

Appunti Elementi di Automatica

Daniele Olivieri

28/11/21

Indice

1	Introduzione	7
1.1	Sistemi dinamici	8
1.2	Oggetto astratto orientato	8
1.2.1	Esempio di una rete RLC	9
1.2.2	Esempio di una sospensione di un'autovettura	10
1.3	Variabili di ingresso e uscita	11
1.3.1	Massa su un piano	11
1.3.2	Bilancio familiare	11
1.3.3	Capacitore	11
1.3.4	Regola generale	11
2	Modelli di sistemi dinamici	13
2.1	Costruzione di un modello ISU	14
2.1.1	Costruzione modello ISU RLC	14
2.2	Classificazione dei sistemi dinamici	16
2.2.1	Ulteriori classificazioni	18
2.3	Sistemi elettrici	19
2.3.1	Esempio rete RLC	19
2.3.2	Esempio rete RLC 2	21
2.3.3	Amplificatore operazionale	24
2.3.4	Circuito integratore	25
2.3.5	Circuito derivatore	27
2.4	Sistemi meccanici	29
2.4.1	Esempio sistema Massa-Molla-Smorzatore	31
2.4.2	Esempio Massa-Molla-Smorzatore con due masse	32
2.4.3	Moto rotazionale	33
2.4.4	Pendolo rigido	35
2.4.5	Analisi con variabile lagrangiana	36
2.5	Sistemi termici	38
2.5.1	Esempio forno elettrico	39
2.6	Sistemi idraulici	40
2.6.1	Sistema idraulico con due serbatoi	41
2.7	Equilibrio dei sistemi	42

2.7.1	Equilibrio del pendolo	43
2.8	Linearizzazione dei sistemi	45
2.8.1	Linearizzazione del sistema di un pendolo	47
2.9	Richiami di geometria	48
2.9.1	Endomorfismo	48
2.9.2	Trasformazione di similitudine	49
2.9.3	Autospazi invarianti monodimensionali	50
2.9.4	Diagonalizzazione per similitudine	52
3	Analisi dei sistemi LTI nel dominio del tempo	53
3.1	Risoluzione analitica di un sistema differenziale	53
3.1.1	Matrice esponenziale	54
3.1.2	Teorema di Caley-Hamilton	58
3.1.3	Tecnica del polinomio interpolante - Matrice di Vandermonde	58
3.1.4	Matrice non semplice	61
3.1.5	Autovalori complessi e coniugati	63
3.1.6	Esempio calcolo matrice esponenziale	66
3.1.7	Proprietà della matrice esponenziale	67
3.1.8	Analisi con matrice non diagonalizzabile	68
3.2	Calcolo dell'integrale generale della ISU	69
3.2.1	Principio di sovrapposizione degli effetti	71
3.2.2	Rappresentazioni ISU equivalenti	72
3.3	Modi naturali per i sistemi dinamici	73
3.3.1	Modi aperiodici	75
3.3.2	Modo Pseudo-Periodico	76
3.3.3	Stima dell'andamento qualitativo dei sistemi dinamici	77
3.3.4	Andamento sistema del terzo ordine	80
3.4	Analisi della risposta forzata	83
3.4.1	Segnali canonici	83
3.5	Modi naturali nel regime forzato	88
3.5.1	Risposta al gradino	89
4	Analisi nel dominio di Laplace	91
4.1	Trasformata di Laplace	91
4.1.1	Proprietà della trasformata	91
4.1.2	Trasformate degli ingressi canonici	92
4.1.3	Esempi numerici trasformate fratte	95
4.1.4	Radici complesse e coniugate	97
4.2	Funzione di trasferimento	99
4.2.1	Equazione differenziale generale	103
4.2.2	Struttura della funzione di trasferimento	103
4.2.3	Trasformazione del sistema in forma di stato	105
4.2.4	Legame tra la funzione di trasferimento e i modi naturali	106
4.2.5	Usi della funzione di trasferimento	107

4.3	Risposta ai segnali canonici	109
4.3.1	Poli dominanti	110
4.3.2	Sistema del primo ordine	111
4.3.3	Sistema del secondo ordine con poli complessi e coniugati	112
4.3.4	Analisi con la forma di Evans	116
4.3.5	Analisi delle risposte dei sistemi del secondo ordine	117
4.3.6	Analisi risposta funzione con uno zero	119
4.4	Realizzazione	121
4.5	Riassunto delle forme di rappresentazione dei sistemi	123
5	Analisi in regime permanente	125
5.1	Regime con specifici segnali di ingresso	127
5.2	Risposta transitoria	129
5.3	Identificazione sperimentale della risposta armonica	131
5.4	Analisi con ingresso periodico	132
5.5	Diagrammi di Bode	134
5.5.1	Regole di tracciamento	138
5.5.2	Diagramma della fase	140
5.6	Filtri in frequenza	144
5.7	Diagrammi di Nyquist	146
5.8	Stabilità interna (Lyapunov)	155
5.8.1	Stabilità nei sistemi lineari e stazionari	158
5.8.2	Criterio di Routh-Hurwitz	159
5.8.3	Studio dei sistemi a parametri incerti	166
5.8.4	Legame tra stabilità asintotica e funzione di trasferimento	167
5.8.5	Metodo indiretto di Lyapunov (I criterio)	168
5.9	Sistemi interconnessi	169
5.10	Raggiungibilità ed osservabilità	171
5.10.1	Raggiungibilità (LTI)	171
5.10.2	Osservabilità	175
5.11	Sistemi interconnessi - esteso	179
5.11.1	Connessione in serie	180
5.11.2	Connessione in parallelo	181
5.11.3	Connessione in retroazione	181
5.11.4	Regole di riduzione	183
5.11.5	Analisi della stabilità di un sistema interconnesso	185

Capitolo 1

Introduzione

L'automazione è una disciplina estremamente ampia, si intende in questo corso con *automazione* la progettazione, la realizzazione e la gestione di sistemi in grado di eseguire dei compiti in maniera autonoma, senza l'intervento dell'uomo.

Nel corso verranno effettuate le analisi di sistemi dinamici, con un focus finale sulle analisi di sistemi di controllo che verranno approfondite al corso di “controlli”.

L'uomo ha sempre cercato di automatizzare i processi o i compiti che doveva eseguire, per ridurre la fatica e l'usura per le attività manuali.

Un esempio è il **regolatore di Watt**, una macchina in grado di regolare il grado di ammissione di una valvola di alimentazione per una macchina a vapore, al fine di mantenere costante la velocità di rotazione della macchina.

Inizialmente l'operazione era compiuta da un operatore che regolava la temperatura della caldaia fornendo più o meno combustibile.

Quest'oggetto racchiude l'essenza dei controlli automatici:

- Elemento di trasduzione e misura, fondamentale per ottenere informazioni sulla grandezza da controllare, in questo caso la velocità di rotazione delle macchine da controllare. L'uscita dello strumento di misura può essere di diversa natura rispetto alla grandezza misurata ma comunque proporzionale ad esso.
- Elemento di controllo (controllore), in questo caso il sistema di leve e pesi che varia la posizione del cursore in funzione dell'input e delle sue caratteristiche come i pesi e le lunghezze delle leve.
- Attuatore, ossia uno strumento in grado di attuare la decisione del controllore sul sistema, nel caso precedente la valvola.

Nel contesto più generale dei sistemi dinamici si riuscirà a modellare ed analizzare i sistemi dinamici in generale e comprendere le proprietà fondamentali e strutturali dei sistemi studiati.

1.1 Sistemi dinamici

Un sistema è qualunque oggetto o processo materiale o immateriale, ben delimitato nel suo funzionamento. Potrebbe essere un sistema meccanico o termico, o ad esempio un sistema immateriale come l'andamento del PIL in Italia.

Gli oggetti di interesse in particolare sono quelli *dinamici* che hanno ossia la possibilità di variare nel tempo alcune grandezze che li caratterizzano.

L'unica variabile indipendente considerata nell'intero corso sarà il tempo, anche i sistemi astratti saranno comunque sistemi “esistenti”.

Dato un certo sistema si dovrà astrarre dal sistema un modello che lo rappresenta, operazione denominata modellistica, il modello prende il nome di **oggetto astratto orientato**.

Con “identificazione dei sistemi dinamici” si intende la scienza che permette la costruzione di modelli matematici anche quando i sistemi in esame e le loro proprietà fisiche non sono note.

Costruito il modello è poi possibile analizzare le caratteristiche dell'oggetto, attraverso la quale si possono conoscere le caratteristiche comportamentali del modello.

Le previsioni meteorologiche sono un classico esempio di analisi in un sistema dinamico, va modellato il pianeta in funzione del fenomeno da studiare, vanno quindi determinate le variabili inerenti il fenomeno. Esiste un modello matematico del pianeta che permette di prevedere le grandezze future del sistema dato lo stato attuale dello stesso.

Se si esegue ad esempio l'analisi del modello termico di una stanza si ottiene un valore di temperatura diverso da quello desiderato e corrispondente al comportamento naturale del sistema. Se si desidera un valore di temperatura differente, va costruito un sistema di condizionamento e controllo che con un attuatore modifichi l'evoluzione del sistema.

1.2 Oggetto astratto orientato

È un'astrazione di un oggetto reale, dal quale si ricavano un insieme di equazioni e variabili che ne descrivano le grandezze di interesse. È un modello *parziale* della realtà, sia perché analizza solo uno o una parte di fenomeno, sia perché, anche nella grandezza di interesse, non sarà mai identico alla realtà a causa delle varie approssimazioni.

L'accuratezza di un modello solitamente aumenta all'aumentare della complessità del modello, va determinato il grado di complessità in funzione dell'accuratezza richiesta al risultato.

Con il termine *orientato* si intende sottolineare che il modello matematico deve essere un modello **causale**, ossia che rispetti il principio di causa-effetto, l'effetto *segue* nel tempo la causa, altrimenti sarebbe un sistema che prevede il futuro. In alcune discipline si studiano anche sistemi non causali, come ad esempio nella trasmissione digitale terrestre possono essere utilizzati dei filtri anti-causal, trasmettendo ad esempio il segnale con

una latenza di tre secondi, è possibile sfruttare questi secondi di “buffer” per ricostruire in maniera più accurata il segnale.

Il concetto di “orientato” fa nascere un’idea discriminante nell’ambito delle variabili presenti nel modello, dividendole in due grandi *famiglie*, ossia **ingresso** o **uscita**.

Si identificano con u le variabili di ingresso e con y quelle di uscita.



Figura 1.1: Modello matematico sistema generico

1.2.1 Esempio di una rete RLC

Si considera il seguente sistema Si scrive l’equazione alla maglia

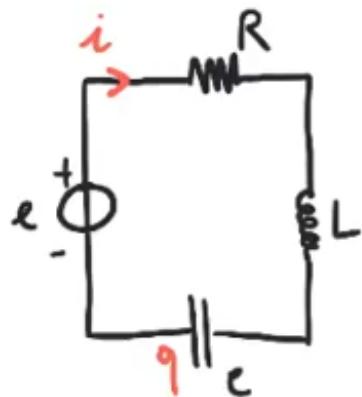


Figura 1.2: Circuito RLC

$$e = R\dot{q} + L\ddot{q} + \frac{q}{C} \quad (1.1)$$

con q la carica elettrica e la notazione \dot{q} per indicare la derivata prima nel tempo, \ddot{q} la seconda e così via.

Sono presenti due variabili nell’equazione, una di ingresso e una di uscita, un oggetto astratto orientato che soddisfa la proprietà di casualità (generatore \rightarrow carica)

1.2.2 Esempio di una sospensione di un'auto vettura

Il seguente sistema può essere schematizzato come una massa collegata ad una molla in *parallelo* ad uno smorzatore idraulico (pistone).

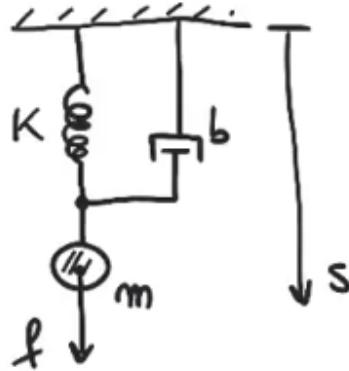


Figura 1.3: Sistema massa-molla-smorzatore

È possibile costruire il modello matematico del sistema applicando il secondo principio della dinamica a ciascuna massa in gioco e per ciascun grado di libertà della stessa. Si suppone che la massa possa muoversi solo lungo la direzione verticale e si indica con s la sua posizione, di conseguenza \dot{s} sarà la velocità e \ddot{s} l'accelerazione.

$$m\ddot{s} = f - ks - b\dot{s} \quad (1.2)$$

dove k è la rigidezza della molla e b la viscosità dello smorzatore riferita alla velocità.

I due sistemi sono eterogenei tra loro, ma possono essere facilmente messi in relazione nel seguente modo:

$$m \leftrightarrow L$$

$$b \leftrightarrow R$$

$$k \leftrightarrow \frac{1}{C}$$

$$s \leftrightarrow q$$

$$f \leftrightarrow e$$

Se si sostituissero i termini della 1.2 nella 1.1 si otterebbe ancora la stessa equazione, ciò mostra che due sistemi completamente differenti tra loro possono dare origine ad un modello astratto identico. Dal punto di vista di oggetto astratto, sono dunque lo stesso sistema, ossia il comportamento di uno può essere associato allo stesso comportamento dell'altro.

1.3 Variabili di ingresso e uscita

1.3.1 Massa su un piano

Si vuole trovare un metodo per determinare le variabili di ingresso e uscita di un sistema.

Sia dato il seguente sistema composto da una massa m posta su un piano e sottoposta ad una forza f di equazione

$$m\ddot{s} = f \quad (1.3)$$

è immediato constatare che la forza sia l'ingresso e lo spostamento l'uscita, non può esserci spostamento senza forza.

1.3.2 Bilancio familiare

Si consideri un “sistema” formato da un nucleo familiare, la prima grandezza è *l'introito mensile* mentre un'altra variabile è il *tenore di vita*, non è in questo caso facile determinare l'equazione che lega queste due variabili.

Sarà intuitivo constatare che *l'introito* sarà la variabile di ingresso e il *tenore di vita* la variabile di uscita.

1.3.3 Capacitore

Si consideri un semplice condensatore attraversato da una corrente i e una tensione ai suoi capi pari a v , non è in questo caso immediato trovare la variabile di ingresso e quella di uscita.

$$q = C \cdot v$$

Ragionando sul fenomeno fisico si vede che è la carica q (e dunque la corrente) a determinare la tensione ai capi del condensatore e non il viceversa, questo ragionamento richiede però la conoscenza del fenomeno fisico in esame e non può essere generalizzato a tutti i sistemi.

1.3.4 Regola generale

Un caso comune è l'analisi di sistemi a partire già dal modello matematico, senza conoscere in alcun modo il processo fisico. Osservando unicamente le equazioni è possibile determinare quali siano le variabili di ingresso e uscita, questo è possibile grazie ad uno strumento che discende direttamente dal principio di causalità:

saranno variabili di ingresso quelle che compaiono differenziate un numero inferiore di volte all'interno dell'equazione del sistema.

Tutte le altre possono essere variabili di uscita. Non è detto che ai fini dello studio interessino tutte le variabili non di ingresso.

Capitolo 2

Modelli di sistemi dinamici

I principali modelli di sistemi dinamici sono due:

(IU) Ingresso-uscita

$$f(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y, u^{(m)}, u^{(m-1)}, \dots, u) = 0 \quad (2.1)$$

con $m < n$ (per la regola di Cauchy) per avere un sistema strettamente causale. Con $m = n$ un sistema è causale ma non strettamente causale, in genere tutti i modelli fisici sono strettamente causali. La 2.1 prende il nome di *equazione generale del sistema* mentre n prende il nome di *ordine del sistema*. La funzione può anche essere un sistema di equazioni differenziali di ordine inferiore.

(ISU) Ingresso-stato-uscita

$$y(t) = x_1(t), \dot{y}(t) = x_2(t), \dots, y^{(n-1)}(t) = x_n(t) \quad (2.2)$$

Compaiono in questo modello tre tipologie di variabili, *ingresso* e *uscita* come nel caso precedente e le variabili *di stato* necessarie a completare il problema di Cauchy. Un possibile insieme di variabili di stato sono quelle necessarie a specificare le condizioni iniziali dell'equazione differenziale. Questo insieme può essere definito come *stato* del sistema. Nella 2.2 si vede che il numero di variabili di stato (x_n) necessarie alla risoluzione del problema è pari all'ordine del sistema.

Qualunque sistema dinamico può essere rappresentato con una diversa scelta delle variabili di stato, varieranno le equazioni ma il modello resta valido per quel determinato sistema. La rappresentazione ingresso-uscita è invece unica.

Si vede che nella rappresentazione *ISU*, una volta ottenuta l'equazione del sistema, questa può essere trasformata per evidenziare particolari proprietà del sistema.

2.1 Costruzione di un modello ISU

Si può costruire seguendo quattro passaggi

1. Scrivere tutte le equazioni del sistema (eq. diff.) conoscendo il modello fisico del sistema
2. Individuare le variabili d'ingresso e uscita, mediante il principio di causalità
3. Scegliere le variabili di stato dopo averne individuato il numero. Una scelta possibile è quella mediante la regola di Cauchy
4. Riscrivere le equazioni di partenza trovate al punto uno nella seguente forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \\ y_1 = g_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \\ \vdots \\ y_n = g_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \end{cases} \quad \text{ISU} \quad (2.3)$$

la t in questo caso indica l'eventuale tempo varianza dei parametri del sistema e non la dipendenza dal tempo delle variabili di stato (assunta vera implicitamente).

2.1.1 Costruzione modello ISU RLC

Si considera l'esempio mostrato in figura 1.2, analizzando l'equazione 2.3 si vede che sono presenti n equazioni differenziali di primo grado dato che le funzioni f e g sono equazioni algebriche, non contengono termini differenziali. Sono invece presenti p equazioni puramente algebriche g che legano lo stato, l'ingresso, il tempo alle uscite.

1. Ricordando l'equazione del sistema ricavata in 1.1 si formalizza il modello

$$\begin{cases} e = Ri + L\dot{i} + \frac{q}{C} \\ i = \dot{q} \end{cases} \quad (2.4)$$

2. Si individuano tutte le variabili: e, i, q

Si individuano dunque le variabili d'ingresso tra quelle con ordine di derivata più basso, in questo caso la e è differenziata zero volte, sarà un ingresso, in questo caso l'unico; le altre, differenziate una volta, saranno le potenziali variabili di uscita.

