

Presentare e dimostrare formule di inversione per la sintesi in frequenza delle reti correttive.

Le reti correttive sono una tipologia di controllori a struttura fissa, vengono progettati per "correggere" il comportamento dinamico di anello di retroazione, per esempio: rete integratrice, rete derivatrice, rete ritardatrice e rete antipatrice.

DEF. $f : D \rightarrow f(D)$ è BIETTIVA (e quindi invertibile) e la funzione inversa $f^{-1} : f(D) \rightarrow D(M, \phi) \rightarrow (\alpha, \tau\omega)$ è definita da:

$$\alpha = \frac{M \cos(\phi - 1)}{M(M - \cos(\phi))} \quad \tau\omega = \frac{M - \cos(\phi)}{\sin(\phi)}$$

Dove $D := (0, 1) \times (0, \infty)$, M è il modulo della risposta armonica $\frac{a+j\tau\omega}{1+j\alpha\tau\omega}$ e ϕ è la fase della risposta armonica.

DIM. Per la dimostrazione bisogna prima introdurre il **lemma**: siano M, ϕ, α, x valori reali con modulo maggiore di 1 e $\sin \phi \neq 0$, allora le seguenti relazioni sono equivalenti:

$$Me^{j\phi} = \frac{1 + jx}{1 + j\alpha x}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{M \cos \phi - 1}{M(M - \cos \phi)} \\ x = \frac{M - \cos \phi}{\sin \phi} \end{cases}$$

$f : D \rightarrow f(D)$ è SURIETTIVA per la definizione di codominio.

$f : D \rightarrow f(D)$ è INIETTIVA. Sia $(M, \phi) \in f(D)$ quindi $M > 1$ e $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ ed esistono $\alpha \in (0, 1), \tau\omega > 0$ tali che $Me^{j\phi} = \frac{1 + j\tau\omega}{1 + j\alpha\tau\omega}$

Per il lemma precedente valgono:

- $\alpha = \frac{M \cos \phi - 1}{M(M - \cos \phi)}$
- $\tau\omega = \frac{M - \cos \phi}{\sin \phi}$

e quindi questi valori sono gli unici per i quali $f(\alpha, \tau\omega) = (M, \phi)$

(inserire immagine)

Rete ANTICIPATRICE con margine DI FASE M_f

- a. Scegliere ω_0 affinché con $\phi_0 := M_f - \arg L(j\omega_0) - \pi$ valga $(\frac{1}{|L(j\omega_0)|}, \phi_0) \in f(D)$, quindi $\cos(\phi_0) > |L(j\omega_0)|$
- b. Definiti $M = \frac{a}{|L(j\omega_0)|}$ e $\phi := \phi_0$ segue $\tau = \frac{M - \cos \phi}{\omega_0 \sin \phi}$ e $\alpha = \frac{M \cos \phi - 1}{M(M - \cos \phi)}$

Rete ANTICIPATRICE con margine DI AMPIEZZA M_a

- a. Scegliere ω_0 affinché con $\phi_0 := -\arg L(j\omega_0) - \pi$ valga $(\frac{1}{M_a|L(j\omega_0)|}, \phi_0) \in f(D)$, quindi $\cos(\phi_0) > M_a|L(j\omega_0)|$
- b. Definiti $M = \frac{1}{M_a|L(j\omega_0)|}$ e $\phi := \phi_0$ segue $\tau = \frac{M-\cos\phi}{\omega_0 \sin\phi}$ e $\alpha = \frac{M \cos\phi - 1}{M(M-\cos\phi)}$

Rete RITARDATRICE con margine DI FASE M_f

- a. Scegliere ω_0 affinché con $\phi_0 := \arg L(j\omega_0) + \pi - M_f$ valga $(|L(j\omega_0)|), \phi_0 \in f(D)$, quindi $\cos(\phi_0) > \frac{1}{|L(j\omega_0)|}$
- b. Definiti $M = |L(j\omega_0)|$ e $\phi := \phi_0$ segue $\tau = \frac{M-\cos\phi}{\omega_0 \sin\phi}$ e $\alpha = \frac{M \cos\phi - 1}{M(M-\cos\phi)}$

