \mathcal{B}^*$  con  $u(t)$  azione forzante ed  $y(t)$  risposta forzata. Segue

$$\left( \int_{0^-}^t u(v) dv, \int_{0^-}^t y(v) dv \right) \in \mathcal{B}^*$$

**Dim. :**

$$\sum_{i=0}^n a_i D^{*i} y(t) = \sum_{i=0}^m b_i D^{*i} u(t)$$

Applico l'operatore  $\int_{0-}^t$  ad entrambi i membri dell'eq.:

$$\sum_{i=0}^n a_i \int_{0-}^t D^{*i} y(v) dv = \sum_{i=0}^m b_i \int_{0-}^t D^{*i} u(v) dv$$

$$\begin{aligned} \int_{0-}^t D^{*i} y(v) dv &= \int_{0-}^t D^* \left( D^{*i-1} y(v) \right) dv = \left[ D^{*i-1} y(v) \right]_{0-}^t \\ &= D^{*i-1} y(t) - D^{*i-1} y(0-) = D^{*i-1} y(t) - D^{i-1} y(0-) = D^{*i-1} y(t) \end{aligned}$$

analogamente  $\int_{0-}^t D^{*i} u(v) dv = D^{*i-1} u(t)$

**Dim.** (continua) :

$$\sum_{i=1}^n a_i D^{*i-1} y(t) + a_0 \int_{0-}^t y(v) dv = \sum_{i=1}^m b_i D^{*i-1} u(t) + b_0 \int_{0-}^t u(v) dv$$

valgono  $y(t) = D^* \left( \int_{0-}^t y(v) dv \right)$ ,  $u(t) = D^* \left( \int_{0-}^t u(v) dv \right)$

$$\sum_{i=1}^n a_i D^{*i} \left( \int_{0-}^t y(v) dv \right) + a_0 \int_{0-}^t y(v) dv = \sum_{i=1}^m b_i D^{*i} \left( \int_{0-}^t u(v) dv \right) + b_0 \int_{0-}^t u(v) dv$$

$$\sum_{i=0}^n a_i D^{*i} \left( \int_{0-}^t y(v) dv \right) = \sum_{i=0}^m b_i D^{*i} \left( \int_{0-}^t u(v) dv \right)$$

□

# Il problema fondamentale dell'analisi nel dominio del tempo di un sistema $\Sigma$

Note le condizioni iniziali al tempo 0 –

$y_-, Dy_-, \dots, D^{n-1}y_-$  e  $u_-, Du_-, \dots, D^{m-1}u_-$

e l'azione forzante  $u(t)$ ,  $t \geq 0$

determinare la risposta  $y(t)$ ,  $t \geq 0$ .

# Soluzione dell'equazione differenziale

I segnali  $u(t)$  e  $y(t)$  soddisfano in senso distribuzionale l'equazione differenziale di  $\Sigma$ :

$$\sum_{i=0}^n a_i D^{*i} y(t) = \sum_{i=0}^m b_i D^{*i} u(t)$$

Applichiamo all'equazione la trasformata di L.:

$$\sum_{i=0}^n a_i \mathcal{L}[D^{*i} y(t)] = \sum_{i=0}^m b_i \mathcal{L}[D^{*i} u(t)]$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \mathcal{L}[D^{*i} y(t)] + a_0 Y(s) = \sum_{i=1}^m b_i \mathcal{L}[D^{*i} u(t)] + b_0 U(s)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \left( s^i Y(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-1-j} y_- \right) + a_0 Y(s) = \sum_{i=1}^m b_i \left( s^i U(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-1-j} u_- \right) + b_0 U(s)$$

$$\left( \sum_{i=0}^n a_i s^i \right) Y(s) - \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=0}^{i-1} D^{i-1-j} y_- s^j = \left( \sum_{i=0}^m b_i s^i \right) U(s) - \sum_{i=1}^m b_i \sum_{j=0}^{i-1} D^{i-1-j} u_- s^j$$

$$Y(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} U(s) + \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} a_i D^{i-1-j} y_- s^j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{i-1} b_i D^{i-1-j} u_- s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

$$Y_{\text{for.}}(s) := \mathcal{L} \left[ y_{\text{for.}}(t) \right] := \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} U(s)$$

$$Y_{\text{lib.}}(s) := \mathcal{L} \left[ y_{\text{lib.}}(t) \right] := \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} a_i D^{i-1-j} y_- \ s^j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{i-1} b_i D^{i-1-j} u_- \ s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

$$Y(s) = Y_{\text{for.}}(s) + Y_{\text{lib.}}(s)$$

$$\Rightarrow y(t) = y_{\text{for.}}(t) + y_{\text{lib.}}(t), \quad t \geq 0$$

$y_{\text{for.}}(t)$  è la **risposta forzata** di  $\Sigma$  all'azione forzante

$y_{\text{lib.}}(t)$  è definita quale **risposta (evoluzione) libera** di  $\Sigma$

## Def. - Funzione di Trasferimento

Si definisce f.d.t. di un sistema la funzione di variabile complessa  $G(s)$  per la quale è valida la relazione

$$\mathcal{L}[y(t)] = G(s) \mathcal{L}[u(t)] \quad \text{Dy} = \mathbf{G}(s) \mathbf{Du}$$

$$\forall (u(t), y(t)) \in \mathcal{B} \text{ con } u(t) = 0, y(t) = 0 \text{ per } t < 0.$$

**Proprietà :** La f.d.t. del sistema dinamico  $\Sigma$  introdotto è

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \quad \left( =: \frac{b(s)}{a(s)} \right) \quad \xrightarrow{\mathbf{u}} \boxed{\mathbf{G}(s)} \quad \mathbf{y}$$

E' un modello matematico alternativo all'eq. diff.

Se le condizioni iniziali sono tutte nulle (sistema in quiete per  $t = 0-$ ):

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$Y_{\text{for.}}(s) = G(s)U(s) \quad (\text{trasformata della risposta forzata})$$

Sia  $g(t) := \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$  con  $g(t) = 0, t < 0$ :  $g(t)$  è la **risposta all'impulso** a partire da una condizione di quiete:  $(\delta(t), g(t)) \in \mathcal{B}^*$

Dal teorema di convoluzione:

$$y_{\text{for.}}(t) = \int_0^t g(t-v)u(v)dv \quad \text{od anche} \quad y_{\text{for.}}(t) = \int_0^t u(t-v)g(v)dv$$

### Soluzione generale dell'equazione differenziale ( $t \geq 0$ )

$$y(t) = \int_0^t g(t-v)u(v)dv + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} a_i D^{i-1-j} y_- s^j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{i-1} b_i D^{i-1-j} u_- s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \right]$$

**Esempio:** riprendiamo il sistema  $\Sigma$  descritto da

$$Dy(t) + 2y(t) = 2Du(t) + 2u(t)$$

con  $y(t) = e^{-2t}$ ,  $t < 0$  e  $u(t) = 1(t)$

Determinare  $y(t)$ ,  $t \geq 0$ .

Condizioni iniziali al tempo  $0-$ :  $y_- = 1$ ,  $u_- = 0$

$$D^*y(t) + 2y(t) = 2D^*u(t) + 2u(t)$$

applichiamo  $\mathcal{L}[\cdot]$ :

$$(sY(s) - y_-) + 2Y(s) = 2(sU(s) - u_-) + 2U(s)$$

$$(s+2)Y(s) = (2s+2)U(s) + y_- - 2u_-$$

$$Y(s) = \frac{2s+2}{s+2} U(s) + \frac{y_- - 2u_-}{s+2}$$

$G(s) = \frac{2s+2}{s+2}$  è la funzione di trasferimento

$\frac{y_- - 2u_-}{s+2}$  è la trasformata di Laplace della risposta libera

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[2 - \frac{2}{s+2}\right] = 2\delta(t) - 2e^{-2t}$$

$$y(t) = \int_0^t \left(2\delta(t-v) - 2e^{-2(t-v)}\right) u(v) dv + (y_- - 2u_-) e^{-2t}$$

$$u(t) = 1(t) \text{ e } y_- = 1, \quad u_- = 0$$

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^t \left( 2\delta(t-v) - 2e^{-2(t-v)} \right) dv + e^{-2t} \\
&= \left( 2 - 2 \int_0^t e^{-2(t-v)} dv \right) + e^{-2t} = \left( 2 - \left( 1 - e^{-2t} \right) \right) + e^{-2t} \\
&= \left( 1 + e^{-2t} \right) + e^{-2t} = 1 + 2e^{-2t}
\end{aligned}$$

Quando  $U(s)$  è una funzione razionale è normalmente più conveniente antitrasformare direttamente  $Y_{\text{for.}}(s)$  e  $Y_{\text{lib.}}(s)$ :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2s+2}{s+2} \cdot \frac{1}{s} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s+2} \right]$$

- **Def.** : Un sistema  $\Sigma$  si dice (*strettamente*) *proprio* se la sua funzione di trasferimento è (*strettamente*) *propria*.

Quindi:

Se  $n \geq m$  ( $\rho \geq 0$ )  $\leftrightarrow$   $\Sigma$  proprio; se  $n > m$  ( $\rho \geq 1$ )  $\leftrightarrow$   $\Sigma$  strettamente proprio.

- **Def. (guadagno statico di  $\Sigma$ )**

È il rapporto fra il valore costante dell'uscita e il valore costante dell'ingresso ( $\neq 0$ ) quando  $\Sigma$  è all'equilibrio:

$$K := \frac{y_c}{u_c} \quad \text{con } (u_c, y_c) \in \mathcal{B} \quad \text{e} \quad u_c \neq 0$$

Dall'equazione diff. si deduce:  $K = \frac{b_0}{a_0} \quad \Rightarrow \quad K = G(0)$

## Def. (Polinomio Caratteristico di $\Sigma$ )

Dato il sistema  $\Sigma$  descritto dall'eq. diff.  $\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u,$

il polinomio  $a(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$  è detto polinomio caratteristico di  $\Sigma$ .

Nota: È il polinomio a denominatore della f.d.t.  $G(s)$ .

## Def. - poli e zeri di $\Sigma$

Sono i poli e gli zeri della f.d.t.  $G(s)$  di  $\Sigma$ .

Normalmente i poli sono le radici di  $a(s) = 0$  ma ...

$$\text{Se } G(s) = \frac{s^2 + 5s + 4}{(s+1)(s+2)(s+3)^2}$$

$$\Rightarrow \{ \text{zeri di } \Sigma \} = \{-4\}, \quad \{ \text{poli di } \Sigma \} = \{-2, -3, -3\}$$

• **Def. (modi del sistema dinamico  $\Sigma$ )**

Sono le funzioni “tipiche” associate ai poli di  $\Sigma$  secondo la regola:

Se  $p$  è un polo reale di molteplicità  $h$ :  $e^{pt}, te^{pt}, \dots, t^{h-1}e^{pt}$

Se  $\sigma \pm j\omega$  è una coppia di poli complessi coniugati di molteplicità  $h$ :

$$e^{\sigma t} \sin(\omega t + \phi_1), te^{\sigma t} \sin(\omega t + \phi_2), \dots, t^{h-1} e^{\sigma t} \sin(\omega t + \phi_h)$$

oppure equivalentemente

$$e^{\sigma t} \sin(\omega t), e^{\sigma t} \cos(\omega t), te^{\sigma t} \sin(\omega t), te^{\sigma t} \cos(\omega t), \dots$$

$$\dots, t^{h-1} e^{\sigma t} \sin(\omega t), t^{h-1} e^{\sigma t} \cos(\omega t)$$

$$\text{Esempio: } G(s) = \frac{(s+1)(s^2 + 2s + 7)}{(s+4)^3(s+5)[(s+1)^2 + 4]^2}$$

$$\{\text{modi di } \Sigma\} = \left\{ e^{-4t}, te^{-4t}, t^2 e^{-4t}, e^{-5t}, e^{-t} \sin(2t + \varphi_1), te^{-t} \sin(2t + \varphi_2) \right\} \text{ oppure}$$

$$\{\text{modi di } \Sigma\} = \left\{ e^{-4t}, te^{-4t}, t^2 e^{-4t}, e^{-5t}, e^{-t} \sin(2t), e^{-t} \cos(2t), te^{-t} \sin(2t), te^{-t} \cos(2t) \right\}$$

## • Proprietà (risposta libera e modi di $\Sigma$ )

Sia  $\Sigma$  un sistema per il quale i poli coincidono con le radici del polinomio caratteristico ( $a(s)$  e  $b(s)$  sono coprimi fra loro). Allora la risposta libera è una combinazione lineare dei suoi modi.

**Dim.:**

$$L[y_{\text{lib.}}(t)] = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} a_i D^{i-1-j} y_- s^j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{i-1} b_i D^{i-1-j} u_- s^j}{a(s)}$$

Il numeratore è un polinomio di grado  $\leq n - 1$  dipendente dalle c.i.

Dall'assunzione fatta i modi di  $\Sigma$  sono associati alle radici di  $a(s) = 0$ . Quindi dallo sviluppo in fratti semplici segue la tesi ...  $\square$

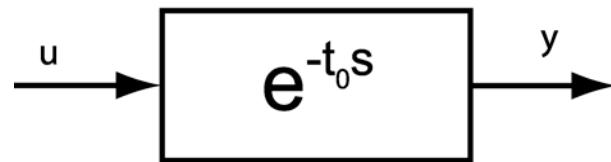
Nota:  $\{\text{poli di } \Sigma\} \subseteq \{\text{radici del pol. carat. di } \Sigma\}$

$\{\text{poli di } \Sigma\} = \{\text{radici del pol. carat. di } \Sigma\}$  se  $a(s)$  e  $b(s)$  sono coprimi.

- Non tutti i sistemi dinamici lineari e stazionari sono caratterizzati da f.d.t. razionali.

Esempio: il sistema denominato “*ritardo finito*”. Se  $u(t)$  è il segnale all’ingresso, il segnale all’uscita è  $y(t) = u(t-t_0)$  dove  $t_0$  è il tempo di ritardo.

$$\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[u(t-t_0)] = \mathcal{L}[u(t)]e^{-t_0 s} \quad \Rightarrow \quad G(s) = e^{-t_0 s}$$



In generale, i sistemi dinamici lineari e stazionari retti da eq. diff. alle derivate parziali hanno f.d.t. trascendenti (non razionali).

## Segnali tipici per l'ingresso di $\Sigma$ :

$$\delta(t) \text{ impulso unitario (delta di Dirac)} \quad \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

$$1(t) \text{ gradino unitario} \quad \mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$$

$$t \cdot 1(t) \text{ rampa unitaria} \quad \mathcal{L}[t \cdot 1(t)] = \frac{1}{s^2}$$

$$\frac{1}{2}t^2 \cdot 1(t) \text{ parabola unitaria} \quad \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}t^2 \cdot 1(t)\right] = \frac{1}{s^3}$$

### • Def. Risposta canonica

É la risposta forzata di  $\Sigma$  ad un segnale tipico all'ingresso.

Le risposte canoniche usualmente adottate sono:

$g(t) \equiv$  risposta all'impulso  $\delta(t)$  o **risposta impulsiva**

$g_s(t) \equiv$  risposta al gradino  $1(t)$  o **risposta indiciale**

$(g(t) = g_s(t) = 0 \text{ per } t < 0)$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)], \quad g_s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}G(s)\right]$$

## Proprietà

$$\int_{0-}^t g(v)dv = g_s(t), \quad g(t) = D^* g_s(t)$$

$(\text{per i sistemi strettamente propri } g(t) = Dg_s(t^+))$

$$\textbf{Dim.: } (\delta(t), g(t)) \in \mathcal{B}^* \quad (1(t), g_s(t)) \in \mathcal{B}$$

↓

↓

$$\left( \int_{0-}^t \delta(v) dv, \int_{0-}^t g(v) dv \right) \in \mathcal{B}^* \quad \left( D^* 1(t), D^* g_s(t) \right) \in \mathcal{B}^*$$

↓

↓

$$\left( 1(t), \int_{0-}^t g(v) dv \right) \in \mathcal{B} \quad \left( \delta(t), D^* g_s(t) \right) \in \mathcal{B}^*$$

↓

↓

$$\int_{0-}^t g(v) dv = g_s(t) \quad D^* g_s(t) = g(t)$$

Se  $\rho \geq 1 \Rightarrow g_s(t) \in C^0(\mathbb{R}) \Rightarrow D^* g_s(t) = Dg_s(t^+) \quad \square$

## Proprietà (integrali di Vaschy)

Nota la risposta al gradino  $g_s(t)$ , la risposta forzata  $y_{\text{for.}}(t)$ ,  $t \geq 0$  effetto dell'azione forzante  $u(t)$ ,  $t \geq 0$  è determinabile come:

$$y_{\text{for.}}(t) = \int_0^t u'(v)g_s(t-v)dv + u(0+)g_s(t)$$

$$y_{\text{for.}}(t) = \int_0^t g_s(v)u'(t-v)dv + u(0+)g_s(t)$$

**Dim.:**

$$Y_{\text{for.}}(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s}G(s) \cdot sU(s); \quad \frac{1}{s}G(s) = \mathcal{L}[g_s(t)]$$

$$\mathcal{L}[u'(t)] = sU(s) - u(0+) \Rightarrow sU(s) = \mathcal{L}[u'(t)] + u(0+) = \mathcal{L}[u'(t)] + \mathcal{L}[u(0+)\delta(t)]$$

$$sU(s) = \mathcal{L}[u'(t) + u(0+)\delta(t)]$$

Applicando il teorema di convoluzione :

$$\begin{aligned} y_{\text{for.}}(t) &= \int_0^t g_s(v) (u'(t-v) + u(0+)\delta(t-v)) dv \\ &= \int_0^t g_s(v) u'(t-v) dv + \int_0^t g_s(v) u(0+) \delta(t-v) dv = \int_0^t g_s(v) u'(t-v) dv + u(0+) g_s(t) \end{aligned}$$

$$\text{Da } y_{\text{for.}}(t) = \int_0^t (u'(v) + u(0+)\delta(v)) g_s(t-v) d\tau$$

$$\text{analogamente si ottiene } y_{\text{for.}}(t) = \int_0^t u'(v) g_s(t-v) dv + u(0+) g_s(t)$$

□

## I concetti introdotti dalla lezione:

- Sequenze e funzioni impulsive
- Trasformate delle derivate generalizzate
- Estensione impulsiva dell'insieme dei behaviors
- Risposta forzata e risposta libera
- Funzione di trasferimento
- Soluzione generale dell'equazione differenziale
- Guadagno statico, polinomio caratteristico, poli e zeri, modi
- Risposta impulsiva e risposta indiciale

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle  
Telecomunicazioni

**Lezione n. 7 di Fondamenti di Controlli Automatici**  
**prof. Aurelio Piazzì**

**Sistemi dinamici elementari**

Università degli Studi di Parma – a.a. 2020-2021

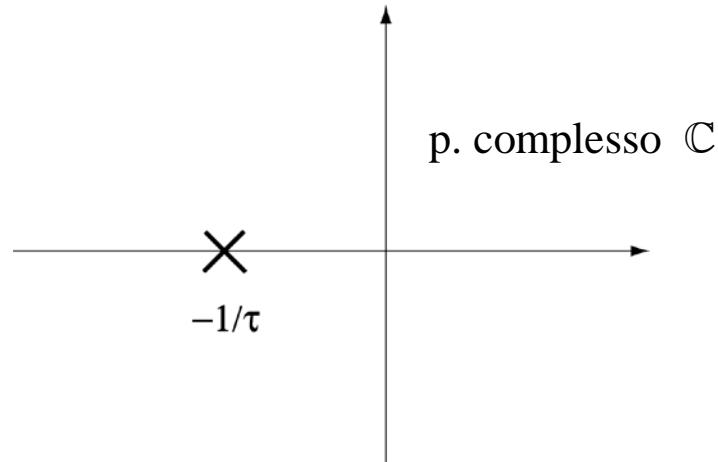
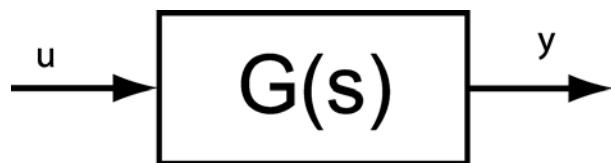
- Studiare le caratteristiche dei sistemi dinamici più semplici: **primo ordine** con grado relativo uno e **secondo ordine** con grado relativo due.
- Semplificare lo studio di un sistema più complesso (ordine maggiore di due) comparandolo ad un sistema del secondo ordine.

## Sistemi del primo ordine (strettamente propri)

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau s} \quad (\text{guadagno statico normalizzato ad 1})$$

Eq. diff.  $\tau Dy + y = u$        $\tau \equiv$  costante di tempo ( $> 0$ )

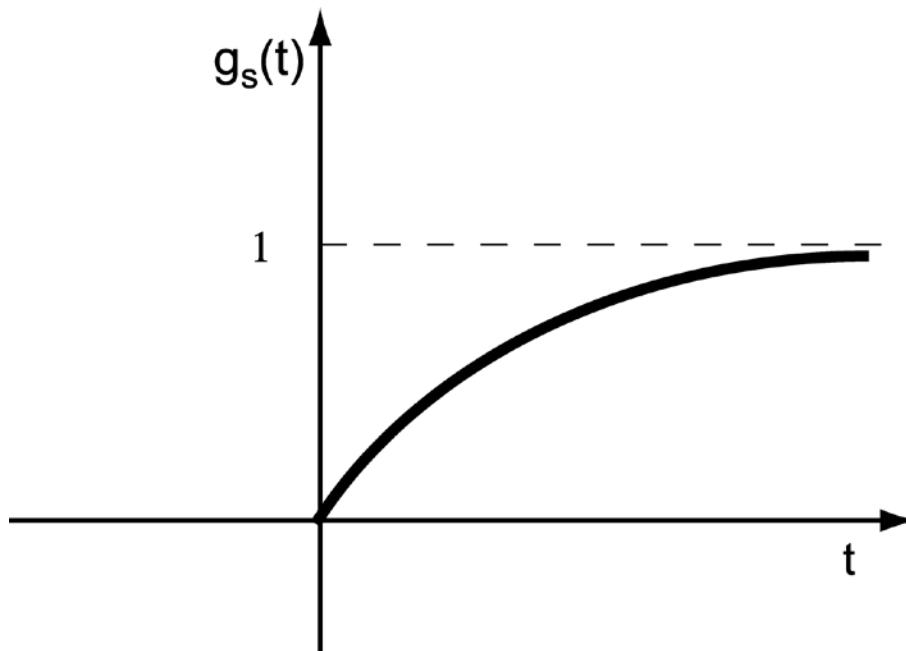
$$\{\text{poli di } \Sigma\} = \left\{ -\frac{1}{\tau} \right\} \quad \{\text{modi di } \Sigma\} = \left\{ e^{-\frac{1}{\tau} t} \right\}$$



- determinazione di  $g_s(t)$  (risposta al gradino unitario)

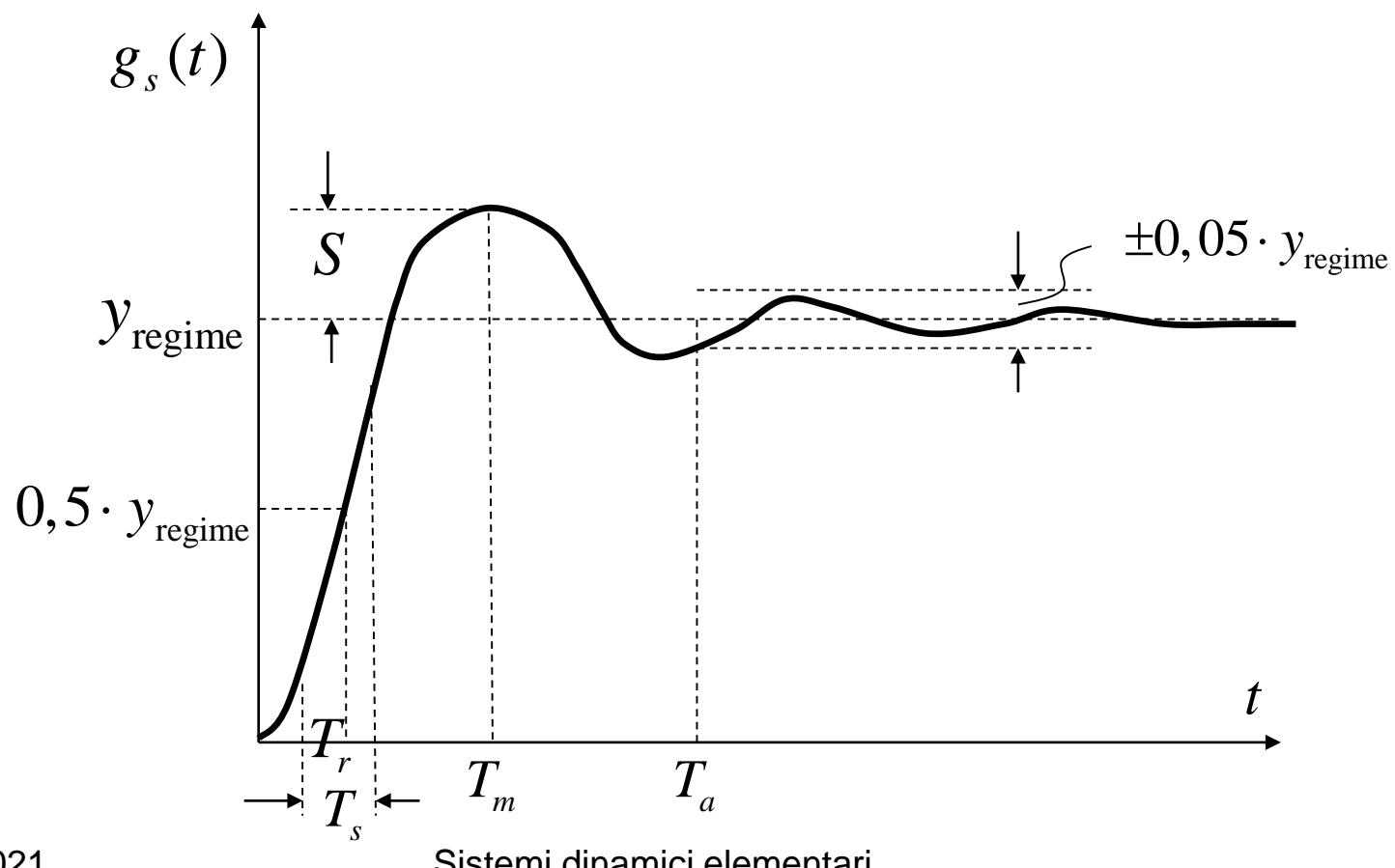
$$g_s(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{1+\tau s} \cdot \frac{1}{s} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\frac{1}{\tau}}{\left( s + \frac{1}{\tau} \right) s} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right] = 1 - e^{-t/\tau} , t \geq 0$$

Per  $t = 3\tau$  ( $5\tau$ ) l'uscita  $y$  raggiunge il 95% (99,3%) del valore di regime.



## Parametri della risposta al gradino

Spesso la risposta al gradino unitario di un sistema dinamico generico ha l'andamento di figura dove si evidenziano “parametri” caratteristici.



$S \equiv$  massima sovraelongazione (in % del valore di regime)

$T_r \equiv$  tempo di ritardo

$T_s \equiv$  tempo di salita

$T_m \equiv$  istante di massima sovraelongazione

$T_a \equiv$  tempo di assestamento

$T_a := \inf \left\{ T > 0 : \left| g_s(t) - y_{\text{regime}} \right| \leq 0,05 y_{\text{regime}} \quad \forall t \geq T \right\}$

## Sistemi del secondo ordine (senza zeri)

La funzione di trasferimento  $G(s)$  sia così parametrizzata:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad G(0) = 1$$

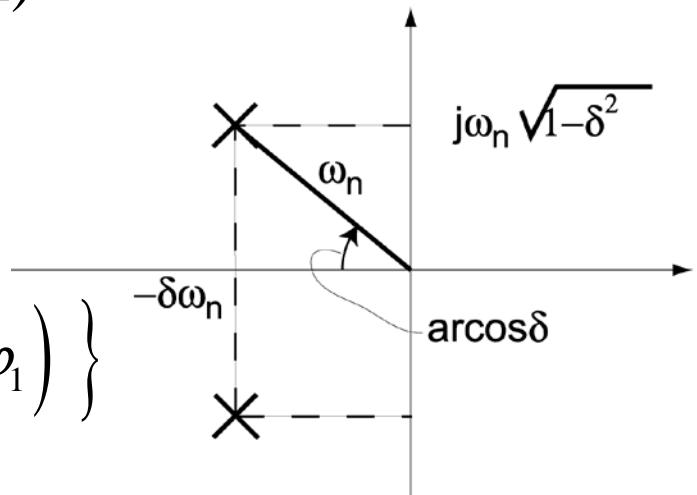
Eq. diff.  $D^2y + 2\delta\omega_n Dy + \omega_n^2 y = \omega_n^2 u$

$\omega_n \equiv$  pulsazione naturale ( $> 0$ )

$\delta \equiv$  coefficiente di smorzamento,  $\in (0,1)$

$$\{\text{poli di } G(s)\} = \left\{ -\delta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\delta^2} \right\}$$

$$\{\text{modi di } G(s)\} = \left\{ e^{-\delta\omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t + \varphi_1\right) \right\}$$

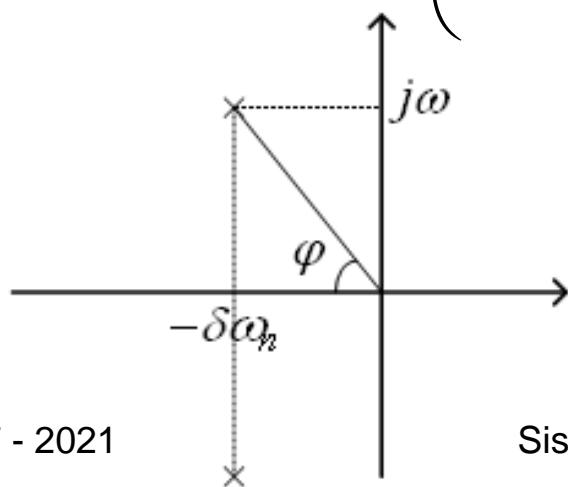


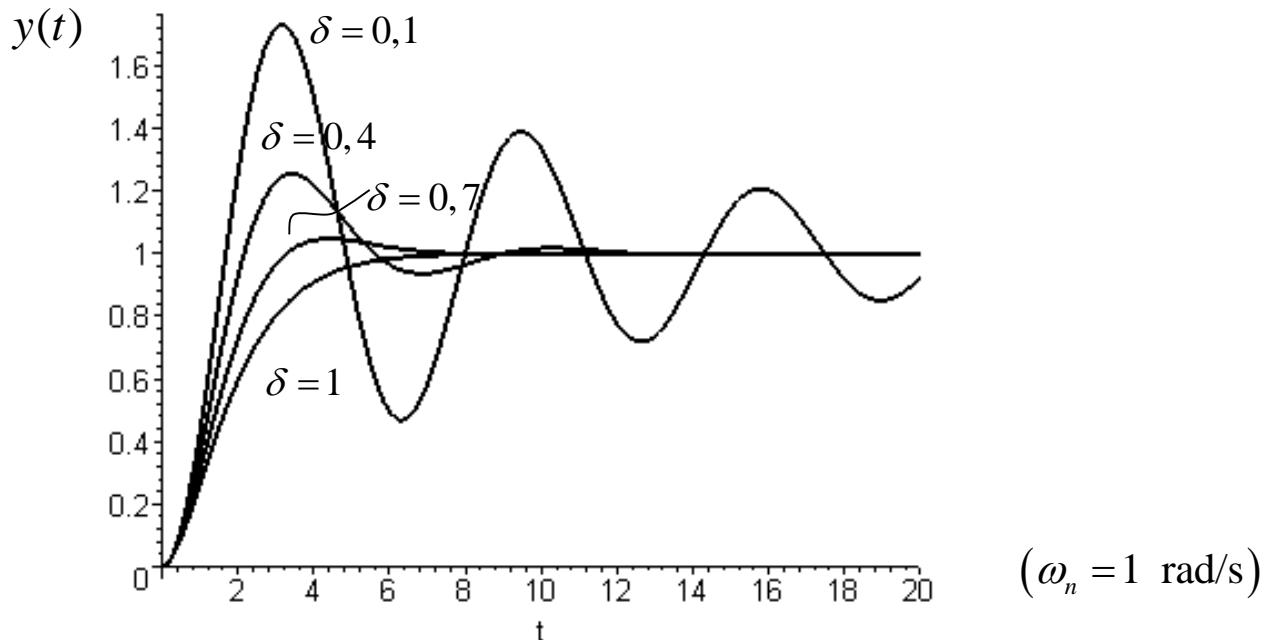
- Determinazione della risposta al gradino unitario

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)} \right] = 1 - A e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\omega := \omega_n \sqrt{1 - \delta^2} \quad A := \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}}$$

$$\varphi := \arccos(\delta) \quad \left( = \arcsen \sqrt{1 - \delta^2} = \arctg \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta} \right)$$





$$\text{per } \delta = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = 1 - \sin\left(\omega_n t + \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos(\omega_n t)$$

per  $\delta = 1$  non posso utilizzare l'espressione precedente ( $A = +\infty$  !)

$$\text{ma rifacendo i calcoli} \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2}\right] = 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}$$

$$y(t) = 1 - A e^{-\delta \omega_n t} \sin(\omega t + \varphi)$$

- Calcolo della massima sovraelongazione S

$$\dots Dy(t) = 0$$

$$A \delta \omega_n e^{-\delta \omega_n t} \sin(\omega t + \varphi) - A e^{-\delta \omega_n t} \omega \cos(\omega t + \varphi) = 0$$

$$\delta \sin(\omega t + \varphi) = \sqrt{1 - \delta^2} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\operatorname{tg}(\omega t + \varphi) = \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta} \quad \Leftrightarrow \quad \omega t = n\pi \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$t = \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$y(t) \Big|_{\min, \max} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}} \exp \left\{ -\frac{\delta n \pi}{\sqrt{1 - \delta^2}} \right\} \sin(n\pi + \varphi) =$$

$$\text{dato che } \varphi = \operatorname{arcosen} \sqrt{1 - \delta^2} \Rightarrow \sin(n\pi + \varphi) = (-1)^n \sqrt{1 - \delta^2}$$

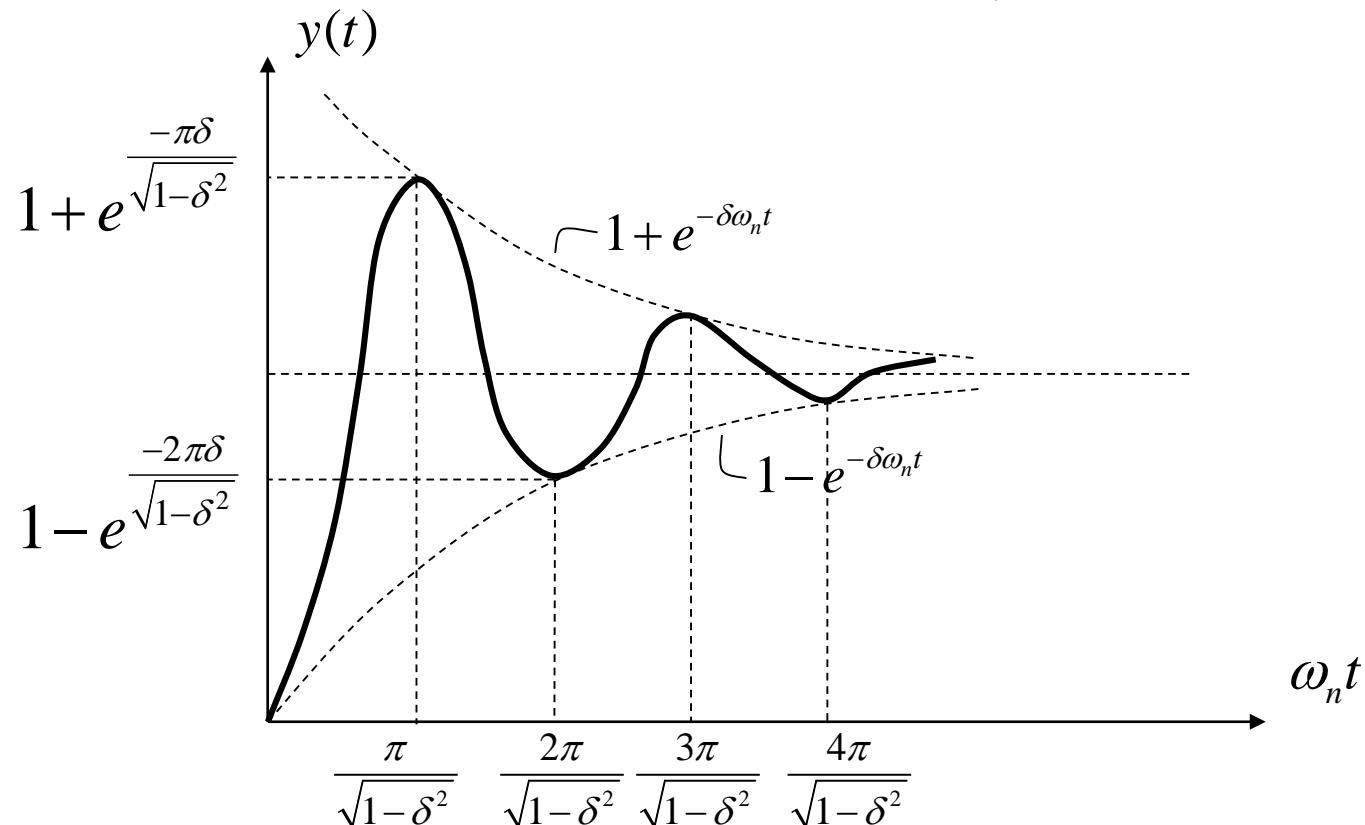
$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \delta^2}$$

$$A = 1 / \sqrt{1 - \delta^2}$$

$$\tan \varphi = \sqrt{1 - \delta^2} / \delta$$

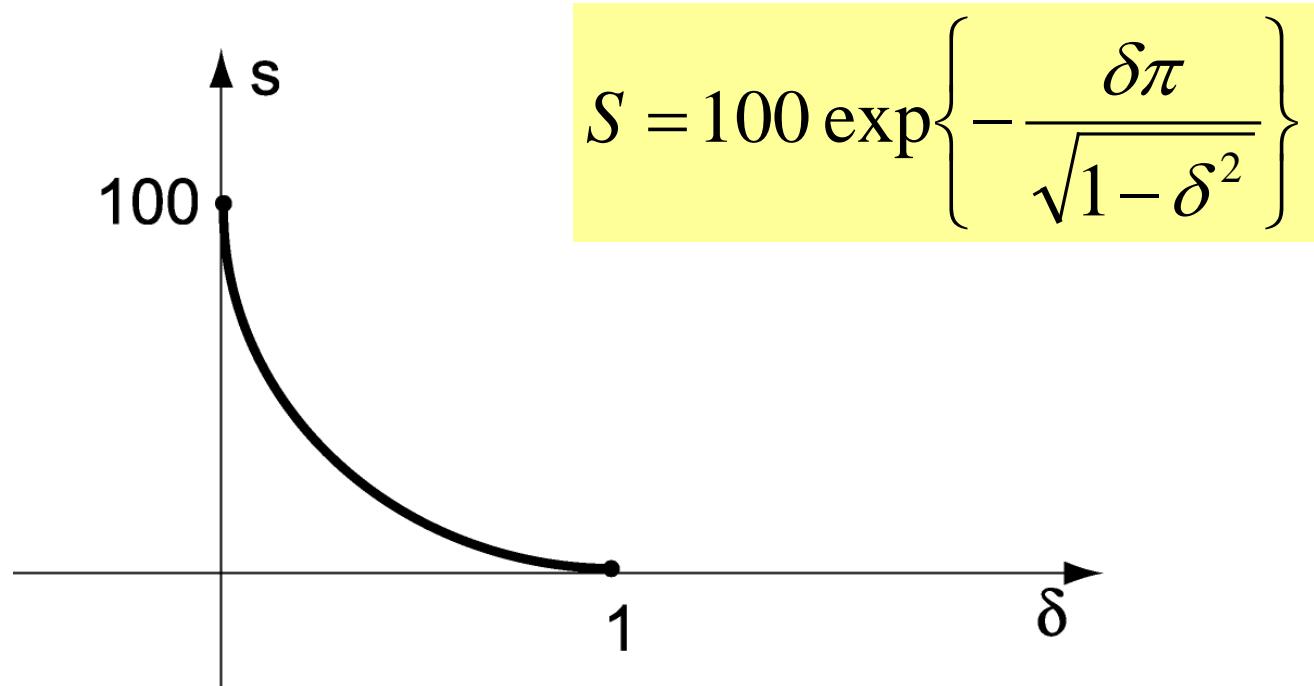
$$y(t) \Big|_{\min, \max} = 1 - (-1)^n \exp \left\{ -\frac{\delta n \pi}{\sqrt{1-\delta^2}} \right\}$$

$$y(t) \Big|_{\min, \max} = 1 - (-1)^n \exp \{ -\delta \omega_n t \} \quad \text{dove } t = \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



$$y_{\max} = 1 + \exp\left\{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}\right\}$$

$$S = 100(y_{\max} - 1)$$



- Calcolo del tempo di assestamento  $T_a$

Una stima può essere determinata risolvendo l'eq. :

$$e^{-\delta\omega_n T_a} = 0,05 \quad -\delta\omega_n T_a = \ln 0,05 \cong -3$$

$$T_a \cong \frac{3}{\delta\omega_n}$$

- Tempo di salita  $T_s$

$$T_s \approx \frac{1,8}{\omega_n}$$

É una relazione approssimata dedotta interpolando dati numerici

## Poli dominanti di un sistema dinamico

Sistema  $\Sigma$  generico con f.d.t.  $G(s) = b(s)/a(s)$ , n poli ed m zeri, tutti i poli hanno parte reale negativa (tutti i modi convergono a zero per  $t \rightarrow +\infty$ ).

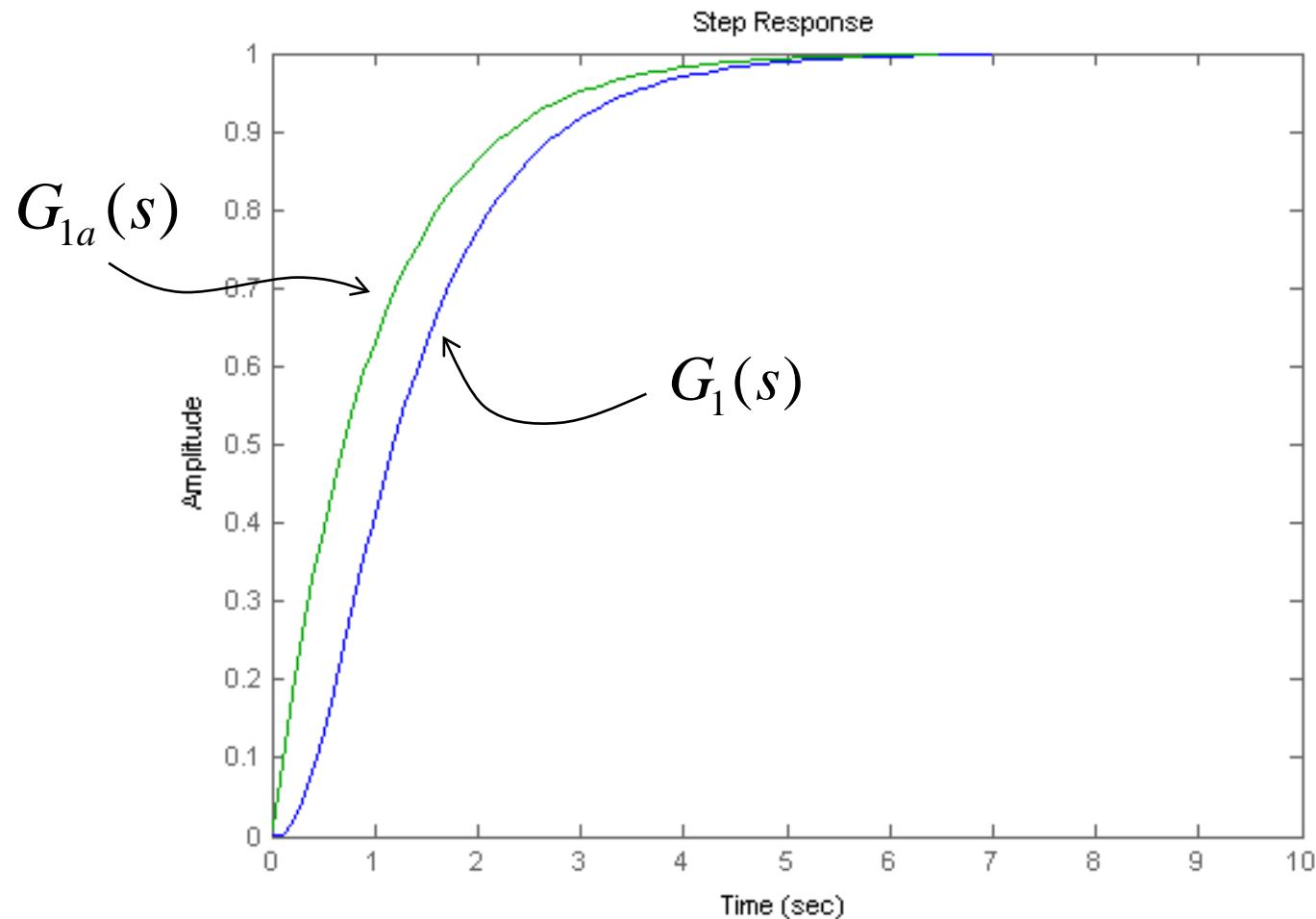
**Esempi** 
$$G_1(s) = \frac{20}{(s+1)(s+4)(s+5)}$$

$$\{\text{poli di } \Sigma_1\} = \{-1, -4, -5\} \quad \{\text{modi di } \Sigma_1\} = \left\{e^{-t}, e^{-4t}, e^{-5t}\right\}$$

-1 è il polo dominante. Si può costruire una f.d.t. approssimante  $G_{1a}(s) \approx G_1(s)$  con questo solo polo.

$$G_{1a}(s) = \frac{c}{s+1}, \text{ la costante } c \text{ è determinata da } G_{1a}(0) = G_1(0) \Rightarrow c = 1$$

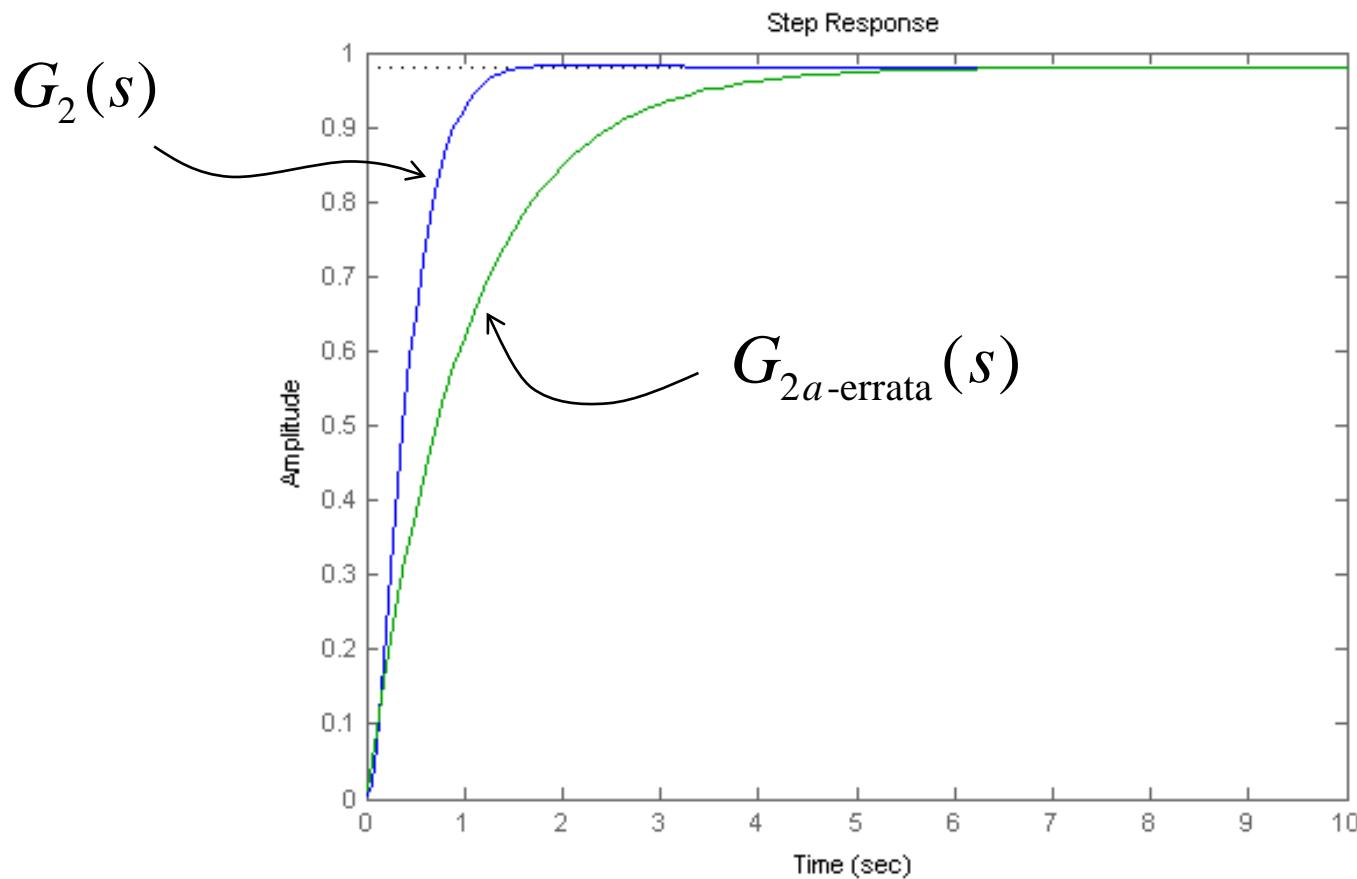
$$G_{1a}(s) = \frac{1}{s+1}$$



Grafici realizzati con **Control System Toolbox** di **MATLAB** ([www.mathworks.com](http://www.mathworks.com))

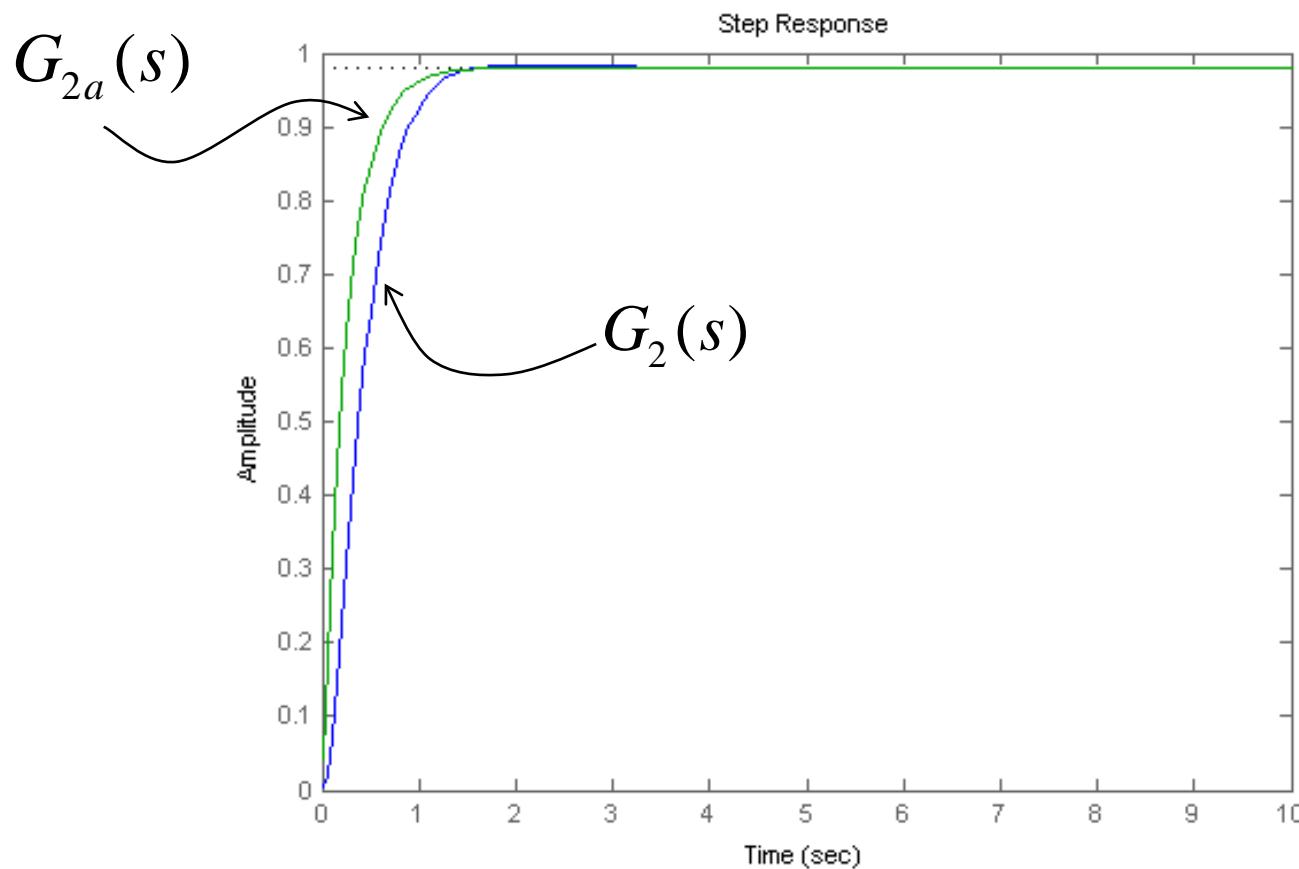
$$G_2(s) = \frac{20(s + 0.98)}{(s + 1)(s + 4)(s + 5)}$$

potrei  $G_{2a\text{-errata}}(s) = \frac{0.98}{s + 1}$

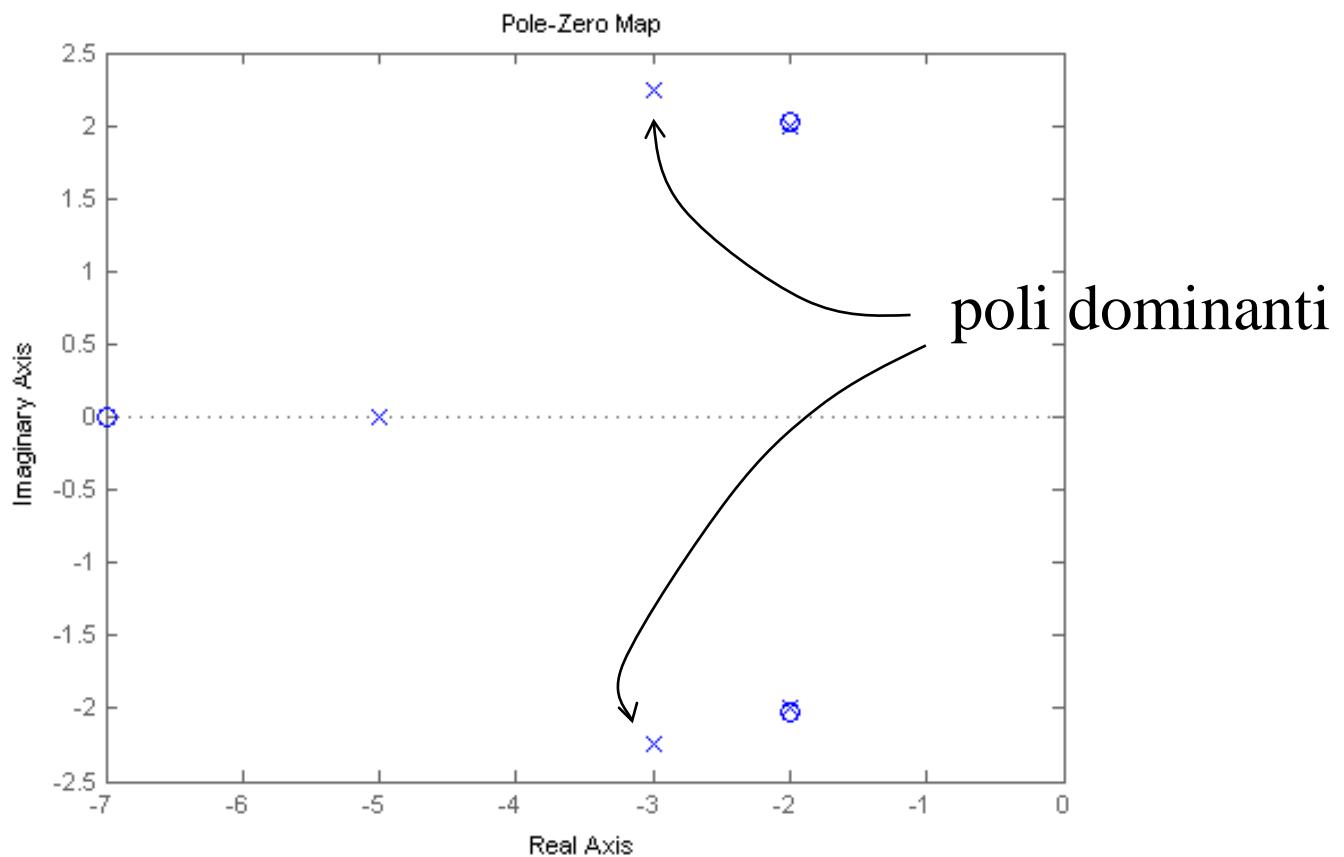


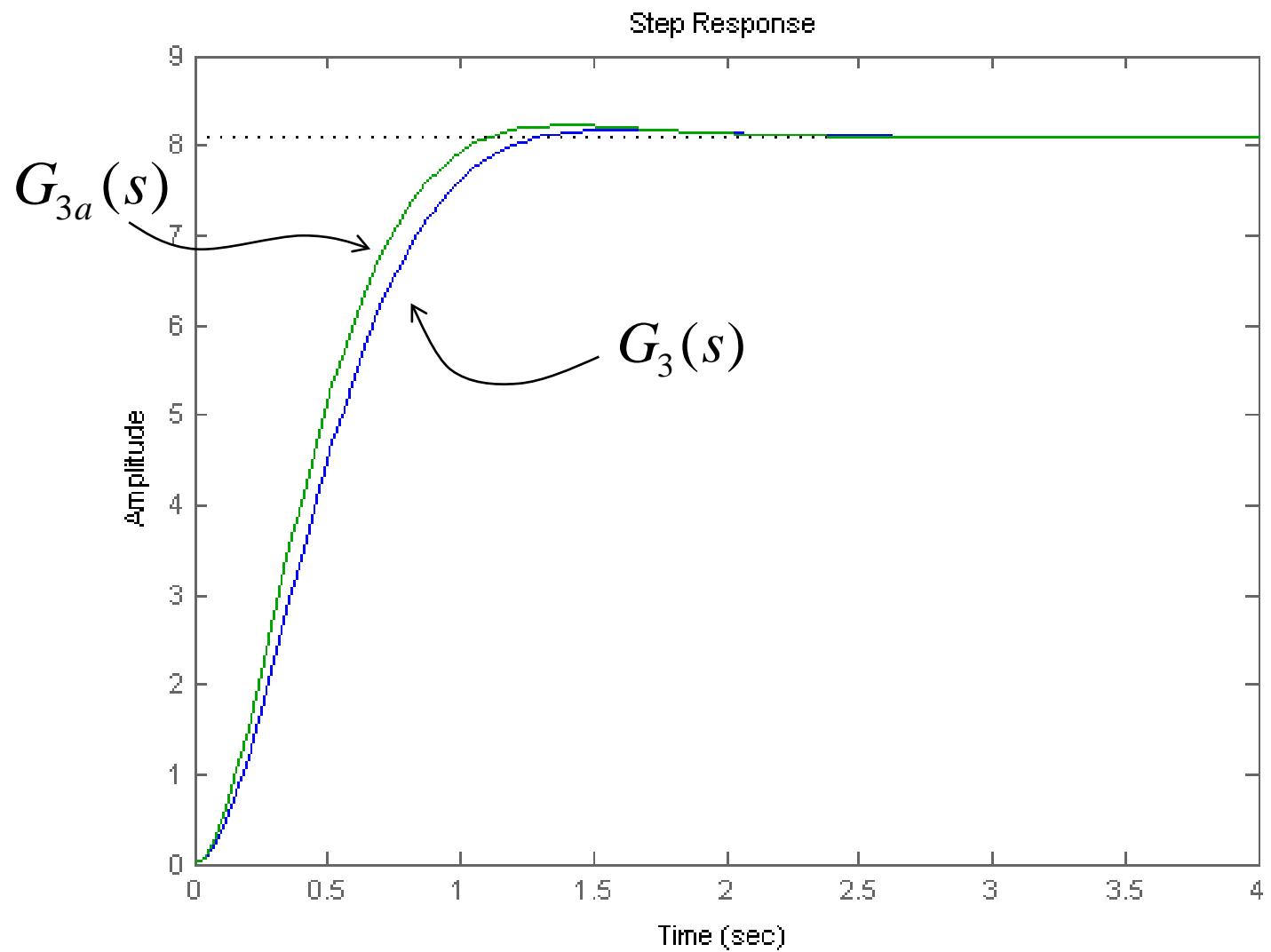
Il polo dominante, escluso il polo  $-1$  quasi cancellato dallo zero  $-0.98$ ,

$$\text{è } -4 \Rightarrow G_{2a}(s) = \frac{3.92}{s + 4}$$



$$G_3(s) = \frac{80(s+7)[(s+2)^2 + 4.1]}{[(s+2)^2 + 4][(s+3)^2 + 5](s+5)} \Rightarrow G_{3a}(s) = \frac{113.4}{[(s+3)^2 + 5]}$$





## Poli dominanti (def.)

Sono i poli (normalmente una coppia), non soggetti a quasi cancellazione polo-zero, più vicini all'asse immaginario.

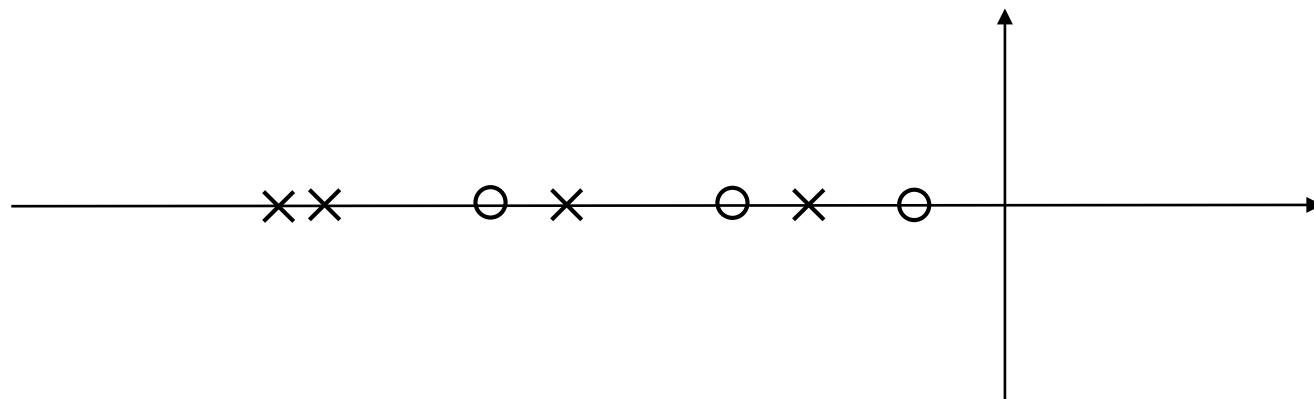
**Proprietà qualitativa:** La risposta al gradino unitario dipende approssimativamente dai soli poli dominanti di  $\Sigma$ .

... la dinamica “transiente” è “dominata” dall’influenza dei poli dominanti ...

**Conseguenza:** se i poli dominanti sono complessi coniugati i parametri della risposta  $S$ ,  $T_a$  e  $T_s$  sono determinabili approssimativamente dalle relazioni presentate per i sistemi di ordine due.

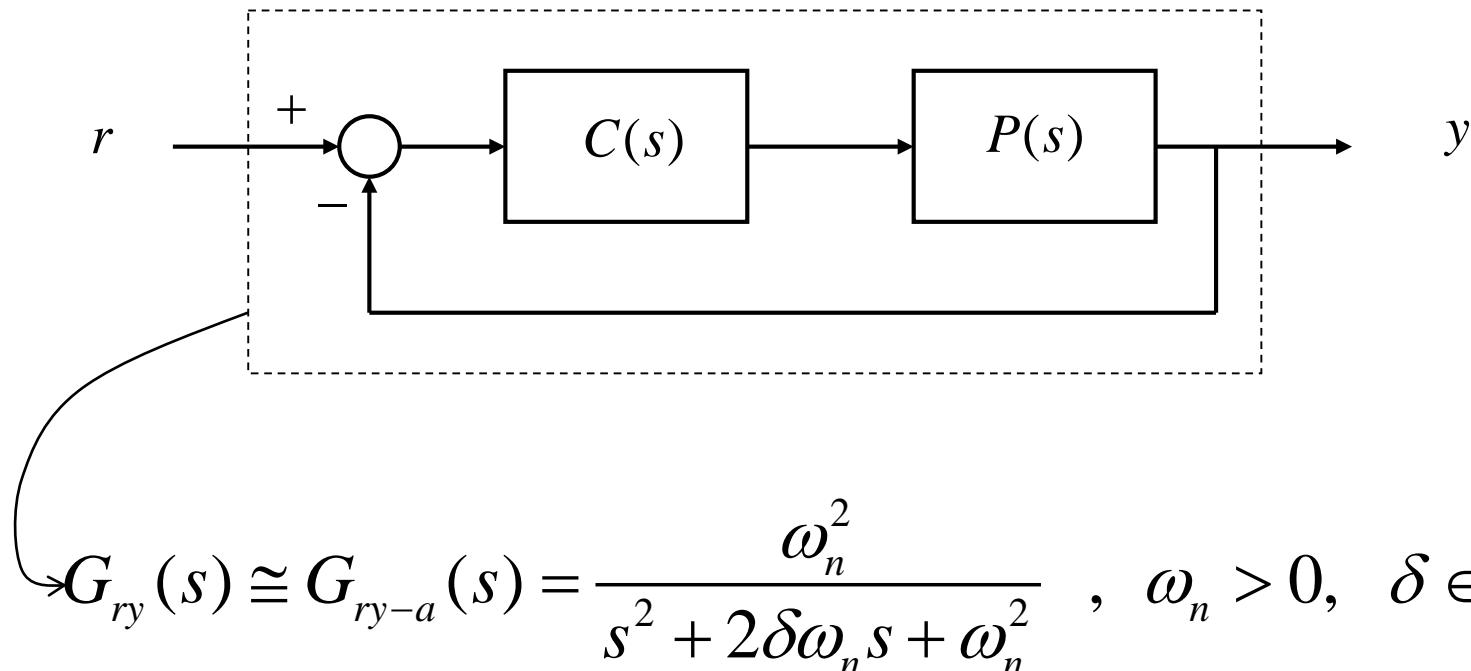
## Precisazioni:

1. Il concetto di poli dominanti porta ad una approssimazione del comportamento transiente che può essere anche molto rozza ...
2. Non è sempre possibile individuare un insieme significativo di poli dominanti.

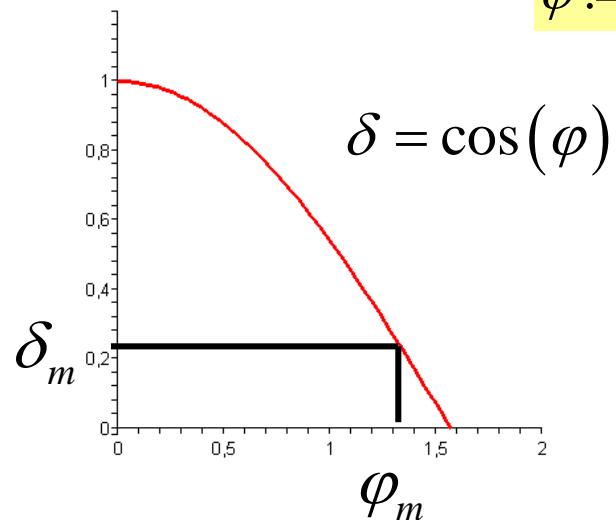
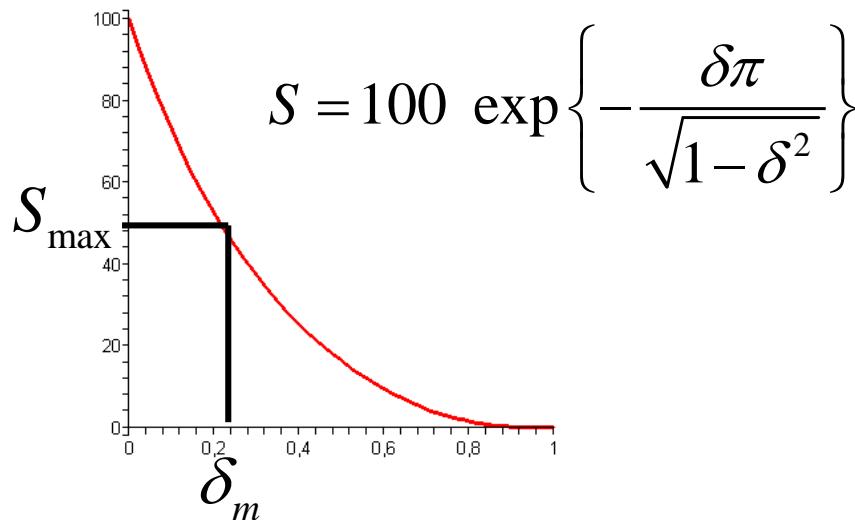


# Specifiche sulla risposta al gradino per un sistema di controllo

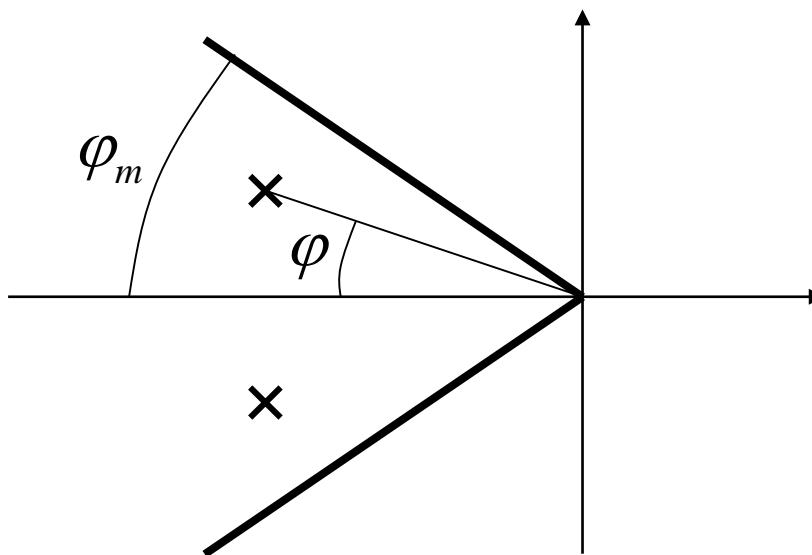
$$S \leq S_{\max} , \quad T_a \leq T_{a-\max}$$



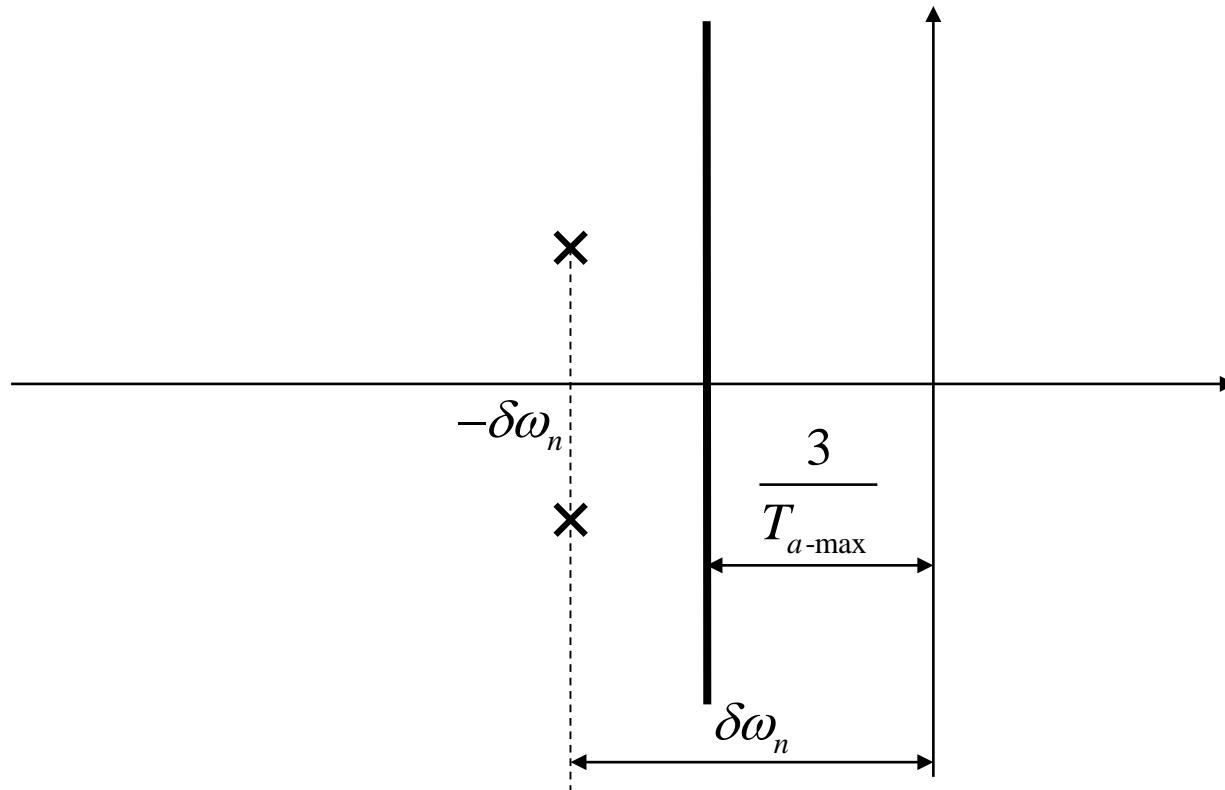
$$\varphi := \arccos(\delta)$$



$$S \leq S_{\max}, \quad S(\delta) \leq S_{\max} \iff \delta \geq \delta_m, \quad \delta(\varphi) \geq \delta_m \iff \varphi \leq \varphi_m$$

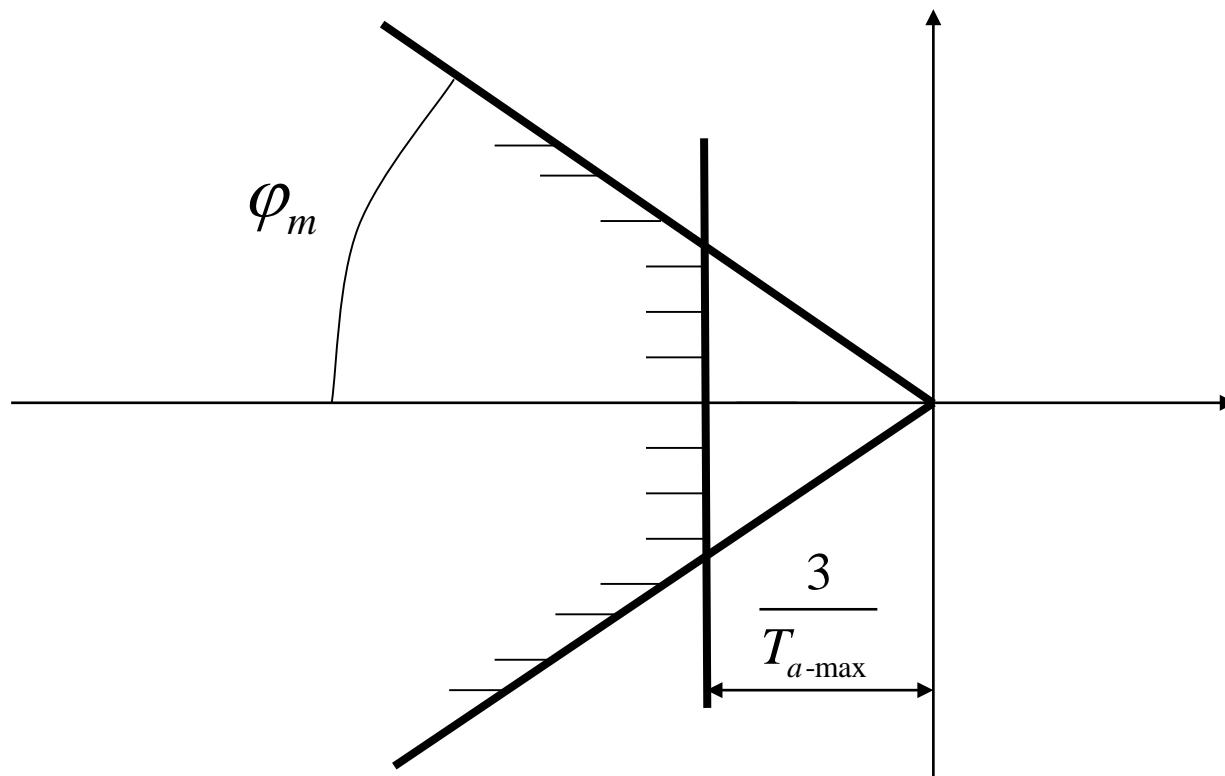


$$T_a \leq T_{a\text{-max}}, \quad \frac{3}{\delta\omega_n} \leq T_{a\text{-max}} \quad \Leftrightarrow \quad \delta\omega_n \geq \frac{3}{T_{a\text{-max}}}$$



Le specifiche  $S \leq S_{\max}$  e  $T_a \leq T_{a-\max}$  devono essere soddisfatte entrambe.

Quindi i poli  $-\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2}$  devono appartene al cono troncato di figura. In pratica, si impone che tutti i poli di  $G_{ry}(s)$  appartengano al cono troncato.



## I concetti introdotti dalla lezione:

- Risposte al gradino dei sistemi del primo e secondo ordine
- Sovraelongazione, tempo di assestamento e tempo di salita
- Poli dominanti
- Specifiche su sovraelongazione e tempo di assestamento: condizione di ***root clustering***

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle  
Telecomunicazioni

**Lezione n. 8 di Fondamenti di Controlli Automatici**  
**prof. Aurelio Piazzì**

**La stabilità dei sistemi dinamici**

Università degli Studi di Parma – a.a. 2020-2021

# Stabilità dei sistemi dinamici (lineari)

- Stabilità (alle perturbazioni) di un sistema dinamico (stabilità di punti di equilibrio a seguito di perturbazioni).
- Stabilità BIBO (Bounded-Input Bounded-Output) di un sistema dinamico (stabilità della relazione causale ingresso-uscita).
- Un algoritmo per studiare la stabilità: il criterio di Routh.

# Stabilità: definizioni e teoremi

Si consideri il sistema dinamico  $\Sigma$  descritto dall'eq. diff.

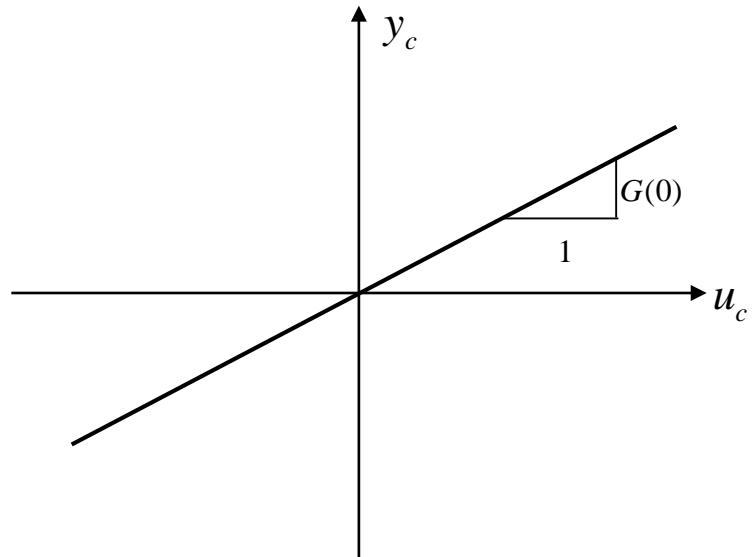
$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u$$

I punti di equilibrio di  $\Sigma$  sono caratterizzati da valori costanti nel tempo di  $u$  ed  $y$   $(u_c, y_c) \in \mathbb{R}^2$  soddisfacenti la relazione:

$$y_c = G(0)u_c, \quad u_c \in \mathbb{R};$$

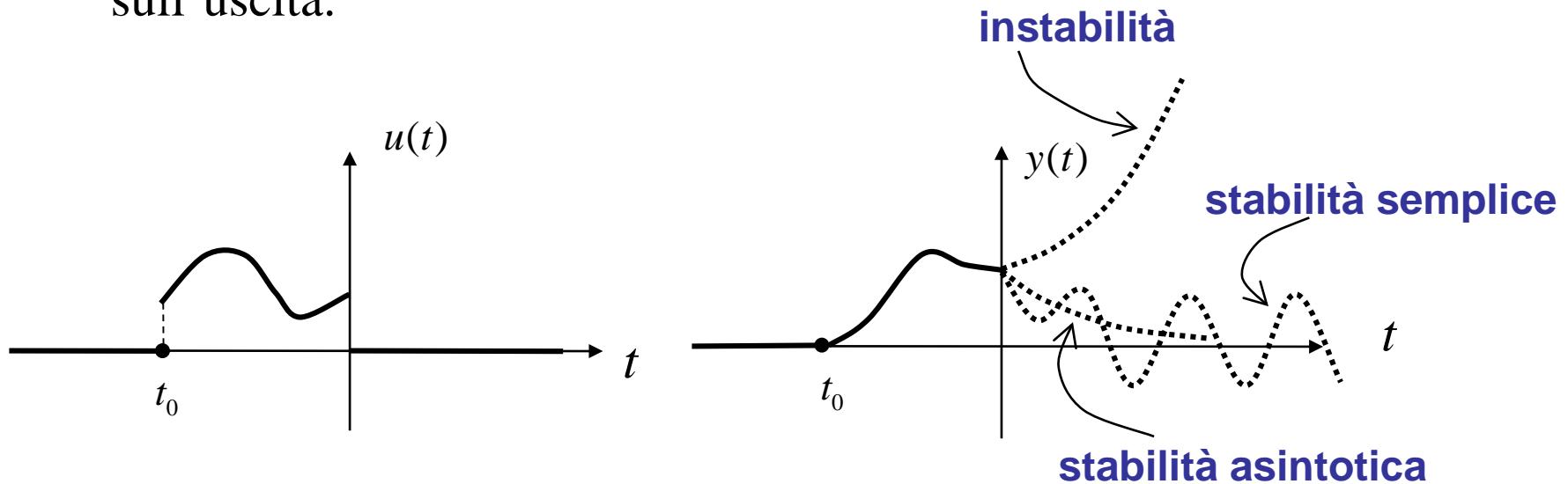
$G(s)$  f.d.t. di  $\Sigma$ ,

$$G(0) = \frac{b_0}{a_0} \quad \text{guadagno statico di } \Sigma.$$



Caratteristica statica di  $\Sigma$

- Per lo studio della stabilità dei punti di equilibrio di  $\Sigma$  si scelga l'origine della caratteristica statica di  $\Sigma$ :  $u_c = 0, y_c = 0$ . Come vedremo tale studio porta alle medesime conclusioni per qualsivoglia punto di equilibrio.
- Per semplicità assumiamo  $a(s)$  e  $b(s)$  coprimi fra loro.
- Il punto di equilibrio  $u_c = 0, y_c = 0$  venga perturbato nell'intervallo temporale  $[t_0, 0], t_0 < 0$  mediante perturbazioni introdotte con il segnale di ingresso o con modifiche delle condizioni iniziali sull'uscita.



$$u(t) = 0 \text{ per } t < t_0, \quad u(t) \not\equiv 0 \text{ per } t \in [t_0, 0), \quad u(t) = 0 \text{ per } t \geq 0$$

$$y(t) = 0 \text{ per } t < t_0, \quad y(t) \not\equiv 0 \text{ per } t \in [t_0, 0), \quad y(t) = y_{\text{lib.}}(t) \text{ per } t \geq 0$$

Conseguenze: l'uscita è in evoluzione libera per  $t \geq 0$

$$y_{\text{lib.}}(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_L(s)]$$

$$Y_{\text{lib.}}(s) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} a_i D^{i-1-j} y_- s^j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{i-1} b_i D^{i-1-j} u_- s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

Comportamento della risposta libera  $y_{\text{lib.}}(t)$  a seguito delle perturbazioni introdotte :

- $y_{\text{lib.}}(t)$  limitata su  $[0, +\infty)$ : punto di equilibrio **stabile**.
- $y_{\text{lib.}}(t)$  non limitata su  $[0, +\infty)$ : punto di equilibrio **instabile**.
- $y_{\text{lib.}}(t)$  limitata su  $[0, +\infty)$  e convergente a zero per  $t \rightarrow +\infty$ : punto di equilibrio **asintoticamente stabile**.

