DOMANDE TEORIA

1) Formule di inversione per la sintesi in freq. delle reti correttrici con dimostrazione (come usarle per una rete RITARDATRICE con imposizione del M_A) o (rete RITARDATRICE con M_F), (ANTICIPATRICE con M_F e M_A)

2) Criterio di Nyquist (caso generale e particolare) con premesse teoriche e dimostrazione

3) Σ in retroazione unitaria con guadagno di anello $L(s)$. Si presenti e discuta l'analisi a regime della risposta ai segnali tipici di riferimento

4) Enunciare e dimostrare il teorema di analisi armonica per un sistema descritto da una fz. di riferimento razionale

5) Metodo dell'eq. Diofantea per la sintesi dei controllori nei sistemi di controllo in retroazione

6) Definire la stabilità asintotica interna per un sistema di controllo in retroazione. Enunciare e dimostrare una condizione necessaria e suff. che assicuri questa stabilità. Fornire un esempio di Σ retroazionato asintoticamente stabile come sistema orientato dal segnale di comando all'uscita controllata, ma non ~~stabile~~ stabile internamente

7) Tracciare i diagrammi di Bode e polare per una rete ritardatrice determinando il ritardo max di fase e la corrispondente pulsazione

8) Def. di M_A e M_F con dimostrazione delle prop. geometriche. Definire una procedura di calcolo di M_A e M_F nel caso di intersezioni multiple del diagramma polare con l'asse reale negativo e con la circonferenza unitaria LZ7 12 slide 22

Scansionato con CamScanner

1) $\alpha = \dfrac{M\cos\varphi - 1}{M(M-\cos\varphi)}$ $\quad X = \dfrac{M-\cos\varphi}{\sin\varphi} = \tau\omega$

Dim:

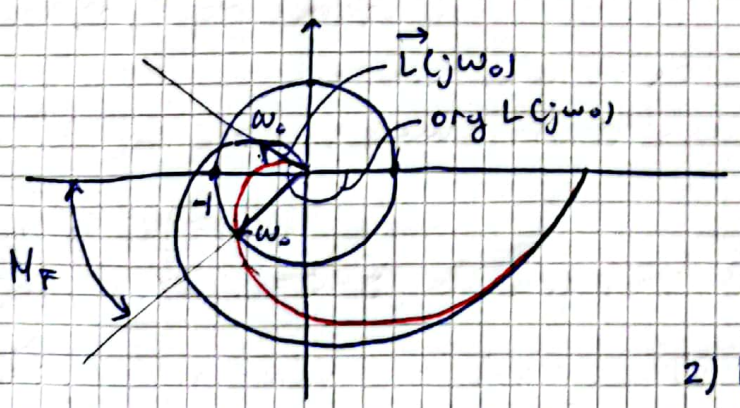
da def: $Me^{j\varphi} = M(\cos\varphi + j\sin\varphi) = \dfrac{1+jX}{1+j\alpha X}$ risp. armonica della rete anticipatrice

$$M(\cos\varphi + j\sin\varphi)(1+j\alpha X) = 1+jX$$
$$M(\cos\varphi + j\alpha X\cos\varphi + j\sin\varphi - \alpha X\sin\varphi) = 1+jX$$
$$M(\cos\varphi - \alpha X\sin\varphi) + Mj(\alpha X\cos\varphi + \sin\varphi) = 1+jX$$
$$\begin{cases} M\cos\varphi - M\alpha X\sin\varphi = 1 \\ M\alpha X\cos\varphi + M\sin\varphi = X \end{cases} \longrightarrow \alpha = \frac{M\cos\varphi - 1}{M\sin\varphi}\cdot\frac{1}{X}$$

$$\rightarrow M\frac{M\cos\varphi - 1}{M\sin\varphi}\cdot\frac{1}{\cancel{X}}\cdot\cancel{X}\cos\varphi + M\sin\varphi = X$$
$$\frac{\cancel{M}(M\cos\varphi - 1)\cos\varphi + M^{\cancel{2}}\sin^2\varphi}{\cancel{M}\sin\varphi} = X$$
$$\frac{(M\cos\varphi - 1)\cos\varphi + M(1-\cos^2\varphi)}{\sin\varphi} = X$$
$$\frac{\cancel{M\cos^2\varphi} - \cos\varphi + M - \cancel{M\cos^2\varphi}}{\sin\varphi} = X$$
$$X = \frac{M-\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{M\cos\varphi - 1}{M\cancel{\sin\varphi}}\cdot\frac{\cancel{\sin\varphi}}{M-\cos\varphi} = \frac{M\cos\varphi - 1}{M(M-\cos\varphi)}$$

SINTESI RETE ANTICIPATRICE CON M_F FISSATO



$\dfrac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}L(s)$ —

1) Scelgo ω_0 : $\varphi_0 := M_F - \arg L(j\omega_0) - \pi$

valga $\left(\dfrac{1}{|L(j\omega_0)|}, \varphi_0\right) \in f(D)$

quindi $\cos\varphi_0 > |L(j\omega_0)|$

2) Definiti $M := \dfrac{1}{|L(j\omega_0)|}$ e $\varphi := \varphi_0$

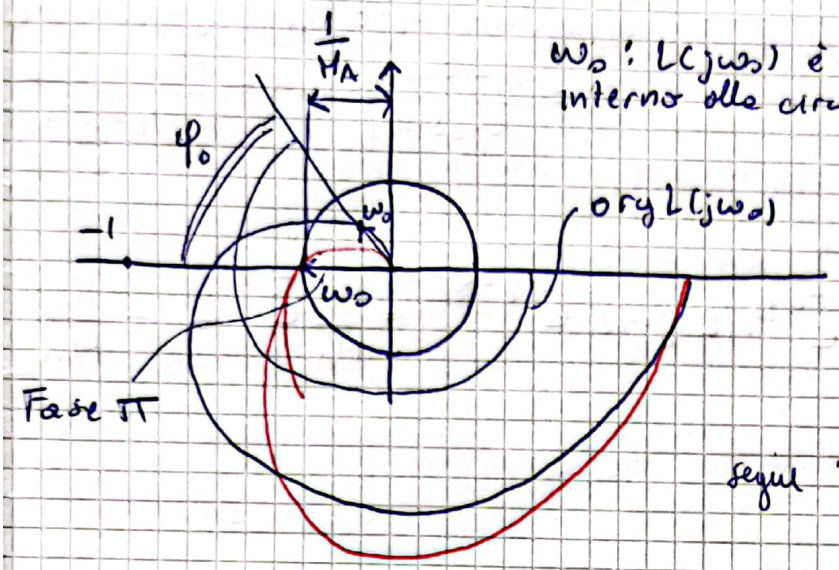
segue $\tau = \dfrac{M-\cos\varphi}{\omega_0\sin\varphi}$ e $\alpha = \dfrac{M\cos\varphi - 1}{M(M-\cos\varphi)}$

Scansionato con CamScanner

$$\left(\frac{1+j\tau\omega_0}{1+j\alpha\tau\omega_0}\right)L(j\omega_0) = \left(\underbrace{\frac{1}{|L(j\omega_0)|}}_{M}\cdot e^{j\varphi_0}\right)\cdot \cancel{|L(j\omega_0)|}\, e^{j\arg L(j\omega_0)} = e^{j(M_F-\pi)}$$

$$(\varphi_0 + \arg L(j\omega_0) = M_F - \pi)$$

// // // CON M_A FISSATO



ω_0 : $L(j\omega_0)$ è interno alla circonf. $\rightarrow$ 1) $\varphi_0 := -\arg L(j\omega_0) - \pi$

valga $\left(\frac{1}{M_A|L(j\omega_0)|}; \varphi_0\right) \in f(D)$

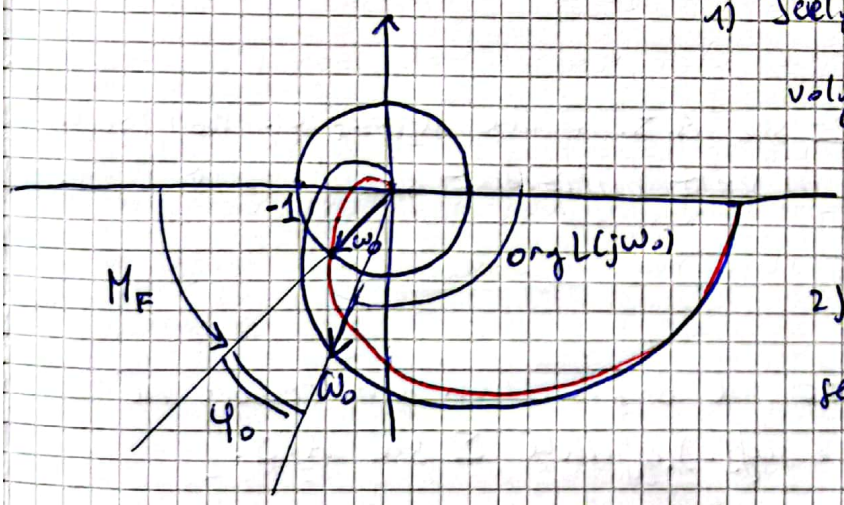
quindi $\cos\varphi_0 > M_A|L(j\omega_0)|$

2) Definiti $M := \frac{1}{M_A|L(j\omega_0)|}$, $\varphi := \varphi_0$

segue $\tau = \frac{M-\cos\varphi}{\omega_0 \sin\varphi_0}$, $\alpha = \frac{M\cos\varphi - 1}{M(M-\cos\varphi)}$

$$\frac{1+j\tau\omega_0}{1+j\alpha\tau\omega_0}L(j\omega_0) = \frac{1}{M_A|L(j\omega_0)|}e^{j\varphi_0}\cdot\cancel{|L(j\omega_0)|}\, e^{j\arg L(j\omega_0)} = \frac{1}{M_A}e^{-\pi j} = -\frac{1}{M_A}$$