3. Si scelgono le variabili di stato, si deve prima determinare l'ordine del sistema: *il numero di variabili di stato è pari alla somma del numero di volte che le variabili delle equazioni compaiono differenziate tolte le variabili d'ingresso.*

Sommando l'ordine di derivazione di i e q , variabili non d'ingresso si ottiene dunque $n = 2$.

4. Si possono scegliere come variabili di stato tutte quelle che determinano le condizioni iniziali, ossia
tutte le variabili che compaiono differenziate e in numero pari al numero di volte in cui viene differenziata.

Per il sistema in esame

$$x_1 = q, \quad x_2 = i$$

5. Scrittura delle equazioni in forma ISU

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u) = \dot{q} = i = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u) = \dot{i} = \frac{e}{L} - \frac{R}{L}i - \frac{1}{LC}q = \\ \quad = -\frac{1}{LC}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{L}u \\ y_1 = i = g_1(x_1, x_2, u) = x_2 \\ y_2 = q = g_2(x_1, x_2, u) = x_1 \end{cases}$$

2.2 Classificazione dei sistemi dinamici

Per comodità si riporta la 2.3 in forma più compatta. Si costruisce un vettore di variabili di stato, d'ingressi e di uscite

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n (\in \mathbb{C}^n) \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

l'esistenza di variabili complesse per le variabili di stato è giustificata da scelte pratiche utili alla risoluzione del problema anche se non legate strettamente a fenomeni fisici.

Di conseguenza la f sarà un vettore di funzioni

$$\left. \begin{array}{l} f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) = f_1(x, u, t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) = f_n(x, u, t) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x, u, t) \\ \vdots \\ f_n(x, u, t) \end{bmatrix}$$

Analogamente per le funzioni g

$$\left. \begin{array}{l} g_1(x, u, t) \\ \vdots \\ g_p(x, u, t) \end{array} \right\} \Rightarrow g(x, u, t) = \begin{bmatrix} g_1(x, u, t) \\ \vdots \\ g_p(x, u, t) \end{bmatrix}$$

La forma generale della ISU diventa

$$\text{ISU} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = g(x, u, t) \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Si suppone che le funzioni f, g siano lineari in x e u ossia che possano essere espresse come combinazione lineare di quelle variabili (x, u) .

Ad esempio la funzione f

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_{11}(t)u_1 + \dots + b_{1m}(t)u_m \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_{n1}(t)u_1 + \dots + b_{nm}(t)u_m \end{aligned}$$

Analogamente la funzione g

$$\begin{aligned} g_1 &= c_{11}(t)x_1 + \dots + c_{1n}(t)x_n + d_{11}(t)u_1 + \dots + d_{1m}(t)u_m \\ &\vdots \\ g_p &= c_{p1}(t)x_1 + \dots + c_{pn}(t)x_n + d_{p1}(t)u_1 + \dots + d_{pm}(t)u_m \end{aligned}$$

Si può scrivere il sistema in forma vettoriale ottenuto dal prodotto di un vettore riga contenente i coefficienti e un vettore colonna contenente le variabili, questo per ogni elemento di \dot{x} , si ottiene dunque una matrice $n \times n$ di coefficienti ed un vettore colonna di variabili x .

$$f = \dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$$

con

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

La matrice A è sempre quadrata mentre la matrice B ha una dimensione che dipende dal numero di ingressi e può diventare un vettore se l'ingresso è unico.

Si ripete la procedura per le funzioni g

$$g = y = C \cdot x + D \cdot u$$

con

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & \dots & c_{pn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times n} \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{p1} & \dots & d_{pm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

La matrice D diventa uno scalare se il sistema ha un solo ingresso e una sola uscita.

Riassumendo

$$\text{ISU} \quad \begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u \\ y = C(t)x + D(t)u \end{cases} \quad (2.6)$$

Un sistema si dice **lineare** se le funzioni f e g sono entrambe lineari nello stato e nell'ingresso, ossia se possono essere scritte nella forma 2.6.

Se le equazioni del sistema compaiono nella seguente forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = g(x, u) \end{cases}$$

allora il sistema si dice *stazionario* o *tempo invariante*, ossia il sistema avrà sempre la stessa evoluzione fissato l'ingresso e lo stato iniziale. In caso contrario il sistema si comporterebbe in maniera differente a seconda di quando viene sollecitato e analizzato. Se il sistema gode di entrambe le proprietà si dirà *Lineare Tempo Invariante* e saranno quelli prevalentemente analizzati nel corso, sono sempre risolvibili.

2.2.1 Ulteriori classificazioni

Nel seguente sistema, l'uscita non dipende *direttamente* dall'ingresso

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = g(x, t) \end{cases}$$

viene definito *sistema strettamente proprio*, in caso contrario è *proprio*.

Nel caso di sistemi lineari

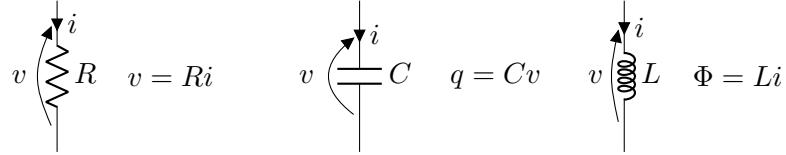
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad D = 0 \Leftrightarrow \text{Strettamente proprio}$$

In natura esistono solo sistemi strettamente propri, non esistono quelli propri, qualunque ingresso ha bisogno di propagarsi nel sistema entro un certo tempo, non può quindi modificare l'uscita istantaneamente.

2.3 Sistemi elettrici

Si richiamano le convenzioni utilizzate nei sistemi elettrici, saranno composti da uno o più generatori di tensione o corrente e composti da bipoli passivi.

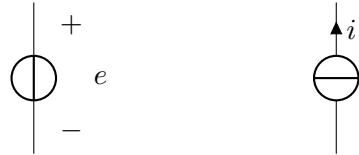
Verrà utilizzata la convenzione dell'utilizzatore per i seguenti bipoli



Derivando le equazioni dei bipoli dinamici rispetto al tempo si ottiene

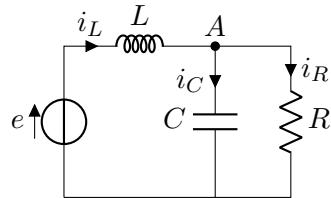
$$\begin{aligned} q = Cv &\xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{dq}{dt} = i = \frac{d}{dt}(Cv) \stackrel{C \text{ cost}}{=} C \frac{dv}{dt} = C\dot{v} \\ \Phi = Li &\xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{d\Phi}{dt} = v = \frac{d}{dt}(Li) \stackrel{L \text{ cost}}{=} L \frac{di}{dt} = L\dot{i} \end{aligned}$$

Si aggiungono ai bipoli passivi i generatori di tensione e corrente



2.3.1 Esempio rete RLC

Si ha la seguente rete



Si ricavano le equazioni del sistema utilizzando in questo caso le leggi di Kirchhoff applicate al nodo A e alla prima maglia (che comprende il generatore)

$$\begin{cases} i_L = i_C + i_R \Rightarrow i_L = C\dot{v}_C + \frac{v_C}{R} \\ e = v_L + v_C \Rightarrow e = L\dot{i}_L + v_C \\ v_C = v_R \end{cases}$$

Elaborando le equazioni si vede che alcune variabili potranno risultare superflue, ad esempio in questo caso v_C e v_R sono la stessa grandezza.

Si individuano ora le variabili e si dividono in ingressi e uscite al fine di rispettare il principio di causalità ricordando che gli ingressi compaiono differenziati un numero minore di volte

$$\begin{array}{ccc} e & i_L & v_C \\ (0) & (1) & (1) \\ u & y & y \\ u & x_1 & x_2 \end{array}$$

Si scelgono le variabili di stato, applicando la legge di Cauchy, il numero di ingressi è pari a due perché entrambe le variabili compaiono differenziate una sola volta.

$$n = 2, \quad x_1 = i_L, \quad x_2 = v_C$$

Si scrive quindi la ISU (il sistema è tempo invariante quindi le funzioni della ISU non dipendono da t)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, u) = \dot{i}_L = \frac{e}{L} - \frac{v_C}{L} = -\frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u) = \dot{v}_C = \frac{i_L}{C} - \frac{v_C}{RC} = \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{RC}x_2 \end{aligned}$$

Andrebbero aggiunte le relazioni che legano le uscite all'effettiva variabile di studio ad esempio la tensione ai capi della resistenza e la corrente nell'induttanza, dunque

$$y_1 = v_R, \quad y_2 = i_L$$

ma riferendosi al modello ISU

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1, x_2, u) = v_R = v_C = x_2 \\ y_2 &= g_2(x_1, x_2, u) = i_L = x_1 \end{aligned}$$

Si vuole ora classificare la ISU, si verifica la linearità, tutte le funzioni f e g sono lineari nello stato e negli ingressi, di conseguenza il sistema è lineare, è anche tempo invariante dato che i parametri del sistema sono costanti nel tempo.

Si afferma ora che il sistema è strettamente proprio, ossia nell'espressione della g non compare l'ingresso u .

Si riscrive il sistema in forma compatta utilizzando la notazione 2.6 ponendo

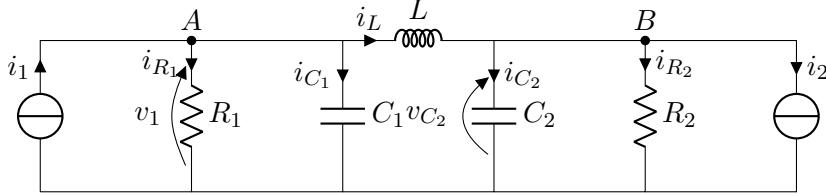
$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad u = (u), \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ n &= 2 \quad m = 1 \quad p = 2 \end{aligned}$$

dunque

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \end{cases} \quad (2.7)$$

2.3.2 Esempio rete RLC 2

Si analizza il seguente circuito



Applicando le leggi di Kirchhoff

$$A : i_1 = i_{R_1} + i_{C_1} + i_L$$

$$B : i_L = i_{C_2} + i_{R_2} + i_2$$

$$M : v_1 = v_L + v_2$$

Sono presenti più variabili che equazioni, si utilizzano le equazioni caratteristiche dei bipoli per ridurre il sistema, sviluppando le precedenti si ottiene:

$$A : = \frac{v_1}{R_1} + C_1 \dot{v}_1 + i_L$$

$$B : = C_2 \dot{v}_2 + \frac{v_2}{R_2} + i_2$$

$$M : = v_1 = v_2 + v_2 = L \ddot{i}_L + v_2$$

Ora si indicano le variabili presenti nelle espressioni appena ricavate e vanno classificate tra causa ed effetto, contando il massimo ordine di differenziazione di ciascuna:

$$\begin{array}{ccccc} i_1 & i_2 & v_1 & v_2 & i_L \\ (0) & (0) & (1) & (1) & (1) \\ u_1 & u_2 & x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$$

Le prime due variabili saranno le cause, le restanti le uscite o gli effetti.

L'ordine del sistema (n) è pari alla somma degli ordini di differenziazione delle variabili non di ingresso, ossia $1 + 1 + 1 = 3$

Vanno scelte le variabili di stato, in questo caso la scelta è obbligata dato che sono tutte variabili differenziate al primo ordine, quindi

$$x_1 = v_1, \quad x_2 = v_2, \quad x_3 = i_L$$

Si devono dunque riscrivere le equazioni nella forma ISU isolando le variabili di stato dalle equazioni del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 = \dot{v}_1 &= \frac{1}{C_1} i_1 - \frac{1}{R_1 C_1} v_1 - \frac{1}{C_1} i_L &= -\frac{1}{R_1 C_1} x_1 - \frac{1}{C_1} x_3 + \frac{1}{C_1} u_1 &= f_1(x, u, t) \\ \dot{x}_2 = \dot{v}_2 &= \frac{1}{C_2} i_L - \frac{1}{R_2 C_2} v_2 - \frac{1}{C_2} i_2 &= -\frac{1}{R_2 C_2} x_2 + \frac{1}{C_2} x_3 - \frac{1}{C_2} u_2 &= f_2(x, u, t) \\ \dot{x}_3 = \dot{i}_L &= \frac{1}{L} v_1 - \frac{1}{L} v_L &= \frac{1}{L} x_1 - \frac{1}{L} x_2 &= f_3(x, u, t)\end{aligned}$$

Si sceglie (arbitrariamente) come uscita la tensione v_1 e la corrente i_{C_1} dunque

$$\begin{aligned}y_1 = v_1 &= x_1 &= g_1(x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, t) \\ y_2 = i_{C_1} = C_1 \dot{v}_1 &= C_1 \dot{x}_1 = C_1 f_1 &= -\frac{1}{R_1} x_1 - x_3 + u_1 &= g_2(x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, t)\end{aligned}$$

Per caratterizzare il sistema si verifica che tutte le equazioni sono lineari e i coefficienti sono tempo-invarianti, inoltre non è strettamente proprio dato la dipendenza diretta della variabile y_2 da u_1 di conseguenza il sistema è lineare-tempo-invariante-causale (LTIC). La causalità dipende dunque dalle uscite richieste.

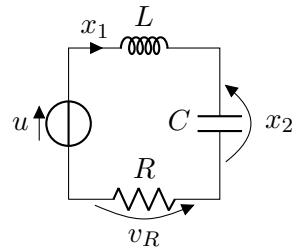
Si definiscono le variabili vettoriali al fine di riscrivere l'intero sistema in forma matriciale

$$\begin{aligned}x &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & u &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} & y &= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ \dot{x} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u & & & &= Ax + Bu \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u & & & &= Cx + Du\end{aligned}$$

Una possibile scelta immediata delle variabili di stato è quella delle tensioni ai capi delle capacità e le correnti attraverso le induttanze, premesso che siano quelle equivalenti nel caso in cui siano presenti induttanze in serie o capacità in parallelo. Un'altra possibile scelta di variabili di stato è quella che permette di descrivere lo stato energetico del sistema.

Esempio RLC con definizione parametri ISU

Si vuole risolvere una rete RLC serie utilizzando direttamente le variabili in formato ISU.

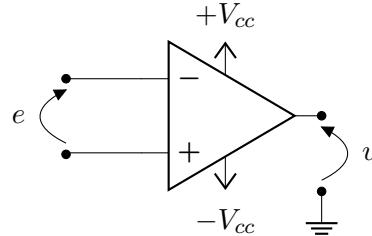


Il sistema di equazioni sarà

$$\begin{cases} u = L\dot{x}_1 + x_2 + Rx_1 \\ x_1 = C\dot{x}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 \end{cases}$$

2.3.3 Amplificatore operazionale

Si introduce il modello dell'amplificatore operazionale, rappresentato da un triangolo con tre morsetti, due in ingresso ed uno in uscita, quello con il segno $-$ viene detto invertente, quello con il segno $+$ è non invertente. Solitamente sono anche indicati i morsetti di alimentazione.



L'equazione caratteristica è

$$v = -Ae$$

Solitamente il valore A è molto grande, anche 1×10^6 così come l'impedenza d'ingresso tra i morsetti $+$ e $-$.

Dato un segnale in ingresso dunque, questo verrà restituito in uscita invertito ed amplificato. Questa condizione è verificata se si suppone che la v è compresa tra i valori $[-V_{cc}, +V_{cc}]$ di alimentazione. In caso contrario l'uscita verrebbe "tagliata" e ci sarebbe un comportamento non lineare, ipotesi di lavoro sempre evitata in questo corso.

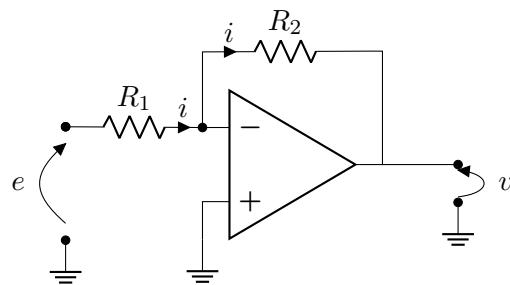
Di conseguenza il segnale d'ingresso dovrebbe essere di valori pari a v/A , valori bassissimi, si può ritenere dunque che la caduta di tensione all'ingresso sarà prossima a 0 V, è quindi come se l'ingresso fosse un corto circuito (anche se non lo è).

L'impedenza d'ingresso, essendo di ordine elevato, implica che anche la corrente nello stadio d'ingresso sia prossima a 0, quindi si può modellare come un circuito aperto.

In conclusione lo stadio d'ingresso si comporta sia da circuito chiuso che circuito aperto e viene chiamato **corto circuito virtuale**.

Lo stadio d'uscita è confrontabile con un generatore ideale di tensione.

Si consideri il seguente circuito:



Si ricorda che la tensione ai capi dell'ingresso dell'amplificatore è nulla e la corrente in ingresso lo è altrettanto.

Se si considera la maglia composta dal morsetto di uscita, la resistenza R_2 e il morsetto di ingresso si ottiene che la tensione ai capi di R_2 è pari a v ossia $v = -R_2 i$.

Analogamente allo stadio d'ingresso, la tensione ai capi di R_1 è pari ad e ossia $e = R_1 i$. Le due resistenze sono dunque attraversate dalla stessa corrente i .

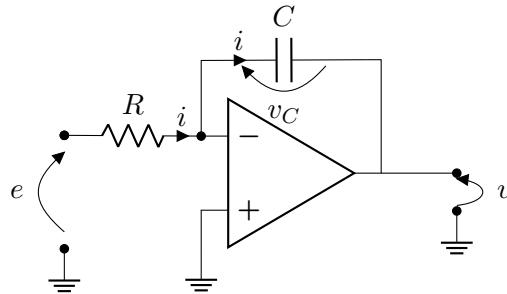
Sostituendo le due equazioni precedenti si ottiene la tensione in uscita in funzione di quella in ingresso

$$v = -R_2 i = -\frac{R_2}{R_1} e \quad (2.8)$$

Si può variare dunque il guadagno dell'amplificatore variando opportunamente il rapporto tra le resistenze. Collegando un secondo amplificatore in cascata con guadagno -1 si ottiene una tensione finale concorde a quella in ingresso. Questo secondo elemento viene definito *buffer*. Il *buffer* è molto utile per disaccoppiare i circuiti.

2.3.4 Circuito integratore

Si analizza il seguente circuito



A differenza del circuito precedente il sistema è dinamico, se ne ricava di seguito la ISU.