**Proprietà:** Per il sistema lineare  $\Sigma$  il comportamento della risposta libera a seguito di perturbazioni su di un punto di equilibrio rimane il medesimo per qualsivoglia altro punto di equilibrio.

**Dim.:** per semplicità sia  $n = 2$ ,  $m = 1$

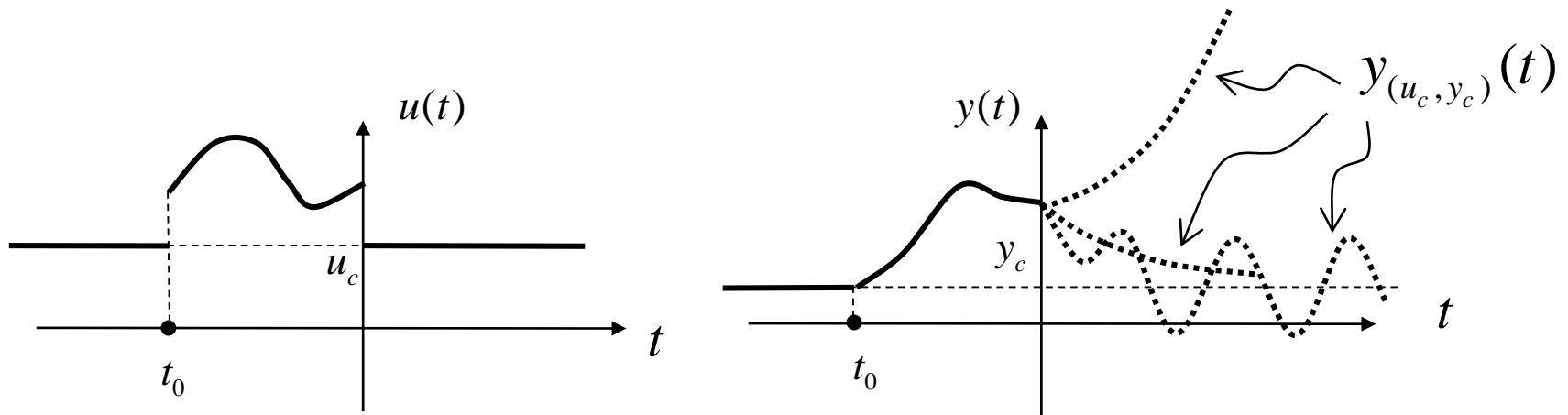
$$a_2 D^2 y + a_1 D y + a_0 y = b_1 D u + b_0 u$$

Per il punto di equilibrio  $(0, 0)$  la proprietà di stabilità/instabilità è associata all'evoluzione libera descritta da

$$a_2 D^2 y_{(0,0)}(t) + a_1 D y_{(0,0)}(t) + a_0 y_{(0,0)}(t) = 0 \quad \text{per } t > 0$$

Consideriamo il punto di equilibrio  $(u_c, y_c)$  con  $u_c \neq 0$  ed indichiamo con  $y_{(u_c, y_c)}(t)$  la risposta libera a seguito di una perturbazione:

$$a_2 D^2 y_{(u_c, y_c)}(t) + a_1 D y_{(u_c, y_c)}(t) + a_0 y_{(u_c, y_c)}(t) = b_0 u_c \quad \text{per } t > 0$$



$$a_2 D^2 y_{(0,0)}(t) + a_1 D y_{(0,0)}(t) + a_0 y_{(0,0)}(t) = 0 \quad \text{per } t > 0$$

**Dim. (cont.) :**

Introduciamo il cambio di variabile  $y(t) = \tilde{y}(t) + y_c$

per  $t > 0$  sia  $y_{(u_c, y_c)}(t) = \tilde{y}_{(u_c, y_c)}(t) + y_c$

$$\Rightarrow a_2 D^2 \tilde{y}_{(u_c, y_c)}(t) + a_1 D \tilde{y}_{(u_c, y_c)}(t) + a_0 \tilde{y}_{(u_c, y_c)}(t) + \cancel{a_0 y_c} = \cancel{b_0 u_c} \quad \text{per } t > 0$$

$$a_2 D^2 \tilde{y}_{(u_c, y_c)}(t) + a_1 D \tilde{y}_{(u_c, y_c)}(t) + a_0 \tilde{y}_{(u_c, y_c)}(t) = 0 \quad \text{per } t > 0$$

Il comportamento della risposta libera  $\tilde{y}_{(u_c, y_c)}(t)$  è quindi il medesimo di  $y_{(0,0)}(t)$ . □

**Conseguenza:** possiamo parlare di stabilità/instabilità del sistema anziché di stabilità/instabilità di un punto di equilibrio.

## Def. : Stabilità (alle perturbazioni) di un sistema dinamico lineare

Il sistema lineare  $\Sigma$  si dice:

1. STABILE se per ogni perturbazione  $y_{\text{lib.}}(t)$  è limitata su  $[0, +\infty)$ .
2. ASINTOTICAMENTE STABILE se è stabile ed inoltre

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_{\text{lib.}}(t) = 0 \text{ per ogni perturbazione introdotta.}$$

3. SEMPLICEMENTE STABILE se è stabile ed inoltre esiste una perturbazione per la quale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_{\text{lib.}}(t) = y_\infty \neq 0 \vee \left\{ \text{non esiste } \lim_{t \rightarrow +\infty} y_{\text{lib.}}(t) \right\}.$$

4. INSTABILE se non è stabile.

## Teorema (poli di $\Sigma$ e stabilità)

Sia  $\Sigma$  un sistema lineare per il quale i poli coincidono con le radici del polinomio caratteristico ( $a(s)$  e  $b(s)$  sono coprimi fra loro).

- a.  $\Sigma$  è **stabile** se e solo se tutti i poli hanno parte reale non positiva e gli eventuali poli puramente immaginari sono semplici.
- b.  $\Sigma$  è **asintoticamente stabile** se e solo se tutti i suoi poli hanno parte reale negativa.
- c.  $\Sigma$  è **semplicemente stabile** se e solo se tutti i poli hanno parte reale non positiva e quelli puramente immaginari (che devono esistere) sono semplici.
- d.  $\Sigma$  è **instabile** se e solo se esiste almeno un polo a parte reale positiva o un polo puramente immaginario con molteplicità maggiore di uno.

Nota: Se  $a(s)$  e  $b(s)$  non sono coprimi fra loro, il teorema di stabilità ammette la medesima formulazione sostituendo i “poli” con le “radici del polinomio caratteristico”.

**Esempi :**  $\Sigma$  con f.d.t.  $G(s) = b(s)/a(s)$

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+5)} \Rightarrow \Sigma \text{ è semplicemente stabile}$$

$$G(s) = \frac{(s+2)(s-5)}{s^2(s+12)(s+50)} \Rightarrow \Sigma \text{ è instabile}$$

$$G(s) = \frac{(s+2)(s-5)}{(s+7)^4(s+50)} \Rightarrow \Sigma \text{ è asintoticamente stabile}$$

$$G(s) = \frac{(s+2)(s-5)}{(s-3)(s+50)} \Rightarrow \Sigma \text{ è instabile}$$

## Stabilità ingresso-limitato uscita-limitata

(stabilità BIBO, *bounded-input bounded-output*)

### Def. (stabilità BIBO)

$\Sigma$  è BIBO stabile se per ogni azione forzante limitata la corrispondente risposta forzata è anch'essa limitata.

Formalmente:  $\left[ \left\| f(t) \right\|_{\infty} \triangleq \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| \right]$

$\forall (u(t), y(t)) \in \mathcal{B}$  con  $u(t) = 0, y(t) = 0$  per  $t < 0$  e  $\|u(t)\|_{\infty} < +\infty$   
 $\Rightarrow \|y(t)\|_{\infty} < +\infty$ .

### Teorema (Stabilità BIBO)

$\Sigma$  è BIBO stabile se e solo se  $\int_0^{+\infty} |g(\tau)| d\tau < +\infty$ .

Si assuma  $a(s)$  e  $b(s)$  coprimi fra loro. Vale quindi la seguente equivalenza.

**Teorema (Equivalenza tra Stabilità BIBO e Stabilità Asintotica)**

$\Sigma$  è BIBO stabile se e solo se  $\Sigma$  è asintoticamente stabile.

## Il Criterio di Routh

Si consideri il sistema lineare  $\Sigma$  descritto dall'eq. diff.

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u ; \text{ la sua f.d.t. è } G(s) = b(s)/a(s)$$

con  $a(s)$  polinomio caratteristico di  $\Sigma$ .

### Def. (Equazione caratteristica)

Dato il sistema  $\Sigma$  l'eq.  $a(s) = 0$  ovvero

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

è detta equazione caratteristica di  $\Sigma$ .

La stabilità di  $\Sigma$  è associata alle radici dell'eq. caratteristica.

- **Def. (Polinomi di Hurwitz)**

Un polinomio  $a(s)$  è detto di Hurwitz o hurwitziano se tutte le sue radici hanno parte reale negativa.

- **Proprietà**

Si assuma  $a_n > 0$ . Il polinomio  $a(s)$  è hurwitziano solo se tutti i suoi coefficienti sono positivi.

**Dim.**: Se le radici di  $a(s)$  hanno tutte parte reale negativa allora

$$a(s) = a_n(s + \eta_1)(s + \eta_2) \cdots (s + \eta_k) \left( s^2 + 2\delta_1 \omega_{n1} s + \omega_{n1}^2 \right) \cdots \left( s^2 + 2\delta_l \omega_{nl} s + \omega_{nl}^2 \right)$$

$$\eta_i > 0 \quad i = 1, \dots, k$$

$$\omega_{ni} > 0 \quad i = 1, \dots, l$$

$$\delta_i \in (0,1) \quad i = 1, \dots, l$$

Quindi sviluppando tutti i prodotti si deduce che i coefficienti sono positivi in quanto somme di termini positivi... □

È possibile determinare il segno delle radici di  $a(s)$  ( $\text{Re} > 0$ ,  $\text{Re} = 0$ ,  $\text{Re} < 0$ ) mediante la cosiddetta *Tabella di Routh*.

- Costruzione della Tabella di Routh

$n$	$\gamma_{0,1}$	$\gamma_{0,2}$	$\gamma_{0,3}$	$\cdots$
$n-1$	$\gamma_{1,1}$	$\gamma_{1,2}$	$\gamma_{1,3}$	$\cdots$
$n-2$	$\gamma_{2,1}$	$\gamma_{2,2}$	$\gamma_{2,3}$	$\cdots$
$n-3$	$\gamma_{3,1}$	$\gamma_{3,2}$	$\gamma_{3,3}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$\vdots$				
2	$\gamma_{n-2,1}$	$\gamma_{n-2,2}$		
1	$\gamma_{n-1,1}$			
0	$\gamma_{n,1}$			

- Regole di costruzione della T.d.R. (algoritmo base)

1. Le prime due righe riportano in modo alterno i coefficienti di  $a(s)$ :

$$\gamma_{0,1} = a_n \quad \gamma_{0,2} = a_{n-2} \quad \gamma_{0,3} = a_{n-4} \quad \cdots$$

$$\gamma_{1,1} = a_{n-1} \quad \gamma_{1,2} = a_{n-3} \quad \gamma_{1,3} = a_{n-5} \quad \cdots$$

Ove non esplicitamente definiti i coefficienti gamma assumono il valore di zero.

2. Le righe successive vengono definite dalla regola ( $k = 2, 3, \dots, n$ ):

$$\gamma_{k,j} = -\frac{\begin{vmatrix} \gamma_{k-2,1} & \gamma_{k-2,j+1} \\ \gamma_{k-1,1} & \gamma_{k-1,j+1} \end{vmatrix}}{\gamma_{k-1,1}} = \frac{\gamma_{k-1,1}\gamma_{k-2,j+1} - \gamma_{k-2,1}\gamma_{k-1,j+1}}{\gamma_{k-1,1}}$$

- **Teorema (di Routh)**

Si assume che la tabella di Routh possa essere completata. Allora ad ogni variazione di segno, degli elementi consecutivi della prima colonna, corrisponde una radice a parte reale positiva, ad ogni permanenza corrisponde una radice a parte reale negativa.

- **Criterio di Routh**

Il polinomio  $a(s)$  è hurwitziano se e solo se l'associata tabella di Routh può essere completata (con l'algoritmo base) e presenta nella prima colonna solo permanenze di segno.

$$n_+(a) := \{ \text{n. radici di } a(s) \in \mathbb{C}_+ \}$$

$$n_-(a) := \{ \text{n. radici di } a(s) \in \mathbb{C}_- \}$$

$$n_0(a) := \{ \text{n. radici di } a(s) \in j\mathbb{R} \}$$

**Esempi :**

$$a(s) = s^3 - 4s^2 + s + 6 \quad (\text{radici } -1, 2, 3)$$

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 6 & 0 \\ 1 & \frac{-4-6}{-4} = \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 6 \end{array}$$

due variazioni  $\Rightarrow n_+(a) = 2$   
 una permanenza  $\Rightarrow n_-(a) = 1$

$$a(s) = 2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 \quad (\text{radici } 0.7555 \pm j1.4444, -1.0055 \pm j0.9331)$$

$$\begin{array}{c|ccccc} 4 & 2 & 3 & 10 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 10 & 0 \\ 1 & \frac{45}{7} & 0 \\ 0 & 10 \end{array}$$

due variazioni  $\Rightarrow n_+(a) = 2$   
 due permanenze  $\Rightarrow n_-(a) = 2$

## • Proprietà

Durante la costruzione della tabella di Routh i termini di una stessa riga possono essere moltiplicati tutti per uno stesso coefficiente positivo senza che ciò modifichi le variazioni (o permanenze) di segno nella prima colonna.

**Esempi :**  $a(s) = 4s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 2s + 1$

4	4	5	1	0
3	3	2	0	0
2	7	3	0	(non si è diviso per 3)
1	5	0		(non si è diviso per 7)
0	3			

Tutte permanenze  $\Rightarrow$  tutte radici con parte reale negativa

$$a(s) = s^4 + 3s^3 + 7s^2 + 6s + 15$$

4	1	7	15	0	
3	1	2	0	0	(si è diviso per 3)
2	1	3	0		(si è diviso per 5)
1	-1	0			
0	3				

due variazioni  $\Rightarrow n_+(a) = 2$

due permanenze  $\Rightarrow n_-(a) = 2$

## Casi singolari nella Costruzione della Tabella di Routh

- a) Il primo elemento di una riga è zero.
- b) Tutti gli elementi di una riga sono nulli.

### Proseguzione della tabella nel caso a)

1. Metodo  $\varepsilon$  (è obsoleto: algoritmamente complesso e non sempre risolutivo)
2. **Metodo di Benidir-Picinbono** (1990): algoritmamente semplice e *sempre* risolutivo.

## Metodo di Benidir-Picinbono

Ogni riga, non nulla, che inizia con  $p$  zeri viene sommata con la riga da questa ottenuta moltiplicandola per  $(-1)^p$  e traslandola verso sinistra di  $p$  posizioni. La tabella di Routh viene poi continuata ed interpretata nel modo usuale.

**Esempio :**  $a(s) = s^3 + 3s - 2 = 0$

3	1	3	0
2'	0	-2	0
2''	2	0	0
2	2	-2	0
1	4	0	
0	-2		

una variazione  $\Rightarrow n_+(a) = 1$

due permanenze  $\Rightarrow n_-(a) = 2$

## Proseguione della tabella nel caso b)

Tutti gli elementi di una riga sono nulli: quando il polinomio  $a(s)$  non ha radici nell'origine ( $a_0 \neq 0$ ) questo accade sempre su di una riga dispari.

$$\begin{array}{c|cccccc} 2i & \gamma_{n-2i,1} & \gamma_{n-2i,2} & \gamma_{n-2i,3} & \cdots & \gamma_{n-2i,i+1} & 0 \\ 2i-1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}$$

Def. polinomio ausiliario  $\beta(s)$

$$\beta(s) := \gamma_{n-2i,1}s^{2i} + \gamma_{n-2i,2}s^{2i-2} + \gamma_{n-2i,3}s^{2i-4} + \cdots + \gamma_{n-2i,i}s^2 + \gamma_{n-2i,i+1}$$

L'eq. ausiliaria è quindi  $\beta(s) = 0$

## Proprietà

1. Il polinomio ausiliario  $\beta(s)$  divide  $a(s)$ . Quindi esiste un polinomio  $\alpha(s)$  tale che  $a(s) = \alpha(s)\beta(s)$ .
2. La prima parte della tabella (fino alla riga  $2i$ ) dà informazioni sul segno delle radici di  $\alpha(s)$ .

## Proprietà (simmetria delle radici del polinomio ausiliario)

Le radici del polinomio ausiliario  $\beta(s)$  sono disposte simmetricamente rispetto all'origine del piano complesso.

Dim. (cenno) Nel polinomio  $\beta(s)$  mancano i termini dispari...

Quindi  $\sigma \pm j\omega$  è radice di  $\beta(s)$  se e solo se  $-\sigma \pm j\omega$  è radice di  $\beta(s)$

- **Corollario**

L'equazione ausiliaria  $\beta(s) = 0$  ha tante radici a parte reale negativa quante sono quelle a parte reale positiva e può anche presentare radici puramente immaginarie.

- **Come proseguire la costruzione della Tabella nel caso b)**
  1. Si deriva il polinomio ausiliario.
  2. I coefficienti del polinomio così ottenuto sostituiscono gli zeri della riga nulla.
  3. Si prosegue la Tabella con l'algoritmo usuale: in questo caso però le permanenze corrispondono anche a radici puramente immaginarie.

## Interpretazione della Tabella di Routh nel caso di singolarità completa (caso b) )

1. La prima colonna della tabella dalla riga  $n$  alla riga  $2i$  da informazioni sul segno delle radici di  $\alpha(s)$ : una variazione  $\rightarrow$  una radice a parte reale positiva, una permanenza  $\rightarrow$  una radice a parte reale negativa.
2. La prima colonna della tabella dalla riga  $2i$  alla riga 0 da informazioni sul segno delle radici di  $\beta(s)$ : una variazione  $\rightarrow$  una radice a parte reale positiva, una permanenza  $\rightarrow$  una radice a parte reale negativa oppure una radice puramente immaginaria.

La simmetria delle radici di  $\beta(s)$  (pol. ausiliario) permette di stabilire il segno della parte reale di tutte le radici.

**Esempio:**  $a(s) = s^6 + s^5 - 2s^4 - 3s^3 - 7s^2 - 4s - 4$

6	1	-2	-7	-4	0
5	1	-3	-4	0	0
4	1	-3	-4	0	
3	2	-3	0	0	
2	-3	-8	0		
1	-25	0			
0	-8				

polinomio ausiliario  $\beta(s) = s^4 - 3s^2 - 4$   
 $D\beta(s) = 4s^3 - 6s$  (si è diviso per 2)

$$n_+(a) = 1$$

$$n_0(a) = 2 \quad (\text{calcolato come } 4 - 1 - 1)$$

$$n_-(a) = 2 + 1 = 3$$

## Punti salienti della lezione:

- Teorema di stabilità (alle perturbazioni) di un sistema dinamico (in relazione ai poli del sistema)
- Teorema di stabilità BIBO ed equivalenza tra la stabilità BIBO e la stabilità asintotica (alle perturbazioni) di un sistema dinamico
- Tabella di Routh e relativo teorema e criterio (di Routh)
- Costruzione della tabella di Routh nei casi singolari e determinazione del segno della parte reale delle radici di un polinomio ( $n_-, n_0, n_+$ )

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle  
Telecomunicazioni

**Lezione n. 9 di Fondamenti di Controlli Automatici**  
**prof. Aurelio Piazzì**

**Analisi armonica e diagrammi di  
Bode**

Università degli Studi di Parma – a.a. 2020-2021

- Il fenomeno armonico nei sistemi lineari
- La funzione di risposta armonica
- Una rappresentazione grafica: i diagrammi di Bode

# L'analisi armonica nei sistemi lineari

**Un esempio :** Applichiamo il segnale armonico  $u(t) = 2 \sin(t)$ ,  $t \geq 0$

ad un sistema con f.d.t.  $G(s) = \frac{10}{s+1}$ :

$$Y(s) = \frac{10}{s+1} \cdot \mathcal{L}[2 \sin(t)] = \frac{10}{s+1} \cdot \frac{2}{s^2 + 1} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s-j} + \frac{\bar{k}_2}{s+j}$$

$$k_1 = 10, k_2 = \frac{10}{j(j+1)}$$

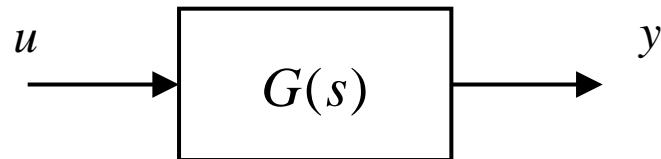
$$y(t) = 10e^{-t} + 2 \frac{10}{\sqrt{2}} \cos \left( t + \arg \left( \frac{10}{j(j+1)} \right) \right) = 10e^{-t} + 10\sqrt{2} \cos \left( t - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{quando } t \rightarrow +\infty: y_\infty(t) = 10\sqrt{2} \sin \left( t - \frac{\pi}{4} \right)$$

Più in generale consideriamo un sistema dinamico  $\Sigma$ ,

asintoticamente stabile, descritto dall'eq. diff.  $\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u$

( $a(s)$  e  $b(s)$  siano coprimi fra loro). La f.d.t. è  $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ .



Fenomeno di risposta armonica: Col sistema in quiete, all'istante  $t = 0-$ , si applichi  $u(t) = U \sin(\omega t)$ ,  $\omega \geq 0$ ,  $U > 0$ . La risposta forzata di  $\Sigma$  per  $t \rightarrow +\infty$  assume la forma:

$$y_\infty(t) = Y(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

## Def. (funzione di risposta armonica)

$$F : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\omega \rightarrow F(\omega) := \frac{Y(\omega)}{U} e^{j\varphi(\omega)}$$

In virtù della linearità di  $\Sigma$ ,  $F(\omega)$  è indipendente da  $U$ .

### Teorema (di analisi armonica)

Sia  $\Sigma$  un sistema asintoticamente stabile con f.d.t.  $G(s)$  razionale.

La risposta forzata di  $\Sigma$  ad un segnale armonico all'ingresso è ancora, a regime ( $t \rightarrow +\infty$ ), un segnale armonico con la stessa frequenza dell'ingresso. La funzione di risposta armonica associata soddisfa la relazione:

$$F(\omega) = G(j\omega)$$

**Dim.**:  $Y(s) = G(s)\mathcal{L}[U \sin(\omega t)] = G(s) \frac{U\omega}{s^2 + \omega^2} = G(s) \frac{U\omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)}$

dallo sviluppo in fratti semplici ...

$$Y(s) = \frac{k_1}{s - p_1} + \cdots + \frac{k_n}{s - p_n} + \frac{k}{s - j\omega} + \frac{\bar{k}}{s + j\omega} \quad \text{con } \operatorname{Re} p_i < 0, \quad i = 1, \dots, n$$

quindi  $y(t) = y_t(t) + y_\infty(t)$  , con  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_t(t) = 0$

$$y_t(t) := \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{k_1}{s - p_1} + \cdots + \frac{k_n}{s - p_n} \right] \quad y_\infty(t) := \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{k}{s - j\omega} + \frac{\bar{k}}{s + j\omega} \right]$$

$$k = G(s) \frac{U\omega}{s + j\omega} \Big|_{s=j\omega} = G(j\omega) \frac{U}{2j}$$

$$y_\infty(t) = 2|G(j\omega)| \frac{U}{2} \cos \left( \omega t + \arg G(j\omega) - \frac{\pi}{2} \right) = U |G(j\omega)| \sin(\omega t + \arg G(j\omega))$$

$$\Rightarrow F(\omega) = |G(j\omega)| e^{j \arg G(j\omega)} = G(j\omega)$$

□

- La funzione di risposta armonica  $F(\omega)$  è un modello matematico di  $\Sigma$  (alternativo all'eq.diff., f.d.t., risposta all'impulso, risposta al gradino, ecc. ... ).

$F(\omega)$  può essere determinata sperimentalmente ...

- Sfruttando la relazione  $F(\omega) = G(j\omega)$  la f. di risposta armonica è definibile anche per sistemi non asintoticamente stabili.

**Proprietà:** Sia dato un sistema dinamico con funzione di trasferimento  $G(s)$ . Allora

$$(U \sin(\omega t), U|G(j\omega)| \sin(\omega t + \arg G(j\omega))) \in \mathcal{B}$$

per ogni  $U \geq 0$  e  $\omega \geq 0$ .

Nota: la proprietà vale anche per i sistemi instabili.

- Relazioni fra la risposta armonica  $G(j\omega)$  e la risposta all'impulso  $g(t)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} G(j\omega) = \int_{0-}^{+\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \\ g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{array} \right.$$

- Ponendo  $G(j\omega) = R(\omega) + j I(\omega)$  si potrebbe dimostrare:

$$\left\{ \begin{array}{l} R(\omega) = \int_0^{+\infty} g(t) \cos \omega t \, dt \\ I(\omega) = - \int_0^{+\infty} g(t) \sin \omega t \, dt \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} R(\omega) \cos \omega t \, d\omega \\ g(t) = - \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} I(\omega) \sin \omega t \, d\omega \end{array} \right.$$

- Rappresentazioni grafiche della f. di risposta armonica: diagrammi di Bode, diagrammi polari (o di Nyquist), diagrammi di Nichols.

# Guadagni del sistema lineare $\Sigma$

Funzione di trasferimento  
(Guadagno dinamico)  
 $G(s)$



$s := j\omega$   
Funzione di risposta armonica,  
anche Risposta in frequenza  
(Guadagno armonico)  
 $G(j\omega)$



$s := 0$   
Guadagno statico  
 $G(0)$

# I diagrammi di Bode

diagrammi di B.  $\equiv$  diagrammi (cartesiani) logaritmici della risposta armonica

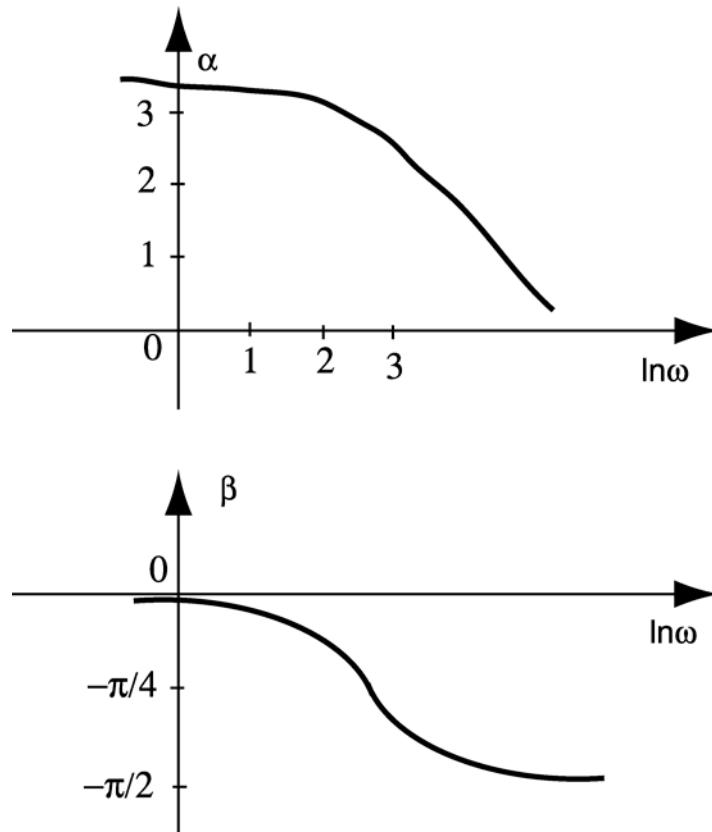
$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j \arg G(j\omega)}$$

$$\ln G(j\omega) = \ln |G(j\omega)| + j \arg G(j\omega) =: \alpha + j\beta$$

$$\alpha = \ln |G(j\omega)| \cong 2,3025 \log_{10} |G(j\omega)|$$

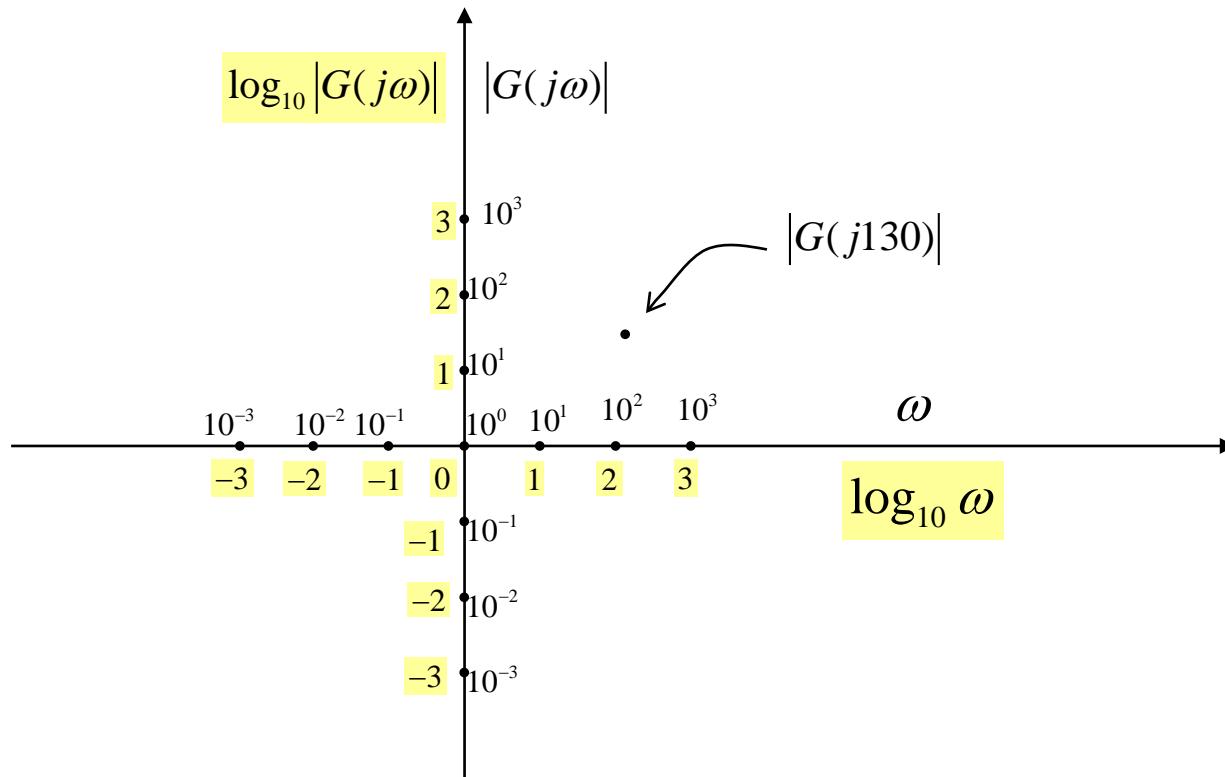
$$\beta = \arg G(j\omega)$$

- **Diagramma delle ampiezze o dei moduli o diagramma  $\alpha$**  : riporta il logaritmo del modulo della r.a. in funzione del logaritmo della pulsazione  $\omega$ .
- **Diagramma delle fasi o degli argomenti o diagramma  $\beta$**  : riporta l'argomento della r.a. in funzione del logaritmo della pulsazione  $\omega$ .



- Usualmente nelle ascisse vengono riportati direttamente i valori delle pulsazioni utilizzando una scala logaritmica in base 10.
- Analogamente, per i diagrammi dei moduli, nelle ordinate vengono riportati direttamente i valori dei moduli (utilizzando una scala logaritmica in base 10).

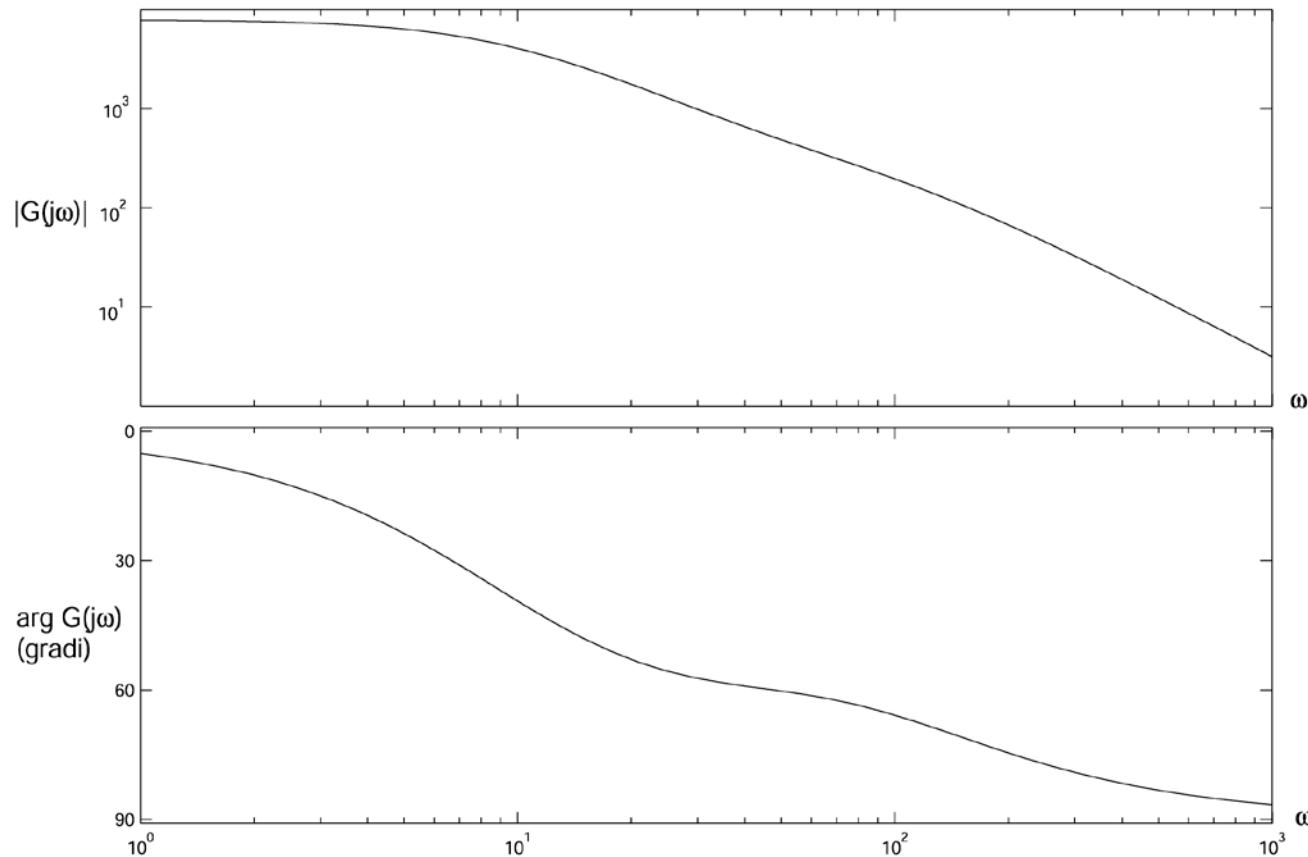
# Costruzione del grafico logaritmico di $|G(j\omega)|$ (diagramma del modulo)



Esempio:

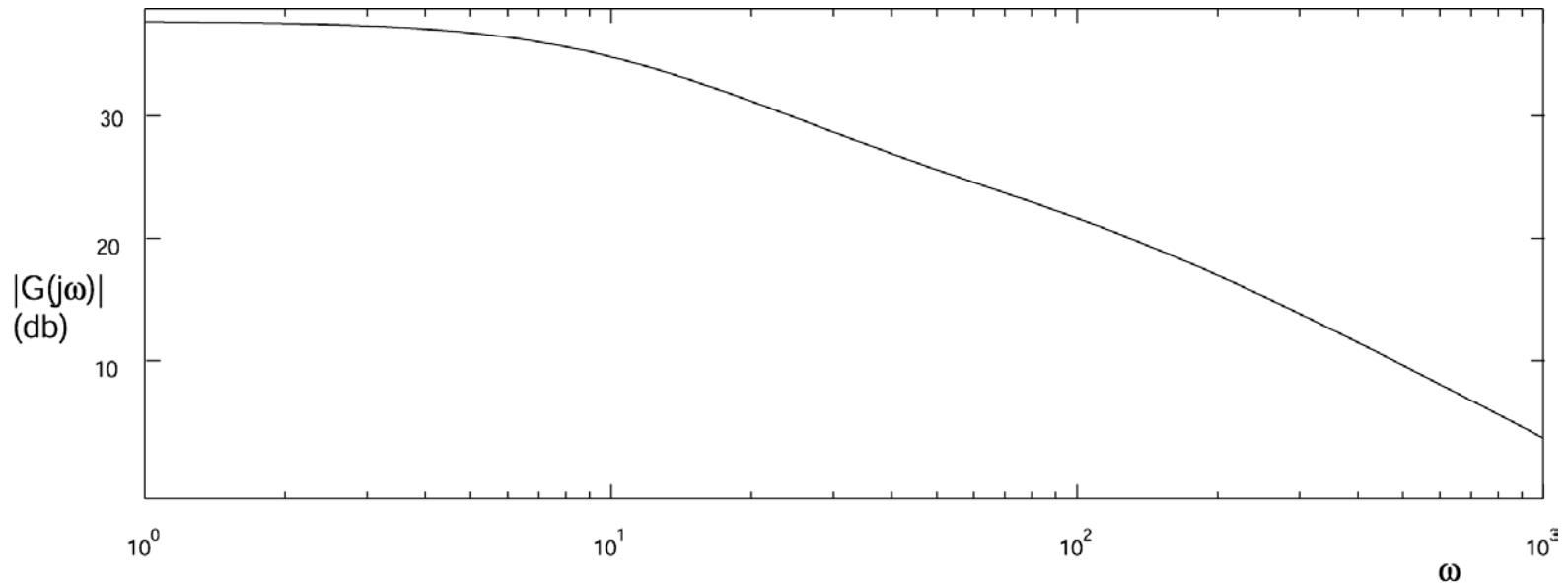
a  $|G(j130)| = 21$  corrisponde il punto  $(\log_{10} 130, \log_{10} 21) \approx (2.114, 1.322)$  delle scale lineari ed il punto  $(130, 21)$  delle scale logaritmiche.

**Esempio :** 
$$G(j\omega) = 50 \frac{\left(1 + j \frac{\omega}{50}\right)}{\left(1 + j \frac{\omega}{10}\right)\left(1 + j \frac{\omega}{100}\right)}$$



- Alternativamente, per i diagrammi dei moduli, si riporta nelle ordinate il modulo della r.a. espresso in decibel (in questo caso, la scala delle ordinate è quella solita, cioè lineare):

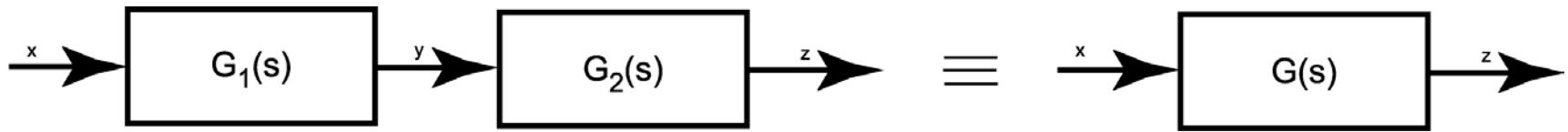
$$dB = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$$



In generale, i decibel della r.a. non rappresentano una grandezza adimensionale.

Vantaggi della rappresentazione logaritmica:

1. è possibile rappresentare grandezze variabili in campi molto estesi;
2. è possibile sommare i diagrammi di sistemi in cascata;
3. è possibile costruire i diagrammi come somme di diagrammi elementari.



$$G(s) = G_1(s)G_2(s) \quad \text{e quindi} \quad G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega)$$

$$\begin{cases} \ln |G(j\omega)| = \ln |G_1(j\omega)| + \ln |G_2(j\omega)| \\ \arg G(j\omega) = \arg G_1(j\omega) + \arg G_2(j\omega) \end{cases}$$

## Rappresentazioni e parametri della f.d.t.

Una f.d.t. razionale  $G(s) = b(s)/a(s)$  si può scrivere nella **forma (standard) con polinomi monici**:

$$G(s) = K_1 \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

o nella **forma (standard) con poli e zeri**:

$$G(s) = K_1 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

$K_1 \equiv$  costante di trasferimento

Ipotizzando la presenza di un polo nell'origine di molteplicità h (il valore di h definisce il cosiddetto “tipo” del sistema in oggetto):

$$G(s) = K_1 \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{s^h (s - p_{h+1}) \cdots (s - p_n)}$$

e da questa si può ottenere

$$G(s) = K_1 \frac{\left( s + \frac{1}{\tau_1} \right) \left( s + \frac{1}{\tau_2} \right) \cdots \left( s^2 + 2\delta'_1 \omega'_{n1} s + \omega'^2_{n1} \right) \left( s^2 + 2\delta'_2 \omega'_{n2} s + \omega'^2_{n2} \right) \cdots}{s^h \left( s + \frac{1}{\tau_1} \right) \left( s + \frac{1}{\tau_2} \right) \cdots \left( s^2 + 2\delta_1 \omega_{n1} s + \omega_{n1}^2 \right) \left( s^2 + 2\delta_2 \omega_{n2} s + \omega_{n2}^2 \right) \cdots}$$

$\tau_i$  ( $\tau'_i$ )  $\equiv$  costante di tempo ass. ta ad un polo (zero) reale;  $\tau_i(\tau'_i) < 0$  se il polo (zero) è positivo

$\omega_{ni}$  ( $\omega'_{ni}$ )  $\equiv$  pulsazione naturale ass. ta ad una coppia di poli (zeri) complessi coniugati ( $\omega_{ni}, \omega'_{ni} > 0$ )

$\delta_i$  ( $\delta'_i$ )  $\equiv$  coefficiente di smorzamento ass. to ad una coppia di poli (zeri) complessi coniugati  
 $(\delta_i, \delta'_i \in \mathbb{R}$ , coef. di smorzamento in senso stretto solo se  $\delta_i, \delta'_i \in (0,1)$ )

$$G(s) = K_1 \frac{\omega_{n1}^2 \omega_{n2}^2 \cdots \tau_1 \tau_2 \cdots}{\omega_{n1}^2 \omega_{n2}^2 \cdots \tau_1^2 \tau_2^2 \cdots} \cdot \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \cdots \left(1 + 2\delta_1 \frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega_{n1}^2}\right) \cdots}{s^h (1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \cdots \left(1 + 2\delta_1 \frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega_{n1}^2}\right) \cdots}$$

**Forma (standard) con le costanti di tempo:**

$$G(s) = K \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \cdots \left(1 + 2\delta_1 \frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega_{n1}^2}\right) \left(1 + 2\delta_2 \frac{s}{\omega_{n2}} + \frac{s^2}{\omega_{n2}^2}\right) \cdots}{s^h (1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \cdots \left(1 + 2\delta_1 \frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega_{n1}^2}\right) \left(1 + 2\delta_2 \frac{s}{\omega_{n2}} + \frac{s^2}{\omega_{n2}^2}\right) \cdots}$$

$K \equiv$  costante di guadagno

Se  $h = 0$  ( $\Sigma$  di tipo zero),  $K \equiv$  guadagno statico.

$$K = K_1 \frac{\omega_{n1}^2 \omega_{n2}^2 \cdots \tau_1 \tau_2 \cdots}{\omega_{n1}^2 \omega_{n2}^2 \cdots \tau_1^2 \tau_2^2 \cdots}$$

Se  $h = 1$  ( $\Sigma$  di tipo uno),  $K \equiv$  guadagno di velocità.

Se  $h = 2$  ( $\Sigma$  di tipo due),  $K \equiv$  guadagno di accelerazione.

- Rappresentazione della r.a. con le costanti di tempo:

$$G(j\omega) = K \frac{(1 + \tau_1 j\omega)(1 + \tau_2 j\omega) \cdots \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{n1}^2} + 2\delta_1 \frac{j\omega}{\omega_{n1}}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{n2}^2} + 2\delta_2 \frac{j\omega}{\omega_{n2}}\right) \cdots}{(j\omega)^h (1 + \tau_1 j\omega)(1 + \tau_2 j\omega) \cdots \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{n1}^2} + 2\delta_1 \frac{j\omega}{\omega_{n1}}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{n2}^2} + 2\delta_2 \frac{j\omega}{\omega_{n2}}\right) \cdots}$$

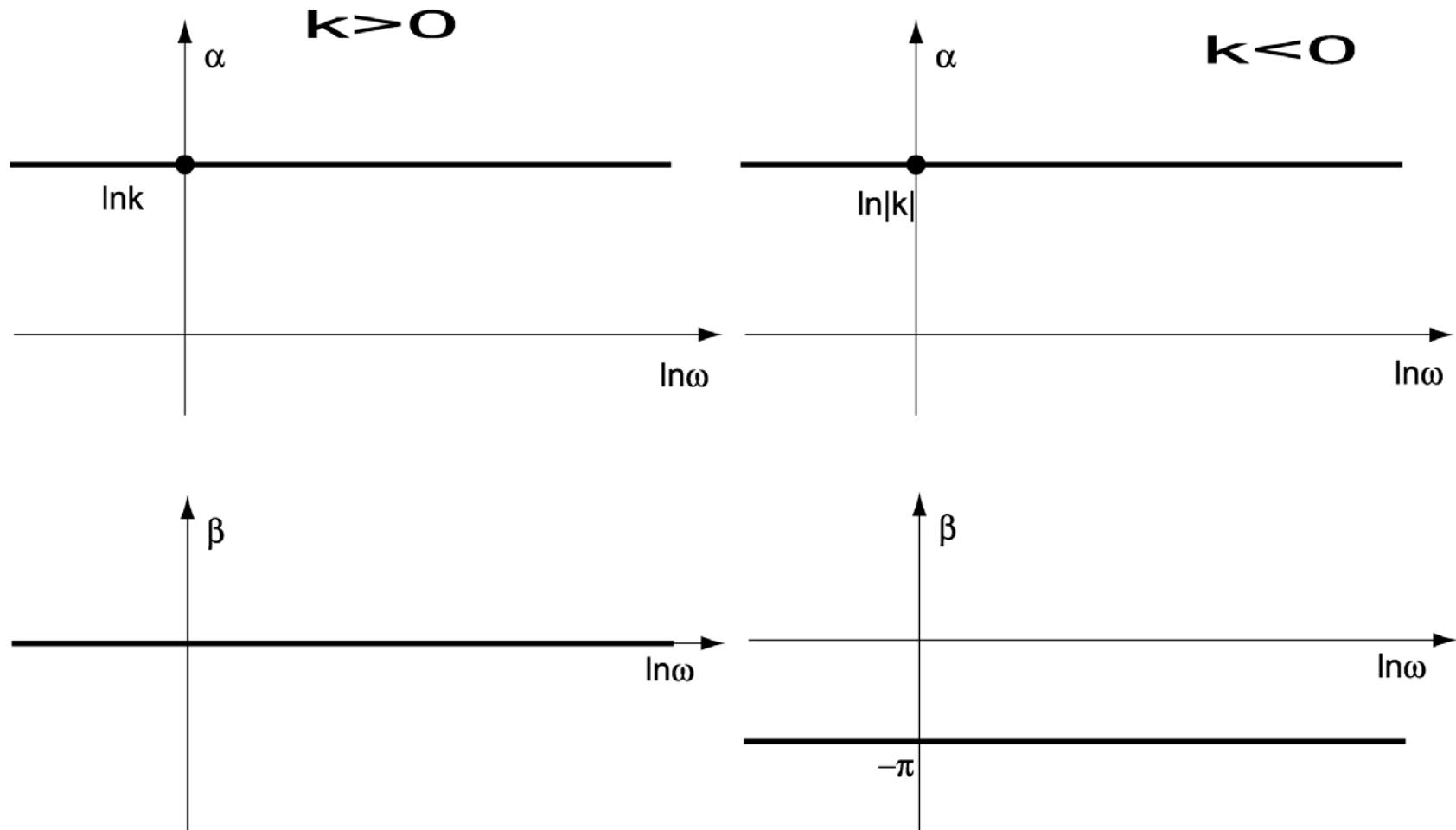
Diagrammi elementari associati a

- $K$
- $(j\omega)^{-h}$
- $(1 + \tau j\omega)^{\pm 1}$
- $\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2\delta \frac{j\omega}{\omega_n}\right)^{\pm 1}$

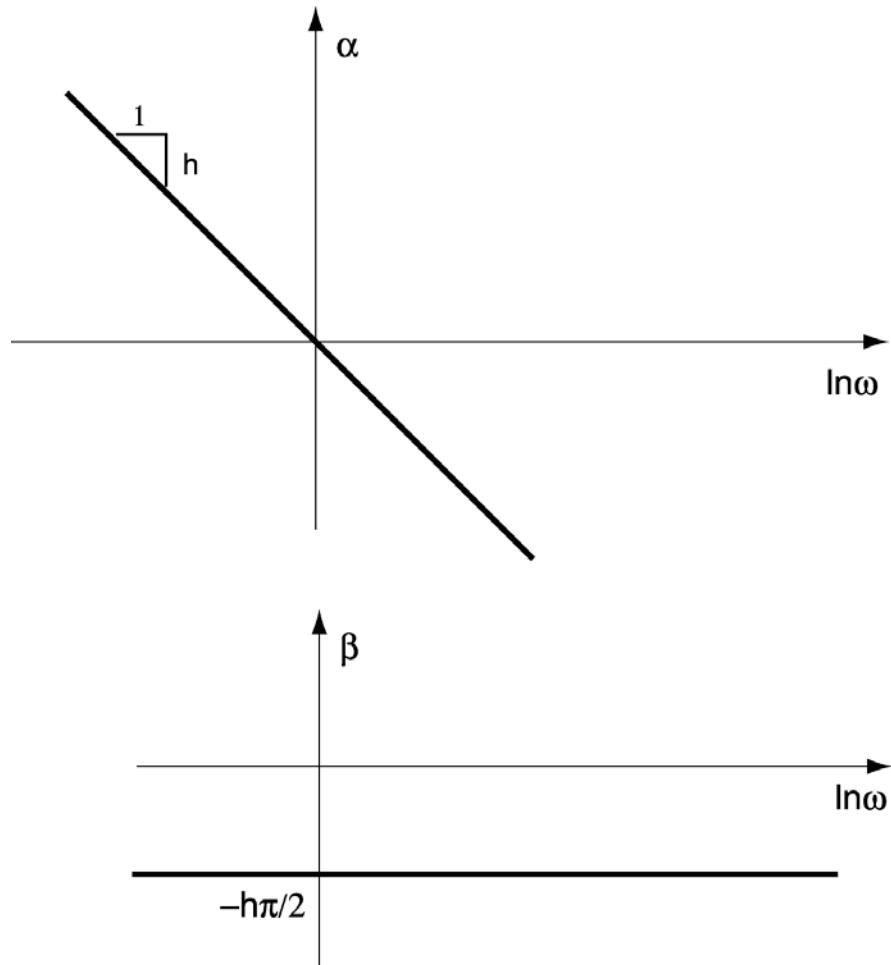
## Parametri caratteristici della risposta armonica

1. Pulsazione di risonanza  $\omega_R$ :  $\omega_R := \arg \max_{\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}} |G(j\omega)|$
2. Picco di risonanza  $M_R$ :  $M_R := \frac{|G(j\omega_R)|}{|G(j0)|}$  oppure  $M_R := |G(j\omega_R)|$
3. Larghezza di banda  $B_\omega$ :  $B_\omega := \omega_{t2} - \omega_{t1}$  ;  $\omega_{t2} > \omega_{t1} \geq 0$   
 $\omega_{t2} \equiv$  pulsazione di taglio superiore  $\omega_{t1} \equiv$  pulsazione di taglio inferiore  
con una r.a. del tipo passa-basso:  $\omega_{t1} = 0$ ,  $\omega_{t2} \ni |G(j\omega_{t2})| = \frac{|G(j0)|}{\sqrt{2}}$   
con una r.a. del tipo passa-banda:  
 $\omega_{t1} \ni |G(j\omega_{t1})| = \frac{|G(j\omega_R)|}{\sqrt{2}}$  e  $\omega_{t1} < \omega_R$   
 $\omega_{t2} \ni |G(j\omega_{t2})| = \frac{|G(j\omega_R)|}{\sqrt{2}}$  e  $\omega_{t2} > \omega_R$

a)  $G(j\omega) = K$



b)  $G(j\omega) = (j\omega)^{-h} : \quad \ln(j\omega)^{-h} = -h \ln j\omega = -h \left( \ln |\omega| + j \frac{\pi}{2} \right) = -h \ln \omega - j \frac{\pi}{2} h$



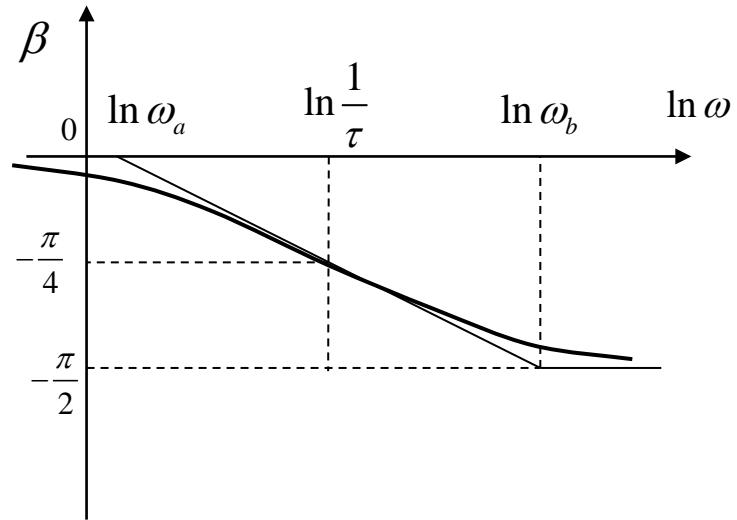
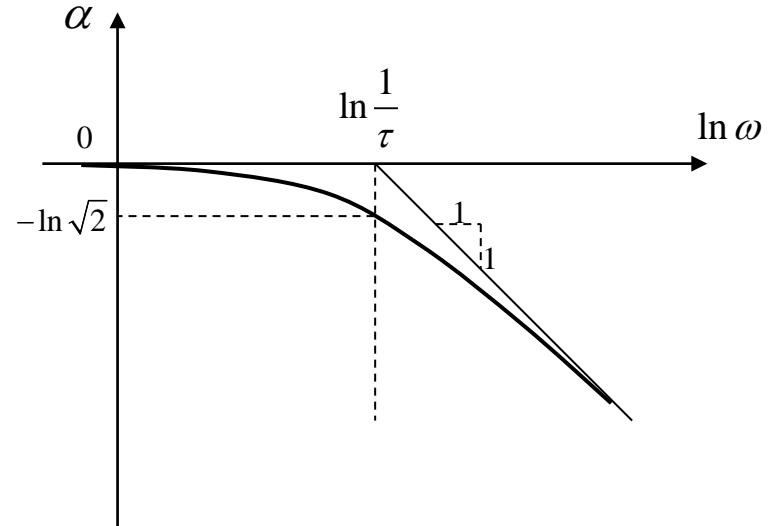
c)  $G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^{-1}$

$$\ln G(j\omega) = \ln \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} + j(-\arctg \omega\tau)$$

Se  $\omega \ll \frac{1}{\tau} \Rightarrow \alpha \approx 0$

Se  $\omega \gg \frac{1}{\tau} \Rightarrow \alpha \approx \ln \frac{1}{\omega\tau}$

$$\alpha \approx \ln \frac{1}{\omega} + \ln \frac{1}{\tau} = -\ln \omega + \ln \frac{1}{\tau}$$



$$\omega_0 := \frac{1}{\tau} \equiv \text{pulsazione d'angolo}$$

Determinazione pulsazioni  $\omega_a$  e  $\omega_b$ :  $\beta = -\arctg \omega \tau$

$$\left. \frac{d\beta}{d(\ln \omega)} \right|_{\omega=\omega_0} = \left. \frac{d\beta}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{d(\ln \omega)} \right|_{\omega=\omega_0} = -\frac{\tau}{1 + \omega_0^2 \tau^2} \cdot \omega_0 = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi/4}{\ln \omega_0 - \ln \omega_a} = \frac{\pi/4}{\ln \omega_b - \ln \omega_0} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln \frac{\omega_0}{\omega_a} = \ln \frac{\omega_b}{\omega_0} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\omega_0}{\omega_a} = \frac{\omega_b}{\omega_0} = e^{\frac{\pi}{2}} \cong 4,81$$

$$\begin{cases} \omega_a = \frac{\omega_0}{4,81} \\ \omega_b = \omega_0 \cdot 4,81 \end{cases} \quad \begin{cases} \ln \omega_a = \ln \omega_0 - \ln 4,81 \\ \ln \omega_b = \ln \omega_0 + \ln 4,81 \end{cases}$$

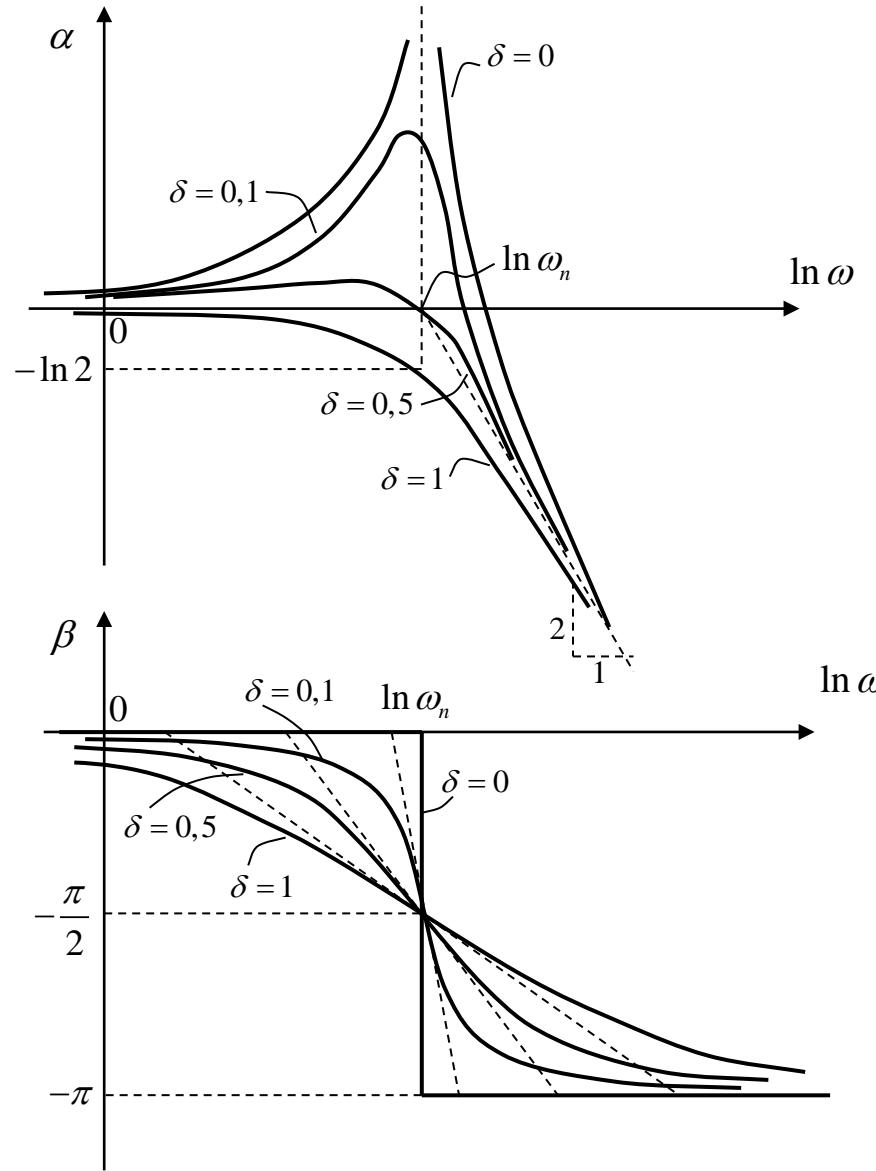
- I diagrammi di  $G(j\omega) = 1 + j \omega \tau$  si ottengono per simmetria ribaltando i precedenti rispetto all'asse delle ascisse.
- Se  $\tau < 0$ , si ribalta il diagramma degli argomenti.

d)  $G(j\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2\delta \frac{j\omega}{\omega_n}\right)^{-1}$

$$\ln G(j\omega) = \ln \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\delta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} + j\beta; \quad \beta = \begin{cases} -\arctg \frac{2\delta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} & \omega < \omega_n \\ -\frac{\pi}{2} & \omega = \omega_n \\ -\arctg \frac{2\delta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} - \pi & \omega > \omega_n \end{cases}$$

Se  $\omega \ll \omega_n \Rightarrow \alpha \approx 0$

Se  $\omega \gg \omega_n \Rightarrow \alpha \approx \ln \frac{1}{\omega^2 / \omega_n^2} = \ln \frac{\omega_n^2}{\omega^2} = \ln \omega_n^2 - \ln \omega^2 = -2 \ln \omega + 2 \ln \omega_n$



$$\begin{cases} \ln \omega_a = \ln \omega_n - \ln 4,81^\delta \\ \ln \omega_b = \ln \omega_n + \ln 4,81^\delta \end{cases}$$

Determinazione del picco di risonanza  $\omega_R$  :

$$u := \frac{\omega}{\omega_n} \quad \min_{u>0} \left[ (1-u^2)^2 + 4\delta^2 u^2 \right] \quad 2(1-u^2)(-2u) + 8\delta^2 u = 0$$

$$-4u + 4u^3 + 8\delta^2 u = 0 \Leftrightarrow u^2 = 1 - 2\delta^2 \Leftrightarrow u = \sqrt{1 - 2\delta^2}$$

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2} \quad \text{c'è risonanza per } 1 - 2\delta^2 > 0, \quad \delta < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$$

quindi  $M_R = \frac{|G(j\omega_R)|}{|G(j0)|} = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$

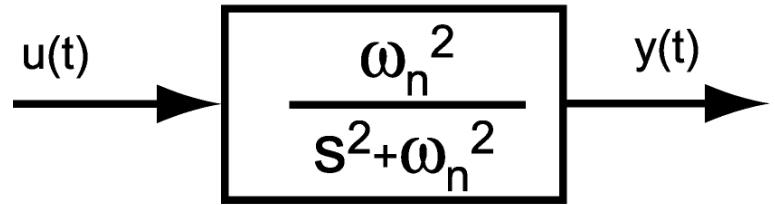
$$\begin{cases} \delta \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \text{c'è risonanza} \\ \delta \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right] & \text{non c'è risonanza} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \in \left[ 0, \frac{1}{2} \right] \text{ il d. } \alpha \text{ è tutto al di sopra del d. asintotico} \\ \delta \in \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ il d. } \alpha \text{ interseca l'asse delle pulsazioni a sinistra di } \ln \omega_n (\omega_n) \\ \delta \in \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right] \text{ il d. } \alpha \text{ è tutto al di sotto del d. asintotico} \end{array} \right.$$

- Perché il diagramma  $\alpha$  (dei moduli) diverge per  $\delta = 0$  ed  $\omega = \omega_n$  ?

$$G(s) = \frac{1}{\left( 1 + \frac{s^2}{\omega_n^2} \right)} = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + \omega_n^2)}$$

$$u(t) = U \sin \omega_n t , \quad U(s) = \frac{U \omega_n}{s^2 + \omega_n^2}$$



$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)U(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + \omega_n^2)} \cdot \frac{U \omega_n}{s^2 + \omega_n^2} = \frac{U \omega_n^3}{(s^2 + \omega_n^2)^2} = \frac{U \omega_n^3}{(s - j\omega_n)^2 (s + j\omega_n)^2} = \\ &= \frac{k_{11}}{(s - j\omega_n)^2} + \frac{k_{12}}{s - j\omega_n} + \frac{\bar{k}_{11}}{(s + j\omega_n)^2} + \frac{\bar{k}_{12}}{s + j\omega_n} = \left( \frac{k_{12}}{s - j\omega_n} + \frac{\bar{k}_{12}}{s + j\omega_n} \right) + \left( \frac{k_{11}}{(s - j\omega_n)^2} + \frac{\bar{k}_{11}}{(s + j\omega_n)^2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{quindi } \exists c_1, c_2, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R} \quad \ni \quad y(t) = c_1 \sin(\omega_n t + \varphi_1) + c_2 t \sin(\omega_n t + \varphi_2)$$

Larghezza di banda  $B_\omega$  (come filtro passa-basso) :

$$B_\omega = \omega_n \sqrt{(1 - 2\delta^2) + \sqrt{(1 - 2\delta^2)^2 + 1}}$$

- I diagrammi di  $G(j\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2\delta \frac{j\omega}{\omega_n}$  si ottengono ribaltando i precedenti rispetto all'asse delle ascisse.
- Se  $\delta < 0$ , si ribalta il diagramma delle fasi.

## Punti salienti della lezione:

- Il teorema di analisi armonica
- Il sistema dinamico lineare come filtro
- Rappresentazioni standard di  $G(s)$  e  $G(j\omega)$
- Diagrammi di Bode elementari
- Diagrammi di Bode asintotici

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle  
Telecomunicazioni

**Lezione n. 10 di Fondamenti di Controlli Automatici**  
**prof. Aurelio Piazzì**

**I diagrammi di Nyquist e i sistemi a  
fase minima**

Università degli Studi di Parma – a.a. 2020-2021

- I diagrammi di Nyquist della funzione di risposta armonica
- I sistemi a fase minima
- Le approssimanti di Padé del ritardo finito

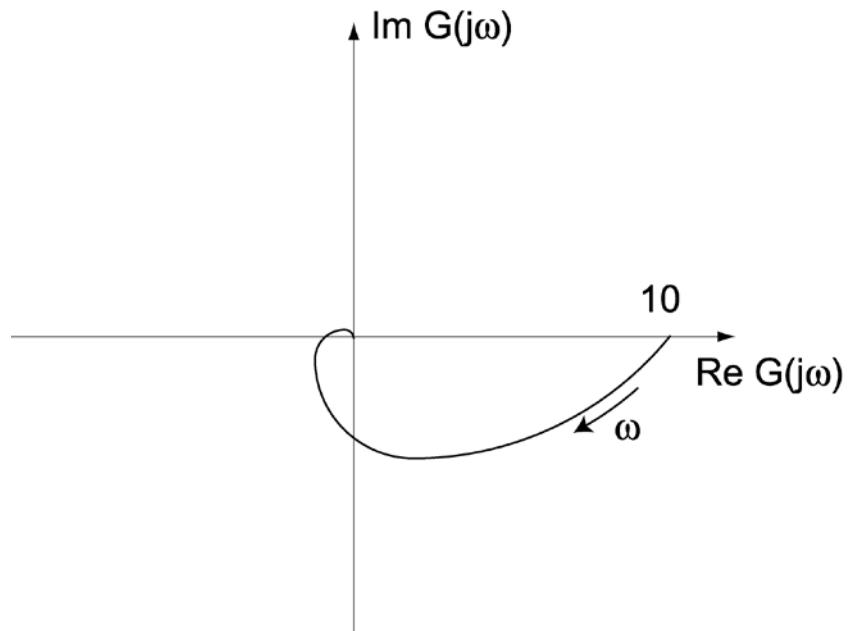
# I diagrammi polari o di Nyquist

**Def.: Diagramma polare o di N. della r.a.  $G(j\omega)$  o della f.d.t.  $G(s)$**

É la curva tracciata sul piano complesso dal vettore  $G(j\omega)$  per  $\omega$  che varia da 0 a  $+\infty$ .

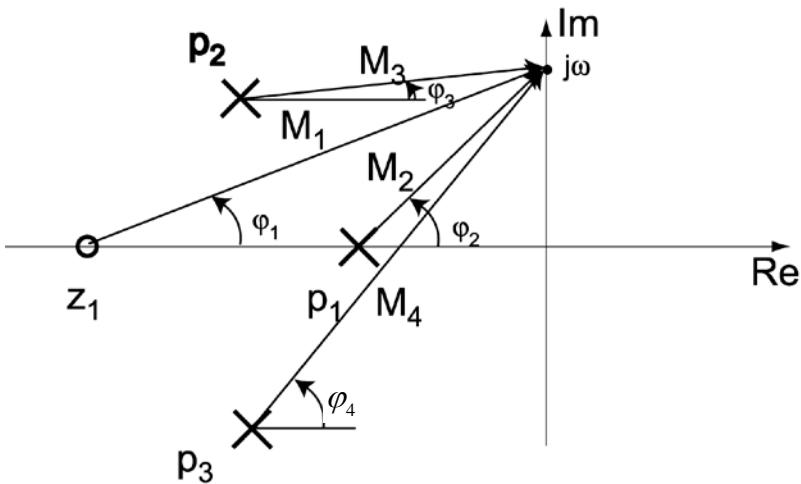
**Esempio:**

$$G(j\omega) = \frac{10}{\left(1 + \frac{1}{5}j\omega\right)\left(1 + \frac{1}{10}j\omega\right)\left(1 + \frac{1}{100}j\omega\right)}$$



- I diagrammi polari sono importanti nello studio della stabilità dei sistemi retroazionati. Per questo fine, è sufficiente un tracciamento qualitativo del d.p. con individuazione di punti notevoli.
- Il tracciamento del d.p. può essere coadiuvato dal seguente procedimento grafico. Per esempio, si consideri una f.d.t. descritta con la forma poli-zeri:

$$G(s) = K_1 \frac{(s - z_1)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)} ; \quad G(j\omega) = K_1 \frac{(j\omega - z_1)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)(j\omega - p_3)}$$



$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= |K_1| \frac{M_1}{M_2 M_3 M_4} \\ \arg G(j\omega) &= \begin{cases} \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 & \text{se } K_1 > 0 \\ \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 - \pi & \text{se } K_1 < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- **Proprietà (comportamento per  $\omega \rightarrow +\infty$ )**

Il d.p. di un sistema strettamente proprio termina (per  $\omega \rightarrow +\infty$ ) sull'origine tangente ad uno degli assi coordinati.

Dim.: immediata ....

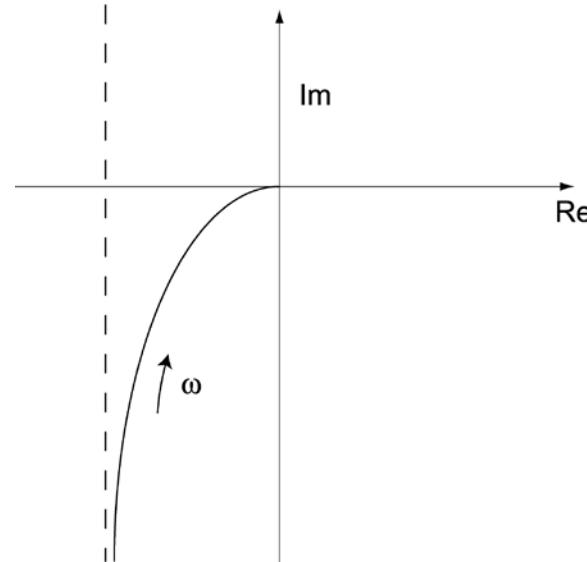
- **Proprietà ( $\Sigma$  di tipo 0: comp. per  $\omega \rightarrow 0+$ )**

Il d.p. di un sistema di tipo zero parte (da  $\omega = 0$ ) dal punto dell'asse reale  $G(j0) = K = K_1(b_0/a_0)$ .

Dim.: immediata ...

Esempio di sistema di tipo 1 :

$$G(j\omega) = \frac{10}{j\omega(1 + j2\omega)}$$



**Proprietà** (comp. per  $\omega \rightarrow 0+$  del d.p. dei sistemi di tipo  $h \geq 1$ )

Si rappresenti  $G(j\omega)$  con la forma standard con le costanti di

tempo e sia  $\tau_a := \sum_i \tau_i^+ - \sum_i \tau_i^- + \sum_i 2 \frac{\delta_i^+}{\omega_{ni}} - \sum_i 2 \frac{\delta_i^-}{\omega_{ni}}$ . Vale

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} G(j\omega) = K \frac{1 + j\omega \tau_a}{(j\omega)^h}$$

**Dim.:**

$$\begin{aligned}
 G(s) &= K \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \cdots \left(1 + 2\delta_1 \frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega_{n1}^2}\right) \left(1 + 2\delta_2 \frac{s}{\omega_{n2}} + \frac{s^2}{\omega_{n2}^2}\right) \cdots}{s^h (1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \cdots \left(1 + 2\delta_1 \frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega_{n1}^2}\right) \left(1 + 2\delta_2 \frac{s}{\omega_{n2}} + \frac{s^2}{\omega_{n2}^2}\right) \cdots} \\
 G(j\omega) &= K \frac{(1 + \tau_1 j\omega)(1 + \tau_2 j\omega) \cdots \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{n1}^2} + 2\delta_1 \frac{j\omega}{\omega_{n1}}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{n2}^2} + 2\delta_2 \frac{j\omega}{\omega_{n2}}\right) \cdots}{(j\omega)^h (1 + \tau_1 j\omega)(1 + \tau_2 j\omega) \cdots \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{n1}^2} + 2\delta_1 \frac{j\omega}{\omega_{n1}}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{n2}^2} + 2\delta_2 \frac{j\omega}{\omega_{n2}}\right) \cdots} \\
 \omega \rightarrow 0+ \quad G(j\omega) &\rightarrow K \frac{(1 + \tau_1 j\omega)(1 + \tau_2 j\omega) \cdots \left(1 + 2\delta_1 \frac{j\omega}{\omega_{n1}}\right) \left(1 + 2\delta_2 \frac{j\omega}{\omega_{n2}}\right) \cdots}{(j\omega)^h (1 + \tau_1 j\omega)(1 + \tau_2 j\omega) \cdots \left(1 + 2\delta_1 \frac{j\omega}{\omega_{n1}}\right) \left(1 + 2\delta_2 \frac{j\omega}{\omega_{n2}}\right) \cdots} \\
 &= K \frac{1 + j\omega \left( \sum_i \tau_i + \sum_i 2 \frac{\delta_i}{\omega_{n,i}} \right) + o(\omega)}{(j\omega)^h \left( 1 + j\omega \left( \sum_i \tau_i + \sum_i 2 \frac{\delta_i}{\omega_{n,i}} \right) + o(\omega) \right)} \quad (\text{cont.})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{(cont.)} \quad \omega \rightarrow 0+ \quad G(j\omega) \rightarrow K \frac{1 + j\omega \left( \sum_i \tau_i^+ + \sum_i 2 \frac{\delta_i^+}{\omega_{n,i}} \right)}{(j\omega)^h \left( 1 + j\omega \left( \sum_i \tau_i^+ + \sum_i 2 \frac{\delta_i^+}{\omega_{n,i}} \right) \right)} \\
& = K \frac{1 + j\omega \left( \sum_i \tau_i^+ + \sum_i 2 \frac{\delta_i^+}{\omega_{n,i}} \right)}{(j\omega)^h \left( 1 + j\omega \left( \sum_i \tau_i^+ + \sum_i 2 \frac{\delta_i^+}{\omega_{n,i}} \right) \right)} \cdot \frac{\left( 1 - j\omega \left( \sum_i \tau_i^- + \sum_i 2 \frac{\delta_i^-}{\omega_{n,i}} \right) \right)}{\left( 1 - j\omega \left( \sum_i \tau_i^+ + \sum_i 2 \frac{\delta_i^+}{\omega_{n,i}} \right) \right)} \\
& = K \frac{1 + j\omega \left( \sum_i \tau_i^+ + \sum_i 2 \frac{\delta_i^+}{\omega_{n,i}} - \sum_i \tau_i^- - \sum_i 2 \frac{\delta_i^-}{\omega_{n,i}} \right) + o(\omega)}{(j\omega)^h \left( 1 + \omega^2 \left( \sum_i \tau_i^+ + \sum_i 2 \frac{\delta_i^+}{\omega_{n,i}} \right)^2 \right)} \\
& \rightarrow K \frac{1 + j\omega \tau_a}{(j\omega)^h} \quad \square
\end{aligned}$$

**Corollario** (comp. asintotico del d.p. dei sistemi di tipo  $h = 1, 2, 3$ )

Siano  $\{x, y\}$  gli assi del piano cartesiano in cui si traccia il d.p.

Se  $h = 1$       
$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} G(j\omega) = K\tau_a - j \frac{K}{\omega}$$

e il d.p. parte adiacente ad una semiretta della retta di eq.  $x = K\tau_a$ .

Se  $h = 2$       
$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} G(j\omega) = -\frac{K}{\omega^2} - j \frac{K\tau_a}{\omega}$$

e il d.p. parte adiacente ad un ramo della parabola di eq.  $x = -\frac{1}{K\tau_a^2} y^2$ .

Se  $h = 3$       
$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} G(j\omega) = -\frac{K\tau_a}{\omega^2} + j \frac{K}{\omega^3},$$

e il d.p. parte adiacente ad un ramo della curva cubica di eq.  $y^2 = -\frac{1}{K\tau_a^3} x^3$ .

## I sistemi a fase minima

Per una significativa classe di sistemi, detti a fase minima, si nota che, nella funzione di risposta armonica, l'andamento del diagramma delle fasi è strettamente associato a quello delle ampiezze:

Se in una certa banda di frequenze l'ampiezza è costante, la fase tende ad essere nulla, mentre una pendenza negativa del diagramma delle ampiezze è associata ad un ritardo di fase, una pendenza positiva ad un anticipo di fase.

## Def.: Sistemi a fase minima (fase non minima)

Sia  $\Sigma$  un sistema lineare e stazionario con funzione di trasferimento  $G(s)$  e risposta armonica  $G(j\omega)$ .

$\Sigma$  è detto a fase minima (fase non minima) se il diagramma delle fasi  $\beta = \arg G(j\omega)$  è (non è) determinato univocamente, modulo  $2\pi$ , dal diagramma dei moduli  $\alpha = \ln |G(j\omega)|$  mediante la **formula di Bode**.

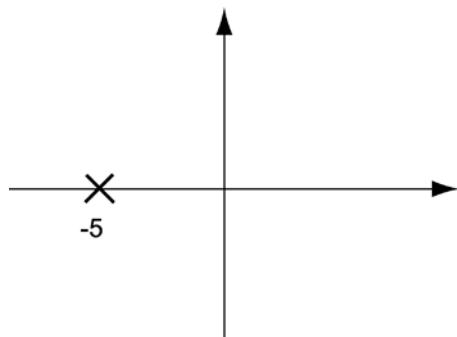
## Proposizione

Un sistema con funzione di trasferimento **razionale** è a fase minima se e solo se non presenta poli o zeri con parte reale positiva.