SINTESI RETE RITARDATRICE CON M_F FISSATO



1) Scelgo ω_0 : $\varphi_0 := \arg L(j\omega_0) + \pi - M_F$

valga $(|L(j\omega_0)|; \varphi_0) \in f(D)$ quindi

$$\cos\varphi_0 > \frac{1}{|L(j\omega_0)|}$$

2) Definiti $M := |L(j\omega_0)|$ e $\varphi = \varphi_0$

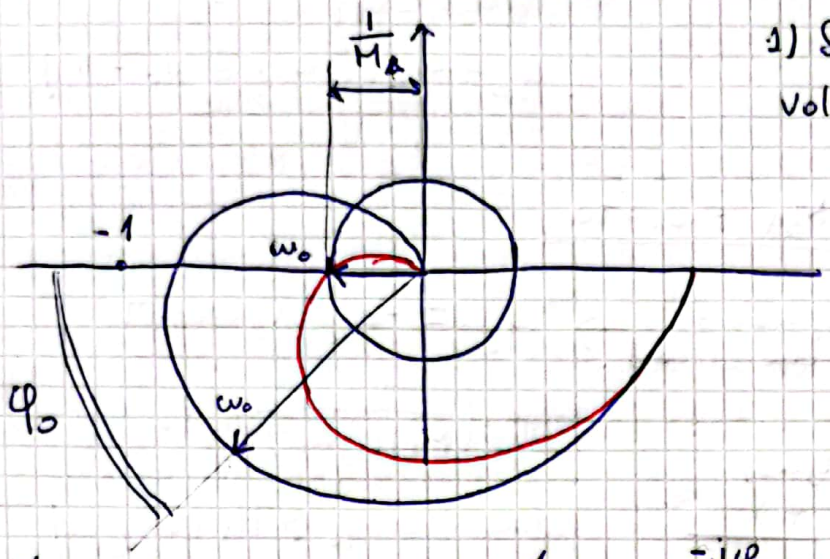
segue $\tau = \frac{M-\cos\varphi}{\omega_0\sin\varphi}$, $\alpha = \frac{M\cos\varphi - 1}{M(M-\cos\varphi)}$

$$\frac{1+j\alpha\tau\omega_0}{1+j\tau\omega_0}L(j\omega_0) = \underbrace{\frac{1}{|L(j\omega_0)|}e^{-j\varphi}}\cdot\cancel{|L(j\omega_0)|}\, e^{j\arg L(j\omega_0)} = e^{j(M_F-\pi)}$$

La rete anticipatrice è l'inverso di quella ritardatrice

Scansionato con CamScanner

RITARDATRICE CON M_A FISSATO



1) Scelgo ω_0 : $\varphi_0 := \arg L(j\omega_0) + \pi$

Voglio $(M_A |L(j\omega_0)|, \varphi_0) \in f(D)$

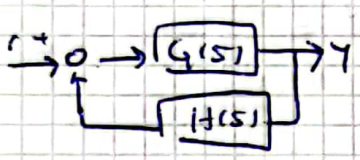
quindi $\cos\varphi_0 > \dfrac{1}{M_A |L(j\omega_0)|}$

2) Definiti $M := M_A |L(j\omega_0)|$ e $\varphi = \varphi_0$

$\tau = \dfrac{M - \cos\varphi}{\omega_0 \sin\varphi}$ e $\alpha = \dfrac{M\cos\varphi - 1}{M(M - \cos\varphi)}$

$$\frac{1 + j\alpha\tau\omega_0}{1 + j\tau\omega_0} L(j\omega_0) = \frac{1}{M_A \cancel{|L(j\omega_0)|}} e^{-j\varphi_0} \cdot \cancel{|L(j\omega_0)|} e^{j\arg L(j\omega_0)} = \frac{1}{M_A} e^{-j\pi} = -\frac{1}{M_A}$$

2) CRITERIO DI NYQUIST :



$T_{ry}(s) = \dfrac{G(s)}{1 + L(s)}$ $\quad L(s) := G(s)H(s)$ guadagno di anello

Σ è A.S. $\iff$ $1 + L(s)$ ha tutte radici a $Re < 0$

- Il d.p.c. di $L(s)$ è la curva chiusa immagine di $L(s)$ sul contorno di Nyquist

$\Rightarrow$ CRITERIO:

Cond. necess. e suff. affinché Σ sia A.S. è che il d.p.c. non tocchi -1, ma lo circonda tante volte in senso antiorario quanti sono i poli di $L(s)$ con $Re > 0$.

CASO PARTICOLARE :

Se $L(s)$ non ha poli a $Re > 0$, il d.p.c. non deve toccare né circondare -1 (cond. necess. e suff.) affinché Σ sia A.S.

~~DIMOSTRAZIONE~~

~~Σ A.S. $\iff$ 1) Il d.p.c. di $L(s)$ non tocca -1 2) $\psi = n_p$~~

(*) ψ : {n° giri orari del d.p.c. attorno a -1} = {n° di giri orari della curva immagine di $1 + L(s)$ sul contorno di Nyquist intorno all'origine}

Teorema dell'indice logaritmico

Sia Γ una curva chiusa semplice del piano complesso e D la regione ad essa interna. Sia $F(s)$ una f.t. analitica su Γ e D ad eccezione di un n° finito di poli $\in D$, e $F(s)$ non abbia zeri su Γ, allora:

- se percorro Γ in verso ANTIORARIO/ORARIO $\left(\frac{1}{2\pi} \Delta \arg F(s) = n_z - n_p \right)$

$$n_z - n_p = \left\{ \begin{array}{l} \text{n° giri ANTIORARI/ORARI della} \\ \text{curva immagine intorno all'origine} \end{array} \right\}$$

n° poli e zeri di $F(s)$

Contorno Nyquist: semicirconferenza all'infinito e semicirconferenze infinitesime aggirano i poli di $L(s)$ immaginari e da segmenti dell'asse immaginario (percorso in senso orario)

~~DIMOSTRAZIONE CRITERIO NYQUIST:~~

~~Σ è A.S. $\Leftrightarrow$~~

~~1) Il d.p.c. di $L(s)$ non tocca -1~~

~~2) $-\psi = n_p$~~

Si applica il teorema dell'indice log. prendendo il contorno di Nyquist come Γ e $F(s) = 1 + L(s)$ con le condizioni:

- $1 + L(s)$ analitica su Γ e su C_+
- $1 + L(s)$ non deve presentare zeri su Γ (solo sull'asse imm.), quindi il d.p. di $L(s)$ non deve toccare -1.

Def:

n_z := n° zeri di $1 + L(s) \in C_+$

n_p := n° poli di $L(s)$ (o $1 + L(s)$) $\in C_+$

ψ := n° giri orari della curva immagine di $1 + L(s)$ su Γ attorno a -1

$\Rightarrow \underline{\psi = n_z - n_p}$

* Il d.p.c. di $L(s)$ è la curva chiusa immagine di $L(s)$ sul contorno di Nyquist. quindi (*)

DIM. CRITERIO NYQUIST

Σ è A.S. $\Leftrightarrow$

1) Il d.p.c. di $L(s)$ non tocca -1 $\Leftrightarrow$ non presenta zeri puramente imm.

2) $-\psi = n_p$ (giri antiorari)

Scansionato con CamScanner

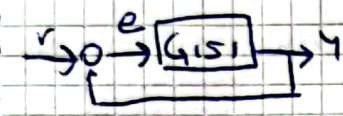
Suff: (valgono 1 e 2)

① significa che $1+L(s)$ non presenta zeri puramente immaginari quindi $\psi = n_Z - n_P$ (dal t. dell'indice log.) e dalla ② ~~segue~~ segue che $n_Z = 0 \Rightarrow \Sigma$ è A.S.

Necessità: Σ è A.S. quindi.

Tutti gli zeri di $1+L(s)$ sono a $Re<0$, quindi non sono presenti zeri puramente immaginari (①) e $n_Z = 0$.
Dal teorema dell'indice log. $\Rightarrow -\psi = n_P$ (②)

3) ANALISI A REGIME DEI SISTEMI IN RETROAZIONE



Assunto un Σ in retroazione unitaria e A.S.

$$r(t) \in \left\{ r_0 \cdot 1(t) \,;\, r_0 \cdot t \cdot 1(t) \,;\, r_0 \frac{t^2}{2} \cdot 1(t) \right\}$$

$e(t) := r(t) - y(t)$ $\quad E(s) = \underbrace{\frac{1}{1+G(s)}}_{f.d.t.} \cdot R(s)$ $\quad h :=$ tipo di sistema di $G(s)$

$e_r := \lim_{t\to\infty} e(t)$

GRADINO: $r_0(t) = r_0 \cdot 1(t) \rightarrow R(s) = \frac{r_0}{s}$

Dal teorema del valore finale $e_r = \lim_{s\to 0} s E(s) = s \frac{1}{1+G(s)} \cdot \frac{r_0}{s} = \frac{r_0}{1+K_P}$ dove $K_P = \lim_{s\to 0} G(s)$ cost. di posizione

RAMPA: $r(t) = r_0 \cdot t \cdot 1(t) \rightarrow R(s) = \frac{r_0}{s^2}$

$e_r = \lim_{s\to 0} s E(s) = \cancel{s} \frac{1}{1+G(s)} \frac{r_0}{s^{\cancel{2}}} = \frac{r_0}{s + s(G(s))} = e_r = \frac{r_0}{K_V}$ $\quad K_V = \lim_{s\to 0} sG(s)$ cost. di vel.