Equazioni caratteristiche

$$\begin{cases} v = -v_C \\ i = \frac{e}{R} = C \dot{v}_C \end{cases} \Rightarrow e = -RC \dot{v} \quad (2.9)$$

Si analizzano le variabili seguendo la regola di causalità

$$(0) \quad \begin{matrix} e & v \\ u & x \end{matrix} \quad (1)$$

L'ordine del sistema è unitario dunque il modello ISU non sarà un'equazione matriciale

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{v} = -\frac{1}{RC} u \\ y = v = x \end{cases}$$

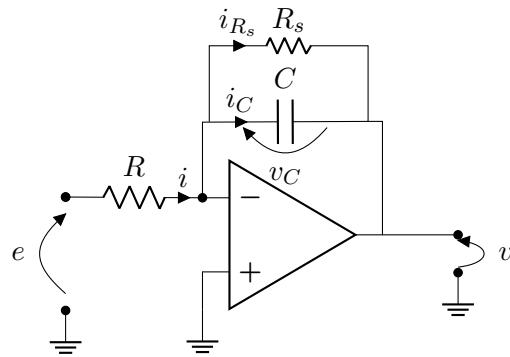
Il sistema è lineare tempo invariante strettamente causale (o proprio LTISP). Se si integra la 2.9 si ottiene

$$v(t) = v(t_0) - \frac{1}{RC} \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau$$

Ossia l'uscita, a meno di un fattore di guadagno è l'integrale dell'ingresso, si è realizzato un circuito integratore ideale.

Circuito integratore reale

Si inserisce in parallelo alla capacità del circuito precedente una resistenza di scarica parassita R_s .



Le equazioni del sistema saranno

$$\begin{cases} v = -v_C \\ i = \frac{e}{R} = C\dot{v}_C + \frac{v_C}{R_s} \end{cases} \Rightarrow e = -RC\dot{v} - \frac{R}{R_s}v$$

Si riscrivono le variabili

$$\begin{matrix} e & v \\ (0) & (1) \\ u & x \end{matrix}$$

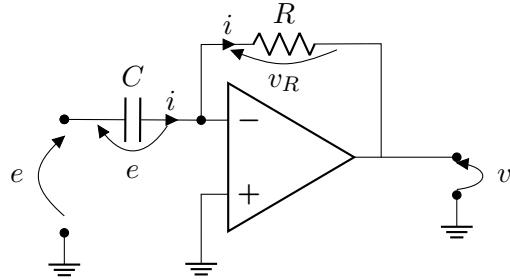
la ISU

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{R_s C}x - \frac{1}{RC}e \\ y = v = x \end{cases}$$

È presente un termine aggiuntivo rispetto al precedente sistema. Se R_s fosse una vera capacità parassita, ossia molto più grande di R , si trascurerebbe il primo termine dell'equazione ritornando al caso precedente; in caso contrario si è in presenza di un integratore *reale*, governato ossia da una costante di tempo che ne indica la velocità di scarica.

2.3.5 Circuito derivatore

Si invertano in questo circuito la posizione del condensatore e della resistenza, si suppone inoltre di alimentare il circuito con un generatore ideale di tensione.



Si scrivono le equazioni

$$v = -Ri = -RC\dot{e}$$

il circuito è un derivatore ideale. In questo caso ideale, il sistema è non causale, dovrebbe fornire in uscita la derivata del segnale in ingresso.

Sviluppando l'analisi

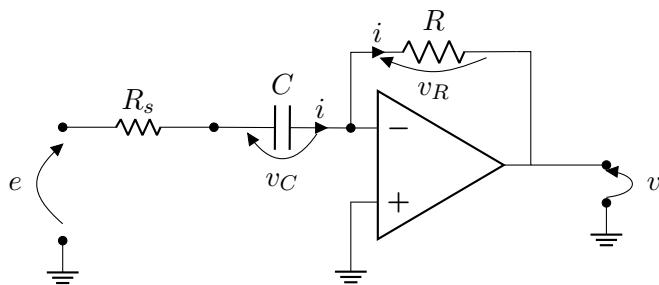
$$\dot{e} = -\frac{1}{RC}v$$

$$(1) \quad (0)$$

seguendo le regole precedenti si direbbe che la variabile causa è la v mentre l'effetto è la e , ciò è in contrasto con l'evidenza fisica del sistema.

La regola di Cauchy non vale per i sistemi non causali. Si sta affermando che il generatore possa pilotare istantaneamente una capacità.

Per modellare un sistema analogo va inserita nel circuito una resistenza R_s in serie al generatore di tensione (o analogamente alla porta d'ingresso).



Le equazioni del sistema:

$$\begin{cases} v = -Ri = -RC\dot{v}_C \\ e = R_s i + v_C \Rightarrow i = \frac{e - v_C}{R_s} \end{cases}$$

Ricavando la i dalla seconda e sostituendo nella prima

$$\dot{v}_C = \frac{1}{K_C} \left(\frac{K}{R_s} (e - v_C) \right) = \frac{e - v_C}{R_s C}$$

Si analizzano le variabili

$$\begin{array}{ll} e & v_C \\ (0) & (1) \\ u & x \end{array}$$

dunque l'equazione del sistema del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{u}{R_s C} - \frac{x}{R_s C} \\ y = v = -R_i = \frac{R}{R_s} u - \frac{r}{R_s} x \end{cases}$$

Il sistema è dunque lineare tempo invariante causale ma non strettamente causale.

2.4 Sistemi meccanici

Si vogliono analizzare gli elementi principali dei sistemi meccanici.

Moti lineari

Si considerano inizialmente i sistemi governati da moti lineari. Gli elementi principali sono:

- Elemento **massa**: m rappresentato solitamente con un cubetto o una sfera, se sulla massa sono applicate n forze f_n , questa potrà muoversi solo lungo una direzione nello spazio e si indica con s la variabile di spostamento. Per convenzione la forza è positiva se concorde al verso positivo degli spostamenti. L'oggetto subirà un'accelerazione pari a

$$m\ddot{s} = \sum_n f_n$$

- Elemento **molla**: k è il coefficiente elastico della molla, determina la forza che la molla esplica proporzionale alla sua deformazione rispetto alla condizione di riposo e in verso opposto (forza di richiamo). I due estremi della molla devono essere indicati nel sistema di riferimento, dunque

$$f = k(s_2 - s_1)$$

Si assume con $s_2 = s_1$ la condizione di riposo. Se la molla viene estesa, la differenza $s_2 - s_1$ è positiva e la molla esplica una forza verso il suo interno, viceversa se viene compressa $s_2 - s_1$ è negativo e la forza è verso l'esterno; ciò è vero per tutte le molle reali che hanno coefficiente elastico positivo.

- Elemento **smorzatore viscoso**: b è il coefficiente di attrito viscoso, anch'esso esplica una forza positiva verso il suo interno e si considerano le velocità \dot{s}_1 e \dot{s}_2 dei suoi estremi. La forza esplicata dallo smorzatore è dunque proporzionale alla velocità relativa dei suoi estremi

$$f = b(\dot{s}_2 - \dot{s}_1)$$

Anche in questo caso la forza è sempre opposta al verso di movimento per gli smorzatori reali con b positiva.

Se il sistema ha più gradi di libertà deve essere fornita un'equazione per ogni possibile direzione.

Moti rotazionali

Esiste una perfetta simmetria tra le due tipologie di moti, a patto di fornire le giuste equivalenze

- Elemento **inerzia**: definito un asse, si definisce con J il parametro che determina l'attitudine del corpo a generare accelerazioni angolari. Si applicano una serie di n coppie τ_n all'oggetto, positive se concordi all'angolo θ ; il corpo si metterà in rotazione con una certa inerzia

$$J\ddot{\theta} = \sum_n \tau_n$$

θ è l'angolo di cui è ruotato l'asse, dunque $\ddot{\theta}$ è l'accelerazione angolare.

- Elemento **molla rotazionale**: analogamente alla molla lineare, la molla rotazionale esplica una forza proporzionale alla rotazione relativa dei suoi due assi. θ_1 e θ_2 sono le posizioni dei due assi, la costante della molla è ancora k , la coppia di richiamo τ si pone concorde a θ_1 e discorde a θ_2 dunque:

$$\tau = k(\theta_2 - \theta_1)$$

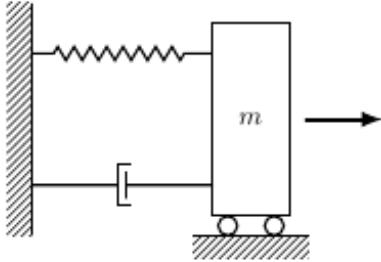
- Elemento **smorzatore viscoso rotazionale**: sono presenti due assi e si indica con $\dot{\theta}_1$ la velocità angolare del primo asse e $\dot{\theta}_2$ quella del secondo. La coppia τ sarà concorde alla velocità $\dot{\theta}_1$ e discorde a $\dot{\theta}_2$. Se b è il coefficiente viscoso allora la coppia sarà

$$\tau = b(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)$$

È importante mantenere la coerenza nelle convenzioni.

2.4.1 Esempio sistema Massa-Molla-Smorzatore

Si suppone di avere un carrello di massa m al quale viene applicata una forza f . Il carrello è vincolato alla parete mediante una molla di costante k e uno smorzatore di coefficiente b .



Si vuole costruire il modello ISU dell'oggetto. Il corpo ha un solo grado di libertà, si fissa un sistema di riferimento. Si indica con s la posizione dell'oggetto.

Esistono due modalità principali per scrivere le equazioni di un sistema meccanico, l'approccio Newtoniano e l'approccio Lagrangiano, si usa in seguito quello Newtoniano.

Si applica il secondo principio delle dinamiche, ossia le formule precedentemente analizzate.

$$m\ddot{s} = f - ks - b\dot{s}$$

$$(s_1, \dot{s}_1 = 0)$$

Il numero di equazioni da scrivere è pari al numero di masse moltiplicate per i rispettivi gradi di libertà.

Le variabili del sistema sono

$$\begin{array}{ll} f & s \\ (0) & (2) \\ f & s & \dot{s} \\ u & x_1 & x_2 \end{array}$$

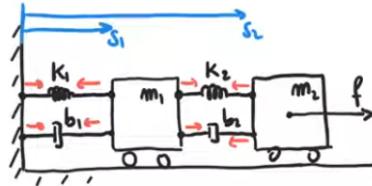
Il sistema è del secondo ordine.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{s} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{s} = \frac{1}{m}f - \frac{k}{m}s - \frac{b}{m}\dot{s} = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \end{cases}$$

Le uscite saranno assegnate arbitrariamente, il sistema è lineare tempo invariante e strettamente causale.

2.4.2 Esempio Massa-Molla-Smorzatore con due masse

Si vuole analizzare il modello ISU del seguente sistema composto da due masse disposte nel seguente modo:



Si individua il sistema di riferimento e si indica con s_1 la posizione della prima massa ed s_2 la seconda. Esiste un'unica direzione di movimento e sono presenti due masse, dunque si scriveranno due equazioni.

$$\begin{cases} m_1 \ddot{s}_1 = k_2(s_2 - s_1) + b_2(\dot{s}_2 - \dot{s}_1) - k_1 s_1 - b_1 \dot{s}_1 \\ m_2 \ddot{s}_2 = f - k_2(s_2 - s_1) - b_2(\dot{s}_2 - \dot{s}_1) \end{cases}$$

Si analizzano le variabili del sistema

$$\begin{array}{lllll} f & s_1 & \dot{s}_1 & s_2 & \dot{s}_2 \\ (0) & (2) & & (2) & \\ u & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$

L'ordine del sistema è dunque quattro ($n = 4$), dato che ogni variabile non di ingresso viene differenziata due volte.

Si riscrivono le equazioni in forma ISU

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \dot{s}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{s}_1 = \frac{k_2}{m_1}(x_3 - x_1) + \frac{b_2}{m_1}(x_4 - x_2) - \frac{k_1}{m_1}x_1 - \frac{b_1}{m_1}x_2 \\ \dot{x}_3 = \dot{s}_2 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \ddot{s}_2 = \frac{1}{m_2}u - \frac{k_2}{m_2}(x_3 - x_1) - \frac{b_2}{m_2}(x_4 - x_2) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Uscite assegnate} \\ y_1 = s_1 = x_1 \\ y_2 = s_2 = x_3 \end{array}$$

Il sistema è lineare tempo invariante strettamente causale, si può porre il sistema in forma matriciale compatta

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{ISU} = \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & -\frac{b_1+b_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{b_2}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{b_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{b_2}{m_2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

2.4.3 Moto rotazionale

Si considera un primo asse di movimento caratterizzato da una certa inerzia J_1 , connesso ad un secondo asse di momento J_2 mediante un elemento elastico di costante k .

Si suppone che il primo asse subisca un effetto di attrito viscoso mediante un coefficiente b_1 mentre il secondo subisce un attrito con coefficiente b_2 .

Si suppone di applicare una coppia motrice τ_m al primo asse ed una coppia resistente τ_r in verso opposto al secondo asse.



Questo schema può rappresentare un esempio di accoppiamento non perfettamente rigido tra l'asse di un motore ed un montacarichi (o un ascensore). Si suppone il verso positivo degli spostamenti quello concorde con la coppia τ_1 .

Si analizzano le equazioni, ne serviranno due, data la presenza di due inerzie.

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\theta}_1 = \tau_m + k(\theta_2 - \theta_1) - b_1 \dot{\theta}_1 \\ J_2 \ddot{\theta}_2 = -k(\theta_2 - \theta_1) + b_2(-\dot{\theta}_2) - \tau_r \end{cases}$$

Si sostituiscono le variabili

$$\begin{array}{cccccc} \tau_m & \tau_3 & \theta_1 & \dot{\theta}_1 & \theta_2 & \dot{\theta}_2 \\ (0) & (0) & (2) & & (2) & \\ u_1 & u_2 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$

Si scrive il sistema ISU di ordine quattro

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\theta}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{\theta}_1 = \frac{k}{J_1}(x_3 - x_1) - \frac{b_1}{J_1}x_2 \\ \dot{x}_3 = \dot{\theta}_2 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \dot{\theta}_2 = -\frac{k}{J_2}(x_3 - x_1) - \frac{b_2}{J_2}x_4 - \frac{1}{J_2}u_2 \\ \text{Uscite} \\ y_1 = \dot{\theta}_1 = x_2 \\ y_2 = \dot{\theta}_2 = x_4 \end{cases}$$

Il sistema è lineare tempo invariante e strettamente proprio. Il legame ingresso-uscita potrebbe essere governato da un sistema di ordine minore, scegliendo diversamente le variabili di stato.

Ad esempio

$$Z_1 = \dot{\theta}_1, \quad Z_2 = \dot{\theta}_2, \quad Z_3 = \theta_1 - \theta_2$$

Se è possibile scrivere la ISU in forma canonica allora la scelta delle variabili di stato è corretta. L'ordine del sistema in questo caso è diverso ($n = 3$).

$$\begin{cases} \dot{Z}_1 = \frac{k}{J_1}(-Z_3) - \frac{b_1}{J_1}Z_1 + \frac{1}{J_1}u_1 \\ \dot{Z}_2 = \ddot{\theta}_2 = -\frac{k}{J_2}(-Z_3) - \frac{b_2}{J_2}Z_2 - \frac{1}{J_2}u_2 \\ \dot{Z}_3 = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 = Z_1 - Z_2 \\ \text{Uscite} \\ y_1 = \dot{\theta}_1 = Z_1 \\ y_2 = \dot{\theta}_2 = Z_2 \end{cases}$$

Quella ottenuta è ancora una ISU valida con lo stesso legame ingresso-uscita, in questo caso si è ottenuto un grado del sistema minore.

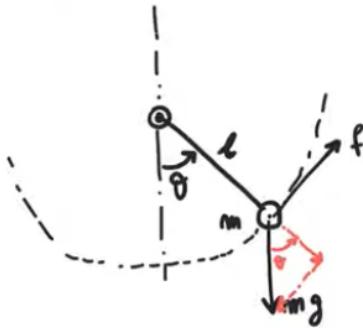
Se si fosse scelta come uscita la posizione (θ_1, θ_2) e non la velocità, non si sarebbe potuto utilizzare la ISU in questa forma dato che non si sarebbero potute esprimere le uscite in funzione delle variabili di stato.

Si vede dal sistema precedente che le variabili x_3 ed x_1 compaiono sempre “insieme” e la reazione elastica della molla k dipende dalla differenza tra queste due e non dai loro valori assoluti.

Il sistema del terzo ordine, computazionalmente più semplice, perde l'informazione sulle posizioni assolute dei due assi.

2.4.4 Pendolo rigido

Il sistema è composto da un'asta rigida di lunghezza L incernierata in un punto, all'altra estremità è posta una massa m ; Si considera con θ l'angolo dell'asta rispetto all'asse verticale.



Si applica alla massa una forza f tangente alla traiettoria della stessa, sul pendolo agisce inoltre la forza peso mg con g l'accelerazione di gravità nel punto in cui si trova il pendolo.

Il momento di inerzia J di un pendolo di massa m e lunghezza L è pari a mL^2 . Le coppie τ_n sono considerate positive se concordi all'asse uscente dal piano di disegno (regola della mano destra). La forza peso agisce sempre in direzione costante verso il basso, va scomposta lungo due componenti e calcolare la coppia utilizzando la componente tangente alla traiettoria dunque $lmg \sin \theta$.

$$mL^2\ddot{\theta} = \sum_n \tau_n = Lf - Lmg \sin \theta$$

Analisi delle variabili

$$\begin{array}{ccc} f & \theta & \dot{\theta} \\ (0) & (2) & \\ u & x_1 & x_2 \end{array}$$

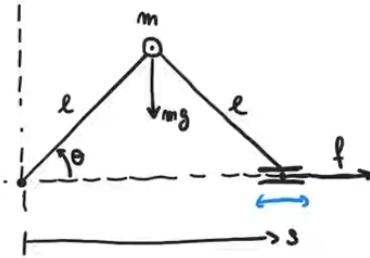
Le due equazioni del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{\theta} = \frac{1}{mL}u - \frac{g}{L} \sin(x_1) \\ y = \theta = x_1 \end{cases} \quad (2.10)$$

Quello rappresentato è un sistema non lineare (a causa della funzione seno), tempo invariante, strettamente proprio. Non è dunque esprimibile in forma matriciale.

2.4.5 Analisi con variabile lagrangiana

Si considera una cerniera nell'origine degli assi, alla quale è collegata un'asta di lunghezza L alla quale è collegata una massa m , proprio come un pendolo. Sulla stessa massa è incernierata un'altra asta di lunghezza L collegata ad un pattino vincolato a muoversi lungo un binario orizzontale.



Il sistema rappresentato trasforma un movimento lineare in angolare e viceversa, si fissa dunque un asse di riferimento lineare s ed uno angolare θ . La massa subisce inoltre la forza di gravità mg , si applica invece una forza f al pattino.

Costruzione del modello ISU con approccio **lagrangiano**: è necessario determinare le variabili che determinano univocamente lo stato del sistema, ossia trovare un insieme minimo di variabili che se vincolate eliminano tutti i gradi di libertà del sistema.