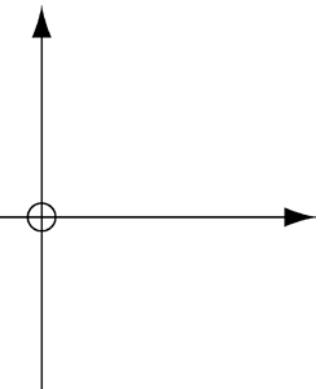
## Esempi di sistemi a fase minima:

$$G(s) = 10$$

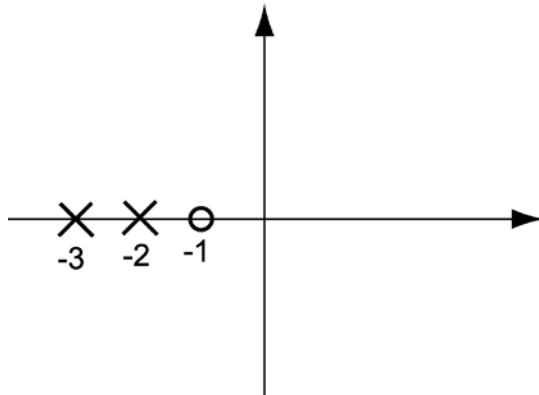
$$G(s) = \frac{4}{s + 5}$$



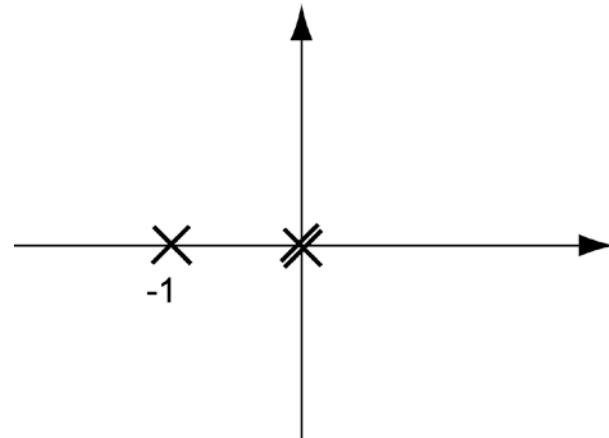
$$G(s) = \frac{s}{s + 5}$$



$$G(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 5s + 6}$$



$$G(s) = \frac{1}{s^2(s + 1)}$$



## Formula di Bode

$$\alpha := \ln |G(j\omega)|, \quad \beta := \arg G(j\omega)$$

$$\beta_c := \arg G(j\omega_c) \quad u := \ln \frac{\omega}{\omega_c} = \ln \omega - \ln \omega_c$$

$$\beta_c = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{du} \ln \operatorname{cotgh} \left| \frac{u}{2} \right| du \quad \text{se } \lim_{s \rightarrow 0} s^h G(s) > 0$$

$$\beta_c = \{\text{come sopra}\} - \pi \quad \text{se } \lim_{s \rightarrow 0} s^h G(s) < 0$$

$$h := \{"\text{tipo}" \text{ del sistema } \Sigma\}$$

$h = 0$  se  $\Sigma$  non presenta né poli né zeri nell'origine

$h > 0$  se  $\Sigma$  presenta un polo di molteplicità  $h$  nell'origine

$h < 0$  se  $\Sigma$  presenta uno zero di molteplicità  $|h|$  nell'origine

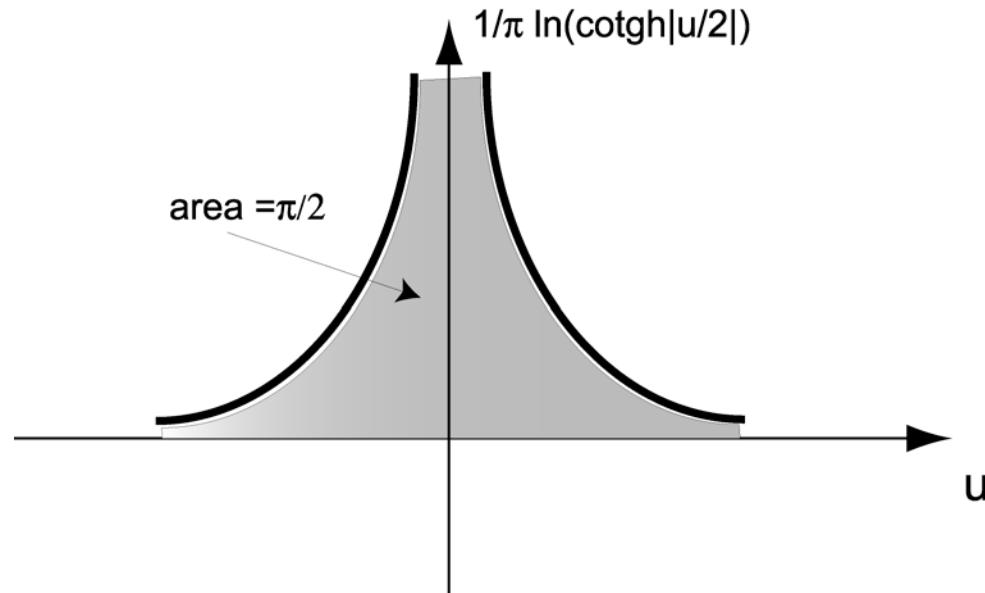
- Interpretazione della formula di Bode:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \operatorname{cotgh} \left| \frac{u}{2} \right| du = \frac{\pi}{2}$$

da cui la regola pratica:

Se  $\frac{d\alpha}{du}$  è costante per due decadi di pulsazione centrate su  $\omega_c$

allora  $\beta_c \approx \left( \frac{d\alpha}{du} \right) \cdot \frac{\pi}{2}$

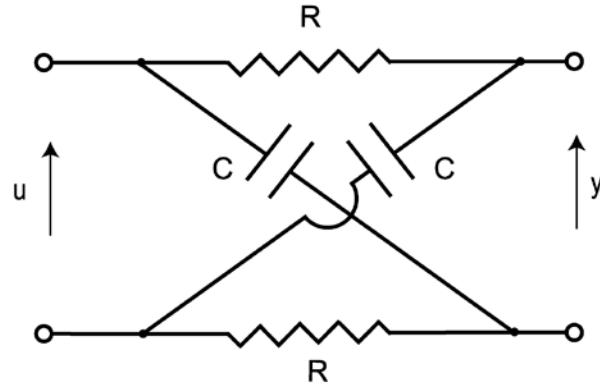


## Esempi di sistemi a fase non minima

Ritardo finito:  $G(s) = e^{-t_0 s}$ ,  $G(j\omega) = e^{-t_0 j\omega}$

$$\alpha = \ln |e^{-t_0 j\omega}| = 0 \quad \forall \omega, \quad \beta = -t_0 \omega = -t_0 e^{\ln \omega}$$

Rete elettrica:



$$Y(s) = G(s)U(s), \quad G(s) = \frac{1 - Ts}{1 + Ts}, \quad T := RC$$

$$G(j\omega) = \frac{1 - jT\omega}{1 + jT\omega}, \quad |G(j\omega)| = \frac{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} = 1 \quad \forall \omega$$

$$\alpha = \ln |G(j\omega)| = 0, \quad \beta = \arg G(j\omega) = -2 \operatorname{arctg} T\omega$$

## Approssimanti di Padè del ritardo finito

È conveniente sia per problemi di analisi ma anche, soprattutto, per problemi di sintesi approssimare il ritardo finito con una funzione razionale.

Def.: Approssimante di Padè di  $e^{-t_0 s}$  (di ordine q)

$$G_q(s; t_0) := \frac{\sum_{k=0}^q \frac{(2q-k)!q!}{(2q)!k!(q-k)!} (-1)^k t_0^k s^k}{\sum_{k=0}^q \frac{(2q-k)!q!}{(2q)!k!(q-k)!} t_0^k s^k}$$

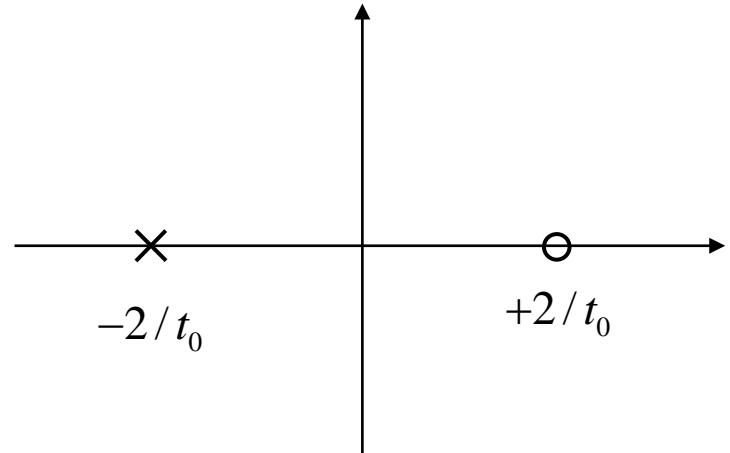
## • Proprietà

Lo sviluppo in serie di McLaurin di  $G_q(s; t_0)$  coincide con l'analogo sviluppo di  $\exp\{-t_0 s\}$  fino alla potenza  $(2q)$ -esima.

$$e^{-t_0 s} = 1 - t_0 s + \frac{t_0^2}{2!} s^2 - \frac{t_0^3}{3!} s^3 + \frac{t_0^4}{4!} s^4 - \frac{t_0^5}{5!} s^5 + \dots$$

Approssimante di Padè del 1° ordine:

$$G_1(s; t_0) = \frac{1 - \frac{t_0}{2} s}{1 + \frac{t_0}{2} s}$$



Approssimante di Padè del 2° ordine:

$$G_2(s; t_0) = \frac{1 - \frac{t_0}{2}s + \frac{t_0^2}{12}s^2}{1 + \frac{t_0}{2}s + \frac{t_0^2}{12}s^2}$$

Diagramma polare di  $\exp\{-t_0 j\omega\}$ : è una circonferenza percorsa infinite volte.

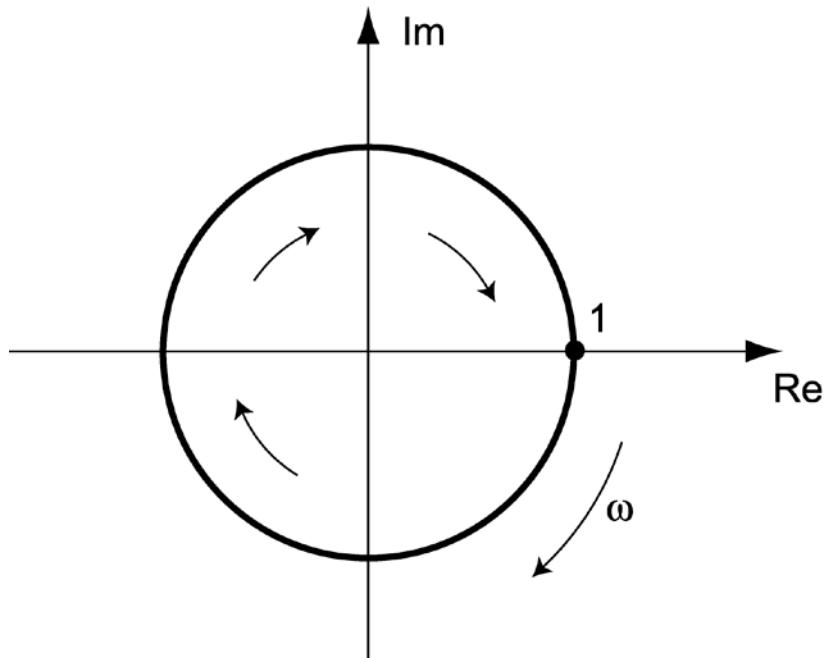
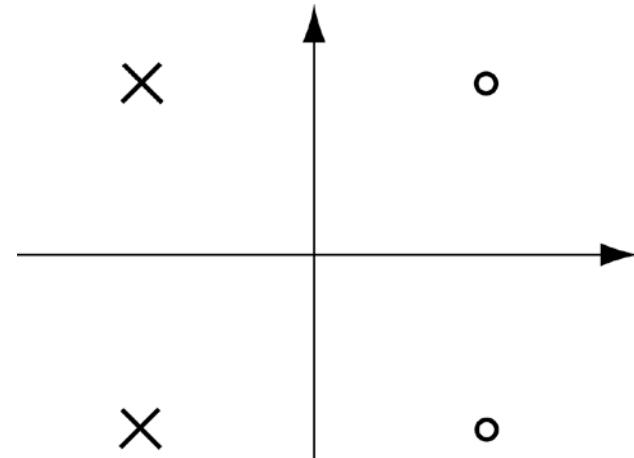


Diagramma polare di  $G_1(j\omega; t_0)$ : è una semicirconferenza

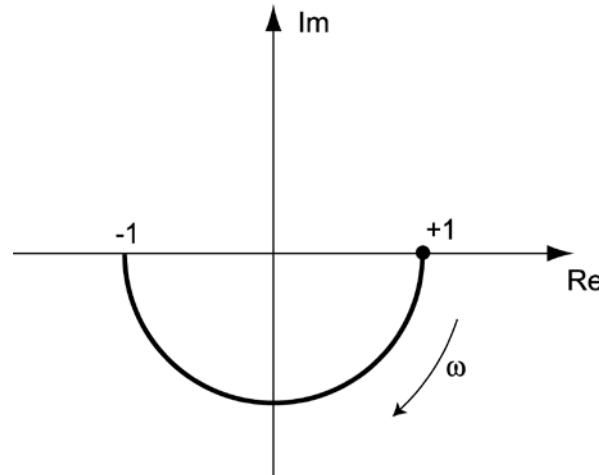


Diagramma polare di  $G_2(j\omega; t_0)$ : è una circonferenza percorsa una sola volta

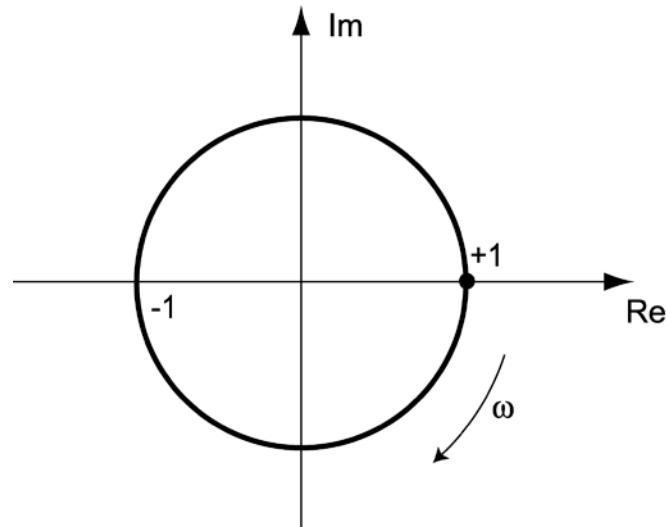


Diagramma polare di  $G_3(j\omega; t_0)$ : è una circonferenza percorsa una volta e mezzo

...

## Punti salienti della lezione:

- Determinazione dell'asintoto verticale nel diagramma polare dei sistemi di tipo uno
- Formula di Bode
- Diagrammi polari delle approssimanti di Padé del ritardo finito

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle  
Telecomunicazioni

**Lezione n. 11 di Fondamenti di Controlli Automatici**  
**prof. Aurelio Piazz**

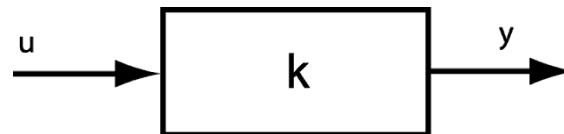
**Sistemi retroazionati: proprietà ed  
analisi asintotica**

Università degli Studi di Parma – a.a. 2020-2021

- Gli schemi a blocchi
- Sensibilità a variazioni di parametri nei sistemi in retroazione
- Attenuazione dei disturbi
- Allargamento della banda passante
- Analisi a regime dei sistemi in retroazione

# Gli Schemi a Blocchi

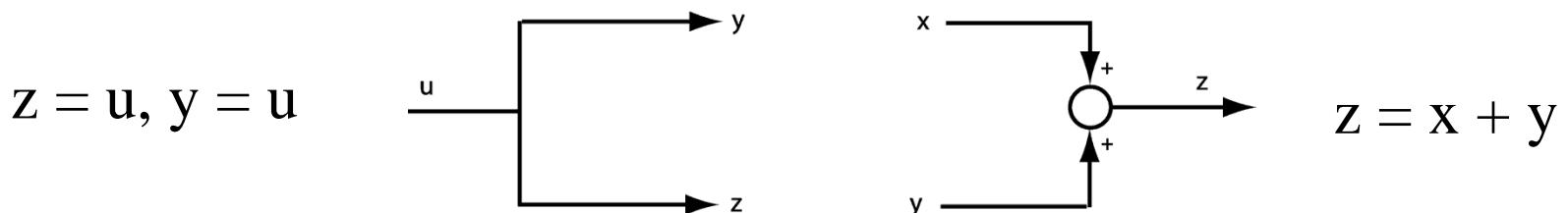
- I sistemi complessi possono essere rappresentati con schemi a blocchi i cui elementi hanno ciascuno un solo ingresso ed una sola uscita:



$y = K u$ ,  $K \equiv$  guadagno dell'elemento o blocco elementare

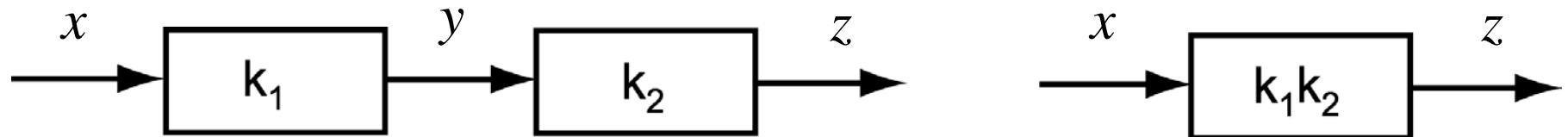
$K \in \mathbb{R}$  o  $K \in \{\text{insieme delle funzioni razionali}\}$  o ...

- I blocchi sono collegati fra loro mediante i **punti di diramazione** e le **giunzioni sommanti**:



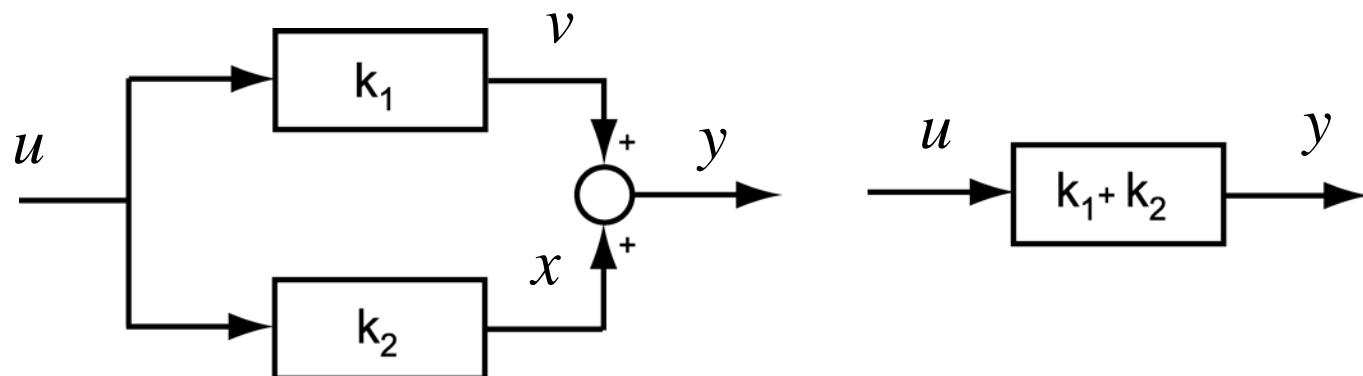
## • Regole di riduzione

### 1. Riduzione di blocchi in cascata

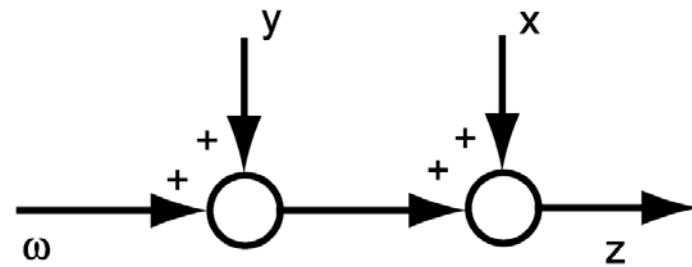
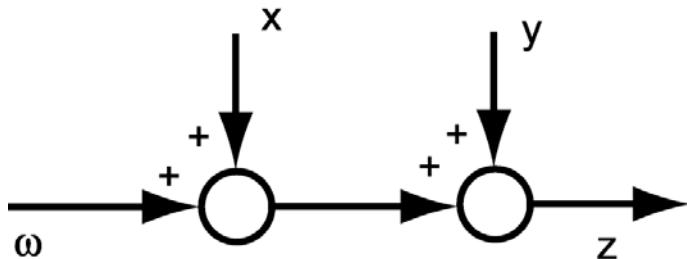


$$\begin{cases} y = K_1 x \\ z = K_2 y \end{cases} \text{ eliminazione della variabile } y \Rightarrow \begin{cases} z = K_1 K_2 x \end{cases}$$

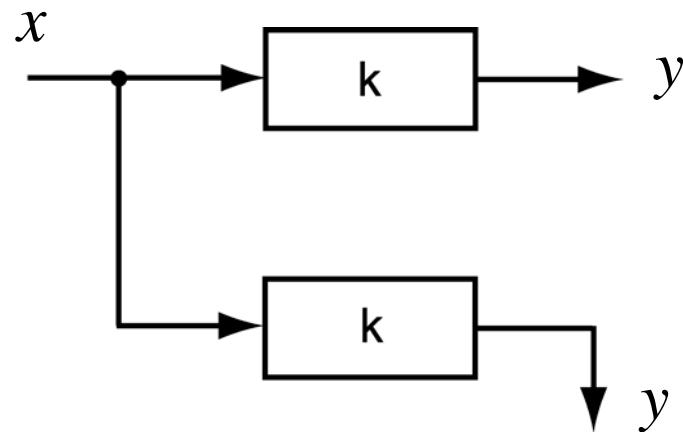
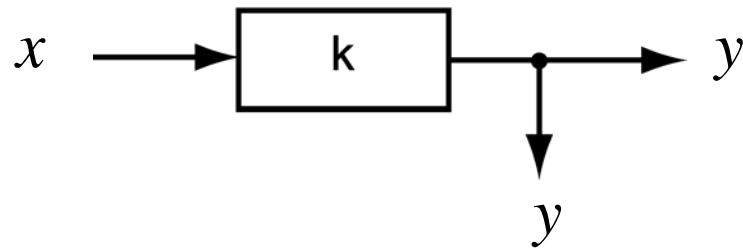
### 2. Riduzione di blocchi in parallelo



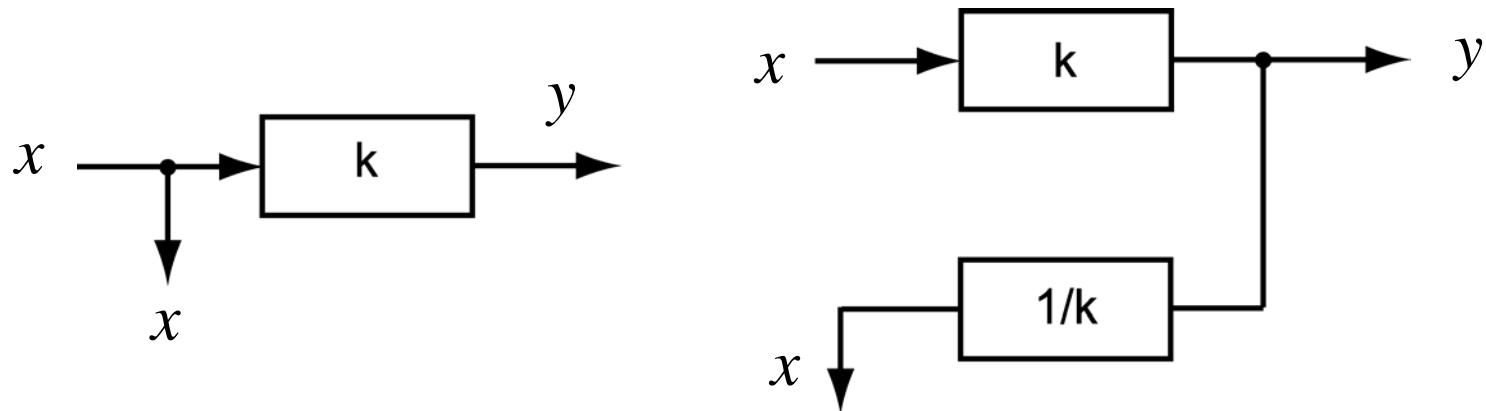
### 3. Scambio di giunzioni sommanti



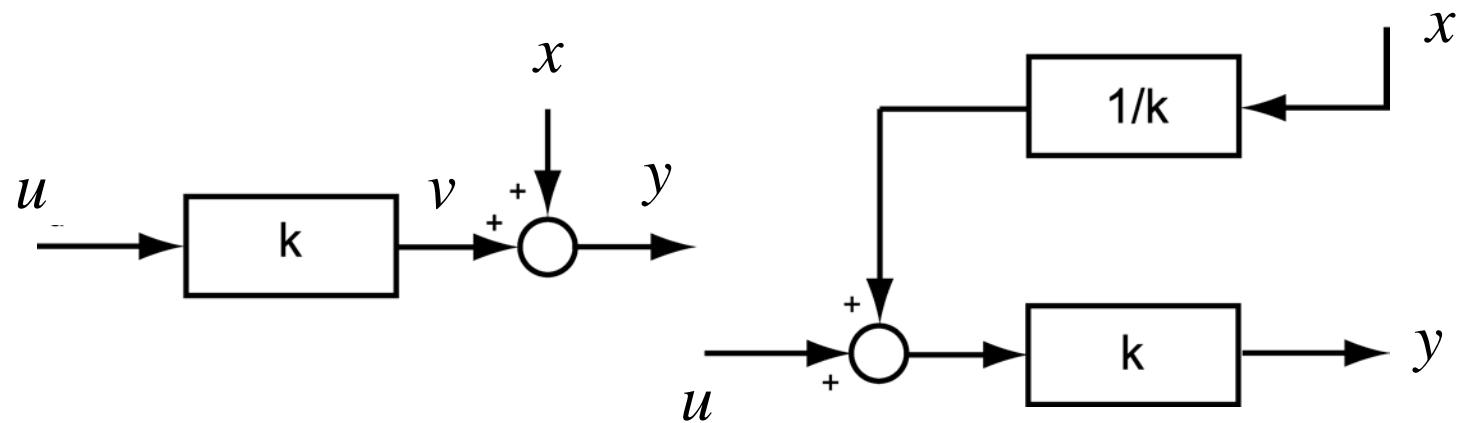
### 4. Spostamento di prelievo di segnale a monte di un blocco



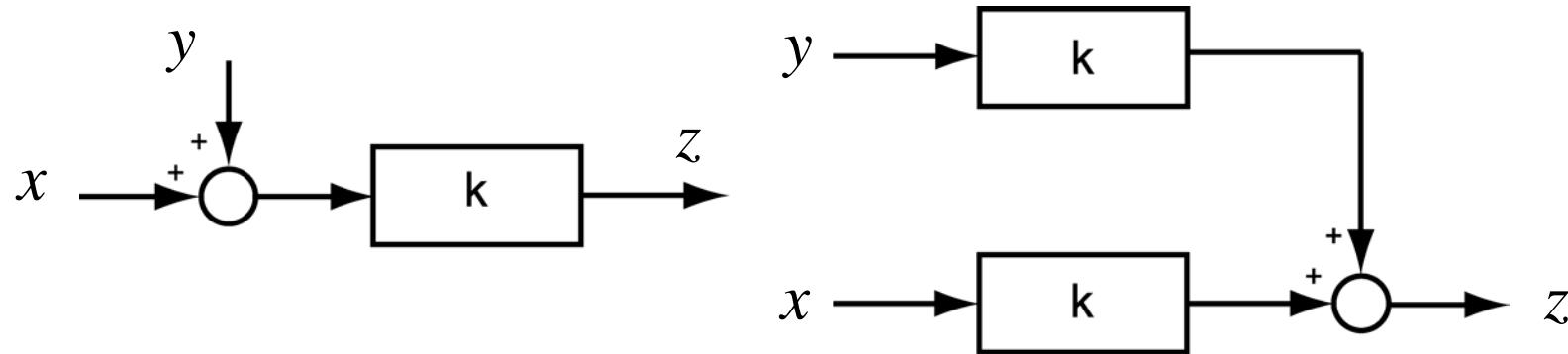
## 5. Spostamento di prelievo di segnale a valle di un blocco



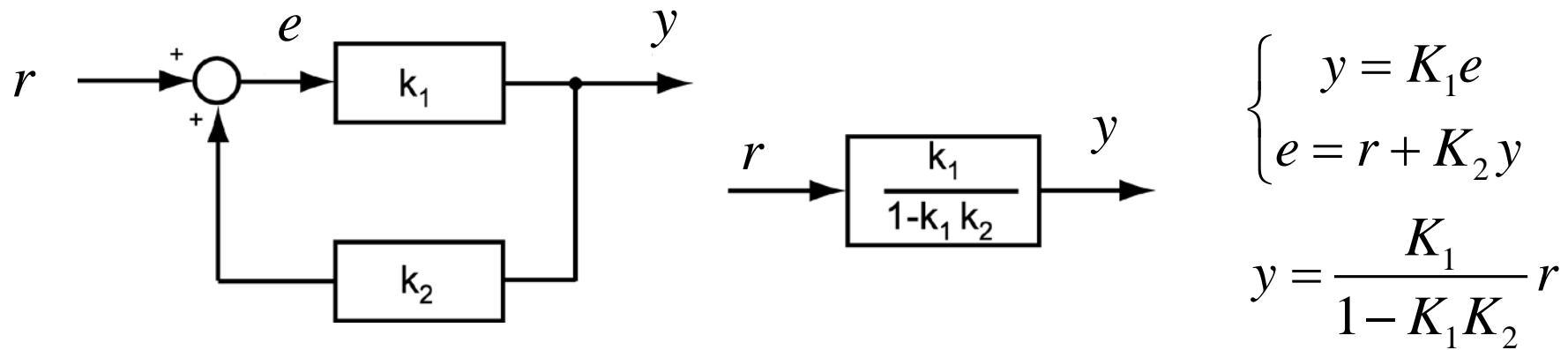
## 6. Spostamento di giunzione sommante a monte di un blocco



## 7. Spostamento di giunzione sommante a valle di un blocco

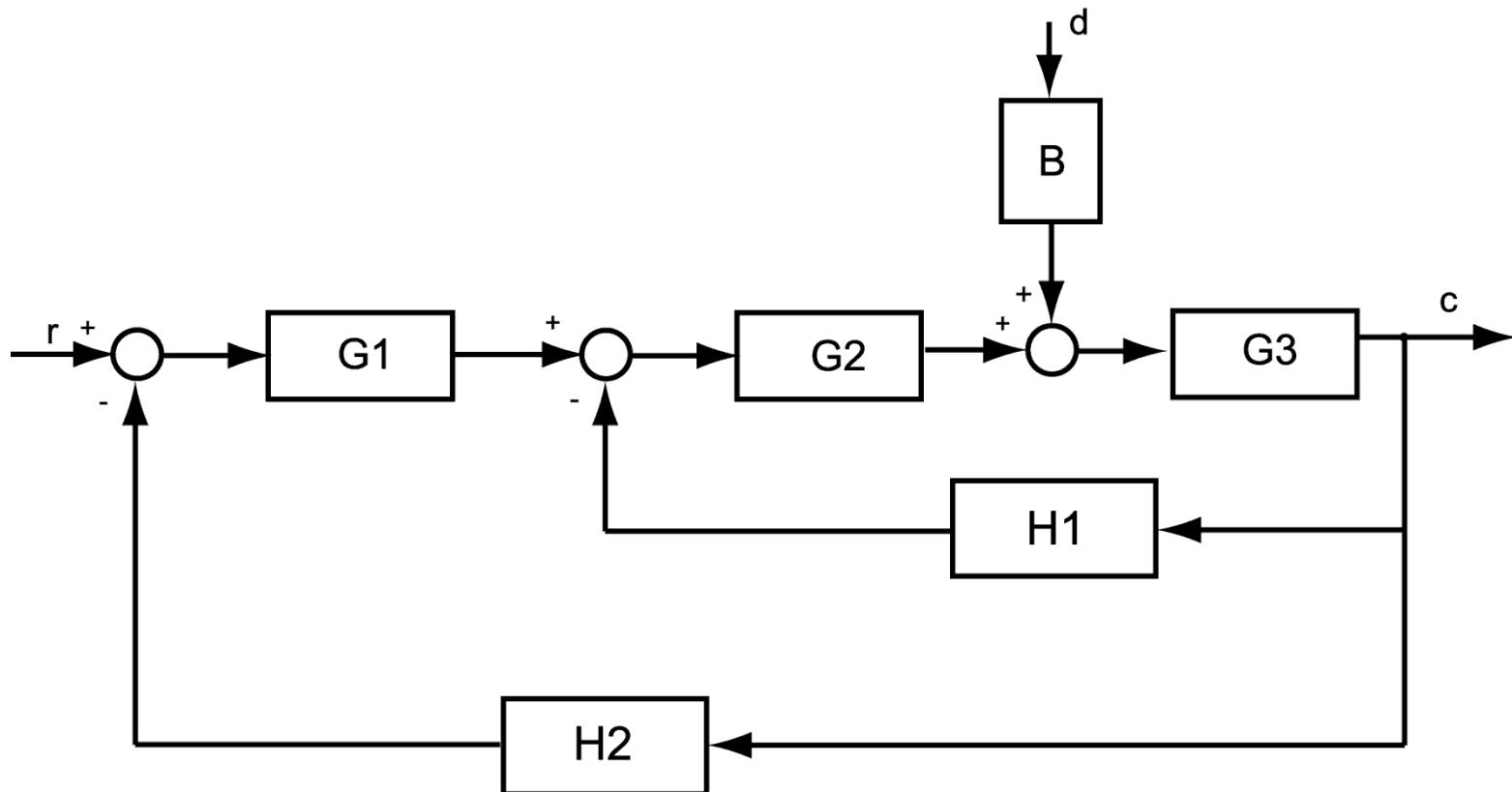


## 8. Eliminazione di un anello

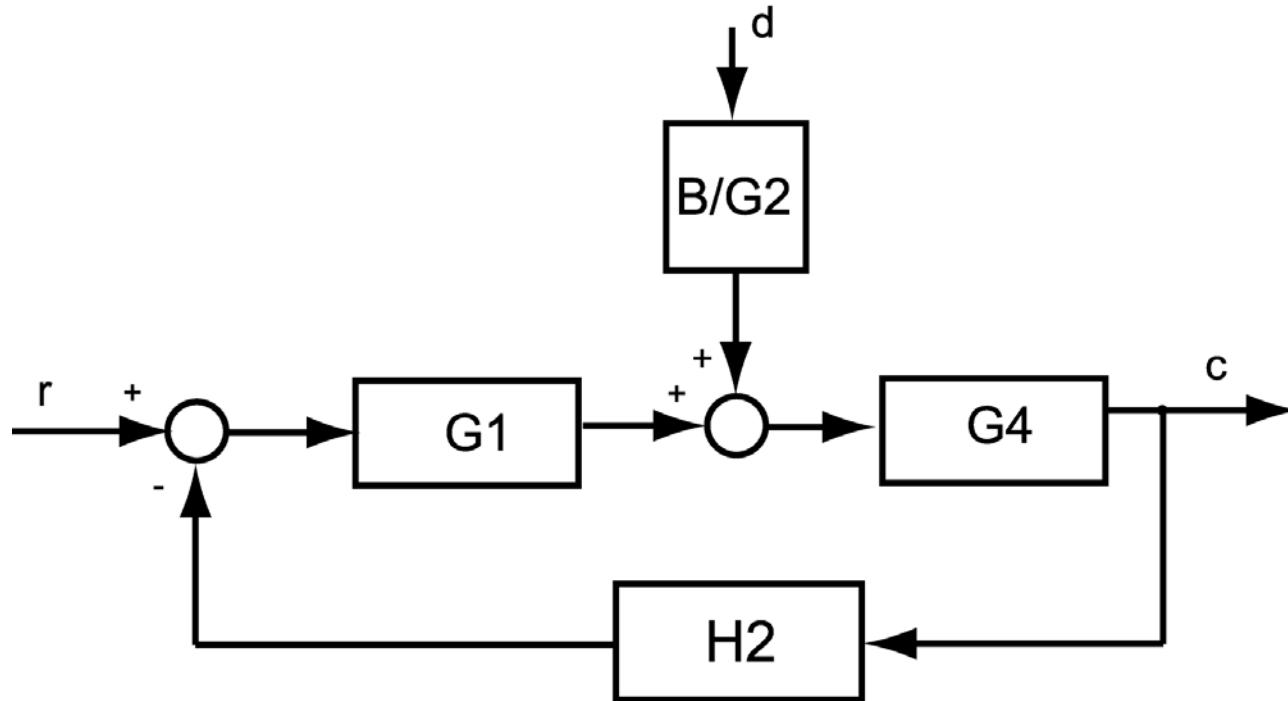


- Esempio di riduzione alla forma minima

Schema a blocchi iniziale

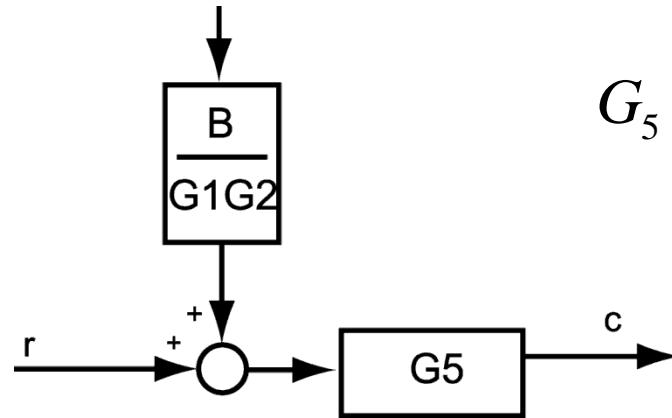


Applicando le regole n° 6, 3, 8 si ottiene



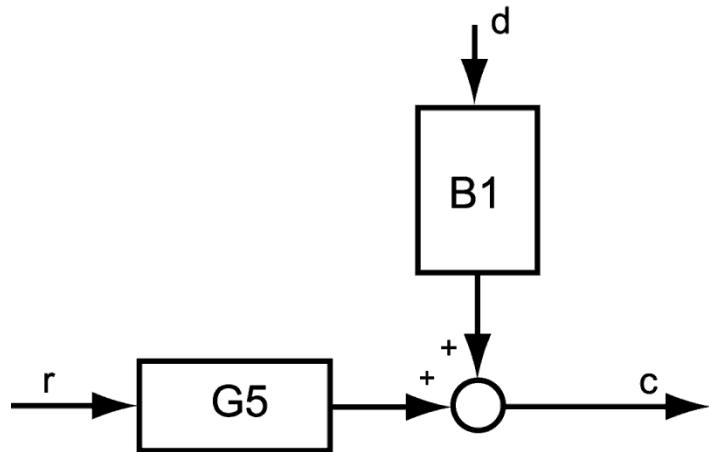
$$G_4 := \frac{G_2 G_3}{1 + G_2 G_3 H_1}$$

Applicando ancora le regole n° 6, 3, 8 :



$$G_5 := \frac{G_1 G_4}{1 + G_1 G_4 H_2}$$

Applicando infine la regola n° 7:



$$c = G_5 r + B_1 d$$

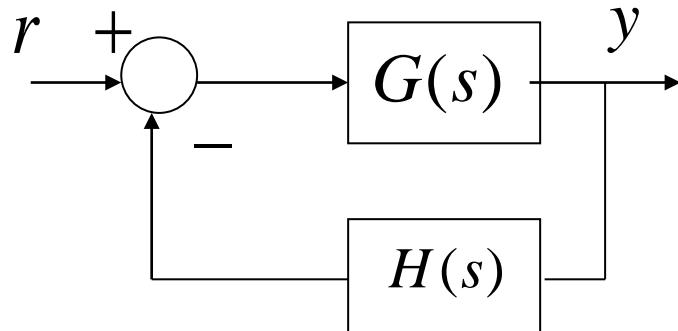
$$B_1 := \frac{B G_5}{G_1 G_2}$$

$$c = [G_5 \quad B_1] \begin{bmatrix} r \\ d \end{bmatrix}$$

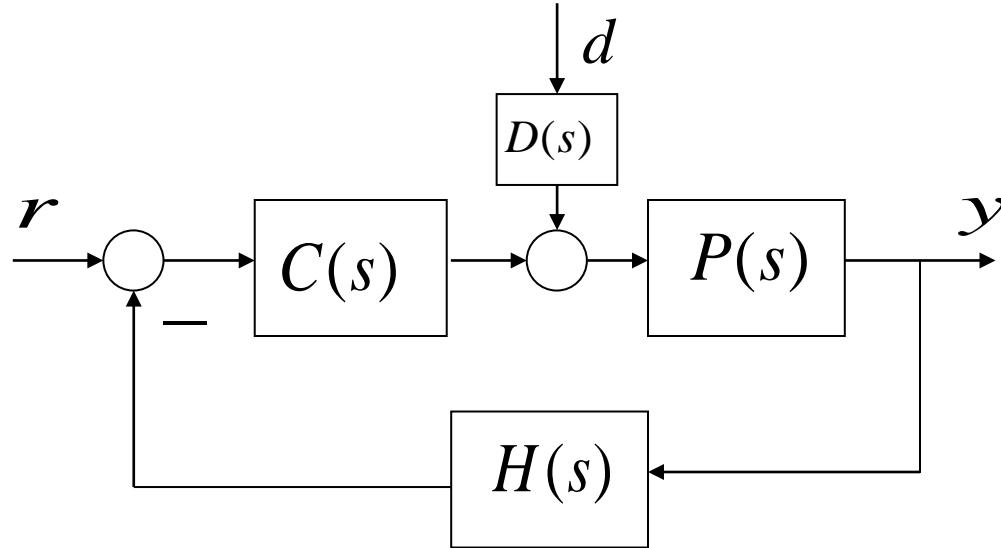
# Proprietà generali dei sistemi in retroazione

- Regola rapida per il calcolo della f.d.t. nei sistemi retroazionati (singolo anello con il segnale retroazionato sottratto nella giunzione sommante):

$$\{\text{f.d.t.}\} = \left\{ \frac{\text{f.d.t. del percorso di segnale diretto}}{1 + \text{guadagno di anello}} \right\}$$



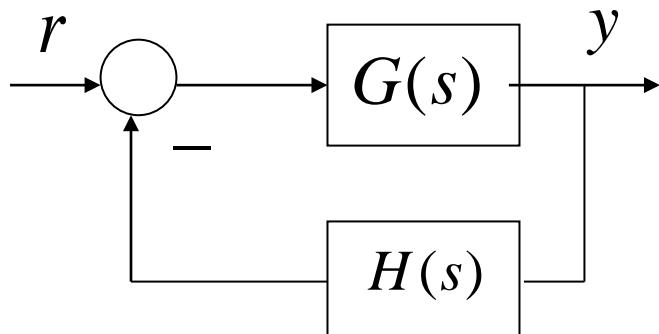
$$T_{ry}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$



$$T_{ry} = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)H(s)}$$

$$T_{dy} = \frac{D(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)H(s)}$$

# Sensibilità a variazioni di parametri nei sistemi retroazionati



$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

1° caso: variazione di un parametro nella catena diretta

$G(s)$  è in realtà  $G(s;\alpha)$  con  $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$ ,  $\alpha_0 \equiv \{\text{valore nominale del p.}\}$

$$\Delta\alpha \rightarrow \Delta G := G(s;\alpha) - G(s;\alpha_0) \rightarrow \frac{\Delta G}{G(s;\alpha_0)} \equiv \begin{cases} \text{variazione} \\ \text{relativa di } G \end{cases}$$

$$\Delta\alpha \rightarrow \Delta T := T(s;\alpha) - T(s;\alpha_0) \rightarrow \frac{\Delta T}{T(s;\alpha_0)} \equiv \begin{cases} \text{variazione} \\ \text{relativa di } T \end{cases}$$

$$T = \frac{G}{1+GH}$$

$$S_G^T \equiv \begin{Bmatrix} \text{Sensibilità di T} \\ \text{a variazioni di G} \end{Bmatrix} := \frac{\frac{\Delta T}{\Delta G}}{G(s; \alpha_0)}$$

Si consideri  $\Delta\alpha$  variazione infinitesimale

$$\Rightarrow S_G^T = \left. \frac{dT}{dG} \right|_{\alpha=\alpha_0} \frac{G(s; \alpha_0)}{T(s; \alpha_0)}$$

$$S_G^T = \frac{1+GH - G(H)}{(1+GH)^2} \cdot \frac{\frac{G}{G}}{\frac{1+GH}{1+GH}} = \frac{1}{1+GH}$$

$$S_G^T = \frac{1}{1+G(s; \alpha_0)H(s)}$$

Quindi se il guadagno di anello è molto elevato la variazione relativa di T è molto più piccola della variazione relativa di G.

In termini frequenziali:

$$\text{se } |G(j\omega; \alpha_0)H(j\omega)| \gg 1$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\Delta T(j\omega)}{T(j\omega; \alpha_0)} \right| \ll \left| \frac{\Delta G(j\omega)}{G(j\omega; \alpha_0)} \right|$$

**Conclusione:** Un guadagno di anello elevato rende (relativamente) insensibile la f.d.t. del sistema retroazionato a variazioni della f.d.t. del sistema controllato.

$$T = \frac{G}{1+GH}$$

## 2° caso: variazione di un parametro nella catena di retroazione

$H(s)$  è in realtà  $H(s; \beta)$  con  $\beta = \beta_0 + \Delta\beta$ ,  $\beta_0 \equiv \{\text{valore nom. del p.}\}$

$$\Delta\beta \rightarrow \Delta H := H(s; \beta) - H(s; \beta_0) \rightarrow \frac{\Delta H}{H(s; \beta_0)} \equiv \begin{cases} \text{variazione} \\ \text{relativa di H} \end{cases}$$

$$\Delta\beta \rightarrow \Delta T := T(s; \beta) - T(s; \beta_0) \rightarrow \frac{\Delta T}{T(s; \beta_0)} \equiv \begin{cases} \text{variazione} \\ \text{relativa di T} \end{cases}$$

$$S_H^T \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{Sensibilità di T} \\ \text{a variazioni di H} \end{array} \right\} := \frac{\Delta T}{T(s; \beta_0)} \Bigg/ \frac{\Delta H}{H(s; \beta_0)}$$

Considerando  $\Delta\beta$  variazione infinitesimale

$$\Rightarrow S_H^T = \frac{dT}{dH} \Bigg|_{\beta=\beta_0} \frac{H(s; \beta_0)}{T(s; \beta_0)} \Rightarrow S_H^T = G \frac{-G}{(1+GH)^2} \cdot \frac{H}{\frac{G}{1+GH}}$$

$$S_H^T = -\frac{G(s)H(s; \beta_0)}{1+G(s)H(s; \beta_0)}$$

Quindi se il guadagno di anello è elevato la variazione relativa di T è circa uguale (in modulo) alla variazione relativa di H.

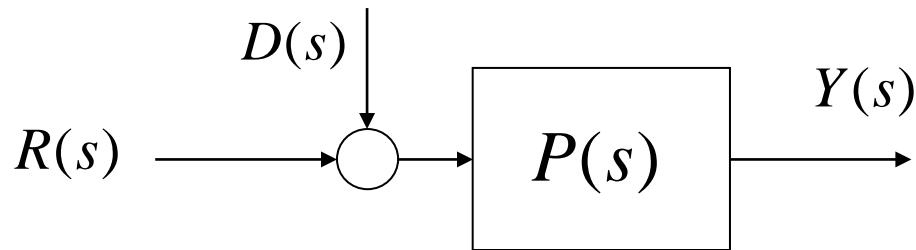
In termini frequenziali:

$$\begin{aligned} \text{se } |G(j\omega)H(j\omega; \beta_0)| &>> 1 \\ \Rightarrow \left| \frac{\Delta T(j\omega)}{T(j\omega; \beta_0)} \right| &\cong \left| \frac{\Delta H(j\omega)}{H(j\omega; \beta_0)} \right| \end{aligned}$$

**Conclusione:** Variazioni della f.d.t. nella catena di retroazione si riverberano senza attenuazione in variazioni della f.d.t. del sistema retroazionato.

## Attenuazione dei disturbi

disturbo agente su “impianto” ad anello aperto:

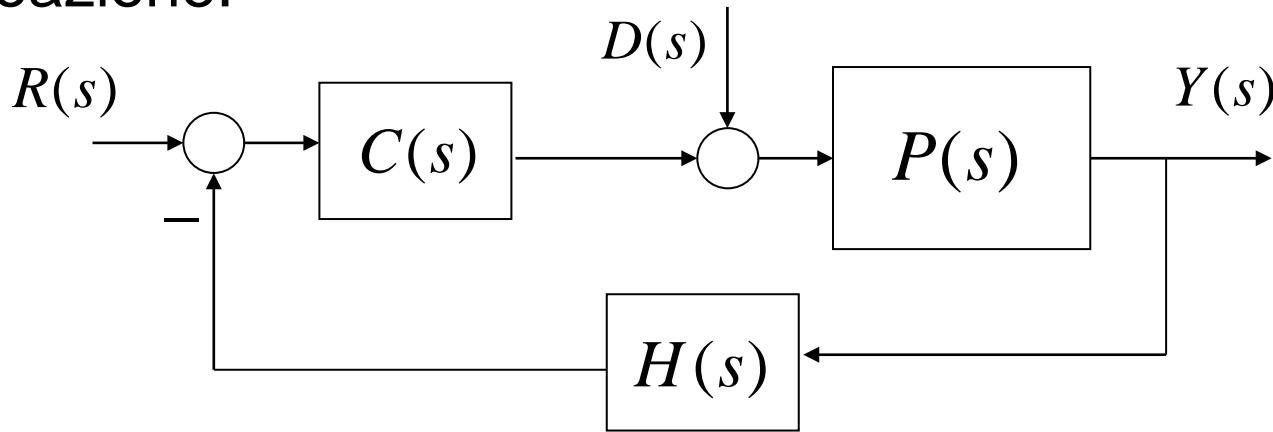


$$\{\text{uscita determinata dal segnale utile}\} \equiv P(s)R(s)$$

$$\{\text{uscita determinata dal disturbo}\} \equiv P(s)D(s)$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{\text{segnale}}{\text{disturbo}} \right\} = \frac{R(s)}{D(s)}$$

Ipotizziamo che il disturbo sia indipendente dal segnale “manipolabile”  $R(s)$  e mostriamo come sia possibile migliorare il rapporto segnale/disturbo introducendo la retroazione:



Per un confronto omogeneo si richiede  $\frac{CP}{1+CPH} \cong P$   
 $\Rightarrow C \cong 1 + CPH$  questo è possibile quando  $CPH \gg 1$  e  $H \cong 1/P$

ovvero  $\begin{cases} & \text{guadagno di anello elevato} \\ & \text{f.d.t. della catena di retroazione} \cong \text{sistema inverso di } P \end{cases}$

$\{ \text{uscita determinata dal segnale utile} \} \cong P(s)R(s)$

$$\{ \text{uscita determinata dal disturbo} \} = \frac{P(s)}{1 + C(s)P(s)H(s)} D(s)$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{\text{segnale}}{\text{disturbo}} \right\} \cong (1 + C(s)P(s)H(s)) \frac{R(s)}{D(s)}$$

Il rapporto segnale/disturbo viene modificato nel rapporto di 1 a  $|1 + C(j\omega)P(j\omega)H(j\omega)|$  e quindi fortemente aumentato se nella banda di frequenze del disturbo vale  $|C(j\omega)P(j\omega)H(j\omega)| \gg 1$ .

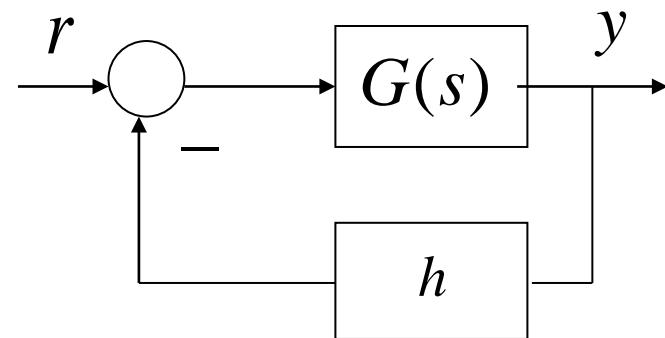
Conclusione: Se il guadagno di anello è elevato il rapporto segnale/disturbo si eleva all'incirca del medesimo fattore passando dallo schema in catena aperta a quello in catena chiusa. Quindi, a parità di segnale utile, il disturbo viene grandemente attenuato nel sistema in retroazione.

# Allargamento della banda passante

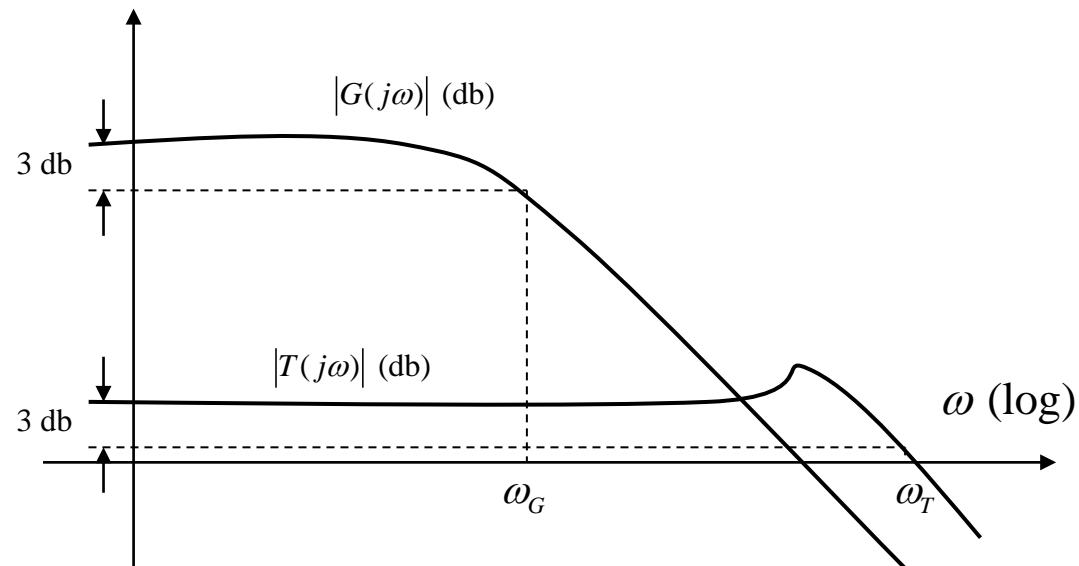
Ipotizziamo che  $H(s) = h > 0$

$$T(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + hG(j\omega)}$$

Se  $h|G(j\omega)| \gg 1 \Rightarrow T(j\omega) \cong 1/h$



Un guadagno di anello elevato implica un allargamento della banda passante.



## Esempio:

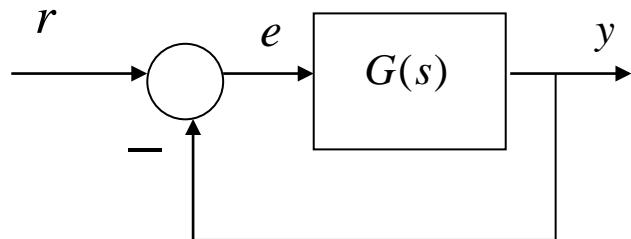
$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + \tau j\omega} \quad \{\text{banda passante}\} \equiv \omega_G = \frac{1}{\tau}$$

$$T(j\omega) = \frac{\frac{1}{1 + \tau j\omega}}{1 + h \frac{1}{1 + \tau j\omega}} = \frac{1}{1 + \tau j\omega + h} = \frac{1}{1 + \frac{\tau}{1 + h} j\omega}$$

$$\{\text{banda passante}\} \equiv \omega_T = \frac{1 + h}{\tau}$$

Se  $h \gg 1 \Rightarrow \omega_T \gg \omega_G$

# Analisi a regime dei sistemi in retroazione



Studio dell'errore di regolazione a regime in risposta a segnali tipici.

Assunzioni: sistema in retroazione unitaria, sistema retroazionato asintoticamente stabile.

$$r(t) \in \left\{ r_0 1(t), r_0 t 1(t), r_0 \frac{t^2}{2} 1(t) \right\}$$

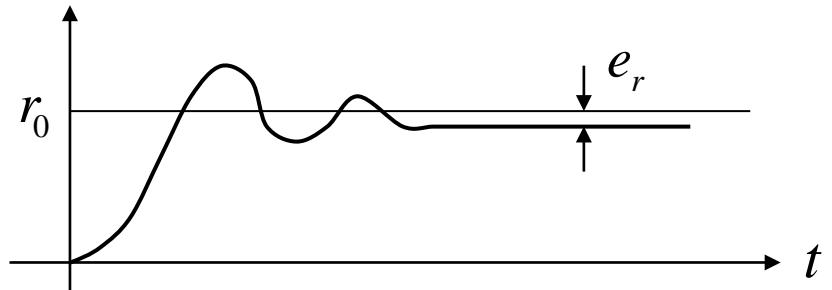
$$e(t) := r(t) - y(t) \qquad E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s)$$

$$e_r := \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \qquad h := \text{tipo (di sistema) di } G(s)$$

**Gradino:**  $r(t) = r_0 \text{1}(t)$ ,  $R(s) = \frac{r_0}{s}$

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G(s)} \cdot \frac{r_0}{s}$$

$$e_r = \frac{r_0}{1 + K_p} \quad \text{dove } K_p := \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \text{ (costante di posizione)}$$

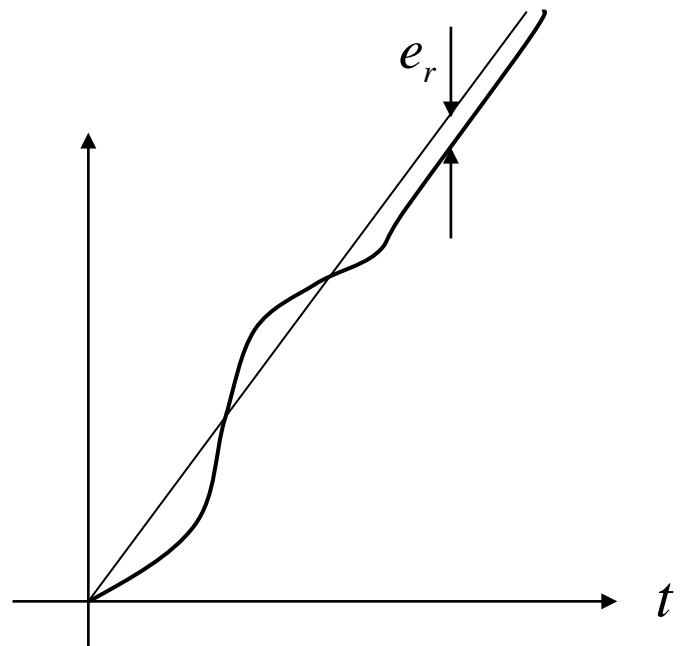


**Rampa:**  $r(t) = r_0 t \text{1}(t)$ ,  $R(s) = \frac{r_0}{s^2}$

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G(s)} \cdot \frac{r_0}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{r_0}{s + sG(s)}$$

$$e_r = \frac{r_0}{K_v}$$

$$\text{dove } K_v := \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \text{ (costante di velocità)}$$



**Parabola :**  $r(t) = r_0 \frac{t^2}{2} 1(t), \quad R(s) = \frac{r_0}{s^3}$

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G(s)} \cdot \frac{r_0}{s^3} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{r_0}{s^2 + s^2 G(s)}$$

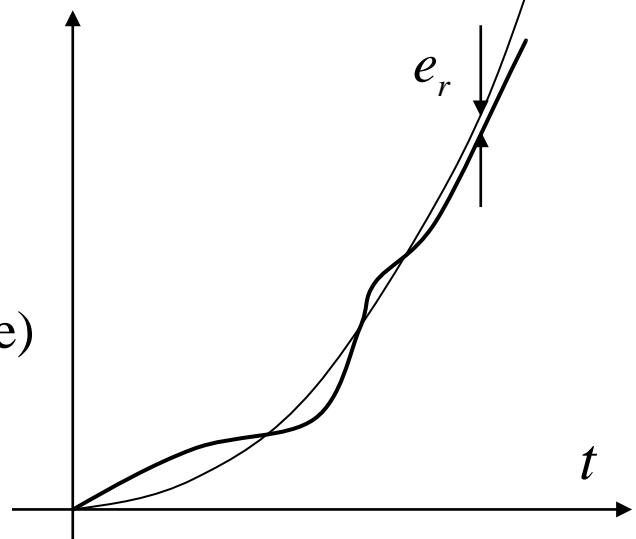
$$e_r = \frac{r_0}{K_a} \quad \text{dove } K_a := \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) \quad (\text{c. di accelerazione})$$

Quadro riassuntivo:

$$G(s) = K \frac{(1 + \tau_1' s) \dots}{s^h (1 + \tau_1 s) \dots}$$

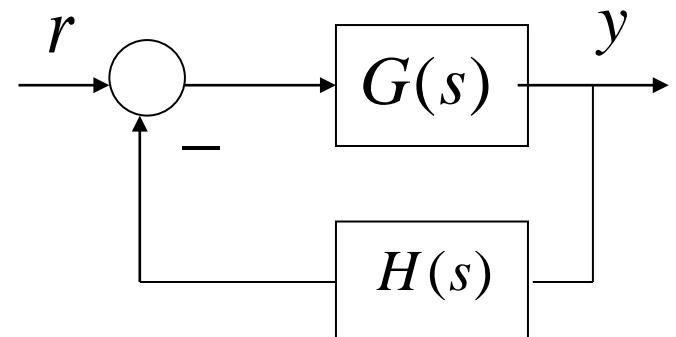
Tipi di sistema	$K_p$	$K_v$	$K_a$
0	$K$	0	0
1	$\infty$	$K$	0
2	$\infty$	$\infty$	$K$

Tipo   Ingresso	gradino	rampa	parabola
0	$e_r = \frac{r_0}{1+K}$	$e_r = \infty$	$e_r = \infty$
1	$e_r = 0$	$e_r = \frac{r_0}{K}$	$e_r = \infty$
2	$e_r = 0$	$e_r = 0$	$e_r = \frac{r_0}{K}$



## Errore a regime con retroazione non unitaria

La variabile controllata  $y$  è in generale dimensionalmente diversa dal segnale di set-point  $r$  e quindi occorre definire la condizione ideale di controllo:



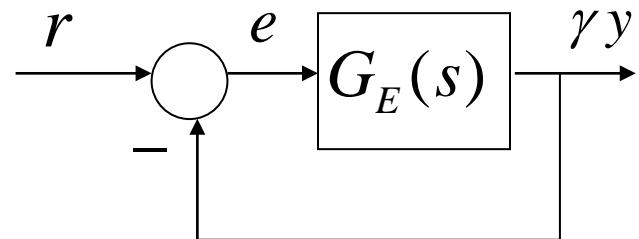
$$y(t) \equiv K_C r(t) \quad K_C := \text{costante di controllo o regolazione}$$

La difformità dalla condizione ideale può essere misurata da una variabile errore, per esempio così definita:

$$e(t) := r(t) - \gamma y(t) ; \quad \gamma := 1/K_C$$

$$e(t) \equiv 0 \Leftrightarrow y(t) \equiv K_C r(t)$$

Lo schema in retroazione non unitaria può essere ricondotto allo schema a fianco con retroazione unitaria. Quest'ultimo incorpora la definizione di errore assegnata.



Affinché i due schemi siano equivalenti occorre e basta che la f.d.t. fra  $r$  ed  $y$  del primo schema moltiplicata per  $\gamma$  sia uguale alla f.d.t. fra  $r$  e  $\gamma y$  del secondo schema.

$$\frac{G}{1+GH} \cdot \gamma = \frac{G_E}{1+G_E} \Rightarrow$$

$$G_E(s) = \frac{G(s)\gamma}{1 + G(s)(H(s) - \gamma)}$$

Esempio: Se  $H(s) = h$  e  $K_C = 1/h$   $\Rightarrow G_E(s) = G(s)h$

## Punti salienti della lezione:

- Regole di riduzione negli schemi a blocchi
- Funzioni di sensibilità a variazioni di parametri
- Tipo di sistema retroazionato ed errori a regime
- Calcolo dell'errore a regime nei sistemi in retroazione non unitaria

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle  
Telecomunicazioni

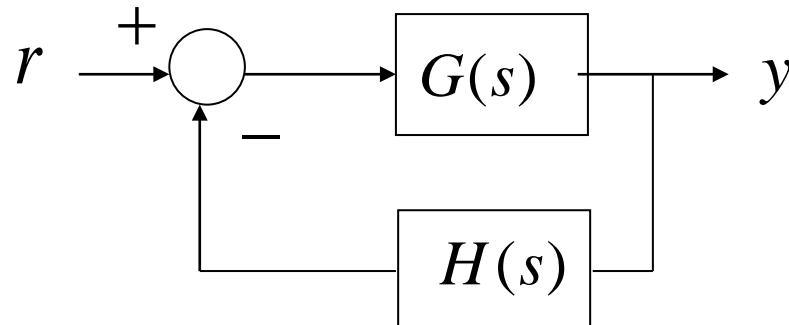
**Lezione n. 12 di Fondamenti di Controlli Automatici  
prof. Aurelio Piazzì**

**Sistemi retroazionati: criterio di  
Nyquist e margini di stabilità**

Università degli Studi di Parma – a.a. 2020-2021

- La buona connessione nei sistemi retroazionati
- Un metodo grafico per lo studio della stabilità nei sistemi retroazionati: il criterio di Nyquist
- Una misura della distanza dall'instabilità: i margini di stabilità

# Sistemi retroazionati: il requisito di buona connessione



$$T_{ry}(s) = \frac{G(s)}{1 + L(s)}$$

$$L(s) := G(s)H(s) \text{ (g. di anello)}$$

## Def. (buona connessione)

Il sistema retroazionato è **ben connesso** se  $\lim_{|s| \rightarrow +\infty} 1 + L(s) \neq 0$ .

La buona connessione è una condizione necessaria per la realizzabilità fisica dell'anello di retroazione. E' una condizione che assumiamo sia sempre soddisfatta.

## Esempi di sistemi in retroazione non ben connessi :

1.  $G(s) = 1, H(s) = -1 \Rightarrow T_{ry} = \frac{G}{1+GH} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0}$  !

$$\begin{cases} y = e \\ e = r - (-1)y \end{cases} \Rightarrow y = r + y \text{ eq. impossibile con } r \neq 0$$

2.  $G(s) = -\frac{s+2}{s+1}, H(s) = \frac{s+2}{s+5} \Rightarrow T_{ry} = \frac{G}{1+GH} = \frac{-\frac{s+2}{s+1}}{1 - \frac{s+2}{s+1} \cdot \frac{s+2}{s+5}}$

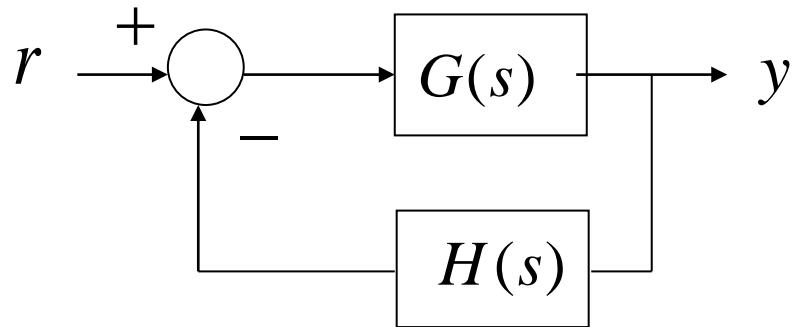
$$T_{ry} = \frac{-\frac{s+2}{s+1}}{(s+1)(s+5) - (s+2)^2} = -\frac{(s+2)(s+5)}{s^2 + 6s + 5 - (s^2 + 4s + 4)}$$

$$= -\frac{(s+2)(s+5)}{2s+1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(s+2)(s+5)}{s+\frac{1}{2}}$$

sistema improprio!

## Il criterio di Nyquist

È un criterio grafico per lo studio della stabilità asintotica dei sistemi retroazionati.



$$T_{ry}(s) = \frac{G(s)}{1 + L(s)}$$

$$L(s) := G(s)H(s) \text{ (g. di anello)}$$

- Il sistema retroazionato è stabile asintoticamente se e solo se l'eq. caratteristica  $1 + L(s) = 0$  ha tutte le radici a parte reale negativa.
- Il criterio di N. richiede il tracciamento del diagramma polare (o di N.) di  $L(j\omega)$ .

## Teorema dell'indice logaritmico (*Principle of the Argument*)

Sia  $\Gamma$  una curva chiusa semplice del piano complesso e  $\mathcal{D}$  la regione ad esso interna ( $\Gamma = \partial\mathcal{D}$ ). Sia  $F(s)$  una funzione analitica su  $\Gamma$  e su  $\mathcal{D}$  ad eccezione di un numero finito di poli appartenenti a  $\mathcal{D}$ . Inoltre  $F(s)$  non abbia zeri su  $\Gamma$ . Vale quindi la relazione:

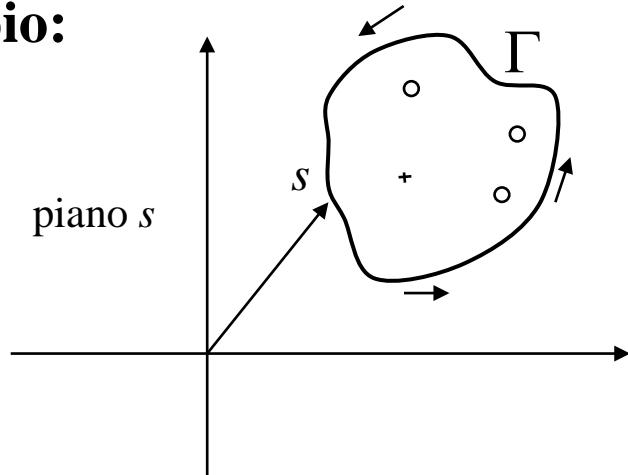
$$\frac{1}{2\pi} \Delta \arg F(s) = n_z - n_p$$

dove  $\Delta \arg F(s)$  denota la variazione dell'argomento di  $F(s)$  al variare di  $s$  lungo  $\Gamma$  per un giro completo in senso antiorario ed  $n_z$  e  $n_p$  sono rispettivamente il numero degli zeri e dei poli di  $F(s)$  su  $\mathcal{D}$  computati con le loro molteplicità.

Nota: Se la curva  $\Gamma$  fosse percorsa in senso orario la relazione sarebbe:

$$-\frac{1}{2\pi} \Delta \arg F(s) = n_z - n_p$$

**Esempio:**



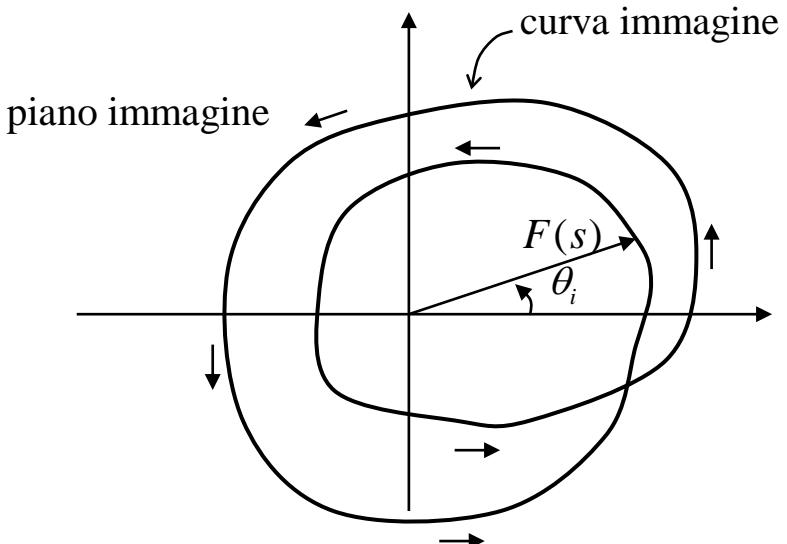
$$\Delta \arg F(s) = \theta_f - \theta_i = (\theta_i + 2 \cdot 2\pi) - \theta_i = 4\pi$$

$$n_z = 3, \quad n_p = 1 \quad (\text{zeri e polo con molteplicità unitaria})$$

$$\frac{1}{2\pi} \cdot 4\pi = 3 - 1$$

Con la percorrenza oraria di  $\Gamma$  avremmo:

$$\Delta \arg F(s) = \theta_f - \theta_i = (\theta_i - 2 \cdot 2\pi) - \theta_i = -4\pi \Rightarrow -\frac{1}{2\pi} \cdot (-4\pi) = 3 - 1$$



## Corollario (formulazione geometrica del teorema dell'indice log.)

Assunte le ipotesi del teorema dell'indice log. con la **percorrenza di  $\Gamma$  antioraria** vale la relazione:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{numero di giri, in senso antiorario,} \\ \text{della curva immagine intorno all'origine} \end{array} \right\} = n_z - n_p$$

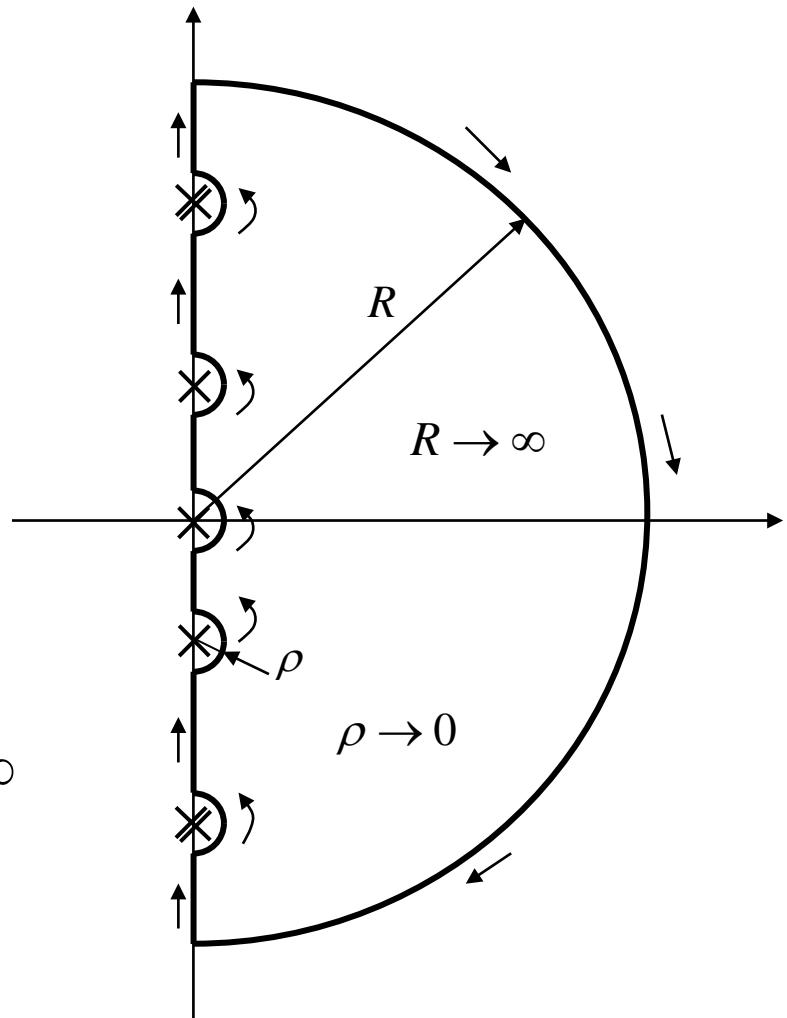
oppure, assunte le ipotesi del teorema dell'indice log. con la **percorrenza di  $\Gamma$  oraria** vale la relazione:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{numero di giri, in senso orario,} \\ \text{della curva immagine intorno all'origine} \end{array} \right\} = n_z - n_p$$

- Applicazione del teorema dell'indice log. alla stabilità dei sistemi retroazionati:

La curva chiusa di figura percorsa in senso orario è detta **contorno di Nyquist**: è composta da una semicirconferenza all'infinito, semicirconferenze infinitesime aggiranti i poli immaginari di  $L(s)$  e da segmenti dell'asse immaginario.

Si osservi che per  $\rho \rightarrow 0+$  e  $R \rightarrow +\infty$   
 $\Rightarrow \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}_+$



Si applica il teorema dell'indice logaritmico nella sua formulazione geometrica con scelta del contorno di Nyquist quale curva chiusa semplice e della funzione  $1 + L(s)$ .

Condizioni di applicabilità:

- $1 + L(s)$  è analitica sul contorno di Nyquist ed è analitica su  $\mathbb{C}_+$  (regione interna al contorno di Nyquist) ad eccezione di un numero finito di poli (condizione soddisfatta).
- $1 + L(s)$  non deve presentare zeri sul contorno di Nyquist.

Questi se presenti possono esserci solo sull'asse immaginario.

Quindi il diagramma polare di  $L(s)$  (ovvero di  $L(j\omega)$ ) non deve attraversare il punto  $-1 + j0$  (condizione da soddisfare).

Definizioni:

$n_z :=$  n. degli zeri di  $1 + L(s)$  appartenenti a  $\mathbb{C}_+$

$n_p :=$  n. dei poli di  $L(s)$  (o di  $1 + L(s)$ ) appartenenti a  $\mathbb{C}_+$

$\psi := \left\{ \begin{array}{l} \text{n. di giri in senso orario della} \\ \text{curva immagine di } 1 + L(s) \text{ sul contorno} \\ \text{di Nyquist intorno all'origine} \end{array} \right\}$

Assunto che il diagramma polare di  $L(s)$  non tocca il punto  $-1$  vale

$$\psi = n_z - n_p$$

- Def. (**diagramma polare completo**)

Il **diagramma polare completo** (di  $L(s)$ ) è la curva chiusa immagine di  $L(s)$  sul contorno di Nyquist.

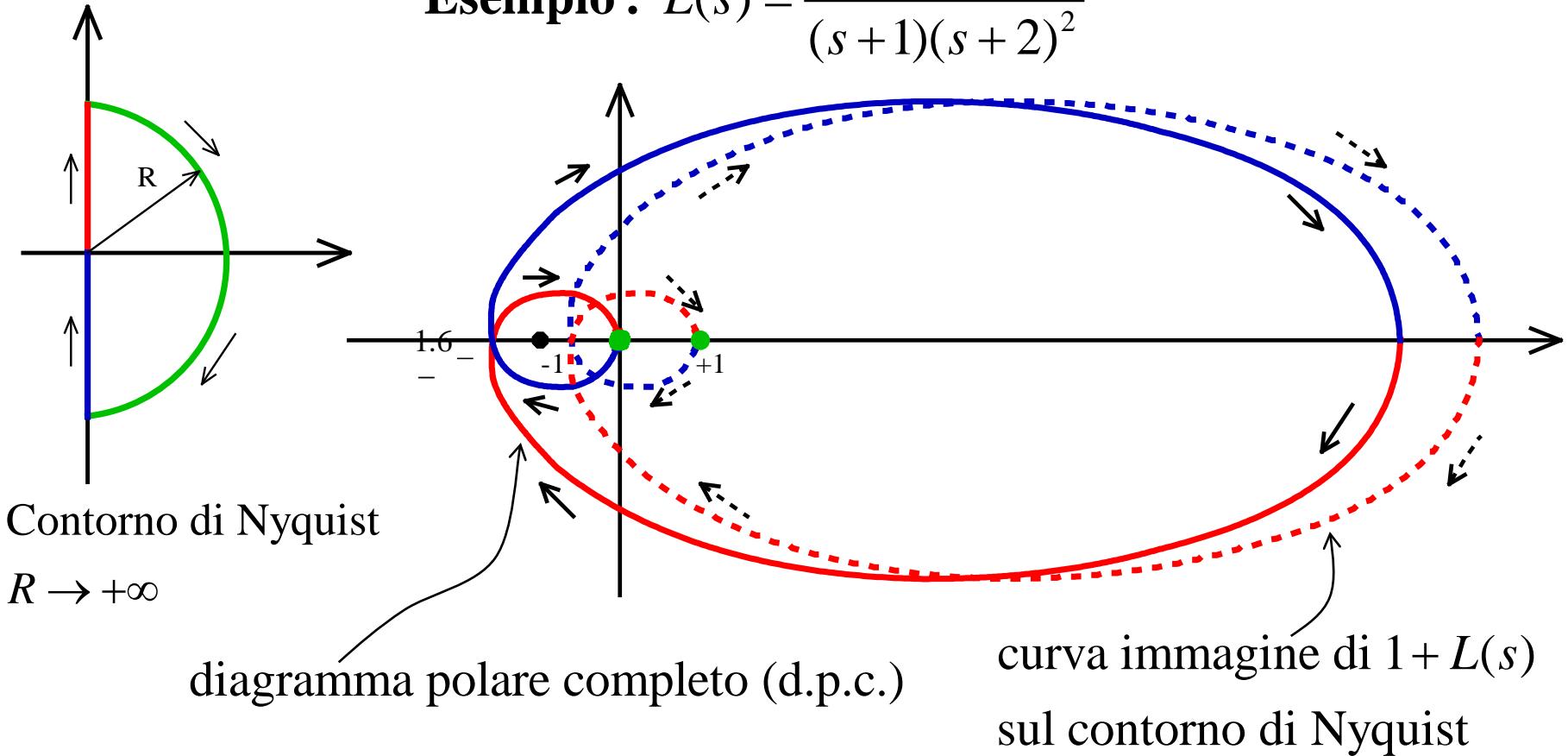
Quindi

$$\psi = \{ \text{n. di giri in senso orario del d.p.c. intorno al punto } -1 + j0 \}$$

Infatti

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{n. di giri in senso orario della} \\ \text{curva immagine di } 1 + L(s) \text{ sul contorno} \\ \text{di Nyquist intorno all'origine} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{n. di giri in senso orario del} \\ \text{d.p.c. intorno al punto } -1 + j0 \end{array} \right\}$$

**Esempio :**  $L(s) = \frac{60}{(s+1)(s+2)^2}$



$$\psi = 2, n_p = 0$$

$\psi = n_z - n_p \Rightarrow n_z = 2$  Il sistema retroazionato è instabile!

## Criterio di Nyquist

Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo non tocchi il punto critico  $-1$  ma lo circondi tante volte in senso antiorario quanti sono i poli del guadagno di anello con parte reale positiva.

### Corollario (caso particolare del Criterio di Nyquist)

Nell'ipotesi che il guadagno di anello non abbia poli a parte reale positiva, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo non tocchi né circondi il punto critico  $-1$ .