Rete RITARDATRICE con margine DI AMPIEZZA M_a

- a. Scegliere ω_0 affinché con $\phi_0 := \arg L(j\omega_0) + \pi$ valga $(M_a|L(j\omega_0)|), \phi_0 \in f(D)$, quindi $\cos(\phi_0) > \frac{1}{M_a|L(j\omega_0)|}$
- b. Definiti $M = M_a|L(j\omega_0)|$ e $\phi := \phi_0$ segue $\tau = \frac{M-\cos\phi}{\omega_0 \sin\phi}$ e $\alpha = \frac{M \cos\phi - 1}{M(M-\cos\phi)}$

Formule di antitrasformazione zeta, integrale a curva chiusa per determinare $X(k)$ sapendo che $X(k) = \mathcal{Z}[x(k)]$

Sia $X(z)$ la trasformata zeta di $x(k)$, allora:

$$x(k) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} X(z) z^{k-1} dz$$

dove γ è una curva chiusa che racchiude tutti i poli di $X(z)$, percorsa in senso antiorario, che circonda la regione di convergenza di $X(z)$, cioè $\mathcal{Z}[x(k)]$.

DIM:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} X(z) z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} x(i) z^{-i} \right) z^{k-1} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \sum_{i=0}^{+\infty} x(i) \oint_{\gamma} z^{k-i-1} dz = \frac{1}{2\pi j} x(k) \cdot 2\pi j = x(k) \end{aligned}$$

Dato un segnale a tempo discreto $x(k)$, $K \in \mathbb{Z}$ determinare la trasformata dei segnali anticipati e ritardati di n passi del tipo: $\mathcal{Z}[k(k-n)]$

- Segnale ritardato: $\mathcal{Z}[x(k-n)] = z^{-n} \mathcal{Z}[x(k)] + \sum_{i=0}^{n-1} x(k-n) z^{-k}$
- Segnale anticipato: $\mathcal{Z}[x(k+n)] = z^n \mathcal{Z}[x(k)] - \sum_{i=0}^{n-1} x(i) z^{n-i}$

Sia dato un sistema in retroazione unitaria con guadagno di anello $L(n)$ si presentie discuta l'analisi a regime della risposta armonica

Assunzioni: sistemi in retroazione unitaria, sistema retroazionato asintoticamente stabile.

- $r(t) \in \{r_0 1(t), r_0 t 1(t), r_0 \frac{t^2}{2} 1(t)\}$
- $e(t) := r(t) - y(t)$ $E(s) = \frac{1}{1+G(s)} R(s)$
- $e_r := \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$

Gradino:

- $r(t) = r_0 1(t)$ $R(s) = \frac{r_0}{s}$
- $e_r = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G(s)} \cdot \frac{r_0}{s}$
- $e_r = \frac{r_0}{1+K_p}$ dove $K_p := \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$ (costante di posizione)

Rampa:

- $r(t) = r_0 t 1(t)$ $R(s) = \frac{r_0}{s^2}$
- $e_r = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G(s)} \cdot \frac{r_0}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{r_0}{s+sG(s)}$
- $e_r = \frac{r_0}{K_v}$ dove $K_v := \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$ (costante di velocità)

Parabola:

- $r(t) = r_0 \frac{t^2}{2} 1(t)$ $R(s) = \frac{r_0}{s^3}$
- $e_r = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G(s)} \cdot \frac{r_0}{s^3} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{r_0}{s^2+s^2G(s)}$
- $e_r = \frac{r_0}{K_a}$ dove $K_a := \lim_{s^2 \rightarrow 0} sG(s)$ (costante di accelerazione)

Definire M_a e M_f enunciare e dimostrare le proprietà geometriche. Definire procedure per il calcolo nel caso di intersezioni multiple del d.p

$$M_a := \sup\{M > 1 : |1 + \gamma L(j\omega)| > 0 \forall \gamma \in [\frac{1}{M}, M] \text{ e } \forall \omega \geq 0\}$$

$$M_f := \sup\{\phi > 0 : |1 + e^{-j\rho} L(j\omega)| > 0 \forall \rho \in [-\phi, \phi] \text{ e } \forall \omega \geq 0\}$$

I margini di stabilità sono “norme” che misurano la distanza del punto critico $-1 + j0$ dal diagramma polare di $L(j\omega)$.