Una possibile variabile lagrangiana potrebbe essere θ oppure s , scelta la stessa si può applicare il principio di conservazione dell'energia:

La variazione totale dell'energia immagazzinata nel sistema è pari al lavoro compiuto dalle forze esterne sul sistema stesso.

La funzione energia (meccanica) è data dalla somma dell'energia cinetica e quella potenziale:

$$W = W_C + W_P = \frac{1}{2}m(L\dot{\theta})^2 + mgL \sin(\theta) \quad (2.11)$$

Il lavoro compiuto dalle forze esterne:

$$\mathcal{L} = \int_0^S f(s)ds$$

Considerando le variazioni elementari di energia

$$dW = d\mathcal{L}$$

Differenziando la 2.11

$$\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}d\dot{\theta} + mgL \cos(\theta)d\theta = f ds$$

la posizione s è però pari a $2L \cos(\theta)$, quindi lo spostamento infinitesimo

$$ds = 2L(-\sin(\theta))d\theta$$

Sostituendo nella 2.4.5 si ottiene

$$\frac{1}{2}mL^22\dot{\theta}d\dot{\theta} + mgL \cos(\theta)d\theta = -2Lf \sin(\theta)d\theta$$

semplificando ulteriormente

$$ml\dot{\theta}d\dot{\theta} + mg \cos(\theta)d\theta = -2f \sin(\theta)d\theta$$

Si analizza il primo termine dell'equazione

$$\dot{\theta}d\dot{\theta} = \dot{\theta}d\dot{\theta} \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot d\dot{\theta} \cdot \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{dt}d\theta = \ddot{\theta}d\theta$$

Sostituendo nella precedente

$$mL\ddot{\theta}d\theta + mg \cos(\theta)d\theta = -2f \sin(\theta)d\theta$$

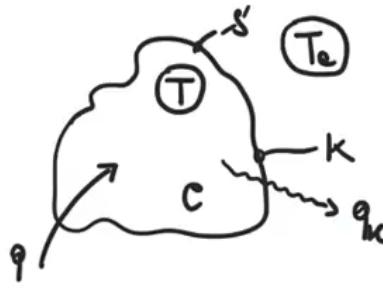
Ottenuta l'equazione differenziale si procede come consuetudine allo studio del sistema

$$\begin{array}{ccc} f & \theta & \dot{\theta} \\ (0) & (2) & \\ u & x_1 & x_2 \end{array}$$

L'equazione del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_1 \\ \dot{x}_2 = \ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \cos(x_1) - \frac{2}{mL} u \sin(x_1) \\ y = s = 2L \cos(\theta) = 2L \cos(x_1) \end{cases}$$

Il sistema è non lineare tempo invariante e strettamente proprio. In alcune condizioni di funzionamento anche i sistemi non lineari possono essere approssimati a sistemi lineari (in realtà tutti i sistemi sono non lineari e la loro modellazione implica già un'approssimazione della realtà fisica).



2.5 Sistemi termici

Al fine di descrivere i sistemi termici è fondamentale conoscere l'equazione del bilancio termico.

Si considera un certo volume di superficie S caratterizzato da un unico parametro: la *capacità termica*; la capacità termica di un corpo è l'attitudine del corpo a modificare la sua temperatura quando questo viene investito da una certa potenza termica.

È inoltre esprimibile come il rapporto tra il calore entrante nel corpo e la variazione di temperatura che esso subisce, è considerata un'inerzia termica. Il volume può integrare con l'ambiente che lo circonda mediante la superficie S , quest'ultima consente di realizzare gli scambi di potenza termica.

Si suppone inoltre che il corpo abbia una temperatura uniforme T , costante in ogni suo punto, l'ambiente esterno invece sarà ad una temperatura $T_a \neq T$.

La differenza tra le due temperature genererà dei flussi di potenza termica dal corpo (o ambiente) più caldo a quello più freddo. La quantità di energia termica che attraversa la superficie dipenderà dalla superficie stessa e in particolare dalla sua *resistenza termica*.

Si indica con K il coefficiente di scambio termico che la superficie consente di sviluppare. Il flusso termico q_K è definito per convenzione positivo se uscente dal corpo, dunque

$$q_K = K(T - T_a)$$

Si riportano le equazioni di bilancio termico che interessano il volume se questo è sottoposto ad n flussi termici q_n ed i superfici di scambio termico con coefficiente di scambio K_i e con ambienti a temperature T_i (diverse o meno fra loro):

$$CT\dot{T} = \sum_n q_n - \sum_i K_i(T - T_i) \quad (2.12)$$

Si riporta il modello ISU del sistema in esame con una sola potenza termica in ingresso ed un solo scambio termico con un unico ambiente a temperatura T_a

$$CT\dot{T} = q - K(T - T_a)$$

variabili:

q	T_a	T
(0)	(0)	(1)
u_1	u_2	x

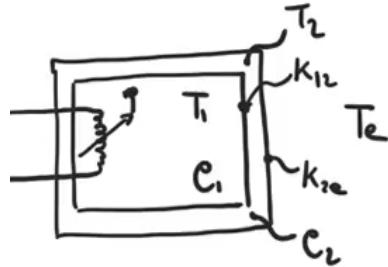
Attenzione, T_a è a tutti gli effetti una variabile di ingresso, anche se resta costante, si parla di ingresso non manipolabile

Equazioni del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{T} = \frac{1}{C} u_1 - K(x - u_2) \\ y = T = x \end{cases}$$

2.5.1 Esempio forno elettrico

Dato un volume chiuso si indica con C_1 la sua capacità termica e T_1 la sua temperatura. Si suppone che sia presente attorno al volume una parete con capacità termica C_2 ed una temperatura supposta uniforme T_2 , l'ambiente esterno è alla temperatura T_a . All'interno del volume è presente una resistenza elettrica che fornisce una certa potenza termica q .



Attraverso la parete, la temperatura è in realtà un gradiente termico e non uniforme. Si indicano con K_{12} e K_{2a} i coefficienti di scambio termico tra le rispettive superfici.

Per ogni volume con una certa capacità termica, va scritta un'equazione del bilancio

$$\begin{cases} C_1 \dot{T}_1 = q - K_{12}(T_1 - T_2) \\ C_2 \dot{T}_2 = -K_{12}(T_2 - T_1) - K_{2a}(T_2 - T_a) \end{cases}$$

Si nota come il flusso termico $K_{12}(T_1 - T_2)$ uscente dal primo volume sia entrante nel secondo. Utilizzando sempre la stessa convenzione sui versi non si commettono errori e non bisogna riflettere sui versi effettivo dei flussi termici.

Variabili:

q	T_a	T_1	T_2
(0)	(0)	(1)	(1)
u_1	u_2	x_1	x_2

Il sistema è di ordine due.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{T}_1 = \frac{1}{C_1} u_1 - K_{12}(x_1 - x_2) \\ \dot{x}_2 = \dot{T}_2 = -\frac{K_{12}}{C_2}(x_2 - x_1) - \frac{K_{2a}}{C_2}(x_2 - u_2) \\ y_1 = T_1 = x_1 \\ y_2 = T_2 = x_2 \end{cases}$$

Se si indica con v la tensione ai capi della resistenza R , la potenza termica si sarebbe potuta esprimere come $q = \frac{v^2}{R}$ e se si fosse scelta v come ingresso si avrebbe avuto un termine al quadrato

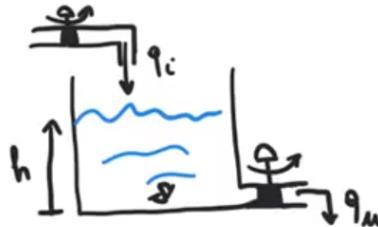
$$\dot{x}_1 = \dot{T}_1 = \frac{1}{C_1 R} u_1^2 - K_{12}(x_1 - x_2) \dots$$

Lo stesso sistema, con variabili diverse sarebbe diventato non lineare.

2.6 Sistemi idraulici

Un sistema idraulico è modellabile come un serbatoio in grado di contenere un certo liquido. Si suppone che ci sia la possibilità di aggiungere una certa quantità di liquido q_i .

Si suppone che la sezione del serbatoio sia regolare ed h l'altezza del liquido nel serbatoio. Si suppone che sia presente una valvola in uscita in grado di prelevare un flusso di liquido in uscita q_u , analogamente con una valvola in ingresso.



Il flusso di un liquido viene chiamato **portata** e ci si può riferire ad una portata *massica* (w) [kg/s] o *volumetrica* (q) m^3/s , con la seguente relazione che le lega

$$w = \rho q$$

dove ρ è la *densità* del liquido.

È fondamentale considerare i liquidi incomprimibili, ossia che la sua densità resti costante affinché si possa sempre utilizzare l'uno o l'altro riferimento. Ci si riferirà generalmente alla portata volumetrica.

La quantità di massa nel serbatoio è pari alla differenza di massa entrante e uscente, supposta la densità costante invece si può quindi ragionare sui volumi e le j portate entranti e k portate uscenti ossia:

$$\dot{V} = \frac{d}{dt}(S \cdot h) = S \dot{h} = \sum_j q_i - \sum_k q_u$$

con \dot{V} la variazione di volume e S la sezione del serbatoio assunta costante (altrimenti $S \dot{h} + \dot{S}h$).

Per il sistema in esame con un ingresso ed un'uscita si ha

$$\dot{V} = q_i - q_u$$

Si suppone che la valvola in uscita sia autoregolata, la portata di un fluido attraverso una valvola dipende sia dalla sua sezione regolabile che dalla differenza di pressione a monte e a valle della stessa, funzione dell'altezza del fluido.

Un modello semplice di valvola ammette un parametro a che indica il grado di apertura della valvola ed esprime la portata con la seguente

$$q = a\sqrt{h}$$

Si scrive il modello ISU, l'equazione è già stata ricavata, si procede con le variabili:

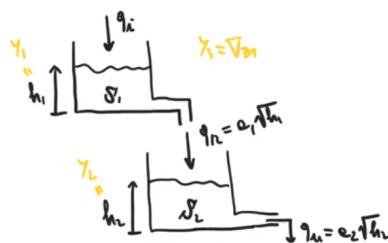
$$\begin{array}{ll} q_i & h \\ (0) & (1) \\ u & x \end{array}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{h} = \frac{1}{S}u - \frac{a}{S}\sqrt{x} \\ y = V = Sh = Sx \end{cases}$$

Il sistema è non lineare e strettamente proprio.

2.6.1 Sistema idraulico con due serbatoi

Si ha un sistema formato da due serbatoi in cascata con un flusso monodirezionale tra l'uscita di uno e l'ingresso dell'altro.



Si indica con h_1 l'altezza di liquido nel serbatoio di sezione S_1 ed h_2 l'altezza nel serbatoio di sezione S_2 . Le portate in uscita dai due serbatoi saranno:

$$q_{12} = a_1\sqrt{h_1}/|q_u| = a_2\sqrt{h_2}$$

Le equazioni del sistema saranno:

$$\begin{cases} S_1\dot{h}_1 = q_i - q_{12} = q_i - a_1\sqrt{h_1} \\ S_2\dot{h}_2 = q_{12} - q_u = a_1\sqrt{h_1} - a_2\sqrt{h_2} \end{cases}$$

Si analizzano le variabili

$$\begin{array}{lll} q_i & h_1 & h_2 \\ (0) & (1) & (1) \\ u & x_1 & x_2 \end{array}$$

Il sistema di ordine due in forma ISU

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{h}_1 = \frac{1}{S_1}u - \frac{a_1}{S_1}\sqrt{x_1} \\ \dot{x}_2 = \dot{h}_2 = \frac{a_1}{S_2}\sqrt{x_1} - \frac{a_2}{S_2}\sqrt{x_2} \\ y_1 = h_1 = x_1 \\ y_2 = h_2 = x_2 \\ y_3 = V_{\text{tot}} = S_1h_1 + S_2h_2 = S_1x_1 + S_2x_2 \end{cases}$$

Il sistema è non lineare strettamente proprio.

Se il legame tra la portata e l'altezza fosse lineare, il sistema diventerebbe lineare, può essere sensato linearizzare la funzione in particolari regimi di funzionamento della valvola.

2.7 Equilibrio dei sistemi

Si ricordi il modello generale di un sistema ISU presentato con la 2.3

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = g(x, u, t) \end{cases}$$

non è nota l'espressione della $x(t)$, andrebbe integrato il sistema di equazioni, non è detto che sia possibile; se la funzione f è lineare e tempo invariante è possibile integrare, se il sistema non è invece lineare non è detto che sia possibile risolverlo in forma chiusa.

Si supponga che i sistemi godano almeno della proprietà di tempo invarianza (coefficienti costanti) o di una lenta tempo varianza nei regimi operativi di analisi.

Si danno le seguenti definizioni:

- **Movimento** nello stato del sistema: Assegnato un certo ingresso ed una certa condizione iniziale, si definisce la soluzione del sistema in esame per $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t_0), \quad \tilde{u}(t) &\longrightarrow \tilde{x}(t) \quad t \geq t_0 \\ &[t_0, t] \end{aligned}$$

Tra i possibili movimenti ce ne sono alcuni di particolari interesse

- **Equilibrio:**

Dato un ingresso costante \bar{u} esiste uno stato costante \bar{x} tale per cui la funzione di transizione f calcolata sia pari a zero.

$$\bar{u} = \text{cost}, \quad \exists \bar{x} = \text{cost} \quad : \quad f(\bar{x}, \bar{u}) = 0 \Leftrightarrow \text{Equilibrio}$$

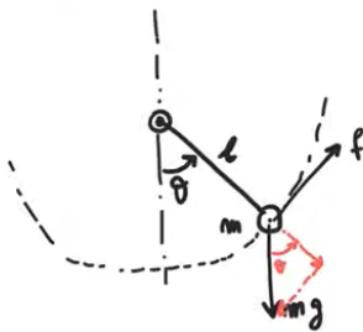
La tripletta $(\bar{u}, \bar{x}, \bar{y})$ viene definita punto di **equilibrio del sistema**.

Se la funzione di transizione è nulla allora la \dot{x} è nulla, dunque il sistema non modifica il suo stato, lo stato perdura indefinitamente nel tempo, dunque i punti di equilibrio sono movimenti costanti del sistema sottoposto ad ingressi costanti. Nella realtà nessun ingresso è mai costante.

Variando l'ingresso il sistema raggiunge un nuovo punto di equilibrio dopo un certo transitorio, la maggior parte dei sistemi studiati lavorano in stati costanti a tratti, mutano tra un punto di equilibrio e l'altro.

2.7.1 Equilibrio del pendolo

Si riprende l'esempio del pendolo rigido analizzato alla sezione 2.4.4 Il sistema ha un



punto di equilibrio? Intuitivamente il punto di equilibrio è quello a $\theta = 0$, in realtà anche $\theta = \pi$ è un punto di equilibrio, in assenza della forza f solo la forza peso agisce sul sistema e in queste due posizioni è completamente bilanciata dal vincolo dato che l'asta è rigida.

Se invece la forza f applicata è diversa da zero e pari alla componente tangente della forza peso $mg \sin(\theta)$ allora la condizione di equilibrio si troverà in un punto diverso dai precedenti, inclinato di un certo angolo θ , e sarebbe in equilibrio anche nell'angolo $\pi - \theta$ rimanendo fermo.

Il caso limite è quando l'asta diventa perfettamente orizzontale, il punto di equilibrio diventa unico, $\theta = 90^\circ$.

Se $f > mg$ il pendolo comincia a ruotare e non ci saranno più punti di equilibrio.

Si riprende il modello analitico del pendolo ricavato in 2.10

$$x_1 = \theta \quad x_2 = \dot{\theta} \quad u = f$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2 = f_1 \\ \dot{x}_2 = \ddot{\theta} = \frac{1}{mL}u - \frac{g}{L} \sin(x_1) = f_2 \\ y = \theta = x_1 \end{cases}$$

Il sistema ammette punti di equilibrio? Dalla definizione, se il sistema ammette punti di equilibrio bisogna trovare una coppia (\bar{u}, \bar{x}) tali che la funzione di transizione f sia

pari a zero.

$$(\bar{u}, \bar{x}) \Rightarrow f(\bar{u}, \bar{x}) = 0$$

Dunque si costruisce il sistema per ricavare lo stato di equilibrio

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = 0 \rightarrow \dot{\theta} = 0 \\ \frac{1}{mL}\bar{u} - \frac{g}{L} \sin(\bar{x}_1) = 0 \rightarrow \sin(\bar{x}_1) = \frac{1}{mg}\bar{u} \end{cases}$$

La velocità deve essere nulla e la soluzione è indipendente dalla lunghezza dell'asta.

Analizzando la seconda equazione si ha che la funzione seno è limitata tra $[-1, 1]$ dunque

$$\frac{|\bar{u}|}{mg} \leq 1 \iff |\bar{u}| \leq mg$$

Le equazioni confermano quanto intuito precedentemente, la forza peso mg deve essere maggiore o uguale della forza f applicata dall'esterno.

Si studiano i seguenti casi

$$|\bar{u}| = mg \begin{cases} \bar{u} = mg \Rightarrow \sin(\bar{x}_1) = 1 \Rightarrow \bar{x}_1 = \frac{\pi}{2} \\ \bar{u} = -mg \Rightarrow \sin(\bar{x}_1) = -1 \Rightarrow \bar{x}_1 = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$|\bar{u}| \leq mg \begin{cases} \bar{u} < mg \Rightarrow \bar{x}_1 = \left\langle \sin^{-1}\left(\frac{\pi}{mg}\right), \pi - \sin^{-1}\left(\frac{\pi}{mg}\right) \right\rangle \end{cases}$$

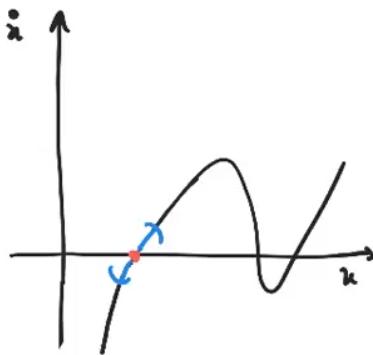
Si è quantificato numericamente il valore degli angoli di equilibrio del sistema.

2.8 Linearizzazione dei sistemi

In mancanza della condizione di tempo invarianza può variare l'analisi del sistema, verranno analizzati sistemi con discontinuità ma non sistemi che variano con continuità nel tempo i loro parametri.