Nota: Il corollario non è da associarsi ai sistemi stabili ad anello aperto.

## **Dimostrazione del Criterio di Nyquist**

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile se e solo se

1. il diagramma polare completo di  $L(s)$  non tocca  $-1$  (equivalente a "il diagramma polare di  $L(s)$  non tocca  $-1$ ")
2.  $-\psi = n_p$

**Sufficienza:** Valgono le condizioni 1 e 2. La prima condizione significa che  $1 + L(s)$  non presenta zeri (puramente) immaginari. Dal teorema dell'indice logaritmico si ottiene  $\psi = n_z - n_p$  e dalla seconda condizione segue  $n_z = 0$ . Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

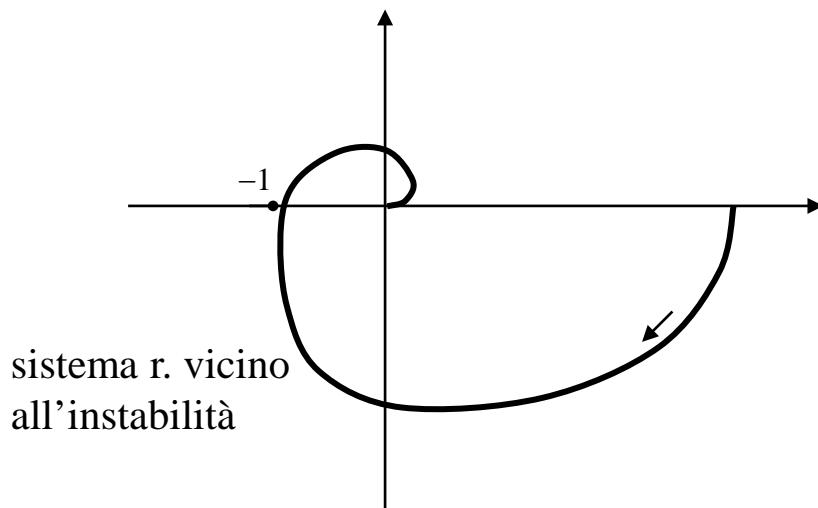
**Necessità:** Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Tutti gli zeri di  $1 + L(s)$  sono a parte reale negativa. Quindi non sono presenti zeri (puramente) immaginari di  $1 + L(s)$  (equivalente alla condizione 1) e  $n_z = 0$ . Applicando il teorema dell'indice logaritmico si ottiene  $\psi = n_z - n_p$  da cui si deduce  $\psi = -n_p$  e quindi  $-\psi = n_p$  (condizione 2).

Nota: Il criterio di Nyquist è valido per una classe di funzioni  $L(s)$  più ampia delle sole funzioni razionali: in particolare è valido per  $L(s) = R(s)\exp(-Ts)$  con  $R(s)$  funzione razionale.

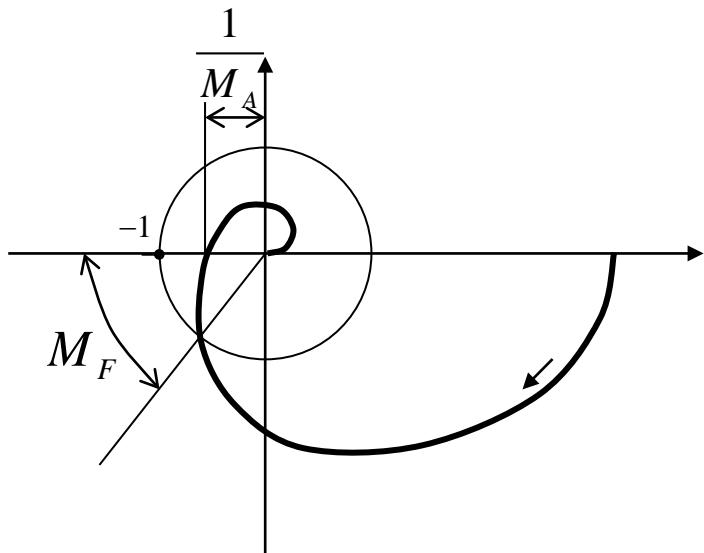
# Margini di stabilità

La proprietà di stabilità (asintotica) di un sistema retroazionato è di per sé una proprietà on/off. Tuttavia è opportuno e necessario inserire nelle specifiche tecniche associate ad un sistema retroazionato una misura della distanza dall'instabilità.

Esempio:  $L(s)$  asintoticamente stabile ...



- La distanza dall'instabilità nei sistemi retroazionati è tradizionalmente affidata ai cosiddetti margini di stabilità frequenziali ovvero il **margine di ampiezza** ( $M_A$ ) e il **margine di fase** ( $M_F$ ).



$$M_A := \frac{1}{|L(j\omega_p)|} \quad \text{dove } \omega_p \ni \arg L(j\omega_p) = -\pi$$

$\omega_p \equiv$  pulsazione di fase pi greco

$$M_F := \pi - |\varphi_c|$$

dove  $\varphi_c = \arg L(j\omega_c)$  e  $\omega_c \ni |L(j\omega_c)| = 1$

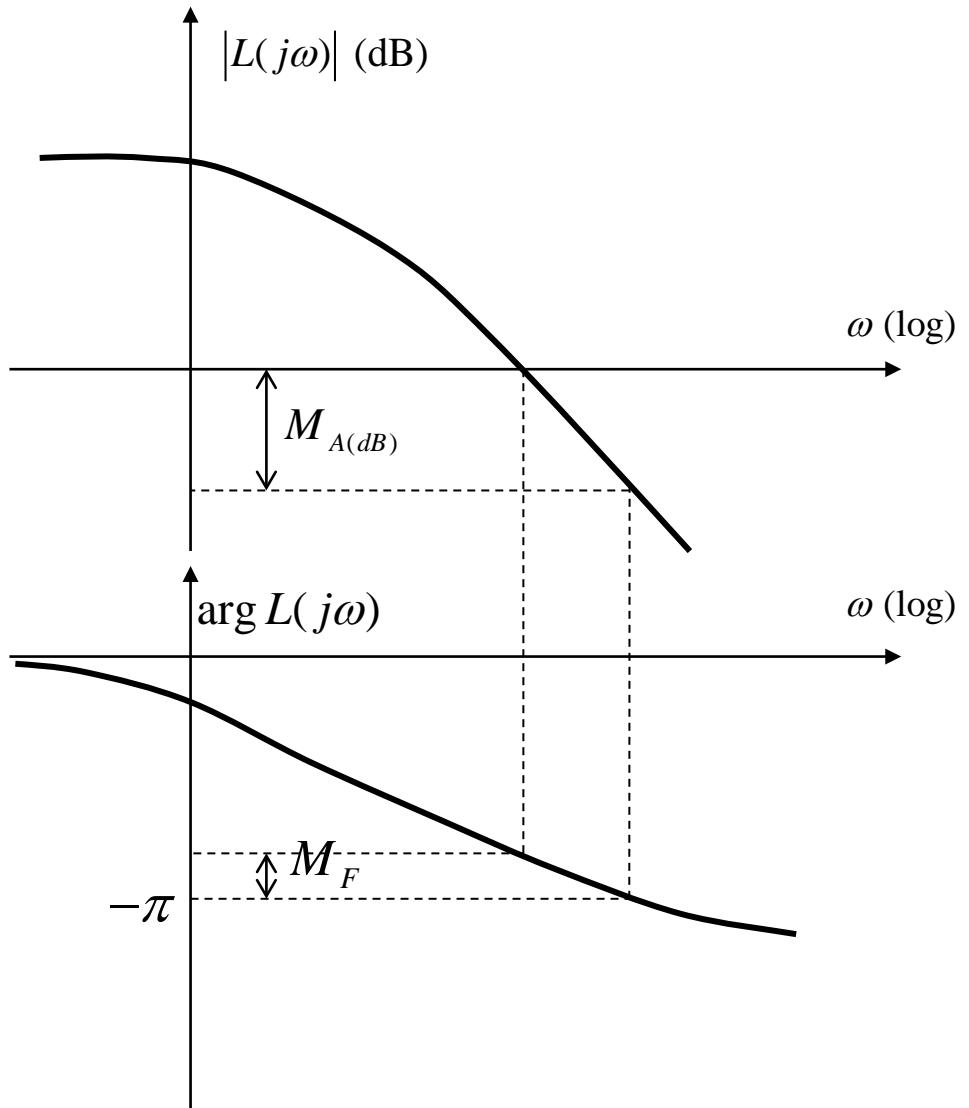
$\varphi_c \in (-\pi, 0)$ ,  $\omega_c \equiv$  pulsazione critica

$M_A \in (1, +\infty)$  a volte espresso in decibel:  $M_{A(dB)} = 20 \log M_A$

$M_F > 0$  espresso usualmente in gradi sessagesimali

Margini di ampiezza  
e di fase misurati sui  
diagrammi di Bode

$$M_{A(dB)} = -20 \log |L(j\omega_p)|$$



- Problemi con le definizioni tradizionali dei margini di stabilità

Esempio

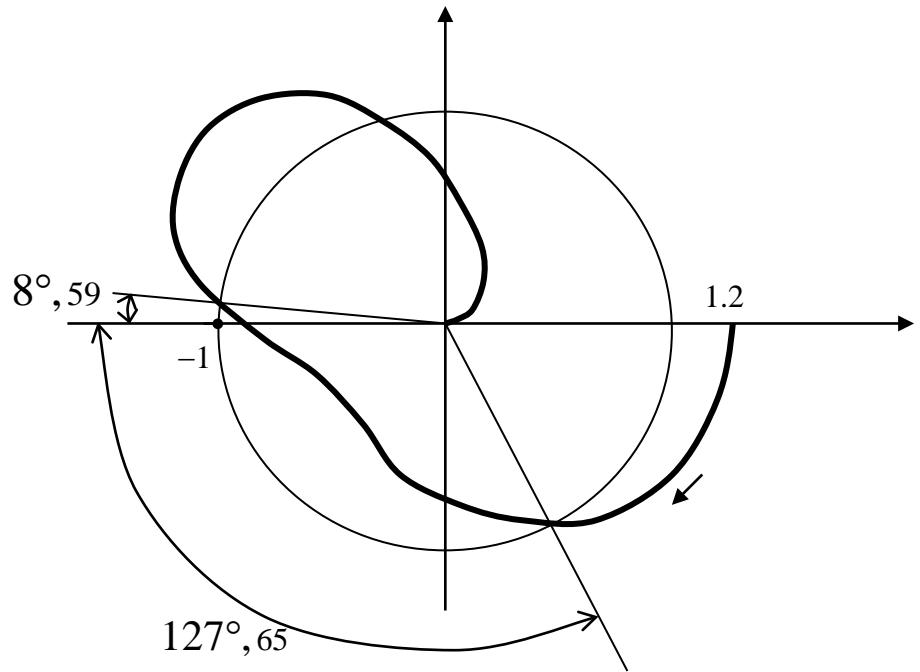
$$L(s) = \frac{1.2}{(1+s)^2 \left( 1 + 2 \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{s}{3} + \frac{s^2}{3^2} \right)} =$$

$$= \frac{1.2}{(1+s)^2 \left( 1 + \frac{s}{30} + \frac{s^2}{9} \right)}$$

$$L(j\omega) = \frac{1.2}{(1+j\omega)^2 \left( 1 - \frac{\omega^2}{9} + \frac{j\omega}{30} \right)}$$

$$M_A = 1.11$$

$$M_F = 8^\circ, 59 \quad \text{e} \quad \text{non } 127^\circ, 65$$



## Definizioni generalizzate dei margini di stabilità

Il sistema retroazionato sia stabile asintoticamente:

$$M_A := \sup \left\{ M > 1 : |1 + \gamma L(j\omega)| > 0 \quad \forall \gamma \in \left[ \frac{1}{M}, M \right] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$

$$M_F := \sup \left\{ \phi > 0 : |1 + e^{-j\varphi} L(j\omega)| > 0 \quad \forall \varphi \in [-\phi, +\phi] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$

I margini di stabilità sono “norme” che misurano la distanza del punto critico  $-1 + j0$  dal diagramma polare di  $L(j\omega)$ .

## Proprietà

Sia  $M > 1$ . Vale la disequazione  $|1 + \gamma L(j\omega)| > 0 \quad \forall \gamma \in \left[ \frac{1}{M}, M \right]$  e  $\forall \omega \geq 0$

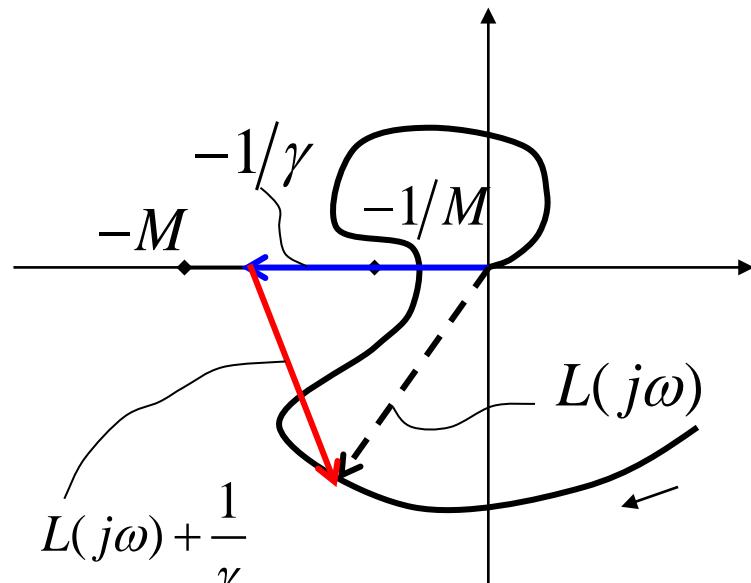
se e solo se il segmento dell'asse reale compreso fra  $-M$  e  $-1/M$  non interseca il diagramma polare di  $L(j\omega)$ .

**Dim.:**

$$\left\{ |1 + \gamma L(j\omega)| > 0 \quad \forall \gamma \in \left[ \frac{1}{M}, M \right] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \left| \frac{1}{\gamma} + L(j\omega) \right| > 0 \quad \forall \gamma \in \left[ \frac{1}{M}, M \right] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$

$$\text{Si noti che } \frac{1}{M} \leq \gamma \leq M \Leftrightarrow -M \leq -\frac{1}{\gamma} \leq -\frac{1}{M}$$



## Proprietà

Sia  $\phi > 0$ . Vale la disequazione  $|1 + e^{-j\varphi} L(j\omega)| > 0 \quad \forall \varphi \in [-\phi, +\phi]$  e  $\forall \omega \geq 0$  se e solo se l'arco di circonferenza di equazione  $e^{j(\pi+\varphi)}, \varphi \in [-\phi, +\phi]$  non interseca il diagramma polare di  $L(j\omega)$ .

**Dim.:**

$$\left\{ |1 + e^{-j\varphi} L(j\omega)| > 0 \quad \forall \varphi \in [-\phi, +\phi] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$

$\Updownarrow$

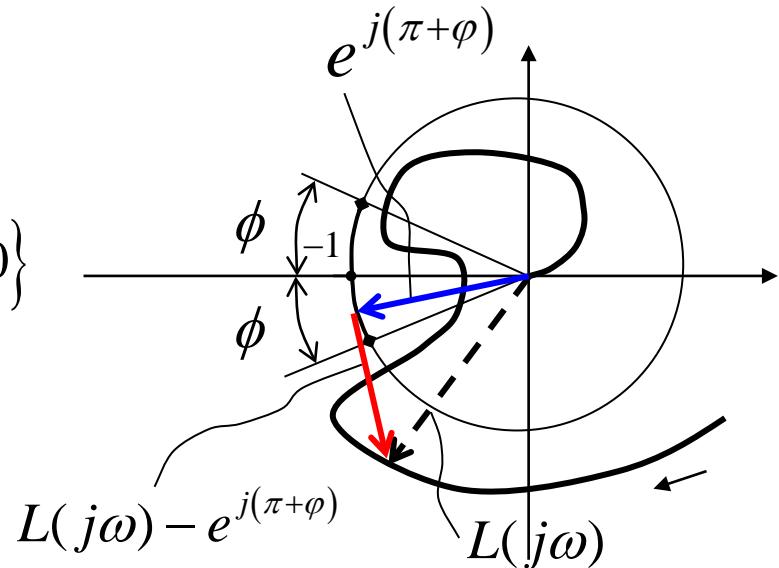
$$\left\{ |(1 + e^{-j\varphi} L(j\omega))e^{j\varphi}| > 0 \quad \forall \varphi \in [-\phi, +\phi] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$

$\Updownarrow$

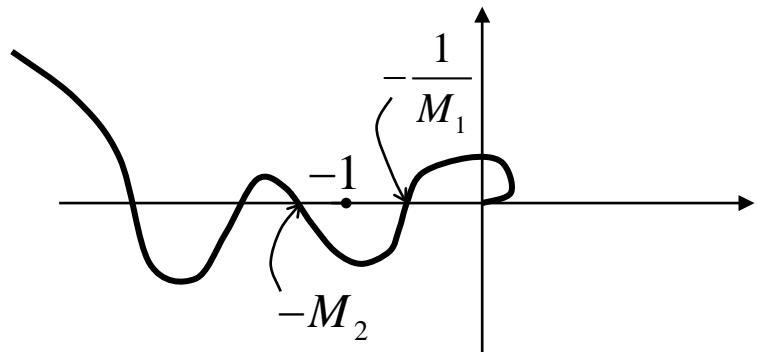
$$\left\{ |L(j\omega) + e^{j\varphi}| > 0 \quad \forall \varphi \in [-\phi, +\phi] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$

$\Updownarrow$

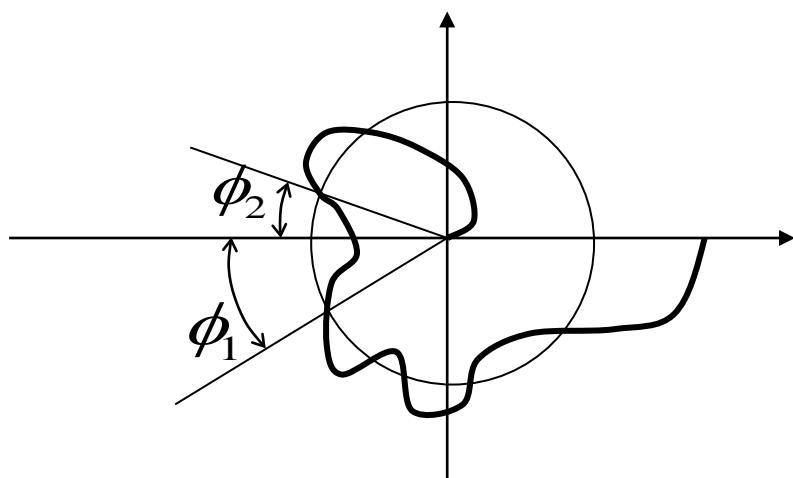
$$\left\{ |L(j\omega) - e^{j(\pi+\varphi)}| > 0 \quad \forall \varphi \in [-\phi, +\phi] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$



## Procedura generale per il calcolo dei margini di stabilità



$$M_A = \min \{M_1, M_2\}$$



$$M_F = \min \{\phi_1, \phi_2\}$$

## Punti salienti della lezione:

- Il teorema dell'indice logaritmico
- Il contorno di Nyquist ed il diagramma polare completo
- Margine di ampiezza e margine di fase

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle  
Telecomunicazioni

**Lezione n. 13 di Fondamenti di Controlli Automatici**  
**prof. Aurelio Piazzì**

**Sistemi retroazionati:  
il luogo delle radici**

Università degli Studi di Parma – a.a. 2020-2021

- Il luogo delle radici
- Proprietà del luogo delle radici
- Esempi di luoghi delle radici
- Il contorno delle radici
- Complementi

## Il luogo delle radici

Nel progetto di un sistema in retroazione è utile conoscere come i poli retroazionati si modificano al variare dei più importanti parametri di progetto: fra questi c'è la **costante di trasferimento  $K_1$**  del guadagno di anello  $L(s)$ .

$$L(s) = K_1 \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)}$$

Equazione caratteristica del  
sistema in retroazione:

$$1 + K_1 G_1(s) = 0$$

$$G_1(s) := \frac{z(s)}{p(s)} := \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

## Definizione:

Luogo delle radici (diretto) è il luogo geometrico descritto dalle radici dell'eq.  $1 + K_1 G_1(s) = 0$  al variare di  $K_1$  da  $0^+$  a  $+\infty$ .

Luogo delle radici (inverso) è il luogo geometrico descritto dalle radici dell'eq.  $1 + K_1 G_1(s) = 0$  al variare di  $K_1$  da  $0^-$  a  $-\infty$ .

Se  $K_1 > 0$  allora:

$$\{1 + K_1 G_1(s) = 0\} \Leftrightarrow \begin{cases} \arg G_1(s) = \pi \pmod{2\pi} \\ |G_1(s)| = \frac{1}{K_1} \end{cases}$$

Se  $K_1 < 0$  allora:

$$\{1 + K_1 G_1(s) = 0\} \Leftrightarrow \begin{cases} \arg G_1(s) = 0 \pmod{2\pi} \\ |G_1(s)| = -\frac{1}{K_1} \end{cases}$$

**Esempio:**  $\tau > 0$ ,  $K \in (0, +\infty)$

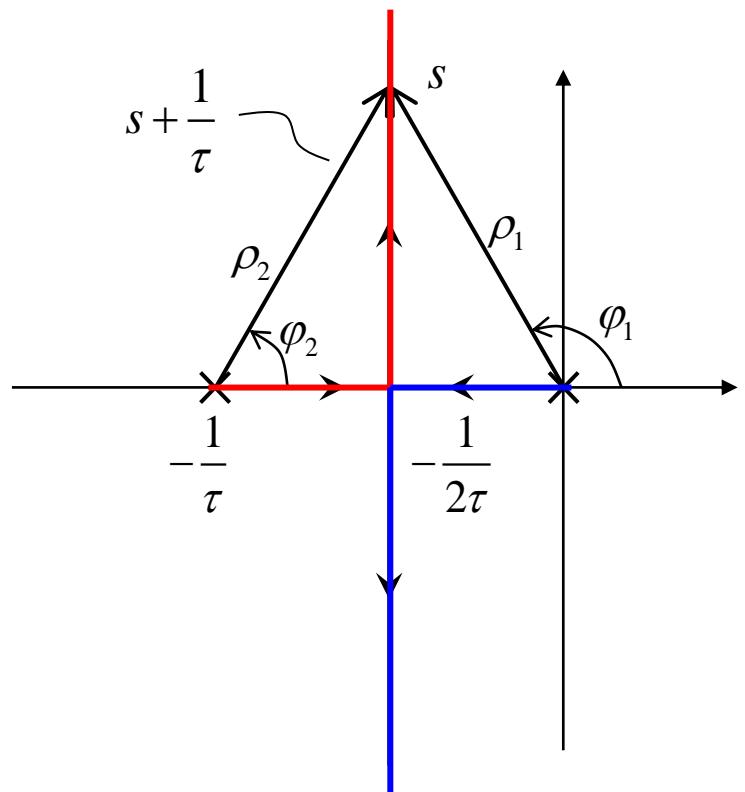
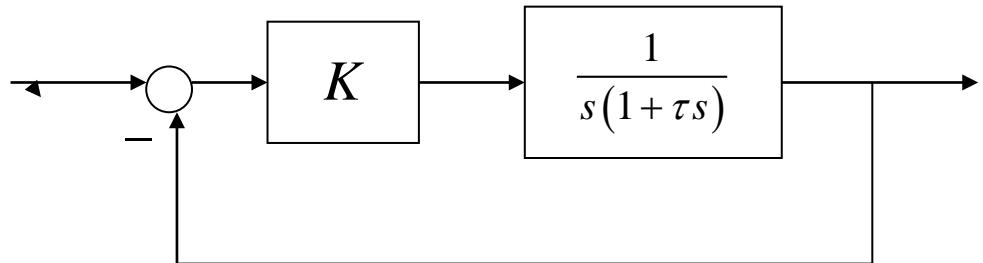
$$\text{eq. car.: } 1 + \frac{K}{s(1 + \tau s)} = 0$$

$$1 + \frac{K}{\tau} \cdot \frac{1}{s\left(s + \frac{1}{\tau}\right)} = 0$$

$$K_1 = \frac{K}{\tau}, \quad G_1(s) = \frac{1}{s\left(s + \frac{1}{\tau}\right)}$$

$$\arg \frac{1}{s\left(s + \frac{1}{\tau}\right)} = \pi \mod 2\pi$$

$$\begin{cases} s = \rho_1 e^{j\varphi_1} \\ s + \frac{1}{\tau} = \rho_2 e^{j\varphi_2} \end{cases} \Rightarrow \varphi_1 + \varphi_2 = \pi$$



## Proprietà del luogo delle radici

**Proprietà 1:** Il luogo ha tanti rami quanti sono i poli di  $G_1(s)$ . Ogni ramo parte da un polo di  $G_1(s)$  e termina in uno zero di  $G_1(s)$  o in un punto all'infinito. I rami si intersecano in corrispondenza delle radici multiple.

**Dim.:** (si ricorda che  $m \leq n$ )

$$1 + K_1 G_1(s) = 0 \iff p(s) + K_1 z(s) = 0 \quad (\text{eq. polinomiale di grado } n)$$

$$K_1 \rightarrow 0 \Rightarrow |G_1(s)| \rightarrow +\infty \iff s \rightarrow p_i, \quad i = 1, \dots, n$$

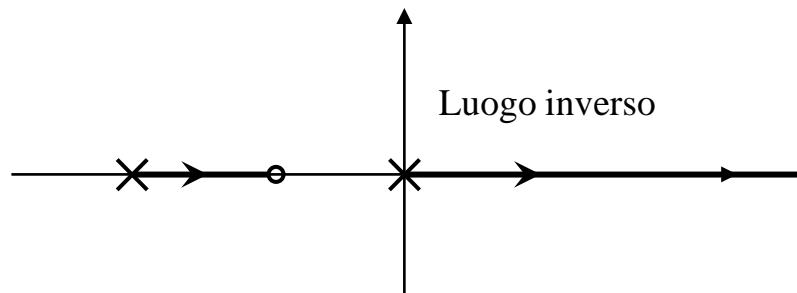
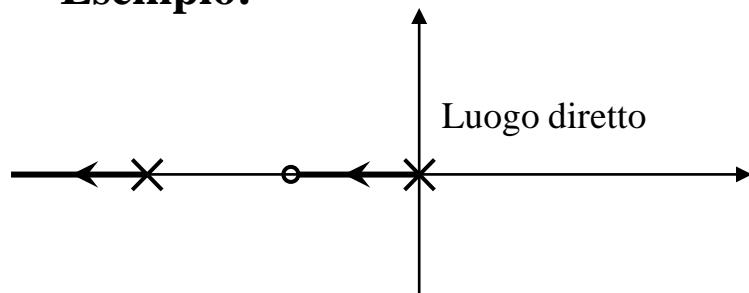
$$|K_1| \rightarrow +\infty \Rightarrow |G_1(s)| \rightarrow 0 \iff s \rightarrow z_i, \quad i = 1, \dots, m \quad \text{oppure} \quad |s| \rightarrow +\infty \quad \square$$

**Proprietà 2:** Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.

Dim.: Le radici complesse di un'eq. polinomiale a coefficienti reali si presentano a coppie coniugate.

**Proprietà 3:** Nel luogo delle radici diretto ( $K_1 > 0$ ) un punto dell'asse reale fa parte del luogo se si lascia alla sua destra un numero totale *dispari* di zeri e poli di  $G_1(s)$ . Nel luogo delle radici inverso ( $K_1 < 0$ ) un punto dell'asse reale fa parte del luogo se si lascia alla sua destra un numero totale *pari* di zeri e poli di  $G_1(s)$ .

**Esempio:**



**Dim.:** Eq. del luogo diretto:  $\arg G_1(s) = \pi \pmod{2\pi} \quad s \in \mathbb{R}$

$$\arg \frac{z(s)}{p(s)} = \pi \pmod{2\pi} \quad \arg \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)} = \pi \pmod{2\pi}$$

zeri:  $z_1, z_2, \dots, z_q$  reali  $z_{q+1}, z_{q+2}, \dots, z_m$  complessi coniugati

poli:  $p_1, p_2, \dots, p_r$  reali  $p_{r+1}, p_{r+2}, \dots, p_n$  complessi coniugati

$$\arg \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_q)}{(s - p_1) \cdots (s - p_r)} = \pi \pmod{2\pi}$$

$$\arg(s - z_1) + \cdots + \arg(s - z_q) - \arg(s - p_1) - \cdots - \arg(s - p_r) = \pi \pmod{2\pi}$$

$$\begin{array}{c} s \\ \xrightarrow{\hspace{1cm}} \end{array} \quad \begin{array}{c} z_i \\ \circ \xrightarrow{\hspace{1cm}} \end{array} \quad \arg(s - z_i) = \pi$$
  

$$\begin{array}{c} z_i \\ \circ \xleftarrow{\hspace{1cm}} s \end{array} \quad \arg(s - z_i) = 0$$

$$\begin{array}{c} s \\ \xrightarrow{\hspace{1cm}} \end{array} \quad \begin{array}{c} p_i \\ \times \xrightarrow{\hspace{1cm}} \end{array} \quad \arg(s - p_i) = \pi$$
  

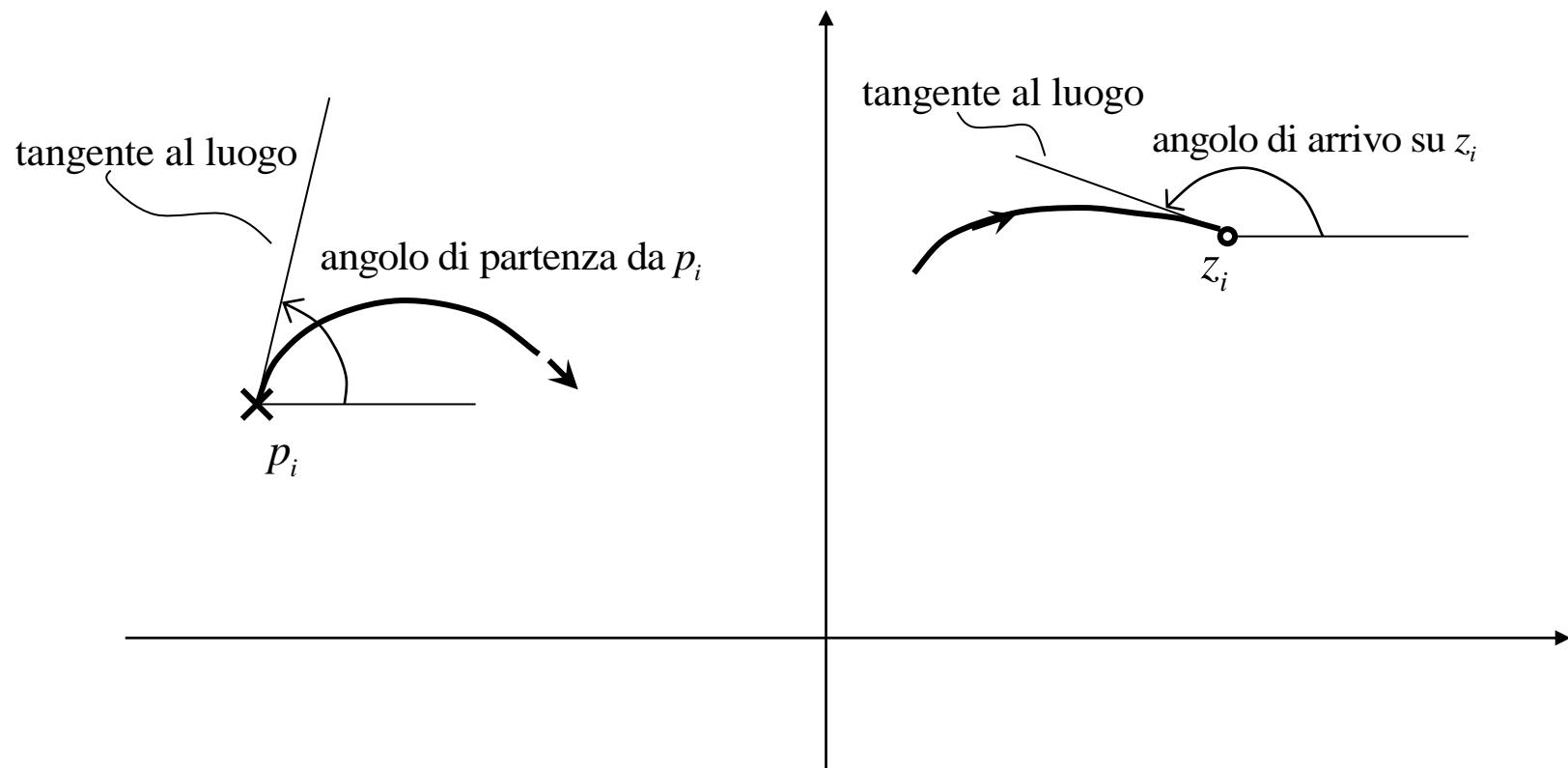
$$\begin{array}{c} p_i \\ \times \xleftarrow{\hspace{1cm}} s \end{array} \quad \arg(s - p_i) = 0$$

Il numero totale di zeri e poli **reali** a destra di  $s$  è dispari.

$\Leftrightarrow$  Il numero totale di zeri e poli (reali o complessi) a destra di  $s$  è dispari.

□

# Angoli di partenza e di arrivo nel luogo



**Proprietà 4:** Nel luogo delle radici diretto ( $K_1 > 0$ ) l'angolo di partenza da un polo  $p_i$  semplice è dato dalla relazione:

$$\{\text{ang. di partenza da } p_i\} = \pi + \sum_{j=1}^m \arg(p_i - z_j) - \sum_{j \neq i} \arg(p_i - p_j)$$

l'angolo di arrivo sullo zero  $z_i$  semplice è dato da

$$\{\text{ang. di arrivo su } z_i\} = \pi + \sum_{j=1}^n \arg(z_i - p_j) - \sum_{j \neq i} \arg(z_i - z_j)$$

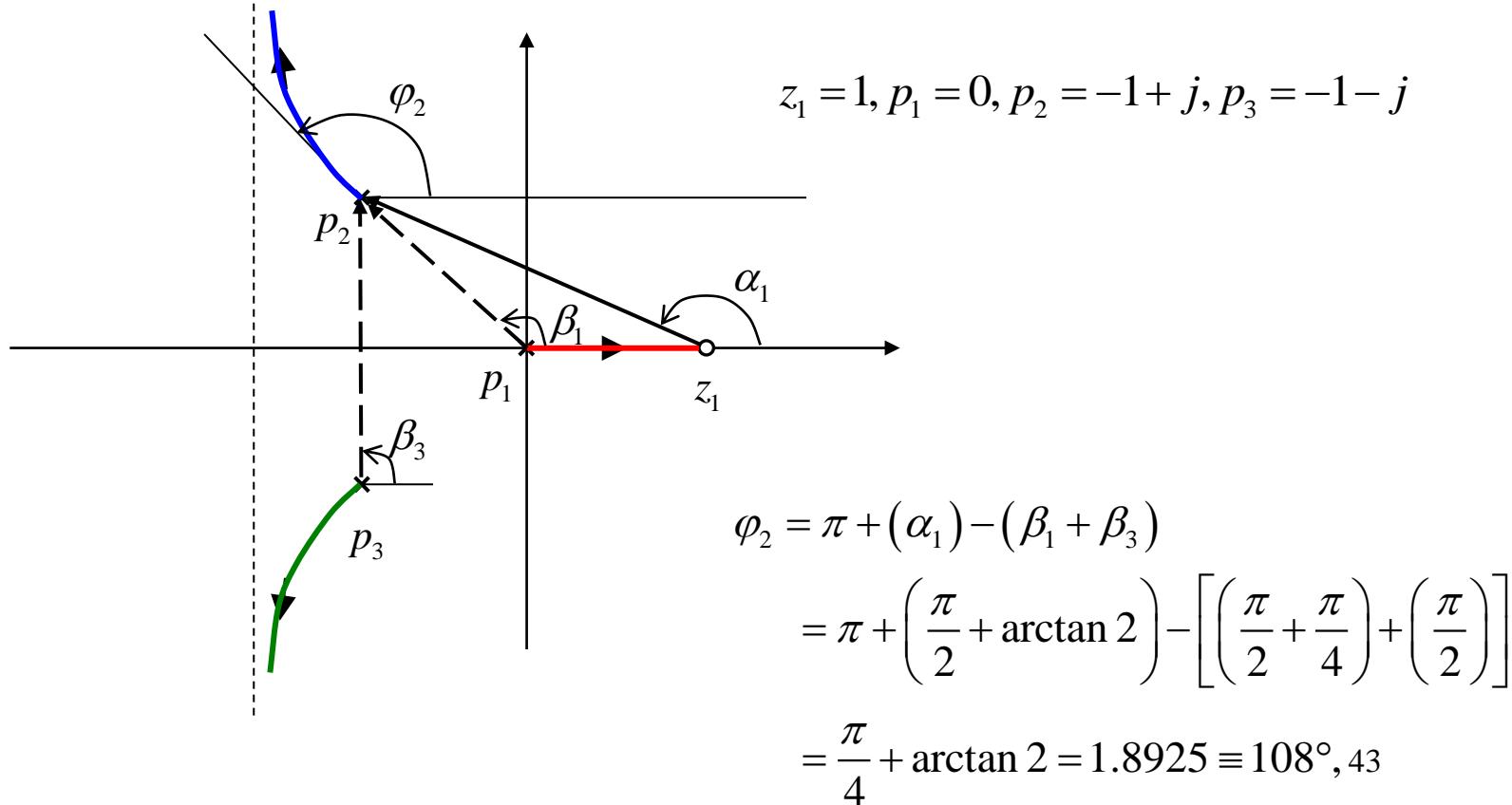
Se il luogo delle radici è inverso ( $K_1 < 0$ ) nelle relazioni si sostituisce 0 a  $\pi$ .

**Dim.** (cenno): Determinazione dell'angolo di p. da  $p_i$  ( $\varphi_i$ )

Si impone il cambio di variabile  $s = p_i + \rho e^{j\varphi_i}$ ,  $\rho \rightarrow 0+$

Quindi si valuta al limite la relazione  $\arg G_1(s) = \pi \bmod 2\pi \dots$

**Esempio:**  $1 + K_1 \frac{s-1}{s[(s+1)^2 + 1]} = 0, \quad K_1 > 0$



## Nota sulla Proprietà 4 [luogo diretto]

Se il polo  $p_i$  è multiplo con molteplicità  $h > 1$  gli  $h$  angoli di partenza  $\varphi_i$  da  $p_i$  si determinano con la congruenza:

$$h\varphi_i = \pi + \sum_{j=1}^m \arg(p_i - z_j) - \sum_{j \neq i} \arg(p_i - p_j) \mod 2\pi$$

Se lo zero  $z_i$  è multiplo con molteplicità  $h > 1$  gli  $h$  angoli di arrivo  $\psi_i$  su  $z_i$  si determinano con la congruenza:

$$h\psi_i = \pi + \sum_{j=1}^n \arg(z_i - p_j) - \sum_{j \neq i} \arg(z_i - z_j) \mod 2\pi$$

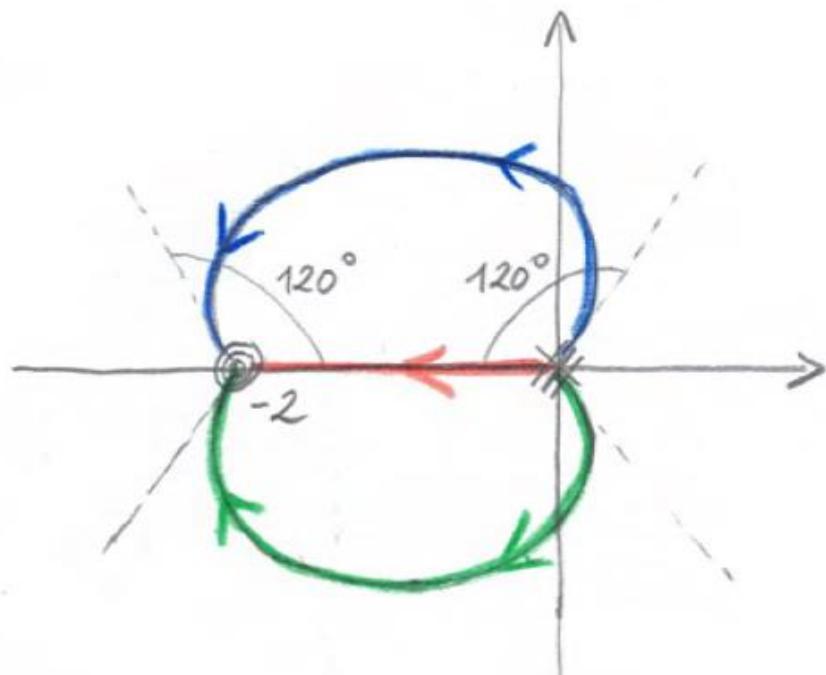
**Esempio:**  $h = 2$ ,  $2\varphi_1 = \frac{\pi}{4} \mod 2\pi$

soluzione: 
$$\begin{cases} 2\varphi_{1,a} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \varphi_{1,a} = \frac{\pi}{8} \\ 2\varphi_{1,b} = \frac{\pi}{4} + 2\pi \Rightarrow \varphi_{1,b} = \frac{\pi}{8} + \pi \end{cases}$$

## Corollario (tangenti al luogo su polo o zero con molteplicità)

Le tangenti al luogo su di un polo (zero) con molteplicità  $h$  suddividono lo spazio circostante in settori uguali di  $2\pi/h$  radianti.

Esempio:  $1 + K_1 \frac{(s+2)^3}{s^3} = 0, \quad K_1 > 0$



Il luogo delle radici

**Proprietà 5:** Una radice del luogo di molteplicità  $h$  corrisponde a un punto comune ad  $h$  rami in cui oltre all'eq.  $1 + K_1 G_1(s) = 0$  sono soddisfatte le relazioni  $D^i G_1(s) = 0$ ,  $i = 1, \dots, h - 1$ .

**Dim.:**

Sia  $p_{Ci}$  una radice del luogo di molteplicità  $h$ :

$$\exists K_1 \in \mathbb{R} \quad \exists \quad 1 + K_1 G_1(s) = (s - p_{Ci})^h f(s), \quad f(p_{Ci}) \neq 0$$

$$\Rightarrow D^i (1 + K_1 G_1(s)) \Big|_{s=p_{Ci}} = 0, \quad i = 1, \dots, h-1$$

$$\Rightarrow D^i G_1(s) \Big|_{s=p_{Ci}} = 0, \quad i = 1, \dots, h-1 \quad \square$$

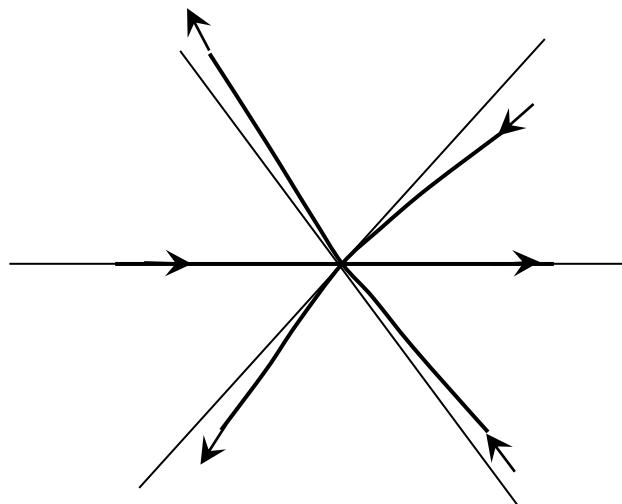
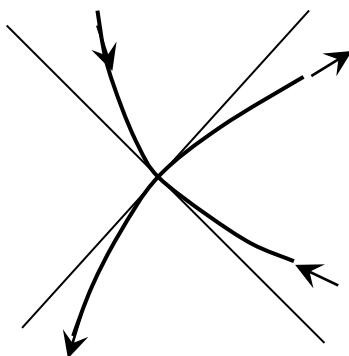
## Corollario

Una radice doppia del luogo soddisfa l'equazione:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{s - p_i} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{s - z_i} = 0$$

**Proprietà 6:** In corrispondenza di una radice di molteplicità  $h$  il luogo presenta  $h$  rami entranti ed  $h$  rami uscenti, alternati fra loro, le cui tangenti suddividono lo spazio circostante in settori uguali di  $\pi/h$  radianti.

Esempi:



Dai poli di  $G_1(s)$  partono  $n$  rami, di questi  $m$  terminano sugli zeri di  $G_1(s)$ , i rimanenti  $n - m$  divergono all'infinito adagiandosi ad asintoti rettilinei.

**Proprietà 7:** Gli asintoti del luogo delle radici formano una stella di raggi con centro nel punto dell'asse reale di ascissa

$$\sigma_a = \left( \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i \right) / (n - m)$$

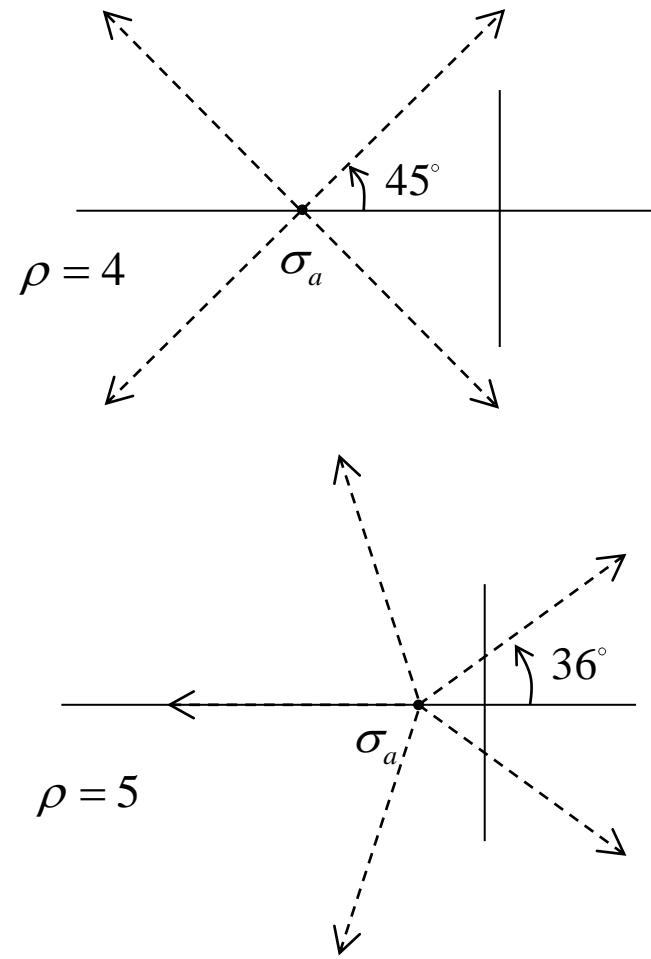
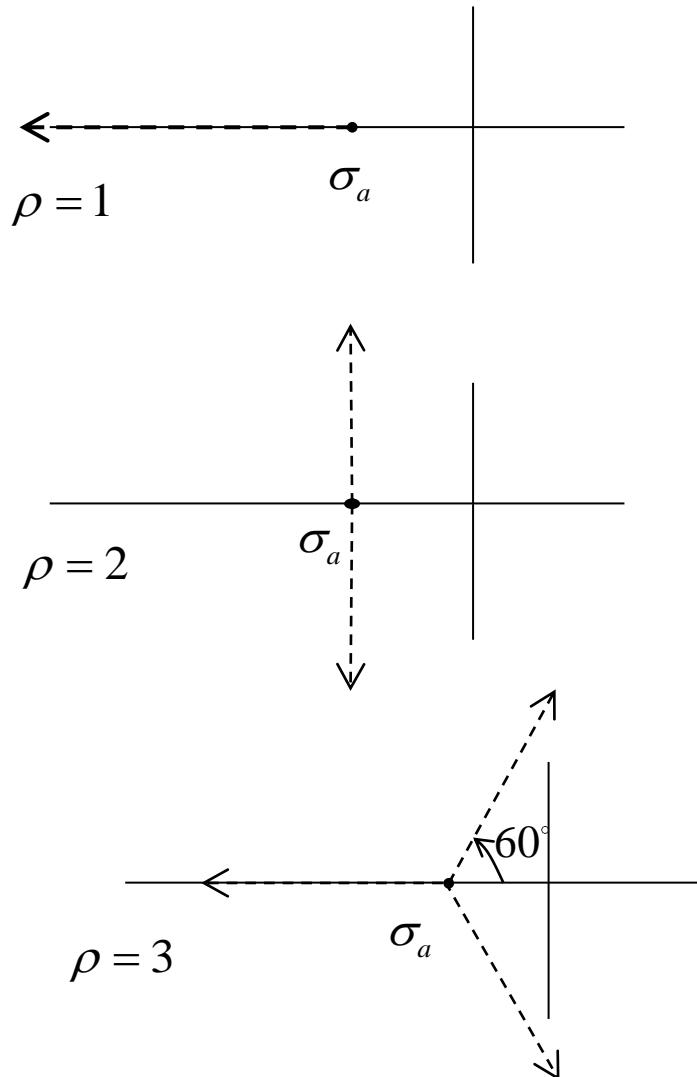
Se il luogo è diretto ( $K_1 > 0$ ) gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli:

$$\vartheta_{a,\nu} = (2\nu + 1)\pi / (n - m), \quad \nu = 0, 1, \dots, n - m - 1.$$

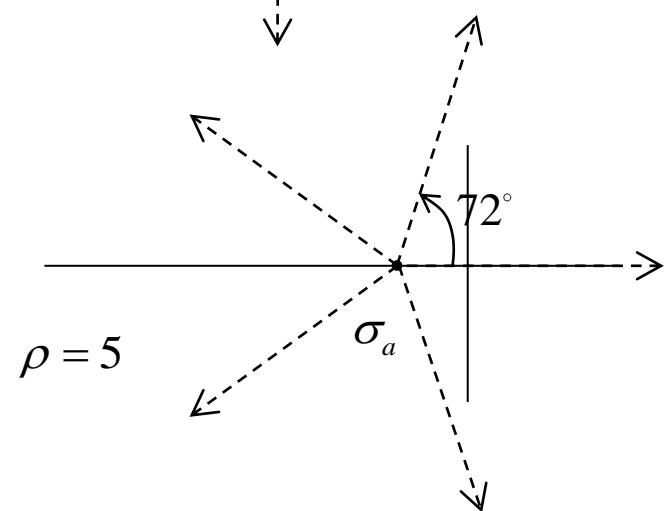
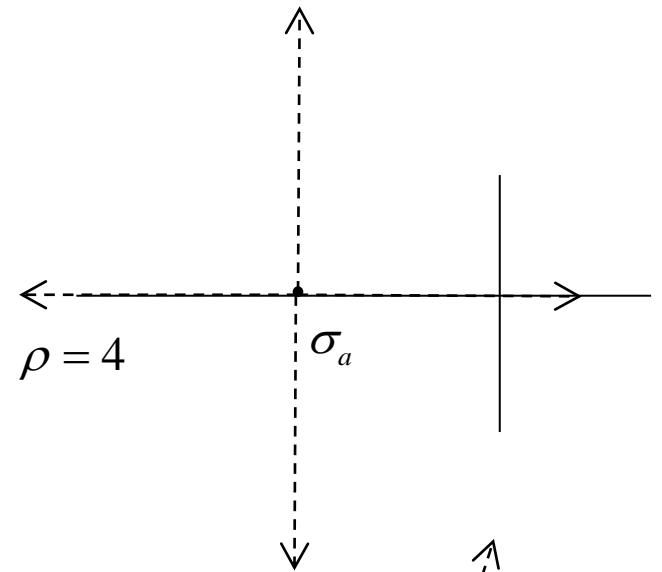
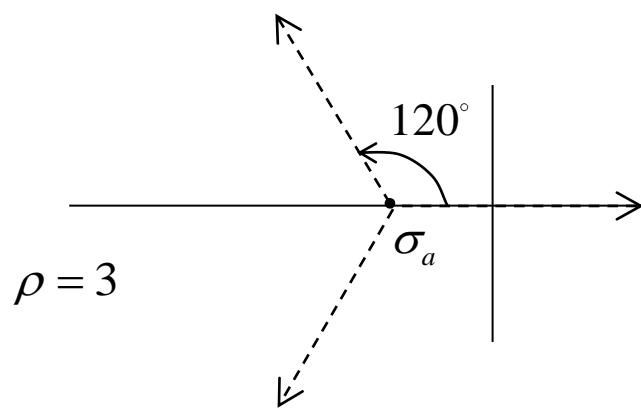
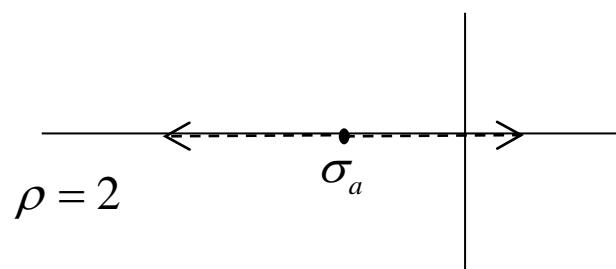
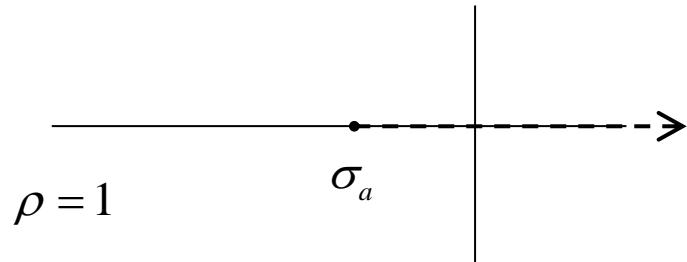
Se il luogo è inverso ( $K_1 < 0$ ) gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli:

$$\vartheta_{a,\nu} = 2\nu\pi / (n - m), \quad \nu = 0, 1, \dots, n - m - 1.$$

## Asintoti del luogo diretto ( $K_1 > 0$ )    $\rho := n - m$    (grado relativo di $G_1(s)$ )

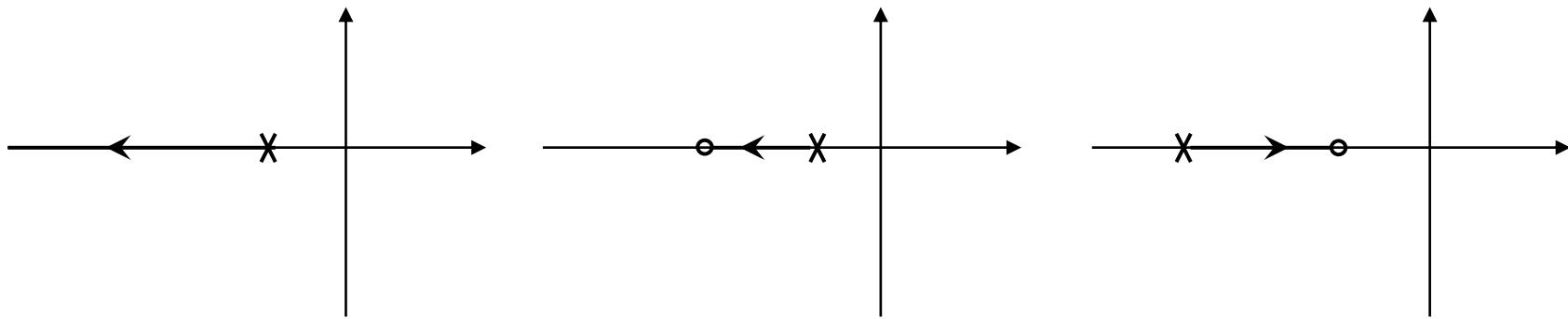


## Asintoti del luogo inverso ( $K_1 < 0$ )    $\rho := n - m$    (grado relativo di $G_1(s)$ )

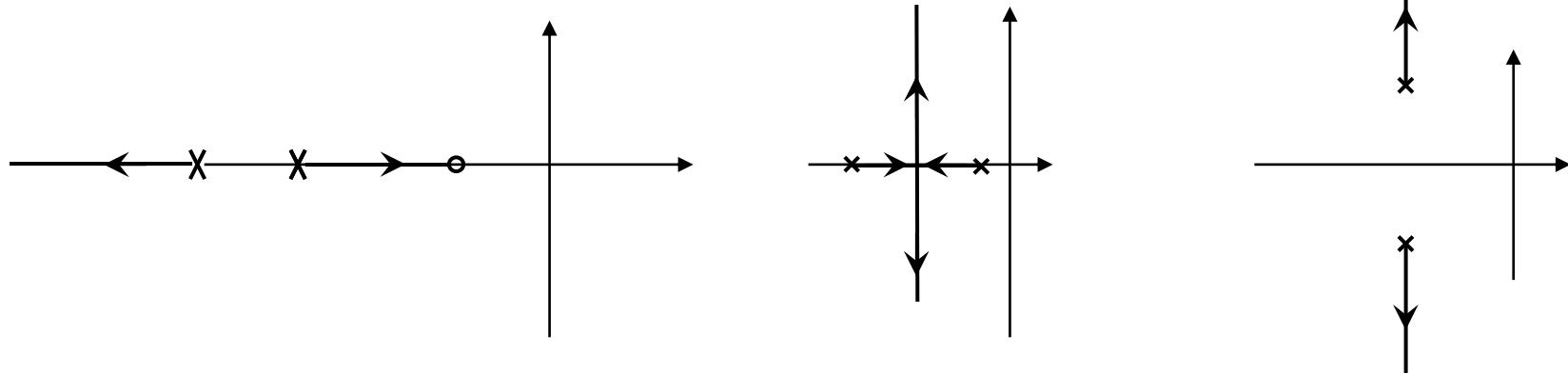


# Esempi di luoghi delle radici

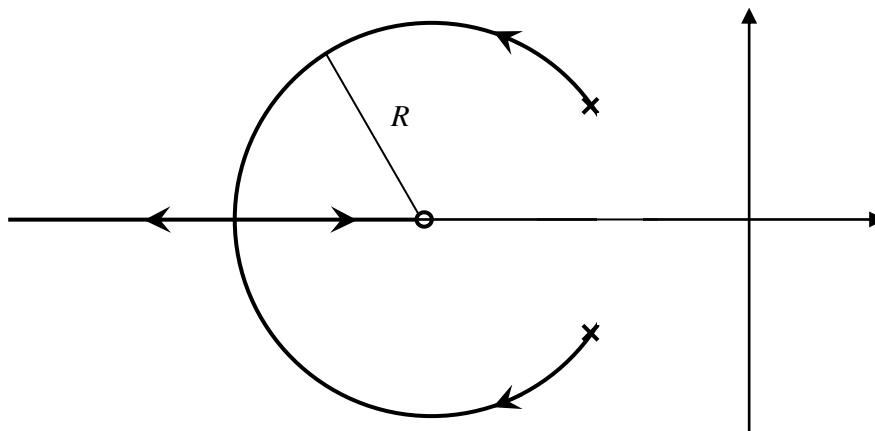
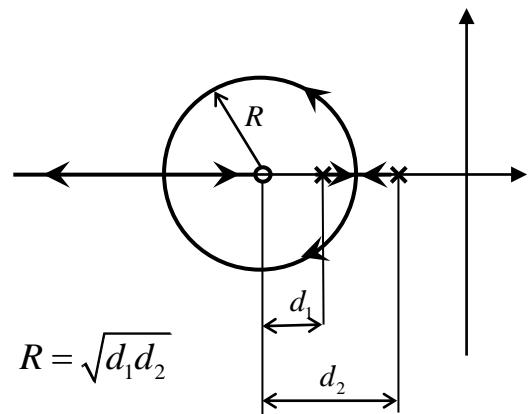
- Luoghi (diretti) del primo ordine



- Luoghi (diretti) del secondo ordine



- Luoghi (diretti) del secondo ordine



## Il contorno delle radici

- È un luogo delle radici (dell'eq. caratteristica) per variazioni di un parametro diverso dalla costante di trasferimento del guadagno di anello.
- Questa tecnica è applicabile quando l'eq. caratteristica  $1 + L(s; p) = 0$  con  $p$  parametro variante è riconducibile all'eq. caratteristica standard  $1 + K_1 G_1(s) = 0$  con  $K_1 = K_1(p)$  funzione biunivoca di  $p$ .

## Esempio (contorno delle radici per variazioni di un polo):

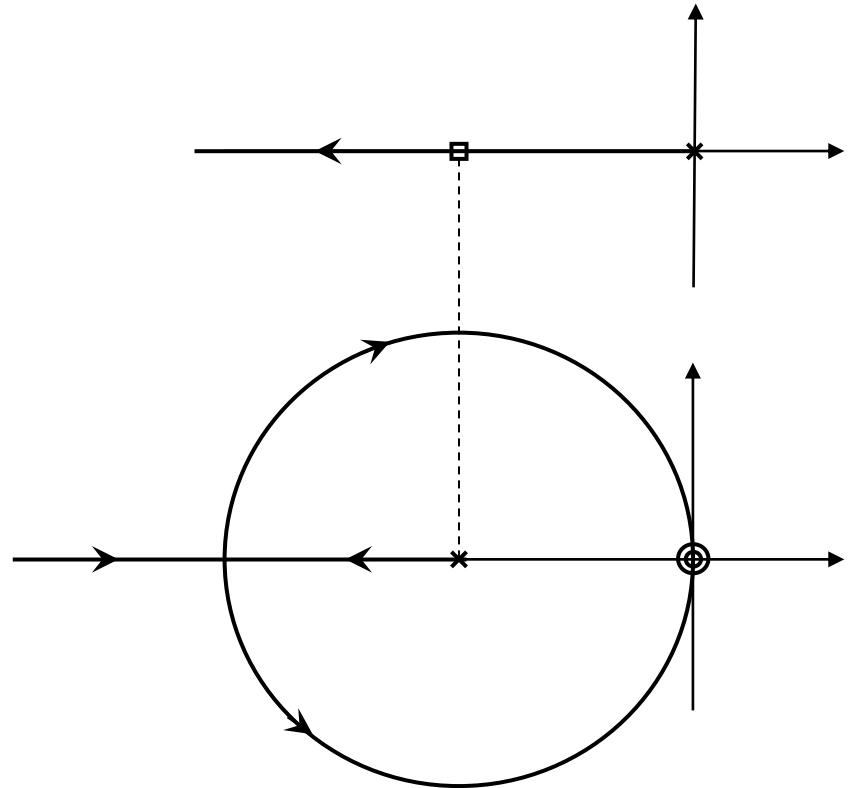
$$L(s; \tau) = \frac{K_0}{s(1 + \tau s)}$$

$$\text{per } \tau = 0 \quad 1 + \frac{K}{s} = 0$$

$$\text{per } \tau > 0 \quad 1 + \frac{K_0}{s(1 + \tau s)} = 0$$

$$s + \tau s^2 + K_0 = 0$$

$$1 + \tau \frac{s^2}{s + K_0} = 0$$



L'eq. caratteristica  $1 + L(s; p) = 0$  è riconducibile alla forma standard quando trasformata in equazione polinomiale i suoi coefficienti sono funzioni affini del parametro  $p$ .

**Esempio:**

$$1 + \frac{s + 5p}{s(s + 3p)} = 0 \quad p > 0$$

$$s^2 + 3ps + s + 5p = 0$$

$$1 + \frac{p(3s + 5)}{s^2 + s} = 0$$

$$1 + 3p \frac{s + \frac{5}{3}}{s(s + 1)} = 0$$

# Complementi

$$1 + K_1 \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = 0 \quad 1 + K_1 G_1(s; z_1, \dots, z_m) = 0$$

$\{p_{C1}, p_{C2}, \dots, p_{Cn}\}$  siano le radici dell'eq. caratteristica

$$p_{Ci} \equiv p_{Ci}(K_1; z_1, \dots, z_m)$$

## Teorema del baricentro del luogo delle radici

Se il guadagno di anello ha grado relativo  $\rho \geq 2$  vale la relazione:

$$\sum_{i=1}^n p_{Ci} = \sum_{i=1}^n p_i \quad \forall K_1 \in \mathbb{R} \text{ e } \forall z_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, m.$$

**Dim.:** (si ricorda che  $\rho = n - m$  )

$$1 + K_1 \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)} = 0$$

$$1 + K_1 \frac{\beta_{n-2}s^{n-2} + \beta_{n-3}s^{n-3} + \cdots}{s^n - \sum_{i=1}^n p_i s^{n-1} + \alpha_{n-2}s^{n-2} + \cdots} = 0, \quad \beta_{n-2} = \begin{cases} 0 & \text{se } \rho > 2 \\ 1 & \text{se } \rho = 2 \end{cases}$$

$$s^n + \left( -\sum_{i=1}^n p_i \right) s^{n-1} + \alpha_{n-2}s^{n-2} + \cdots + K_1 \beta_{n-2}s^{n-2} + K_1 \beta_{n-3}s^{n-3} + \cdots = 0$$

$$s^n + \left( -\sum_{i=1}^n p_i \right) s^{n-1} + (\alpha_{n-2} + K_1 \beta_{n-2}) s^{n-2} + \cdots = (s - p_{C1})(s - p_{C2}) \cdots (s - p_{Cn})$$

$$s^n + \left( -\sum_{i=1}^n p_i \right) s^{n-1} + (\alpha_{n-2} + K_1 \beta_{n-2}) s^{n-2} + \cdots = s^n + \left( -\sum_{i=1}^n p_{Ci} \right) s^{n-1} + \cdots$$

dal principio di identità dei polinomi  $\Rightarrow -\sum_{i=1}^n p_i = -\sum_{i=1}^n p_{Ci}$

□

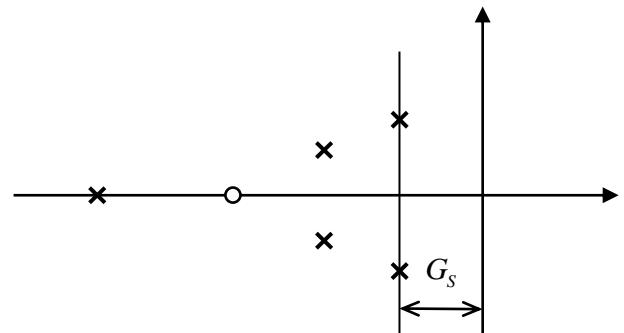
## Grado di stabilità

Sia dato un sistema  $\Sigma$  asintoticamente stabile ( $\operatorname{Re} p_i < 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  ; dove i  $p_i$  sono i poli di  $\Sigma$  ):

**Def.:** Si definisce **grado di stabilità** di  $\Sigma$  (nel piano complesso)

$$G_s := -\max \{\operatorname{Re} p_1, \operatorname{Re} p_2, \dots, \operatorname{Re} p_n\}$$

È la distanza minima dei poli di  $\Sigma$  dall'asse immaginario.



Nell'ipotesi che fra i poli di  $\Sigma$  esista una coppia dominante vale

$$\text{approssimativamente: } T_a \approx \frac{3}{G_s}$$

## Punti salienti della lezione:

- Le 7 proprietà per il tracciamento del luogo
- L'equazione per calcolare le radici doppie del luogo
- La regola per il tracciamento dell'arco di circonferenza nei luoghi del secondo ordine
- Riscrittura dell'equazione caratteristica per tracciare il contorno del luogo
- Il teorema del baricentro
- Il grado di stabilità di un sistema dinamico

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle  
Telecomunicazioni

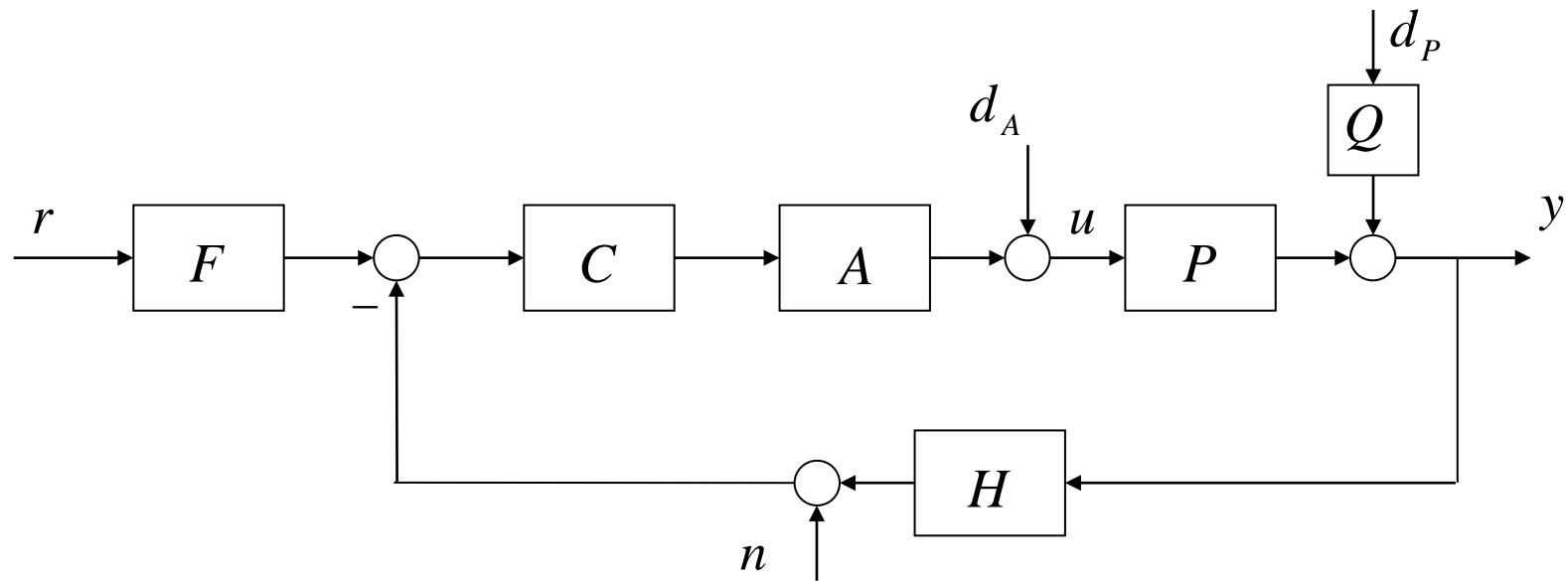
**Lezione n. 14 di Fondamenti di Controlli Automatici**  
**prof. Aurelio Piazzì**

**Il progetto di un sistema di controllo  
in retroazione – Parte I**

Università degli Studi di Parma – a.a. 2020-2021

- Il progetto di un sistema di controllo in retroazione
- La sintesi con controllori di struttura prefissata
- La rete ritardatrice
- La rete anticipatrice

# Struttura di un sistema di controllo in retroazione a singolo anello



I requisiti per il sistema di controllo riguardano:

0. **Buona connessione;**
1. **Stabilità asintotica interna;**
2. **Prestazioni statiche e/o asintotiche;**
3. **Prestazioni dinamiche;**
4. **Robustezza.**

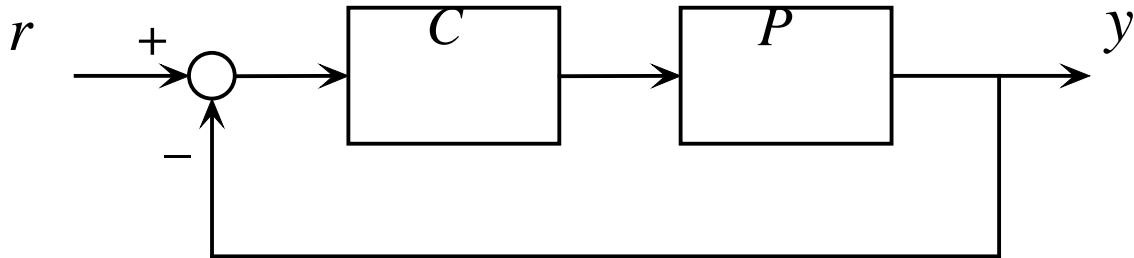
I requisiti vengono imposti mediante le **specifiche di progetto**. Lo studio della compatibilità di queste è un aspetto imprescindibile del progetto.

**Esempi:**  $M_A \geq 3$ ,  $M_F \geq 40^\circ$ ,

$e_r \leq 0,05$  ( in risposta a  $1(t)$  ),  $T_A \leq 0,2$  s ,  $S \leq 20\%$

$|T_{d_{py}}(j\omega)| \leq \bar{T}_{d_{py}}$   $\forall \omega \in [\omega_1, \omega_2]$   $|u(t)| \leq u_{\max}$

$\max M_F$ ,  $\min T_A$



## Proprietà

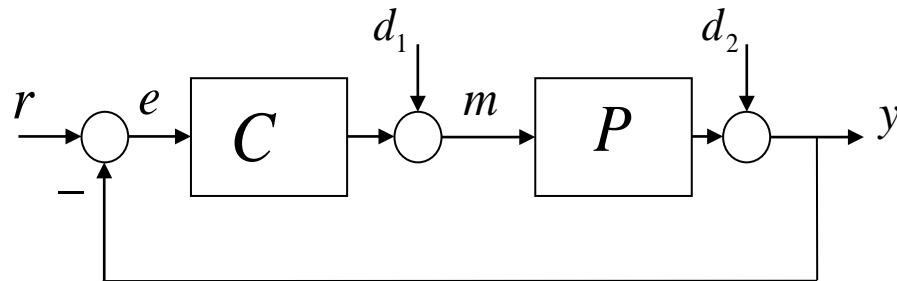
Sia  $P(s)$  strettamente propria e  $C(s)$  propria. Allora il sistema retroazionato è ben connesso.

**Dim.:**

Sia  $L(s) := C(s)P(s)$  il guadagno di anello.

$$\lim_{|s| \rightarrow +\infty} 1 + L(s) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{|s| \rightarrow +\infty} 1 + L(s) \neq 0 \text{ (sistema retroazionato ben connesso)} \quad \square$$



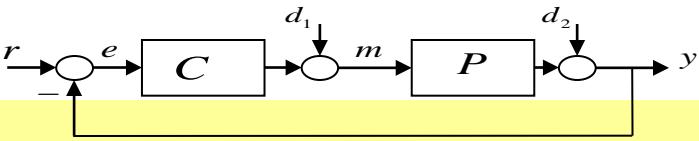
## Def. (Stabilità asintotica interna)

Il sistema retroazionato di figura è **asintoticamente ed internamente stabile** quando tutte le f.d.t. fra gli ingressi  $\{r, d_1, d_2\}$  e le uscite  $\{e, m, y\}$  sono asintoticamente stabili.

**Esempio:**  $C(s) = \frac{s-1}{s+1}$ ,  $P(s) = \frac{1}{(s-1)(s+10)}$

$$T_{ry}(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+10)+1} \text{ è asintoticamente stabile}$$

$$T_{d_1y}(s) = \frac{P(s)}{1 + C(s)P(s)} = \frac{\frac{1}{(s-1)(s+10)}}{1 + \frac{s-1}{s+1} \cdot \frac{1}{(s-1)(s+10)}} = \frac{s+1}{(s-1)[(s+1)(s+10)+1]} \text{ è instabile}$$



## Proprietà

Il sistema retroazionato è stabile asintoticamente ed internamente se e solo se:

1. le radici dell'eq.  $1 + L(s) = 0$  sono tutte a parte reale negativa;
2. le eventuali cancellazioni polo-zero fra  $C(s)$  e  $P(s)$  avvengono in  $\mathbb{C}_-$ .

**Dim.**

$$\begin{bmatrix} E \\ M \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+CP} & -\frac{P}{1+CP} & -\frac{1}{1+CP} \\ \frac{C}{1+CP} & \frac{1}{1+CP} & -\frac{C}{1+CP} \\ \frac{CP}{1+CP} & \frac{P}{1+CP} & \frac{1}{1+CP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}, \quad C(s) = \frac{y(s)(s-\beta)}{x(s)(s-\alpha)}, \quad P(s) = \frac{b(s)(s-\alpha)}{a(s)(s-\beta)}$$

$$\frac{1}{1+CP} = \frac{1}{1 + \frac{y(s)}{x(s)} \cdot \frac{b(s)}{a(s)}} = \frac{x(s)a(s)}{x(s)a(s) + y(s)b(s)}, \quad \frac{CP}{1+CP} = \frac{y(s)b(s)}{x(s)a(s) + y(s)b(s)},$$

$$\frac{P}{1+CP} = \frac{\frac{b(s)(s-\alpha)}{\cancel{a(s)}(s-\beta)}}{\frac{x(s)a(s) + y(s)b(s)}{x(s)\cancel{a(s)}}} = \frac{b(s)(s-\alpha)x(s)}{(s-\beta)(x(s)a(s) + y(s)b(s))}, \quad (\text{cont.})$$

$$C(s) = \frac{y(s)(s - \beta)}{x(s)(s - \alpha)}, \quad P(s) = \frac{b(s)(s - \alpha)}{a(s)(s - \beta)}$$

**Dim.** (cont.)

$$\frac{\cancel{C}}{1+CP} = \frac{\frac{y(s)(s - \beta)}{\cancel{x(s)}(s - \alpha)}}{\frac{x(s)a(s) + y(s)b(s)}{\cancel{x(s)}a(s)}} = \frac{y(s)(s - \beta)a(s)}{(s - \alpha)(x(s)a(s) + y(s)b(s))}$$

$$1 + L(s) = 0 \Leftrightarrow x(s)a(s) + y(s)b(s) = 0$$

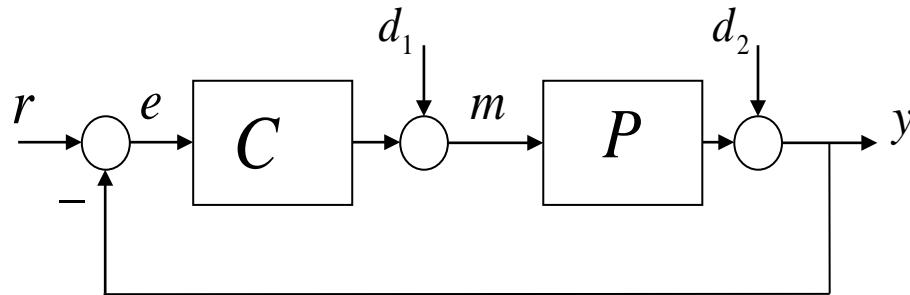
**necessità :**

$$\left\{ \frac{1}{1+CP}, \frac{CP}{1+CP}, \frac{P}{1+CP}, \frac{C}{1+CP} \text{ asint. stabili} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{1. } 1 + L(s) = 0 \text{ ha radici } s \text{ con } \operatorname{Re}(s) < 0 \\ \text{2. le cancellazioni avvengono in } \mathbb{C}_- \end{cases}$$

**sufficienza :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{1. } 1 + L(s) = 0 \text{ ha radici } s \text{ con } \operatorname{Re}(s) < 0 \\ \text{2. le cancellazioni avvengono in } \mathbb{C}_- \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \frac{1}{1+CP}, \frac{CP}{1+CP}, \frac{P}{1+CP}, \frac{C}{1+CP} \text{ asint. stabili} \right\}$$

□



$$T_{re}(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad \text{funzione di sensitività} \quad (\text{spesso indicata con } S)$$

$$T := 1 - S \quad \text{funzione di sensitività complementare} \quad \Rightarrow \quad T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

$$\text{Si noti che } T_{ry}(s) = T(s)$$

Spesso nei progetti con prevalenti specifiche in frequenza vengono imposti disgiuntamente vincoli su  $S$  e  $T$  ovvero su  $S(j\omega)$  e  $T(j\omega)$ . Quando questo accade un problema di compatibilità emerge in quanto deve valere

$$S(j\omega) + T(j\omega) = 1 \quad \forall \omega$$

# La sintesi con controllori di struttura prefissata

Nella letteratura tecnica c'è una moltitudine di approcci e metodi per la sintesi di controllori. La natura introduttiva di questo corso suggerisce di seguire l'approccio con controllori di struttura prefissata o di ordine prefissato. I metodi di sintesi proposti sono di necessità vari (e spesso *ad hoc*) in quanto dipendono dalla struttura di controllore scelta e dalle specifiche assegnate.

Vantaggi: flessibilità (e semplicità).

Svantaggi: iterazioni delle procedure di sintesi.

# Controllori di ordine prefissato

Controllore di ordine zero:

$$\mathcal{C}_0 := \left\{ C \in \mathcal{R}_p : C(s) = K, K \in \mathbb{R} \right\}; \quad \mathcal{R}_p := \left\{ \text{insieme delle f. razionali proprie} \right\}$$

Controllore di ordine uno:

$$\mathcal{C}_1 := \left\{ C \in \mathcal{R}_p : C(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s + a_0}, a_0, b_0, b_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

Controllore di ordine due:

$$\mathcal{C}_2 := \left\{ C \in \mathcal{R}_p : C(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}, a_0, a_1, b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

...    ...    ...

Controllore di ordine  $n$ :

$$\mathcal{C}_n := \left\{ C \in \mathcal{R}_p : C(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R} \right\}$$

## Controllori di struttura prefissata

I controllori di struttura prefissata sono definiti mediante particolari parametrizzazioni della funzione di trasferimento del controllore.

**Esempi:**

$$\mathcal{C}_A := \left\{ C \in \mathcal{R}_p : C(s) = \gamma \frac{s + \beta}{s + \alpha}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{Si osservi } \mathcal{C}_A \neq \mathcal{C}_1 \text{ e } \mathcal{C}_A \subset \mathcal{C}_1$$

$$\mathcal{C}_B := \left\{ C \in \mathcal{R}_p : C(s) = \gamma \frac{s + \beta}{s + \alpha}, \alpha, \beta > 0, \gamma \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{Si osservi } \mathcal{C}_B \neq \mathcal{C}_A \text{ e } \mathcal{C}_B \subset \mathcal{C}_A$$

$$\mathcal{C}_C := \left\{ C \in \mathcal{R}_p : C(s) = \gamma \frac{s + \beta}{s + \alpha}, \alpha \in [10, 100], \beta \in (0, 10], \gamma > 0 \right\} \Rightarrow \mathcal{C}_C \subset \mathcal{C}_B$$

$$\mathcal{C}_D := \left\{ C \in \mathcal{R}_p : C(s) = \gamma \frac{1}{s + \alpha}, \alpha \in [10, 100], \gamma > 0 \right\} \Rightarrow \mathcal{C}_D \neq \mathcal{C}_C \text{ e } \mathcal{C}_D \cap \mathcal{C}_C = \emptyset$$

... eccetera

Fra i controllori a struttura fissa (o prefissata) si individuano due classi tradizionali:

1. **le reti correttive;**
2. **i regolatori standard.**

Le reti correttive sono i più semplici controllori utilizzati nel progetto dei sistemi di controllo. Nell'approccio tradizionale questi vengono progettati per “correggere” il comportamento dinamico dell’anello di retroazione.