PARABOLA: $r(t) = r_0 \frac{t^2}{2} \cdot 1(t) \rightarrow R(s) = \frac{r_0}{s^3}$

$e_r = \lim_{s\to 0} s E(s) = \cancel{s} \frac{1}{1+G(s)} \frac{r_0}{s^{\cancel{3}\,2}} = \frac{r_0}{s^2 + s^2 G(s)} \rightarrow e_r = \frac{r_0}{K_a}$ $\quad K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)$ cost. di acc.

Scansionato con CamScanner

4) TEOREMA ANALISI ARMONICA

Σ sistema dinamico A.S., descritto da $\sum_{i=0}^{n} a_i D^i y = \sum_{i=0}^{m} b_i D^i u$
($a(s)$ e $b(s)$ coprimi fra loro).
La f.d.t. è $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ $\qquad u \to \boxed{G(s)} \to y$

All'istante $t = 0^-$ si applichi $u(t) = U \sin(\omega t)$ $\quad \omega > 0$ e $U > 0$

$\to$ la risposta forzata del Σ per $t \to \infty$: $y_\infty(t) = Y(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$

DEF: (funzione di risp. armonica) $F: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$

$$\omega \to F(\omega) := \frac{Y(\omega)}{U} e^{j\varphi(\omega)}$$

Poiché Σ è lineare $\Rightarrow F(\omega) \neq f(U)$

TEOREMA: Sia Σ A.S. con f.d.t. $G(s)$ razionale, la risposta forzata di Σ ad un segnale armonico all'ingresso è ancora a regime (per $t \to \infty$) un segnale con la stessa freq. dell'ingresso. La fz. di risposta armonica soddisfa la relazione $F(\omega) = G(j\omega)$

DIM: $Y(s) = G(s) \mathcal{L}[U \sin(\omega t)] = G(s) \frac{U\omega}{s^2 + \omega^2} = G(s) \frac{U\omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)}$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s - p_1} + \dots + \frac{K_n}{s - p_n} + \frac{K}{s - j\omega} + \frac{\overline{K}}{s + j\omega} \quad \text{con } \operatorname{Re} p_i < 0 \quad i = 1, \dots, n$$

quindi $y(t) = y_t(t) + y_\infty(t)$ con $\lim_{t \to \infty} y_t(t) = 0$

$$y_t(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K_1}{s - p_1} + \dots + \frac{K_n}{s - p_n}\right] \quad e \quad y_\infty(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s - j\omega} + \frac{\overline{K}}{s + j\omega}\right]$$

$$K = G(s) \frac{U\omega}{s + j\omega}\Big|_{s = j\omega} = G(j\omega) \frac{U}{2j} \rightsquigarrow \arg K = \arg G(j\omega) - \frac{\pi}{2}$$

$$y_\infty(t) = 2 |G(j\omega)| \frac{U}{2} \cos\left(\omega t + \left(\arg G(j\omega) - \frac{\pi}{2}\right)\right) = U |G(j\omega)| \sin(\omega t + \arg G(j\omega))$$

$$\Rightarrow F(\omega) = |G(j\omega)| e^{j \arg G(j\omega)} = G(j\omega) \quad \checkmark\checkmark$$

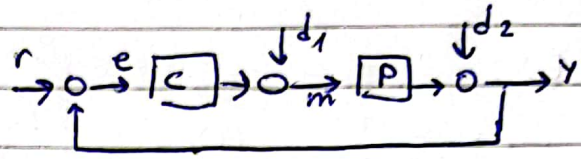
Sfruttando $F(\omega) = G(j\omega) \to$ la fz. di risp. armonica è sfruttabile anche per Σ NON A.S.

PROP: Sia dato un sist. dinamico con f.d.t. $G(s)$, allora

$(U \sin(\omega t), U |G(j\omega)| \sin(\omega t + \arg G(j\omega))) \in \mathcal{B} \to$ soddisfa l'eq. diff.
(anche per sist. instabili)

Scansionato con CamScanner

6) Stabilità asintotica interna



DIM:

$$\begin{bmatrix} E \\ M \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+CP} & -\frac{P}{1+CP} & -\frac{1}{1+CP} \\ \frac{C}{1+CP} & \frac{1}{1+CP} & -\frac{C}{1+CP} \\ \frac{CP}{1+CP} & \frac{P}{1+CP} & \frac{1}{1+CP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

$$C(s) = \frac{y(s)(s-\beta)}{x(s)(s-\alpha)} \quad P(s) = \frac{b(s)(s-\alpha)}{a(s)(s-\beta)}$$

Devono essere tutte asintoticamente stabili → Basta che ne controllo 4 in particolare e se loro sono A.S. lo sono anche le altre

1) $$\frac{1}{1+CP} = \frac{1}{1+\frac{y(s)}{x(s)}\frac{b(s)}{a(s)}} = \frac{x(s)a(s)}{x(s)a(s)+y(s)b(s)}$$

2) $$\frac{CP}{1+CP} = \frac{y(s)b(s)}{x(s)a(s)+y(s)b(s)}$$

3) $$\frac{P}{1+CP} = \frac{\frac{b(s)(s-\alpha)}{a(s)(s-\beta)}}{\frac{x(s)a(s)+y(s)b(s)}{x(s)a(s)}} = \frac{b(s)(s-\alpha)x(s)}{(s-\beta)(x(s)a(s)+y(s)b(s))}$$

4) $$\frac{C}{1+CP} = \frac{\frac{y(s)(s-\beta)}{x(s)(s-\alpha)}}{\frac{x(s)a(s)+y(s)b(s)}{x(s)a(s)}} = \frac{y(s)(s-\beta)a(s)}{(s-\alpha)(x(s)a(s)+y(s)b(s))}$$

$1+L(s)=0 \iff x(s)a(s)+y(s)b(s)=0$

Scansionato con CamScanner

Necessità:

$$\left\{ ①, ②, ③, ④ \text{ sono A.S.} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a)\ 1+L(s)=0 \text{ ha radici } s \text{ con } Re\, s \le 0 \\ b)\ \text{Cancellazioni polo/zero in } C_- \end{array} \right\}$$

Suff:

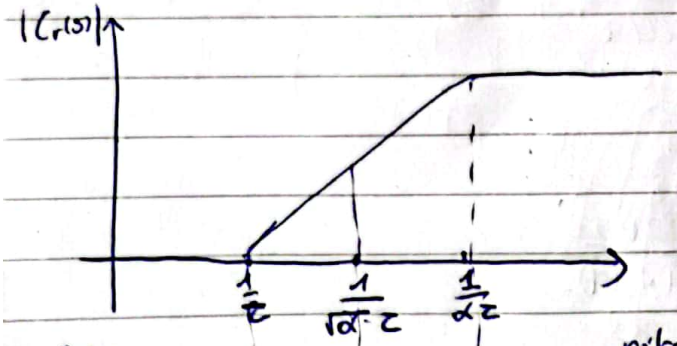
$$\left\{ \begin{array}{l} a)\ \dots \\ b\ \dots \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ ①, ②, ③, ④ \text{ sono A.S.} \right\}$$

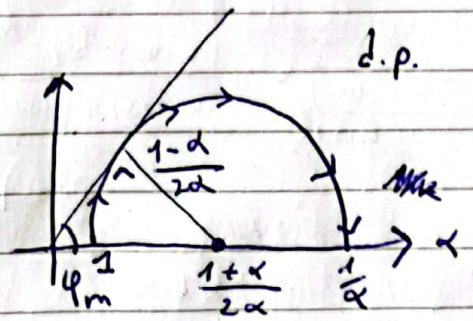
ES:

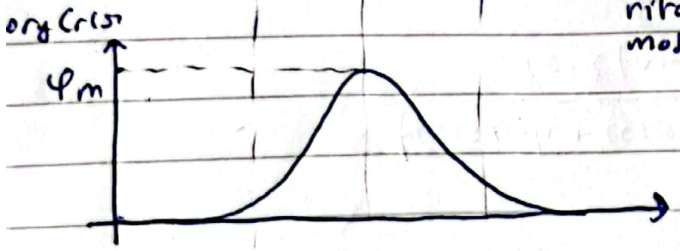
$$C(s) = \frac{s-1}{s+1} \qquad P(s) = \frac{1}{(s-1)(s+10)}$$

$$T_{ry}(s) = \frac{CP}{1+CP} = \frac{\frac{1}{(s+1)(s+10)}}{1+\frac{1}{(s+1)(s+10)}} = \frac{1}{(s+1)(s+10)+1}$$

7) Rete ANTICIPATRICE $\quad C_r(s) = \dfrac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}$

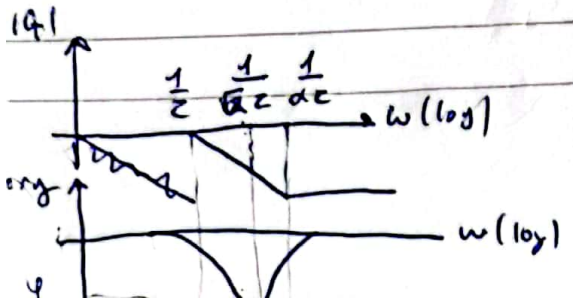


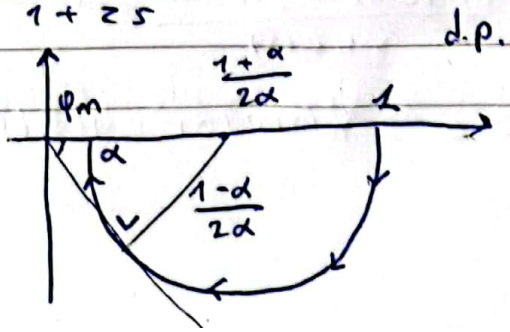




ritardo massimo $\begin{cases} \varphi_m = -\operatorname{asin}\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha} = \arg C_r(j\omega_m) \\ \text{dove } \omega_m := \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}\cdot\tau} \end{cases}$ (pulsazione in cui c'è il rit. max)