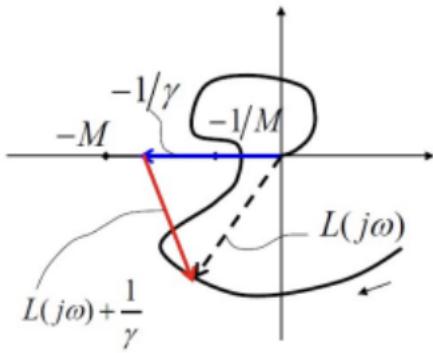
Proprietà geometriche:

Sia $M > 1$. Vale la disequazione $|1 + L(j\omega)| > 0 \forall \gamma \in [\frac{1}{M}, M]$ e $\forall \omega \geq 0$ se e solo se il segmento dell’asse reale compreso tra $-M$ e $-\frac{1}{M}$ non interseca il diagramma polare di $L(j\omega)$.

Dimostrazione:

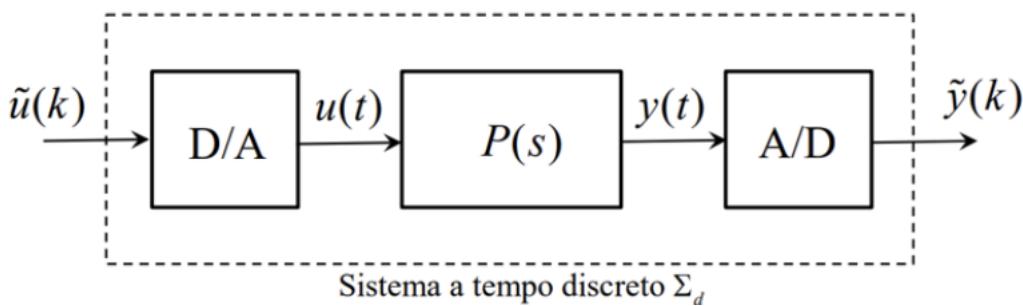
- $\{|1 + \gamma L(j\omega)| > 0 \forall \gamma \in [\frac{1}{M}, M] \text{ e } \forall \omega \geq 0\}$
- Divido dentro il modulo per γ che dovrà quindi essere diverso da 0
- $\{|\frac{1}{\gamma} + L(j\omega)| > 0 \forall \gamma \in [\frac{1}{M}, M] \text{ e } \forall \omega \geq 0\}$

Si noti che $\frac{1}{M} \leq \gamma \leq M \Rightarrow -M \leq -\frac{1}{\gamma} \leq -\frac{1}{M}$. Quindi abbiamo i due punti sull’asse reale corrispondenti a M e al suo reciproco e vediamo che $-\frac{1}{\gamma}$ (il vettore blu) deve essere compreso tra questi due punti. Se la diseguaglianza è soddisfatta, il vettore rosso non si annulla mai.



Continuare con la proprietà e le procedure di calcolo

Presentare e dedurre le f.d.t a t discreto $P_d(z)$ di un sistema a t continuo $P(s)$ con all'ingresso...



Il tempo di campionamento sia $T(\bar{y}(k)) = y(kT)$ e il convertitore D/A sia un mantenitore (dispositivo di tenuta) di ordine zero. Si determini la f.d.t. a t discreto $P_d(z)$ del sistema.

Si determina $P_d(z)$ come trasformata zeta della risposta all'impulso applicato all'ingresso del mantenitore di ordine zero: $\bar{u}(k) = \delta(k)$.

- $u(t) = 1(t) - 1(t - T)$
- quindi $y(t) = p_s(t) - p_s(t - T)$
- con $p_s(t) = \mathcal{L}^{-1}[P(s)]$ risposta di $P(s)$ al gradino unitario $1(t)$
- $\bar{y}(k) = p_s(kT) - p_s(kT - T)$
- $P_d(z) = \mathcal{Z}[\bar{y}(k)] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}[p_s(kT)] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{P(s)}{s}, T\right]$
- $P_d(z) = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left[\frac{P(s)}{s}, T\right]$

Definire la stab. asint. per un s.r. Enunciare una condizione necessaria e sufficiente che garantisca questa stabilità

DEF. Un sistwema retroazionato è asintoticamente e internamente stabile quando tutte le f.d.t fra gli ingressi e le uscite del sistema sono asintoticamente stabili.

Il sistema retroazionato è asintoticamente e internamente stabile se e solo se tutti i poli di $1 + L(s)$ hanno parte reale negativa e le eventuali cancellazioni polo-zero fra $C(s)$ e $P(s)$ avvengono in \mathbb{C}