I regolatori standard caratterizzati dalla combinazione delle **azioni proporzionale, derivativa e integrale** vengono implementati su dispositivi (standard) adattabili a classe estesa di applicazioni e per i quali è possibile il tuning diretto dei parametri di progetto anche in condizioni operative. Rivestono una grande importanza nell’automazione industriale con svariatissime applicazioni da quelle meccatroniche al controllo di processo.

# Le principali reti correttive

Rete integratrice:

$$C_r(s) = \frac{1}{1 + \tau s}, \quad \tau > 0$$

Rete derivatrice:

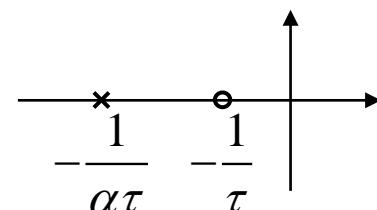
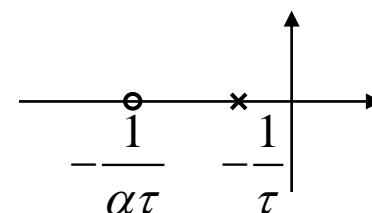
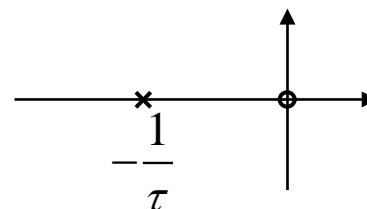
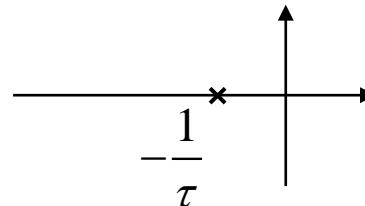
$$C_r(s) = \frac{\tau s}{1 + \tau s}, \quad \tau > 0$$

Rete ritardatrice:

$$C_r(s) = \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s}, \quad \tau > 0, \alpha \in (0,1)$$

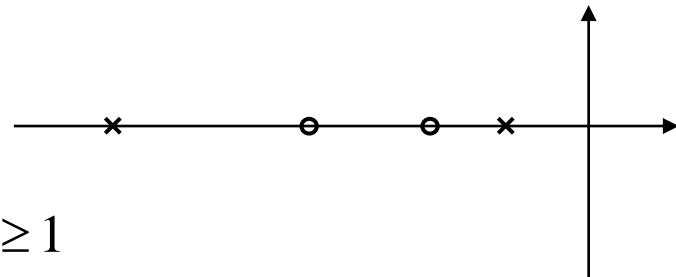
Rete anticipatrice:

$$C_r(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}, \quad \tau > 0, \alpha \in (0,1)$$



Rete a ritardo e anticipo:

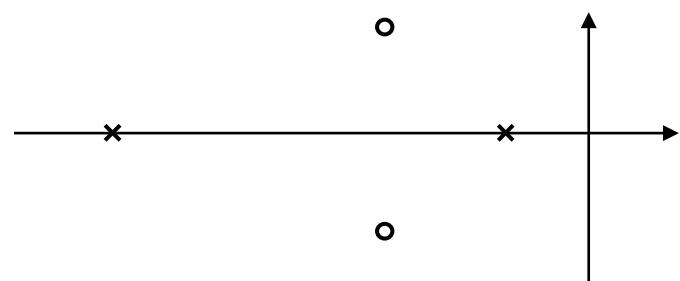
$$C_r(s) = \frac{1 + 2\delta' \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}, \quad \omega_n > 0, \quad \delta > \delta' \geq 1$$



Rete a T ponticellato:

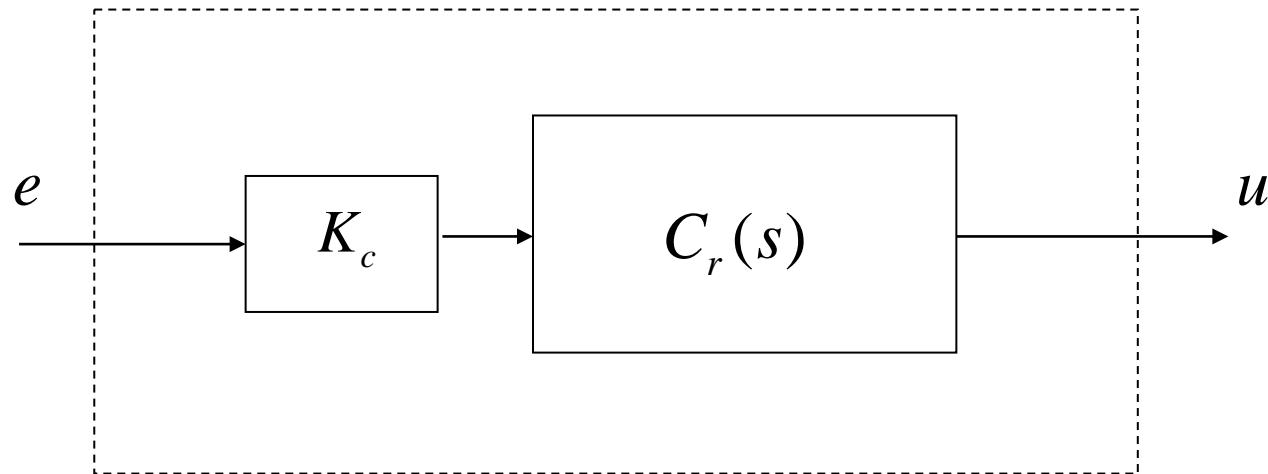
$$C_r(s) = \frac{1 + 2\delta' \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}, \quad \omega_n > 0, \quad \delta > 1, \quad \delta > \delta' > 0$$

generalmente  $\delta' \in (0,1)$



# Struttura del controllore con rete correttrice

$$C(s) = K_c C_r(s), \quad K_c \in \mathbb{R}$$



# I regolatori standard

Regolatore **proporzionale** (P):

$$R(s) = K_p$$

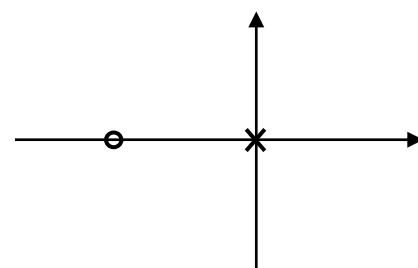
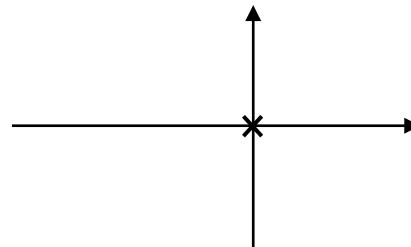
Regolatore **integrale** (I):

$$R(s) = \frac{K_p}{T_i s}$$

Regolatore **proporzionale-integrale** (PI):

$$R(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right) =$$

$$= K_p \cdot \frac{1 + T_i s}{T_i s}$$



Regolatore **proporzionale-derivativo** (PD):

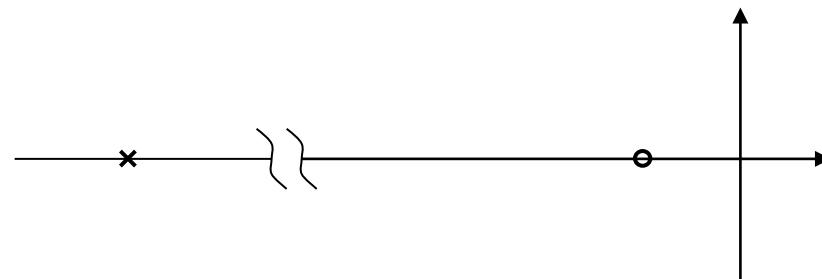
$$R(s) = K_p (1 + T_d s)$$

in realtà

$$R(s) = K_p \left( 1 + \frac{T_d s}{1 + \tau s} \right) \quad \text{dove } \tau \ll T_d$$

$$R(s) = K_p \cdot \frac{1 + \tau s + T_d s}{1 + \tau s} \cong K_p \cdot \frac{1 + T_d s}{1 + \tau s}$$

è sostanzialmente una rete anticipatrice ...



## Regolatore **proporzionale-integrale-derivativo** (PID):

$$R(s) = K_p \left( 1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right)$$

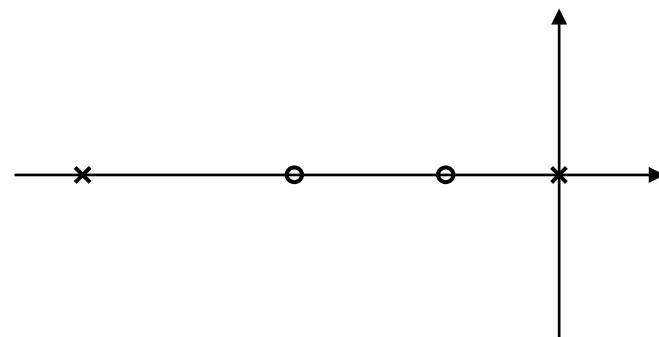
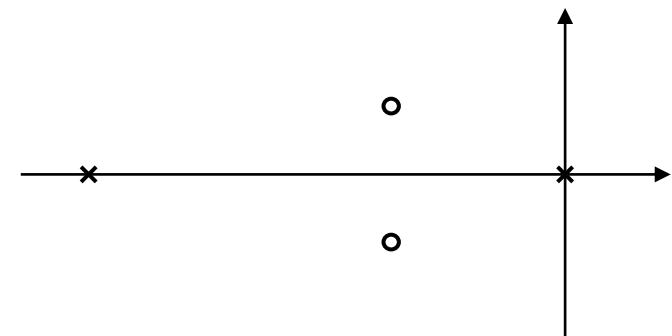
in realtà

$$R(s) = K_p \left( 1 + \frac{T_d s}{1 + \tau s} + \frac{1}{T_i s} \right) \quad \text{dove } \tau \ll T_d$$

$$R(s) = K_p \cdot \frac{(\tau + T_d)T_i s^2 + (\tau + T_i)s + 1}{T_i s(1 + \tau s)}$$

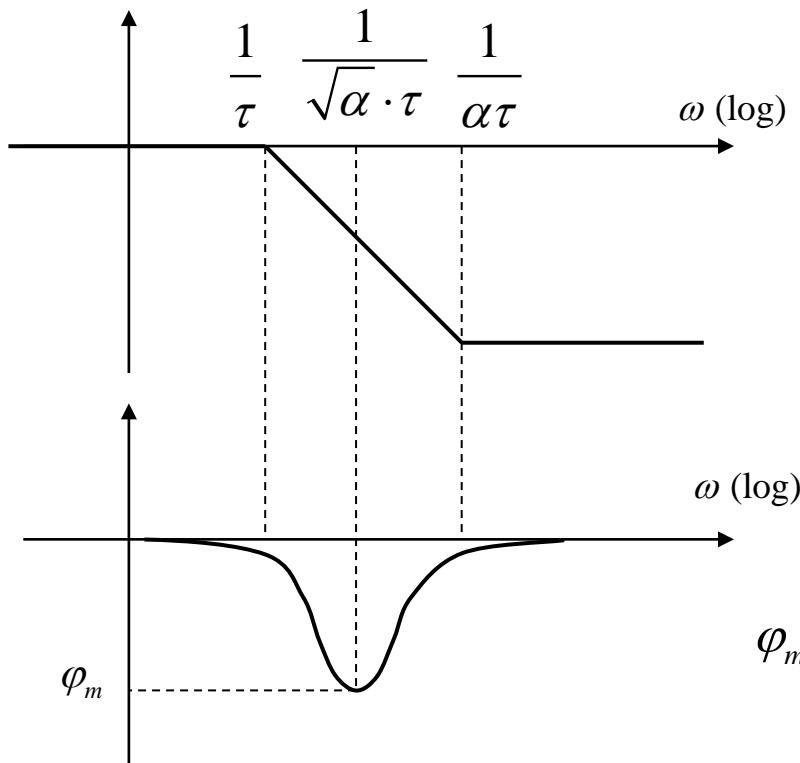
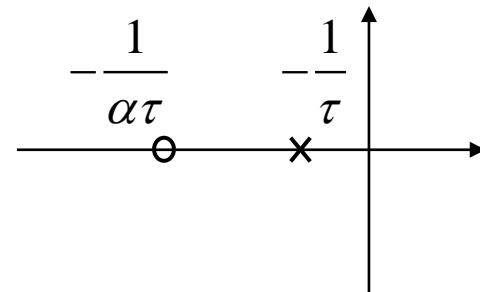
$$\cong K_p \cdot \frac{T_d T_i s^2 + T_i s + 1}{T_i s(1 + \tau s)}$$

Possiamo assegnare arbitrariamente  
zeri e costante di trasferimento di  $R(s)$



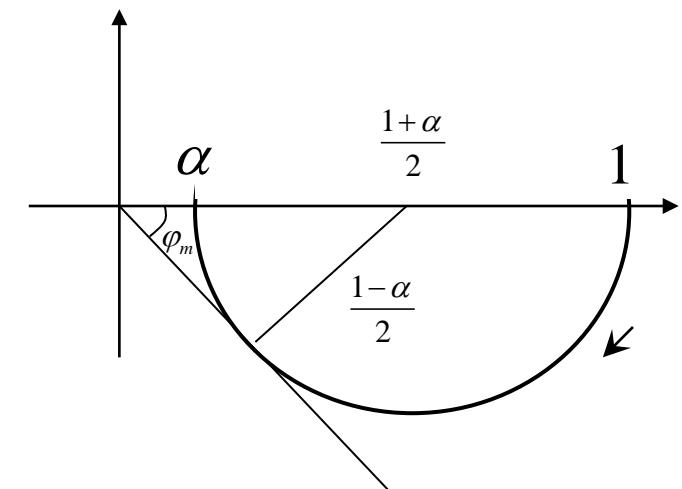
# La rete ritardatrice

$$C_r(s) = \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s}; \quad C_r(j\omega) = \frac{1 + \alpha \tau j\omega}{1 + \tau j\omega}$$



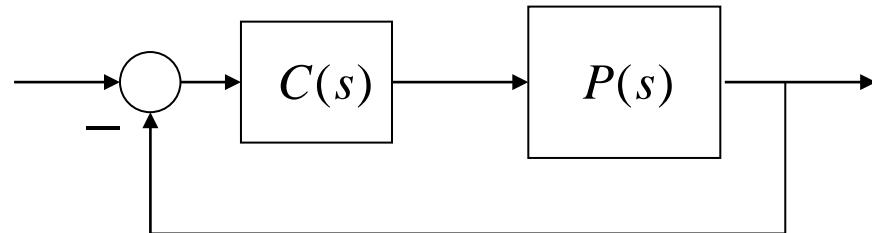
$$\varphi_m = -\arcsin \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

$$\varphi_m = \arg C_r(j\omega_m) \quad \text{dove} \quad \omega_m := \frac{1}{\sqrt{\alpha \cdot \tau}}$$



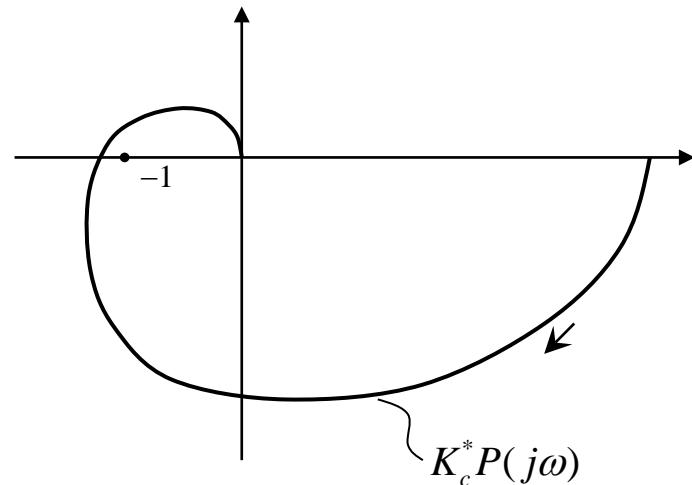
## Azione compensatrice della rete ritardatrice

Sia  $P(s)$  asint. stabile e a fase minima.



1° fase: Scegliamo un controllore proporzionale  $C(s) = K_c > 0$

Progettiamo  $K_c > 0$  al fine di assicurare una specifica di precisione. Sia  $C(s) = K_c^*$  ed il guadagno di anello abbia il diagramma polare di figura: il sistema retroazionato risulta instabile.

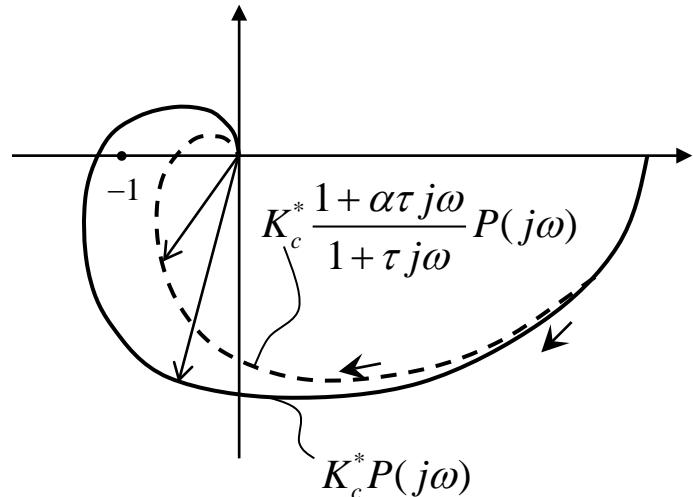


$$2^{\circ} \text{ fase: Scegliamo } C(s) = K_c^* C_r(s) = K_c^* \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s}$$

Progettiamo  $\alpha$  e  $\tau$  per assicurare la stabilità asintotica con un buon margine di ampiezza e/o di fase.

Metodi di progetto della rete rit.:

1. grafici (obsoleti);
2. per tentativi o metodi *ad hoc*;
3. con le formule di inversione.

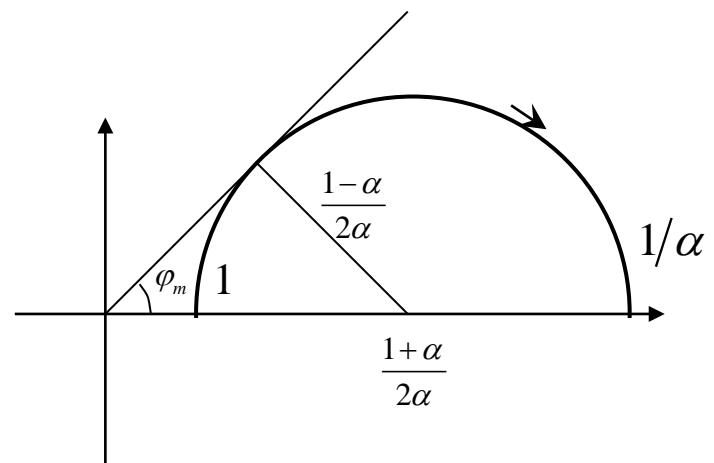
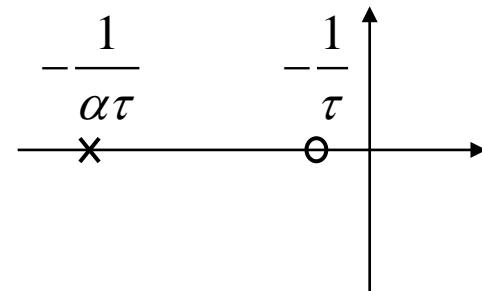
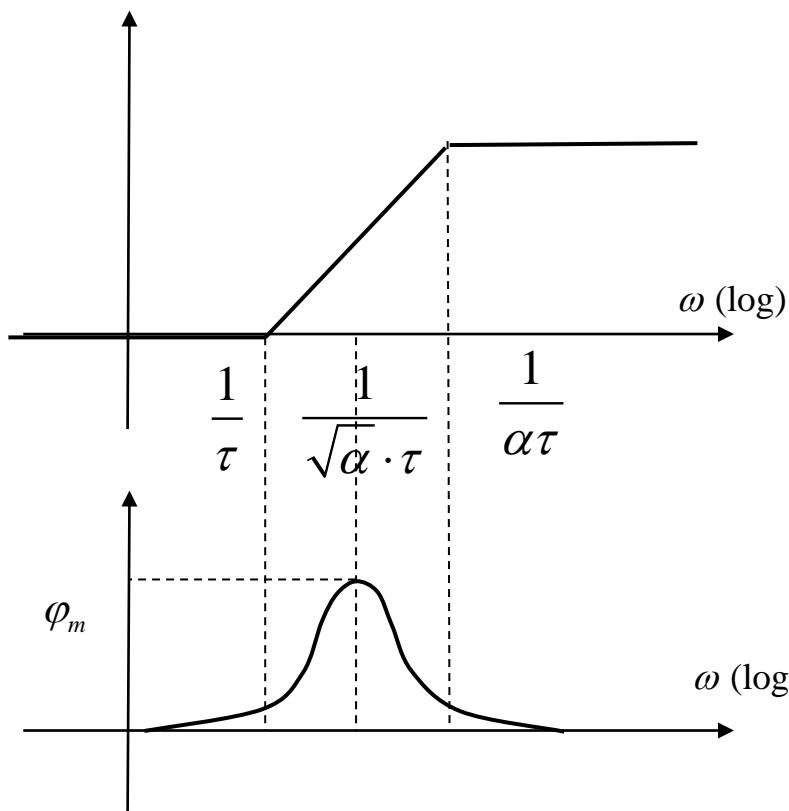


Vantaggi: il guadagno di anello si mantiene elevato alle basse frequenze (buone prestazioni statiche).

Svantaggi: riduzione della banda passante del g.d.a.  $\Rightarrow$  riduzione della banda passante di  $T_{ry}(j\omega)$  (scarse prestazioni dinamiche).

# La rete anticipatrice

$$C_r(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}; \quad C_r(j\omega) = \frac{1 + \tau j\omega}{1 + \alpha \tau j\omega}$$

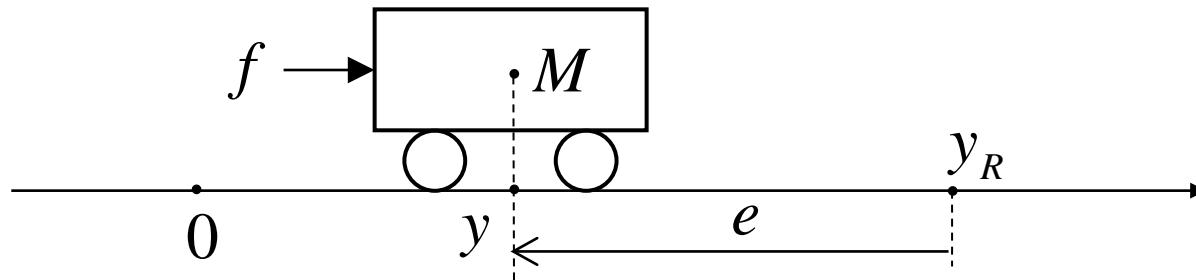


$$\varphi_m = \arcsin \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

$$\varphi_m = \arg C_r(j\omega_m) \quad \text{dove} \quad \omega_m := \frac{1}{\sqrt{\alpha \cdot \tau}}$$

## Azione compensatrice della rete anticipatrice

Esempio: spostamento di un carrello su rotaia.



1° strategia: applicazione di una forza proporzionale all'errore di posizione  $e = y_R - y$ :  $f = K_c e$ .

Esito: in assenza di attriti il carrello oscilla indefinitamente.

Perché?

$$C(s) = K_c$$

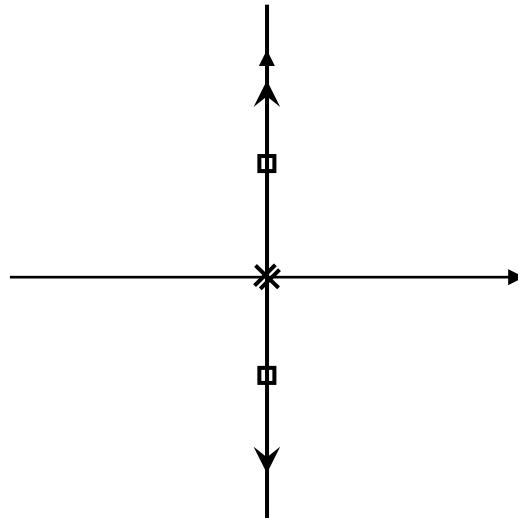
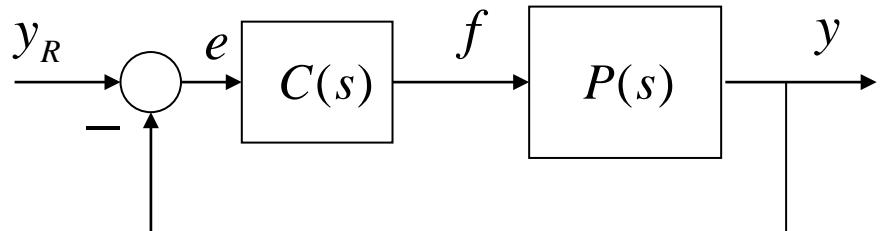
Determinazione di  $P(s)$ :

$$M \frac{dy}{dt^2} = f \quad \Rightarrow \quad P(s) = \frac{1}{Ms^2}$$

Eq. caratteristica:

$$1 + K_c \cdot \frac{1}{Ms^2} = 0$$

$$\text{quindi } 1 + K_1 \frac{1}{s^2} = 0 \quad \text{con } K_1 := \frac{K_c}{M}$$



Come modificare la strategia di controllo per stabilizzare il carrello sulla posizione desiderata  $y_R$  ?

2° strategia: Si modifica la strategia precedente sommando un termine proporzionale alla derivata dell'errore:

$$f = K_c e + K'_c \frac{de}{dt}$$

Lo scopo è quello di anticipare il cambio di segno della forza  $f$  prima che l'errore  $e$  sia azzerato ... ottenendo un effetto di smorzamento ...

Analisi della nuova strategia:

$$f = K_c \left( e + \tau \frac{de}{dt} \right); \quad \tau := \frac{K_c'}{K_c}$$

passando alle trasformate

$$F(s) = K_c (1 + \tau s) E(s)$$

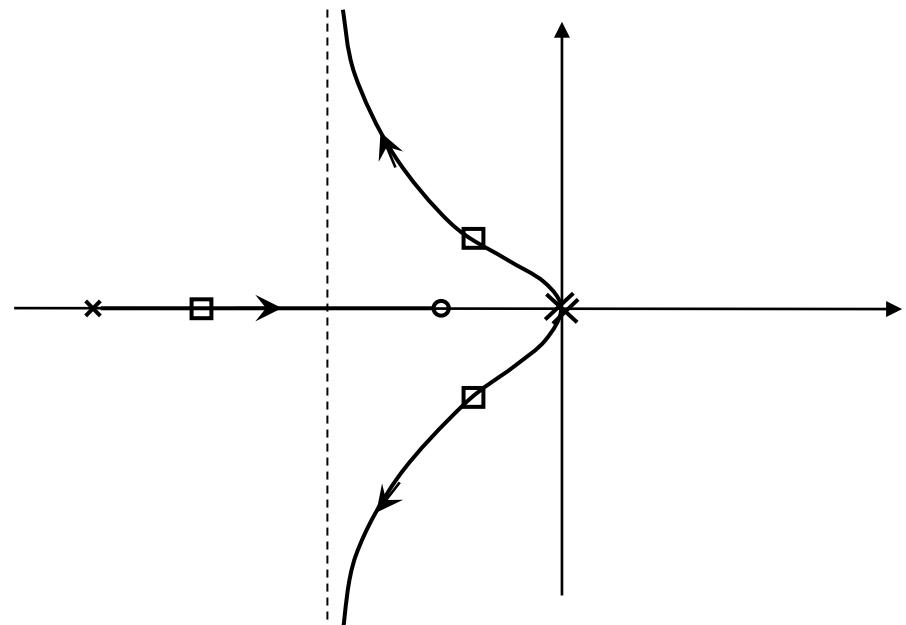
meglio  $F(s) = K_c \left( 1 + \frac{\tau s}{1 + \alpha \tau s} \right) E(s)$  con  $\alpha \in (0,1)$

$$F(s) = K_c \frac{1 + \alpha \tau s + \tau s}{1 + \alpha \tau s} E(s)$$

$$F(s) \approx K_c \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} E(s) \quad \text{se } \alpha \ll 1$$

$$\Rightarrow C(s) = K_c C_r(s), \quad C_r(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}$$

$C_r(s)$  è la rete anticipatrice



Vantaggi della rete anticipatrice:

1. Mantenimento delle prestazioni statiche (come la rete ritardatrice).
2. Stabilizzazione con allargamento della banda passante del guadagno di anello e quindi allargamento della banda passante di  $T_{ry}(j\omega)$ : aumento del grado di stabilità  $G_S$ , diminuzione del tempo di assestamento  $T_a$ , migliori capacità di inseguimento di segnale.

Svantaggi della rete anticipatrice: possibile introduzione di rumore (il parametro  $\alpha$  non può essere scelto troppo piccolo ...)

Metodi di progetto della rete rit.:

1. grafici (obsoleti);
2. per tentativi o metodi *ad hoc*;
3. con le formule di inversione.
4. con cancellazione polo-zero.

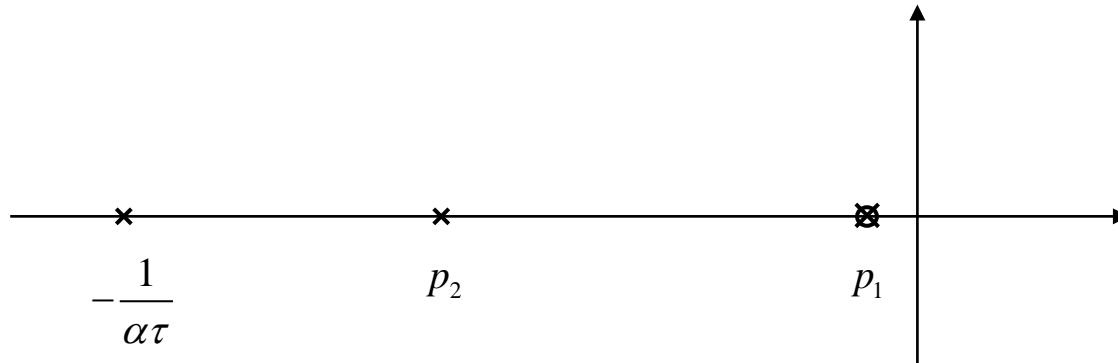
## Sintesi della rete anticipatrice per cancellazione polo-zero

Si sceglie quale zero della rete il polo reale negativo di  $P(s)$  più vicino all'asse immaginario determinando così nella funzione di trasferimento di catena diretta una cancellazione polo-zero (ammissibile).

Esempio:

$$P(s) = \frac{1}{(s - p_1)(s - p_2)}, \quad p_1, p_2 < 0 \quad \text{con} \quad p_2 < p_1$$

$$C_r(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} \quad \text{si impone} \quad -\frac{1}{\tau} = p_1 \Rightarrow \tau = -\frac{1}{p_1} \quad \Rightarrow C_r(s)P(s) = \frac{\tau}{(1 + \alpha \tau s)(s - p_2)}$$



## Punti salienti della lezione:

- La stabilità asintotica interna
- Controllori di ordine prefissato/di struttura prefissata
- Le reti correttive
- I regolatori standard (regolatori PID)
- L'azione correttiva della rete ritardatrice sul diagramma di Nyquist
- L'azione correttiva della rete anticipatrice sul luogo delle radici
- Sintesi della rete anticipatrice per cancellazione polo-zero

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle  
Telecomunicazioni

**Lezione n. 15 di Fondamenti di Controlli Automatici**  
**prof. Aurelio Piazzì**

**Il progetto di un sistema di controllo  
in retroazione – Parte II**

Università degli Studi di Parma – a.a. 2020-2021

- Sintesi in frequenza con le formule di inversione
- La rete a ritardo e anticipo e la rete a T
- La sintesi con l'equazione diofantea

# Sintesi in frequenza con le formule di inversione

La sintesi in frequenza delle reti ritardatrice e anticipatrice con imposizione di margini di stabilità prestabiliti può essere svolta utilizzando le funzioni inverse delle stesse reti.

Interpretiamo la risposta armonica della rete anticipatrice

$$\frac{1 + j\tau\omega}{1 + j\alpha\tau\omega}$$

quale funzione  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(\alpha, \tau\omega) \rightarrow (M, \varphi)$  dove  $\mathcal{D} := (0, 1) \times (0, +\infty)$  e

$$M = \frac{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}{\sqrt{1 + (\alpha\tau\omega)^2}}, \quad \varphi = \arctan(\tau\omega) - \arctan(\alpha\tau\omega)$$

La definizione implica che  $Me^{j\varphi} = \frac{1 + j\tau\omega}{1 + j\alpha\tau\omega}$ .

$$f(\alpha, \tau\omega) = (M, \varphi), M = \left| \frac{1 + j\tau\omega}{1 + j\alpha\tau\omega} \right|, \varphi = \arctan(\tau\omega) - \arctan(\alpha\tau\omega)$$

Si vuole provare che la funzione  $f : \mathcal{D} \rightarrow f(\mathcal{D})$  è invertibile (o biiettiva) e determinare  $f^{-1}$  e  $f(\mathcal{D})$ .

$$\mathcal{D} = (0, 1) \times (0, +\infty) \Rightarrow f(\mathcal{D}) \subseteq (1, +\infty) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ ovvero } M > 1, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

### Lemma

Siano  $M, \varphi, \alpha, x$  valori reali con  $M > 1$  e  $\sin \varphi \neq 0$ .

Allora le seguenti relazioni algebriche sono equivalenti:

$$1. \quad Me^{j\varphi} = \frac{1 + jx}{1 + j\alpha x}$$

$$2. \quad \begin{cases} \alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)} \\ x = \frac{M - \cos \varphi}{\sin \varphi} \end{cases}$$

**Dim.**

$$M(\cos\varphi + j\sin\varphi) = \frac{1+jx}{1+j\alpha x}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)} \\ x = \frac{M - \cos \varphi}{\sin \varphi} \end{cases}$$

$$M(\cos\varphi + j\sin\varphi)(1+j\alpha x) = 1+jx$$

$$M(\cos\varphi + j\alpha x \cos\varphi + j\sin\varphi - \alpha x \sin\varphi) = 1+jx$$

$$M(\cos\varphi - \alpha x \sin\varphi) + jM(\alpha x \cos\varphi + \sin\varphi) = 1+jx$$

$$\begin{cases} M \cos\varphi - M \alpha x \sin\varphi = 1 \\ M \alpha x \cos\varphi + M \sin\varphi = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha x = \frac{M \cos \varphi - 1}{M \sin \varphi} \\ x = M \sin \varphi + \frac{M \cos \varphi - 1}{\sin \varphi} \cos \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha x = \frac{M \cos \varphi - 1}{M \sin \varphi} \\ x = \frac{M - \cos \varphi}{\sin \varphi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M \cancel{\sin \varphi}} \cdot \frac{\cancel{\sin \varphi}}{M - \cos \varphi} \\ x = \frac{M - \cos \varphi}{\sin \varphi} \end{cases}$$

□

## Proposizione (formule di inversione)

La funzione  $f : \mathcal{D} \rightarrow f(\mathcal{D})$  è biiettiva (o invertibile) e la sua funzione inversa  $f^{-1} : f(\mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{D}$ ,  $(M, \varphi) \rightarrow (\alpha, \tau\omega)$  è definita da

$$\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}, \quad \tau\omega = \frac{M - \cos \varphi}{\sin \varphi}$$

**Dim.:**

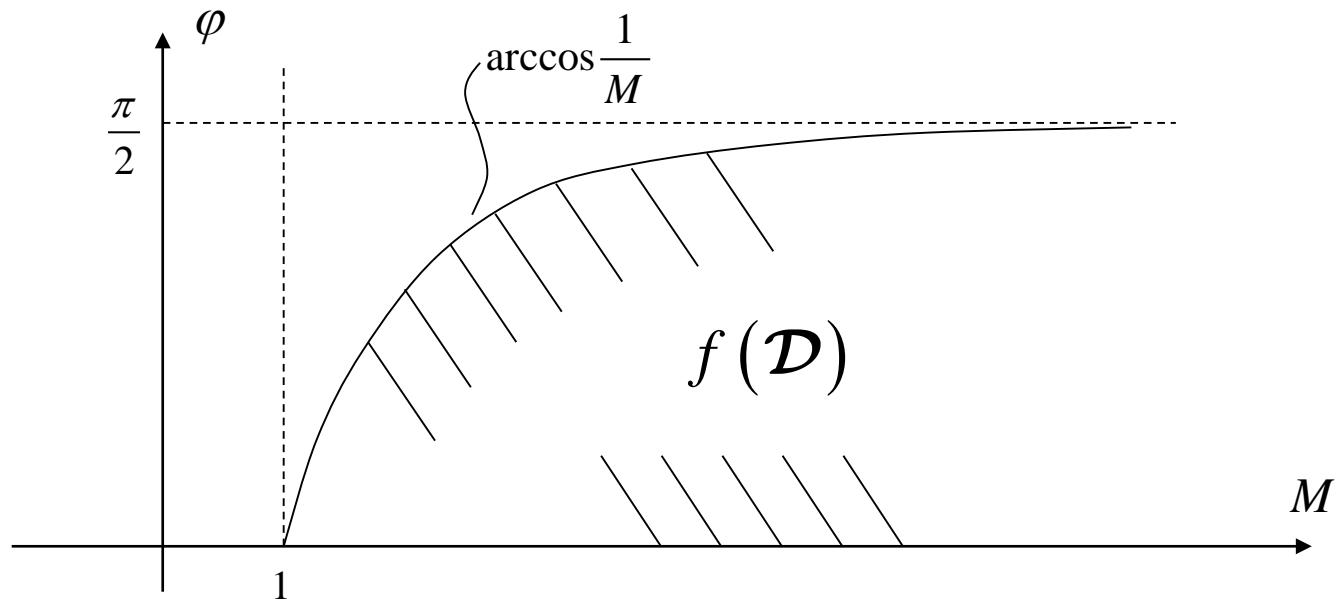
1.  $f : \mathcal{D} \rightarrow f(\mathcal{D})$  è suriettiva per la definizione data di codominio.
2.  $f : \mathcal{D} \rightarrow f(\mathcal{D})$  è iniettiva. Sia  $(M, \varphi) \in f(\mathcal{D})$ , quindi  $M > 1$ ,  $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

ed esistono  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\tau\omega > 0$  tali che  $Me^{j\varphi} = \frac{1 + j\tau\omega}{1 + j\alpha\tau\omega}$ .

Per il lemma precedente valgono  $\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}$ ,  $\tau\omega = \frac{M - \cos \varphi}{\sin \varphi}$  e quindi questi valori sono gli unici per i quali  $f(\alpha, \tau\omega) = (M, \varphi)$ . □

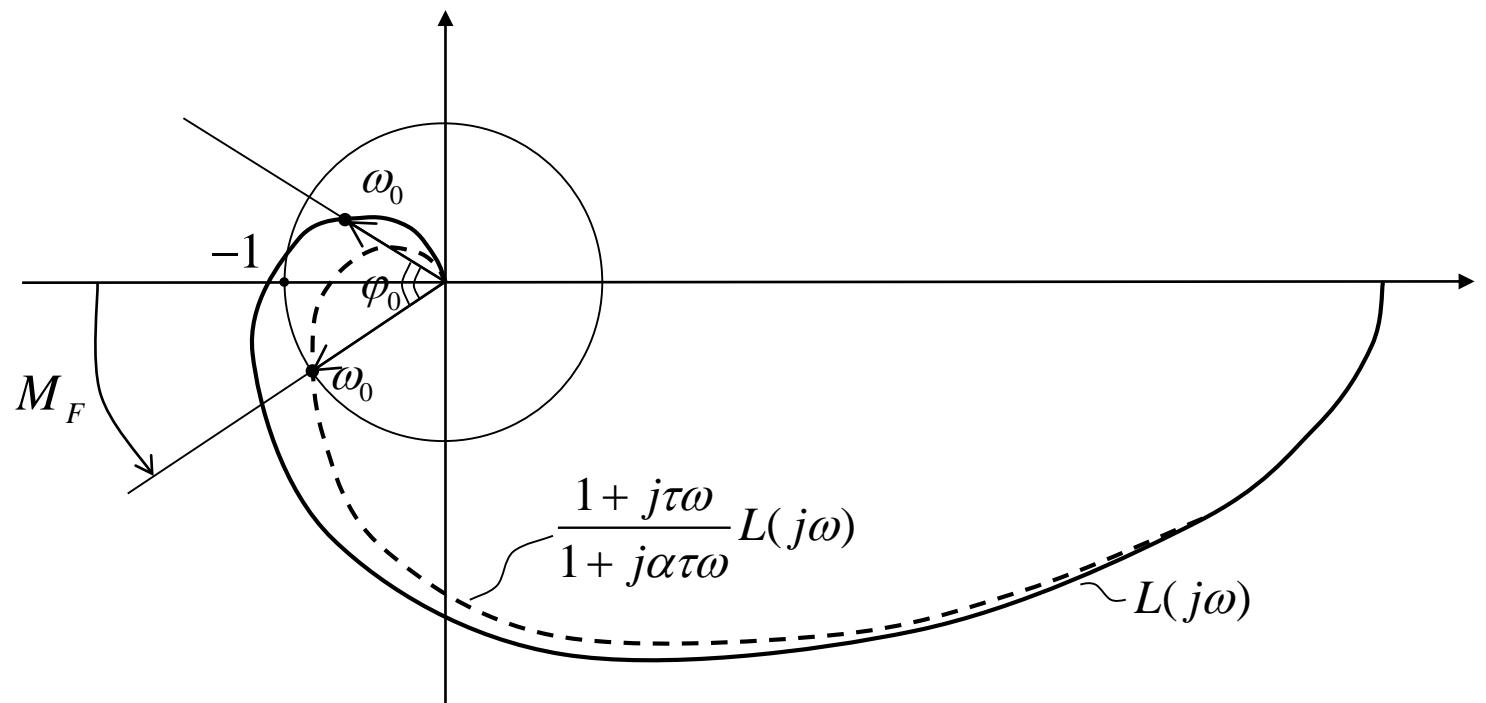
## Proposizione

$$f(\mathcal{D}) = \left\{ (M, \varphi) \in (1, +\infty) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) : \varphi < \arccos \frac{1}{M} \right\}$$



## Sintesi della rete anticipatrice con imposizione del margine di fase $M_F$

$L(s)$  g.d.a. non compensato,  $\frac{1+\tau s}{1+\alpha \tau s} L(s)$  g.d.a. compensato



## Metodo di sintesi della rete anticipatrice:

1) Scegliere  $\omega_0$  affinché con  $\varphi_0 := M_F - \arg L(j\omega_0) - \pi$

valga  $\left( \frac{1}{|L(j\omega_0)|}, \varphi_0 \right) \in f(\mathcal{D})$  quindi  $\cos \varphi_0 > |L(j\omega_0)|$

2) Definiti  $M := \frac{1}{|L(j\omega_0)|}$  e  $\varphi := \varphi_0$

segue  $\tau = \frac{M - \cos \varphi}{\omega_0 \sin \varphi}$  e  $\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}$

Infatti: le formule di inversione garantiscono che

$$\frac{1 + j\tau\omega_0}{1 + j\alpha\tau\omega_0} = M e^{j\varphi} \quad \text{quindi}$$

$$\frac{1 + j\tau\omega_0}{1 + j\alpha\tau\omega_0} L(j\omega_0) = \frac{1}{|L(j\omega_0)|} e^{j\varphi_0} \cdot |L(j\omega_0)| e^{j\arg L(j\omega_0)} = e^{j(\varphi_0 + \arg L(j\omega_0))} = e^{j(M_F - \pi)}$$

$\omega_0$  è divenuta la pulsazione critica del g.d.a. compensato corrispondente ad un margine di fase pari a  $M_F$ .

## Massimizzare il margine di fase nella sintesi della rete anticipatrice:

Fissata una pulsazione  $\omega_0$ , l'estremo superiore dell'insieme degli anticipi  $\varphi_0$  ammissibili è dato da  $\arccos |L(j\omega_0)|$  (questo valore di  $\varphi_0$  corrisponde ad  $\alpha = 0$ , ovvero ad una rete proporzionale-derivativa). Con questo valore il margine di fase corrispondente nel g.d.a. compensato è

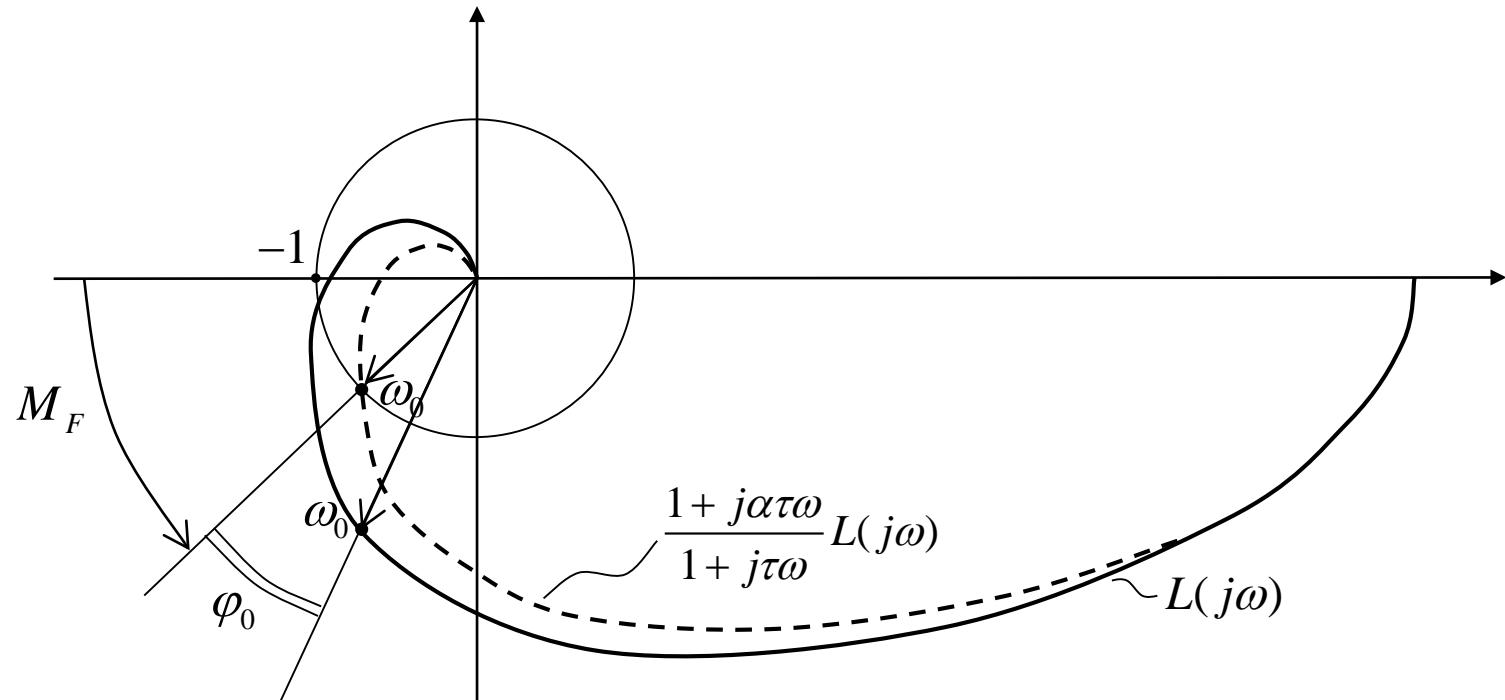
$$M_F(\omega_0) = \pi + \arg L(j\omega_0) + \arccos |L(j\omega_0)|$$

Conseguentemente l'estremo superiore dei margini di fase ottenibili con una rete anticipatrice è

$$\max_{\omega_0 > \omega_C} \left\{ \pi + \arg L(j\omega_0) + \arccos |L(j\omega_0)| \right\}$$

con  $\omega_C$  pulsazione critica di  $L(j\omega)$ .

## Sintesi della rete ritardatrice con impostazione del margine di fase $M_F$



## Metodo di sintesi della rete ritardatrice:

1) Scegliere  $\omega_0$  affinché con  $\varphi_0 := \arg L(j\omega_0) + \pi - M_F$

$$\text{valga } (|L(j\omega_0)|, \varphi_0) \in f(\mathcal{D}) \quad \text{quindi} \quad \cos \varphi_0 > \frac{1}{|L(j\omega_0)|}$$

2) Definiti  $M := |L(j\omega_0)|$  e  $\varphi := \varphi_0$

$$\text{segue } \tau = \frac{M - \cos \varphi}{\omega_0 \sin \varphi} \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}$$

Infatti: le formule di inversione garantiscono che

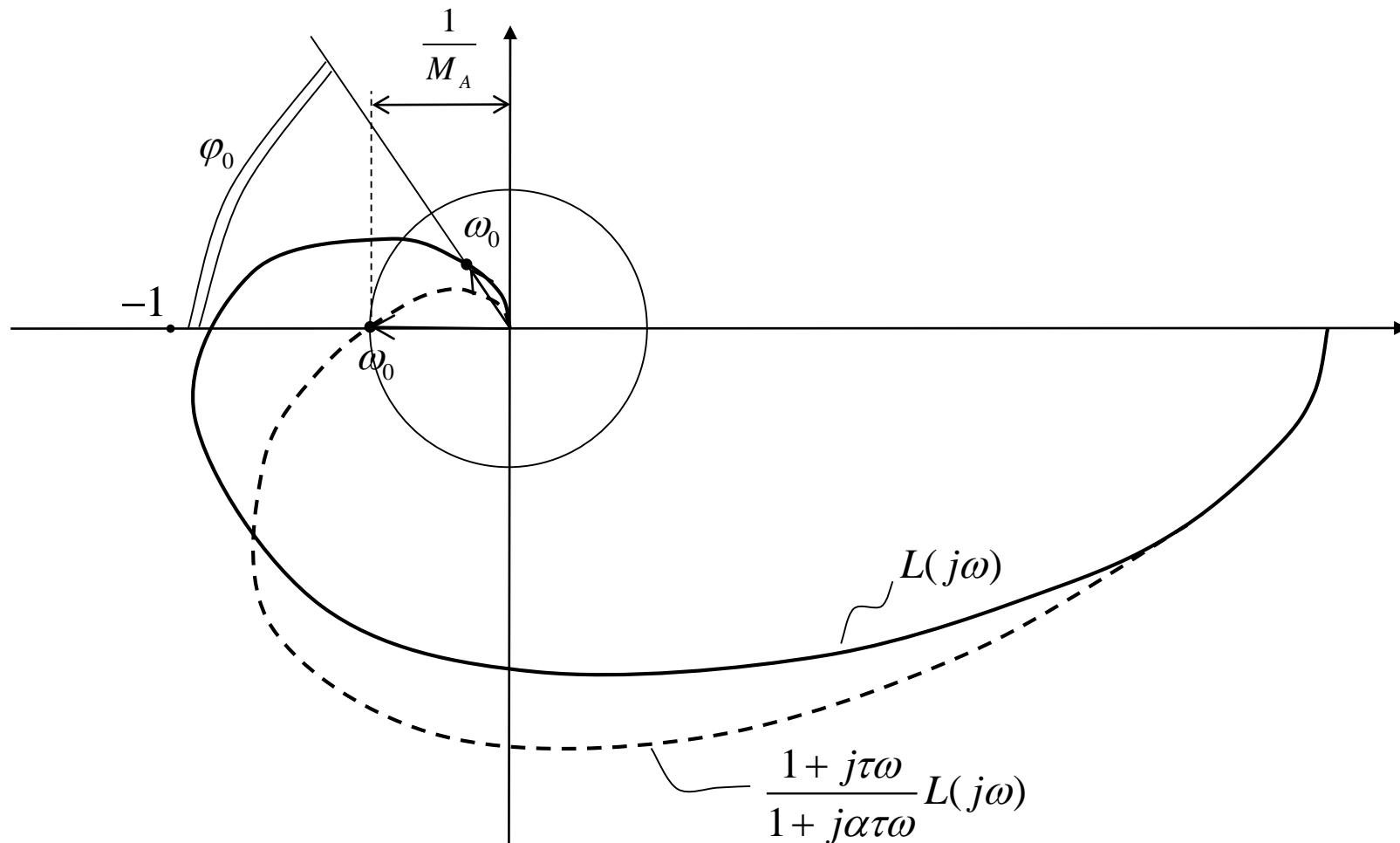
$$\frac{1 + j\tau\omega_0}{1 + j\alpha\tau\omega_0} = M e^{j\varphi} \quad \text{quindi}$$

$$\frac{1 + j\alpha\tau\omega_0}{1 + j\tau\omega_0} L(j\omega_0) = \frac{1}{|L(j\omega_0)|} e^{-j\varphi_0} \cdot |L(j\omega_0)| e^{j \arg L(j\omega_0)} = e^{j(\arg L(j\omega_0) - \varphi_0)} = e^{j(M_F - \pi)}$$

$\omega_0$  è divenuta la pulsazione critica del g.d.a. compensato corrispondente ad un margine di fase pari a  $M_F$ .

L'uso delle formule di inversione permette in generale di spostare nel piano complesso, per una data frequenza, un punto del diagramma di Nyquist in uno limitrofo del diagramma di Nyquist compensato. Lo scopo, al di là dell'imposizione di margini di stabilità, è quello di migliorare la risposta armonica del guadagno di anello in accordo a specifiche di progetto.

## Sintesi della rete anticipatrice con impostazione del margine di ampiezza $M_A$



## Procedura di sintesi (rete anticipatrice):

1) Scegliere  $\omega_0$  affinché con  $\varphi_0 := -\arg L(j\omega_0) - \pi$

valga  $\left( \frac{1}{M_A |L(j\omega_0)|}, \varphi_0 \right) \in f(\mathcal{D})$  quindi  $\cos \varphi_0 > M_A |L(j\omega_0)|$

2) Definiti  $M := \frac{1}{M_A |L(j\omega_0)|}$  e  $\varphi := \varphi_0$

segue  $\tau = \frac{M - \cos \varphi}{\omega_0 \sin \varphi}$  e  $\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}$

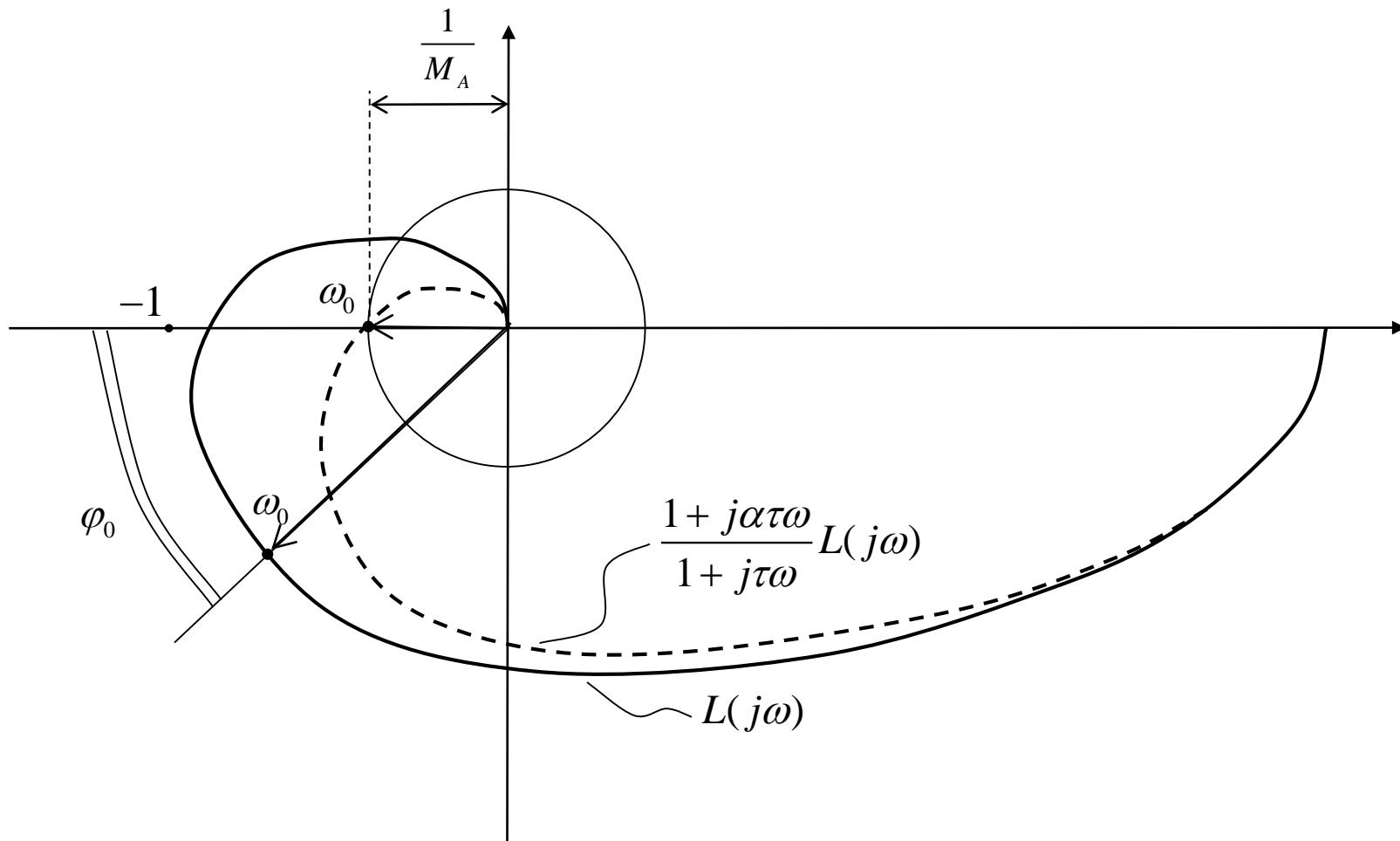
Infatti: le formule di inversione garantiscono che

$$\frac{1 + j\tau\omega_0}{1 + j\alpha\tau\omega_0} = Me^{j\varphi} \quad \text{quindi}$$

$$\frac{1 + j\tau\omega_0}{1 + j\alpha\tau\omega_0} L(j\omega_0) = \frac{1}{M_A |L(j\omega_0)|} e^{j\varphi_0} \cdot |L(j\omega_0)| e^{j\arg L(j\omega_0)} = \frac{1}{M_A} e^{j(\varphi_0 + \arg L(j\omega_0))} = \frac{1}{M_A} e^{-j\pi} = -\frac{1}{M_A}$$

$\omega_0$  è divenuta la pulsazione di fase  $\pi$  del g.d.a. compensato corrispondente ad un margine di ampiezza pari a  $M_A$ .

## Sintesi della rete ritardatrice con impostazione del margine di ampiezza $M_A$



## Procedura di sintesi (rete ritardatrice):

1) Scegliere  $\omega_0$  affinché con  $\varphi_0 := \arg L(j\omega_0) + \pi$

$$\text{valga } (M_A |L(j\omega_0)|, \varphi_0) \in f(\mathcal{D}) \quad \text{quindi} \quad \cos \varphi_0 > \frac{1}{M_A |L(j\omega_0)|}$$

2) Definiti  $M := M_A |L(j\omega_0)|$  e  $\varphi := \varphi_0$

$$\text{segue } \tau = \frac{M - \cos \varphi}{\omega_0 \sin \varphi} \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}$$

Infatti: le formule di inversione garantiscono che

$$\frac{1 + j\tau\omega_0}{1 + j\alpha\tau\omega_0} = Me^{j\varphi} \quad \text{quindi}$$

$$\frac{1 + j\alpha\tau\omega_0}{1 + j\tau\omega_0} L(j\omega_0) = \frac{1}{M_A |L(j\omega_0)|} e^{-j\varphi_0} \cdot |L(j\omega_0)| e^{j\arg L(j\omega_0)} = \frac{1}{M_A} e^{j(\arg L(j\omega_0) - \varphi_0)} = \frac{1}{M_A} e^{-j\pi} = -\frac{1}{M_A}$$

$\omega_0$  è divenuta la pulsazione di fase  $\pi$  del g.d.a. compensato corrispondente ad un margine di ampiezza pari a  $M_A$ .

# La rete a ritardo e anticipo e la rete a T

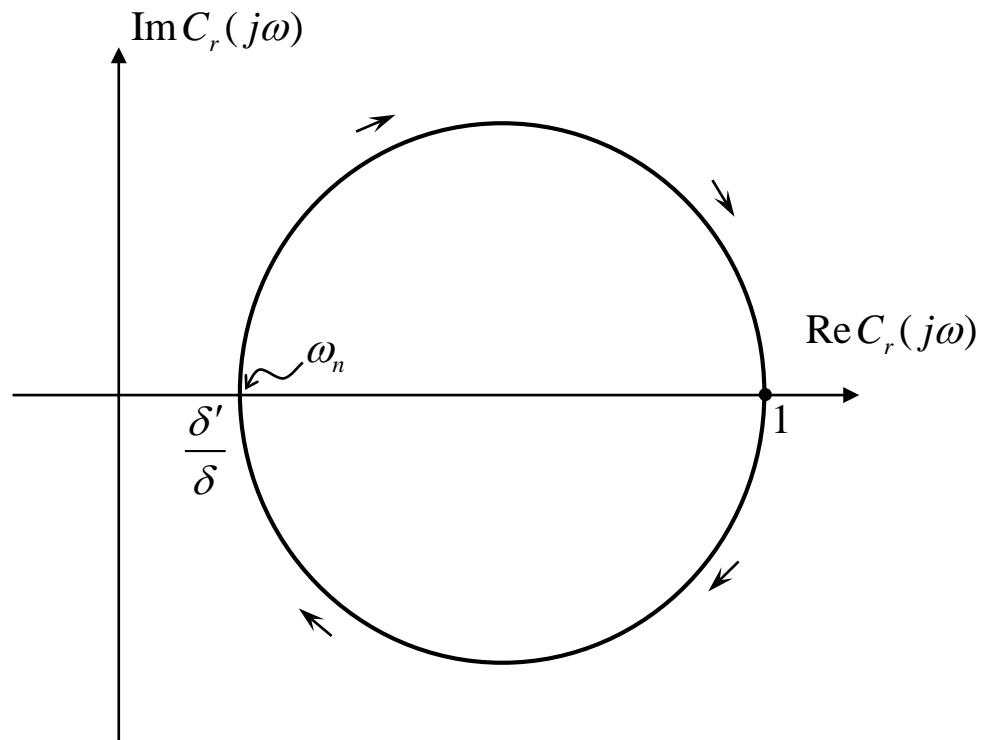
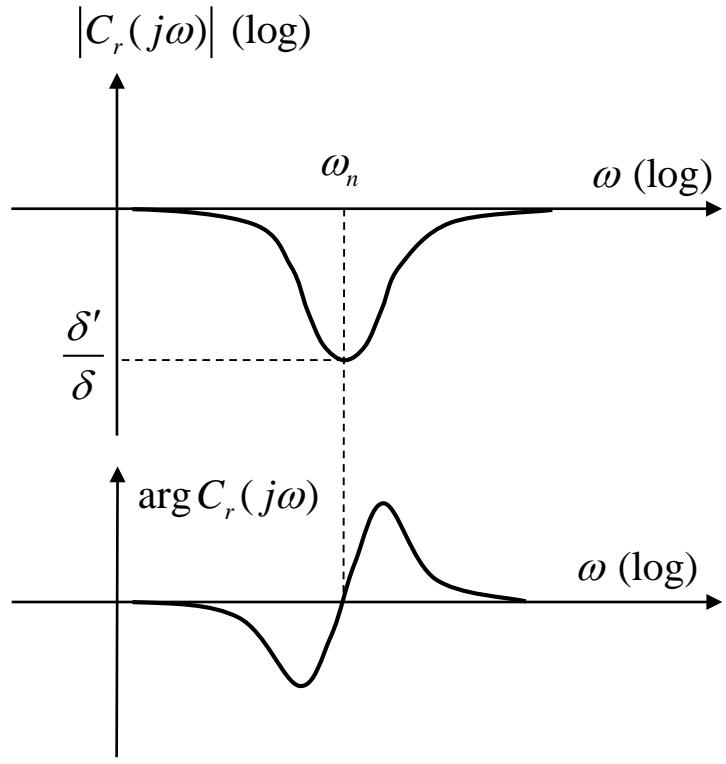
$$C_r(s) = \frac{1 + 2\delta' \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}; \quad C_r(j\omega) = \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + 2\delta' \frac{j\omega}{\omega_n}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + 2\delta \frac{j\omega}{\omega_n}}$$

Rete a ritardo e anticipo:  $\omega_n > 0, \delta > \delta' \geq 1$

Rete a T:  $\omega_n > 0, \delta > 1, \delta > \delta' > 0$

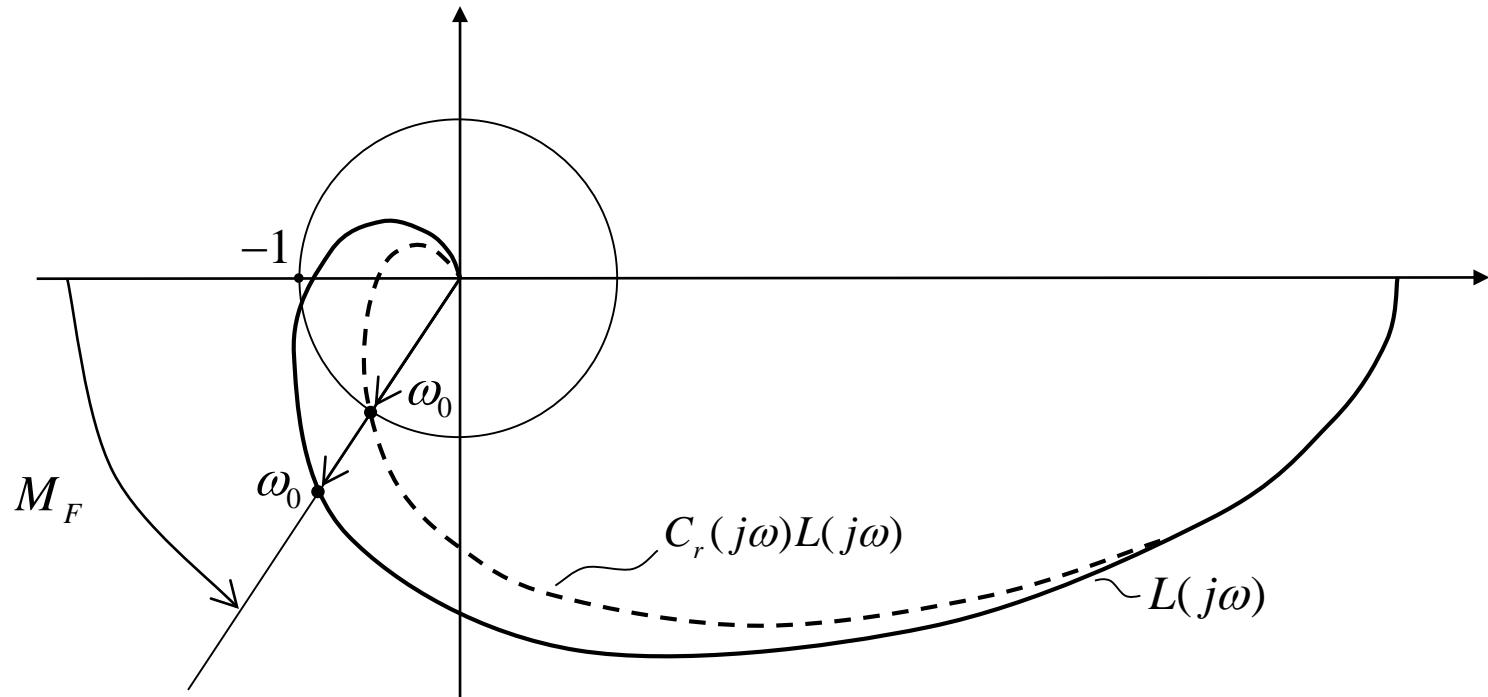
per entrambe le reti:  $C_r(j\omega_n) = \frac{\delta'}{\delta} < 1$  (attenuazione di centro banda)

# Diagrammi di Bode e di Nyquist



## Progetto delle reti con impostazione del margine di fase $M_F$

$L(s)$  g.d.a. non compensato,  $C_r(s)L(s)$  g.d.a. compensato



## Procedura di sintesi: (rete a ritardo e anticipo e rete a T)

1) Determinare  $\omega_0$  soluzione dell'eq.:

$$\arg L(j\omega_0) = -\pi + M_F$$

2) Imporre

$$\omega_n = \omega_0, \quad \frac{\delta'}{\delta} = \frac{1}{|L(j\omega_0)|}$$

Infatti:

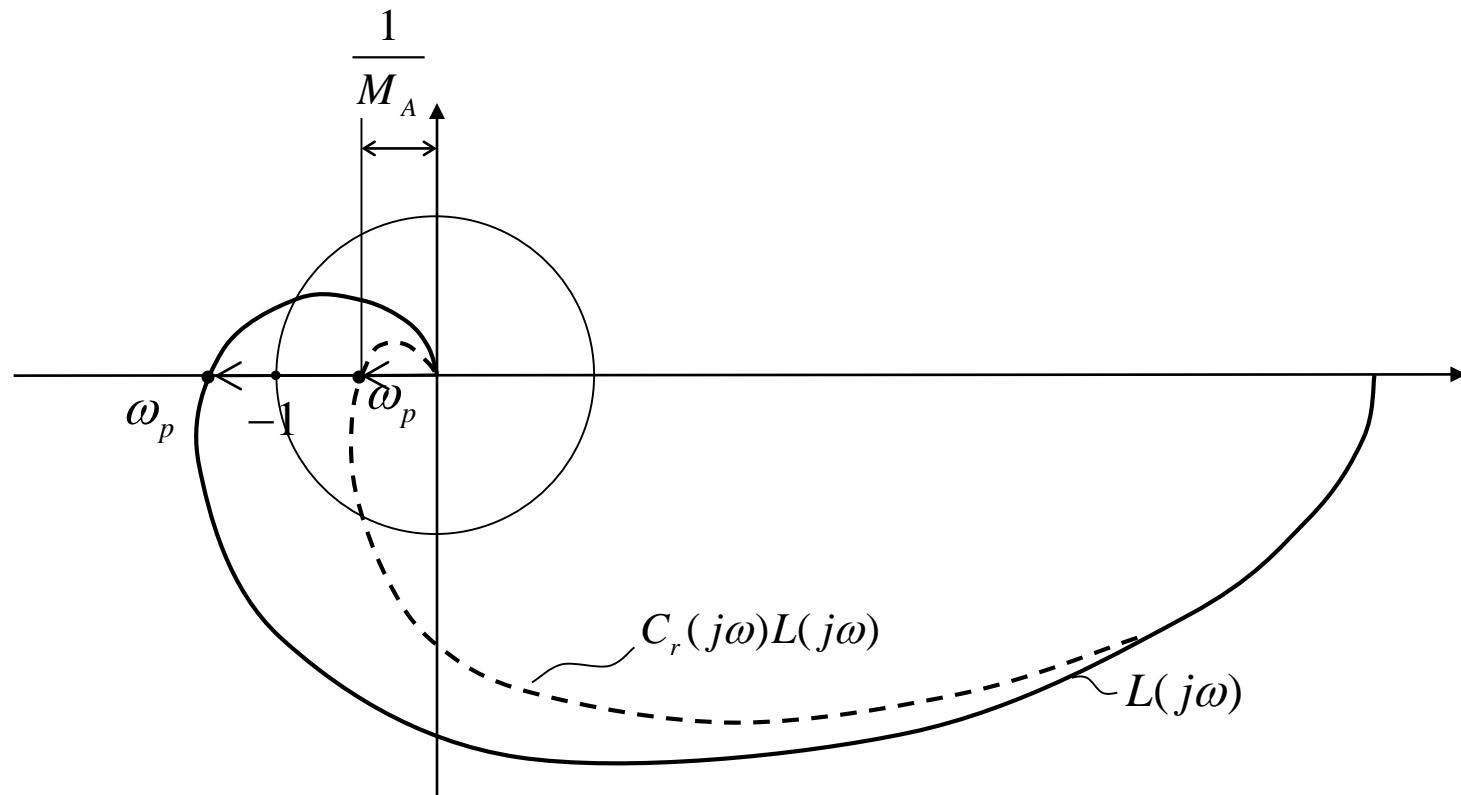
$$C_r(j\omega_0)L(j\omega_0) = \frac{\delta'}{\delta} \cdot L(j\omega_0) = \frac{1}{|L(j\omega_0)|} \cdot |L(j\omega_0)| e^{j\arg L(j\omega_0)} = e^{j(-\pi + M_F)}$$

$\omega_0$  ( $= \omega_n$ ) è divenuta la pulsazione critica del g.d.a. compensato corrispondente ad un margine di fase pari a  $M_F$ .

Rimane fra i parametri di progetto un grado di libertà che può essere utilizzato per soddisfare o concorrere a soddisfare un'altra specifica di progetto.

## Progetto delle reti con impostazione del margine di ampiezza $M_A$

$L(s)$  g.d.a. non compensato,  $C_r(s)L(s)$  g.d.a. compensato



## Procedura di sintesi: (rete a ritardo e anticipo e rete a T)

1) Determinare  $\omega_p$  :

$$\arg L(j\omega_p) = -\pi$$

2) Imporre

$$\omega_n = \omega_p, \quad \frac{\delta'}{\delta} = \frac{1}{|L(j\omega_p)| M_A}$$

Infatti:

$$C_r(j\omega_p)L(j\omega_p) = \frac{\delta'}{\delta} \cdot L(j\omega_p) = \frac{1}{|L(j\omega_p)| M_A} \cdot |L(j\omega_p)| e^{j\arg L(j\omega_p)} = \frac{1}{M_A} e^{-j\pi} = -\frac{1}{M_A}$$

$\omega_p$  è pulsazione di fase  $\pi$  anche nel g.d.a. compensato.

Rimane fra i parametri di progetto ancora un grado di libertà...

- Parametrizzazione alternativa per la rete a ritardo e anticipo

$$C_r(s) = \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + \tau_{12} s}, \quad \tau_1, \tau_2, \tau_{12} \in \mathbb{R}_+$$

È la scrittura tradizionale corrispondente alla rete elettrica...  
 Relazioni con la parametrizzazione precedente:

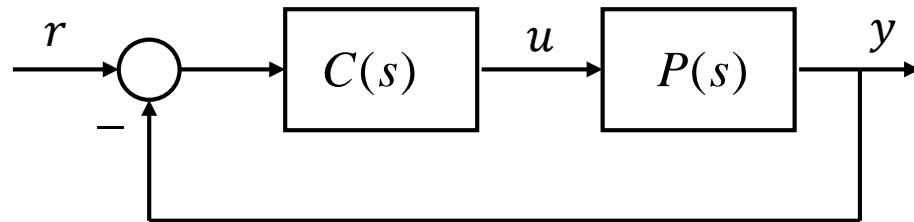
$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} \quad \delta' = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2\sqrt{\tau_1 \tau_2}} \geq 1 \quad \delta = \frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}}{2\sqrt{\tau_1 \tau_2}} > \delta'$$

L'attenuazione di centro banda è esprimibile  $C_r(j\omega_n) = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}}$   
 come:

Usualmente nel progetto della rete a ritardo e anticipo si impone il rapporto  $\tau_1 / \tau_2$  (per esempio = 10).

# La sintesi con l'equazione diofantea

- È un metodo che permette l'allocazione arbitraria dei poli retroazionati.
- Utilizza una particolare soluzione dell'equazione di Diòfanto o equazione diofantea.
- L'equazione diofantea è riconducibile alla risoluzione di un sistema di equazioni algebriche lineari.
- Questo metodo può essere variamente utilizzato ed adattato anche per il conseguimento di prestazioni asintotiche.



Sia assegnata  $P(s)$  f.d.t. razionale strettamente propria:

$$P(s) := \frac{b(s)}{a(s)} := \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

Assumiamo  $a(s)$  e  $b(s)$  coprimi fra loro.

**Problema:** Progettare un controllore proprio  $C(s)$  affinché i poli retroazionati del sistema di controllo siano assegnabili arbitrariamente.

Sia  $C(s) = \frac{y(s)}{x(s)}$  un controllore di ordine  $l$ .

Assegnare arbitrariamente i poli retroazionati significa scegliere un insieme simmetrico  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+l}\} \subset \mathbb{C}$  per il quale le radici dell'eq. caratteristica  $1 + C(s)P(s) = 0$  coincidano con  $\Lambda$ .

$$1 + \frac{y(s)}{x(s)} \cdot \frac{b(s)}{a(s)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a(s)x(s) + b(s)y(s) = 0$$

$a(s)x(s) + b(s)y(s)$   $\equiv$  polinomio carat. del sistema retroazionato

$d(s) := \prod_{i=1}^{n+l} (s - \lambda_i)$   $\equiv$  polinomio carat. desiderato per il sistema retroazionato

Quindi:

$$a(s)x(s) + b(s)y(s) = d(s) \quad (\text{equazione diofantea})$$

**Definizione:** Dati i polinomi  $a(s)$ ,  $b(s)$  e  $d(s)$ , soluzione dell'eq. diofantea sono i polinomi  $x(s)$  e  $y(s)$  soddisfacenti

$$a(s)x(s) + b(s)y(s) = d(s)$$

**Teorema:** L'equazione diofantea ammette soluzione se e solo se il massimo comun divisore di  $a(s)$  e  $b(s)$  è divisore di  $d(s)$ .

**Proprietà** (Parametrizzazione delle soluzioni dell'eq. diofantea)

Sia  $m(s)$  il m.c.d. di  $a(s)$  e  $b(s)$  per il quale valgono le fattorizzazioni

$a(s) = m(s)a_1(s)$  e  $b(s) = m(s)b_1(s)$ . Se l'eq. diofantea ammette una soluzione  $\{x_0(s), y_0(s)\}$  allora l'insieme di tutte le soluzioni è dato da

$$\begin{cases} x(s) = x_0(s) + b_1(s)p(s) \\ y(s) = y_0(s) - a_1(s)p(s) \end{cases}$$

dove  $p(s)$  è un polinomio arbitrario.

**Proprietà:** Assumiamo  $a(s)$  e  $b(s)$  coprimi fra loro. Allora indicato con  $\{x(s), y(s)\}$  una soluzione dell'eq. diofantea valgono le seguenti equivalenze:

$$\{a(s) \text{ e } d(s) \text{ coprimi}\} \Leftrightarrow \{a(s) \text{ e } y(s) \text{ coprimi}\}$$

$$\{b(s) \text{ e } d(s) \text{ coprimi}\} \Leftrightarrow \{b(s) \text{ e } x(s) \text{ coprimi}\}$$

Conseguenze:

Se  $d(s)$ , polinomio caratteristico desiderato, è coprimo sia con  $a(s)$  che con  $b(s)$  (è la situazione usuale nell'ambito delle sintesi dei controllori) segue che una soluzione dell'eq. diofantea non determina cancellazioni polo-zero fra  $C(s)$  e  $P(s)$ .

Infatti:  $C(s)P(s) = \frac{y(s)}{x(s)} \cdot \frac{b(s)}{a(s)}$

Considerata l'assunzione fatta (  $a(s)$  e  $b(s)$  coprimi fra loro ) per ogni scelta di  $d(s)$  esistono soluzioni dell'eq. diofantea. Non tutte però sono accettabili in quanto è necessario garantire:

$$\deg y(s) \leq \deg x(s)$$

Ricerchiamo quindi una soluzione che incorpori implicitamente questa condizione:

$$\frac{y(s)}{x(s)} := \frac{y_ls^l + y_{l-1}s^{l-1} + \dots + y_1s + y_0}{s^l + x_{l-1}s^{l-1} + \dots + x_1s + x_0}, \quad y_i \in \mathbb{R} \quad i = 0, 1, \dots, l; \quad x_i \in \mathbb{R} \quad i = 0, 1, \dots, l-1;$$

(È una scelta corrispondente ad un controllore proprio di ordine  $l$  )

Sia inoltre:

$$d(s) = s^{n+l} + d_{n+l-1}s^{n+l-1} + \dots + d_1s + d_0, \quad d_i \in \mathbb{R} \quad i = 0, 1, \dots, n+l-1$$

Interpretiamo l'eq. diofantea

$$\begin{aligned} & \left( s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots \right) \left( s^l + x_{l-1}s^{l-1} + \cdots \right) + \left( b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots \right) \left( y_ls^l + y_{l-1}s^{l-1} + \cdots \right) = \\ & = s^{n+l} + d_{n+l-1}s^{n+l-1} + \cdots \end{aligned}$$

con il principio di identità dei polinomi.

Otteniamo quindi  $n + l$  equazioni lineari nelle  $2l + 1$  incognite reali (le  $x_i$  ed  $y_i$ ).