RETE RITARDATRICE $\quad C_r(s) = \dfrac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}$





Scansionato con CamScanner

8)

PROP: Sia $M>1$. Vale $|1+\gamma L(j\omega)|>0 \quad \forall \gamma \in \left[\frac{1}{M}; M\right]$ e $\forall \omega \geq 0 \iff$ il segmento dell'asse reale fra $-M$ e $-1/M$ non interseca il d.p. di $L(j\omega)$

DIM:

$$\left\{|1+\gamma L(j\omega)|>0 \quad \forall \gamma \in \left[\frac{1}{M}; M\right] \text{ e } \forall \omega \geq 0\right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\left|\frac{1}{\gamma}+L(j\omega)\right|>0 \quad \forall \gamma \in \left[\frac{1}{M}; M\right] \text{ e } \forall \omega \geq 0\right\}$$

Si noti che $\frac{1}{M} < \gamma < M \iff -M \leq -\frac{1}{\gamma} < -$

PROP: Sia $\phi>0$. Vale $|1+e^{-j\varphi}L(j\omega)|>0 \quad \forall \varphi \in [-\phi; \phi]$ e $\forall \omega \geq 0 \iff$ l'arco di circonferenza di eq. $e^{j(\pi+\varphi)}$, $\varphi \in [-\phi; \phi]$ non interseca il d.p. di $L(j\omega)$

DIM:

$$\left\{|1+e^{-j\varphi}L(j\omega)|>0, \quad \forall \varphi \in [-\phi; +\phi], \quad \forall \omega \geq 0\right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{|(1+e^{-j\varphi}L(j\omega))e^{j\varphi}|>0, \quad \ldots\ldots\right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{|e^{j\varphi}+L(j\omega)|>0 \quad \ldots\ldots\right\} \iff \left\{|L(j\omega)-e^{j(\pi+\varphi)}|>0 \quad \ldots\ldots\right\}$$

Scansionato con CamScanner

CAPITOLI 1, 2, 3

- Se $f_{z.} \in C_p^{\infty}$ → infinitamente derivabile a tratti (a tratti)

  se $f(t) \in C_p^{\infty} \Rightarrow Df(t) \in C_p^{\infty}$ ed anche $\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_a^t f(v)\,dv \in C_p^{\infty}$

- Se ~~fa~~ $f \in C_p^{\overline{K,\infty}}$ → K : grado max. di continuità

- <u>f(s) è ANALITICA</u> o (OLOMORFA) in $s = s_0$

  se f(s) è derivabile su di un intorno aperto contenente s_0

DEF : Condizione Cauchy-Riemann

$u(\sigma;\omega)$ e $v(\sigma;\omega)$ soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann se :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \sigma} = \dfrac{\partial v}{\partial \omega} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \omega} = -\dfrac{\partial v}{\partial \sigma} \end{cases}$$

<u>TEOREMA</u> : Sia $f(s) = u(s) + j\,v(s)$

1) Se $\exists\, f^{(1)}(s_0)$ con $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0 \Rightarrow \exists$ le derivate parziali di u e v in $(\sigma_0;\omega_0)$ e soddisfano le cond. di Cauchy-Riemann
2) Se u e v e le der. parz. sono continue in $(\sigma_0;\omega_0)$ e soddisfano le condi. di Cauchy Riemann $\Rightarrow \exists\, f^{(1)}(s_0)$ con $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$

<u>TEOREMA</u> : Sia f(s) analitica su una regione aperta $U \subseteq \mathbb{C}$

$\Rightarrow Df(s)$ è analitica su U

Corollario: Se f(s) è analitica su U $\Rightarrow$ f(s) è derivabile indefinitivamente su U

Scansionato con CamScanner

$R \subseteq \mathbb{C}$

DEF. <u>INSIEME CONNESSO</u>: Un insieme R è connesso se per ogni coppia di pti che $\in$ all'insieme, $\exists$ una curva Γ che li congiunge tutta contenuta in R $[\Gamma \subseteq R]$

DEF: <u>INSIEME SEMPLICEMENTE CONNESSO</u>: se R è connesso e $\forall$ curva chiusa semplice $\Gamma \in R$, la regione interna di $\Gamma \subseteq R$.

<u>T. INT. CAUCHY</u>: $\oint_\Gamma f(s)\,ds = 0$: $f(s)$ è analitica su U che è semplicemente connesso e $\Gamma \subseteq U$.

<u>TEOREMA (SVILUPPO SERIE LAUREN)</u>: Sia $f(s)$ analitica sul cerchio $B(s_0; r_0)$ ad eccezione del centro s_0, allora:

$\forall s \in B(s_0; r_0) - \{s_0\}$

$$\Rightarrow f(s) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i (s-s_0)^i = \dots + \frac{c_{-2}}{(s-s_0)^2} + \frac{c_{-1}}{(s-s_0)} + c_0 + c_1(s-s_0) + c_2(s-s_0)^2 + \dots$$

dove $c_i = \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma \frac{f(s)}{(s-s_0)^{i+1}}\,ds \quad \forall i \in \mathbb{Z}$

- Se $c_i = 0 \ \forall i \in \mathbb{Z}^-$ $\Rightarrow$ definendo $f(s_0) = c_0$ $\Rightarrow$ $f(s)$ analitica in $s = s_0$
- Se $c_i \neq 0$ per qualche $i \in \mathbb{Z}^-$, s_0 è una <u>SINGOLARITÀ</u> di $f(s)$:
  1) Singolarità POLO quando i $c_i \neq 0$ con $i < 0$ sono in n° finito
  2) Singolarità ESSENZIALE quando i $c_i \neq 0$ con $i < 0$ sono infiniti

<u>TEOREMA PICARD</u>: Sia s_0 sing. essenziale di $f(s)$. In ogni intorno di s_0, la $f(s)$ assume ogni valore complesso infinite volte con l'eventuale eccezione di un solo particolare valore
(ovvero in ogni intorno di s_0 $\exists$ sempre ∞ radici dell'eq. $f(s) = c$ (c complesso), tranne, al più, per un valore eccezionale di c).

DEF: <u>RESIDUO</u>: Sia s_0 una singolarità di $f(s)$. Il coeff. c_{-1} si dice residuo

$$\mathrm{Res}\{f; s_0\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma f(s)\,ds = c_{-1}$$

Scansionato con CamScanner

PROP: se $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ha una singolarità polare in p di ordine n, allora:

$$\mathrm{Res}\{f;p\} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{s \to p} D^{n-1}\left(f(s)(s-p)^n\right)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} D^{n-1}\left(f(s)(s-p)^n\right)\Big|_{s=p}$$

DEF: TRASF. LAPLACE (operatore) $\quad F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$

- Converte una eq. diff. in una algebrica $\quad \overline{F(s)} = F(\bar{s})$

→ La trasf. di Laplace è analitica sul semipiano $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, s > \sigma_c\}$

$$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s} \qquad \mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{s-a} \qquad \mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

→ La trasf. di Laplace è lineare $\quad \mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)]$

→ " " è iniettiva se $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)] \Rightarrow f(t) = g(t)$

- $F(s)$ determina univocamente $f(t)$ → È ben definita $\mathcal{L}^{-1}$ (trasf. inversa)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s)\, e^{st}\, ds = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

TRASF. DERIVATA:

Sia $f \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0})$ segue che $\mathcal{L}[Df(t)] = sF(s) - f(0^+)$

$$\mathcal{L}[D^2 f(t)] = s^2 F(s) - s f(0^+) - Df(0^+)$$

TRASF. INTEGRALE $\quad \mathcal{L}\left[\int_0^t f(v)\, dv\right] = \frac{1}{s} F(s)$

TEOREMA VALORE FINALE: Sia $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$ con f e Df aventi ascisse di convergenza non positive ($\sigma_c \leq 0$). Se $\exists \lim_{t \to +\infty} f(t)$, vale:

$$\Rightarrow \lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

Scansionato con CamScanner

TEOREMA VALORE INIZIALE

Sia $f \in C^1(R_+)$. Se $\exists$ il limite $\lim_{s\to+\infty} sF(s)$, vale:

$$f(0^+) = \lim_{s\to+\infty} sF(s)$$

TRASLAZIONE NEL TEMPO: $\forall t_0 \geq 0$ vale $\mathcal{L}[f(t-t_0)\cdot 1(t-t_0)] = e^{-t_0 s}\cdot F(s)$

e $\mathcal{L}[e^{at}\cdot f(t)] = F(s-a)$

$\hookrightarrow e^{at}\cdot f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s-a)]$

DEF: $\delta(t) := \lim_{t\to 0^+} Df(t;\tau)$ DELTA DI DIRAC $\quad \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$

$\delta(t) := D^* 1(t)$ $\quad \mathcal{L}[\overset{(1)}{\delta}(t)] = s$

$\delta^{(i)}(t) := D^{*i}\delta(t) \rightarrow$ derivata distribuzionale $\quad \mathcal{L}[\delta^{(2)}(t)] = s^2$

$\delta^{(1)}(t) := D^*\delta(t) = \lim_{t\to 0^+} D^2 f(t;\tau)$

$D^* f(t) = Df(t^+) + (f_+ - f_-)\delta(t)$

$D^{*2} f(t) = D^2 f(t^+) + (Df_+ - Df_-)\delta(t) + (f_+ - f_-)\delta^{(1)}(t)$

INSIEME DEI BEHAVIORS: Dato un sist. dinamico descritto dall'eq. differenziale $\sum_{i=0}^{n} a_i D^i y = \sum_{i=0}^{m} b_i D^i u$, si definisce l'insieme dei Behaviors di Σ

$$\mathcal{B} := \left\{(u;y) \in C_p^\infty(\mathbb{R})^2 : \sum_{i=0}^{n} a_i D^{*i} y = \sum_{i=0}^{m} b_i D^{*i} u\right\}$$

$\hookrightarrow$ eq. diff. sodd. soddisfatta in senso distribuzionale

TRASF. DELLA DERIVATA GENERALIZZATA

Sia $f \in C_p^\infty(\mathbb{R})$ $(C_p^\infty(\mathbb{R})^*)$ segue $\mathcal{L}[D^* f(t)] = sF(s) - f(0^-)$

PB. FONDAMENTALE: Note le c.i. al tempo 0 $(y_-, Dy_-, \dots, D^{n-1}y_-$ e $u_-, Du_-, \dots, D^{m-1}u_-)$ e l'azione forzante $u(t)$, $t \geq 0$ $\Rightarrow$ Determinare ~~l'azione forzante~~ la risposta $y(t)$, $t \geq 0$.

$$y(t) = y_{for}(t) + y_{lib}(t), \quad t \geq 0$$

$y_{for}(t)$: Dipende da $G(s)$

$y_{lib}(t)$: Dipende dalle c.i.