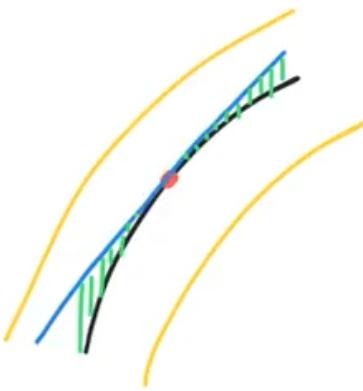
I sistemi non lineari sono composti da variabili e da parametri, i parametri non sono mai forniti con un'accuratezza infinita, di conseguenza anche i risultati in uscita avranno una certa incertezza.

Si suppone di modellare un sistema monodimensionale non lineare avendo fissato una $\bar{u}(t)$ e si vuole mostrare l'andamento di \dot{x} in funzione di x , ricercando i vari punti di equilibrio.



Si suppone che il sistema si trovi nel punto di lavoro A indicato sul grafico, nella realtà si troverà nell'intorno di quel punto oscillando in un certo intervallo in funzione dei disturbi interni ed esterni al sistema.

Si suppone di ingrandire la curva nell'intorno del punto di lavoro



Si considera una retta tangente alla curva nel punto di equilibrio, una retta è sinonimo di un modello lineare, l'errore aggiuntivo commesso può ritenersi trascurabile se minore dell'accuratezza fornita dal modello sesso.

Il vantaggio ottenuto da tale approssimazione è la possibilità di risolvere analiticamente un sistema lineare piuttosto che cercare un teorema in grado di risolvere quel particolare sistema non lineare.

Se si sposta di molto il punto di lavoro del sistema è necessario ricalcolare la linearizzazione del sistema, non potendo più utilizzare la retta precedente. Si ottiene ancora una buona approssimazione.

Ha senso linearizzare solo i punti di equilibrio, altrimenti il sistema non si troverebbe nell'intorno di un punto, si potrebbe estendere il concetto anche a punti di equilibrio dinamici.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = g(x, u) \end{cases}$$

Si ipotizza che le funzioni f e g siano sufficientemente regolari, ossia che esista almeno il differenziale primo.

Si suppone inoltre che il sistema sottoposto ad un ingresso costante \bar{u} si trovi in un punto di equilibrio \bar{x} a cui corrisponde un'uscita di equilibrio \bar{y} , ossia

$$(\bar{u}, \bar{x}, \bar{y}) \text{ punto di equilibrio}$$

Si applica la seguente posizione

$$x(t) = \bar{x} + \delta x(t)$$

dove $\delta x(t)$ è l'errore della traiettoria rispetto al punto di lavoro, ovvero lo spessore definito prima nell'intorno del punto.

Analogamente per l'ingresso $u(t)$

$$u(t) = \bar{u} + \delta u(t)$$

Gli ingressi si suddividono in *manipolabili* e *non manipolabili* dunque anche gli ingressi sono affetti da errore e rumore, è necessario tenere conto di questi errori mediante

$$y(t) = \bar{y} + \delta y(t)$$

Tutte le precedenti equazioni sono vettoriali.

Derivando l'equazione dello stato

$$\dot{x} = \dot{\bar{x}} + \dot{\delta x} = \dot{\delta x}$$

quindi la variazione dello stato coincide con la variazione locale. Si può sviluppare in serie di Taylor nel punto di equilibrio

$$\dot{\delta x} = f(\bar{x}, \bar{u}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\text{eq}} \delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\text{eq}} \delta u + o(\delta x, \delta u) \quad (2.13)$$

La funzione di transizione valutata su un punto di equilibrio è nulla per definizione di punto di equilibrio, il termine $\frac{\partial f}{\partial x}$ è una matrice Jacobiana con numero di righe pari al

numero di righe della f dunque n ed un numero di colonne pari al numero di elementi della x , ancora n quindi è una matrice $n \times n$, la matrice verrà chiamata A .

Il termine $\frac{\partial f}{\partial u}$ ha invece n righe ed m colonne dove m è il numero di ingressi, verrà chiamata B .

Si riscrive la 2.13 trascurando l' o -piccolo si ottiene

$$\dot{x} = \delta x = A\delta x + B\delta u$$

quella ottenuta è proprio l'equazione di un sistema dinamico lineare con variabile di stato pari a δx ed ingresso pari a δu

La variazione dell'uscita invece sarà

$$y = \bar{y} + \delta y = g(\bar{x}, \bar{u}) + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\text{eq}} \delta x + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\text{eq}} \delta u + o(\delta x, \delta u)$$

$$\delta g \simeq C\delta x + D\delta u$$

Anche la variazione dell'uscita è lineare con la variazione dello stato e dell'ingresso.

Dopo aver risolto il sistema delle variazioni si somma con il sistema dei punti di equilibrio e si ottiene la risoluzione dell'intero sistema.

In molti casi la coppia $(0, 0)$ è un punto di equilibrio, in questo specifico caso è sufficiente calcolare solo le variazioni, dato che andrebbero poi sommate con un valore nullo di ingresso ed equilibrio.

2.8.1 Linearizzazione del sistema di un pendolo

Si riprende l'esempio analizzato alla sezione 2.7.1

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 + \frac{1}{mL} u \\ y = x_1 \end{cases}$$

Va dunque calcolata la matrice A

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\text{eq}} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{\text{eq}} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{\text{eq}} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{\text{eq}} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{\text{eq}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} \cos(\bar{x}_1) & 0 \end{pmatrix}$$

Si ripete il procedimento rispetto all'ingresso e si calcola la matrice B

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\text{eq}} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial u} \right|_{\text{eq}} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial u} \right|_{\text{eq}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL} \end{pmatrix}$$

La seconda matrice è costante e non dipende dai punti di equilibrio.

Si esegue la stessa operazione per l'equazione delle uscite

$$C = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\text{eq}} = \left(\left. \frac{\partial g}{\partial x_1} \right|_{\text{eq}} \quad \left. \frac{\partial g}{\partial x_2} \right|_{\text{eq}} \right) = (1 \quad 0)$$

Infine dato che il sistema è strettamente proprio non è necessario calcolare la matrice D dato che sarà sicuramente nulla, se ne riporta in ogni caso la definizione

$$D = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\text{eq}} = 0$$

L'unica matrice che varia al variare del punto di equilibrio è la prima.

Si calcolano le matrici A' ed A'' nei due punti di equilibrio

$$\begin{aligned} \bar{u} = 0 & \left\langle \begin{array}{l} \bar{x}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & 0 \end{pmatrix} \\ \qquad \qquad \qquad u = 0 \\ \bar{x}'' = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A'' = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}''} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{L} & 0 \end{pmatrix} \\ \qquad \qquad \qquad u = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Al variare di un solo segno si vedrà come il sistema si comporterà in modi completamente differenti, si studierà ossia la *stabilità* del sistema.

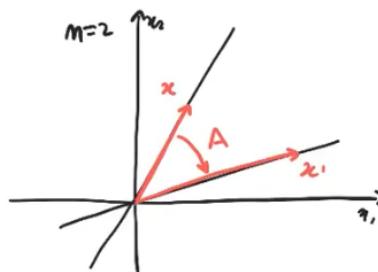
2.9 Richiami di geometria

2.9.1 Endomorfismo

Si consideri un'applicazione che trasforma i vettori dello spazio \mathfrak{X} in altri vettori dello stesso spazio vettoriale. Funzioni di questo tipo possono essere rappresentate da matrici $n \times n$

$$x' = Ax \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

L'applicazione A trasforma rette passanti per l'origine in altre rette passanti per l'origine.



2.9.2 Trasformazione di similitudine

Sia $x \in X^n$ e sia la matrice $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ non singolare ossia con determinante diverso da zero e invertibile.

Se si hanno n vettori indipendenti tra loro, possono essere considerati come una *base* per uno spazio vettoriale, si può dunque esprimere il vettore x nella base data da T

$$x = T\tilde{x}$$

Dato che T è invertibile $\tilde{x} = T^{-1}x$

Si consideri un vettore

$$x' = Ax \quad (2.14)$$

dove A è un endomorfismo. Se si vuole rappresentare il vettore x' in funzione della nuova base allora

$$T\tilde{x}' = Ax = AT\tilde{x}$$

Si moltiplica per l'inversa di T

$$\tilde{x}' = T^{-1}AT\tilde{x}$$

Quindi si è riscritta la relazione 2.14 ma nella nuova base, ciò implica che la trasformazione A è la stessa ma è avvenuta nel nuovo sistema di riferimento.

Si può definire

$$T^{-1}AT = \tilde{A}$$

dove \tilde{A} è una matrice *simile* alla matrice A , la relazione di similitudine è una condizione di uguaglianza, deve verificare tre proprietà:

- Riflessiva:

Se $A = \tilde{A}$ la trasformazione T deve necessariamente essere la matrice identità $T = I$

- Simmetria:

Se $A = \tilde{A} \Rightarrow \tilde{A} = A$

Si moltiplica il primo termine a destra per T e a sinistra per T^{-1}

- Transitiva:

Se $A = \tilde{A}$, $\tilde{A} = \tilde{\tilde{A}} \Rightarrow A = \tilde{\tilde{A}}$

Si consideri lo spazio delle matrici $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n}\}$, si può dividere in classi di equivalenza tra loro disgiunte, si possono raggruppare tutte le matrici che appartengono alla stessa classe di similitudine.

2.9.3 Autospazi invarianti monodimensionali

Si consideri un certo endomorfismo A definito nello spazio X^n , esso trasforma come già accennato, rette passanti per l'origine in rette passanti per l'origine.

Esistono direzioni “speciali” per le quali, applicata A , si ottiene un altro vettore che giace sul vettore di partenza, al limite cambiando in modulo.

La retta Ax deve essere proporzionale per un fattore λ ad x

$$Ax = \lambda x \quad (2.15)$$

$$(A - \lambda I)x = \underline{0} \quad (2.16)$$

Quello appena ottenuto è un sistema algebrico *omogeneo* di n equazioni in n incognite. Dal teorema di Rouché-Capelli, ammetterà una soluzione non banale solo se la matrice $(A - \lambda I)$ è singolare, ossia il suo determinante è nullo. Il determinante della matrice produce un polinomio, nell'incognita λ di ordine n detto anche *polinomio caratteristico* della matrice A . (Il sistema omogeneo ammette il cambio di segno)

$$\det(\lambda I - A) = p(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \alpha_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + \alpha_0 = 0$$

Si ricaveranno tutti i valori di λ per i quali la matrice $(A - \lambda I)$ è singolare. Dal teorema fondamentale dell'algebra posso trovare n soluzioni, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ prendono il nome di **autovalori** della matrice A . Se la matrice A è reale, i coefficienti sono tutti reali, un polinomio a coefficienti reali può ammettere radici reali o complesse e coniugate.

Alcuni autovalori possono avere una molteplicità algebrica m_a maggiore di uno, ossia possono essere più volte soluzione del polinomio. Ad esempio il polinomio

$$(\lambda - 1)^3 = 0$$

ammette come soluzione $\lambda = 1$ con molteplicità algebrica $m_a = 3$. Se gli autovalori sono tutti distinti fra loro, ossia avranno tutti molteplicità unitaria, la matrice A si dirà di *semplice struttura*.

Per ricavare le direzioni invarianti vanno trovati gli **autovettori**, vettori che giacciono nelle direzioni invarianti. Se si sostituisce nella 2.16 il generico λ_i

$$(\lambda_i I - A)u_i = 0 \quad (2.17)$$

Il vettore u_i non nullo deve per costruzione giacere sulla direzione invariante. Se un autovalore λ_i ha molteplicità 1, la matrice 2.17 “perde di rango” una sola volta, quindi di n equazioni saranno $n - 1$ indipendenti, con un solo grado di libertà, ossia lo spazio vettoriale, soluzione del sistema sarà una retta, quindi un solo autovettore. Se la molteplicità dell'autovalore fosse 2 allora anche lo spazio delle soluzioni potrebbe essere di ordine 2, dunque un piano o equivalentemente una coppia di vettori.

La dimensione dell'autospazio invariante prende il nome di *molteplicità geometrica* dell'autovalore m_{gi} .

$$m_{gi} = n - \rho(\lambda_i I - A)$$

Non è possibile trovare un numero di autovettori maggiore della molteplicità algebrica del relativo autovalore.

$$1 \leq m_{gi} \leq m_{ai}$$

2.9.4 Diagonalizzazione per similitudine

Sia un'applicazione $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ di semplice struttura, ovvero con n autovalori distinti e di conseguenza n autovettori distinti e indipendenti tra loro, in uno spazio di n dimensioni, dunque forniscono una base.

$$\begin{cases} \lambda_1 \rightarrow u_1 \\ \vdots \quad \vdots \\ \lambda_n \rightarrow u_n \end{cases}$$

Si pongono i vettori per colonna in una matrice quadrata U

$$U = [u_1, \dots, u_n]$$

Il rango della matrice sarà certamente n , composta da n vettori linearmente indipendenti, sarà una matrice non singolare. La matrice U può essere usata per realizzare una trasformazione di similitudine.

$$x = U\tilde{x}$$

La matrice U prende il nome di *matrice modale*, la matrice della dinamica del sistema si può riscrivere come

$$\tilde{A} = U^{-1}AU$$

con \tilde{A} la matrice di similitudine dello stesso sistema in una base differente, *equivalente* alla matrice A di partenza.

Sviluppando i prodotti

$$\tilde{A} = U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = \Lambda$$

La matrice Λ viene denominata *matrice degli autovalori*. Si è ottenuta una matrice della dinamica del sistema di tipo diagonale, con solo gli autovalori sulla diagonale. La trasformazione di similitudine non altera gli autovalori del sistema.

Questa rappresentazione prende il nome di *diagonalizzazione per similitudine*, si è diagonalizzata la matrice della dinamica.

Si vuole dimostrare la precedente

$$\begin{aligned} U^{-1}A[u_1 \dots u_n] &= U^{-1}[Au_1, Au_2, \dots, Au_n] = U^{-1}[\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2, \dots, \lambda_n u_n] = \\ &= U^{-1}[u_1, u_2, \dots, u_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = I\Lambda = \Lambda \end{aligned}$$

Capitolo 3

Analisi dei sistemi LTI nel dominio del tempo

La forma ISU dei sistemi di questo tipo è

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Le matrici caratteristiche sono costanti, ma il legame rispetto allo stato è implicito, per ricavare esplicitamente il legame tra uscita e stato è necessario integrare il sistema.

3.1 Risoluzione analitica di un sistema differenziale

Per risolvere il sistema è necessario determinare l'integrale generale, dato dalla somma dell'integrale dell'omogenea associata nominata $x_h(t)$ e di una qualunque soluzione particolare $x_p(t)$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Soluzione omogenea $\dot{x}_h = Ax_h$, si suppone che la soluzione sia del tipo

$$e^{\lambda t} \cdot c \quad \lambda \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^n$$

Sostituendo l'ipotesi di soluzione nel sistema e differenziando si ottiene

$$\lambda e^{\lambda t} c = A e^{\lambda t} c$$

$$\lambda c = Ac \Leftrightarrow (\lambda I - A)c = 0$$

Questa equazione è vera solo se λ è un autovalore (con $c \neq 0$). Esistono solo n soluzioni possibili (nell'ipotesi che la matrice A sia di semplice struttura, non è un'ipotesi necessaria).

Qualunque soluzione x_h combinazione lineare delle soluzioni precedentemente ricavata, è ancora soluzione del sistema.

$$x_h(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} c_i$$

Analogamente si potrebbe procedere con la soluzione particolare.

3.1.1 Matrice esponenziale

Si indica simbolicamente con

$$e^{At} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \quad (3.1)$$

È una serie nel tempo e non una matrice di esponenziali.

Si cercano le ipotesi di convergenza della serie, la sua norma è maggiorata da una serie assolutamente convergente (per ciascun valore di t)

$$\|e^{At}\| = \left\| \sum_k \frac{A^k t^k}{k!} \right\| \leq \sum_k \frac{\|A^k\| t^k}{k!} \leq \sum_k \frac{a^k t^k}{k!} \stackrel{\text{def}}{=} e^{at}$$

La norma della somma è minore o uguale alla somma delle norme e i tempi sono assunti positivi. Si ricava il coefficiente a^k dato che $\|A^k\| \leq \|A\|^k = a^k$, quella ottenuta è la definizione di esponenziale scalare.

Si vuole scrivere una soluzione analitica della matrice esponenziale, si supponga che sia diagonalizzabile per similitudine, ossia se ne possa costruire la matrice modale, ciò è sicuramente vero se la matrice è di semplice struttura. In generale è sufficiente che per ogni autovalore la molteplicità algebrica coincida con quella geometrica, ossia siano presenti n autovettori distinti (esista una base). Si può costruire la matrice Λ degli autovalori

$$\Lambda = U^{-1} A U \Leftrightarrow A = U \Lambda U^{-1}$$

Si eleva la matrice A a potenza

$$A^k = (U \Lambda U^{-1})^k = U \Lambda U^{-1} \cdot U \Lambda U^{-1} \cdot \dots \cdot U \Lambda U^{-1} \quad k \text{ volte}$$

Si nota che sono sempre presenti k prodotti $U^{-1}U$ pari alla matrice identità, dunque

$$A^k = U \Lambda^k U^{-1}$$

Ma lambda è una matrice diagonale, moltiplicata per sé stessa fornisce ancora una matrice diagonale

$$A^k = U \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix} U^{-1} = [u_1 \ \dots \ u_n] \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Sviluppando i prodotti

$$A^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k u_i v_i^T \quad (3.3)$$

Si ottiene la somma di n matrici $n \times n$ denominate residui polari R_i moltiplicate per λ^k . Una proprietà dei residui polari, nel caso di matrice diagonalizzabile, è che hanno rango pari ad uno.

La 3.3 prende il nome di *forma spettrale* (o forma *diadica*) della matrice potenza.

Calcolo della matrice esponenziale

Si supponga che A sia diagonalizzabile, si vuole calcolare la matrice esponenziale

$$\begin{aligned} e^{At} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{U \Lambda^k U^{-1} t^k}{k!} = U \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Lambda^k t^k}{k!} \right) U^{-1} = \\ &= U \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_1^k t^k}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_n^k t^k}{k!} \end{bmatrix} U^{-1} = U \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} U^{-1} = \\ &= \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} u_i v_i^T \end{aligned}$$

Anche la matrice esponenziale può essere calcolata mediante la sua forma diadica o spettrale. Riassumendo:

1. Calcolo $\lambda_i, u_i \ i = 1, \dots, n$
2. Verificare che A sia diagonalizzabile, $m_{ai} = m_{gi} \ \forall i$
3. (Se 2 vera) Costruzione della matrice modale U e calcolo della sua inversa U^{-1} (v_i^T)
4. Costruzione della matrice esponenziale della matrice degli autovalori $e^{\Lambda t}$
5. Calcolo di $e^{At} = U e^{\Lambda t} U^{-1}$ oppure mediante la sommatoria della forma spettrale.