E' ragionevole imporre che

$$\text{n. di equazioni lineari} = \text{n. di incognite}$$

ovvero

$$n + l = 2l + 1 \Rightarrow l = n - 1$$

$$\begin{aligned}
& \left( s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0 \right) \left( s^{n-1} + x_{n-2}s^{n-2} + \cdots + x_1s + x_0 \right) + \\
& \left( b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1s + b_0 \right) \left( y_{n-1}s^{n-1} + y_{n-2}s^{n-2} + \cdots + y_1s + y_0 \right) = \\
& = s^{2n-1} + d_{2n-1}s^{2n-1} + \cdots + d_1s + d_0 \\
\\
& s^{2n-1} + (x_{n-2} + b_{n-1}y_{n-1} + a_{n-1})s^{2n-2} + (a_{n-1}x_{n-2} + x_{n-3} + b_{n-2}y_{n-1} + b_{n-1}y_{n-2} + a_{n-2})s^{2n-3} + \\
& + (a_{n-2}x_{n-2} + a_{n-1}x_{n-3} + x_{n-4} + b_{n-3}y_{n-1} + b_{n-2}y_{n-2} + b_{n-1}y_{n-3} + a_{n-3})s^{2n-4} + \cdots \\
& \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
& + (a_0x_1 + a_1x_0 + b_0y_1 + b_1y_0)s + (a_0x_0 + b_0y_0) = \\
& = s^{2n-1} + d_{2n-2}s^{2n-2} + \cdots + d_1s + d_0
\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n-2} + b_{n-1}y_{n-1} = d_{2n-2} - a_{n-1} \\ a_{n-1}x_{n-2} + x_{n-3} + b_{n-2}y_{n-1} + b_{n-1}y_{n-2} = d_{2n-3} - a_{n-2} \\ a_{n-2}x_{n-2} + a_{n-1}x_{n-3} + x_{n-4} + b_{n-3}y_{n-1} + b_{n-2}y_{n-2} + b_{n-1}y_{n-3} = d_{2n-4} - a_{n-3} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_0x_1 + a_1x_0 + b_0y_1 + b_1y_0 = d_1 \\ a_0x_0 + b_0y_0 = d_0 \end{array} \right.$$

Trascriviamo in forma matriciale il sistema di  $2n-1$  equazioni lineari nelle  $2n-1$  incognite ( $n-1$  incognite  $x_0, x_1, \dots, x_{n-2}$ ;  $n$  incognite  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ ).

$$\left[ \begin{array}{cccccc|cccccc|cc}
1 & 0 & \ddots & 0 & 0 & b_{n-1} & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & x_{n-2} & d_{2n-2} - a_{n-1} \\
a_{n-1} & 1 & 0 & \ddots & 0 & b_{n-2} & b_{n-1} & 0 & \ddots & \ddots & 0 & x_{n-3} & d_{2n-3} - a_{n-2} \\
a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \ddots & \ddots & b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} & 0 & \ddots & \ddots & x_{n-4} & d_{2n-4} - a_{n-3} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_2 & \ddots & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & b_1 & \ddots & b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} & 0 & x_0 & d_n - a_1 \\
\hline
a_1 & a_2 & & a_{n-2} & a_{n-1} & b_0 & b_1 & & b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} & y_{n-1} & = \frac{d_{n-1} - a_0}{d_{n-1} - a_0} \\
a_0 & a_1 & a_2 & & a_{n-2} & 0 & b_0 & b_1 & & b_{n-3} & b_{n-2} & y_{n-2} & d_{n-2} \\
0 & a_0 & a_1 & a_2 & \ddots & 0 & 0 & b_0 & b_1 & \ddots & b_{n-3} & y_{n-3} & d_{n-3} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \ddots & a_0 & a_1 & a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & b_0 & b_1 & \ddots & \\
0 & \ddots & 0 & a_0 & a_1 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & b_0 & b_1 & y_1 & d_1 \\
0 & 0 & \ddots & 0 & a_0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & b_0 & b_1 & y_0 & d_0
\end{array} \right]$$

- Il problema di assegnabilità arbitraria è risolvibile con un controllore proprio  $C(s)$  di ordine  $n - 1$  se e solo se la matrice dei coefficienti del sistema di equazioni è non singolare.  
Tale matrice è non singolare?

## Digressione: Risultanti e coprimalità

Dati i polinomi

$$a(s) := a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 , \quad a_n \neq 0$$

$$b(s) := b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0 , \quad m \leq n , \quad b(s) \text{ non identicamente nullo}$$

costruiamo la matrice di Sylvester  $\mathbf{S}(a,b)$  di ordine  $(m+n) \times (m+n)$

in accordo alla seguente definizione:

$$\mathbf{S}(a,b) := \left[ \begin{array}{cccccc|c} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & & a_1 & a_0 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \hline 0 & 0 & b_m & b_{m-1} & & b_0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & b_m & b_{m-1} & & b_0 & & \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \ddots & b_0 & 0 & \ddots \\ b_m & b_{m-1} & \ddots & & b_0 & 0 & \ddots & 0 \end{array} \right] \quad \left. \begin{array}{l} m \text{ righe} \\ n \text{ righe} \end{array} \right\}$$

**Def.** (Risultante di  $a(s)$  e  $b(s)$  )

$$R(a,b) := \det \mathbf{S}(a,b)$$

## Proprietà

I polinomi  $a(s)$  e  $b(s)$  sono coprimi fra loro se e solo se il loro risultante è diverso da zero, ovvero  $R(a, b) \neq 0$ .

- Costruzione della matrice di Sylvester relativa ai polinomi  $a(s)$  e  $b(s)$  di  $P(s)$  (f.d.t. del sistema controllato):

$$a(s) := s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0, \quad (a_n = 1)$$

$$b(s) := b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1s + b_0, \quad (m = n - 1)$$

Tale matrice, avendo assunto  $a(s)$  e  $b(s)$  coprimi, è quindi non singolare.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{n-1} & a_1 & a_0 & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \hline 0 & & 0 & b_{n-1} & b_{n-2} & & b_0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & b_{n-1} & b_{n-2} & & b_0 & & \\ 0 & b_{n-1} & b_{n-2} & \ddots & b_0 & 0 & \ddots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \ddots & b_0 & 0 & \ddots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}^T = \left[ \begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{n-1} \\ a_{n-1} & 1 & a_{n-1} & \ddots & 0 & b_{n-1} \\ a_1 & & \ddots & 1 & 0 & b_{n-2} \\ a_0 & a_1 & a_{n-1} & b_{n-1} & \ddots & b_0 \\ 0 & a_0 & \ddots & b_{n-2} & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & a_0 & b_0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$n-1$  colonne                             $n$  colonne

$$\det \mathbf{S}^T = \det \mathbf{S} \neq 0$$

La matrice  $\mathbf{S}^T$  coincide a meno di una permutazione di colonne con la matrice dei coefficienti del sistema di equazioni nelle incognite  $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-2}; y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\}$

Abbiamo dunque dato dimostrazione costruttiva al seguente enunciato.

### **Teorema (assegnabilità dei poli)**

Assunto  $a(s)$  e  $b(s)$  coprimi fra loro, i poli del sistema in retroazione unitaria sono assegnabili arbitrariamente con un controllore proprio di ordine  $n - 1$ .

- Il metodo di sintesi con l'eq. diofantea può essere adattato per incorporare specifiche di regolazione asintotica (principio del modello interno).
- Questo metodo può essere interpretato come una delle tecniche del progetto con il polinomio caratteristico (principio di identità dei polinomi).
- Questo risultato pur nella sua importanza e generalità non è una panacea per la sintesi di controllori in quanto non tutte le specifiche sono riconducibili ad imposizioni sui poli retroazionati o a prestazioni asintotiche.
- L'assegnabilità dei poli retroazionati va utilizzata con cautela per evitare un uso eccessivo dell'azione di controllo ( $\max_{t \in \mathbb{R}} |u(t)|$  limitato dalle caratteristiche dell'attuatore o dell'impianto).

## Punti salienti della lezione:

- Le formule di inversione nel progetto delle reti correttive con imposizione dei margini di stabilità (margini di fase o di ampiezza)
- Progetto della rete a ritardo e anticipo e della rete a T con imposizione dei margini di stabilità (margini di fase o di ampiezza)
- L'equazione diofantea nel progetto del controllore in retroazione con assegnazione arbitraria dei poli retroazionati.

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle  
Telecomunicazioni

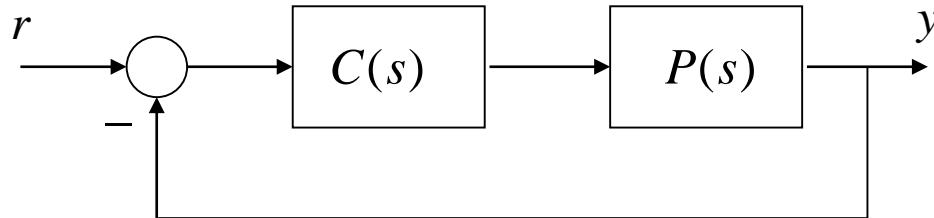
**Lezione n. 16 di Fondamenti di Controlli Automatici**  
**prof. Aurelio Piazzì**

**Il progetto di un sistema di controllo  
in retroazione – Parte III**

Università degli Studi di Parma – a.a. 2020-2021

- Sistemi di controllo per la regolazione
- Regolatori PID
- Controllo dei sistemi con ritardo
- Controllo feedforward/feedback
- Conclusioni

# Sistemi di controllo per la regolazione



## Problema di regolazione (asintotica)

Sia dato un impianto con funzione di trasferimento  $P(s)$  (strettamente propria). Determinare un controllore  $C(s)$  per il quale si abbia nel sistema retroazionato (in figura) la stabilità asintotica interna e un errore a regime nullo in risposta ad un gradino del segnale di riferimento.

**Assunzione:**  $P(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}$  con  $a(s)$  e  $b(s)$  coprimi.

## Proposizione

Il problema di regolazione (asintotica) ha soluzione se e solo se  $P(0) \neq 0$  ovvero il guadagno statico dell'impianto è diverso da zero.

**Dim.**

**Necessità:** {il problema di regolazione ha soluzione}  $\Rightarrow P(0) \neq 0$

Per assurdo sia  $P(0) = 0$ .

$$T_{ry}(s) = \frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)}, \quad T_{ry}(0) = \frac{C(0)P(0)}{1+C(0)P(0)}$$

$C(0)$  deve assumere un valore finito perché  $C(s)$  non può avere poli nell'origine (violerebbe la stabilità asintotica interna). Quindi  $T_{ry}(0) = 0$ .

Si applichi  $r(t) = r_0 1(t)$ , ( $r_0 \neq 0$ )  $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = T_{ry}(0)r_0 = 0$

$\Rightarrow e_\infty = r_0 - 0 \neq 0$ . Questo contraddice l'ipotesi che il problema di regolazione abbia soluzione.

**Sufficienza:**  $P(0) \neq 0 \Rightarrow \{\text{il problema di regolazione ha soluzione}\}$

Caso 1 - L'origine del piano complesso è polo dell'impianto:  $a_0 = 0, b_0 \neq 0$ .

Progettiamo un controllore  $C(s)$  di ordine  $n - 1$  affinché i poli del sistema retroazionato siano assegnati arbitrariamente e in particolare siano tutti a parte reale negativa nonché diversi dalle radici di  $a(s)$  e  $b(s)$ . Ne consegue che il sistema retroazionato è internamente asintoticamente stabile e di tipo maggiore o uguale ad 1. L'errore a regime in risposta ad un gradino del riferimento è dunque nullo. Il problema di regolazione è risolto.

Caso 2 – L'origine del piano complesso non è polo dell'impianto ( $a_0 \neq 0$ ) e  $P(0) \neq 0$  significa  $b_0 \neq 0$ . Il sistema retroazionato sia di tipo 1 con controllore di ordine  $l$ :

$$C(s) = \frac{z(s)}{x(s)} = \frac{z_ls^l + z_{l-1}s^{l-1} + \dots + z_1s + z_0}{s^l + x_{l-1}s^{l-1} + \dots + x_1s}$$

$$1 + \frac{z(s)}{x(s)} \cdot \frac{b(s)}{a(s)} = 0, \quad x(s)a(s) + z(s)b(s) = 0$$

$p_C(s) := x(s)a(s) + z(s)b(s)$  (polinomio caratteristico associato al controllore)

$p_d(s) := s^{n+l} + d_{n+l-1}s^{n+l-1} + \dots + d_0$  (polinomio caratteristico desiderato)

Imponiamo  $p_C(s) \equiv p_d(s)$ , da cui  $n + l$  equazioni con  $2l$  incognite.

$n + l = 2l$  da cui  $l = n$ .

$$\begin{aligned} p_C(s) &= x(s)a(s) + z(s)b(s) = (s^n + x_{n-1}s^{n-1} + \cdots + x_1s)(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \\ &\quad a_1s + a_0) + (z_n s^n + z_{n-1}s^{n-1} + \cdots + z_1s + z_0)(b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1s + b_0) = \\ &= s^{2n} + (x_{n-1} + b_{n-1}z_n + a_{n-1})s^{2n-1} + (a_{n-1}x_{n-1} + x_{n-2} + b_{n-2}z_n + b_{n-1}z_{n-1} + \end{aligned}$$

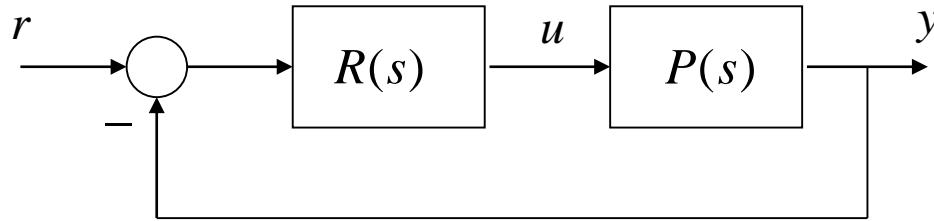
$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n-1} + b_{n-1}z_n = d_{2n-1} - a_{n-1} \\ a_{n-1}x_{n-1} + x_{n-2} + b_{n-2}z_n + b_{n-1}z_{n-1} = d_{2n-2} - a_{n-2} \\ \dots \\ a_0x_1 + b_0z_1 + b_1z_0 = d_1 \\ b_0z_0 = d_0 \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|ccccc|c|cc} 1 & 0 & & 0 & 0 & b_{n-1} & 0 & & 0 & 0 & x_{n-1} & d_{2n-1} - a_{n-1} \\ a_{n-1} & 1 & 0 & & 0 & b_{n-2} & b_{n-1} & 0 & & 0 & x_{n-2} & d_{2n-2} - a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & & & b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} & 0 & 0 & x_{n-3} & d_{2n-3} - a_{n-3} \\ a_{n-2} & \ddots & \ddots & & & b_{n-3} & b_{n-2} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ a_2 & & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & b_1 & & \ddots & b_{n-2} & b_{n-1} & 0 & x_1 & d_{n+1} - a_1 \\ \hline a_1 & a_2 & & a_{n-2} & a_{n-1} & b_0 & b_1 & & \ddots & b_{n-2} & b_{n-1} & 0 & z_n & d_n - a_0 \\ a_0 & a_1 & \ddots & & a_{n-2} & 0 & b_0 & b_1 & & \ddots & b_{n-2} & b_{n-1} & z_{n-1} & = & d_{n-1} \\ 0 & a_0 & \ddots & \ddots & & 0 & b_0 & \ddots & & \ddots & b_{n-2} & \ddots & z_{n-2} & & d_{n-2} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \ddots & & a_0 & a_1 & a_2 & & & \ddots & \ddots & b_1 & & & & & \\ \ddots & & a_0 & a_1 & & 0 & & \ddots & b_0 & b_1 & & z_2 & & d_2 \\ 0 & & 0 & a_0 & & 0 & 0 & & 0 & b_0 & b_1 & z_1 & = & d_1 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & b_0 & z_0 & & & d_0 \end{array} \right]$$

La sottomatrice colorata in rosa è non singolare ( $a(s)$  e  $b(s)$  sono coprimi fra loro). Quindi essendo  $b_0 \neq 0$  anche la matrice complessiva è non singolare. Ne consegue che il problema di regolazione asintotica può essere risolto con assegnazione arbitraria dei poli del sistema retroazionato. ■

Nota: come scegliere i poli retroazionati? Spesso con metodi numerici di ottimizzazione considerando i possibili vincoli ed indici da minimizzare (o massimizzare)

# I regolatori PID



$$R(s) = K_p \left( 1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right)$$

Nelle implementazioni  $T_d s$  è sostituito con  $\frac{T_d s}{1+\tau s}$  ( $\tau \ll T_d$ )

$K_p$   $\equiv$  costante (o sensibilità) proporzionale

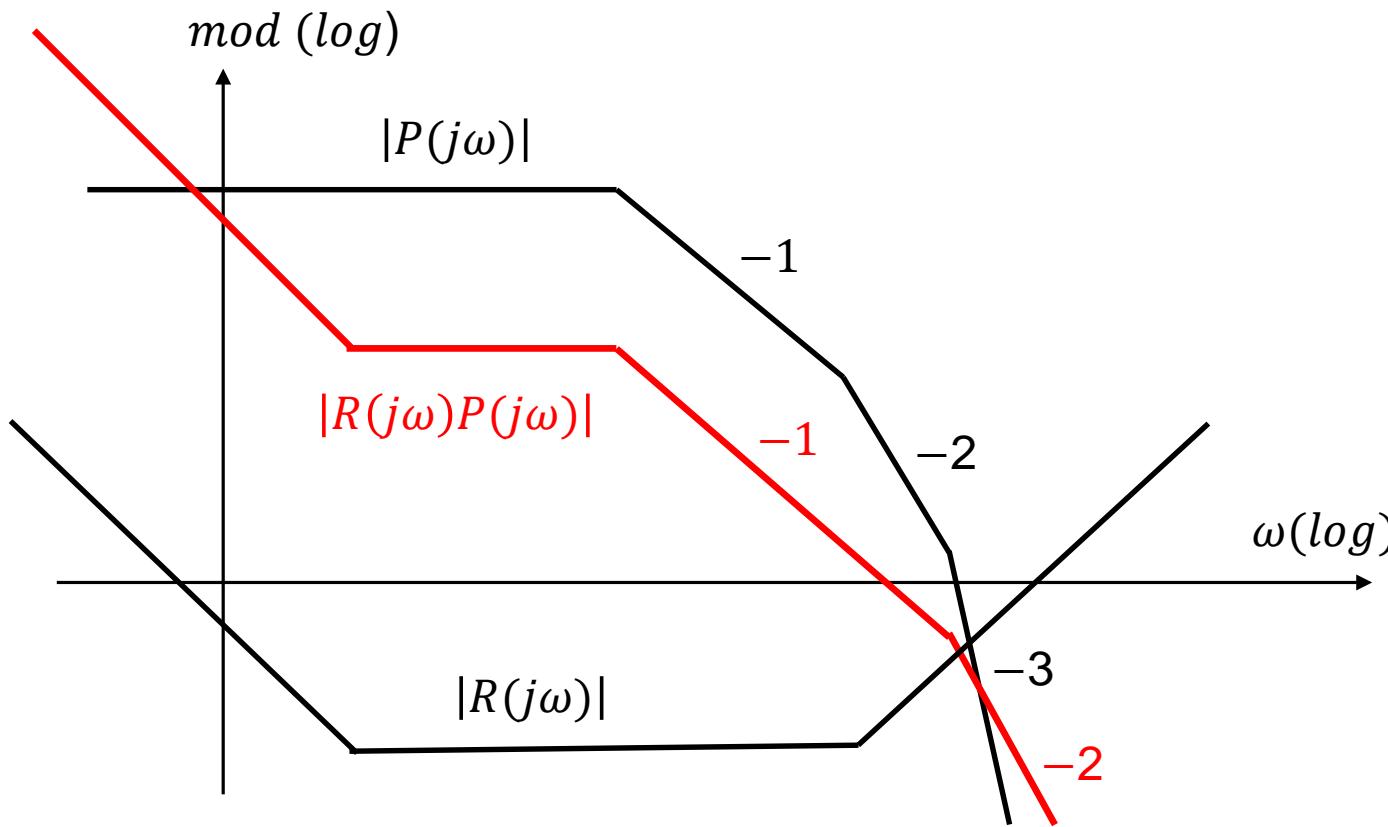
$T_d$   $\equiv$  costante di tempo dell'azione derivativa

$T_i$   $\equiv$  costante di tempo dell'azione integrale

$\frac{1}{K_p}$   $\equiv$  banda proporzionale

Casi particolari: regolatore P, regolatore I, regolatore PI, regolatore PD

# Progetto frequenziale del regolatore PID



$P(s)$  asintoticamente stabile e a fase minima  
Regolatore PID con zeri reali

$$R(s) = K_p \left( 1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) = \frac{K_p}{T_i} \cdot \frac{T_d T_i s^2 + T_i s + 1}{s} = \frac{K_p}{T_i} \cdot \frac{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}{s}$$

$$T_d T_i = \frac{1}{\omega_n^2}, \quad T_i = \frac{2\delta}{\omega_n} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \frac{1}{\sqrt{T_d T_i}}, \quad \delta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{T_i}{T_d}}$$

$$R(j\omega) = \frac{K_p}{T_i} \cdot \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2\delta \frac{j\omega}{\omega_n}}{j\omega}$$

$$R(j\omega_n) = \frac{K_p}{T_i} \cdot \frac{2\delta}{\omega_n} = K_p$$

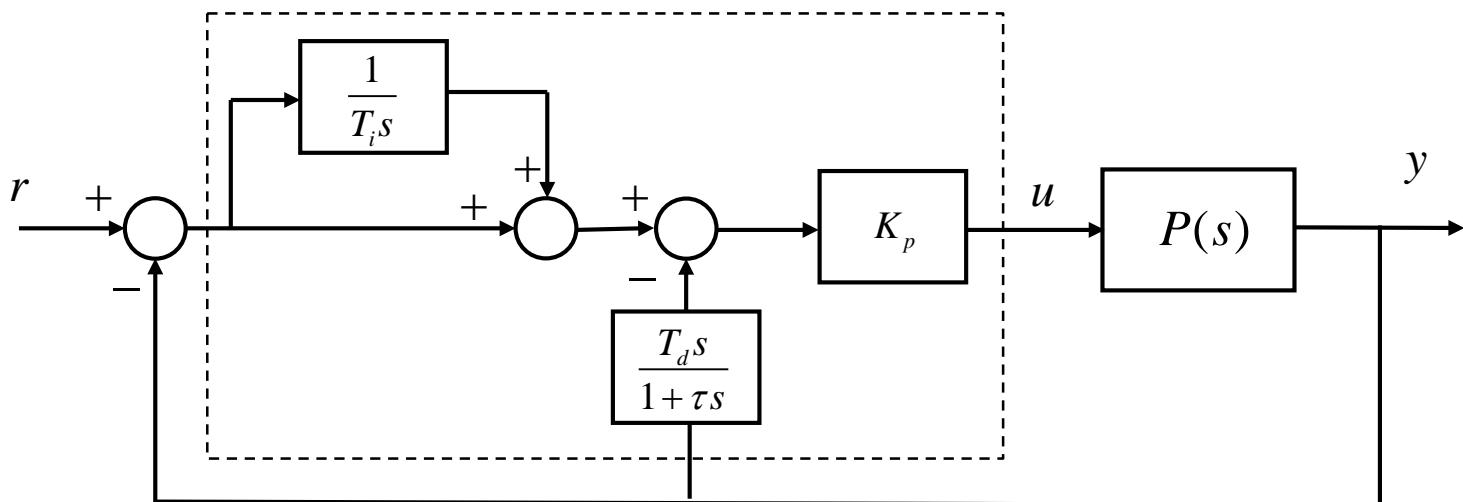
Sintesi di  $R(s)$  con imposizione del margine di fase  $M_f$

- 1) Si determina  $\omega_0$  soluzione di  $\arg P(j\omega_0) = -\pi + M_f$
- 2) Si impone  $\omega_n = \omega_0$  e  $R(j\omega_n) = \frac{1}{|P(j\omega_0)|}$  da cui  $K_p = \frac{1}{|P(j\omega_0)|}$  ;  
 scelto il rapporto  $k := \frac{T_i}{T_d}$  segue  $\delta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{k}$  e  $T_i = \frac{2\delta}{\omega_n} = \frac{\sqrt{k}}{\omega_0}$  ;  
 da  $T_d T_i = \frac{1}{\omega_n^2}$  segue  $T_d = \frac{1}{T_i \omega_0^2} = \frac{1}{\sqrt{k} \omega_0}$

# Implementazione dei regolatori PID

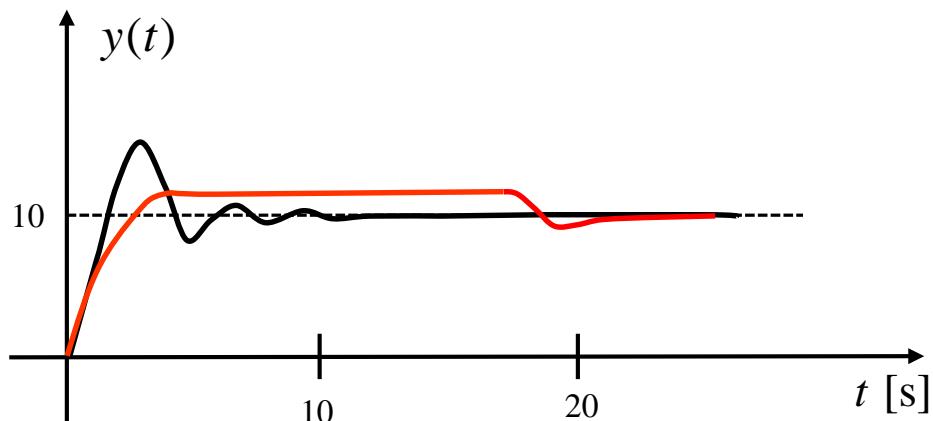
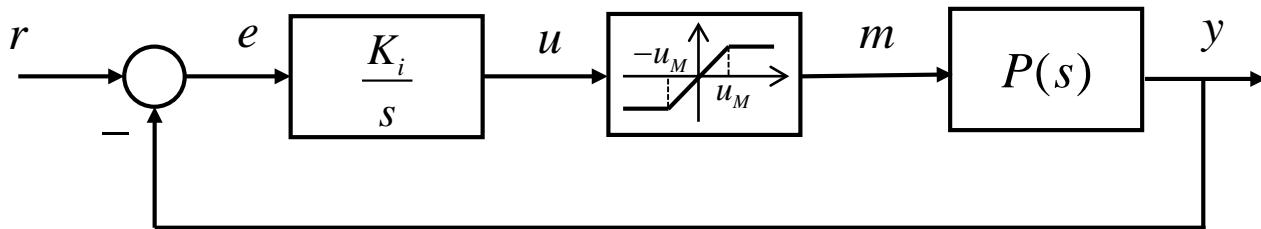
## 1. Limitazione dell'azione derivativa $\frac{T_d s}{1 + \tau s}$

- $\tau = \frac{T_d}{N}$ , usualmente  $N = 5 \div 20$
- Azione derivativa agente solo sull'uscita regolata secondo lo schema:



## 2. Desaturazione dell'azione integrale

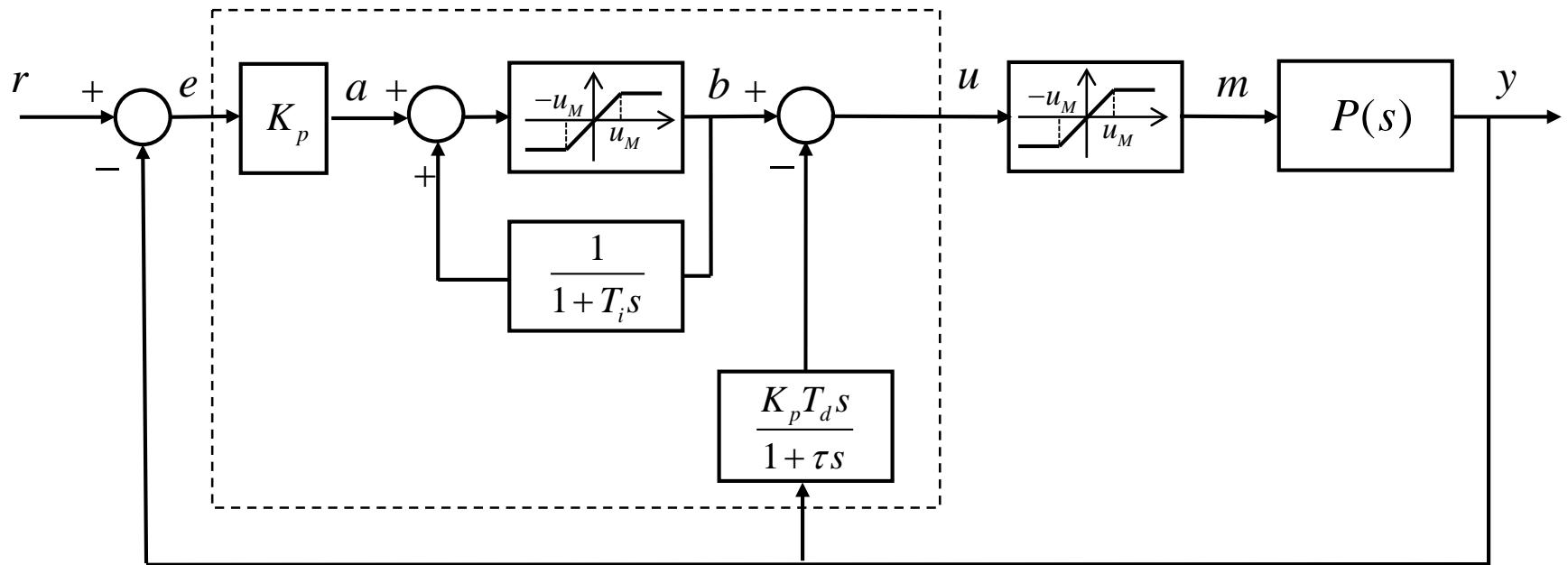
- Il problema della «carica integrale» (*integral wind-up*) quando l'attuatore è saturante. Esempio del fenomeno con un regolatore I (integrale):



Dati:

$$m(t) = \begin{cases} -u_M, & u(t) < -u_M \\ u(t), & |u(t)| \leq u_M \\ u_M, & u(t) > u_M \end{cases}$$
$$P(s) = \frac{1}{s+1}, \quad K_i := \frac{K_p}{T_i} = 2,$$
$$u_M = 11, \quad r(t) = 10 \cdot 1(t)$$

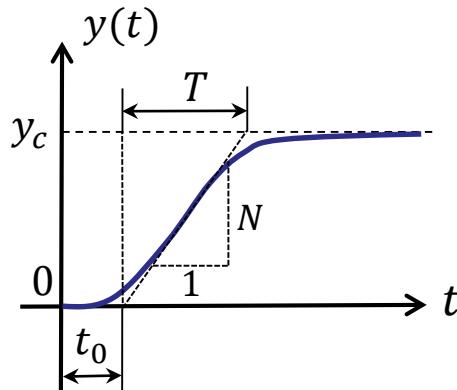
- Regolatore PID con desaturazione (*anti-wind-up*)



# Metodi di taratura dei regolatori PID

Metodo di Ziegler-Nichols (1942) ad anello aperto:

Identificazione del processo da regolare mediante applicazione di un gradino all'ingresso  $u(t) = u_c 1(t)$



$t_0$  tempo di ritardo  
 $T$  costante di tempo  
 $R := t_0/T$  rapporto di ritardo  
 $K := y_c/u_c$  guadagno statico  
 $N := y_c/T$  velocità di risposta

$$P(s) = \frac{Ke^{-t_0 s}}{1 + Ts}$$

Parametri di Cohen-Coon (1953)

Regolatore P:  $K_p = \frac{u_c}{Nt_0} \left(1 + \frac{R}{3}\right)$ ; Regolatore I:  $\frac{K_p}{T_i} = \frac{4u_c}{Nt_0^2} \frac{R^2}{1+5R}$ ,

Regolatore PI:  $K_p = \frac{u_c}{Nt_0} \left(\frac{9}{10} + \frac{R}{12}\right)$ ,  $T_i = t_0 \frac{30+3R}{9+20R}$ ; Regolatore PD:  $K_p = \frac{u_c}{Nt_0} \left(\frac{5}{4} + \frac{R}{6}\right)$ ,  $T_d = t_0 \frac{6-2R}{22+3R}$ ;

Regolatore PID:  $K_p = \frac{u_c}{Nt_0} \left(\frac{4}{3} + \frac{R}{4}\right)$ ,  $T_i = t_0 \frac{32+6R}{13+8R}$ ,  $T_d = t_0 \frac{4}{11+2R}$ ;

Metodo di Ziegler-Nichols (1942) ad anello chiuso:  
Con un regolatore proporzionale si porta il sistema retroazionato nella condizione di stabilità limite (innesco di autooscillazioni sull'uscita dell'impianto)

$K_0$  guadagno critico (del regolatore P nella condizione di stabilità limite)  
 $T_0$  periodo dell'oscillazione

Regolatore P:  $K_p = 0.5K_0$ ;

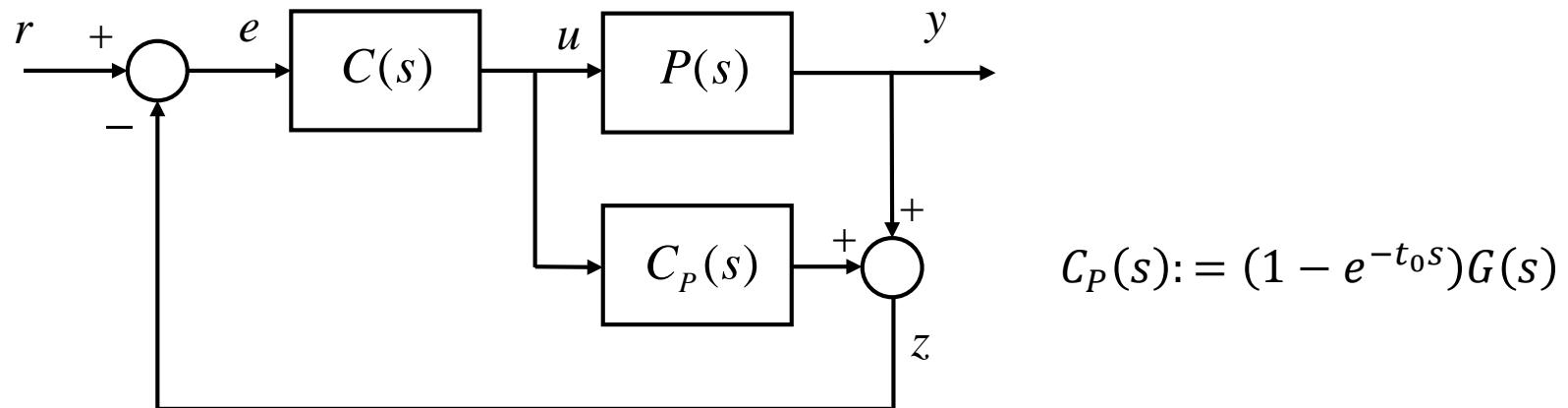
Regolatore PI:  $K_p = 0.45K_0$ ,  $T_i = 0.85T_0$ ; Regolatore PD:  $K_p = 0.5K_0$ ,  $T_d = 0.2T_0$ ;

Regolatore PID:  $K_p = 0.6K_0$ ,  $T_i = 0.5T_0$ ,  $T_d = 0.12T_0$

- Tante regole di taratura pubblicate nella letteratura tecnica
- Algoritmi di auto-sintonia (*self-tuning*)

# Controllo dei sistemi con ritardo

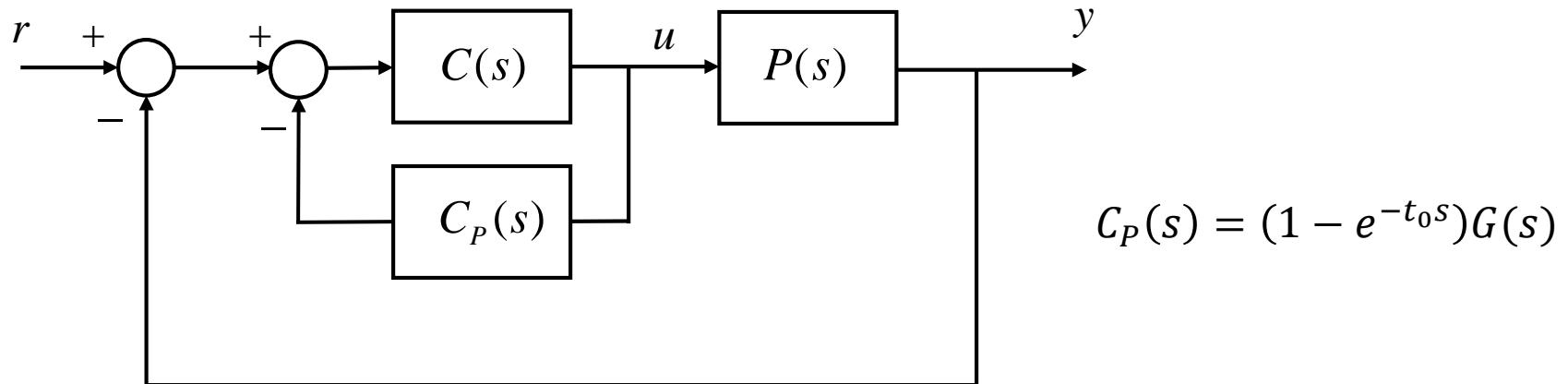
Lo schema classico di controllo in retroazione per i sistemi affetti da ritardo di tempo ( $P(s) = G(s)e^{-t_0 s}$ ) impone una forte limitazione nelle prestazioni. Lo **schema a predittore di Smith** (1958) supera questa limitazione.



$$Z(s) = G(s)U(s) \Rightarrow T_{ry}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} e^{-t_0 s}$$

Lo schema utilizza per la retroazione il segnale  $z$ , una predizione del segnale controllato  $y$  [  $z(t) = y(t + t_0)$  ]

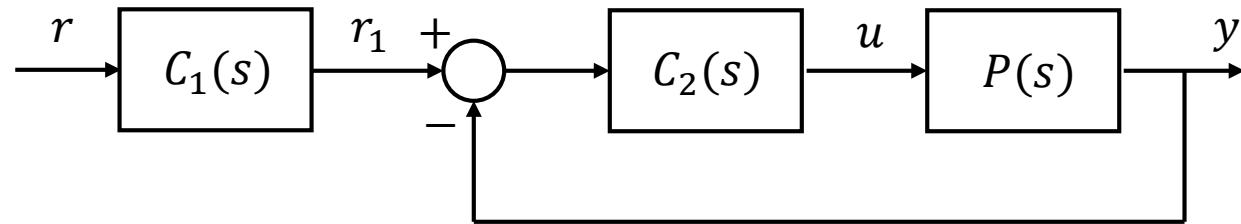
Lo schema a predittore di Smith può essere implementato con il seguente schema equivalente:



Lo schema a predittore di Smith prevede nel controllore una replica dell'impianto  $G(s)e^{-t_0 s}$ . L'implementazione analogica del ritardo finito ( $e^{-t_0 s}$ ) è difficile (uso delle approssimanti di Padé) mentre l'implementazione digitale è facile.

# Controllo feedforward/feedback (schemi di controllo a due gradi di libertà ) [cenno]

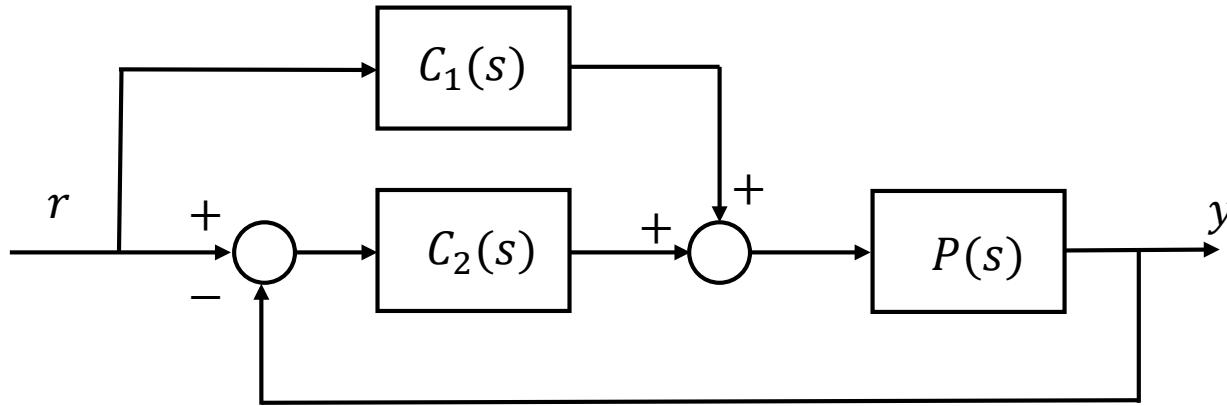
Prefiltraggio del segnale di riferimento



Sintesi del «filtro»  $C_1(s)$ :

- Filtraggio statico  $C_1(s) = T_{r_1y}(0)^{-1}$
- Filtraggio passa-basso
- Filtraggio passa-alto

## Compensazione del segnale di riferimento



$$T_{ry}(s) = \frac{C_1(s)P(s)}{1 + C_2(s)P(s)} + \frac{C_2(s)P(s)}{1 + C_2(s)P(s)}$$

Se  $C_1(s) = P(s)^{-1} \Rightarrow T_{ry}(s) = 1 !$

$P(s)^{-1}$  è il «sistema inverso» di  $P(s)$  e come tale non può essere realizzato (implementato) quando l'impianto controllato

- 1) è strettamente proprio (condizione verificata della quasi totalità degli impianti controllati) oppure
- 2) ha zeri con parte reale positiva (sistemi a fase non minima).

## Realizzazione del sistema inverso

L'impedimento 1 (sistema strettamente proprio) può essere superato mediante la costruzione di un **sistema inverso approssimato**.

Esempio:

$$P(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+4)},$$

$P(s)^{-1} = \frac{(s+2)(s+4)}{s+1} \cong \frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(1+\tau s)}$  con  $\tau$  positivo e piccolo (sistema realizzabile che approssima il sistema inverso di  $P(s)$ ).

L'impedimento 2 (sistema a fase non minima) è causato dal fatto che il **sistema inverso è instabile**.

Esempio:

$$P(s) = \frac{1-s}{(s+2)(s+4)}, \quad P(s)^{-1} = \frac{(s+2)(s+4)}{1-s} \text{ è un sistema instabile!}$$

Il superamento dell'impedimento 2 è possibile ricorrendo al metodo dell'**inversione dinamica stabile**.

# Controllo mediante inversione dinamica (inversion-based control)

L'inversione dinamica è un metodo di controllo feedforward (ad azione diretta):

- 1) Si definisce (progetta) il segnale d'uscita desiderato  $y_d(t)$
- 2) Si determina il segnale d'ingresso inverso  $u_d(t)$  che causa sull'uscita  $y_d(t)$ :  
$$(u_d, y_d) \in \mathcal{B}$$

$y_d(t)$  è usualmente un segnale causale e limitato. Si richiede che l'ingresso inverso sia un segnale limitato.

Procedura di inversione standard

$$P(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}, \quad a(s) = q(s)b(s) + c(s), \quad \deg q(s) = n - m := \rho$$

$$Y_d(s) = P(s)U_d(s) \Rightarrow U_d(s) = P^{-1}(s)Y_d(s) = \frac{q(s)b(s) + c(s)}{b(s)}Y_d(s) = \left( q(s) + \frac{c(s)}{b(s)} \right)Y_d(s)$$

$$U_d(s) = q(s)Y_d(s) + \frac{c(s)}{b(s)}Y_d(s) = (q_\rho s^\rho + q_{\rho-1} s^{\rho-1} + \dots + q_0)Y_d(s) + \frac{c(s)}{b(s)}Y_d(s)$$

$$u_d(t) = q_\rho D^\rho y_d(t) + q_{\rho-1} D^{\rho-1} y_d(t) + \dots + q_0 y_d(t) + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{c(s)}{b(s)} Y_d(s) \right]$$

## Procedura di inversione standard

$$u_d(t) = q_\rho D^\rho y_d(t) + q_{\rho-1} D^{\rho-1} y_d(t) + \cdots + q_0 y_d(t) + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{c(s)}{b(s)} Y_d(s) \right]$$

Quando  $y_d$  e le derivate  $Dy_d, \dots, D^{\rho-1} y_d$  sono limitate e il sistema è

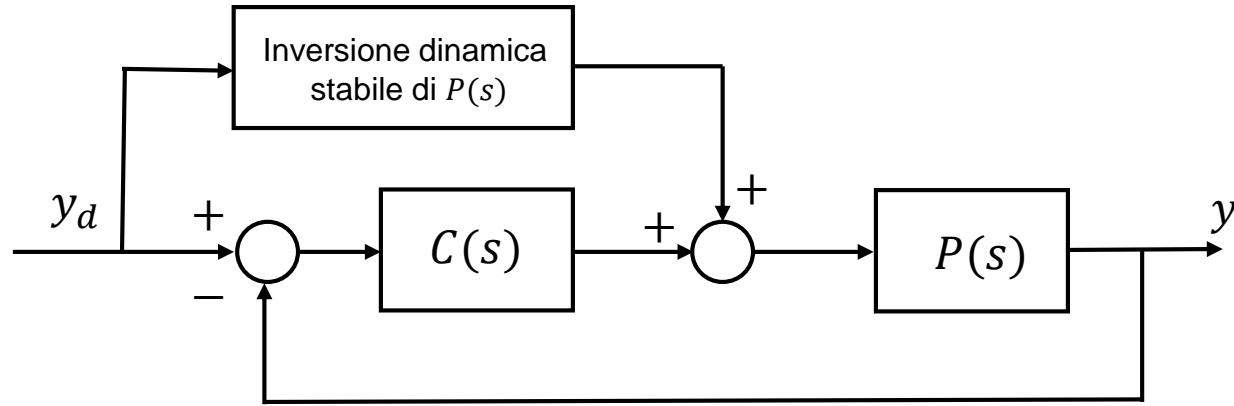
- 1) a fase minima il segnale  $u_d$  è limitato
- 2) a **fase non minima** il segnale  $u_d$  è **illimitato**

Quando il sistema dinamico è a **fase non minima** è ancora possibile determinare un segnale d'ingresso inverso  $u_d(t)$  limitato (soddisfacente  $(u_d, y_d) \in \mathcal{B}$ ) con una procedura di inversione diversa chiamata di «**inversione dinamica stabile**» (1996). Il segnale inverso  $u_d(t)$  determinato è non causale.

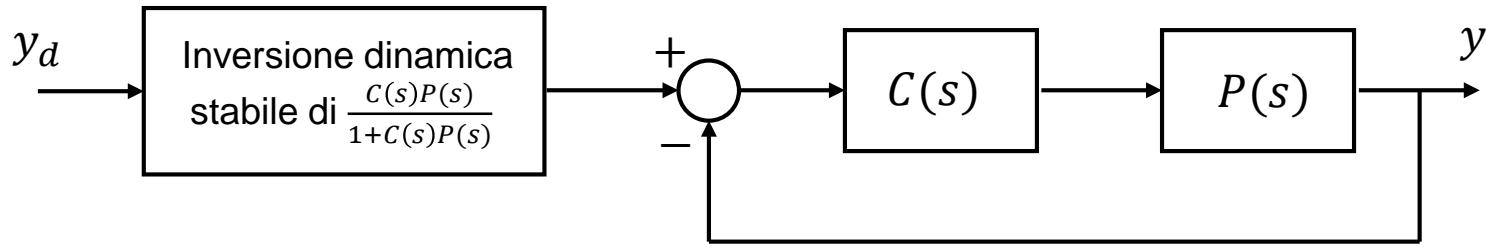
Note:

- Assunzione: non devono essere presenti zeri del sistema puramente immaginari
- Coincide con la procedura di inversione dinamica standard quando il sistema è a fase minima

## Schemi feedforward/feedback con inversione dinamica stabile



Schema con inversione dell'impianto (plant inversion architecture)



Schema con inversione del sistema retroazionato (closed-loop inversion architecture)

Note:

- Il progetto del controllore in retroazione  $C(s)$  è orientato a perseguire un'adeguata robustezza delle prestazioni.
- Quando l'inversione dinamica stabile è esatta i due schemi sono equivalenti (2020).

# Conclusioni

Elenchiamo alcune delle tecniche utili nella sintesi di un controllore in retroazione a struttura prefissata  $C(s; \mathbf{p})$  dove  $\mathbf{p} = [p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_k]^T$  indica il vettore dei parametri di progetto ( $\mathbf{p} \in \mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}$  e usualmente  $\mathcal{P} = [p_1^-, p_1^+] \times \cdots \times [p_k^-, p_k^+]$ ).

- Criterio di Routh o metodi con uso della tabella di Routh (imposizione di un prefissato grado di stabilità  $G_S$ , imposizione del margine di ampiezza  $M_A$ , ecc.).
- Diagrammi di Nyquist e formule di inversione (progetti in frequenza con imposizione di margini di stabilità, ecc.).
- Diagrammi di Bode (progetti in frequenza per sistemi a fase minima, progetti con specifiche frequenziali su  $T_{ry}(j\omega)$  o  $T_{dy}(j\omega)$ , ecc.).
- Metodi di cancellazione polo-zero (anche utili per ridurre il numero  $k$  dei parametri di progetto).
- Metodo del polinomio caratteristico con uso del principio di identità dei polinomi (equazione diofantea, imposizione dei poli dominanti, ecc.).

- Metodo del luogo delle radici (sintesi con grado di stabilità massimo, specifiche sui poli dominanti, ecc.). Quale metodo qualitativo è utile nell'individuare la struttura appropriata per il controllore.

Nel progetto dei controllori e più in generale dei sistemi di controllo una buona pratica (*best practice*) è l'uso di **ottimizzazioni** (dei parametri di progetto) e di **simulazioni** al calcolatore per la verifica delle evoluzioni nelle varie situazioni operative.

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle  
Telecomunicazioni

**Lezione n. 17 di Fondamenti di Controlli Automatici**  
**prof. Aurelio Piazzì**

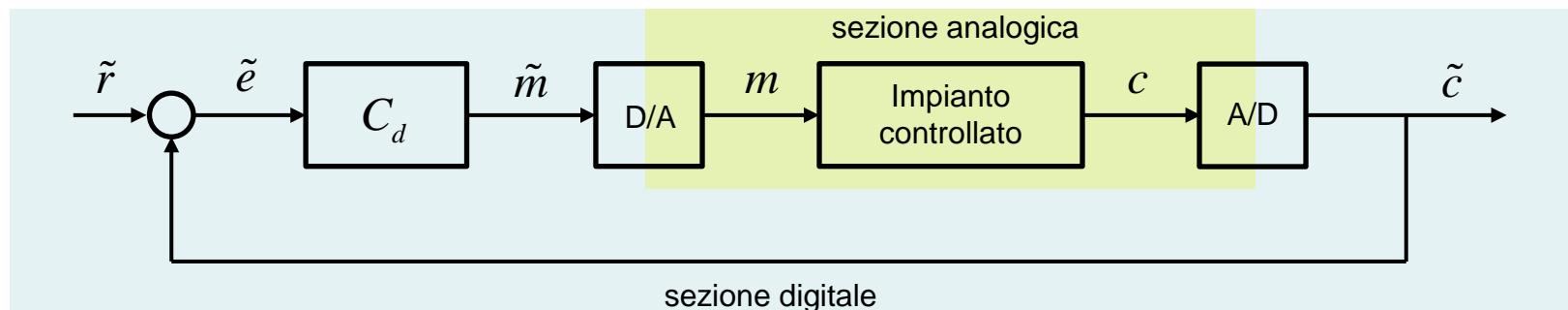
# **Introduzione al controllo digitale**

Università degli Studi di Parma – a.a. 2020-2021

- I sistemi di controllo digitale
- Campionamento dei segnali a tempo continuo e teorema di Shannon
- La trasformata Zeta di un segnale a tempo discreto

I **sistemi di controllo digitale** comprendono un elaboratore digitale nel sistema di controllo (sistemi di controllo con segnali campionati, sistemi di controllo a tempo discreto)

Un esempio di sistema di controllo digitale:



$m, c$  segnali a tempo continuo (analogici)

$\tilde{m}, \tilde{c}, \tilde{r}, \tilde{e}$  segnali a tempo discreto (digitali)

Convertitore D/A (digitale/analogico)

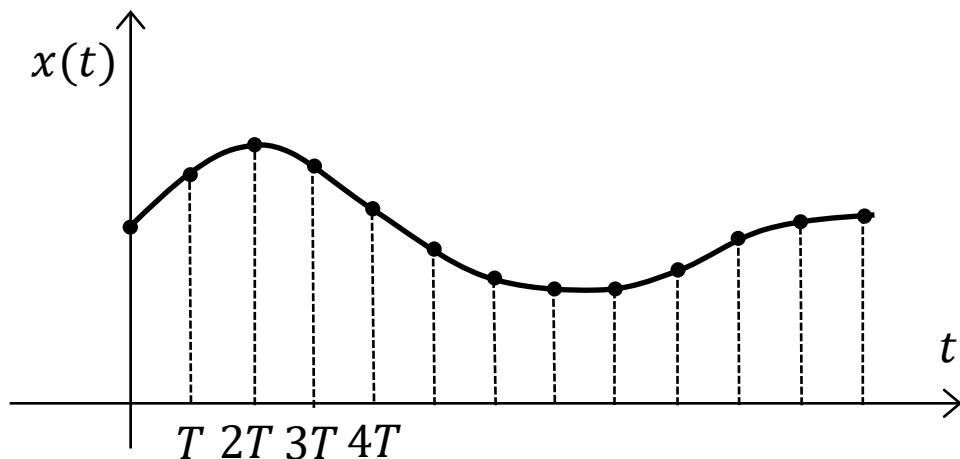
Convertitore A/D (analogico/digitale)

## Convertitore A/D



Campionamento del segnale con periodo  $T$ :

$$x(t) \rightarrow \tilde{x}(k) = x(kT), \quad k \in \mathbb{Z}$$



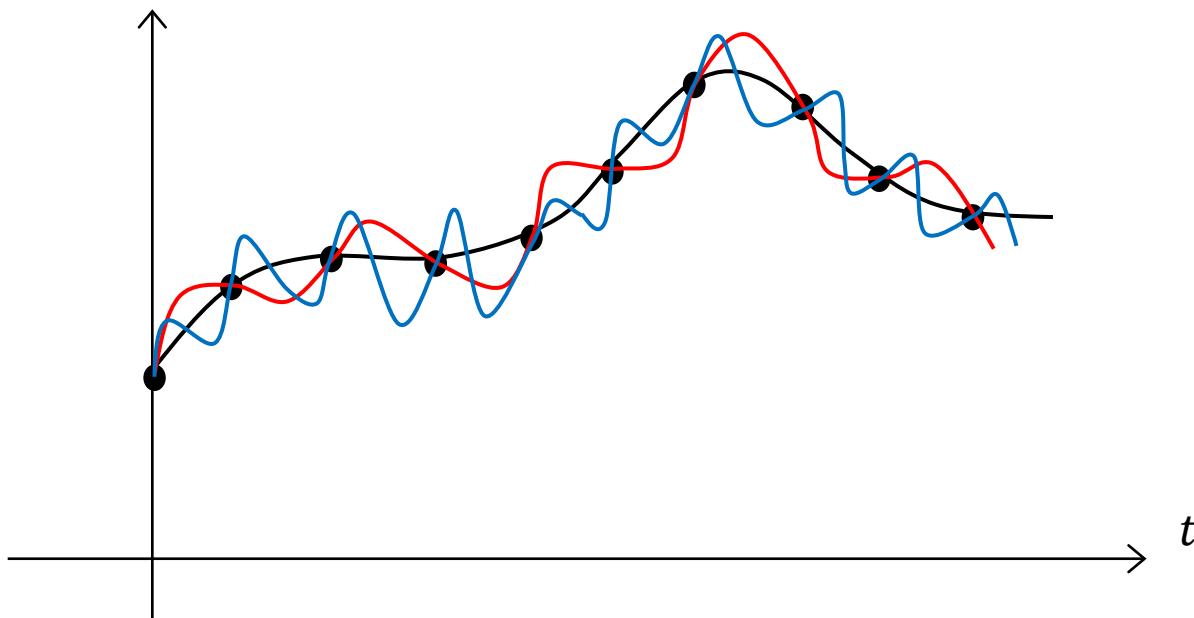
$\tilde{x}$  è una sequenza o  
successione di valori

Ogni campione viene rappresentato da un numero finito di bit  
(approssimazione del campione). Esempio: convertitori a 8, 10, 12 bit  
corrispondono a 256, 1024, 4096 livelli di quantizzazione.

**Assunzione: trascureremo la quantizzazione dei segnali**

# Conversione digitale-analogica

La conversione inversa, cioè la ricostruzione di un segnale analogico a partire dai suoi campioni, in generale non ammette un'unica soluzione.



## Il teorema del campionamento (Shannon 1948)

Un segnale  $f(t)$  con spettro limitato da 0 a  $\omega_s$ , cioè con trasformata di Fourier  $F(j\omega)$  nulla per  $\omega \geq \omega_s$ , si può ricostruire dalla sequenza di campioni  $\tilde{f}(k) = f(kT)$  se e solo se la pulsazione di campionamento  $\Omega = 2\pi/T$  è non inferiore a  $2\omega_s$ .

## Fenomeno di **aliasing**:

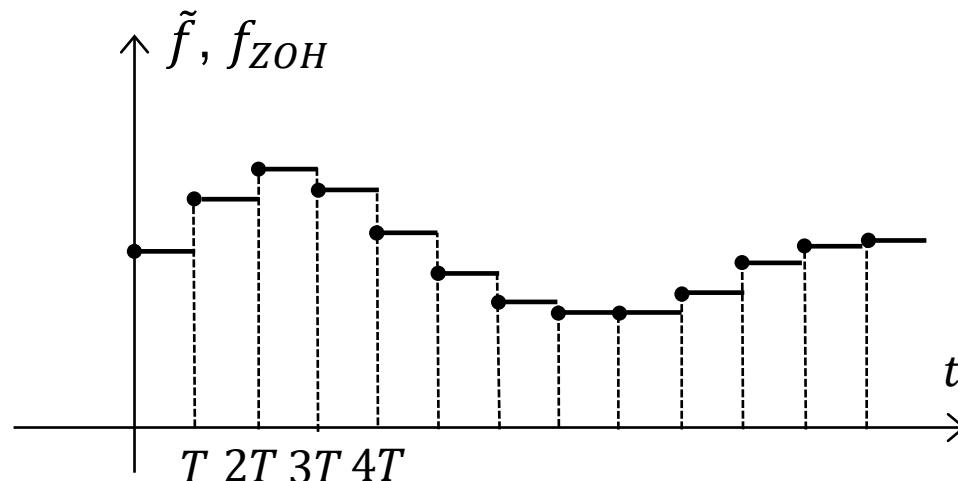
Quando il teorema del campionamento è violato emerge l'aliasing. Il sottocampionamento implica l'impossibilità di ricostruire il segnale a tempo continuo e nei sistemi di controllo a segnali campionati emergono disturbi (alias) che pregiudicano le prestazioni del sistema di controllo.

Per ovviare questo problema si utilizzano **filtri anti-aliasing** (di tipo passa-basso) di Butterworth o di Bessel per esempio.

## Convertitore D/A



Il più comune è il dispositivo di tenuta  
di ordine zero (zero-order hold)



$$f_{ZOH}(t) = \tilde{f}(k) \quad \text{se } t \in [kT, (k+1)T), \quad k \in \mathbb{Z}$$

# La trasformata zeta

Emerge la necessità di introdurre i segnali e i sistemi a tempo discreto: uno strumento fondamentale è la **trasformata Zeta** (Hurewicz 1947, Ragazzini, Zadeh 1952).

**def.**

Sia  $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  (o  $\mathbb{C}$ ) un segnale a tempo discreto (anche sequenza o successione). La trasformata zeta di  $x(k)$  è

$$\mathcal{Z}[x] \equiv \mathcal{Z}[x(k)] := \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)z^{-k}$$

con  $z$  variabile complessa.

$$X(z) := \mathcal{Z}[x]$$

$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots + x(k)z^{-k} + \cdots$$

Se esistono  $\rho > 0$  e  $M > 0$  per i quali vale  $|x(k)| \leq M\rho^k, k \geq 0$   
 allora  $X(z)$  è analitica su  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \rho\}$ .

**Esempi:**

$$x(k) = a^k, \quad \mathcal{Z}[a^k] = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a}$$

convergente per  $|z| > |a|$ ; per continuazione analitica

$$X(z) = \frac{z}{z-a} \text{ è ben definita per ogni } z \neq a.$$

$$\text{Se } a = 1 \text{ otteniamo } \mathcal{Z}[1^k] = \mathcal{Z}[1(k)] = \frac{z}{z-1}$$

## Esempi:

La delta di Dirac discreta o impulso (a tempo) discreto è

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}[\delta(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(k) z^{-k} = 1$$

## Linearità della trasformata zeta:

Dati due segnali  $x(k)$ ,  $y(k)$  e  $a, b \in \mathbb{C}$ :

$$\mathcal{Z}[ax(k) + by(k)] = a\mathcal{Z}[x(k)] + b\mathcal{Z}[y(k)]$$

La regione di convergenza della trasformata zeta (ROC, region of convergence)

**def.** (regione di convergenza o ROC)

Data la sequenza  $x(k)$ , la regione di convergenza, ROC di  $X(z)$  ( $= \mathcal{Z}[x(k)]$ ) è definita da

$$\text{ROC} := \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \right| < \infty \right\}.$$

## Proprietà

1.  $X(z)$  è analitica su ROC.

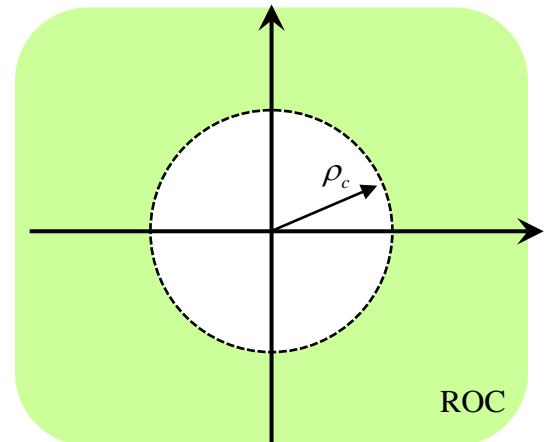
2. Se ROC non è l'insieme vuoto:

$$\text{ROC} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > \rho_c\}$$

$\rho_c$  ≡ raggio di (assoluta) convergenza

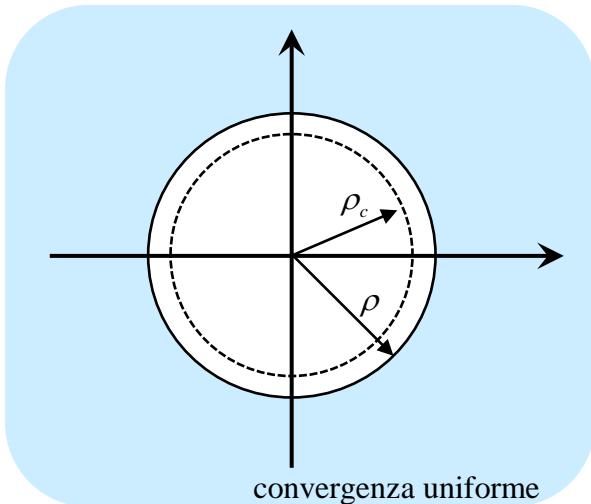
$$\rho_c = \limsup_{k \rightarrow +\infty} |x(k)|^{1/k} := \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{m \geq k} \{|x(m)|^{1/m}\}$$

(formula di Hadamard)



3. Se  $\rho > \rho_c$  la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$  è convergente

uniformemente su  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq \rho\}$ .



Esercizi:

$$\mathcal{Z}[\sin(\omega k)] = \frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$$

$$\mathcal{Z}[\cos(\omega k)] = \frac{z(z - \cos \omega)}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$$

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle  
Telecomunicazioni

**Lezione n. 18 di Fondamenti di Controlli Automatici**  
**prof. Aurelio Piazzì**

# **Proprietà della trasformata zeta**

Università degli Studi di Parma – a.a. 2020-2021

## Trasformata zeta di un segnale ritardato di n passi

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[x(k-n)] &= z^{-n} \mathcal{Z}[x(k)] + \sum_{k=0}^{n-1} x(k-n)z^{-k} \\ &= z^{-n} \mathcal{Z}[x(k)] + x(-n) + x(-n+1)z^{-1} + \cdots + x(-1)z^{-n+1}\end{aligned}$$

Dim.: ...

Se le "condizioni iniziali" del segnale  $x(k)$  sono nulle vale:

$$\mathcal{Z}[x(k-n)] = z^{-n} \mathcal{Z}[x(k)]$$

$z^{-1}$  è l'operatore ritardo di un passo.

In generale vale:

$$\mathcal{Z}[x(k-n)l(k-n)] = z^{-n} \mathcal{Z}[x(k)]$$

## Trasformata zeta di un segnale anticipato di n passi

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[x(k+n)] &= z^n \mathcal{Z}[x(k)] - \sum_{i=0}^{n-1} x(i)z^{n-i} \\ &= z^n \mathcal{Z}[x(k)] - x(0)z^n - x(1)z^{n-1} - \dots - x(n-1)z\end{aligned}$$

Dim.: ...

$z$  è l'operatore anticipo di un passo.

Esempi:

$$\mathcal{Z}[2^{k+2}] = \frac{4z}{z-2}; \quad \mathcal{Z}[\sin(k+1)] = \frac{\sin 1 \cdot z^2}{z^2 - 2 \cos 1 \cdot z + 1}$$

## Teorema del valore iniziale

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \mathcal{Z}[x(k)]$$

Dim.: ...

Esempio:

$$x(k) = \cos(k) + 4^k, \quad X(z) = \frac{z(z - \cos 1)}{z^2 - 2z \cos 1 + 1} + \frac{z}{z - 4},$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = 2$$

## Teorema del valore finale

Dato il segnale  $x(k)$  per il quale il limite  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x(k)$  esiste ed è finito, vale

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \mathcal{Z}[x(k)]$$

Esempi:

$$x(k) = 0.8^k + 1, \quad X(z) = \frac{z}{z - 0.8} + \frac{z}{z - 1}, \quad \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z) = 1 \quad \text{ok}$$

$$x(k) = \sin k, \quad X(z) = \frac{z \sin 1}{z^2 - 2z \cos 1 + 1}, \quad \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z) = 0 \quad \text{!! non valido}$$

## Teorema del valore finale (versione estesa)

Dato il segnale  $x(k)$  sia  $X(z) := \mathcal{Z}[x(k)]$ .

1. Se  $X(z)$  non ha poli nella regione  $|z| \geq 1$  allora  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x(k) = 0$ .
2. Se  $X(z)$  non ha poli nella regione  $|z| \geq 1$  ad eccezione di un polo semplice in  $z = 1$  allora  $x(k)$  converge per  $k \rightarrow +\infty$  e vale
$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x(k) = \text{Res}\{X(z), 1\} = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z).$$
3. Se  $X(z)$  ha un polo multiplo in  $z = 1$ , allora  $x(k)$  non converge per  $k \rightarrow +\infty$ .
4. Se  $X(z)$  ha un polo nella regione  $|z| \geq 1$ ,  $z \neq 1$ , allora  $x(k)$  non converge per  $k \rightarrow +\infty$ .

Esempi:

$$1. \ X(z) = \frac{z-1}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = 0$$

$$2. \ X(z) = \frac{1}{(z-1)\left(z - \frac{1}{3}\right)}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \text{Res}\{X(z), 1\} = \lim_{z \rightarrow 1}(z-1)X(z) = \frac{3}{2}$$

$$3. \ X(z) = \frac{2z+1}{(z-1)^2\left(z - \frac{1}{2}\right)}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) \text{ non converge}$$

$$4. \ X(z) = \frac{1}{z+1}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) \text{ non converge}$$

## Trasformata zeta di $a^k x(k)$

$$\mathcal{Z}[a^k x(k)] = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

Dim.: ...

Esempi

$$\mathcal{Z}[a^k \sin(\omega k)] = \mathcal{Z}[\sin(\omega k)]\left(\frac{z}{a}\right) = \frac{\frac{z}{a} \sin \omega}{\left(\frac{z}{a}\right)^2 - 2\frac{z}{a} \cos \omega + 1} = \frac{za \sin \omega}{z^2 - 2za \cos \omega + a^2}$$

$$\mathcal{Z}[a^k \cos(\omega k)] = \mathcal{Z}[\cos(\omega k)]\left(\frac{z}{a}\right) = \frac{\frac{z}{a} \left(\frac{z}{a} - \cos \omega\right)}{\left(\frac{z}{a}\right)^2 - 2\frac{z}{a} \cos \omega + 1} = \frac{z(z - a \cos \omega)}{z^2 - 2za \cos \omega + a^2}$$

## Convoluzione (a tempo discreto)

**Def.**

La convoluzione dei segnali discreti  $x(k)$  e  $y(k)$  è definita come

$$(x * y)(k) \equiv x(k) * y(k) := \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(k-i)y(i)$$

La convoluzione di  $x(k)$  e  $y(k)$  è il segnale ottenuto sommando infinite copie di  $x(k)$  ciascuna delle quali è traslata in avanti di  $i$  passi e moltiplicata per  $y(i)$ . Per esempio se  $y(k) = 0$ ,  $k < 0$

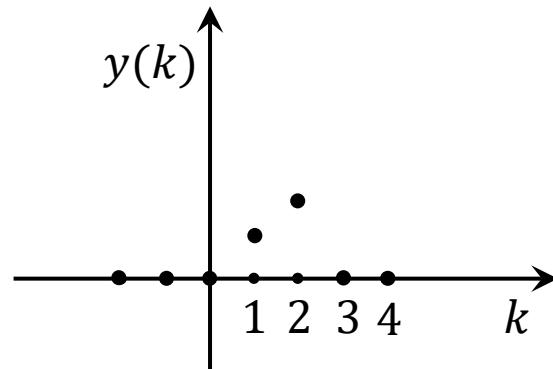
$$x(k) * y(k) = x(k)y(0) + x(k-1)y(1) + x(k-2)y(2) + \dots$$

## Esempi

$$x * y = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(k-i)y(i)$$

**1.**  $x(k) = 0.5^k$   $y(k) = \begin{cases} 0 & k \leq 0 \\ 1 & k = 1 \\ 2 & k = 2 \\ 0 & k \geq 3 \end{cases}$

$$x * y = 0.5^{k-1} + 2 \cdot 0.5^{k-2}$$



**2.**  $x(k) = y(k) = 1(k)$   $x * y = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} 1(k-i)1(i)$

Se  $k \geq 0$   $1(k-i)1(i) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq i \leq k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Se  $k \leq -1$   $1(k-i)1(i) = 0$  per ogni  $i \in \mathbb{Z}$

Segue  $1(k) * 1(k) = (k+1)1(k)$

## Commutatività della convoluzione

$$x(k) * y(k) = y(k) * x(k)$$

Dim.: ...

## Trasformata zeta della convoluzione

Se  $x(k)$  e  $y(k)$  sono segnali discreti tali che  $x(k) = 0$ ,  $y(k) = 0$  per  $k < 0$  (segnali causali) allora

$$\mathcal{Z}[x * y] = X(z)Y(z)$$

Dim.: ...

## Esempi

1.  $\mathcal{Z}[1(k) * 1(k)] = \mathcal{Z}[1(k)] \cdot \mathcal{Z}[1(k)] = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z}{z-1}$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}[(k+1)1(k)] = \frac{z^2}{(z-1)^2}$$

2. Se  $x(k) = (k+1)1(k)$  segue  $x(k-1) = k1(k-1) = k1(k)$

$$\mathcal{Z}[x(k-1)] = z^{-1} \mathcal{Z}[x(k)] + x(-1)$$

$$\mathcal{Z}[k1(k)] = z^{-1} \frac{z^2}{(z-1)^2} + 0 = \frac{z}{(z-1)^2} \text{ (trasformata zeta della rampa)}$$

## Derivata della trasformata zeta

Sia  $x(k)$  un segnale discreto e  $X(z)$  la corrispondente trasformata zeta. Nella regione in cui  $X(z)$  è analitica vale

$$-z \frac{dX(z)}{dz} = \mathcal{Z}[k \cdot x(k)]$$

Dim.: ...

Esempi

### 1. Trasformata zeta della rampa

$$\mathcal{Z}[k] = \mathcal{Z}[k \cdot 1(k)] = -z \cdot \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z-1} \right) = -z \cdot \frac{z-1 - z \cdot 1}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

## 2. Trasformata zeta della parabola

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[k^2] &= \mathcal{Z}[k \cdot k] = -z \cdot \frac{d}{dz} \mathcal{Z}[k] = -z \cdot \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{(z-1)^2} \right) \\ &= -z \cdot \frac{(z-1)^2 - z \cdot 2(z-1)}{(z-1)^4} = -z \cdot \frac{z-1 - z \cdot 2}{(z-1)^3} = -z \cdot \frac{-z-1}{(z-1)^3} \\ &= \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}\end{aligned}$$

$$\mathcal{Z}[1(k)] = \frac{z}{z-1}, \quad \mathcal{Z}[k1(k)] = \frac{z}{(z-1)^2}, \quad \mathcal{Z}[k^2 1(k)] = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle  
Telecomunicazioni

**Lezione n. 19 di Fondamenti di Controlli Automatici**  
**prof. Aurelio Piazzì**

# **Antitrasformazione Zeta**

Università degli Studi di Parma – a.a. 2020-2021

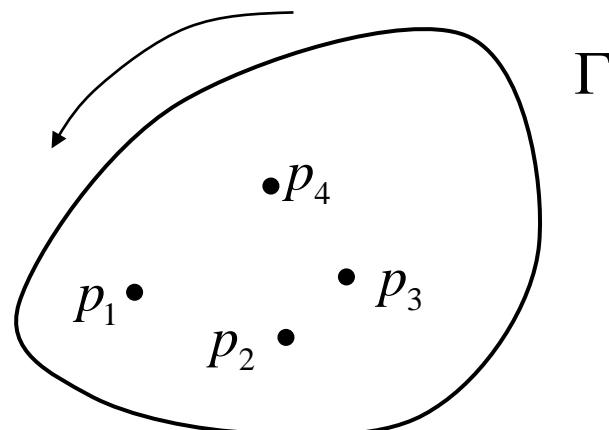
- Il teorema di antitrasformazione zeta
- Antitrasformazione zeta con il metodo dei residui
- Antitrasformazione zeta con il metodo dello sviluppo in fratti semplici
- Esercizi

## Teorema dei residui

Sia  $\Gamma$  una curva chiusa semplice e  $f(z)$  una funzione analitica su  $\Gamma$  e nella sua regione interna ad eccezione dei punti singolari  $p_1, p_2, \dots, p_n$  in essa contenuti.

Allora

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi j \sum_{i=1}^n \text{Res}\{f, p_i\}.$$



## Lemma

Sia  $l \in \mathbb{Z}$ , allora

$$\oint_{\Gamma} z^l dz = \begin{cases} 2\pi j & \text{se } l = -1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove  $\Gamma$  è una curva chiusa (semplice) che circonda l'origine di  $\mathbb{C}$  percorsa in senso antiorario.

Il lemma può essere dimostrato facilmente utilizzando il teorema dei residui

## Teorema (antitrasformazione zeta)

Sia  $X(z)$  la trasformata zeta di una sequenza  $x(k)$ , allora

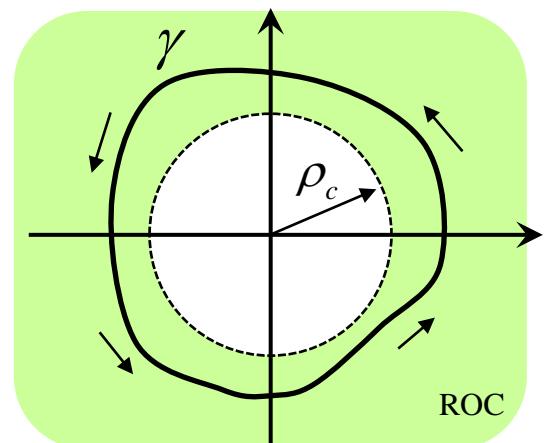
$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} X(z) z^{k-1} dz$$

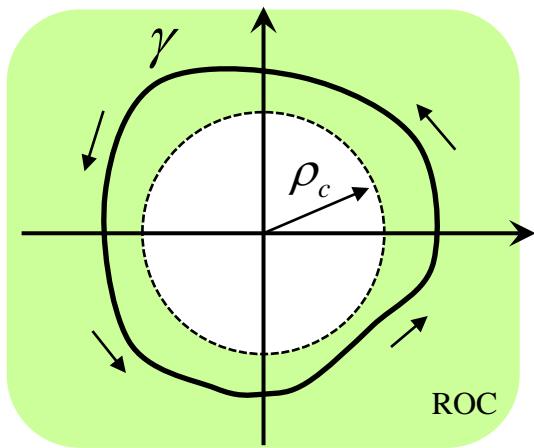
dove  $\gamma$  è una curva chiusa semplice, percorsa in senso antiorario, che circonda la regione di non convergenza di  $Z[x(k)]$ .

[La regione di non convergenza è

$$\mathbb{C} \setminus ROC = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq \rho_c\} \subset \{\text{regione interna di } \gamma\}]$$

Formalmente  $x(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$





$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} X(z) z^{k-1} dz$$

Dim.:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} X(z) z^{k-1} dz &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \left( \sum_{i=0}^{+\infty} x(i) z^{-i} \right) z^{k-1} dz \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \sum_{i=0}^{+\infty} x(i) \oint_{\gamma} z^{-i+k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} x(k) \cdot 2\pi j = x(k) \quad \square
 \end{aligned}$$

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} X(z) z^{k-1} dz$$

## Antitrasformazione zeta con il metodo dei residui

Applicando il teorema dei residui nel calcolo dell'integrale segue

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \cdot 2\pi j \sum_i \text{Res} \left\{ X(z) \cdot z^{k-1}, p_i \right\}.$$

I valori  $p_i$  sono le singolarità distinte di  $X(z) \cdot z^{k-1}$ .