Scansionato con CamScanner

F.D.T di variabile complessa $G(s)$ per il quale vale:

$$\mathcal{L}[y(t)] = G(s)\mathcal{L}[u(t)] \quad \forall (u(t); y(t)) \in B \text{ con } \begin{matrix} u(t)=0 \\ y(t)=0 \end{matrix} \text{ per } t<0$$

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad \text{(con C.I. tutte nulle)}$$

Sia $g(t) := \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$ con $g(t)=0$, $t<0$ RISPOSTA ALL'IMPULSO

DEF: Σ è (strettamente) proprio $\Leftrightarrow$ la sua $G(s)$ è (strettamente) proprio

Se $n \geq 0$ $(p \geq 0) \leftrightarrow \Sigma$ PROPRIO

Se $n > 0$ $(p > 0) \leftrightarrow \Sigma$ STRETT. PROPRIO

DEF: GUADAGNO STATICO: Rapporto fra il valore cost. dell'uscita e il valore cost. dell'ingresso $(\neq 0)$ quando Σ è all'equilibrio (regime)

$K = G(0)$

DEF: POLI - ZERI: Σ descritto dall'eq. diff. $\sum_{i=0}^{n} a_i D^i y = \sum_{i=0}^{m} b_i D^i u$ è $a(s) = \sum_{i=0}^{n} a_i s^i$ (polinomio al den. di $G(s)$).

DEF: (MODI DEL SIST. DINAMICO Σ): Sono le fz. tipiche associate ai poli di Σ secondo la regola:

- Se p è un polo reale di h molteplicità: $e^{pt}, te^{pt}, \dots, t^{h-1}e^{pt}$
- Se p è un polo $\sigma \pm j\omega$ " " :

$$e^{\sigma t}\sin(\omega t + \phi_1),\ te^{\sigma t}\sin(\omega t + \phi_2), \dots, t^{h-1}e^{\sigma t}\sin(\omega t + \phi_h)$$

oppure

$$e^{\sigma t}\sin(\omega t),\ e^{\sigma t}\cos(\omega t),\ te^{\sigma t}\sin(\omega t),\ te^{\sigma t}\cos(\omega t), \dots, t^{h-1}e^{\sigma t}\sin(\omega t),\ t^{h-1}e^{\sigma t}\cos(\omega t)$$

SIST. RITARDO FINITO t_0:

$$\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[u(t-t_0)] = \mathcal{L}[u(t)]e^{-t_0 s} \Rightarrow G(s) = e^{-t_0 s}$$

Scansionato con CamScanner

$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$, $\mathcal{L}[\delta^{(1)}(t)] = s$

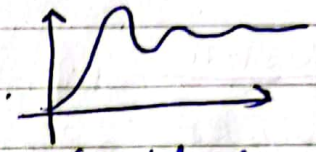
$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$, $\mathcal{L}[t \cdot 1(t)] = \frac{1}{s^2}$, $\mathcal{L}[\frac{1}{2} t^2 1(t)] = \frac{1}{s^3}$

PROP: <u>INTEGRALI VASCHY</u>: Nota la risposta al gradino $g_s(t)$, la $y_{ron}(t)$, $t \geq 0$, che è effetto dell'ostacolo forzante $u(t)$, $t \geq 0$ è determinabile:

$$y_{ron}(t) = \int_0^t u'(v) g_s(t-v)\, dv + u(0^+) g_s(t)$$

$$= \int_0^t g_s(v) u'(t-v)\, dv + u(0^+) g_s(t)$$

<u>SISTEMI DEL I° ORDINE</u> (senza zeri)



$G(s) = \frac{1}{1+\tau s}$

S = max. sovraelongazione (% del valore di regime y_{reg})

T_a: temp. di assestamento (la risposta oscilla fra $\pm 0.05\, y_{reg}$)

T_r = temp. ritardo (quando la risp. è al 50% y_{reg})

T_s: temp. salita (risposta va da $0.1\, y_{reg}$ a $0.9\, y_{reg}$)

T_m: istante ~~dove~~ dove c'è S

<u>SISTEMI DEL II° ORDINE</u>

$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$ $\quad G(0) = 1 \quad D^2 y + 2\delta\omega_n Dy + \omega_n^2 y = \omega_n^2 u$

ω_n: pulsazione naturale > 0

δ: coeff. smorzamento $\in (0,1)$

Risp. ad un gradino unitario $U(s) = \frac{1}{s}$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} G(s)\right] = 1 - A e^{-\delta\omega_n t} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$\omega := \omega_n \sqrt{1-\delta^2}$ $\quad A := \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}$ $\quad \tan\varphi = \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}$

Calcolo $S \Rightarrow Dy(t) = 0 \Rightarrow S = y_{max} = 100\, e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}$

$T_a \simeq \frac{3}{\delta\omega_n}$ e $T_s \simeq \frac{1.8}{\omega_n}$

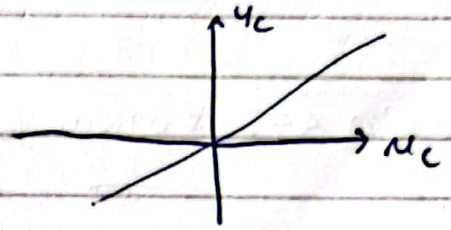
Scansionato con CamScanner

POLI DOMINANTI: Sono i poli (normalmente una coppia) non soggetti a quasi cancellazione polo/zero, più vicini all'asse immaginario.

→ La risp. al grad. unit. dipende maggiormente dai poli dominanti di Σ

→ Se i poli dominanti sono complessi e coniugati ⇒ S_1, T_a, T_s sono determinabili approssimativamente dalle relazioni per i sist. di ordine 2.

• Sistema Σ descritto dall' $\sum_{i=0}^{n} a_i D^i y = \sum_{i=0}^{m} b_i D^i u$ → I valori di equilibrio $(u_c; y_c) \in \mathbb{R}^2$, $y_c = G(0) u_c$



• a(s) e b(s) COPRIMI fra loro (non hanno radici in comune)

• Per un sistema Σ lineare il comportamento della $y_{lib}(t)$ a seguito di perturbazioni su un punto di equilibrio rimane il medesimo per qualsiasi altro punto di equilibrio

DEF: STABILITÀ:

Il sm Σ lineare si dice:

1) STABILE se per ogni perturbazione, la $y_{lib}(t)$ è limitata su $[0; +\infty)$
2) ASINTOTICAMENTE STABILE, se è stabile ed inoltre $\lim_{t \to +\infty} y_{lib}(t) = 0$ ∀ perturbazione introdotta
3) SEMPLICEMENTE STABILE se è stabile, ed inoltre ∃ una perturbazione per la quale: $\lim_{t \to +\infty} y_{lib}(t) = y_\infty \neq 0$ $\left(\nexists \left(\lim_{t \to \infty} y_{lib}(t)\right)\right)$
4) INSTABILE se non è stabile → ∃ almeno una perturbazione per il quale l'uscita va a ∞

Scansionato con CamScanner

($R_i P_i \leq 0 \mapsto$ Tutti i poli hanno parte reale $<$ o ≤ 0)

TEOREMA:

Sia Σ lineare per il quale i poli coincidono con le radici del polinomio caratteristico ($a(s)$ e $b(s)$ sono coprimi fra loro)

1) Σ è STABILE $\Leftrightarrow$ ~~Tutti~~ $Re P_i \leq 0$ e gli eventuali P_i immaginari sono semplici
2) Σ è A.S. $\Leftrightarrow$ ~~Re P~~ Tutti poli hanno $Re P_i < 0$
3) Σ è SEMPLIC. STAB. $\Leftrightarrow$ $Re P_i \leq 0$ e quelli immaginari (che $\exists!$) sono semplici
4) Σ è INSTABILE $\Leftrightarrow$ $\exists!$ P_i con $Re P_i > 0$ o un P_i puramente immaginario con $h > 1$

~~BIBO~~

Σ è BIBO $\Leftrightarrow$ $\forall$ azione forzante limitata la corrispondente risposta forzata è limitata

Σ è BIBO $\Leftrightarrow$ $\int_0^{+\infty} |g(\tau)| \, d\tau < +\infty$

Σ è BIBO $\Leftrightarrow$ Σ è A.S.