Esempio numerico

Sia la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

- Calcolo autovalori e autovettori

$$p(\lambda) = |\lambda I - A| = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{pmatrix} = \lambda(\lambda + 3) + 2 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

Le soluzioni

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= -2 \end{aligned}$$

Calcolo degli autovettori

$$(\lambda_1 I - A)u_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $(\lambda_1 I - A)u_1$ è per costruzione singolare dato che λ è un autovalore, perde di rango una volta (dato che è di semplice struttura e gli autovalori hanno molteplicità uno). Per questo motivo è sufficiente risolvere una sola equazione e gli autovettori saranno proporzionali tra di loro, si può assegnare arbitrariamente una componente dell'autovettore (ad esempio $u_{12} = 1$)

$$-u_{11} - u_{12} = 0 \Rightarrow u_{11} = -1 \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Può essere comodo normalizzare gli autovettori normalizzati ma non è necessario in questo corso.

Secondo autovettore:

$$(\lambda_2 I - A)u_1 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Assegnando arbitrariamente $u_{21} = 1$

$$-2u_{21} - u_{22} = 0 \Rightarrow u_{22} = -2 \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Verifica diagonalizzabilità, passaggio scontato dato che la matrice è di semplice struttura.

- Costruzione della matrice modale

$$U = [u_1 \ u_2] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad U^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \end{bmatrix}$$

4. Costruzione della matrice esponenziale degli autovalori $e^{\Lambda t}$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

5. Costruzione della matrice esponenziale e^{At} attraverso la decomposizione spettrale

$$\begin{aligned} e^{At} &= U e^{\Lambda t} U^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -e^{-t} & e^{-2t} \\ -e^{-t} & -2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-t} + 2e^{-2t} & e^{-t} + e^{-2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice esponenziale è al più combinazione lineare delle funzioni del tempo presenti nella matrice ricavata al punto 4 chiamate anche **modi naturali** del sistema, potrebbe contenerne di meno.

Complementi

Sia la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ed un suo autovalore λ_i a cui è associato l'autovettore u_i

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \lambda_i \ u_i \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} Au_i = \lambda_i u_i$$

Si vuole dimostrare che se si considera la matrice potenza A^k

$$A^k : A^k u_i = \lambda_i^k u_i \tag{3.4}$$

La matrice A^k è quadrata, potrebbe essere chiamata B , se moltiplicata per un vettore si ottiene lo stesso vettore moltiplicato per uno scalare, si ottiene cioè la definizione di autospazio invariante monodimensionale. La matrice potenza A^k ha come autovettori gli stessi autovettori della matrice A , l'elevazione a potenza non cambia gli autovettori, gli autovalori invece sono le potenze degli autovalori di partenza.

Si supponga che la 3.4 valga per $k = 1$ ed un generico k e $k + 1$, si sarà dimostrata per induzione l'uguaglianza.

$$A^{k+1} u_i = A^k A u_i = A^k \lambda_i u_i = \lambda_i A^k u_i = \lambda_i \lambda_i^k u_i = \lambda_i^{k+1} u_i$$

la penultima uguaglianza è vera per ipotesi induttiva.

Si esegue la stessa dimostrazione per la matrice esponenziale con le stesse ipotesi del caso precedente, u_i autovettore della matrice A

$$e^{At} : e^{At} u_i = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!} u_i = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k u_i t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_i^k u_i t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_i^k t_i^k}{k!} u_i = e^{\lambda_i t} u_i$$

Quella ottenuta è ancora la definizione di autospazio invariante monodimensionale e dunque u_i è un autovettore per la matrice A e per la sua matrice esponenziale.

3.1.2 Teorema di Caley-Hamilton

Si consideri una matrice A quadrata

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_0\lambda^0$$

Ogni matrice quadrata è soluzione del proprio polinomio caratteristico, con abuso di notazione

$$p(A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_0A^0 = \underline{0}$$

con $A^0 = I$ e $p(A)$ un polinomio di matrici.

Si dimostra il teorema con l'ipotesi semplificativa ma non necessaria di matrice A di semplice struttura

$$p(A) \cdot u_i = A^n u_i + \alpha_{n-1}A^{n-1}u_i + \dots + \alpha_0u_i = (\lambda_i^n + \alpha_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \dots + \alpha_0)u_i = \underline{0} \quad \forall i$$

Quello ottenuto all'ultimo termine è proprio il polinomio caratteristico che valutato nell'autovalore è nullo per definizione.

Nell'ipotesi di semplice struttura i diversi autovettori u_i formano una base, di conseguenza tutti gli altri vettori saranno combinazione lineare degli autovettori e restituiranno anch'essi il vettore nullo nulli se moltiplicati per il polinomio di matrici $p(A)$

$$p(A) = 0 \Rightarrow p(A) \cdot x = \underline{0} \quad \forall x \in X^n$$

La matrice deve necessariamente avere rango nullo perché moltiplicata per un vettore dia come risultato un vettore nullo, di conseguenza, l'unica matrice di rango nullo è la matrice nulla

$$\rho(p(A)) = 0 \Rightarrow p(A) = \underline{0}$$

Si può isolare il termine A^n dal polinomio di matrici, $k \geq 0$

$$A^n = \sum_{i=0}^{n-1} (-\alpha_i)A^i \Rightarrow A^{n+k} = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i A^i$$

La potenza di ordine n è una combinazione lineare di potenze fino all'ordine $n-1$, si dimostra per induzione, vera per $k=0$, si ipotizza vera per un generico k , si dimostra che è vera per $k+1$, si ottiene la dimostrazione del teorema.

3.1.3 Tecnica del polinomio interpolante - Matrice di Vandermonde

Si vuole calcolare ancora la matrice esponenziale e^{At}

$$e^{At} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) A^i \quad (3.5)$$

Sfruttando quanto ricavato dal teorema di Caley-Hamilton si potrebbe riscrivere la potenza come una combinazione lineare di potenze di ordine inferiore. I coefficienti $\alpha_i(t)$

raggruppano tutti i coefficienti della potenza i -esima della matrice A , è presente la dipendenza del tempo a causa dei termini t^k . Se si potessero calcolare i coefficienti $\alpha_i(t)$ si potrebbe ridurre la serie ad una somma finita di matrici.

$$e^{At} \cdot u_1 = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) A^i u_1 = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) \lambda_1^i u_1 = e^{\lambda_1 t} u_1$$

Si può ripetere questo passaggio per tutti gli autovettori della matrice A

$$e^{At} u_n = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) A^i u_n = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) \lambda_n^i u_n = e^{\lambda_n t} u_n$$

Essendo gli autovettori non nulli allora

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) \lambda_n^i = e^{\lambda_n t}$$

Riscrivendo il sistema in forma compatta

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

La prima matrice prende il nome di **matrice di Vandermonde**, si indica con $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, funzione di n elementi.

Il determinante della matrice di Van der Monde è pari alla produttoria delle differenze di tutti i coefficienti

$$\det(V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

L'unico caso che può annullare la produttoria è quando due coefficienti con indice diverso siano uguali, ovvero A non sia di semplice struttura, in caso contrario, invertendo la matrice si possono ricavare i coefficienti

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = V^{-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Sostituiti nell'equazione 3.5, dopo aver calcolato le potenze della matrice A permettono di calcolare la matrice esponenziale con la somma di finiti termini.

Rispetto al metodo precedente non è necessario calcolare gli autovettori ma **è necessario che la matrice A sia di semplice struttura**.

Procedura operativa

1. Calcolo degli autovalori
2. Verifica che i λ_i siano distinti, ossia che A sia semplice

3. Se si la 2. risoluzione del sistema $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$

4. Calcolo della matrice esponenziale $e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) A^i$

Esempio numerico

Si riprende la stessa matrice utilizzata nel metodo della diagonalizzazione (vedi paragrafo 3.1.1)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

1. $p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$
2. $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow A$ semplice struttura
3. Costruzione e risoluzione del sistema $V\alpha_n(t) = e^{\lambda_n t}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Sviluppando si ottiene

$$\begin{cases} \alpha_0(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} \\ \alpha_1(t) = e^{-t} - e^{-2t} \end{cases}$$

4. Calcolo della matrice esponenziale

$$\begin{aligned} e^{At} &= \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A^1 = \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 0 \\ 0 & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -3e^{-t} + 3e^{-2t} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Riassunto dei due metodi precedenti

Sia A una matrice di semplice struttura, si può calcolare la matrice esponenziale mediante due metodi

1. Diagonalizzazione

Per n autovalori distinti

$$\exists n \text{ autovettori indipendenti } u_i \Rightarrow U = [u_1, \dots, u_n]$$

$$A = U\Lambda U^{-1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i v_i^T$$

$$e^{At} = U e^{\Lambda t} U^{-1} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} u_i v_i^T$$

Ricordando che il prodotto tra autovettori e le colonne della matrice modale inversa si ottengono le matrici R_i denominate *matrici dei residui polari*, avranno rango unitario in questo caso, hanno in generale il rango pari alla molteplicità geometrica dell'autovettore i -esimo u_i .

$$u_i v_i^T = R_i$$

2. Polinomio interpolante

Si costruisce la matrice di Vandermonde, si calcola il vettore dei coefficienti α e si calcola la matrice esponenziale

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Rightarrow \alpha_i(t) : \begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = V^{-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) A^i$$

3.1.4 Matrice non semplice

Si suppone che la matrice non sia di semplice struttura ma solo diagonalizzabile, esisteranno m autovalori distinti ($m < n$), dunque il generico autovalore λ_i avrà molteplicità algebrica maggiore di uno. Per calcolare gli autovettori si risolvono i sistemi

$$(A - \lambda_i I) u_i = 0$$

la molteplicità geometrica del generico autovettore è

$$m_{gi} = n - \rho(A - \lambda_i I)$$

Se la molteplicità geometrica è inferiore di quella algebrica, si troveranno meno autovettori di quanti sono necessari a diagonalizzare la matrice che risulterà dunque **non diagonalizzabile**. $1 < m_{gi} \leq m_{ai} \leq n$

Considerato il generico autovalore λ_i si pongono i corrispondenti autovettori in colonna

$$\lambda_i \rightarrow U_i = [u_{i1}, \dots, u_{im_{ai}}]$$

Si costruisce in seguito la matrice modale affiancando i blocchi appena ottenuti

$$U = [U_1, U_2, \dots, U_m]$$

Di conseguenza si costruisce una matrice degli autovalori dove ogni autovalore è ripetuto sulla diagonale per un numero di volte pari alla sua molteplicità (algebrica o geometrica, coincidono)

$$A = U \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} U^{-1}$$

Raccogliendo i termini

$$A = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \sum_{j=1}^{m_{ai}} u_{ij} \cdot v_{ij}^T$$

Sono necessari due pedici in quanto il primo indica il gruppo di autovettori associati all'autovalore i mentre il secondo è associato alla molteplicità m_{ai} e permette di moltiplicare l'autovalore per ogni suo autovettore.

Analogamente per la matrice esponenziale

$$e^{At} = \sum_{i=1}^m e^{\lambda_i t} \cdot \sum_{j=1}^{m_{ai}} u_{ij} \cdot v_{ij}^T$$

Con un abuso di notazione si potrebbero indicare autovalori uguali con nomi diversi, in modo da avere comunque un numero di autovalori pari al numero di autovettori e riprendere la notazione del caso precedente con matrice semplice.

I vettori u_i vengono chiamati autovettori *destri* ovvero devono moltiplicare a destra la matrice A per restituire l'autovalore.

Gli autovettori v_i vengono invece chiamati autovettori sinistri (presi sempre per colonna)

$$\begin{aligned} u_i : Au_i &= \lambda_i u_i \\ v_i : v_i A &= \lambda_i v_i \end{aligned}$$

3.1.5 Autovalori complessi e coniugati

Ad ogni coppia di autovalori complessi e coniugati corrisponderà una coppia di autovettori complessi e coniugati, il resto della notazione non cambia, si risolveranno due sistemi di equazioni, uno per la parte reale ed uno per la parte immaginaria.

Si introduce una variante della diagonalizzazione, chiamata **forma reale** della matrice degli autovalori. Per avere tutti termini reali sulla matrice degli autovalori sarà necessario perdere l'ipotesi di matrice diagonale ma di avere invece una matrice diagonale a blocchi.

Si considera per semplicità di analisi un caso di $n = 3$ ed un autovalore reale ed uno complesso e coniugato, in caso contrario si ripete il risultato ottenuto.

I tre autovalori saranno

$$\begin{cases} \lambda \\ \alpha + j\omega \\ \alpha - j\omega \end{cases}$$

Si devono costruire gli autovettori complessi e coniugati

$$\begin{cases} (A - (\alpha + j\omega)I)(u_a + ju_b) = \underline{0} + j\underline{0} \\ (A - (\alpha - j\omega)I)(u_a - ju_b) = \underline{0} + j\underline{0} \end{cases}$$

Si sviluppa la prima riga

$$(A - (\alpha + j\omega))(u_a + ju_b) = \underline{0} + j\underline{0} \Rightarrow \begin{cases} Au_a - \alpha u_a + \omega u_b = 0 \\ Au_b - \omega u_a - \alpha u_b = 0 \end{cases}$$

Si porta a sinistra la matrice A e si lasciano gli altri termini a destra

$$\begin{cases} Au_a = \alpha u_a - \omega u_b \\ Au_b = \omega u_a + \alpha u_b \end{cases} \Leftrightarrow A(u_a \ u_b) = (u_a \ u_b) \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$$

Se si volesse diagonalizzare, si dovrebbe costruire una matrice modale complessa

$$U = (u \ u_a + ju_b \ u_a - ju_b) \xrightarrow{\Lambda = U^{-1}AU} \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + j\omega & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - j\omega \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice esponenziale

$$\begin{aligned} e^{\Lambda t} &= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{(\alpha+j\omega)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(\alpha-j\omega)t} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\alpha t}(\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)) & 0 \\ 0 & 0 & e^{\alpha t}(\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Questa matrice va poi calcolata per le matrici U e U^{-1} con termini complessi.

Si sfrutta ora la matrice U_r reale, considerando solo termini reali

$$U_r = (u \ u_a \ u_b)$$

La matrice Λ non sarà più diagonale

$$AU_r = A(u \ u_a \ u_b) = (u \ u_a \ u_b) \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \omega \\ 0 & -\omega & \alpha \end{pmatrix}$$

Si è ottenuta una matrice diagonale a blocchi in cui il primo blocco è scalare mentre alla coppia di autovalori complessi coniugati corrisponde il blocco 2×2

$$AU_r = U_r \Lambda_r$$

Si calcola la matrice esponenziale

$$e^{At} = U_r e^{\Lambda_r t} U_r^{-1}$$

Si deve calcolare la matrice $e^{\Lambda_r t}$, sapendo che la matrice potenza di una matrice diagonale a blocchi è ancora una matrice diagonale a blocchi.

$$e^{At} = U_r \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}^t \end{pmatrix} U_r^{-1}$$

il termine esponenziale è ancora una matrice 2×2

$$e^{\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}^t} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$$

per dimostrare quest'uguaglianza si devono verificare due condizioni:

1. $e^{\Lambda_r \cdot 0} = I$
2. $\frac{d}{dt} e^{\Lambda_r t} = \Lambda_r e^{\Lambda_r t}$

similmente alle condizioni dell'esponenziale scalare, entrambe si dimostrano banalmente.

In conclusione la matrice esponenziale

$$\begin{aligned} e^{At} &= U_r \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\bar{\alpha}t} \cos \omega t & e^{\bar{\alpha}t} \sin \omega t \\ 0 & -e^{\alpha t} \sin \omega t & e^{\alpha t} \cos \omega t \end{pmatrix} U_r^{-1} = \\ &= e^{\alpha t} uv^T + e^{\alpha t} [u_a(\cos \omega t \cdot v_a^T + \sin \omega t \cdot v_b^T) + u_b(\sin \omega t \cdot v_b^T - \cos \omega t \cdot v_a^T)] \end{aligned} \quad (3.6)$$

con la matrice inversa pari a

$$U_r^{-1} = \begin{pmatrix} v^T \\ v_a^T \\ v_b^T \end{pmatrix}$$

3.1.6 Esempio calcolo matrice esponenziale

Sia la seguente matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico sarà

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1 \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

La matrice è di semplice struttura, può essere diagonalizzata per similitudine, vanno calcolati gli autovettori

$$(\lambda_1 I - A)u_1 = 0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Procedendo con il calcolo, si ricorda che solo un'equazione è indipendente, si sceglie una delle due variabili arbitrariamente, $u_{11} = 1 \Rightarrow u_{12} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = u_a + ju_b$$

per ricavare il vettore u_2 si esegue il coniugato della seguente uguaglianza

$$Au_1 = \lambda_1 u_1 \xrightarrow{\text{conj.}} Au_1^* = \lambda_1^* u_1$$

Dato che i due autovalori sono complessi e coniugati

$$\lambda_1^* = \lambda_2 \Rightarrow u_2 = u_1^* = u_a - ju_b$$

Si costruisce la matrice modale U con i due autovalori

$$U = [u_1 \ u_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$e^{At} = U e^{\Lambda t} U^{-1} = U \begin{bmatrix} e^{(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2})t} & 0 \\ 0 & e^{(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2})t} \end{bmatrix} U^{-1}$$

Si continua lo sviluppo usando la formula di Eulero, la complessità può essere ridotta utilizzando la matrice in forma reale.

$$U_r = [u_a \ u_b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \Lambda_r = \begin{bmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = U_r^{-1} A U_r$$

Sostituendo nella matrice esponenziale, con i risultati ottenuti in 3.6

$$e^{\Lambda_r t} = e^{-\frac{1}{2}t} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) & \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ -\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) & \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{pmatrix} \rightarrow e^{At} = U_r e^{\Lambda_r t} U_r^{-1}$$

3.1.7 Proprietà della matrice esponenziale

$e^{at} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k t^k}{k!}$	$e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$
$e^{a \cdot \phi} = 1$	$e^{A \cdot \phi} = I$
$\frac{d}{dt} e^{at} = ae^{at}$	$\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At} = e^{At} A$
$e^{at} \cdot e^{bt} = e^{(a+b)t}$	$e^{At} \cdot e^{Bt} = e^{(A+B)t}$
$(e^{at})^{-1} = e^{-at}$	$(e^{At})^{-1} = e^{-At}$
	$\det(e^{At}) = e^{\text{tr}(A)}$
	$e^{A^T t} = (e^{At})^T$

Dimostrazione della derivata

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} = A \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} \stackrel{k-1=k'}{=} A \sum_{k'=0}^{+\infty} \frac{A^{k'} t^{k'}}{k'!} = Ae^{At} = e^{At} A$$

Solo in questo caso il prodotto tra matrici è commutativo dato che la matrice viene moltiplicata per la sua matrice esponenziale corrispondente.