Quindi

$$x(k) = \sum_i \text{Res} \left\{ X(z) \cdot z^{k-1}, p_i \right\}.$$

Richiamo di una proprietà utile

## Proprietà (sommatoria dei residui di una funzione razionale strettamente propria)

Sia  $F(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0}$  una funzione razionale

strettamente propria con  $a_n \neq 0, b_m \neq 0$  e  $p_1, p_2, \dots, p_h$  sono i suoi poli distinti. Segue allora

$$\sum_{i=1}^h \text{Res}\{F, p_i\} = \begin{cases} 0 & \text{se } n - m > 1 \\ \frac{b_m}{a_n} & \text{se } n - m = 1 \end{cases}$$

## **Calcolo di $\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z-a}\right]$ con il metodo dei residui**

$$X(z) = \frac{1}{z-a}, \quad x(k) = \sum_i \text{Res}\left\{X(z) \cdot z^{k-1}, p_i\right\}$$

Se  $k = 0$

$$x(0) = \sum_i \text{Res}\left\{\frac{1}{z-a} \cdot z^{-1}, p_i\right\} = \sum_i \text{Res}\left\{\frac{1}{z(z-a)}, p_i\right\} = 0$$

Se  $k \geq 1$

$$x(k) = \text{Res}\left\{\frac{z^{k-1}}{z-a}, a\right\} = \left.\left(\cancel{z-a}\right) \cdot \frac{z^{k-1}}{\cancel{z-a}}\right|_{z=a} = a^{k-1}$$

$$\text{Quindi } \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z-a}\right] = a^{k-1}1(k-1)$$

## Calcolo di $\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{(z-a)^n}\right]$ con il metodo dei residui

$$X(z) = \frac{1}{(z-a)^n}, \quad x(k) = \sum_i \text{Res}\left\{X(z) \cdot z^{k-1}, p_i\right\}$$

Se  $k = 0$

$$x(0) = \sum_i \text{Res}\left\{\frac{1}{(z-a)^n} \cdot z^{-1}, p_i\right\} = \sum_i \text{Res}\left\{\frac{1}{z(z-a)^n}, p_i\right\} = 0$$

Se  $k \geq 1$

$$\begin{aligned} x(k) &= \text{Res}\left\{\frac{z^{k-1}}{(z-a)^n}, a\right\} = \frac{1}{(n-1)!} D^{n-1} \left[ (z-a)^n \frac{z^{k-1}}{(z-a)^n} \right]_{z=a} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} D^{n-1} \left[ z^{k-1} \right]_{z=a} \end{aligned}$$

$$x(k) = \frac{1}{(n-1)!} D^{n-1} \left[ z^{k-1} \right]_{z=a} \text{ se } k \geq 1$$

$$D^1 \left[ z^{k-1} \right] = (k-1)z^{k-2}$$

$$D^2 \left[ z^{k-1} \right] = (k-1)(k-2)z^{k-3}$$

$$D^3 \left[ z^{k-1} \right] = (k-1)(k-2)(k-3)z^{k-4}$$

...

$$\begin{aligned} D^{\textcolor{red}{n-1}} \left[ z^{k-1} \right] &= (k-1)(k-2) \cdots (k - (\textcolor{red}{n-1})) z^{k-1-(\textcolor{red}{n-1})} \\ &= (k-1)(k-2) \cdots (k-n+1) z^{k-n} \end{aligned}$$

$$x(k) = \frac{(k-1)(k-2) \cdots (k-n+1)}{(n-1)!} a^{k-n}$$

Riassumendo:

$$X(z) = \frac{1}{(z-a)^n}$$

$$x(0) = 0, \quad x(k) = \frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{(n-1)!} a^{k-n}$$

Quindi

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{(z-a)^n}\right] = \frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{(n-1)!} a^{k-n} 1(k-1)$$

Si noti

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0, \quad x(2) = 0, \quad \dots, \quad x(n-1) = 0,$$

$$x(n) = 1, \quad x(n+1) = na, \quad x(n+2) = \frac{(n+1)n}{2} a^2, \quad x(n+3) = \frac{(n+2)(n+1)n}{3!} a^3, \dots$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{(z-a)^n}\right] = \frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{(n-1)!} a^{k-n} 1(k-1)$$

Utilizzando la definizione di coefficiente binomiale

$$\binom{l}{m} = \frac{l!}{m!(l-m)!} = \frac{l(l-1)\cdots(l-m+1)}{m!}$$

si può riscrivere la formula trovata come

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{(z-a)^n}\right] = \binom{k-1}{n-1} a^{k-n} 1(k-1)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{(z-a)^n}\right] = \frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{(n-1)!} a^{k-n} 1(k-1) = \binom{k-1}{n-1} a^{k-n} 1(k-1)$$

$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-a)^n}\right] = ?$  si può evitare di riapplicare il metodo dei residui

$$x(k) = \binom{k-1}{n-1} a^{k-n} 1(k-1), \quad X(z) = \frac{1}{(z-a)^n}$$

$$\mathcal{Z}[x(k+1)] = zX(z) - x(0)z = zX(z)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}[zX(z)] = x(k+1)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-a)^n}\right] = \binom{k}{n-1} a^{k+1-n} 1(k)$$

anche esprimibile come

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-a)^n}\right] = \frac{k(k-1)\cdots(k-n+2)}{(n-1)!} a^{k+1-n} 1(k)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{(z-a)^n}\right] &= \frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{(n-1)!} a^{k-n} \cdot 1(k-1) \\ &= \binom{k-1}{n-1} a^{k-n} \cdot 1(k-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-a)^n}\right] &= \frac{k(k-1)\cdots(k-n+2)}{(n-1)!} a^{k+1-n} \cdot 1(k) \\ &= \binom{k}{n-1} a^{k+1-n} \cdot 1(k)\end{aligned}$$

## Casi particolari

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z-a}\right] = a^{k-1} \cdot 1(k-1)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{(z-a)^2}\right] = (k-1)a^{k-2} \cdot 1(k-1)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{(z-a)^3}\right] = \frac{(k-1)(k-2)}{2} a^{k-3} \cdot 1(k-1)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-a}\right] = a^k \cdot 1(k)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-a)^2}\right] = k a^{k-1} \cdot 1(k)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-a)^3}\right] = \frac{k(k-1)}{2} a^{k-2} \cdot 1(k)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k}{s-p} + \frac{\bar{k}}{s-\bar{p}}\right] = 2|k|e^{\operatorname{Re} p \cdot t} \cos(\operatorname{Im} p \cdot t + \arg k)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a+jb}{s-(\alpha+j\beta)} + \frac{a-jb}{s-(\alpha-j\beta)}\right] = 2e^{\alpha t} [a \cos(\beta t) - b \sin(\beta t)]$$

## Antitrasformata zeta di fratti complessi

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{c}{z-p} + \frac{\bar{c}}{z-\bar{p}}\right] = 2|c| |p|^{k-1} \cos[\arg(p)(k-1) + \arg(c)] \cdot 1(k-1)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[c \frac{z}{z-p} + \bar{c} \frac{z}{z-\bar{p}}\right] = 2|c| |p|^k \cos[\arg(p)k + \arg(c)] \cdot 1(k)$$

oppure equivalentemente

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{a+jb}{z-p} + \frac{a-jb}{z-\bar{p}}\right] = 2|p|^{k-1} \{a \cos[\arg(p)(k-1)] - b \sin[\arg(p)(k-1)]\} \cdot 1(k-1)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[(a+jb) \frac{z}{z-p} + (a-jb) \frac{z}{z-\bar{p}}\right] = 2|p|^k \{a \cos[\arg(p) \cdot k] - b \sin[\arg(p) \cdot k]\} \cdot 1(k)$$

# Antitrasformazione zeta con il metodo dello sviluppo in fratti semplici

$$F(z) = \frac{b(z)}{(z - p_1)^{r_1} (z - p_2)^{r_2} \cdots (z - p_h)^{r_h}}$$

$$p_i \neq p_j \quad \text{se } i \neq j; \quad \sum_{i=1}^h r_i = n, \quad \deg(b(z)) \leq n$$

$$F(z) = c_0 + \frac{c_{1,1}}{(z - p_1)^{r_1}} + \cdots + \frac{c_{1,r_1}}{z - p_1} + \cdots + \frac{c_{h,1}}{(z - p_h)^{r_h}} + \cdots + \frac{c_{h,r_h}}{z - p_h}$$

$$c_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

$$c_{i,j} = \frac{1}{(j-1)!} D^{j-1} \left[ (z - p_i)^{r_i} F(z) \right] \Big|_{z=p_i} \quad i = 1, \dots, h, \quad j = 1, \dots, r_i$$

## Esercizi

Determinare i segnali discreti le cui trasformate zeta sono:

$$1) \ X(z) = \frac{2z+3}{(z-1)(z-2)(z-3)}$$

$$2) \ X(z) = \frac{2z^3 + z + 1}{(z-1)(z-2)^2}$$

### Trasformate notevoli

$$\mathcal{Z} \left[ \binom{k}{n-1} a^{k-(n-1)} \right] = \frac{z}{(z-a)^n}$$

$$\mathcal{L} \left[ \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at} \right] = \frac{1}{(s-a)^n}$$

Determinare il segnale discreto la cui trasformata zeta è:

$$1) X(z) = \frac{2z+3}{(z-1)(z-2)(z-3)}$$

Calcolo di  $x(k)$  con il metodo dei residui

$$x(k) = \sum_i \text{Res} \left\{ X(z) z^{k-1}, p_i \right\}$$

Se  $k=0$

$$x(0) = \sum_i \text{Res} \left\{ \frac{2z+3}{z(z-1)(z-2)(z-3)}, p_i \right\} = 0$$

Cose  $k \geq 1$

$$x(k) = \sum_i \text{Res} \left\{ \frac{(2z+3)z^{k-1}}{(z-1)(z-2)(z-3)}, p_i \right\} =$$

Case  $k \geq 1$

$$x(k) = \sum_i \operatorname{Res} \left\{ \frac{(2z+3)z^{k-1}}{(z-1)(z-2)(z-3)}, P_i \right\} =$$

$$= \frac{(2z+3)z^{k-1}}{(z-1)(z-3)} \Big|_{z=1} + \frac{(2z+3)z^{k-1}}{(z-1)(z-3)} \Big|_{z=2} + \frac{(2z+3)z^{k-1}}{(z-1)(z-2)} \Big|_{z=3}$$

$$= \frac{5}{2} + \frac{7 \cdot 2^{k-1}}{(-1)} + \frac{9 \cdot 3^{k-1}}{2} = \frac{5}{2} - 7 \cdot 2^{k-1} + \frac{9}{2} \cdot 3^{k-1}$$

In sintesi,

$$x(k) = \left( \frac{5}{2} - 7 \cdot 2^{k-1} + \frac{9}{2} \cdot 3^{k-1} \right) 1(k-1)$$

Calcolo di  $x(k)$  con la sviluppo in fratti semplici di  $X(z)$

$$X(z) = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z-2} + \frac{c_3}{z-3}$$

$$c_1 = \left. \frac{2z+3}{(z-2)(z-3)} \right|_{z=1} = \frac{5}{2} \quad c_2 = \left. \frac{2z+3}{(z-1)(z-3)} \right|_{z=2} = -7$$

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0 \quad c_3 = -c_1 - c_2 = -\frac{5}{2} + 7 = \frac{-5+14}{2} = \frac{9}{2}$$

$$X(z) = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{z-1} - 7 \cdot \frac{1}{z-2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{z-3}$$

$$x(k) = \frac{5}{2} \cdot 1(k-1) - 7 \cdot 2^{k-1} \cdot 1(k-1) + \frac{9}{2} \cdot 3^{k-1} \cdot 1(k-1)$$

$$x(k) = \left( \frac{5}{2} - 7 \cdot 2^{k-1} + \frac{9}{2} \cdot 3^{k-1} \right) 1(k-1)$$

Determinare il segnale discreto la cui trasformata zeta è:

$$2) X(z) = \frac{2z^3 + z + 1}{(z-1)(z-2)^2}$$

$$X(z) = \frac{2z^3 + z + 1}{(z-1)(z-2)^2} = C_0 + \frac{C_1}{z-1} + \frac{C_{21}}{(z-2)^2} + \frac{C_{22}}{z-2}$$

$$C_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = 2$$

$$C_1 = \left. \frac{2z^3 + z + 1}{(z-2)^2} \right|_{z=1} = 4$$

$$C_{21} = \left. \frac{2z^3 + z + 1}{z-1} \right|_{z=2} = 19$$

$$C_{22} = D \left[ \frac{2z^3 + z + 1}{z-1} \right] \Big|_{z=2} = \left. \frac{(6z^2+1)(z-1) - (2z^3+z+1)}{(z-1)^2} \right|_{z=2} = \\ = 25 - (16 + 2 + 1) = 25 - 19 = 6$$

$$c_0 = 2 \quad c_1 = 4 \quad c_{21} = 19$$

$$X(z) = \frac{2z^3 + z + 1}{(z-1)(z-2)^2} = c_0 + \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_{21}}{(z-2)^2} + \frac{c_{22}}{z-2}$$

Nell'anno si può evitare il calcolo della derivata;

$$2z^3 + z + 1 = c_0(z-1)(z-2)^2 + r(z)$$

$$X(z) = c_0 + \frac{r(z)}{(z-1)(z-2)^2}; \text{ il monomio di esponente massimo di } r(z) \text{ è } 10z^2, \text{ quindi } c_1 + c_{22} = 10$$

$$\Rightarrow c_{22} = 10 - c_1 = 10 - 4 = 6 !$$

$$X(k) = 2\delta(k) + 4 \cdot 1(k-1) + 19(k-1)2^{k-2} \cdot 1(k-1) + 6 \cdot 2^{k-1} \cdot 1(k-1)$$

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle  
Telecomunicazioni

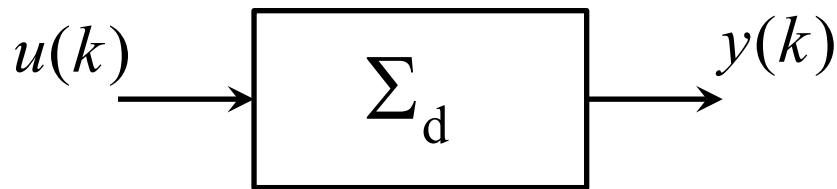
**Lezione n. 20 di Fondamenti di Controlli Automatici**  
**prof. Aurelio Piazzì**

# **Sistemi a tempo discreto**

Università degli Studi di Parma – a.a. 2020-2021

- Generalità sui sistemi a tempo discreto
- Risposta di un sistema lineare a tempo discreto e la funzione di trasferimento
- Conversione continuo/discreto di un sistema con il mantenitore di ordine zero
- Esercizi

# Generalità sui sistemi a tempo discreto



Un sistema (a tempo) discreto è un "processo" per il quale assegnato un segnale di ingresso a tempo discreto  $u(k)$  determina un corrispondente segnale di uscita a tempo discreto  $y(k)$  ( $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ ).

Esempi

- 1)  $y(k) = Cu(k)$ , sistema algebrico lineare
- 2)  $y(k) = (u(k))^2$  sistema algebrico non lineare
- 3)  $y(k) = u(k) - u(k - 1)$  sistema "differenza" (dinamico e lineare)

Def. (**behavior** di  $\Sigma_d$ )

$$\mathcal{B}_d := \{(u, y) : y(k) \text{ è l'uscita di } \Sigma_d \text{ corrispondente all'ingresso } u(k)\}$$

Def. (**linearità** di  $\Sigma_d$ )

Un sistema si dice lineare quando soddisfa la proprietà di sovrapposizione degli effetti:  $\forall (u_1, y_1), (u_2, y_2) \in \mathcal{B}_d$  e  $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\alpha_1(u_1, y_1) + \alpha_2(u_2, y_2) := (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \in \mathcal{B}_d$$

(In modo equivalente,  $\Sigma_d$  è lineare quando  $\mathcal{B}_d$  è uno spazio vettoriale)

Def. (**stazionarietà** di  $\Sigma_d$ )

Un sistema si dice stazionario (invariante nel tempo) se per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ :

$$(u(k), y(k)) \in \mathcal{B}_d \Rightarrow (u(k-n), y(k-n)) \in \mathcal{B}_d$$

Equazione alle differenze di un sistema discreto ( $n, m \in \mathbb{Z}, m \leq n$ )

$$f(y(k), y(k-1), \dots, y(k-n)) = g(u(k-n+m), u(k-n+m-1), \dots, u(k-n))$$

Se  $f$  e  $g$  sono funzioni lineari degli argomenti si ottiene:

$$\begin{aligned} a_n y(k) + a_{n-1} y(k-1) + \dots + a_0 y(k-n) &= \\ &= b_m u(k-n+m) + b_{m-1} u(k-n+m-1) + \dots + b_0 u(k-n) \end{aligned}$$

E' un'equazione alle differenze di un sistema discreto lineare (e stazionario).

Affinché l'eq. alle diff. sia ben posta si assume

$$a_n \neq 0, b_m \neq 0, \{a_0 \neq 0\} \vee \{b_0 \neq 0\}, m \leq n \text{ (causalità)}$$

$n$  ordine di  $\Sigma_d$

$n - m$  grado relativo di  $\Sigma_d$

# Risposta di un sistema lineare a tempo discreto e la funzione di trasferimento

Definita l'eq. alle differenze, modello matematico di  $\Sigma_d$

$$a_n y(k) + a_{n-1} y(k-1) + \dots + a_0 y(k-n) = \\ = b_m u(k-n+m) + b_{m-1} u(k-n+m-1) + \dots + b_0 u(k-n)$$

$$(a_n \neq 0, b_m \neq 0, \{a_0 \neq 0\} \vee \{b_0 \neq 0\}, m \leq n),$$

assegnato l'ingresso  $u(k)$ ,  $k \geq 0$  e le **condizioni iniziali (estese)**

$$y(-1), y(-2), \dots, y(-n)$$

$$u(-1), u(-2), \dots, u(-n)$$

determinare l'uscita  $y(k)$ ,  $k \geq 0$ .

Sia  $n_0 := \min \{i \in \{0, 1, \dots, n\} : a_i \neq 0\}$ ,  $m_0 := \min \{i \in \{0, 1, \dots, m\} : b_i \neq 0\}$ .

Le **condizioni iniziali esatte** sono

$$y(-1), y(-2), \dots, y(-n + n_0), \text{ presenti se } n_0 < n$$

$$u(-1), u(-2), \dots, u(-n + m_0), \text{ presenti se } m_0 < n$$

$$n_0 := \min \{i \in \{0, 1, \dots, n\} : a_i \neq 0\}, \quad m_0 := \min \{i \in \{0, 1, \dots, m\} : b_i \neq 0\}$$

$$y(-1), y(-2), \dots, y(-n + n_0), \quad \text{presenti se } n_0 < n$$

$$u(-1), u(-2), \dots, u(-n + m_0), \quad \text{presenti se } m_0 < n$$

Utilizzando gli indici  $n_0$  e  $m_0$  l'eq. alle differenze può essere riscritta come

$$\begin{aligned} a_n y(k) + \dots + a_{n_0} y(k - n + n_0) &= \\ &= b_m u(k - n + m) + \dots + b_{m_0} u(k - n + m_0) \\ \left( a_n \neq 0, b_m \neq 0, m \leq n; a_{n_0} \neq 0, b_{m_0} \neq 0, n_0 = 0 \vee m_0 = 0 \right) \end{aligned}$$

## Esempio

$$a_2 y(k) + a_1 y(k - 1) + a_0 y(k - 2) = b_2 u(k)$$

$$(a_2 \neq 0, a_0 \neq 0, b_2 \neq 0, b_1 = 0, b_0 = 0)$$

$$\Rightarrow n_0 = 0, m_0 = 2$$

condizioni iniziali esatte:  $y(-1), y(-2)$

$$a_n y(k) + a_{n-1} y(k-1) + \dots + a_0 y(k-n) = b_m u(k-n+m) + b_{m-1} u(k-n+m-1) + \dots + b_0 u(k-n)$$

## Soluzione

L'eq. alle differenze può essere riscritta come

$$a_n y(k) + a_{n-1} y(k-1) + \dots + a_0 y(k-n) = b_n u(k) + b_{n-1} u(k-1) + \dots + b_0 u(k-n)$$

$$m := \max \{i \in \{0, 1, \dots, n\} : b_i \neq 0\}$$

$$\sum_{i=0}^n a_i y(k-n+i) = \sum_{i=0}^n b_i u(k-n+i)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \mathcal{Z}[y(k-n+i)] = \sum_{i=0}^n b_i \mathcal{Z}[u(k-n+i)]$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \mathcal{Z}[y(k-n+i)] + a_n Y(z) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \mathcal{Z}[u(k-n+i)] + b_n U(z)$$

$$\mathcal{Z}[x(k-n)] = z^{-n} \mathcal{Z}[x(k)] + \sum_{k=0}^{n-1} x(k-n)z^{-k}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \mathcal{Z}[y(k-n+i)] + a_n Y(z) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \mathcal{Z}[u(k-n+i)] + b_n U(z)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} a_i \left\{ z^{-(n-i)} Y(z) + \sum_{k=0}^{n-i-1} y(k-n+i) z^{-k} \right\} + a_n Y(z) = \\ = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \left\{ z^{-(n-i)} U(z) + \sum_{k=0}^{n-i-1} u(k-n+i) z^{-k} \right\} + b_n U(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i Y(z) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} a_i y(k-n+i) z^{n-k} + a_n z^n Y(z) = \\ = \sum_{i=0}^{n-1} b_i z^i U(z) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} b_i u(k-n+i) z^{n-k} + b_n z^n U(z) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^n a_i z^i Y(z) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} a_i y(k-n+i) z^{n-k} = \sum_{i=0}^n b_i z^i U(z) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} b_i u(k-n+i) z^{n-k}$$

$$\sum_{i=0}^n a_i z^i Y(z) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} a_i y(k-n+i) z^{n-k} = \sum_{i=0}^n b_i z^i U(z) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} b_i u(k-n+i) z^{n-k}$$

$$a(z)Y(z) = b(z)U(z) + c(z)$$

$$a(z) := \sum_{i=0}^n a_i z^i, \quad b(z) := \sum_{i=0}^n b_i z^i$$

$$c(z) := \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} b_i u(k-n+i) z^{n-k} - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} a_i y(k-n+i) z^{n-k}$$

$$c(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z$$

$$Y(z) = \frac{b(z)}{a(z)} U(z) + \frac{c(z)}{a(z)}$$

$$Y(z) = Y_{\text{for.}}(z) + Y_{\text{lib.}}(z), \quad Y_{\text{for.}}(z) = \frac{b(z)}{a(z)} U(z), \quad Y_{\text{lib.}}(z) = \frac{c(z)}{a(z)}$$

$$y(k) = y_{\text{for.}}(k) + y_{\text{lib.}}(k), \quad y_{\text{for.}}(k) = \mathcal{Z}^{-1} \left[ \frac{b(z)}{a(z)} U(z) \right], \quad y_{\text{lib.}}(k) = \mathcal{Z}^{-1} \left[ \frac{c(z)}{a(z)} \right]$$

Def. (**funzione di trasferimento di  $\Sigma_d$** )

Si definisce funzione di trasferimento di un sistema discreto  $\Sigma_d$  la funzione  $H(z)$  per la quale

$$\mathcal{Z}[y(k)] = H(z)\mathcal{Z}[u(k)]$$

per ogni  $(u, y) \in \mathcal{B}_d$  tale che  $u(k) = 0, y(k) = 0, k < 0$ .

$$\text{Quindi la f.d.t. di } \Sigma_d \text{ è } H(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^i}{\sum_{i=0}^n a_i z^i} = \frac{b_m z^m + \dots + b_0}{a_n z^n + \dots + a_0}$$

$Y_{\text{for.}}(z) = H(z)U(z)$ , se  $u(k) = \delta(k)$  segue che  $U(z) = 1$

La risposta all'impulso è  $h(k) = \mathcal{Z}^{-1}[H(z)]$ , si considera  $h(k) = 0, k < 0$ .

Viceversa nota la risposta all'impulso  $H(z) = \mathcal{Z}[h(k)]$ .

Dal teorema di convoluzione segue  $y_{\text{for.}}(k) = \sum_{i=0}^k h(k-i)u(i)$

## Analisi della risposta libera

**Proprietà** (struttura della risposta libera)

La risposta libera di  $\Sigma_d$  è caratterizzata da

$$Y_{\text{lib.}}(z) = \frac{c(z)}{a(z)}, \quad c(z) = c_n z^n + \cdots + c_1 z$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & b_0 & \ddots & \\ \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ b_{n-1} & & b_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(-1) \\ u(-2) \\ \vdots \\ u(-n) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & \\ \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(-1) \\ y(-2) \\ \vdots \\ y(-n) \end{bmatrix}$$

**Dim.**

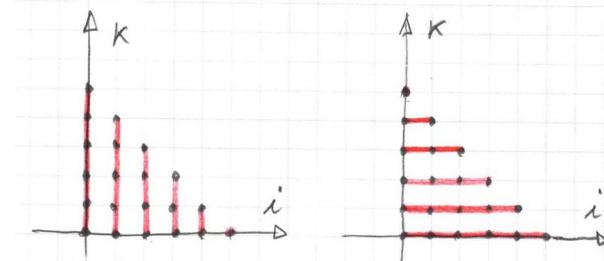
$$Y_{\text{lib.}}(z) = \frac{c(z)}{a(z)}, \quad c(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z = \sum_{l=1}^n c_l z^l$$

(continua)

(continua)

$$c(z) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} b_i u(k-n+i) z^{n-k} - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} a_i y(k-n+i) z^{n-k}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-k-1}$$



$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} b_i u(k-n+i) z^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-k-1} b_i u(k-n+i) z^{n-k} \stackrel{n-k=l}{=} \sum_{l=n}^1 \sum_{i=0}^{l-1} b_i u(-l+i) z^l$$

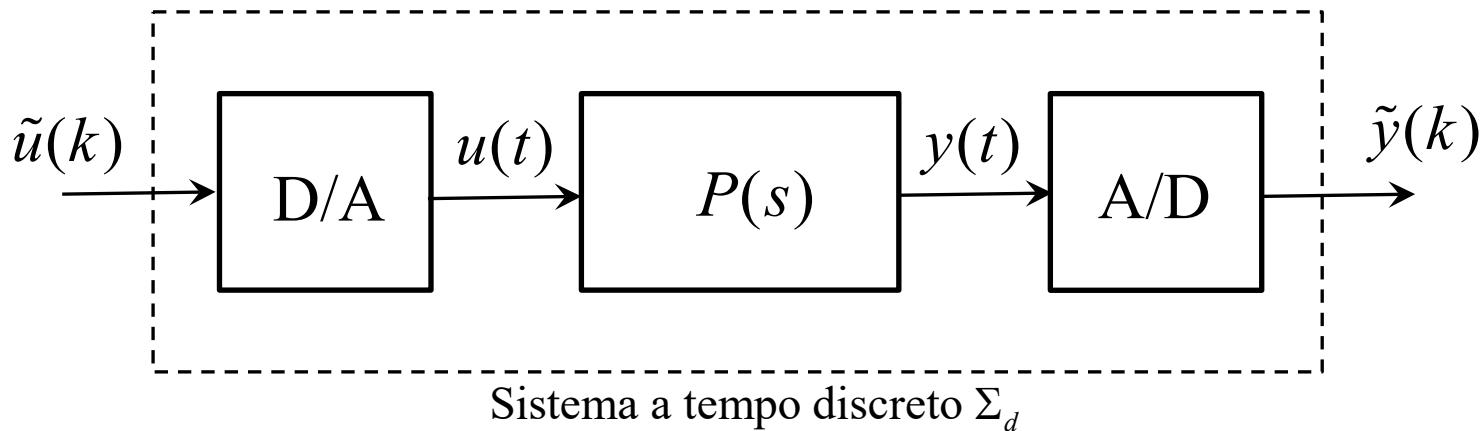
$$= \sum_{l=1}^n \sum_{i=0}^{l-1} b_i u(i-l) z^l \stackrel{i-l=-j}{=} \sum_{l=1}^n \sum_{j=l}^1 b_{l-j} u(-j) z^l = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^l b_{l-j} u(-j) z^l$$

$$c(z) = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^l b_{l-j} u(-j) z^l - \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^l a_{l-j} y(-j) z^l = \sum_{l=1}^n \left( \sum_{j=1}^l b_{l-j} u(-j) - \sum_{j=1}^l a_{l-j} y(-j) \right) \cdot z^l$$

$$c_l = \sum_{j=1}^l b_{l-j} u(-j) - \sum_{j=1}^l a_{l-j} y(-j), \quad l = 1, 2, \dots, n$$

□

# Conversione continuo/discreto di un sistema con il mantenitore di ordine zero



Il tempo di campionamento sia  $T$  ( $\tilde{y}(k) = y(kT)$ ) e il convertitore D/A sia un mantenitore (dispositivo di tenuta) di ordine zero. Si determini la funzione di trasferimento  $P_d(z)$  di  $\Sigma_d$ .

**Def.** (Trasformata zeta di un segnale a tempo continuo campionato)

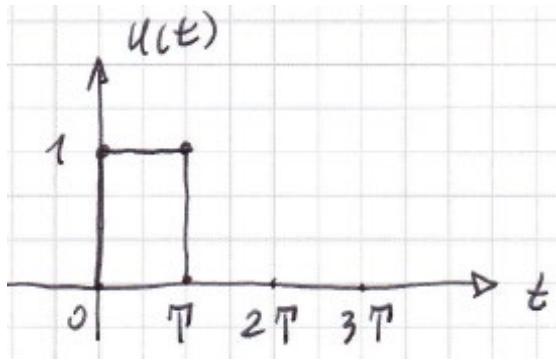
Sia  $f(t)$  un segnale a tempo continuo e  $F(s)$  la corrispondente trasformata di Laplace.

$$\mathcal{Z}[f(t), T] \triangleq \mathcal{Z}[f(kT)]$$

$$\mathcal{Z}[F(s), T] \triangleq \mathcal{Z}\left[\mathcal{L}^{-1}[F(s)]_{t=kT}\right]$$

(Si noti che  $\mathcal{Z}[f(t), T] \equiv \mathcal{Z}[F(s), T]$ )

Determiniamo  $P_d(z)$  come trasformata zeta della risposta all'impulso applicato all'ingresso del mantenitore di ordine zero:  $\tilde{u}(k) = \delta(k)$ .



$$u(t) = 1(t) - 1(t - T)$$

$$\text{quindi } y(t) = p_s(t) - p_s(t - T)$$

con  $p_s(t)$  risposta di  $P(s)$  al gradino unitario  $1(t)$

$$\left( p_s(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{P(s)}{s} \right] \right)$$

$$\tilde{y}(k) = p_s(kT) - p_s(kT - T) = p_s(kT) - p_s((k-1)T)$$

$$P_d(z) = \mathcal{Z}[\tilde{y}(k)]$$

$$= \mathcal{Z}[p_s(kT)] - \mathcal{Z}[p_s((k-1)T)] = \mathcal{Z}[p_s(kT)] - z^{-1} \mathcal{Z}[p_s(kT)]$$

$$= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}[p_s(kT)] = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left[\frac{P(s)}{s}, T\right]$$

$$P_d(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[\frac{P(s)}{s}, T\right]$$

# Esercizi

1) Un sistema discreto è descritto dall'eq.

$$y(k+2) = y(k+1) - 0.24y(k) + u(k+2).$$

- a) Scrivere in forma standard l'eq. alle differenze e determinare ordine e grado relativo del sistema.
- b) Determinare la funzione di trasferimento.

2) Dato un sistema discreto del secondo ordine di equazione

$$a_2y(k) + a_1y(k-1) + a_0y(k-2) = b_2u(k) + b_1u(k-1) + b_0u(k-2)$$

determinare la trasformata zeta dell'uscita  $Y(z)$  note la trasformata dell'ingresso  $U(z)$  e le condizioni iniziali

$$y_{-1} := y(-1), \quad y_{-2} := y(-2), \quad u_{-1} := u(-1), \quad u_{-2} := u(-2)$$

3) Determinare l'eq. alle differenze di un sistema a tempo discreto la cui risposta all'impulso è

$$h(k) = 8 \cdot 1(k-1) - \frac{5}{2}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \cdot 1(k-1) - 7\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot 1(k-1), \quad k \geq 0$$

## Esercizi della lezione 20 di Fondamenti di controlli automatici

1) Un sistema discreto è descritto dall'eq.

$$y(k+2) = y(k+1) - 0.24y(k) + u(k+2).$$

- Scrivere in forma standard l'eq. alle differenze e determinare ordine e grado relativo del sistema.
- Determinare la funzione di trasferimento.

### Soluzione

a) Forma standard dell'equazione alle differenze:

$$\begin{aligned} a_n y(k) + a_{n-1} y(k-1) + \dots + a_0 y(k-n) &= \\ &= b_m u(k-n+m) + b_{m-1} u(k-n+m-1) + \dots + b_0 u(k-n) \\ a_n \neq 0, \quad b_m \neq 0, \quad \{a_0 \neq 0\} \vee \{b_0 \neq 0\}, \quad m \leq n \end{aligned}$$

$$k \leftarrow k - 2$$

$$y(k) = y(k-1) - 0.24y(k-2) + u(k)$$

$$a_n y(k) + a_{n-1} y(k-1) + \dots + a_0 y(k-n) =$$

$$= b_m u(k-n+m) + b_{m-1} u(k-n+m-1) + \dots + b_0 u(k-n)$$

$$a_n \neq 0, b_m \neq 0, \{a_0 \neq 0\} \vee \{b_0 \neq 0\}, m \leq n$$

$$y(k) - y(k-1) + 0.24 y(k-2) = u(k)$$

$$n=2 \text{ ordine di } \Sigma_d$$

$$m=2 \Rightarrow g=n-m=0 \text{ grado relativo di } \Sigma_d$$

b)  $a_2 y(k) + a_1 y(k-1) + a_0 y(k-2) = b_2 u(k)$

$$H(z) = \frac{b_2 z^2}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}$$

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - z + 0.24}$$

fumazione di trasferimento.

2) Dato un sistema discreto del secondo ordine di equazione

$$a_2 y(k) + a_1 y(k-1) + a_0 y(k-2) = b_2 u(k) + b_1 u(k-1) + b_0 u(k-2)$$

determinare la trasformata zeta dell'uscita  $Y(z)$  note la trasformata dell'ingresso  $U(z)$  e le condizioni iniziali

$$y_{-1} := y(-1), \quad y_{-2} := y(-2), \quad u_{-1} := u(-1), \quad u_{-2} := u(-2)$$

Soluzione

$$a_2 Y + a_1 (z^{-1} Y + y_{-1}) + a_0 (z^{-2} Y + y_{-2} + y_{-1} z^{-1}) =$$

$$b_2 U + b_1 (z^{-1} U + u_{-1}) + b_0 (z^{-2} U + u_{-2} + u_{-1} z^{-1})$$

$$a_2 z^2 Y + a_1 (z Y + y_{-1} z^2) + a_0 (Y + y_{-2} z^2 + y_{-1} z) =$$

$$= b_2 z^2 U + b_1 (z U + u_{-1} z^2) + b_0 (U + u_{-2} z^2 + u_{-1} z)$$

$$\begin{aligned}
 & a_2 z^2 Y + a_1 (z Y + y_{-1} z^2) + a_0 (Y + y_{-2} z^2 + y_{-1} z) = \\
 & = b_2 z^2 U + b_1 (z U + u_{-1} z^2) + b_0 (U + u_{-2} z^2 + u_{-1} z)
 \end{aligned}$$

$$(a_2 z^2 + a_1 z + a_0) Y + a_1 y_{-1} z^2 + a_0 y_{-2} z^2 + a_0 y_{-1} z =$$

$$(b_2 z^2 + b_1 z + b_0) U + b_1 u_{-1} z^2 + b_0 u_{-2} z^2 + b_0 u_{-1} z$$

$$Y = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0} U + \frac{(b_1 u_{-1} + b_0 u_{-2}) z^2 + b_0 u_{-1} z - (a_1 y_{-1} + a_0 y_{-2}) z - a_0 y_{-1} z}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}$$

Altro metodo: soluzione diretta (dalla teoria)

$$a_2 y(k) + a_1 y(k-1) + a_0 y(k-2) = b_2 u(k) + b_1 u(k-1) + b_0 u(k-2)$$

$$Y(z) = \frac{b(z)}{a(z)} U(z) + \frac{c(z)}{a(z)} = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0} U(z) + \frac{c_2 z^2 + c_1 z}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}$$

$$Y(z) = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0} U(z) + \frac{c_2 z^2 + c_1 z}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 & 0 \\ b_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{-1} \\ u_{-2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_0 & 0 \\ a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{-1} \\ y_{-2} \end{bmatrix}$$

$$c_1 = b_0 u_{-1} - a_0 y_{-1}$$

$$c_2 = b_1 u_{-1} + b_0 u_{-2} - a_1 y_{-1} - a_0 y_{-2}$$

$$Y(z) = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0} U(z) + \frac{(b_1 u_{-1} + b_0 u_{-2} - a_1 y_{-1} - a_0 y_{-2}) z^2 + (b_0 u_{-1} - a_0 y_{-1}) z}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}$$

3) Determinare l'eq. alle differenze di un sistema a tempo discreto la cui risposta all'impulso è

$$h(k) = 8 \cdot 1(k-1) - \frac{5}{2}(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \cdot 1(k-1) - 7 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot 1(k-1), \quad k \geq 0$$

Soluzione

$$\text{Si ricorda } \mathcal{Z}[a^{k-1} 1(k-1)] = \frac{1}{z-a}$$

$$\mathcal{Z}[(k-1)a^{k-2} 1(k-1)] = \frac{1}{(z-a)^2}$$

$$H(z) = 8 \cdot \frac{1}{z-1} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{(z-\frac{1}{2})^2} - 7 \cdot \frac{1}{z-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
 H(z) &= 8 \cdot \frac{1}{z-1} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{(z-\frac{1}{2})^2} - 7 \cdot \frac{1}{z-\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{8(z-\frac{1}{2})^2 - \frac{5}{2}(z-1) - 7(z-1)(z-\frac{1}{2})}{(z-1)(z-\frac{1}{2})^2} = \\
 &= \frac{8(z^2 - z + \frac{1}{4}) - \frac{5}{2}z + \frac{5}{2} - 7(z^2 - z - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2})}{(z-1)(z^2 - z + \frac{1}{4})} = \\
 &= \frac{8z^2 - 8z + 2 - \frac{5}{2}z + \frac{5}{2} - 7z^2 + 7z + \frac{7}{2}z - \frac{7}{2}}{z^3 - z^2 + \frac{1}{4}z - z^2 + z - \frac{1}{4}} \\
 &= \frac{z^2 + 1}{z^3 - 2z^2 + \frac{5}{4}z - \frac{1}{4}}
 \end{aligned}$$

$$a_n y(k) + a_{n-1} y(k-1) + \dots + a_0 y(k-n) =$$

$$= b_m u(k-n+m) + b_{m-1} u(k-n+m-1) + \dots + b_0 u(k-n)$$

$$H(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}$$

$$H(z) = \frac{z^2 + 1}{z^3 - 2z^2 + \frac{5}{4}z - \frac{1}{4}}$$

$$y(k) - 2y(k-1) + \frac{5}{4}y(k-2) - \frac{1}{4}y(k-3) = u(k-1) + u(k-3)$$

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle  
Telecomunicazioni

**Lezione n. 21 di Fondamenti di Controlli Automatici**  
**prof. Aurelio Piazzì**

**Stabilità dei sistemi a tempo  
discreto**

Università degli Studi di Parma – a.a. 2020-2021

- **Stati di equilibrio e stabilità**
- **Metodi per lo studio della stabilità asintotica**
- **Cenni sui metodi di sintesi dei controllori discreti**
- **Esercizi**

# Stati di equilibrio e stabilità

Sistema a tempo discreto  $\Sigma_d$  :

$$\begin{aligned} a_n y(k) + a_{n-1} y(k-1) + \dots + a_0 y(k-n) &= \\ &= b_m u(k-n+m) + b_{m-1} u(k-n+m-1) + \dots + b_0 u(k-n) \end{aligned}$$

$$H(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}$$

Guadagno statico di  $\Sigma_d$  :  $H(1)$ ; se  $y_c = H(1)u_c$  segue  $(u_c, y_c) \in \mathcal{B}_d$

La presenza dei valori costanti  $u_c$  e  $y_c = H(1)u_c$  caratterizza uno stato di equilibrio del sistema. Studiamo la stabilità dell'equilibrio  $u_c = 0$  e  $y_c = 0$ .

Sia  $u(k) = 0, y(k) = 0$  per  $k < -n$  e la perturbazione sia data congiuntamente da

1)  $u(k) \neq 0$  per  $k = -n, -n+1, \dots, -1$  (perturbazione dell'ingresso)

2)  $y(k) \neq 0$  per  $k = -n, -n+1, \dots, -1$  (perturbazione imposta sull'uscita)

Dall'istante  $k = 0$  in poi cessa la perturbazione:  $u(k) = 0$  e  $y(k) = y_{\text{lib.}}(k)$ ,  $k \geq 0$ .

## Def. : Stabilità (alle perturbazioni) di $\Sigma_d$

Il sistema  $\Sigma_d$  si dice:

1. STABILE se per ogni perturbazione  $y_{\text{lib.}}(k)$  è limitata per  $k \geq 0$ .
2. ASINTOTICAMENTE STABILE se  $\Sigma_d$  è stabile ed inoltre
$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y_{\text{lib.}}(k) = 0 \text{ per ogni perturbazione introdotta.}$$
3. SEMPLICEMENTE (o marginalmente) STABILE se  $\Sigma_d$  è stabile ed inoltre esiste una perturbazione per la quale

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y_{\text{lib.}}(k) = y_\infty \neq 0 \vee \left\{ \text{non esiste } \lim_{k \rightarrow +\infty} y_{\text{lib.}}(k) \right\}.$$

4. INSTABILE se  $\Sigma_d$  non è stabile.

## Teorema sulla stabilità alle perturbazioni

Sia  $\Sigma_d$  caratterizzato dalla f.d.t.  $H(z)$  con  $a(z)$  e  $b(z)$  coprimi.

1.  $\Sigma_d$  è STABILE se e solo se tutti i suoi poli appartengono al cerchio unitario e quelli sulla frontiera del cerchio unitario (cioè sulla circonferenza unitaria) hanno molteplicità uguale a 1.
2.  $\Sigma_d$  è ASINTOTICAMENTE STABILE se e solo se tutti i suoi poli appartengono all'interno del cerchio unitario.
3.  $\Sigma_d$  è SEMPLICEMENTE (o marginalmente) STABILE se e solo se tutti i suoi poli appartengono al cerchio unitario e quelli sulla circonferenza unitaria (ne deve esistere almeno uno) hanno molteplicità uguale a 1.
4.  $\Sigma_d$  è INSTABILE se e solo se almeno un polo è esterno al cerchio unitario o almeno un polo è sulla circonferenza unitaria con molteplicità maggiore di 1.

Nota: Se  $a(z)$  e  $b(z)$  non sono coprimi fra loro, il teorema di stabilità ammette la medesima formulazione sostituendo i “poli” con le “radici di  $a(z)$ ”. [ $a(z)$  è polinomio caratteristico del sistema]

$$\mathcal{Z}\left[\binom{k}{n-1}a^{k-(n-1)} \cdot 1(k)\right] = \frac{z}{(z-a)^n}$$

## Dimostrazione del teorema (punto 2)

2.  $\Sigma_d$  è asintoticamente stabile se e solo se  $|p_i| < 1$ ,  $i = 1, \dots, l$ .

**Sufficienza** ( $|p_i| < 1 \Rightarrow \Sigma_d$  è asint. stabile)

$$a(z) = (z - p_1)^{r_1} \cdots (z - p_l)^{r_l}, \quad p_i \neq p_j \text{ se } i \neq j$$

La risposta libera di  $\Sigma_d$  a seguito di perturbazioni è caratterizzata da

$$Y_{\text{lib.}}(z) = \frac{c(z)}{a(z)}, \quad c(z) = c_n z^n + \cdots + c_1 z$$

$$Y_{\text{lib.}}(z) = z \cdot \frac{c_n z^{n-1} + \cdots + c_1}{(z - p_1)^{r_1} \cdots (z - p_l)^{r_l}} = d_{1,1} \frac{z}{(z - p_1)^{r_1}} + \cdots + d_{1,r_1} \frac{z}{z - p_1} + \cdots \cdots$$

$$+ d_{l,1} \frac{z}{(z - p_l)^{r_l}} + \cdots + d_{l,r_l} \frac{z}{z - p_l}$$

$$y_{\text{lib.}}(k) = d_{1,1} \binom{k}{r_1 - 1} p_1^{k-(r_1-1)} + d_{1,2} \binom{k}{r_1 - 2} p_1^{k-(r_1-2)} + \cdots + d_{1,r_1} p_1^k + \cdots \cdots$$

$$\begin{aligned}
y_{\text{lib.}}(k) &= d_{1,1} \binom{k}{r_1-1} p_1^{k-(r_1-1)} + d_{1,2} \binom{k}{r_1-2} p_1^{k-(r_1-2)} + \cdots + d_{1,r_1} p_1^k + \cdots \dots \\
&\quad + d_{l,1} \binom{k}{r_l-1} p_l^{k-(r_l-1)} + d_{l,2} \binom{k}{r_l-2} p_l^{k-(r_l-2)} + \cdots + d_{l,r_l} p_l^k \\
\binom{k}{r} &= \frac{k!}{r!(k-r)!} = \frac{k(k-1)\cdots(k-r+1)}{r!} \quad (\text{polinomio in } k \text{ di grado } r).
\end{aligned}$$

Tutti gli addendi di  $y_{\text{lib.}}(k)$  convergono a 0 per  $k \rightarrow \infty$  in quanto

se  $|p| < 1$  allora  $\lim_{k \rightarrow +\infty} k^n p^k = 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

**Necessità** ( $\Sigma_d$  è asint. stabile  $\Rightarrow |p_i| < 1$ )

Si ragiona per assurdo. Esiste  $j \in \{1, \dots, l\}$  tale che  $|p_j| \geq 1$ .

Costruiamo una particolare perturbazione per la quale  $Y_{\text{lib.}}(z) = \frac{z}{z - p_j}$ .

$$Y_{\text{lib.}}(z) = \frac{c(z)}{a(z)} = \frac{c_n z^n + \dots + c_1 z}{\prod_{i=1}^l (z - p_i)^{r_i}} = \frac{(c_n z^{n-1} + \dots + c_1) \cdot z}{\left( \prod_{i \neq j}^l (z - p_i)^{r_i} \right) (z - p_j)^{r_j-1} (z - p_j)}$$

Sia  $c_n z^{n-1} + \dots + c_1 = \left( \prod_{i \neq j}^l (z - p_i)^{r_i} \right) (z - p_j)^{r_j-1}$ .

Considerato che  $a_0 \neq 0$  o  $b_0 \neq 0$  esistono sempre condizioni iniziali (ovvero la perturbazione) per le quali si ottengono i coefficienti  $c_i$  desiderati:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_0 & \ddots \\ \ddots & \ddots & 0 \\ b_{n-1} & b_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(-1) \\ u(-2) \\ \vdots \\ u(-n) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots \\ \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(-1) \\ y(-2) \\ \vdots \\ y(-n) \end{bmatrix}$$

Quindi  $y_{\text{lib.}}(k) = p_j^k$  ed evidentemente questa risposta libera non converge a zero per  $k \rightarrow \infty$ . Questo contraddice l'ipotesi di  $y_{\text{lib.}}(k)$  convergente asintoticamente a zero per ogni perturbazione ( $\Sigma_d$  asint. stabile).  $\square$

## Def.: Stabilità BIBO di $\Sigma_d$

Il sistema  $\Sigma_d$  si dice BIBO stabile se per ogni azione forzante limitata la corrispondente risposta forzata è anch'essa limitata.

[Formalmente:  $\forall (u, y) \in \mathcal{B}_d$  con  $u(k) = 0, y(k) = 0$  per  $k < 0$  e  $\|u(k)\|_{\infty} < +\infty$   
 $\Rightarrow \|y(k)\|_{\infty} < +\infty$ ]

## Teorema sulla stabilità BIBO

Il sistema  $\Sigma_d$  è BIBO stabile se e solo se  $\sum_{k=0}^{+\infty} |h(k)| < +\infty$  ( $h(k)$  è la risposta all'impulso di  $\Sigma_d$ ).

## Teorema (equivalenza fra stabilità BIBO e stabilità asintotica)

Il sistema  $\Sigma_d$  è BIBO stabile se e solo se  $\Sigma_d$  è asintoticamente stabile.

# Metodi per lo studio della stabilità asintotica

Per stabilire la stabilità asintotica di  $\Sigma_d$ :

1. Calcolo delle radici di  $a(z)$
2. Trasformazione bilineare e criterio di Routh
3. Criterio di Jury

**Proposizione** (trasformazione bilineare)

La trasformazione bilineare  $w = T(z)$  definita come

$$w = T(z) = \frac{z - 1}{z + 1}$$

per  $z \neq -1$  soddisfa le relazioni

$$\operatorname{Re}(w) > 0 \Leftrightarrow |z| > 1$$

$$\operatorname{Re}(w) = 0 \Leftrightarrow |z| = 1$$

$$\operatorname{Re}(w) < 0 \Leftrightarrow |z| < 1$$

La trasformazione bilineare è biunivoca con dominio  $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$  e codominio  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ :

$$T : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}, \quad z \rightarrow w = T(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

La trasformazione bilineare inversa è

$$T^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{-1\}, \quad w \rightarrow z = T^{-1}(w) = \frac{1+w}{1-w}$$

## Proposizione

Il polinomio  $a(z)$  ha tutte le radici di modulo minore di 1 se e solo se

1.  $a(-1) \neq 0$ ;
2. gli zeri di  $a\left(\frac{1+w}{1-w}\right)$  sono tutti a parte reale negativa.

## Introduzione al criterio di Jury

### Proposizione

Sia dato il polinomio  $a(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$  con  $a_n > 0$ .

Affinché  $a(z)$  abbia tutte le radici con modulo minore di 1 è necessario che siano soddisfatte le disuguaglianze:

1.  $a(1) > 0$ ;
2.  $(-1)^n a(-1) > 0$ ;
3.  $|a_0| < a_n$ .

Nei casi  $n = 1$  e  $n = 2$  le disuguaglianze 1-3 sono anche sufficienti.

1.  $a(1) > 0$
2.  $(-1)^n a(-1) > 0$
3.  $|a_0| < a_n$

**Caso  $n = 1$**

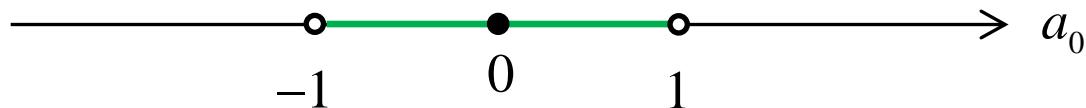
$$a(z) = a_1 z + a_0, \quad a_1 > 0$$

$$a_1 z + a_0 = 0 \quad z = -\frac{a_0}{a_1} \quad |z| < 1 \quad \frac{|a_0|}{a_1} < 1 \quad |a_0| < a_1 \quad (3^a)$$

$$\text{Se } a_0 > 0 \quad a_0 < a_1 \quad -a_1 + a_0 < 0 \quad a(-1) < 0 \quad -a(-1) > 0 \quad (2^a)$$

$$\text{Se } a_0 < 0 \quad -a_0 < a_1 \quad a_1 + a_0 > 0 \quad a(1) > 0 \quad (1^a)$$

Assumiamo  $a_1 = 1$ :  $|a_0| < 1$



$$1. \ a(1) > 0$$

$$2. (-1)^n a(-1) > 0$$

$$3. |a_0| < a_n$$

**Caso  $n = 2$**

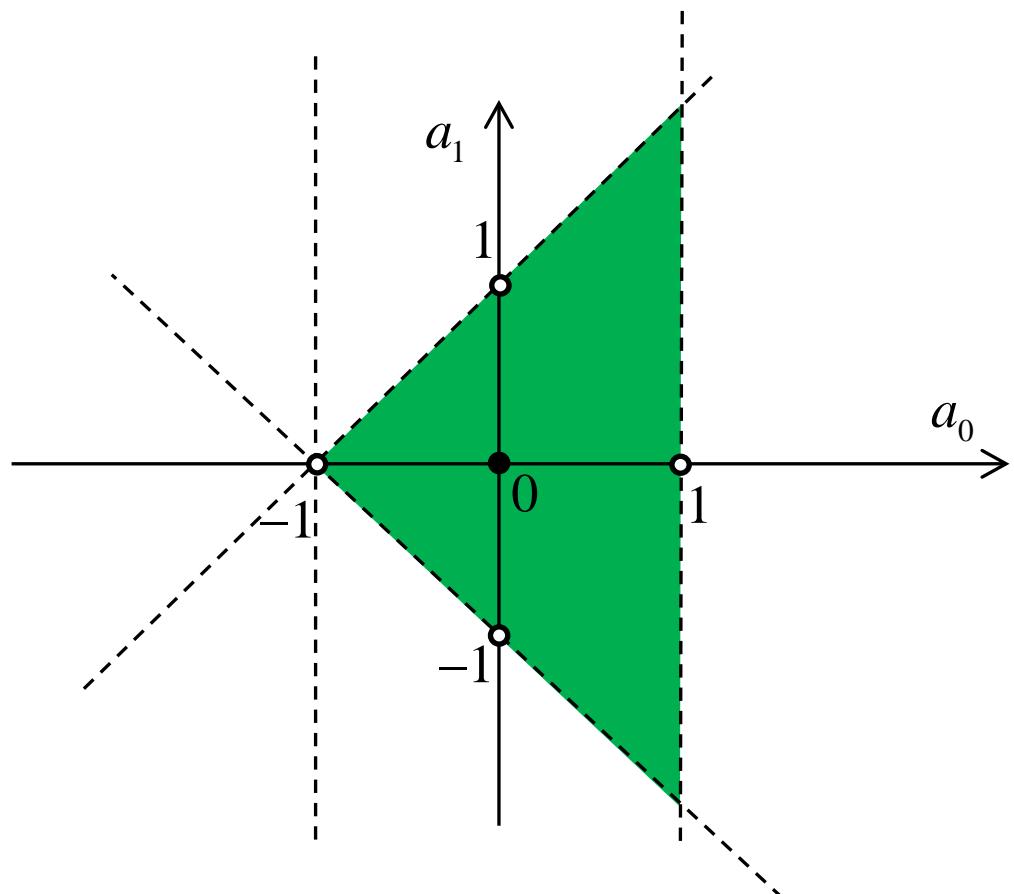
$$a(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0, \ a_2 > 0$$

$$\begin{cases} a_2 + a_1 + a_0 > 0 \\ a_2 - a_1 + a_0 > 0 \\ |a_0| < a_2 \end{cases}$$

Assumiamo  $a_2 = 1$

$$\begin{cases} 1 + a_1 + a_0 > 0 \\ 1 - a_1 + a_0 > 0 \\ |a_0| < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 > -a_0 - 1 \\ a_1 < a_0 + 1 \\ |a_0| < 1 \end{cases}$$



## Costruzione della tabella di Jury associata al polinomio

$$a(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0, \quad a_n > 0$$

	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^{n-k}$			$z^{n-1}$	$z^n$
1	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\cdots$	$a_{n-k}$	$\cdots$	$a_{n-1}$	$a_n$
2	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$\cdots$	$a_k$	$\cdots$	$a_1$	$a_0$
3	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$\cdots$	$b_{n-1-k}$	$\cdots$	$b_{n-1}$	
4	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$b_{n-3}$	$\cdots$	$b_k$	$\cdots$	$b_0$	
5	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$\cdots$		$c_{n-2}$		
6	$c_{n-2}$	$c_{n-3}$	$c_{n-4}$	$\cdots$		$c_0$	$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$	
	$\dots$				$\dots$			
	$\dots$				$\dots$		$c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, n-2$	
$2n-5$	$s_0$	$s_1$	$s_2$	$s_3$				
$2n-4$	$s_3$	$s_2$	$s_1$	$s_0$		$\dots$		
$2n-3$	$r_0$	$r_1$	$r_2$				$r_0 = \begin{vmatrix} s_0 & s_3 \\ s_3 & s_0 \end{vmatrix}, \quad r_1 = \begin{vmatrix} s_0 & s_2 \\ s_3 & s_1 \end{vmatrix}, \quad r_2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_3 & s_2 \end{vmatrix}$	

## Teorema (criterio di Jury)

Il polinomio  $a(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$ ,  $a_n > 0$  ha tutte le radici di modulo minore di 1 se e solo se le seguenti  $n+1$  disuguaglianze sono soddisfatte:

$$1) \quad a(1) > 0$$

$$2) \quad (-1)^n a(-1) > 0$$

$$3) \quad |a_0| < a_n$$

$$4) \quad |b_0| > |b_{n-1}|$$

$$5) \quad |c_0| > |c_{n-2}|$$

...

$$n+1) \quad |r_0| > |r_2|$$

# Cenni sui metodi di sintesi dei controllori discreti

## 1. Metodi diretti

Sintesi del controllore a tempo discreto  $C_d(z)$  a partire dalla f.d.t. dell'impianto controllato  $P_d(z)$ .

## 2. Metodi indiretti

Sintesi del controllore a tempo continuo  $C(s)$  e successiva sua discretizzazione per ottenere  $C_d(z)$ .

Per approfondire:

- G. Marro, Controlli Automatici, quinta edizione, Zanichelli, 2004
- P. Bolzern, R. Scattolini, N. Schiavoni, Fondamenti di controlli automatici, quarta edizione, Mc Graw Hill, 2015
- M. Sami Fadali, A. Visioli, Digital control engineering: analysis and design, second edition, Elsevier, 2013

## Scelta del periodo di campionamento

Sia  $\omega_b$  la banda passante desiderata per il sistema di controllo (dal segnale di comando all'uscita controllata).

Per il teorema del campionamento è necessario rispettare la condizione

$$\omega_s > 2\omega_b$$

dove  $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$  è la pulsazione di campionamento e  $T$  è il corrispondente periodo. Quindi  $\omega_s / \omega_b > 2$ , in pratica si orienta il progetto scegliendo

$$6 \leq \frac{\omega_s}{\omega_b} \leq 20$$

## Metodi indiretti: da $C(s)$ a $C_d(z)$

### 1. Metodo di Eulero in avanti

$$Dx(t) \Rightarrow \mathcal{L}[Dx(t)] = s \cdot \mathcal{L}[x(t)] \text{ (condizione iniziale nulla)}$$

$$Dx(kT) \cong \frac{x((k+1)T) - x(kT)}{T}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}[Dx(kT)] \cong \frac{\mathcal{Z}[x((k+1)T)] - \mathcal{Z}[x(kT)]}{T} = \frac{z\mathcal{Z}[x(kT)] - \mathcal{Z}[x(kT)]}{T} \text{ (c. i. nulla)}$$

$$\mathcal{Z}[Dx(kT)] \cong \frac{z-1}{T} \mathcal{Z}[x(kT)]$$

Dal confronto si impone

$$s = \frac{z-1}{T}$$

## 2. Metodo di Eulero all'indietro

$$Dx(t) \Rightarrow \mathcal{L}[Dx(t)] = s \cdot \mathcal{L}[x(t)] \text{ (condizione iniziale nulla)}$$

$$Dx(kT) \cong \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}[Dx(kT)] \cong \frac{\mathcal{Z}[x(kT)] - \mathcal{Z}[x((k-1)T)]}{T} = \frac{\mathcal{Z}[x(kT)] - z^{-1}\mathcal{Z}[x(kT)]}{T} \text{ (c. i. nulla)}$$
$$\mathcal{Z}[Dx(kT)] \cong \frac{1}{T}(1 - z^{-1})\mathcal{Z}[x(kT)]$$

Dal confronto si impone

$$s = \frac{z - 1}{Tz}$$

### 3. Metodo di Tustin

$$Dx(t) \Rightarrow \mathcal{L}[Dx(t)] = s \cdot \mathcal{L}[x(t)] \text{ (condizione iniziale nulla)}$$

$$\int_{kT}^{(k+1)T} Dx(v)dv = x((k+1)T) - x(kT) \quad (\text{esatta})$$

$$\int_{kT}^{(k+1)T} Dx(v)dv \cong T \frac{Dx((k+1)T) + Dx(kT)}{2} \quad (\text{appr., metodo del trapezio})$$

$$T \frac{Dx((k+1)T) + Dx(kT)}{2} \cong x((k+1)T) - x(kT)$$

$$T \frac{z\mathcal{Z}[Dx(kT)] + \mathcal{Z}[Dx(kT)]}{2} \cong z\mathcal{Z}[x(kT)] - \mathcal{Z}[x(kT)] \quad (\text{c. i. nulla})$$

$$T \frac{z+1}{2} \mathcal{Z}[Dx(kT)] \cong (z-1) \mathcal{Z}[x(kT)]$$

$$\mathcal{Z}[Dx(kT)] \cong \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \mathcal{Z}[x(kT)]$$

$$\text{Dal confronto si impone } s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

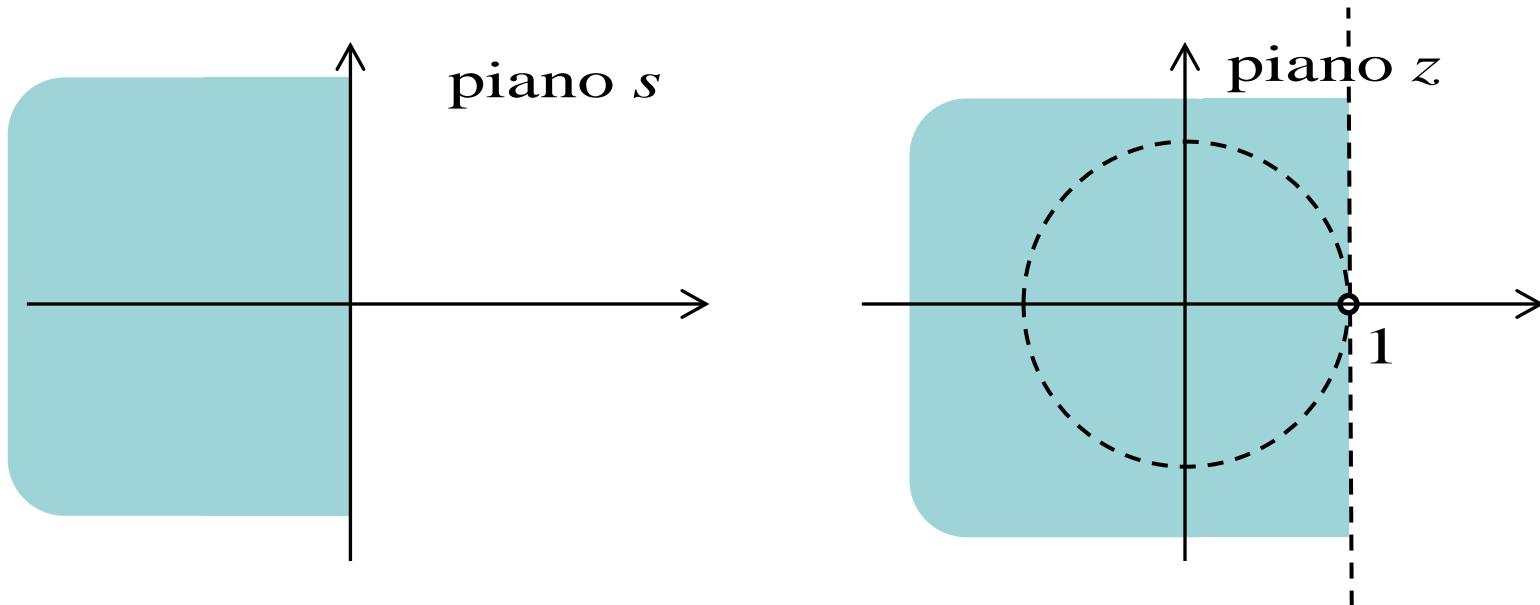
## Considerazioni sulla stabilità

$$s = \frac{z - 1}{T}$$

### 1. Metodo di Eulero in avanti

$$s = \frac{z - 1}{T}, \text{ sia } z = \sigma + j\omega$$

$$s = \frac{\sigma + j\omega - 1}{T} = \frac{\sigma - 1}{T} + j\frac{\omega}{T}, \quad \operatorname{Re} s < 0 \Leftrightarrow \frac{\sigma - 1}{T} < 0 \Leftrightarrow \sigma < 1$$



Se  $C(s)$  è asintoticamente stabile  $C_d(z)$  può essere instabile.

$$s = \frac{z-1}{Tz}$$

## 2. Metodo di Eulero all'indietro

$$s = \frac{z-1}{Tz}, \quad z = \sigma + j\omega$$

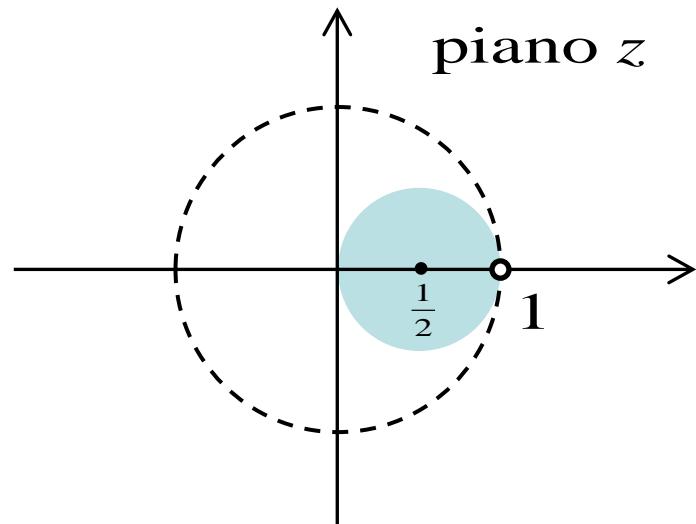
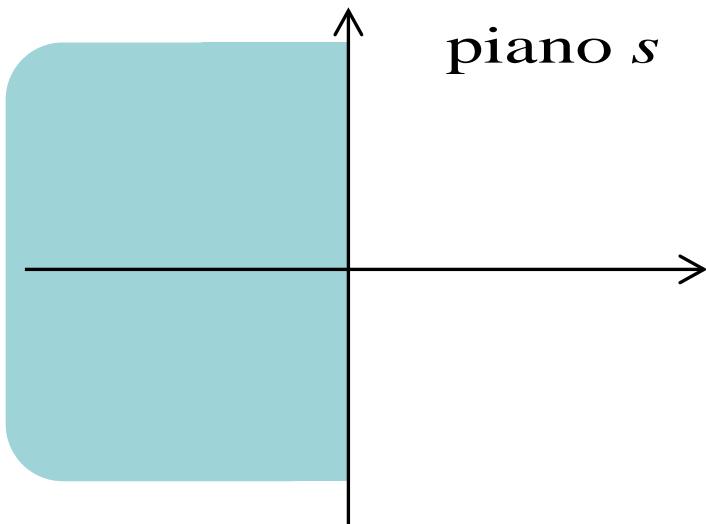
$$\begin{aligned} s &= \frac{\sigma + j\omega - 1}{T(\sigma + j\omega)} = \frac{[(\sigma - 1) + j\omega](\sigma - j\omega)}{T(\sigma + j\omega)(\sigma - j\omega)} \\ &= \frac{(\sigma - 1)\sigma + \omega^2 + j\omega\sigma - j\omega(\sigma - 1)}{T(\sigma^2 + \omega^2)} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} s < 0 \iff (\sigma - 1)\sigma + \omega^2 < 0 \iff \sigma^2 - \sigma + \frac{1}{4} + \omega^2 < \frac{1}{4}$$

$$\iff \left( \sigma - \frac{1}{2} \right)^2 + \omega^2 < \left( \frac{1}{2} \right)^2$$

## 2. Metodo di Eulero all'indietro

$$\operatorname{Re} s < 0 \Leftrightarrow \left( \sigma - \frac{1}{2} \right)^2 + \omega^2 < \left( \frac{1}{2} \right)^2$$



Se  $C(s)$  è asintoticamente stabile allora  $C_d(z)$  è asintoticamente stabile.

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

### 3. Metodo di Tustin

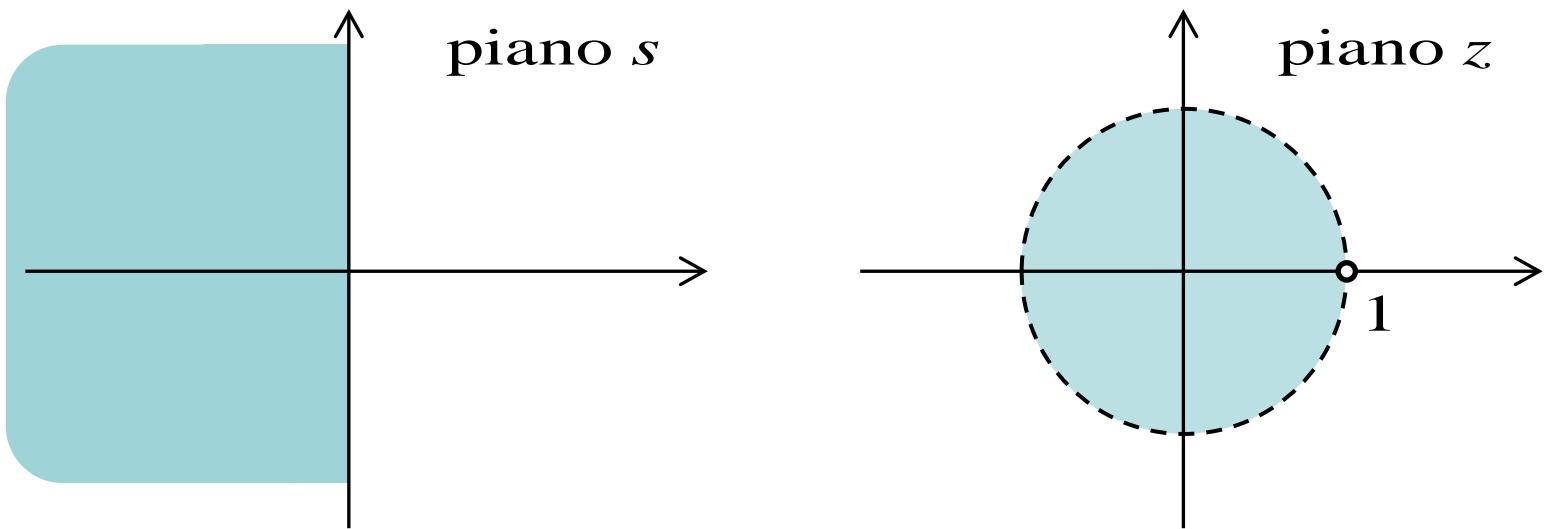
$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}, \quad z = \sigma + j\omega$$

$$\begin{aligned} s &= \frac{2}{T} \frac{\sigma + j\omega - 1}{\sigma + j\omega + 1} = \frac{2}{T} \frac{[(\sigma - 1) + j\omega][(\sigma + 1) - j\omega]}{[(\sigma + 1) + j\omega][(\sigma + 1) - j\omega]} \\ &= \frac{2}{T} \frac{\sigma^2 - 1 + \omega^2 + j\omega(\sigma + 1) - j\omega(\sigma - 1)}{(\sigma + 1)^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} s < 0 \iff \sigma^2 - 1 + \omega^2 < 0 \iff \sigma^2 + \omega^2 < 1$$

### 3. Metodo di Tustin

$$\operatorname{Re} s < 0 \Leftrightarrow \sigma^2 + \omega^2 < 1$$



La stabilità asintotica di  $C(s)$  è equivalente alla stabilità asintotica di  $C_d(z)$ .

# Esercizi

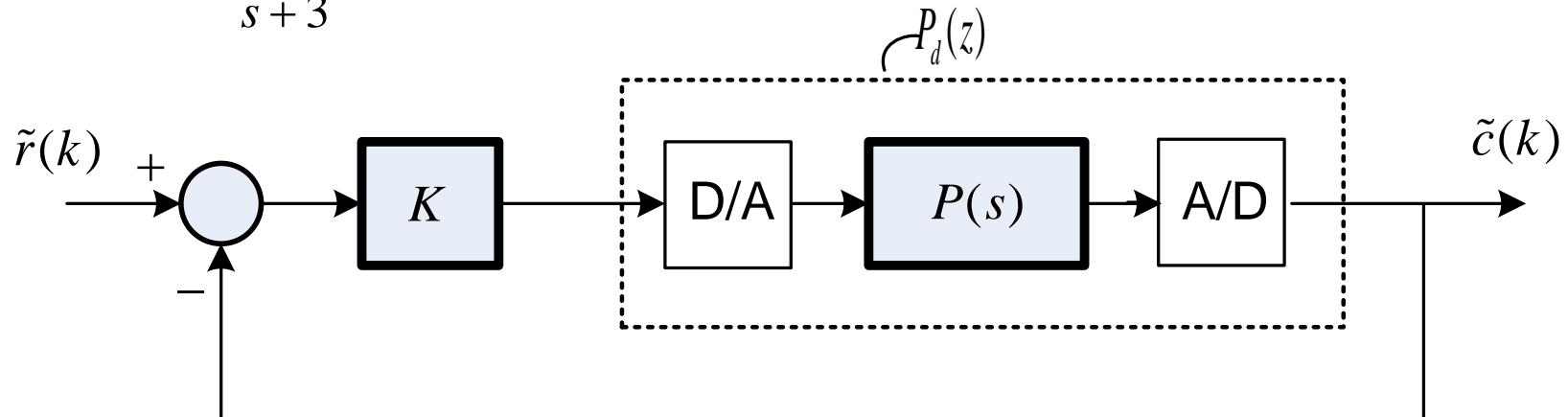
Studiare la stabilità asintotica di un sistema discreto con polinomio caratteristico

1)  $a(z) = z^3 - z^2 + z + 0.5$

2)  $a(z) = z^4 - z^3 + 0.25z^2 + 0.25z - 0.125$

- 3) Determinare i valori di  $K \in \mathbb{R}$  che assicurano la stabilità asintotica del seguente sistema di controllo. Il periodo di campionamento è  $T = 0.02$  sec

e  $P(s) = \frac{1}{s+3}$ .



## Esercizi della lezione 21 di Fondamenti di controlli automatici

Studiare la stabilità asintotica di un sistema discreto con polinomio caratteristico

1)  $a(z) = z^3 - z^2 + z + 0.5$

Soluzione

1.  $a(1) > 0 \quad a(1) = 1 - 1 + 1 + 0,5 = 1,5 > 0 \quad \text{ok!}$

2.  $(-1)^3 a(-1) > 0$

$a(-1) < 0 \quad a(-1) = -1 - 1 - 1 + 0,5 = -2,5 < 0 \quad \text{ok!}$

3.  $|a_0| < a_n \quad 0,5 < 1 \quad \text{ok!}$

$$a(z) = z^3 - z^2 + z + 0.5$$

1	0,5	1	-1	1
2	1	-1	1	0,5
3	-0,75	1,5	-1,5	

4.  $|b_0| > |b_2| \quad 0,75 > 1,5$  non è soddisfatto

$\sum_d$  non è ont. stabile

## Comandi MATLAB

```
>> r = roots([1 -1 1 0.5])
```

```
r =
```

```
0.6713 + 1.0046i
```

```
0.6713 - 1.0046i
```

```
-0.3425 + 0.0000i
```

```
>> abs(r)
```

```
ans =
```

```
1.2082
```

```
1.2082
```

```
0.3425
```

Studiare la stabilità asintotica di un sistema discreto con polinomio caratteristico

$$2) \quad a(z) = z^4 - z^3 + 0.25z^2 + 0.25z - 0.125$$

## Soluzione

$$1) \quad a(1) > 0 \quad a(1) = 1 - 1 + 0,25 + 0,25 - 0,125 = 0,375 > 0 \quad \text{ok!}$$

$$2) \quad (-1)^4 a(-1) > 0$$

$$a(-1) > 0 \quad a(-1) = 1 + 1 + 0,25 - 0,25 - 0,125 = 1,875 > 0 \quad \text{ok!}$$

$$3) \quad |a_0| < a_n \quad 0,125 < 1 \quad \text{ok!}$$

$$a(z) = z^4 - z^3 + 0.25z^2 + 0.25z - 0.125$$

1	-0.125	0.25	0.25	-1	1
2	1	-1	0.25	0.25	-0.125
3	-0.984375	0.96875	-0.28125	-0.125	
4	-0.125	-0.28125	0.96875	-0.984375	
5	0.9534	*	0.3979		

4)  $| -0.984375 | > | -0.125 | \quad \text{ok!}$

5)  $| 0.9534 | > | 0.3979 | \quad \text{ok!}$

Il sistema discreto è asintoticamente stabile.

$$a(z) = z^4 - z^3 + 0.25z^2 + 0.25z - 0.125$$

## Verifica con MATLAB

```
>> r = roots([1 -1 0.25 0.25 -0.125])
```

```
r =
```

```
-0.5000 + 0.0000i  
0.5000 + 0.5000i  
0.5000 - 0.5000i  
0.5000 + 0.0000i
```

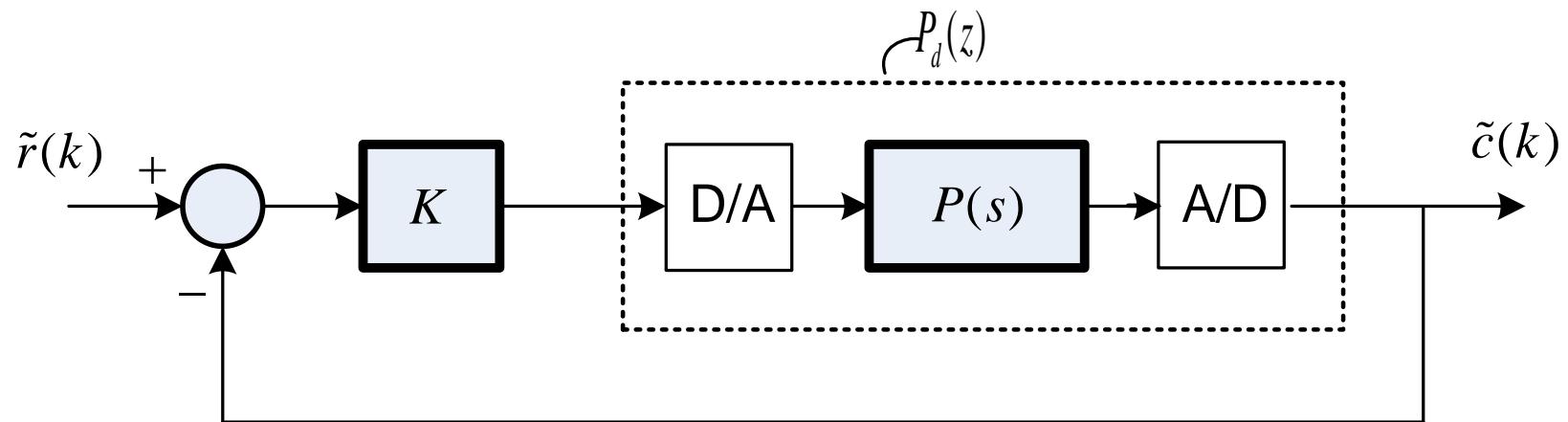
```
>> abs(r)
```

```
ans =
```

```
0.5000  
0.7071  
0.7071  
0.5000
```

- 3) Determinare i valori di  $K \in \mathbb{R}$  che assicurano la stabilità asintotica del seguente sistema di controllo. Il periodo di campionamento è  $T = 0.02$  sec

$$\text{e } P(s) = \frac{1}{s+3}.$$



Soluzione

$$P_d(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[ \frac{P(s)}{s}, T \right]$$

$$P_d(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[ \frac{P(s)}{s}, T \right]$$

$$\frac{P(s)}{s} = \frac{1}{s(s+3)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+3}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{P(s)}{s} \right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

$$\mathcal{Z} \left[ \frac{P(s)}{s}, 0,02 \right] = \mathcal{Z} \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} e^{-3 \cdot 0,02 k} \right] = \mathcal{Z} \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} (e^{-0,06})^k \right]$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{z-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{z - (e^{-0,06})}$$

$$\begin{aligned}
 P_d(z) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{z-1}{z - (e^{-0,06})} = \frac{z - e^{-0,06} - z + 1}{3 \cdot (z - e^{-0,06})} = \\
 &= \frac{1 - e^{-0,06}}{3 \cdot (z - e^{-0,06})} = \frac{0,058235}{3(z - 0,9418)} = \frac{0,01941}{z - 0,9418}
 \end{aligned}$$

$$T_{\tilde{z}\tilde{z}}(z) = \frac{L(z)}{1+L(z)} ; \quad L(z) = k P_d(z)$$

eq. costitutiva  $1+L(z)=0$   $1 + \frac{k_{0,01941}}{z - 0,9418} = 0$

$$| z - 0,9418 + 0,01941 \cdot k = 0 |$$

Condizione per la stabilità assoluta

$$| -0,9418 + 0,01941 \cdot k | < 1$$

$$\begin{cases} -0,9418 + 0,01941 \cdot k < 1 \\ 0,9418 - 0,01941 \cdot k < 1 \end{cases}$$

$$0,01941 \cdot k < 1,9418 \quad k < \frac{1,9418}{0,01941} \simeq 100,04$$

$$0,9418 - 1 < 0,01941 \cdot K$$

$$-0,0582 < 0,01941 \cdot K$$

$$K > -\frac{0,0582}{0,01941} \simeq -2,9985 \simeq -3$$

Valori di  $K$  che assicurano la stabilità asintotica del sistema retroazionato:

$$-2,9985 < K < 100,04$$

Se il sistema fosse a tempo continuo, quali sarebbero i valori di  $K$  per i quali sussiste la stabilità asintotica?

$$1 + KP(s) = 0, \quad 1 + \frac{K}{s+3} = 0, \quad s + 3 + K = 0$$

$$s_1 = -3 - K, \quad s_1 < 0 \Leftrightarrow K > -3$$

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle  
Telecomunicazioni

**Lezione n. 22 di Fondamenti di Controlli Automatici**  
**prof. Aurelio Piazzì**

**Un esempio di progetto**

Università degli Studi di Parma – a.a. 2020-2021

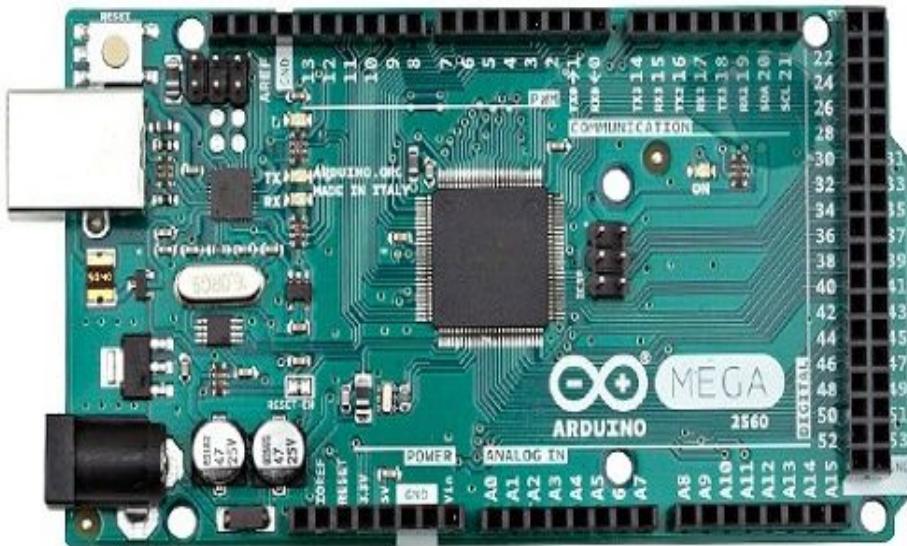
# Regolazione di posizione di un motore elettrico in corrente continua\*



Rotary Servo Base Unit  
(Quanser SRV02 Plant)

\* Con la collaborazione di Alberto CIPPELLETTI, Juxhino KAVAJA, Andrea MINARI, Paramdeep Singh MUSHIANA; sperimentazione svolta nel Laboratorio di Automatica (ACtLab, Active Control Laboratory)

# Implementazione con Arduino e un amplificatore di potenza

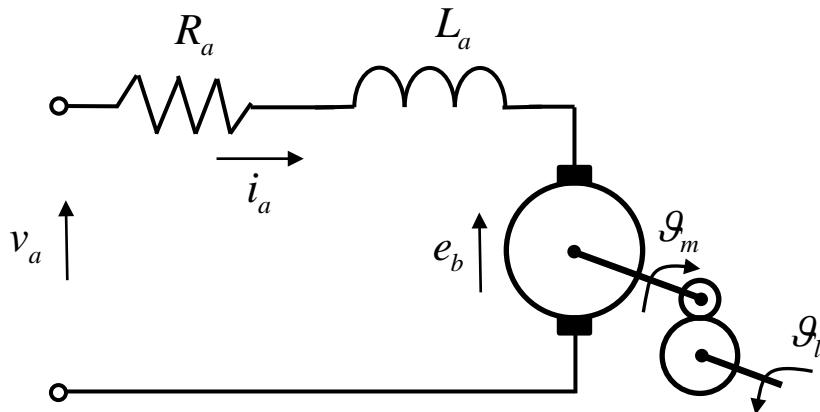


Scheda Arduino Mega 2560 (utilizza il microcontrollore ATmega2560)



Universal Power Module, UPM 2405 (Quanser)

# Progetto del regolatore di posizione di un motore elettrico in corrente continua

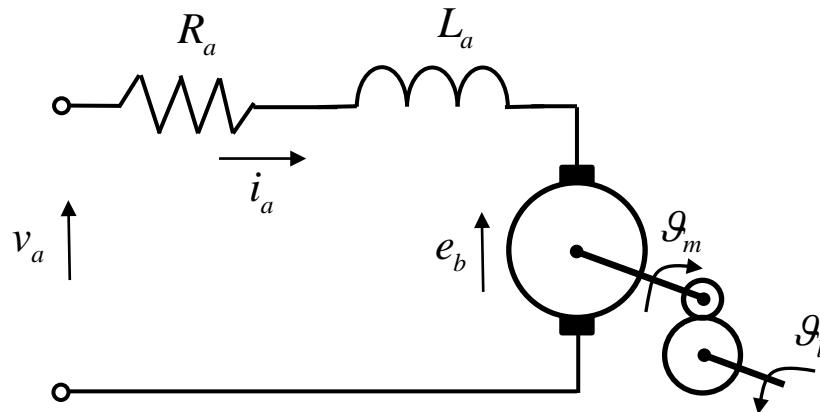


L'ingresso di controllo è  $v_a$  (tensione di armatura); l'uscita controllata è  $\vartheta_l$  (posizione angolare del carico)

Progettare un sistema di controllo affinché in risposta ad un gradino del segnale di riferimento (set-point) si abbia:

- 1) Tempo di assestamento  $T_a$  minimo (fascia  $\pm 2\%$ )
- 2) Sovraelongazione  $S = 0\%$
- 3) Errore a regime nullo
- 4)  $|v_a| \leq 10 \text{ V}$
- 5) Escursione massima del riferimento  $\pm \frac{\pi}{4}$  ( $45^\circ$ )

# Modellistica del motore elettrico in corrente continua



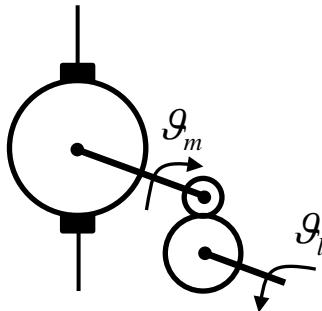
Coppia meccanica esercitata dal motore  $C_m = K_c \Phi i_a$  con  $\Phi$  flusso magnetico (costante);  $K_m := K_c \Phi$ ,  $C_m = K_m i_a$

Forza controelettromotrice  $e_b = K_m \omega_m$  con  $\omega_m := \frac{d\vartheta_m}{dt}$

Rapporto di trasmissione del riduttore  $K_g$ ,  $\omega_m = K_g \omega_l$  con  $\omega_l := \frac{d\vartheta_l}{dt}$

$$v_a = R_a i_a + L_a D i_a + e_b$$

$$v_a = R_a i_a + L_a D i_a + K_m K_g \omega_l$$



$C_m \omega_m = C_l \omega_l$  (potenza all'ingresso del riduttore = potenza all'uscita del riduttore)

$$C_l = C_m K_g$$

$$J_{eq} D \omega_l = C_m K_g - F_l \omega_l$$

con  $J_{eq}$  inerzia riferita all'albero del carico,  $F_l$  coefficiente dell'attrito viscoso

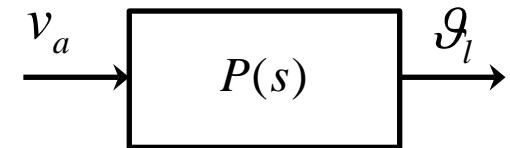
$$J_{eq} D \omega_l = K_g K_m i_a - F_l \omega_l$$

$$\begin{cases} v_a = R_a i_a + L_a D i_a + K_m K_g D \vartheta_l \\ J_{eq} D^2 \vartheta_l = K_g K_m i_a - F_l D \vartheta_l \end{cases}$$

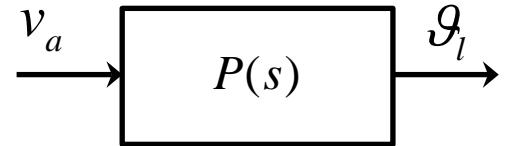
$$i_a = \frac{J_{eq}}{K_g K_m} D^2 \vartheta_l + \frac{F_l}{K_g K_m} D \vartheta_l$$

$$J_{eq} L_a D^3 \vartheta_l + (L_a F_l + J_{eq} R_a) D^2 \vartheta_l + (R_a F_l + K_m^2 K_g^2) D \vartheta_l = K_g K_m v_a$$

$$\begin{aligned} P(s) &= \frac{K_g K_m}{J_{eq} L_a s^3 + (L_a F_l + J_{eq} R_a) s^2 + (R_a F_l + K_m^2 K_g^2) s} \\ &= \frac{s [J_{eq} L_a s^2 + (L_a F_l + J_{eq} R_a) s + R_a F_l + K_m^2 K_g^2]}{K_g K_m} \\ &\approx \frac{s [J_{eq} R_a s + R_a F_l + K_m^2 K_g^2]}{K_g K_m} \end{aligned}$$



$$P(s) \cong \frac{K_g K_m}{s[J_{eq} R_a s + R_a F_l + K_m^2 K_g^2]}$$



$$P(s) = \frac{1}{s(\alpha s + \beta)}, \alpha := \frac{J_{eq} R_a}{K_g K_m}, \beta := \frac{R_a F_l + K_m^2 K_g^2}{K_g K_m}$$

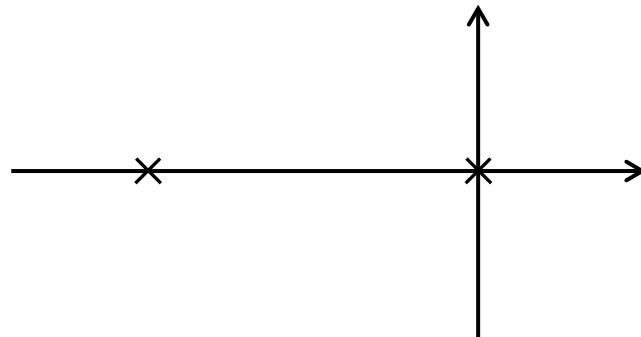
Dati:

$$K_m = 7.67 \times 10^{-3} \text{ Nm/A}; R_a = 2.6 \Omega; L_a = 0.18 \times 10^{-3} \text{ H}$$

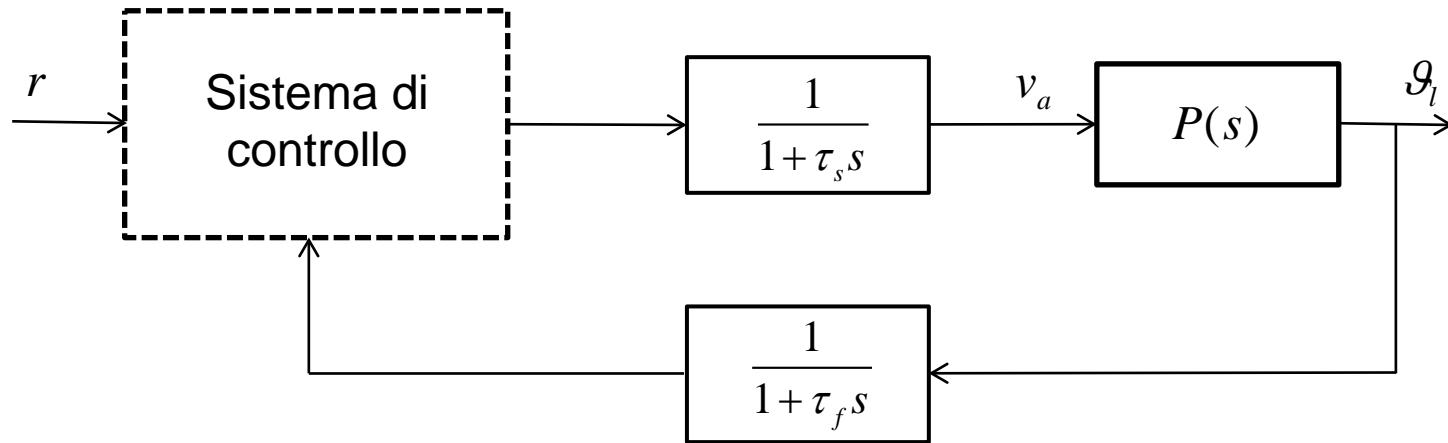
$$K_g = 70; J_{eq} = 0.195 \times 10^{-2} \text{ Kg m}^2; F_l = 0.95 \times 10^{-2} \text{ Nms}$$

$$P(s) = \frac{1}{s(0.009443s + 0.5829)}$$

$$\text{Poli: } 0, -\frac{\beta}{\alpha} = -61.73 \text{ s}^{-1}$$



# Progetto del sistema di controllo

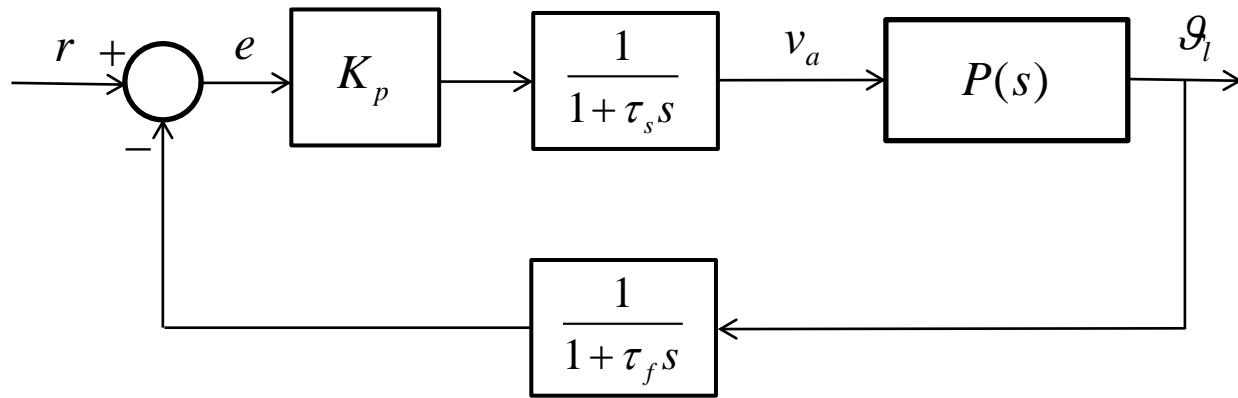


La progettazione è a **tempo continuo** con successiva **discretizzazione** per l'implementazione.