CRITERIO ROUTH:

- Σ lineare ~~lineare~~ descritto da $\sum a_i D^i y = \sum b_i D^i u$ con $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ → polinomio caratteristico

DEF (EQ. CARATTERISTICA) → $a(s) = 0$ $\quad a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = 0$

DEF (POLINOMIO HURWITZIANO) $\Leftrightarrow$ Tutte le radici s hanno $Re\, s < 0$

→ se $a_n > 0$ → $a(s)$ è hurwitziano $\Leftrightarrow$ $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0 > 0$

TEOREMA ROUTH1 Se la tab. ~~può essere~~ è completata, allora:

→ VARIAZIONE = radice a $Re > 0$

→ PERMANENZA = radice a $Re < 0$

CRITERIO: $a(s)$ è hurwitziano $\Leftrightarrow$ l'associata tab. di Routh può essere completata con l'algoritmo base e ha solo permanenze nella prima colonna

Casi di singolarità nel completamento della tabella:

a) Il primo elemento della riga è nullo
b) Tutti gli elementi di una riga sono zeri

Scansionato con CamScanner

METODO DI BENEDIT - PICIMBONO: Ogni riga che inizia con p zeri viene sommata con la riga da queste ottenuta moltiplicandola per $(-1)^p$ e traslando verso sx di p posizioni. Poi si continua la tabella.

Se siamo nel caso b):

1) Si prende il pol. ausiliario $\beta(s)$ (con i coeff. della riga sopra non nulla) e lo si deriva
2) I coeff. della $D\beta(s)$ si sostituiscono agli zeri della riga
3) Si prosegue con la tabella

=> PROP. $\beta(s)$ divide $a(s)$, quindi $\exists$ un $\alpha(s)$: $a(s) = \alpha(s)\beta(s)$
=> PROP. le radici di $\beta(s)$ sono simmetriche rispetto all'origine del piano complesso

INTERPRETAZIONE:

a) La colonna prima di aver usato la tecnica del polinomio caratteristico da informazioni sul segno delle radici di $\alpha(s)$
b) La colonna dopo aver usato il $\beta(s)$ da informazioni sul segno delle radici di $\beta(s)$.

=> La simmetria delle radici di $\beta(s)$ permette di stabilire il segno delle parte reale di tutte le radici

---

PARAMETRI RISPOSTA ARMONICA

- ω_R: pulsazione di risonanza $\omega_R = \arg\max |G(j\omega)|$ → massimo della risposta armonica
- M_R: picco di risonanza $M_R := \frac{|G(j\omega_R)|}{|G(j0)|}$ o $M_R := |G(j\omega_R)|$
- Larghezza di banda B_ω: $B_\omega := \omega_{t_1} - \omega_{t_2}$ (pulsazione di taglio sup. e inf.)

$$G(s) = K \frac{(1+\tau_1' s)(1+\tau_2' s)\cdots\left(1+2\delta_1' \frac{s}{\omega_{n1}'} + \frac{s^2}{\omega_{n1}'^2}\right)\cdots}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)\cdots\left(1+2\delta_1 \frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega_{n1}^2}\right)\cdots}$$

Scansionato con CamScanner

Se $G(j\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2\delta \frac{j\omega}{\omega_n}\right)^{-1}$ SIST. DEL II° ORDINE

$\omega_R = \omega_n \sqrt{1-2\delta^2}$ e $M_R = \frac{|G(j\omega_R)|}{|G(j0)|} = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$

C'è risonanza se $1-2\delta^2 > 0 \rightarrow \delta < \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.707$

$\delta \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rightarrow$ RISONANZA se $\delta \in \left(1/\sqrt{2}; 1\right) \rightarrow$ NO RISONANZA

DEF: SISTEMI A FASE MINIMA: Σ sistema lineare e stazionario con f.d.t $G(s)$ e risposta armonica $G(j\omega)$.
Σ è detto a fase minima se il diagramma delle fasi $\beta = \arg G(j\omega)$ è determinato univocamente, modulo 2π, dal diagramma dei moduli $\alpha = \ln|G(j\omega)|$ mediante la formula di Bode

PROP: Un Σ con f.d.t. razionale è a fase minima $\Leftrightarrow$ Non presenta poli o zeri con $Re > 0$

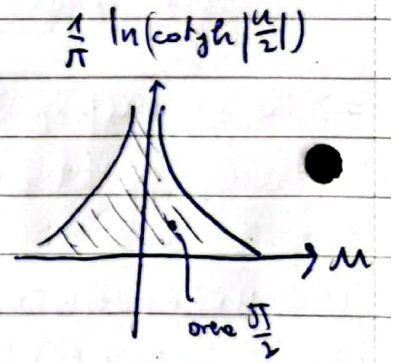
Formula di Bode:

$\alpha := \ln|G(j\omega)|$ e $\beta := \arg G(j\omega)$ $\beta_c := \arg G(j\omega_c)$

$u := \ln\frac{\omega}{\omega_c} = \ln\omega - \ln\omega_c$

$\rightarrow \beta_c := \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{du} \ln \coth\left|\frac{u}{2}\right| du$ se $\lim_{s\to 0} s^h G(s) > 0$

$\rightarrow \beta_c := \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{du} \ln \coth\left|\frac{u}{2}\right| du - \pi$ se $\lim_{s\to 0} s^h G(s) < 0$

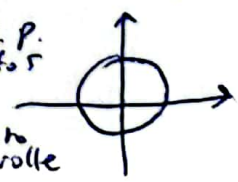


APPROSSIMANTI PADÈ DEL RITARDO FINITO: Si approssima il ritardo finito con una funzione razionale

$$G_q(s; t_0) := \frac{\sum_{k=0}^{q} \frac{(2q-k)!\,q!}{(2q)!\,k!\,(q-k)!}(-1)^k t_0^k \cdot s^k}{\sum_{k=0}^{q} \frac{(2q-k)!\,q!}{(2q)!\,k!\,(q-k)!} t_0^k \cdot s^k}$$

PROP: Lo sviluppo in serie di Mclaurin di $G_q(s; t_0)$ coincide con l'analogo sviluppo di $e^{-t_0 s}$ fino alla potenza $(2q)$-esima

$$e^{-t_0 s} = 1 - t_0 s + \frac{t_0^2}{2!}s^2 - \frac{t_0^3}{3!}s^3 + \frac{t_0^4}{4!}s^4 - \dots$$

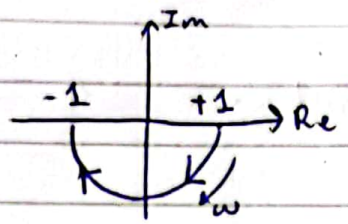


Scansionato con CamScanner

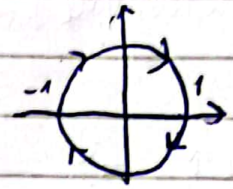
Approssimante Padè I° ordine $(q=1)$ — II° ordine

$$G_1(s;t_0) = \frac{1-\frac{t_0}{2}s}{1+\frac{t_0}{2}s} \qquad G_2(s;t_0) = \frac{1-\frac{t_0}{2}s+\frac{t_0^2}{12}s^2}{1+\frac{t_0}{2}s+\frac{t_0^2}{12}s^2}$$

d.p.



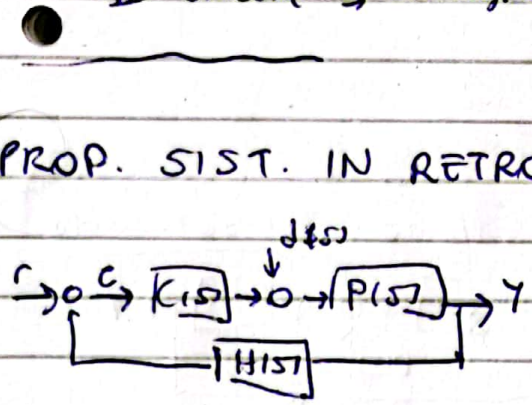
d.p.



circonferenza percorsa una volta

III° ordine → circonferenza percorsa 1 volta e mezza

PROP. SIST. IN RETROAZIONE



f.d.t. del sistema controllato

f.d.t. del sistema controllato

$$f.d.t. = \left\{ \frac{\text{f.d.t. percorso diretto}}{1 + \underbrace{\text{guadagno di anello}}_{L(s)}} \right\}$$

$$T_{ry}(s) = \frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)H(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

1° CASO: VARIAZIONE PARAMETRO NELLA CATENA DIRETTA α

Trova: una $\Delta\alpha \to \Delta G := G(s;\alpha) - G(s;\alpha_0) \to \frac{\Delta G}{G(s;\alpha_0)}$ {variazione relativa di $G(s)$}

$\Delta\alpha \to \Delta T := T(s;\alpha) - T(s;\alpha_0) \to \frac{\Delta T}{T(s;\alpha_0)}$ {" " $T(s)$}

$$S_G^T := \frac{\frac{\Delta T}{T(s;\alpha_0)}}{\frac{\Delta G}{G(s;\alpha_0)}}$$ {sensibilità di $T(s)$ al variare di $G(s)$}

Con $\Delta s \to 0$ (infinitesimale) $\Rightarrow S_G^T = \frac{1}{1+G(s;\alpha_0)H(s;\alpha_0)}$

Tanto più $S_G^T \downarrow$ e tanto meno il sistema è perturbato dalla α

$\Rightarrow$ se il $L(s) \uparrow$ rende insensibile la $T(s)$ a $\Delta G(s)$.

ovvero, se $L(s) \uparrow \Rightarrow \frac{\Delta T}{T(s;\alpha_0)} \ll \frac{\Delta G}{G(s;\alpha_0)}$

Scansionato con CamScanner

• II° CASO : VARIAZIONE DI UN PARAMETRO NELLA CATENA DI RETROAZIONE β

$$\Delta\beta \to \Delta H := H(s;\beta) - H(s;\beta_0) \to \frac{\Delta H}{H(s;\beta_0)}$$

$$\Delta\beta \to \Delta T := T(s;\beta) - T(s;\beta_0) \to \frac{\Delta T}{T(s;\beta_0)}$$

$$S_H^T := \frac{\frac{\Delta T}{T(s;\beta_0)}}{\frac{\Delta H}{H(s;\beta_0)}}$$ {sensibilità di T a variazioni di H}

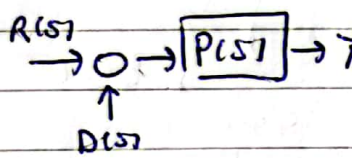
con $\Delta\beta \to 0$ (infinitesimale) $\to S_H^T = -\dfrac{G(s)H(s;\beta_0)}{1+G(s)H(s;\beta_0)}$.