La terza proprietà (*prodotto*) è vera solo se le matrici A e B commutano ossia se $AB = BA$.

Dimostrazione della quarta proprietà (*inversa*), sfruttando la proprietà del prodotto, sicuramente le matrici A e $-A$ commutano

$$e^{At} \cdot e^{-At} = e^{(A-A)t} = I$$

L'unica matrice che moltiplicata per un'altra restituisce la matrice identità è proprio la sua inversa.

3.1.8 Analisi con matrice non diagonalizzabile

Esisterà qualche autovalore per il quale la molteplicità geometrica è strettamente minore della molteplicità algebrica, se ciò avviene, la matrice A non è diagonalizzabile, non esiste alcuna matrice simile diagonale.

È comodo operare nel dominio di Laplace per risolvere una matrice non diagonalizzabile, altrimenti bisogna riferirsi alla forma di **Jordan**, approfondimenti [qui](#) e [qui](#). La Jordanizzazione consiste nel costruire una matrice non diagonale U_J che mediante una trasformazione di similitudine generi la matrice J

$$J = U_J^{-1} A U_J = U_J^{-1} \begin{bmatrix} \ddots & 0 & & & & \\ & \lambda_1 & 1 & 0 & & \\ & 0 & \ddots & 1 & & \\ & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & \\ & & & \lambda_2 & 1 & 0 \\ & 0 & & & \ddots & 1 \\ & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} U_J$$

Si costruisce una matrice formata da matrici diagonali a blocchi, si hanno sempre gli autovalori sulla diagonale ma compaiono degli 1 sulla *sovradiagonale*, la dimensione sarà $m_{ai} \times m_{ai}$.

Per il calcolo della matrice esponenziale invece, sapendo che l'esponenziale di una matrice diagonale a blocchi è ancora una matrice diagonale a blocchi, si otterrà una matrice che ha sulla diagonale le matrici esponenziali dei singoli blocchi.

$$e^{At} = U_J e^{Jt} U_J^{-1} = U_J \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & e^{J_{11}t} & & & \\ & & e^{J_{22}t} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} U_J^{-1}$$

Il termine $e^{J_{int}}$ è l'esponenziale n -esimo del *miniblocco* di Jordan, si dimostra che ha dimensione m_{ai} e la seguente forma

$$e^{J_{int}} = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3!} & \frac{t^4}{4!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'analisi di questo tipo di matrici verrà ripresa con l'analisi dei sistemi nel dominio di Laplace.

3.2 Calcolo dell'integrale generale della ISU

Si consideri un sistema LTI nella forma ISU implicita

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Si vuole ricavare l'integrale della soluzione $x(t)$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Si studia la soluzione dell'omogenea, assumendo che sia

$$\dot{x}_h = Ax_h \rightarrow x_h(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot c \quad t \geq t_0, \quad c \in \mathbb{R}^n$$

Per dimostrare la precedente equazione è sufficiente sostituire il risultato ipotizzato nell'equazione di partenza e derivando si ottiene

$$\dot{x}_h(t) = Ae^{A(t-t_0)} \cdot c = Ax_h(t)$$

Esistono infinite soluzioni dato che la scelta del vettore c costante è arbitraria.

L'integrale **particolare** invece si risolve con la seguente ipotesi di soluzione

$$x_p(t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau = e^{At} \int_{t_0}^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau$$

Anche questa si basa sulla matrice esponenziale, si verifica che sia effettivamente soluzione dell'equazione differenziale, analogamente al caso precedente si sostituisce e si deriva il prodotto dei due termini entrambi dipendenti dal tempo, con la nota formula $\frac{d}{dt}(AB) = A'B + AB'$

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= Ae^{At} \int_{t_0}^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau + e^{At} e^{-At} Bu(t) = \\ &= A \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Bu(t) = \\ &= Ax_p(t) + Bu \end{aligned}$$

L'integrale generale sarà dato dalla somma dell'omogenea e della soluzione particolare

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot c + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

La costante c si ricava dalle condizioni iniziali

$$x(t_0) = e^{A \cdot \varnothing} \cdot c + \int_{t_0}^{t_0} \dots d\tau = c = x_0$$

Si vuole esprimere la ISU in forma esplicita, aggiungendo anche l'equazione dell'uscita con $y = Cx + Du$

$$\begin{cases} x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t \left(Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau)\right)u(\tau)d\tau \end{cases}$$

Il passaggio dalla forma implicita a quella esplicita prende il nome di *Formule di Lagrange*.

Si nota che una parte della soluzione dipende solo dalla soluzione iniziale, un'altra invece è funzione dell'ingresso. La prima parte $x_l(t)$ prende il nome di *movimento in evoluzione libera* mentre l'altro $x_f(t)$ prende il nome di *movimento forzato*, dipende appunto dall'ingresso.

Analogamente l'equazione dell'uscita è composta da $y_l(t)$ *risposta in evoluzione libera* mentre la seconda parte $y_f(t)$ prende il nome di *risposta in evoluzione forzata*.

Si definiscono ulteriori matrici al fine di compattare ancora il sistema

- Matrice di transizione nello stato

$$\Phi(t) = e^{At} \quad (n \times n)$$

- Matrice delle risposte impulsive nello stato

$$H(t) = e^{At}B \quad (n \times m)$$

- Matrice di trasformazione d'uscita

$$\Psi(t) = Ce^{At} \quad (p \times n)$$

- Matrice delle risposte impulsive in uscita

$$W(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) \quad (p \times n)$$

Sfruttando queste definizioni la forma esplicita diventa

$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau \\ y(t) = \Psi(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau \end{cases}$$

3.2.1 Principio di sovrapposizione degli effetti

Un generico sistema S è lineare se e solo se per esso vale il principio di sovrapposizione degli effetti.

Si supponga di avere uno stato iniziale $x'(t_0)$ ed un certo ingresso $u'(t)_{[t_0,t]}$, a questa coppia stato-ingresso corrispondono una coppia di funzioni $x'(t)$ ed $y'(t)$. Si suppone di risolvere il sistema anche con un'un'altra coppia $x''(t)$ e $y''(t)$.

$$\begin{cases} x'(t_0), u'(t)_{[t_0,t]} \rightarrow x'(t), y'(t) \\ x''(t_0), u''(t)_{[t_0,t]} \rightarrow x''(t), y''(t) \end{cases}$$

Si supponga di avere una condizione iniziale combinazione lineare dei primi due, condizione identica anche per l'ingresso con gli stessi coefficienti scalari α e β

$$\begin{cases} x(t_0) = \alpha x'(t_0) + \beta x''(t_0) \\ u(t) = \alpha u'(t) + \beta u''(t) \end{cases} \xrightarrow{\text{PSE}} \begin{cases} x(t) = \alpha x'(t) + \beta x''(t) \\ y(t) = \alpha y'(t) + \beta y''(t) \end{cases}$$

Il principio di sovrapposizione degli effetti permette di applicare la combinazione lineare al movimento dello stato $x(t)$ e all'equazione dell'uscita $y(t)$ senza dover ricalcolare gli integrali.

Generalizzando il problema, è utile sfruttare il PSE nel caso in cui l'ingresso del sistema sia complesso e possa essere scomposto mediante la combinazione lineare di più ingressi semplici, in questo modo si risolveranno tanti integrali più semplici rispetto alla risoluzione di un singolo integrale complesso.

Dimostrazione

Si dimostra il principio sostituendo le formule di *Lagrange*, con l'ipotesi che le soluzioni parziali $x'(t)$ e $x''(t)$ siano corrette

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha x'(t) + \beta x''(t) = \alpha e^{A(t-t_0)} x'(t_0) + \alpha \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u'(\tau) d\tau + \\ &\quad + \beta e^{A(t-t_0)} x''(t_0) + \beta \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u''(\tau) d\tau = \\ &= e^{A(t-t_0)} (\alpha x'(t_0) + \beta x''(t_0)) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B (\alpha u'(\tau) + \beta u''(\tau)) d\tau = \\ &= e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \end{aligned}$$

La proprietà è valida anche per i sistemi tempo varianti, è necessaria solo la linearità. La dimostrazione è analoga per la $y(t)$.

3.2.2 Rappresentazioni ISU equivalenti

Si consideri un certo sistema ISU, ottenuto mediante l'analisi del sistema fisico

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Si consideri una matrice T invertibile, le sue colonne saranno una base per operare un cambio di variabili, ossia riferire il sistema rispetto ai vettori della matrice T e non rispetto ai vettori canonici $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.

Il nuovo stato \tilde{x} sarà una combinazione lineare dello stato iniziale

$$x = T\tilde{x} \Leftrightarrow \tilde{x} = T^{-1}x$$

Il nuovo stato perde di significato fisico ma è possibile scrivere un modello equivalente

$$\begin{cases} T\dot{\tilde{x}} = AT\tilde{x} + Bu \\ y = CT\tilde{x} + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = T^{-1}AT\tilde{x} + T^{-1}Bu \\ y = CT\tilde{x} + Du \end{cases}$$

La matrice $T^{-1}AT$ è ancora una matrice quadrata, tra l'altro simile alla matrice A , verrà chiamata \tilde{A} ; la matrice $T^{-1}B$ è invece una matrice $n \times m$, verrà chiamata \tilde{B} . Con \tilde{C} si indica la matrice CT di dimensioni $p \times n$, la matrice D resta invariata, può comunque essere rinominata in \tilde{D} .

La nuova forma del sistema sarà

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}\tilde{x} + \tilde{D}u \end{cases} \quad \left[\begin{array}{ll} \tilde{A} = T^{-1}AT & \tilde{B} = T^{-1}B \\ \tilde{C} = CT & \tilde{D} = D \end{array} \right]_{x=T\tilde{x}}$$

Entrambe le ISU rappresentano il sistema, mediante un cambiamento del riferimento non varia il legame ingresso-uscita. Tutte le quadruple di matrici ottenute possono essere categorizzate in classi di equivalenza, esistono infinite quadruple equivalenti al variare della matrice T diagonalizzabile.

Esempio

Sia il seguente sistema, si sceglie la matrice modale come matrice per il cambio di variabili

$$\dot{x} = Ax + Bu \xrightarrow{x=U\tilde{x}} \dot{\tilde{x}} = U^{-1}AU\tilde{x} + U^{-1}BU = \Lambda\tilde{x} + \tilde{B}u$$

La ISU equivalente presenta una matrice della dinamica diagonale, è immediato calcolare la matrice di transizione, mediante l'esponenziale della matrice. Si calcola facilmente l'evoluzione libera del sistema, per ritornare al sistema di riferimento precedente va moltiplicata la U costante per \tilde{x} .

3.3 Modi naturali per i sistemi dinamici

I modi naturali sono tutte le funzioni che possono comparire nella risposta in evoluzione libera, ovvero tutte le funzioni del tempo che possono essere identificate all'interno della matrice esponenziale

$$x_l(t) = e^{At} x_0 \quad x_0 \in \mathbb{X}^n$$

Si consideri un sistema con $n = 3$ con i seguenti autovalori e autovettori della matrice della dinamica A :

$$\begin{array}{ccc} \lambda & \alpha + j\omega & \alpha - j\omega \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ u & u_a + ju_b & u_a - ju_b \end{array}$$

Si costruisce la matrice modale reale U_r e la sua inversa U_r^{-1}

$$U_r = [u \ u_a \ u_b]$$

$$U_r^{-1} = \begin{bmatrix} v^T \\ v_a^T \\ v_b^T \end{bmatrix}$$

Si introduce il cambio di variabili con una nuova variabile di stato z

$$z = U_r^{-1} x \rightarrow \Lambda_r = U_r^{-1} A U_r = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \omega \\ 0 & -\omega & \alpha \end{pmatrix}$$

Calcolando la matrice esponenziale si ottiene

$$e^{At} = e^{(U_r \Lambda_r U_r^{-1})t} = U_r e^{\Lambda_r t} U_r^{-1} = (u \ u_a \ u_b) \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha - \omega)^t & 0 \\ 0 & 0 & (\alpha + \omega)^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^T \\ v_a^T \\ v_b^T \end{pmatrix}$$

Sviluppando l'esponenziale interno

$$e^{\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} t} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$$

La matrice esponenziale completa dunque:

$$e^{At} = (u \ u_a \ u_b) \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \cos \omega t & e^{\alpha t} \sin \omega t \\ 0 & -e^{\alpha t} \sin \omega t & e^{\alpha t} \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^T \\ v_a^T \\ v_b^T \end{pmatrix}$$

Ricordando la definizione di modo naturale si vede che le funzioni del tempo sono tutte contenute nella matrice esponenziale degli autovalori $e^{\Lambda_r t}$

Si sviluppano i prodotti

$$e^{At} = e^{\lambda t} uv^T + e^{\alpha t} u_a (\cos(\omega t) v_a^T + \sin(\omega t) v_b^T) + e^{\alpha t} u_b (-\sin(\omega t) v_a^T + \cos(\omega t) v_b^T)$$

Si considera ora l'evoluzione libera

$$\begin{aligned} x_l(t) = e^{At} x_0 &= e^{\lambda t} uv^T x_0 + e^{\alpha t} [u_a (\cos(\omega t) v_a^T x_0 + \sin(\omega t) v_b^T x_0) + \\ &\quad + e^{\alpha t} u_b (-\sin(\omega t) v_a^T x_0 + \cos(\omega t) v_b^T x_0)] \end{aligned}$$

si osserva che i vettori v^T sono righe mentre x_0 sono vettori colonna, di conseguenza il loro prodotto è uno scalare c , si fanno le seguenti posizioni

$$\begin{bmatrix} v^T \\ v_a^T \\ v_b^T \end{bmatrix} x_0 = \begin{pmatrix} c \\ c_a \\ c_b \end{pmatrix}$$

Si riscrive l'equazione dell'evoluzione libera

$$\begin{aligned} x_l(t) &= ce^{\lambda t} u + e^{\alpha t} u_a (\cos(\omega t) c_a + \sin(\omega t) c_b) + \\ &\quad + e^{\alpha t} u_b (-\sin(\omega t) c_a + \cos(\omega t) c_b) \end{aligned}$$

Se si analizza lo stato nell'istante di tempo nullo

$$x_l(0) = cu + c_a u_a + c_b u_b = x_0 \Rightarrow z_l(0) = \begin{pmatrix} c \\ c_a \\ c_b \end{pmatrix} = z_0 = U_R^{-1} x_0$$

Si osserva che le costanti c sono proprio le componenti dello stato iniziale rispetto alla nuova base u .

Si considerino le seguenti posizioni per definire l'angolo φ

$$m = \sqrt{c_a^2 + c_b^2} \quad \sin \varphi = \frac{c_a}{m} \quad \cos \varphi = \frac{c_b}{m}$$

si riscrive la $x_l(t)$ in forma ancora più compatta, sfruttando le formule di prostaferesi

$$x_l(t) = ce^{\lambda t} u + me^{\alpha t} (\sin(\omega t + \varphi) u_a + \cos(\omega t + \varphi) u_b)$$

Le funzioni dipendenti dal tempo, generate da matrici diagonalizzabili, possono essere al più esponenziali scalari per ogni autovalore reale, chiamati moti **aperiodici**; oppure funzioni sinusoidali moltiplicate per esponenziali per ogni autovalore complesso e coniugato, verranno detti modi **pseudo-periodici**.

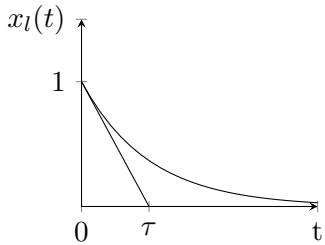
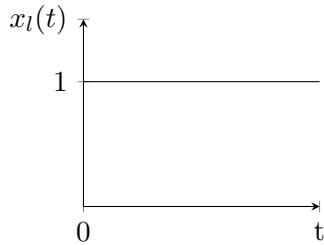
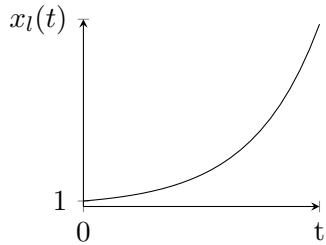
Si vuole capire come sarà l'andamento qualitativo dell'evoluzione libera dello stato al variare degli autovalori.

3.3.1 Modi aperiodici

Sono generati da autovalori reali

$$\lambda \text{ reali} \rightarrow e^{\lambda t} u$$

Si possono avere tre casi

(a) $\lambda < 0$ (b) $\lambda = 0$ (c) $\lambda > 0$

Nello spazio di stato X^n si individua una direzione data dal vettore u , all'istante $t = 0 \rightarrow e^{\lambda t} u = u$, non c'è alcun contributo dato dal modo.

Al variare di t il vettore u può

- $\lambda < 0$ il vettore diminuisce di ampiezza.
- $\lambda = 0$ il vettore resta costante.
- $\lambda > 0$ il vettore aumenta di ampiezza indefinitamente.

Se $\lambda < 0$ si introduce una **costante di tempo** $\tau = -\frac{1}{\lambda}$ e la funzione esponenziale si può esprimere come $e^{-\frac{t}{\tau}}$, dunque si può affermare che con una certa percentuale di errore la funzione è ingegneristicamente approssimabile a zero. Al variare di τ si ha un tempo di "riduzione" del fenomeno maggiore o minore, per un tempo pari a tre τ il vettore si riduce di almeno il 95%

$$t = 3\tau \Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} < 0.05 \text{ (5%)} \quad (1)$$

$$t = 4\tau \Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} < 0.02 \text{ (2%)} \quad (2)$$

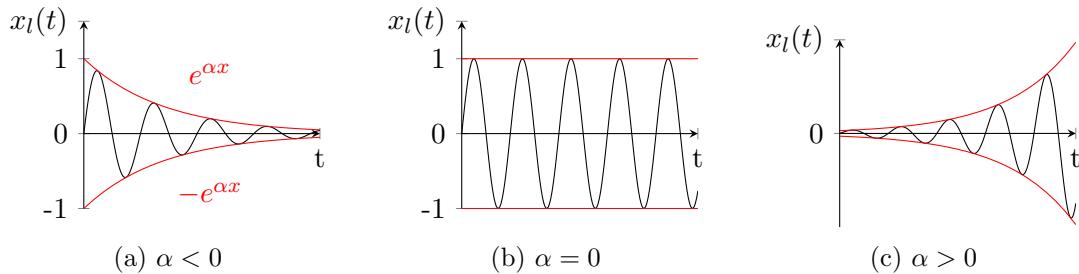
$$t = 5\tau \Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} < 0.01 \text{ (1%)} \quad (3)$$

3.3.2 Modo Pseudo-Periodico

Si considera una coppia di autovalori complessi e coniugati

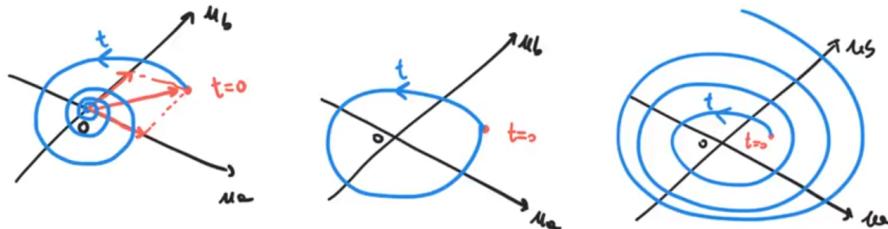
$$\alpha \pm j\omega \rightarrow e^{\alpha t} (\sin(\omega t + \varphi) u_a + \cos(\omega t + \varphi) u_b)$$

Si hanno anche in questo caso tre modi al variare di α



Nel caso di autovalori puramente immaginari si ha un andamento puramente periodico e non pseudo-periodico. Negli altri due casi la funzione esponenziale rappresenta la curva *inviluppo* della soluzione.