Per simulare a tempo continuo l'effetto della conversione D/A da segnale digitale a segnale a tempo continuo e la latenza nei calcoli digitali del controllore si introduce un filtro di ordine uno con costante di tempo  $\tau_s$  pari al tempo di campionamento ( $\tau_s = 0.003$  s). (Con l'Arduino scelto, la conversione D/A avviene con PWM e modulazione del *duty cycle* su 256 livelli, frequenza di modulazione 1 KHz).

L'uscita  $\vartheta_l$  viene campionata e filtrata con costante di tempo  $\tau_f = 0.01$  s.

# 1) Controllore proporzionale

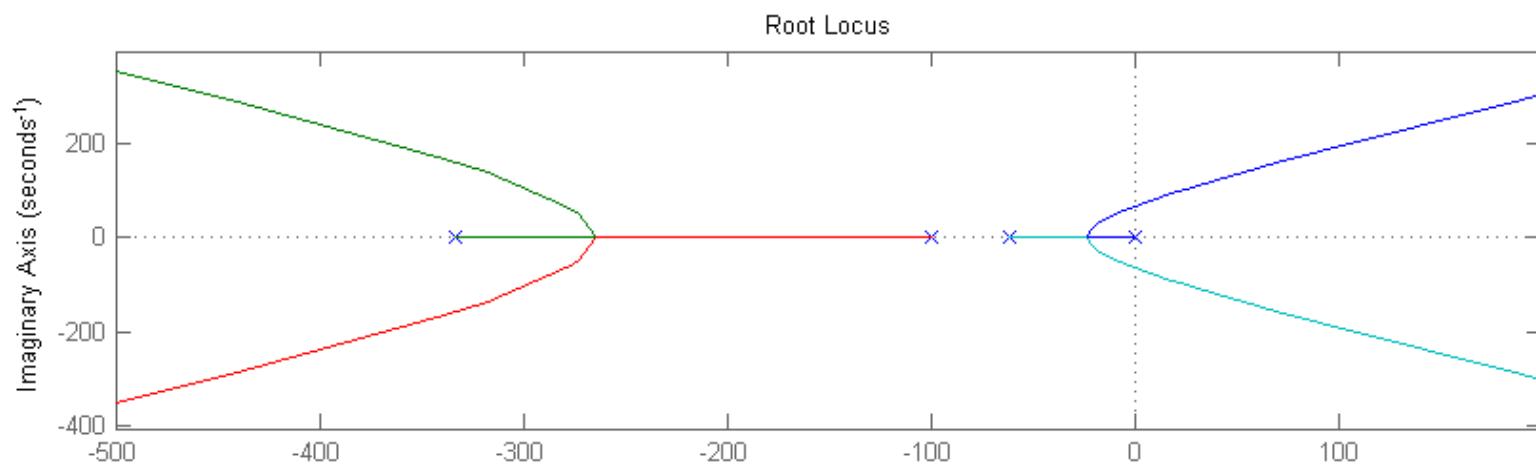


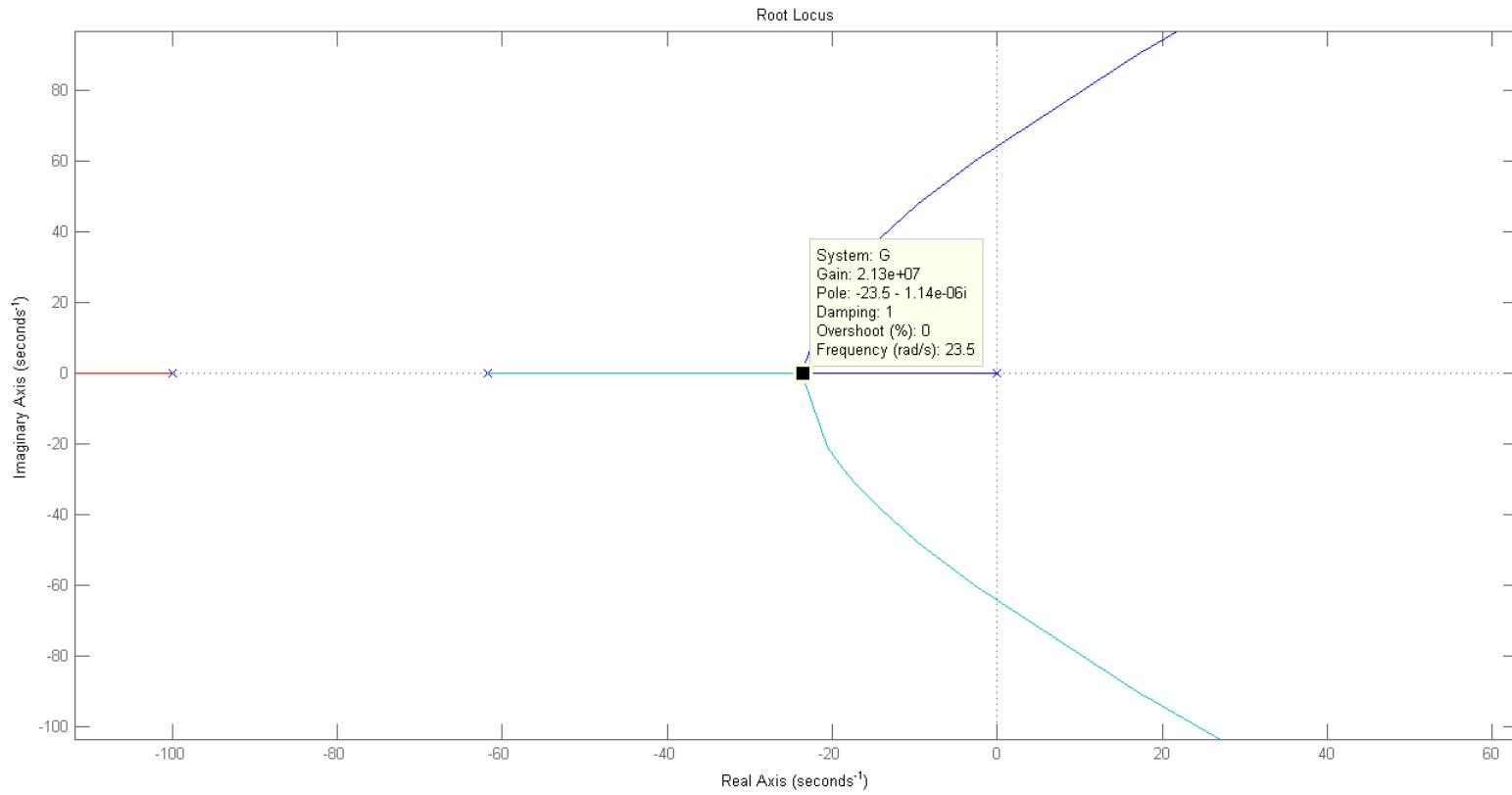
$$T(s) = \frac{K_p \frac{1}{1 + \tau_s s} \cdot \frac{1}{s(\alpha s + \beta)}}{1 + K_p \frac{1}{1 + \tau_f s} \cdot \frac{1}{1 + \tau_s s} \cdot \frac{1}{s(\alpha s + \beta)}} = \frac{K_p (1 + \tau_f s)}{s(\alpha s + \beta)(1 + \tau_f s)(1 + \tau_s s) + K_p}$$

$$1 + K_1 \frac{1}{s \left( s + \frac{\beta}{\alpha} \right) \left( s + \frac{1}{\tau_f} \right) \left( s + \frac{1}{\tau_s} \right)} = 0; \quad 1 + K_1 \frac{1}{s(s+61.73)(s+100)(s+333.3)} = 0$$

$$K_1 := \frac{K_p}{\alpha \tau_f \tau_s}; \quad K_p = 2.8329 \times 10^{-7} \times K_1$$

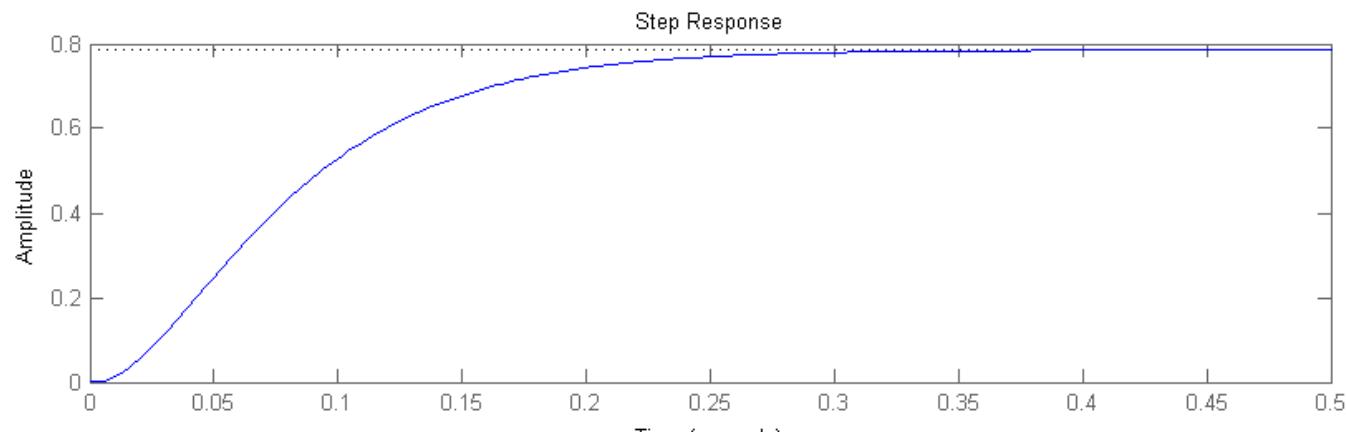
**Luogo delle radici:**  $1 + K_1 \frac{1}{s(s+61.73)(s+100)(s+333.3)} = 0$ ;  $K_p = 2.8329 \times 10^{-7} \times K_1$



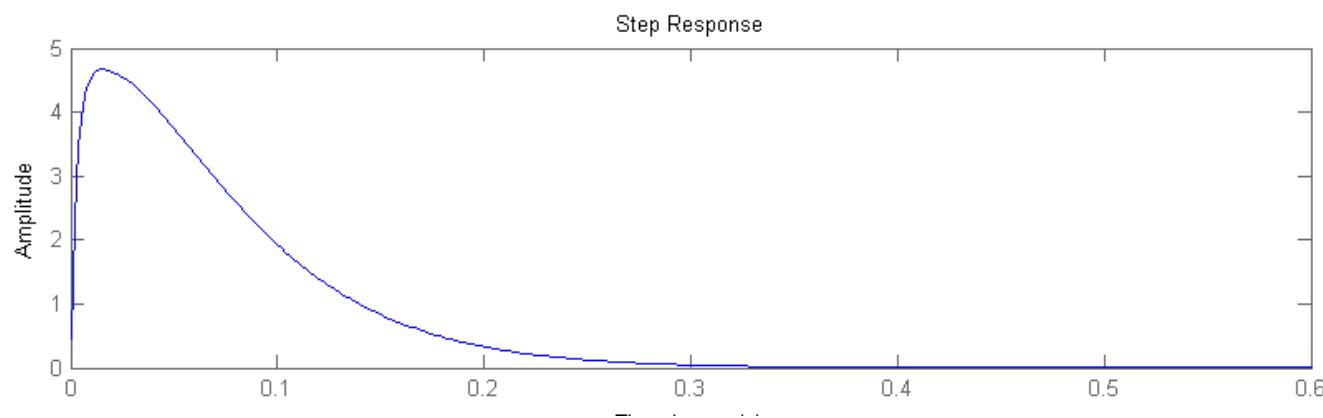


$$K_p = 6.03; \quad T(s) = \frac{212851(s + 100)}{(s + 332.3)(s + 115.7)(s + 24.06)(s + 23.01)}$$

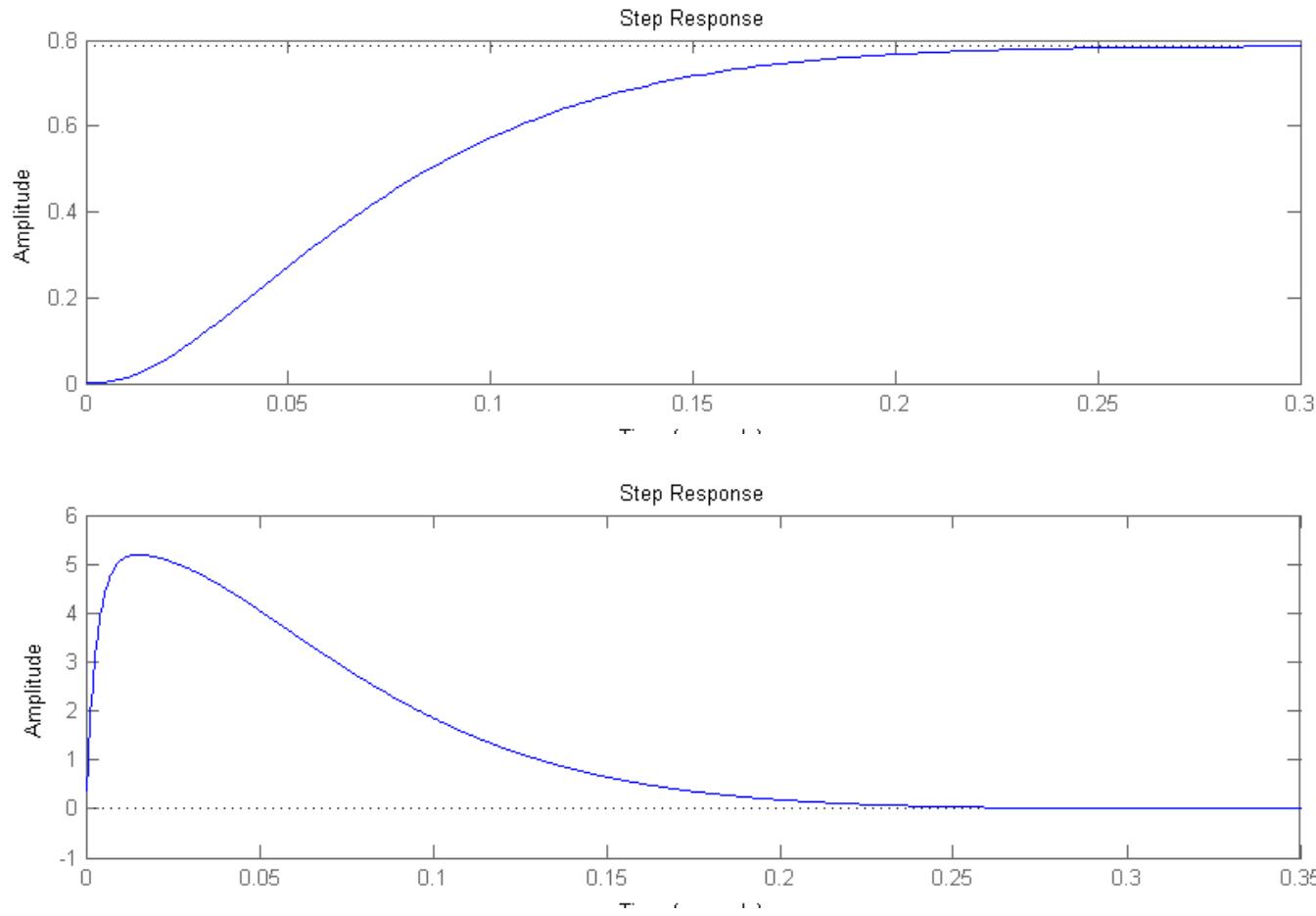
Risposta al gradino massimo  $r(t) = 0.7854 \cdot 1(t)$ ,  $T_a = 0.25$  s ,  $S = 0\%$



Risposta sulla tensione di armatura  $v_a$

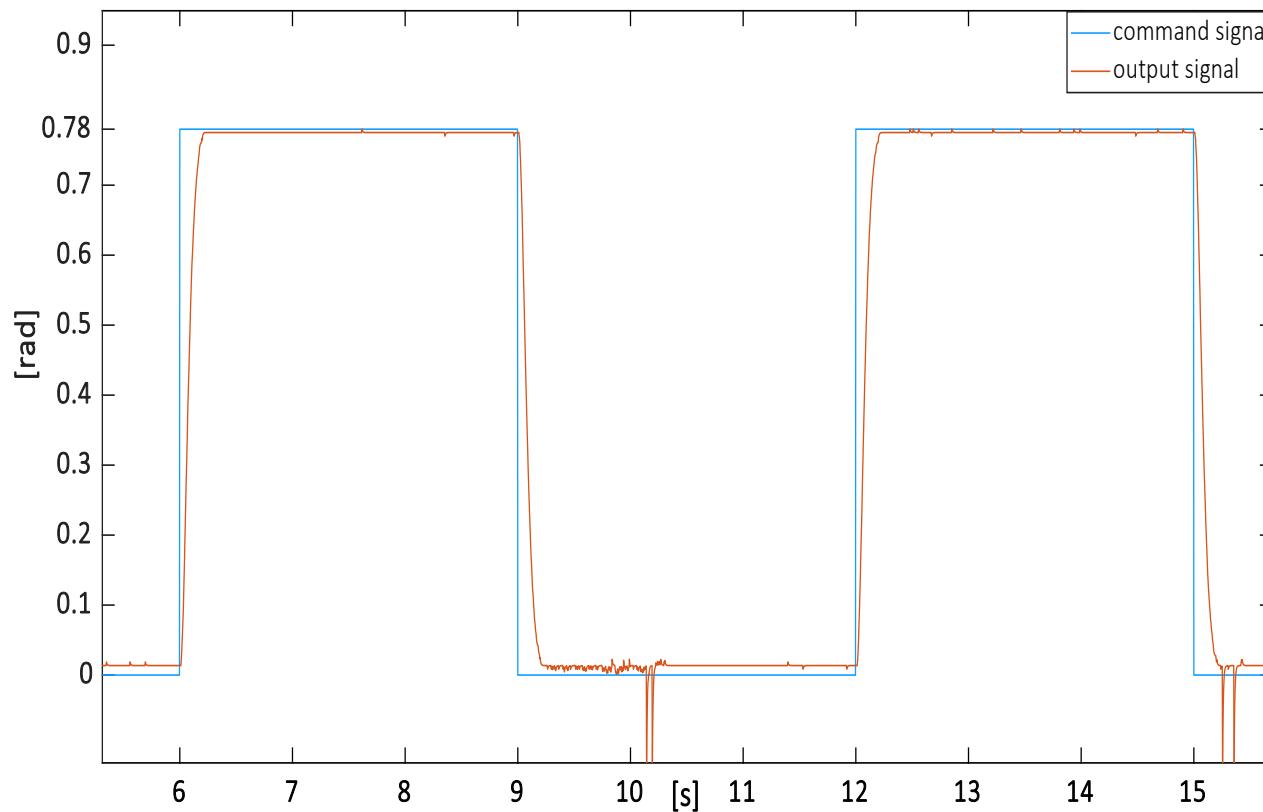


Per tentativi con uso delle simulazioni (`step(T*0.7854)` in MATLAB) si ottiene il valore ottimale  $K_p = 6.71$  con il minimo  $T_a = 0.205$  s e  $S = 0\%$ .

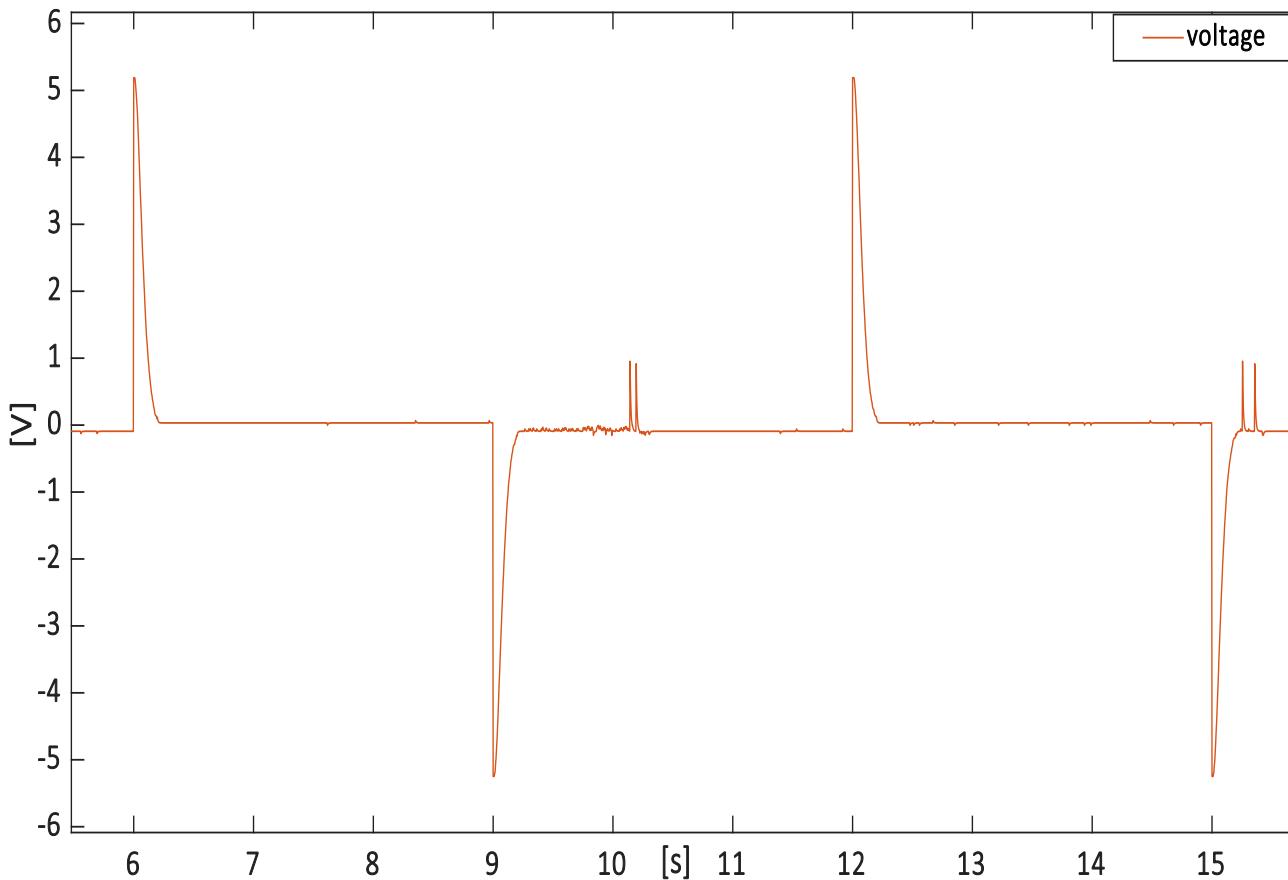


## Sperimentazioni in laboratorio

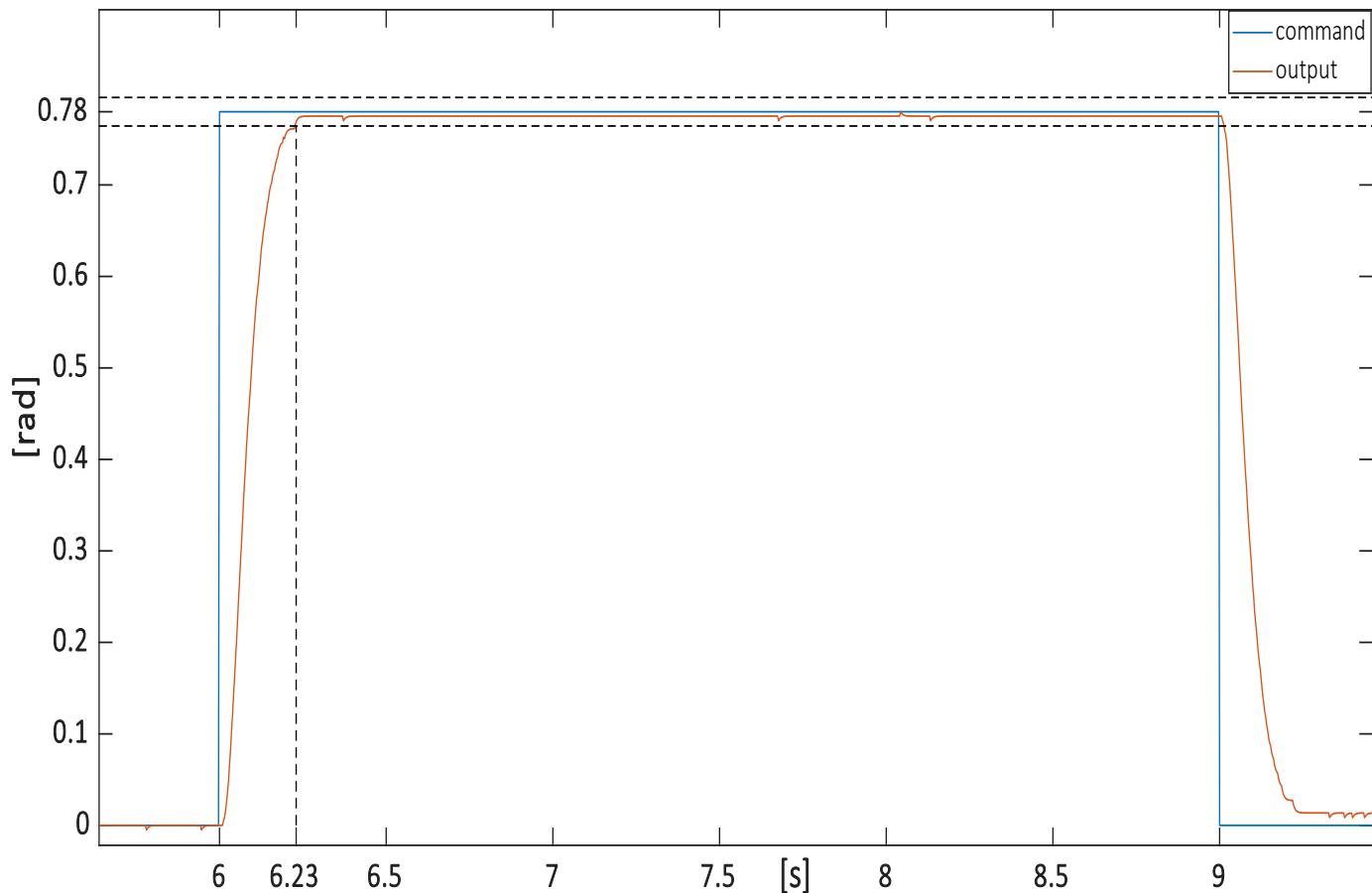
Con qualche tentativo e uso di sperimentazioni si ottiene il valore ottimale  $K_p = 6.77$  con il minimo  $T_a = 0.23$  s e  $S \cong 0\%$ ,  $\max |v_a| = 5.2$  [V]



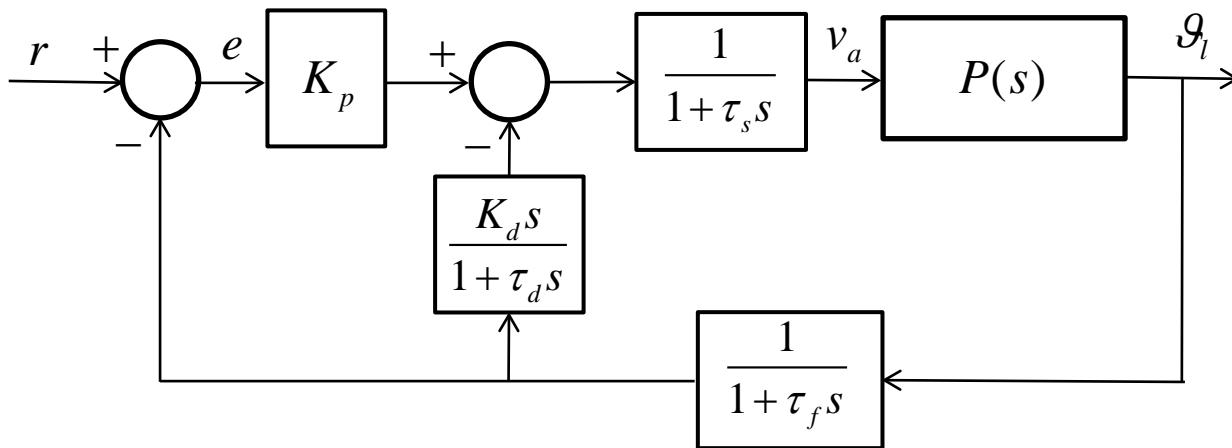
## Segnale della tensione di armatura



## Dettaglio della risposta all'onda quadra



## 2) Controllore PD (proporzionale-derivativo)



$$T(s) = \frac{K_p(1 + \tau_f s)(1 + \tau_d s)}{s(\alpha s + \beta)(1 + \tau_f s)(1 + \tau_s s)(1 + \tau_d s) + K_p(1 + \tau_d s) + K_d s}$$

$$T_{rv_a}(s) = \frac{K_p(1 + \tau_f s)(1 + \tau_d s)s(\alpha s + \beta)}{s(\alpha s + \beta)(1 + \tau_f s)(1 + \tau_s s)(1 + \tau_d s) + K_p(1 + \tau_d s) + K_d s}$$

## Metodo di progetto (nel dominio del tempo)

- 1) Si determinano valori ottimali dei parametri del controllore ( $K_p$  e  $K_d$ ) **con il luogo delle radici e le simulazioni.**
- 2) I valori ottimali trovati vengono migliorati mediante **tuning con sperimentazioni.**

$$\min_{K_p, K_d} T_a$$

con i vincoli  $S = 0\%$  e  $|v_a(t)| \leq 10$  V durante il transitorio

Parametri del sistema di controllo equivalente a tempo continuo:  
 $\tau_s = 0.003$  s ;  $\tau_f = 0.00637$  s;  $\tau_d = 0.01$  s (il tempo di campionamento è di 0.003 s ).

$$T(s) = \frac{K_p(1 + \tau_f s)(1 + \tau_d s)}{s(\alpha s + \beta)(1 + \tau_f s)(1 + \tau_s s)(1 + \tau_d s) + K_p(1 + \tau_d s) + K_d s}$$

Equazione caratteristica:

$$s(\alpha s + \beta)(1 + \tau_f s)(1 + \tau_s s)(1 + \tau_d s) + K_p(1 + \tau_d s) + K_d s = 0$$

Luogo delle radici:

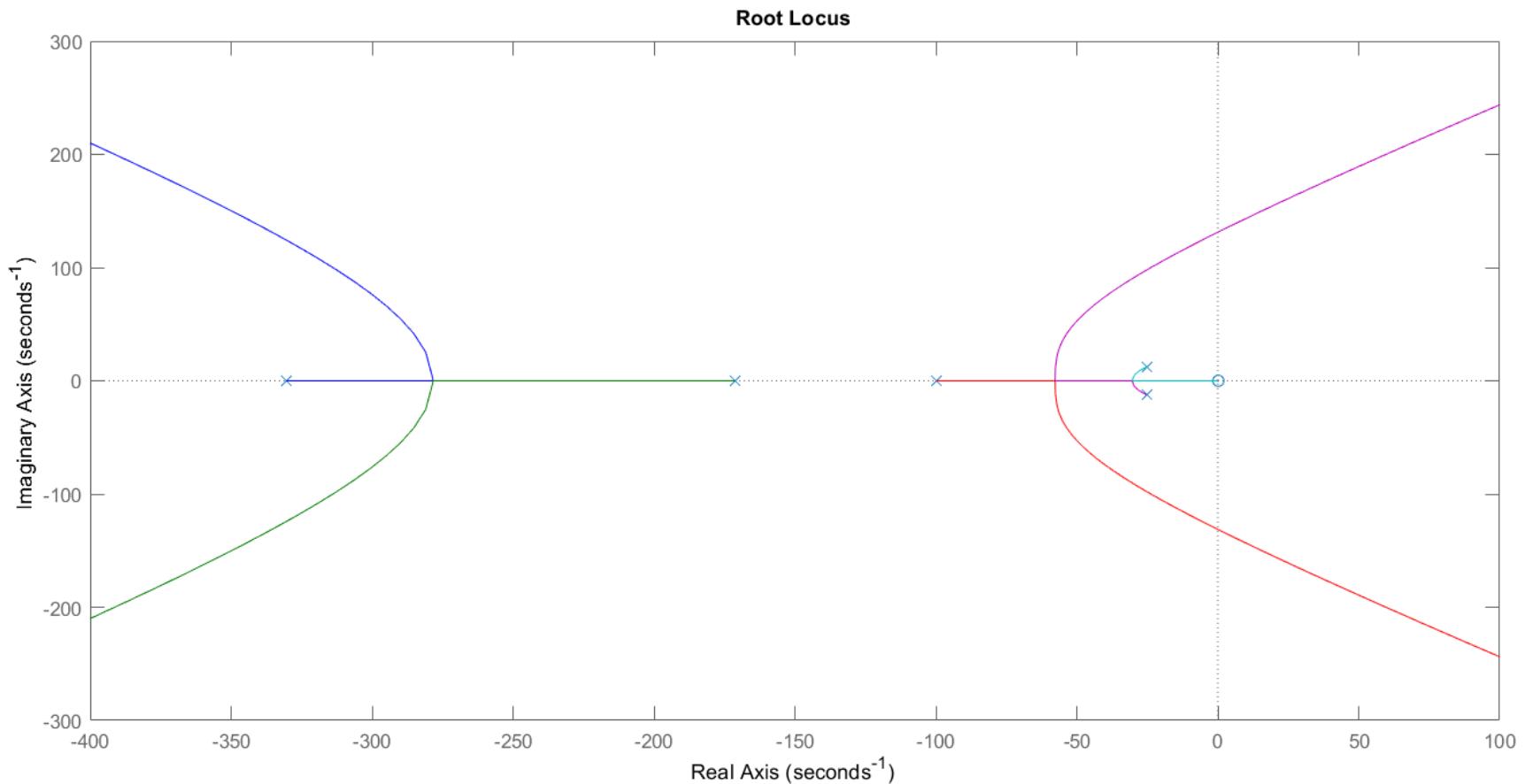
$$1 + K_d \frac{s}{s(\alpha s + \beta)(1 + \tau_f s)(1 + \tau_s s)(1 + \tau_d s) + K_p(1 + \tau_d s)} = 0$$

## Controllore PD: risultati simulativi

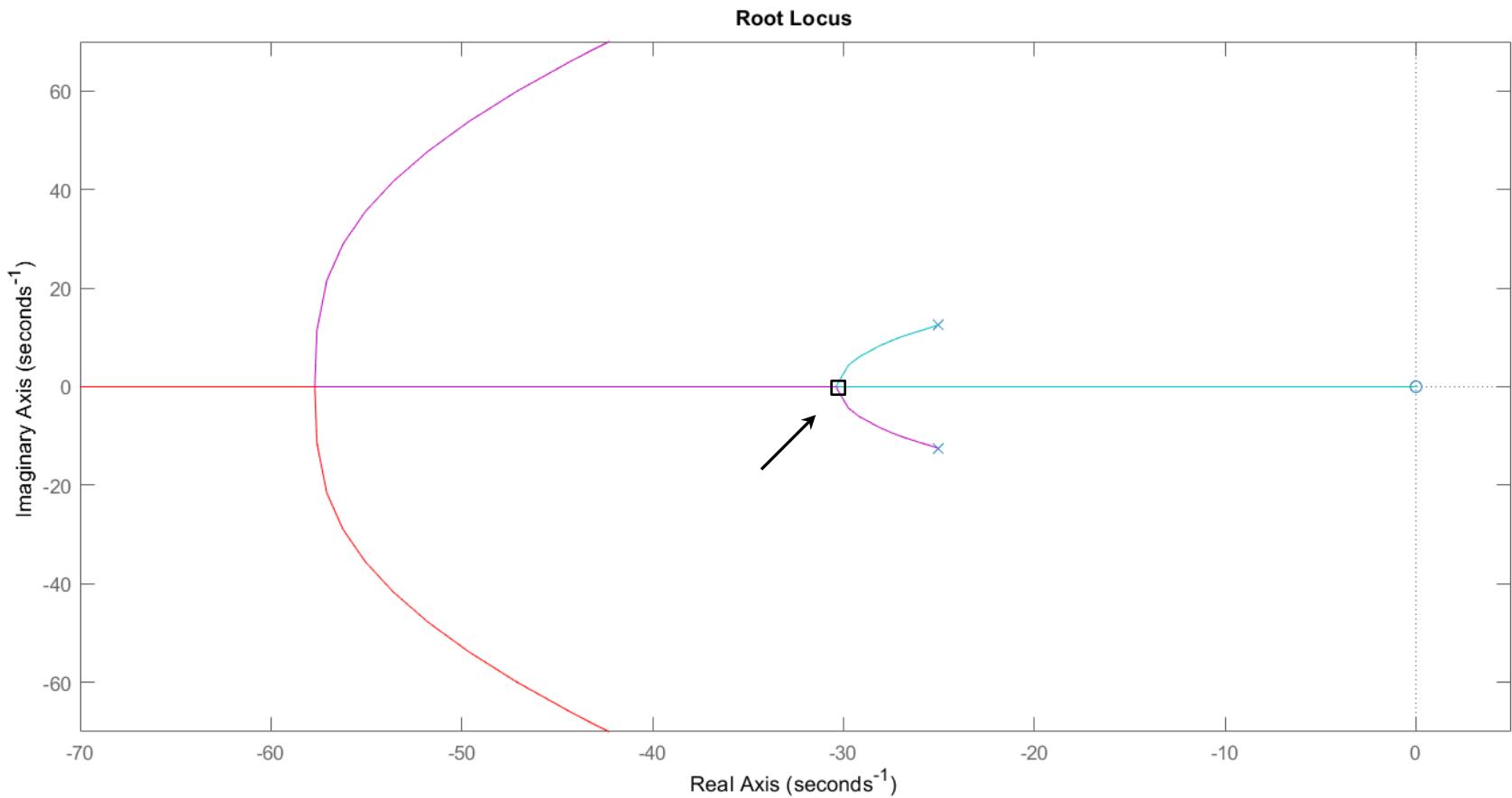
$K_p$	$K_d^* (1)$	$T_a$ [s]	$S$ (%)	$\max v_a $ [V]
8	0.032	0.197	0	6.2
9	0.053	0.176	0	7
10	0.068	0.154	0	7.5
11	0.081	0.136	0	8.5
12	0.096	0.124	0	9
<b>13</b>	<b>0.112</b>	<b>0.112</b>	<b>0</b>	<b>9.85</b>
14	0.127	0.102	0.076	10.6

(1) Valore corrispondente al massimo del grado di stabilità  $\max_{K_d>0} G_S$

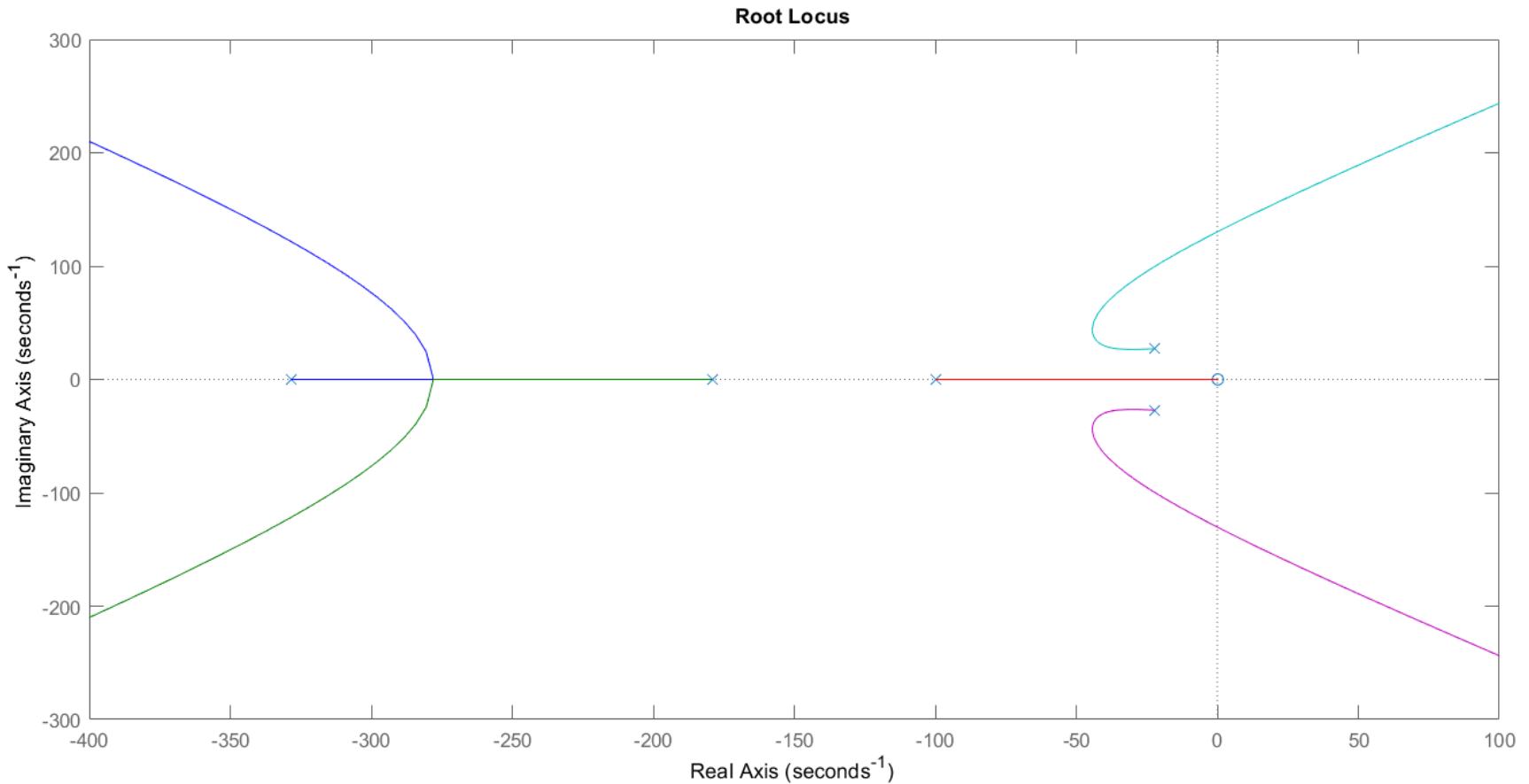
# Luogo delle radici con $K_p = 8$



# Luogo delle radici con $K_p = 8$

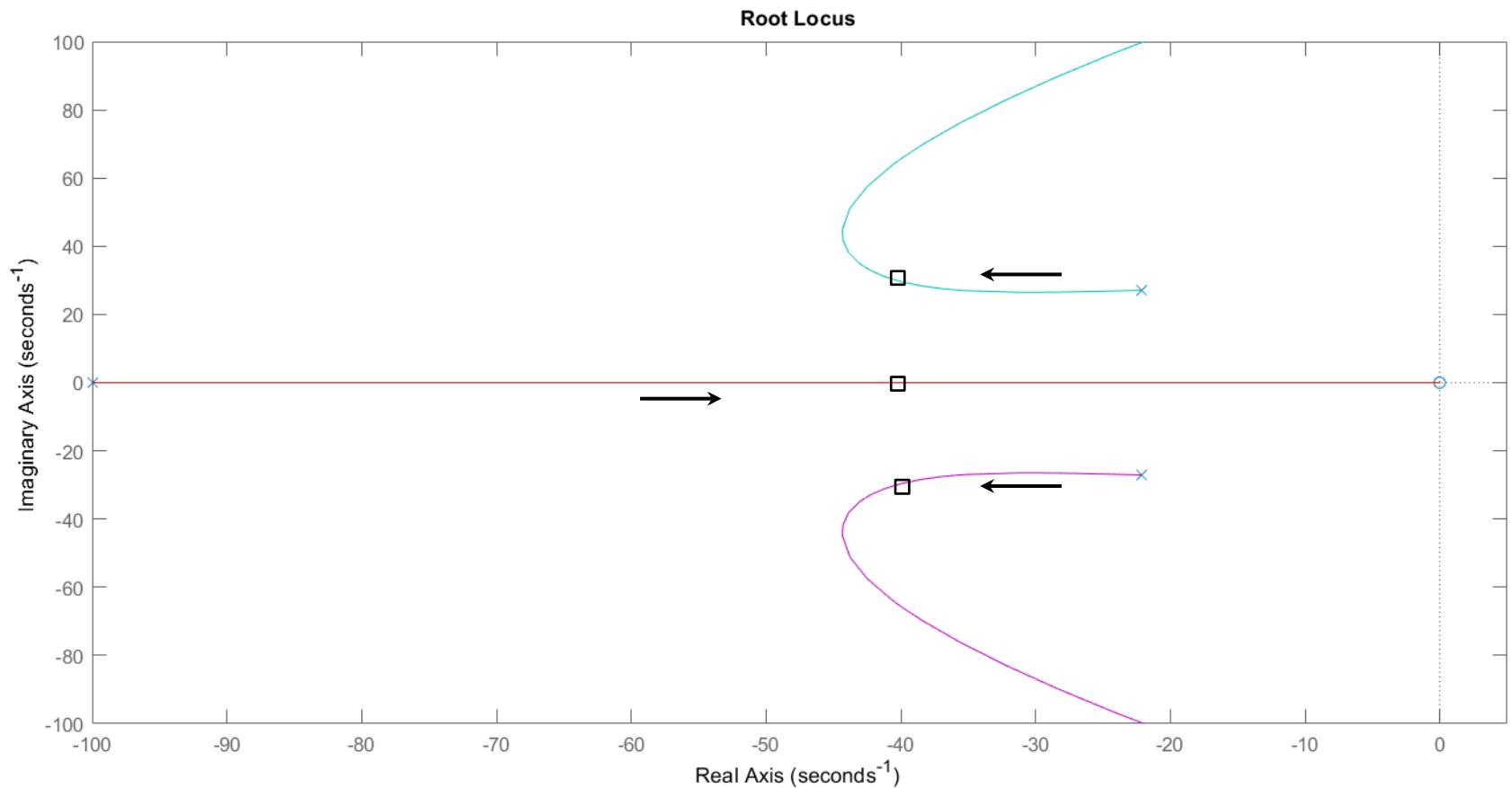


# Luogo delle radici con $K_p = 13$

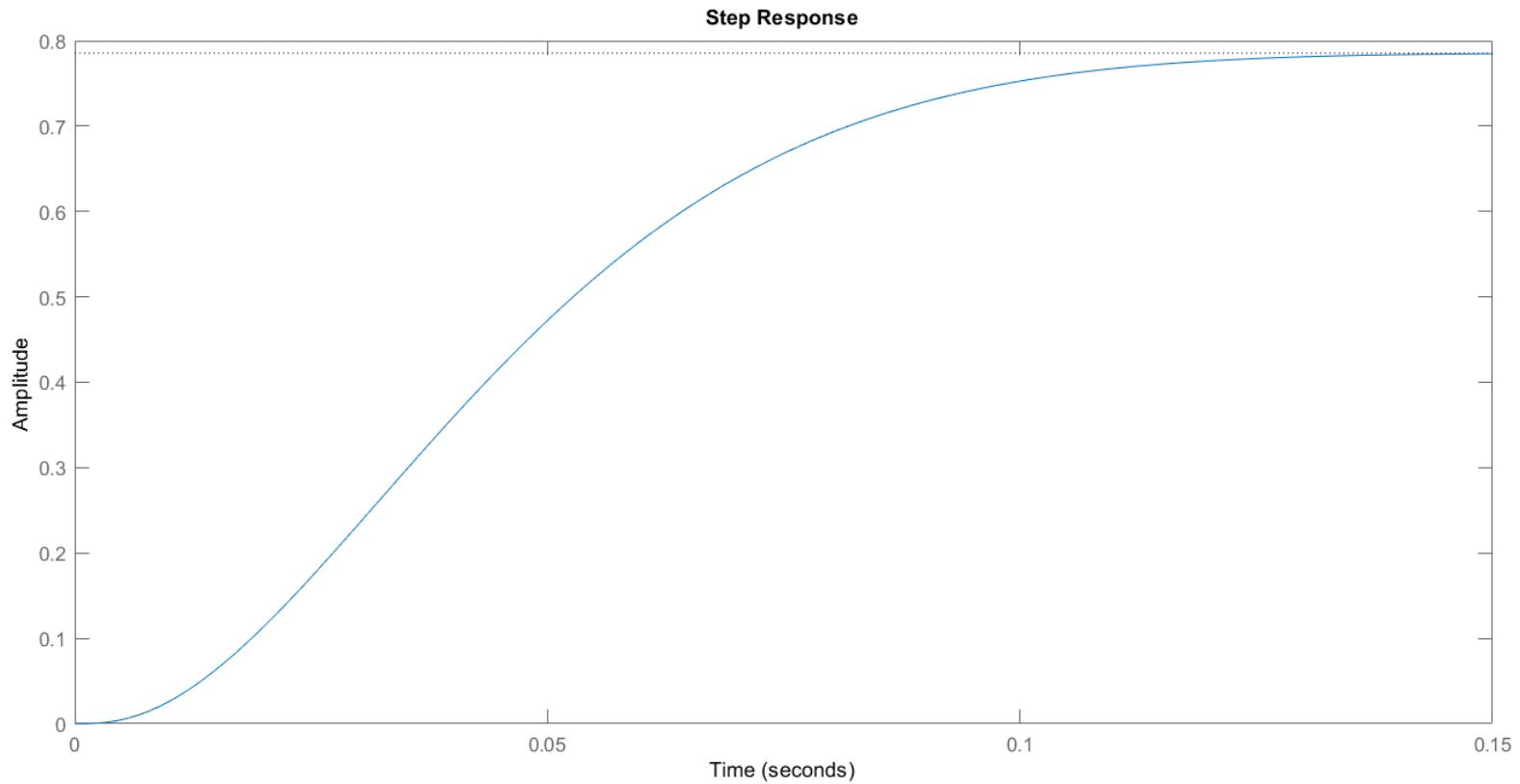


# Luogo delle radici con $K_p = 13$

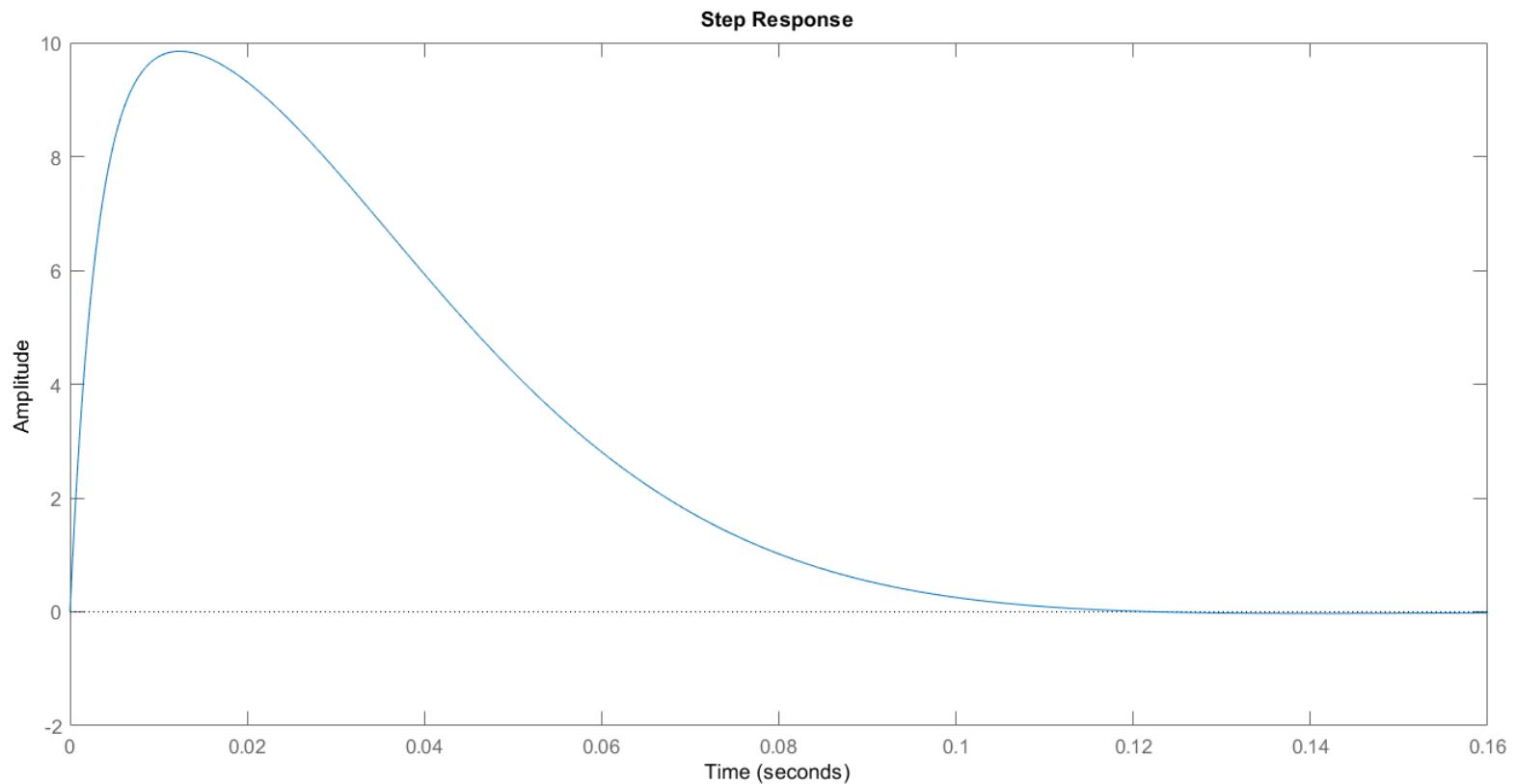
Poli dominanti  $-41, -41 \pm j31$  [s<sup>-1</sup>]



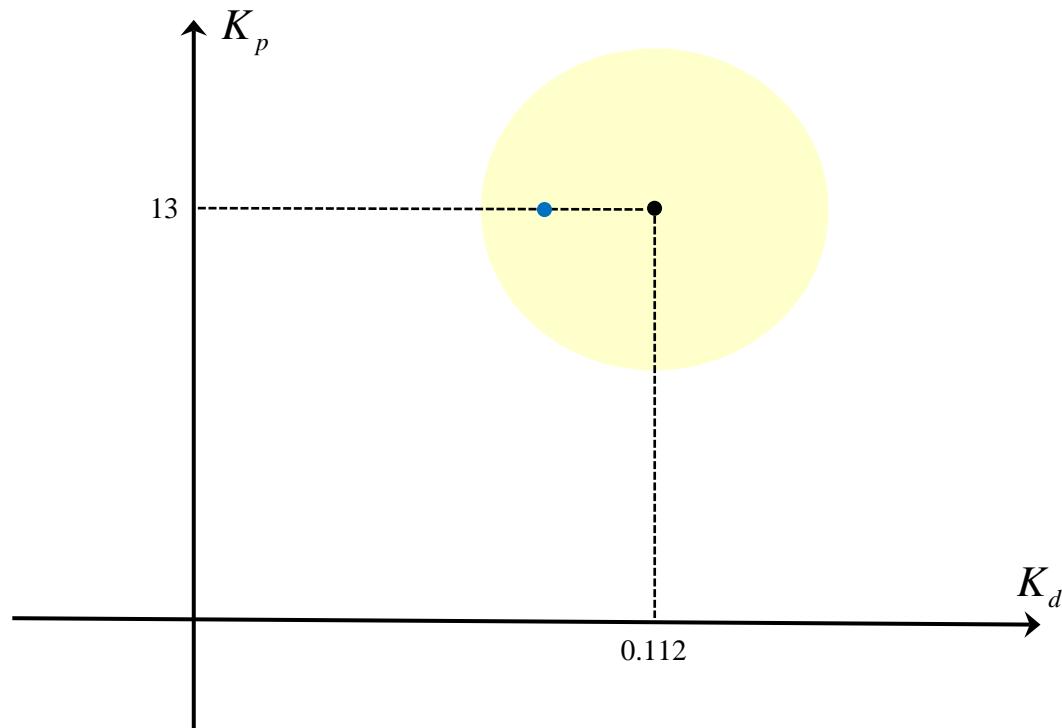
Simulazione dell'uscita con  $K_p = 13$  e  $K_d^* = 0.112$



Simulazione della tensione di armatura con  $K_p = 13$   
e  $K_d^* = 0.112$



Miglioramento locale mediante simulazioni dei valori  $K_p = 13$  e  $K_d^* = 0.112$   
( $T_a = 0.112$  s,  $S = 0\%$ ,  $\max|v_a| = 9.85$ )

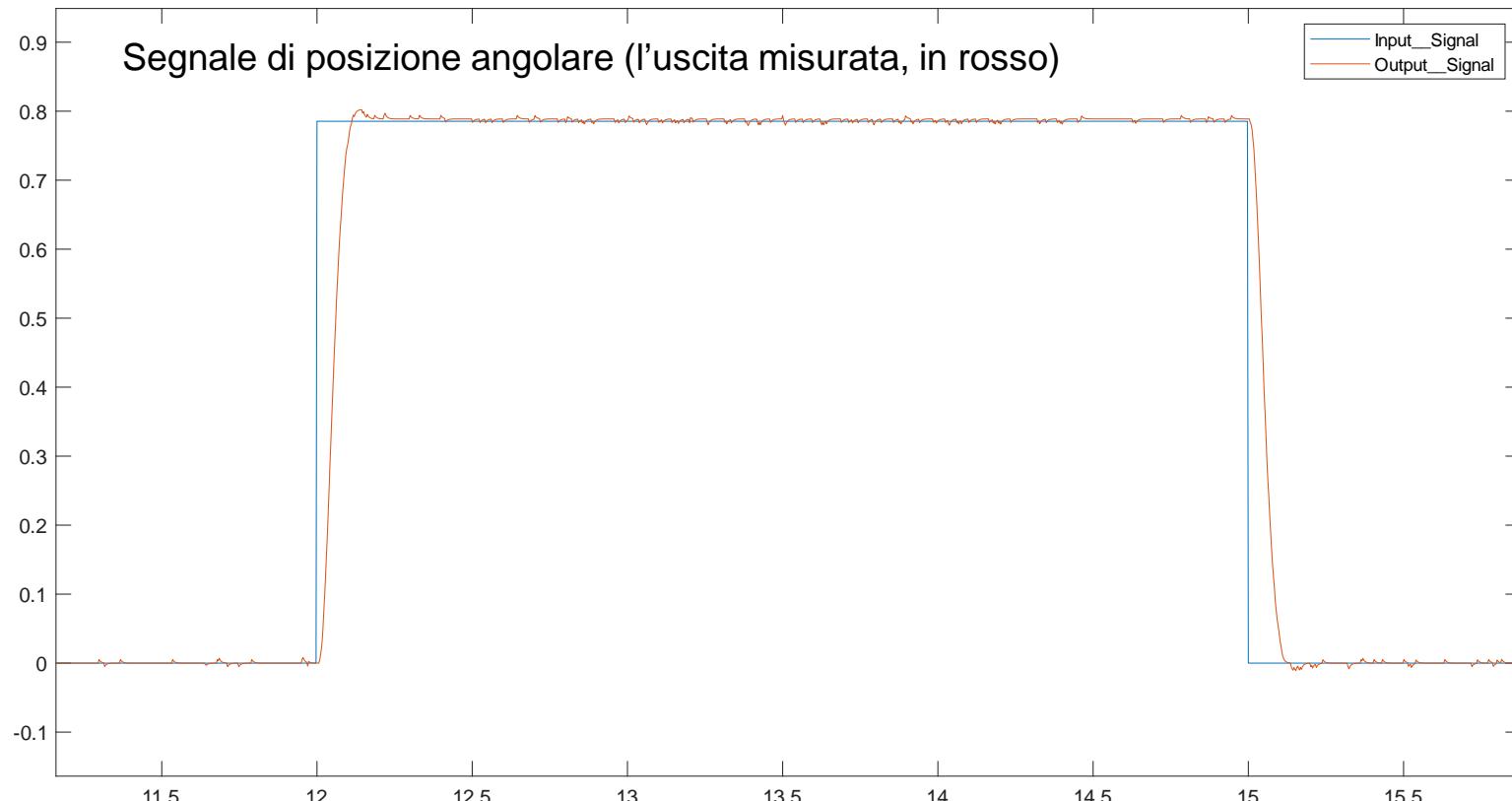


Stima del minimo locale in  $K_p = 13$  e  $K_d = 0.11$  ( $T_a = 0.111$  s,  $S = 0\%$ ,  
 $\max|v_a| = 9.85$ )

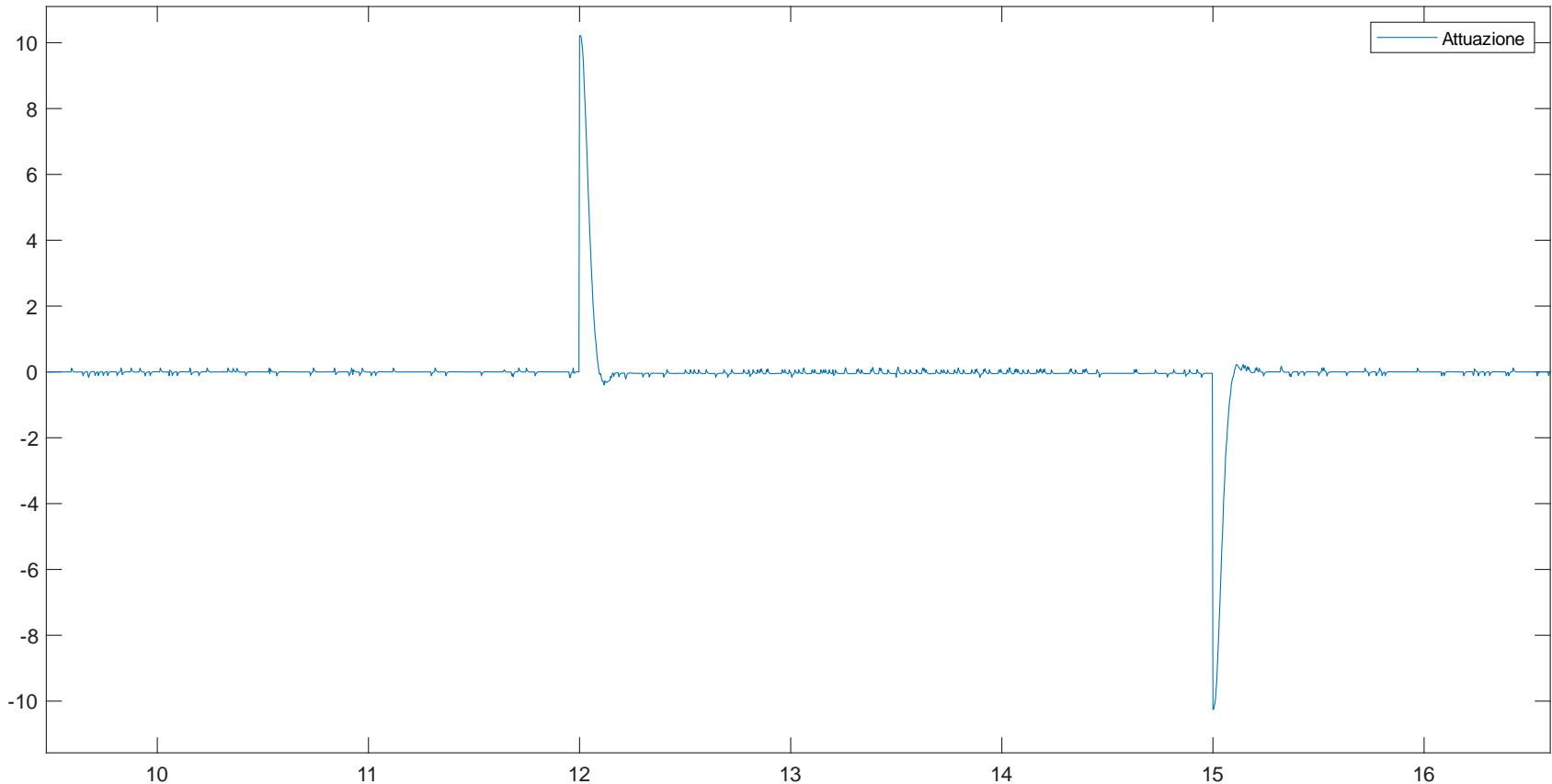
# Quali sono le prestazioni reali del controllore PD progettato con le simulazioni?

$$(K_p = 13, K_d = 0.11:$$

prestazioni simulate  $T_a = 0.111$  [s],  $S = 0\%$ ,  $\max |v_a| = 9.85$  [V]  
prestazioni reali  $T_a = 0.147$  [s],  $S = 2.14\%$ ,  $\max |v_a| = 10.22$  [V] )

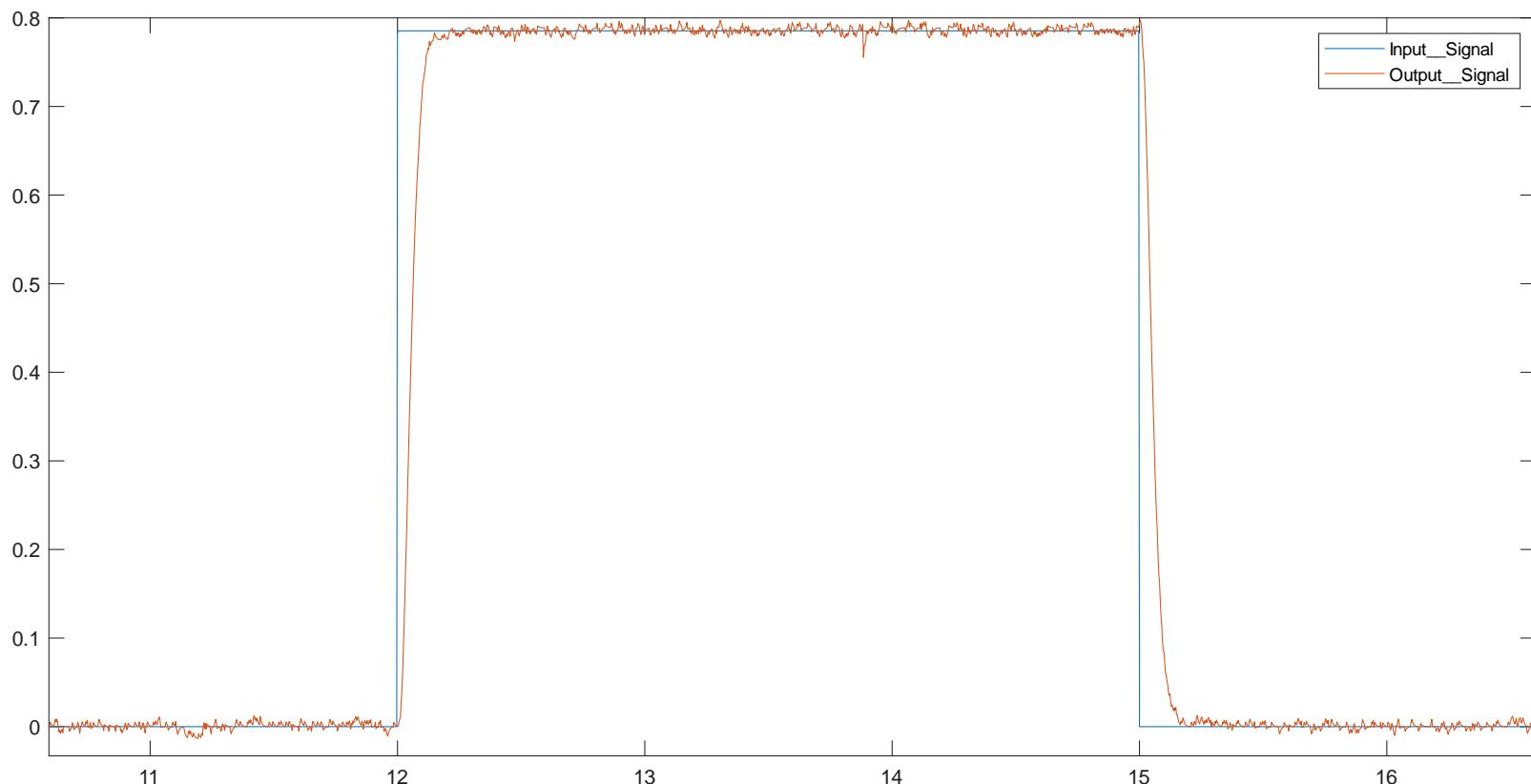


$K_p = 13, K_d = 0.11$ :  
Segnale di tensione ( $\max|v_a| = 10.22$  [V])

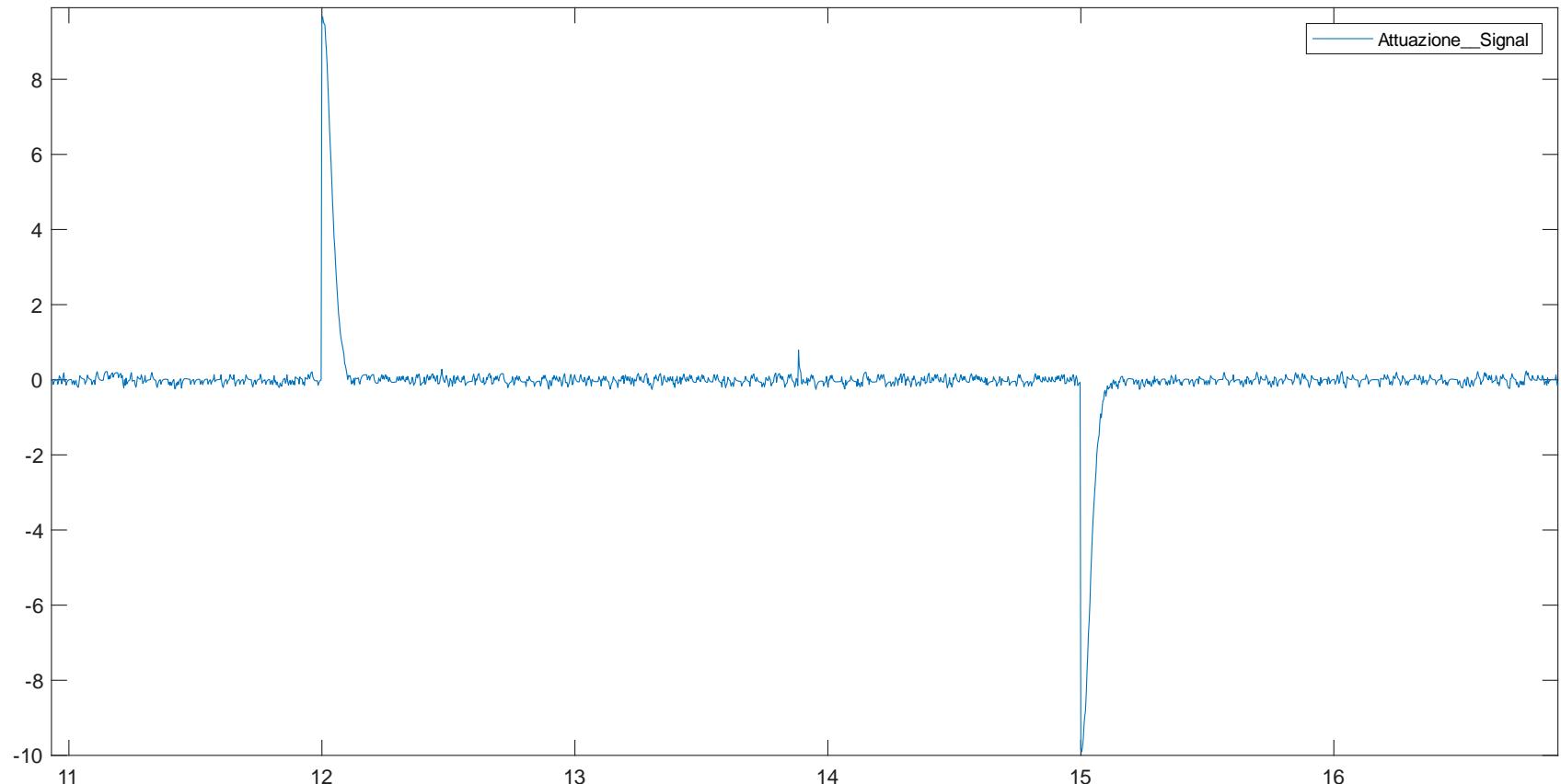


**Tuning dei parametri del controllore PD con le sperimentazioni**  
Si ottengono i valori ottimali  $K_p = 12.3$  e  $K_d = 0.15$  con  $T_a = 0.135$  [s] e  $S \cong 0\%$ ,  $\max |v_a| = 9.66$  [V]

Segnale di posizione angolare (l'uscita misurata, in rosso)



Segnale di tensione  $\max |v_a| = 9.66$  [V] ( $\max |v_a| = 9.90$  [V] se  $v_a < 0$ )



# Conclusioni

	$K_p$	$K_d$	$T_a$ [s]	$S$ (%)	$\max  v_a $ [V]
Controllore P	<b>6.77</b>	--	<b>0.23</b>	<b>0</b>	<b>5.2</b>
Controllore PD	<b>12.3</b>	<b>0.15</b>	<b>0.135</b>	<b>0</b>	<b>9.66</b>

E' possibile progettare un controllore con prestazioni migliori del controllore PD?

Probabilmente sì!

Per esempio, un controllore feedforward-feedback basato su inversione dinamica (inversion-based control)...

# Bibliografia

- M. Banzi, M. Siloh, «**Make: Getting Started with Arduino**», MakerMedia, third edition, 2015.
- F. Golnaraghi, B.C. Kuo. “**Automatic Control Systems.**” Wiley, ninth edition, 2010. [per la modellistica pp. 198-205]
- C. Guarino Lo Bianco, A. Piazzì, “**A servo control system design using dynamic inversion**”, Control Engineering Practice, vol. 10, no. 8, pp. 847-855, August 2002.
- P.S. Mushiana, «**Un sistema di controllo per la regolazione di posizione di un motore elettrico**», tesi di laurea in ingegneria informatica, elettronica e delle telecomunicazioni, Università di Parma, dicembre 2018.
- A. Cipolletti, «**Schemi di controllo per la regolazione di posizione di un motore elettrico**», tesi di laurea in ingegneria informatica, elettronica e delle telecomunicazioni, Università di Parma, luglio 2019.
- <https://it.mathworks.com/help/supportpkg/arduinoio/examples/getting-started-with-matlab-support-package-for-arduino-hardware.html?prodcode=ML>
- MATLAB Control Systems Toolbox:  
<https://it.mathworks.com/products/control.html>
- SIMULINK (MATLAB): <https://it.mathworks.com/products/simulink.html>