Quindi se $L(s)\uparrow \Rightarrow \dfrac{\Delta T}{T(s;\beta_0)} \simeq \dfrac{\Delta H}{H(s;\beta_0)}$

$\Rightarrow$ le $\Delta H(s)$ si riverberano senza attenuazioni in $\Delta T(s)$

ATTENUAZIONE DISTURBI

Catena aperta:



{uscita del segnale utile} = $P(s)R(s) = Y_{utile}(s)$

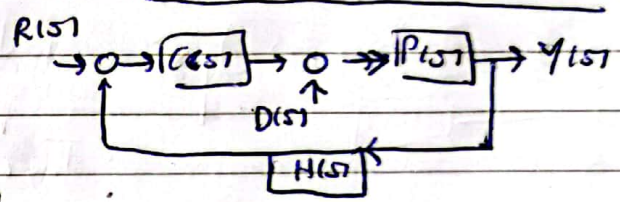
{uscita determinata dal disturbo} = $D(s)P(s) = Y_{DIST}(s)$

$$\Rightarrow \left\{\frac{\text{segnale}}{\text{disturbo}}\right\} = \frac{P(s)R(s)}{D(s)P(s)} = \frac{R(s)}{D(s)}$$

$\to$ se $L(s)\uparrow$, $\left\{\frac{\text{segnale}}{\text{disturbo}}\right\}$ si eleva circa del medesimo fattore passando dallo schema a catena aperta a quello retroazionato

A parità di $Y_{utile}(s)$ nei due schemi, il disturbo viene fortemente attenuato con la retroazione

Sistema retroazionato



$P \cong \dfrac{CP}{1+CPH}$ *

$\Rightarrow C \simeq 1 + CPH$ possibile quando $L(s) = CPH \gg 1$ e $H \cong \dfrac{1}{P}$

ovvero se $L(s)\uparrow$:

$$Y_{utile}(s) \cong P(s)R(s)$$

$$Y_{DIST}(s) \simeq \frac{P(s)}{1+C(s)P(s)H(s)} D(s)$$

$$\Rightarrow \left\{\frac{\text{segnale}}{\text{disturbo}}\right\} = (1+C(s)P(s)H(s))\frac{R(s)}{D(s)}$$

Scansionato con CamScanner

$\Rightarrow$ Allargamento banda passante $\rightarrow$ grazie alla retroazione

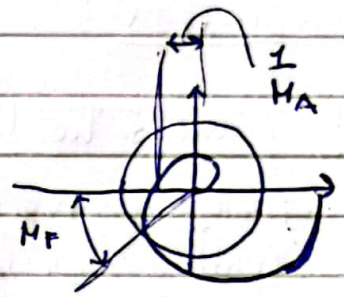
$\uparrow L(s) \uparrow \Rightarrow$ allargamento banda passante

$\rightarrow$ Una banda passante larga è preferibile poiché il sistema è più pronto ad inseguire il segnale di riferimento

Un $L(s) \uparrow \rightarrow$ può portare ad INSTABILITÀ del Σ, ma è più pronto, ovvero $T_a \downarrow$ (temp. assestamento)

DEF: (Σ BEN CONNESSO) $\Leftrightarrow \lim_{|s| \to +\infty} 1 + L(s) \neq 0$

$\hookrightarrow$ è necessaria per realizzare un sistema in retroazione $\rightarrow$ assicurata con $p \geq 1$



$M_A := \dfrac{1}{|L(j\omega_p)|}$ dove $\omega_p : \arg L(j\omega_p) = -\pi$

$M_F := \pi - |\varphi_c|$ dove $\varphi_c = \arg L(j\omega_c)$ e $\omega_c : |L(j\omega_c)| = 1$

Fattori che servono per quantificare la distanza dal pto critico -1.

DEF per un Σ A.S.

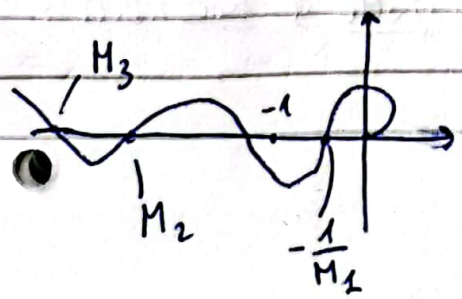
$\rightarrow M_A := \sup\left\{ M > 1 : |1 + \gamma L(j\omega)| > 0 \ \forall \gamma \in \left[\frac{1}{M}; M\right] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$

$\rightarrow M_F := \sup\left\{ \phi > 0 : |1 + e^{-j\varphi} \cdot L(j\omega)| > 0 \ \forall \varphi \in [-\phi; \phi] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$

PROP: Sia $M > 1$, vale $|1 + \gamma L(j\omega)| > 0 \ \forall \gamma \in \left[\frac{1}{M}; M\right]$ e $\forall \omega \geq 0 \Leftrightarrow$ il segmento di asse reale compreso fra $-M$ e $-\frac{1}{M}$ non interseca il d.p. di $L(j\omega)$

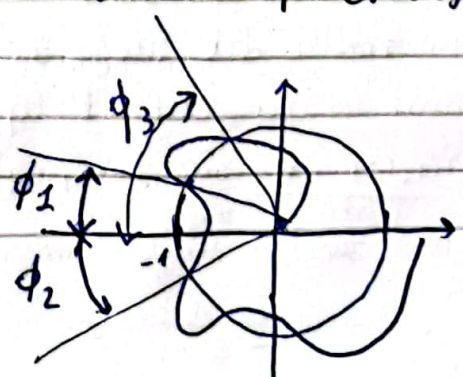
PROP: Sia $\phi > 0$, vale $|1 + e^{-j\varphi} L(j\omega)| > 0 \ \forall \varphi \in [-\phi; +\phi]$ e $\forall \omega \geq 0 \Leftrightarrow$ l'arco di circonferenza di eq. $e^{j(\pi+\varphi)}$, non interseca il d.p. di $L(j\omega)$

In generale:



$M_A = \min\{M_1; M_2; M_3 \dots\}$

$M_F = \min\{\underbrace{\phi_1; \phi_2 \dots}_{\text{Pulsazioni critiche}}\}$



Pulsazioni critiche (valori di ω per cui il d.p. interseca la circonferenza unitaria)

Scansionato con CamScanner

LUOGO RADICI

$$L(s) = K_1 \frac{(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)}$$ eq. caratt. $1 + K_1 G_1(s) = 0$

K_1 → cost. di trasferimento

DEF: Il luogo delle radici è il luogo geometrico descritto dalle radici dell'eq. $1 + K_1 G_1(s) = 0$ al variare di $K_1 \in [0^+; +\infty]$ (diretto) o $K_1 \in [-\infty; 0^-]$ (inverso)

PROPRIETÀ:

1) Il luogo ha tanti rami quanti sono i poli di $G_1(s)$. Ogni ramo parte da un polo e termina in uno zero o in un punto all'∞. I rami si intersecano in corrispondenza delle radici multiple.

2) Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.

3) Nel luogo diretto $K_1 > 0$ (inverso $K_1 < 0$) un punto dell'asse reale fa parte del luogo se si lascia alla sua dx un n° TOT DISPARI (PARI) di zeri e poli di $G_1(s)$.

4) Nel luogo diretto $K_1 > 0$:

$$\{\text{ang di par da } p_i\} = \pi + \sum_{j=1}^{m} \arg(p_i - z_j) - \sum_{j \neq i} \arg(p_i - p_j)$$

$$\{\text{ang. di arr. su } z_i\} = \pi + \sum_{j=1}^{m} \arg(z_i - p_j) - \sum_{j \neq i} \arg(z_i - z_j)$$

Se $K_1 < 0$ al posto di π ho 0.

5) Una radice del luogo di molt. h corrisponde ad un pto comune ad h rami in cui oltre all'eq. $1 + K_1 G_1(s) = 0$ sono soddisfatte le relazioni: $D^i G_1(s) = 0$ con $i = 1, \dots, h-1$

RADICI DOPPIE soddisfano l'eq:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s-p_i} - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s-z_i} = 0$$

Scansionato con CamScanner

6) In corrispondenza di una radice di molt. h, il luogo presenta h rami entranti e h uscenti alternati fra loro, le cui tangenti suddividono lo spazio in settori uguali di π/h rad.

7) → Dai poli partono n rami, m terminano sugli zeri di $G_1(s)$ e i restanti n-m divergono all'∞ adagiandosi su asintoti rettilinei.

7) Gli asintoti del luogo delle radici formano una stella di raggi con centro in:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{\rho}$$

Se $K_1 > 0$ → angoli asintoti: $\vartheta_{a,v} = \frac{(2v+1)\pi}{n-m}$

Se $K_1 < 0$ → angoli asintoti: $\vartheta_{a,v} = \frac{2v\pi}{n-m}$

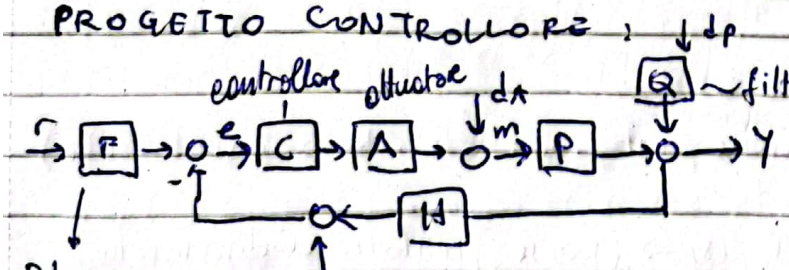
TEOREMA BARICENTRO LUOGO RADICI: Se $L(s)$ ha $\rho \geq 2$ allora:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_{c_i}}_{\text{summ. radici}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i}_{\text{summ. poli di } L(s)} \quad \forall K_1 \in \mathbb{R} \text{ e } \forall z_i \in \mathbb{C},\ i = 1, \dots, m$$

GRADO DI STABILITÀ: Sia Σ A.S., $G_s := -\max\{Re\,p_1; Re\,p_2; \dots; Re\,p_n\}$ (distanza dei poli dall'asse immaginario)

→ Nell'Hp che fra i poli di Σ ∃ una coppia dominante, vale: $T_a \simeq \frac{3}{G_s}$

PROGETTO CONTROLLORE:



filtro per disturbi

Blocco algebrico

elimino l'errore a regime in risposta al gradino del set-point

→ Il sist. di controllo deve essere:

1) ~~BUONA~~ BEN CONVESSO
2) STABILE ASINT. INTERN.
3) Prestazioni statiche/asintotiche
4) Prestazioni dinamiche
5) ROBUSTO (nei confronti dei disturbi)

Scansionato con CamScanner

PROP:

Sia $P(s)$ strettamente propria e $C(s)$ propria $\Rightarrow$ Σ sist. retroazionato è BEN CONNESSO

DEF: STABILITÀ ASINTOTICA INTERNA: $\Rightarrow$ Quando tutte le f.d.t fra gli ingressi $\{r, d_A, d_P\}$ e le uscite $\{e, m, y\}$ sono asintoticamente stabili

PROP: Σ è ASINTOTICAMENTE e INTERNAMENTE STABILE (A.I.S) $\Leftrightarrow$

1) Le radici di $1 + L(s) = 0$ sono tutte a $Re < 0$.
2) Le eventuali cancellazioni polo/zero fra $C(s)$ e $P(s)$ avvengono in $\mathbb{C}_-$.

RETI CORRETTRICI

integratrice	derivatrice	anticipatrice ~~ritardatrice~~	ritardatrice ~~anticipatrice~~
$C_r(s) = \frac{1}{1+\tau s}$	$C_r(s) = \frac{\tau s}{1+\tau s}$	$C_r(s) = \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}$	$C_r(s) = \frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}$

ritardo anticipo

$$C_r(s) = \frac{1 + 2\delta' \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

$\omega_n > 0 \quad \delta > \delta' \geq 1$

a T ponticello

$$C_r(s) = \frac{''}{''}$$

$\omega_n > 0 \quad \delta > 1 \quad \delta > \delta' > 0$

REGOLATORI

PROPORZ. $R(s) = K_P$ INTEGRALE $R(s) = \frac{K_P}{T_i s}$ DERIVATIVO $R(s) = K_P T_d s$

PID $R(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$

Rete ritardatrice:

✓ : $L(s) \uparrow$ per basse frequenze (buone prestazioni statiche o asintotiche)

~~✓ : buone prestazioni~~

✗ : Riduzione banda passante di $L(s)$ e di $T_{ry}(s) \rightarrow$ (scarse prestazioni dinamiche)

Rete anticipatrice:

✓ : Buone prestazioni statiche $\rightarrow L(s) \uparrow$ per basse freq.

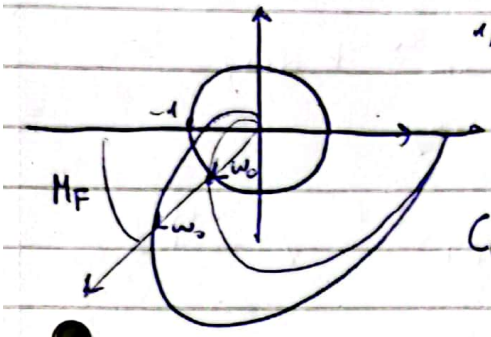
✓ : Aumento banda passante di $L(s)$ (e $T_{ry}(s)$) ; $G_s \uparrow$; $T_a \downarrow$ $\rightarrow$ Aumento prestazioni dinamiche

✗ : introduzione rumore $\rightarrow$ c'è una pseudo derivata

Scansionato con CamScanner

→ Sintesi rete anticipatrice per cancellazione polo/zero: si sceglie lo zero della rete in modo tale che si cancelli con il polo di $P(s)$ più vicino all'asse immaginario nella f.d.t.

Sintesi rete ritardo anticipo con imposizione M_F

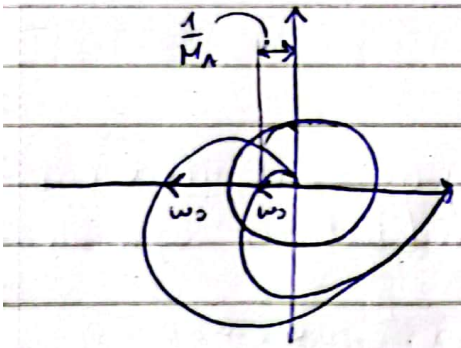


1) ω_0 : $\arg L(j\omega_0) = -\pi + M_F$

2) Si impone $\omega_n = \omega_0$ e $\frac{\delta'}{\delta} = \frac{1}{|L(j\omega_0)|}$

$$C_r(j\omega_0)L(j\omega_0) = \frac{\delta'}{\delta}L(j\omega_0) = \frac{1}{|L(j\omega_0)|}|L(j\omega_0)|e^{j\arg L(j\omega_0)} = e^{j(M_F-\pi)}$$

" " " " M_A



1) ω_0 : $\arg L(j\omega_p) = -\pi$

2) Impone $\omega_n = \omega_p$ e $\frac{\delta'}{\delta} = \frac{1}{|L(j\omega_p)|M_A}$

$$C_r(j\omega_p)L(j\omega_p) = \frac{\delta'}{\delta}L(j\omega_p) = \frac{1}{M_A}e^{-j\pi} = -\frac{1}{M_A}$$

SINTESI CON EQUAZIONE DIOFANTEA: Progettare $C(s)$ (scopriro) in modo tale che i poli retroazionati del sist. di controllo siano assegnabili arbitrariamente, ovvero scegliere un insieme simmetrico dell'asse reale $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{C}$ per il quale le radici di $1 + CP = 0$ coincidono con Λ

$P(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ (propria) e $C(s) = \frac{y(s)}{x(s)}$

$$1 + C(s)P(s) \Leftrightarrow \underbrace{a(s)x(s) + b(s)\cdot y(s) = 0}_{\text{eq. diofantea}}$$

$d(s) = \prod_{i=1}^{n+l}(s-\lambda_i)$: polinomio caratteristico desiderato

TEOREMA: L'eq. diofantea ammette soluzione $\Leftrightarrow$ il max. comune divisore di $a(s)$ e $b(s)$ è divisore di $d(s)$

Scansionato con CamScanner

PROP: Assumiamo $a(s)$ e $b(s)$ coprimi fra loro, allora $\{x(s), y(s)\}$ è una sol. dell'eq. Diofantea, valgono:

$\{a(s) \text{ e } d(s) \text{ coprimi}\} \iff \{a(s) \text{ e } y(s) \text{ coprimi}\}$

$\{b(s) \text{ e } d(s) \text{ coprimi}\} \iff \{b(s) \text{ e } x(s) \text{ coprimi}\}$

$\Rightarrow$ la sol. dell'eq. Diofantea non determina cancellazioni polo/zero fra $C(s)$ e $P(s)$

$\Rightarrow$ Con $a(s)$ e $b(s)$ coprimi $\Rightarrow \exists$ una sol. dell'eq. ~~coeff~~ diofantea $\forall\, d(s)$

deve essere $\deg y(s) \leq \deg x(s)$ (controllore proprio)

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots)(s^l + x_{l-1}s^{l-1} + \dots) + (b_{n-1}s^{n-1} + \dots)(y_l s^l + y_{l-1}s^{l-1} + \dots) = s^{n+l} + d_{n+l-1}s^{n+l-1} + \dots$$

↳ con il principio di identità dei polinomi

Si impone n° eq. lineari = n° di incognite $\rightarrow n+l = 2l+1 \Rightarrow l = n-1$

→ Si raccolgono i fattori per s^{2n-1}, s^{2n-2}, s^{2n-3} ....

• Il pb di assegnabilità arbitraria è risolvibile con un controllore $C(s)$ proprio di ordine $n-1 \iff$ la matrice dei coeff. del sist. di equazioni è non singolare. Per verificarlo:

Costruiamo la matrice di Sylvester

$a(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$

$b(s) = b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0$

$$S(a,b) = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & & b_0 \\ & & & b_m & b_{m-1} & \dots & b_1 & b_0 \; 0 \\ 0 & & & & & & & \\ b_m & b_{m-1} & 0 & \dots & b_0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

risultante di $a(s)$ $b(s)$ $\rightarrow R(a,s) := \det S(a,b)$

PROP: $a(s)$, $b(s)$ sono coprimi $\iff R(a,b) \neq 0$

TEOREMA: ASSEGNABILITÀ POLI: Assunto $a(s)$ $b(s)$ coprimi fra loro, i poli del sistema in retroazione unitaria sono assegnabili arbitrariamente con un controllore proprio di ordine $n-1$

PROP: Il pb di regolazione asintotica ha soluzione $\iff P(0) \neq 0$

↓

guadagno statico impianto

Scansionato con CamScanner

→ Progettiamo un $C(s)$ di ordine $n-1$ affinchè i poli del sist. retroazionato siano assegnabili arbitrariamente e $Re\, P_i < 0$, e siano diversi dalle radici di $a(s)$ e $b(s)$. Ne consegue che:

1) Σ è I.A.S. e di tipo ≥ 1
2) $e_r = 0$ (in risp. ad $u(t) = 1(t)$) grad unit.

$\Rightarrow$ Il pb. di regolazione è risolto

Scansionato con CamScanner