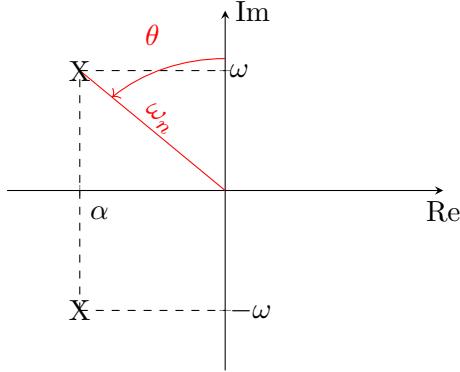
Lo spazio delle soluzioni X^n è formato da una base di due vettori non necessariamente ortogonali tra loro u_a ed u_b , il vettore soluzione ruota nel piano ottenuto dai vettori della base e la sua ampiezza può variare o meno nel tempo a seconda del segno di α . Se $\alpha = 0$ si ha genericamente un ellisse che collassa in una circonferenza qualora i due assi fossero ortogonali e avessero la stessa ampiezza.



Due parametri che caratterizzano i modi pseudo-periodici sono

- **Pulsazione naturale** $\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$
- **Coefficiente di smorzamento** $\zeta = -\frac{\alpha}{\omega_n}$

Dal punto di vista grafico



Dalla figura si vede la relazione tra l'angolo θ e ζ

$$\zeta = \sin \theta \in]-1, 1[$$

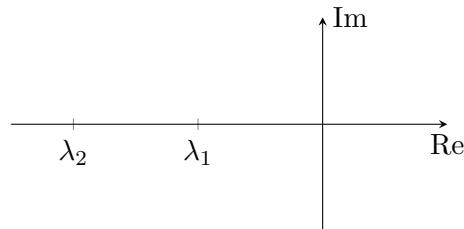
Se fosse pari a $\pm \frac{\pi}{2}$ i due autovalori coinciderebbero in un unico punto, ossia si avrebbe un autovalore reale di molteplicità due, negativo o positivo.

A parità di ω_n , al diminuire di θ , diminuisce lo smorzamento, ossia le oscillazioni perdurano per più tempo.

3.3.3 Stima dell'andamento qualitativo dei sistemi dinamici

Analisi dell'evoluzione libera di un sistema del secondo ordine con una coppia di autovalori reali, negativi e distinti.

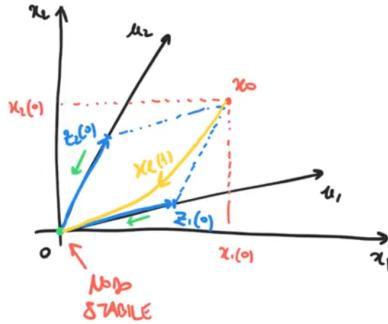
$$x_l(t) = e^{At}x_0 = Ue^{\Lambda t}U^{-1}x_0$$



Si può effettuare un cambio di variabili $x = Uz$, $U^{-1}x_0 = Z_l(0)$, dai due autovalori è possibile ricavare gli autovettori per costruire la matrice modale $U = (u_1 \ u_2)$.

$$x_l(t) = \left(e^{\lambda_1 t} u_1 v_1^T + e^{\lambda_2 t} u_2 v_2^T \right) x_0 = z_1(0)e^{\lambda_1 t}u_1 + z_2(0)e^{\lambda_2 t}u_2$$

Si riporta l'andamento dello stato del sistema nel piano chiamato *ritratto di fase*

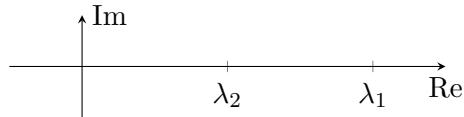


Entrambi i vettori si accorciano nell'origine, la traiettoria del punto x_0 è contenuta nella regione di piano delimitata dai vettori u_1 ed u_2 . Se gli autovalori fossero uguali la traiettoria sarebbe rettilinea, ma λ_1 è minore in modulo rispetto a λ_2 dunque la sua costante di tempo sarà più grande, di conseguenza la traiettoria sarà curva e vicina al vettore u_1 .

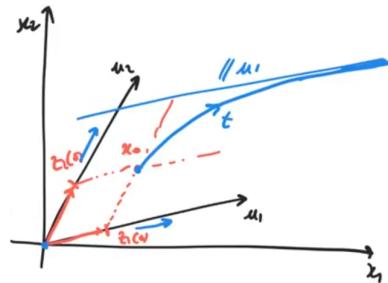
Si dice che λ_1 è l'autovalore dominante perché perdura più a lungo nel tempo, è sempre l'autovalore massimo. L'origine è in questo caso un **nodo stabile** della traiettoria.

Andamento con autovalori positivi

Se gli autovalori sono positivi



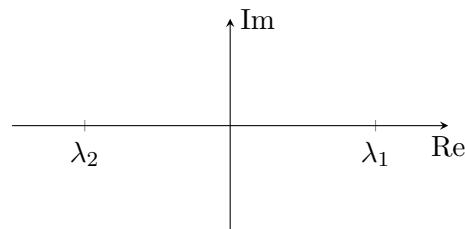
Anche in questo caso l'autovalore dominante è λ_1 , ossia la componente ad esso associato diverge più rapidamente di quella associata all'autovalore λ_2 , la traiettoria tenderà ad una retta parallela ad u_1



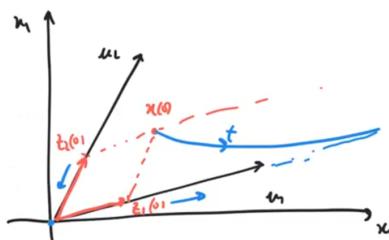
L'origine viene definito in questo caso un **nodo instabile** dato che le componenti si allontanano da quel punto.

Autovalori con segno discordante

Nel caso in cui gli autovalori fossero di segno opposto, si avrebbe ancora λ_1 come autovalore dominante, mentre il secondo tenderebbe a zero



La traiettoria tende a coincidere alla retta determinata da u_1 .



L'origine verrà detto **punto di sella** a causa del diverso comportamento rispetto alle due componenti.

3.3.4 Andamento sistema del terzo ordine

Si consideri una matrice della dinamica del seguente tipo

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

lo stato iniziale del sistema è

$$x_0 = (1 \ 1 \ 1)^T$$

Si ricavano gli autovalori e gli autovettori risolvendo il polinomio caratteristico

$$\begin{cases} \lambda = -3 & \rightarrow u^T = (1, 0, 1) \\ \alpha \pm j\omega = \pm j3 & \rightarrow u_a^T = (-1, -1, 2), \ u_b^T = (0, -1, 0) \end{cases}$$

Si deve successivamente operare una trasformazione di coordinate

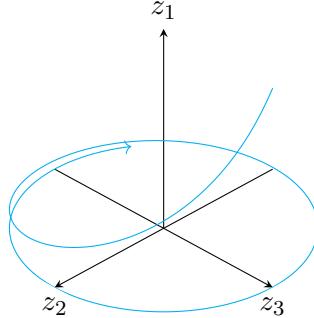
$$Z = U_r^{-1}x = (u \ u_a \ u_b)^{-1}x$$

la risposta libera sarà

$$x_l = U_r e^{\Lambda_r t} U_r^{-1} x_0 = U_r e^{\Lambda_r t} z_0$$

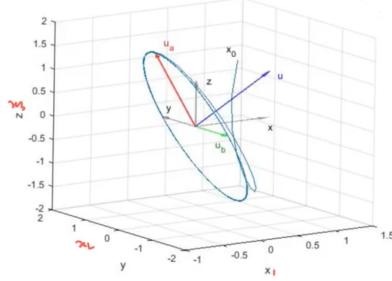
dato che $z = U_r^{-1}x$

Si rappresenta la traiettoria dello stato nello spazio z



lungo l'asse z_1 si troverà il modo associato all'autovalore reale λ , dunque la componente z_1 tenderà esponenzialmente a zero. Le componenti z_2 e z_3 invece saranno funzioni sinusoidali ortogonali, si otterrà un punto rotante nel piano (z_2, z_3) all'estinguersi della componente esponenziale dovuta a z_1 .

Per analizzare la dinamica nello spazio x si deve ruotare e scalare il sistema di riferimento u rispetto a quello iniziale x



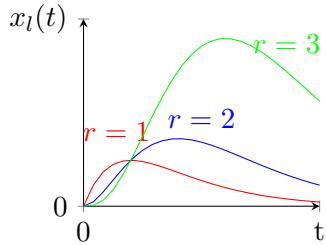
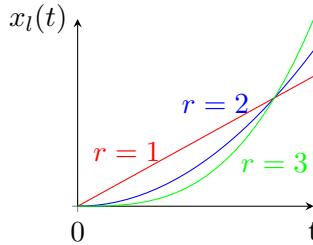
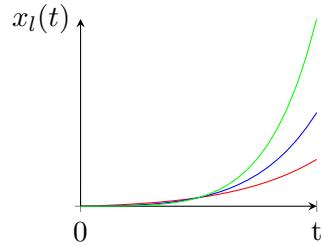
Analisi con matrice non diagonalizzabile

Mediante una trasformazione è comunque possibile ottenere una matrice esponenziale diagonale a blocchi. Nel caso di λ reali i modi sono del tipo

$$t^r e^{\lambda t} u$$

con $r \in [0, \sigma - 1]$ e σ la molteplicità geometrica dell'autovalore ed u l'autovettore associato a λ .

Analisi delle componenti dello stato al variare del segno di λ (con $r > 0$)

(a) $\lambda < 0$ (b) $\lambda = 0$ (c) $\lambda > 0$

Analizzando le tre figure

$\lambda < 0$ Il vettore di stato cresce per un certo periodo di tempo e poi decresce fino a tendere a zero

$\lambda = 0$ Il vettore cresce con andamento polinomiale

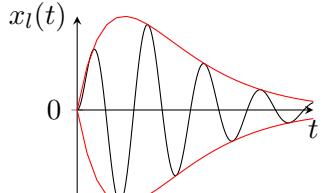
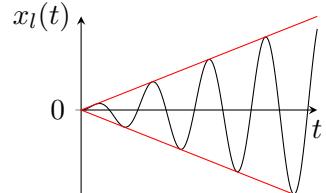
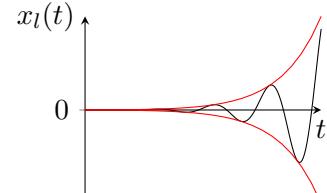
$\lambda > 0$ Il vettore cresce con andamento esponenziale

Autovalori complessi e coniugati

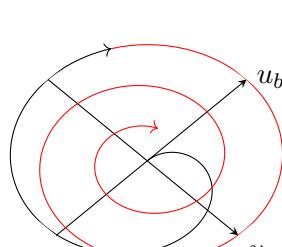
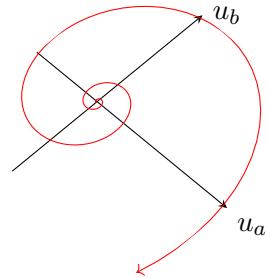
Si avranno due funzioni trigonometriche ortogonali tra loro moltiplicate per la forma polinomiale $t^r e^{\alpha t}$

$$t^r e^{\alpha t} (\cos(\omega t + \varphi) u_a + \sin(\omega t + \varphi) u_b)$$

Si ottiene il grafico delle componenti dello stato nei tre diversi casi

(a) $\alpha < 0$ (b) $\alpha = 0$ (c) $\alpha > 0$

Sommmando le due componenti si ottiene la traiettoria dello stato

(a) $\alpha < 0$ (b) $\alpha \geq 0$

Gli ultimi due casi sono stati accorpati nello stesso grafico per semplicità, in ogni caso se α è maggiore o uguale a zero lo stato diverge.

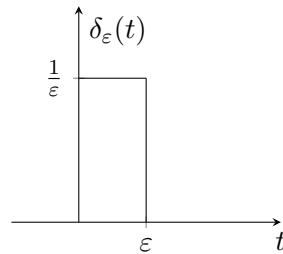
3.4 Analisi della risposta forzata

L'evoluzione forzata di un sistema dipende dall'ingresso, è dunque difficile generalizzare un'analisi senza definire a priori una serie di segnali *canonici* utilizzati con ricorrenza come segnali di ingresso per i sistemi dinamici.

3.4.1 Segnali canonici

Impulso rettangolare

Il segnale indicato con $\delta_\varepsilon(t)$ con area unitaria



Descritto con la seguente

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & 0 \leq t < \varepsilon \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Eseguendo il limite si ottiene l'**impulso di Dirac o Delta di Dirac**

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t) = \delta(t)$$

Proprietà della δ

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & \forall t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1 \\ f(t)\delta(t - \tau) = f(\tau)\delta(t - \tau) \end{cases}$$

Queste tipologie di ingressi rappresentano delle sollecitazioni *violente* al sistema, l'impulso trasferisce al sistema un'energia finita in un tempo infinitesimo, dunque con una potenza *infinita*.

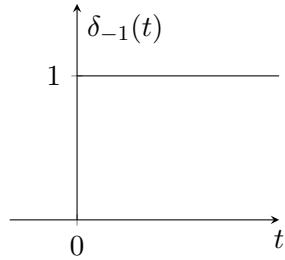
È possibile rappresentare fenomeni reali con dinamiche nel tempo molto distinte tra loro mediante la funzione impulso, ad esempio l'apertura per pochi secondi della porta di un forno acceso da molti minuti è un fenomeno con un tempo trascurabile rispetto all'intera dinamica del sistema ma sottrae comunque una quantità di energia finita allo stesso; si può per questo caratterizzare l'interazione o il forzamento mediante una funzione impulsiva.

Analogamente il colpo inferto *istantaneamente* ad una biglia su un tavolo, le conferisce istantaneamente una certa energia che la mette in moto.

Segnale gradino

Un segnale con due livelli costanti, mediante un passaggio *istantaneo*

$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$



Si può anche rappresentare con

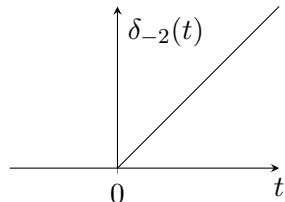
$$\delta_{-1}(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

Rampa unitaria

Indicata con

$$\delta_{-2}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$$

Ha il seguente andamento con pendenza unitaria Analogamente al segnale precedente

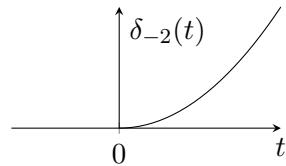


$$\delta_{-2}(t) = \int_{-\infty}^t \delta_{-1}(\tau) d\tau$$

Parabola unitaria

Un segnale che cresce con accelerazione costante

$$\delta_{-3}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t^2}{2} & t \geq 0 \end{cases}$$



$$\delta_{-3}(t) = \int_{-\infty}^t \delta_{-2}(\tau) d\tau$$

Segnale polinomiale di ordine n

Indicato con

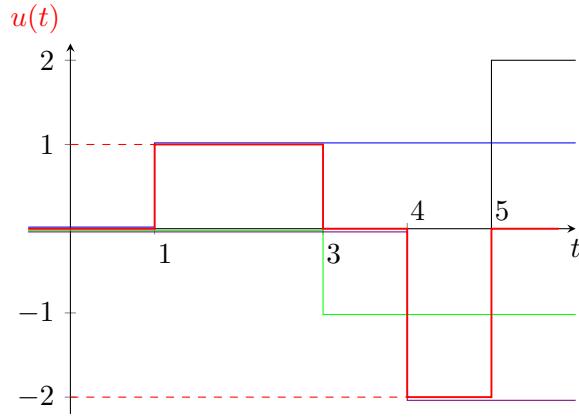
$$\delta_{-(n+1)}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t^n}{n!} & t \geq 0 \end{cases} = \frac{t^n}{n!} \delta_{-1}(t)$$

oppure

$$\delta_{-(n+1)}(t) = \int_{-\infty}^t \delta_{-n}(\tau) d\tau$$

Segnali comunque complessi

I segnali polinomiali sono molto utili anche per *destrutturare* segnali più complessi, ad esempio il seguente segnale in rosso può essere scomposto mediante una combinazio-



ne lineare di gradini δ_{-1} , sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti poi si analizzerà il sistema sottoposto volta per volta a ciascuna parte del segnale scomposto.

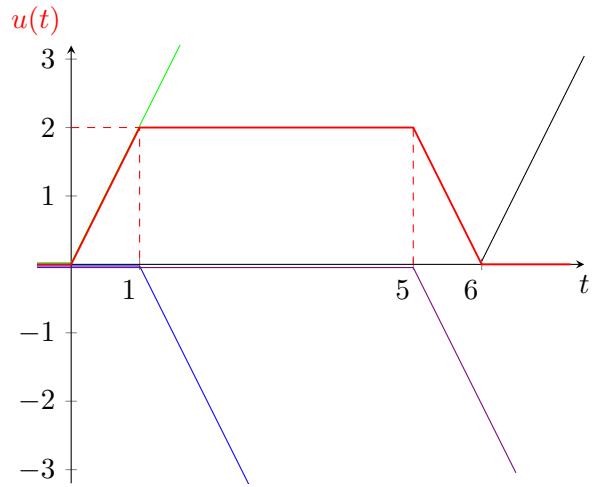
$$u(t) = \delta_{-1}(t-1) - \delta_{-1}(t-3) - 2\delta_{-1}(t-4) + 2\delta_{-1}(t-5)$$

Se si volesse calcolare la risposta forzata $y_f(t)$, assumendo che $y'_f(t)$ sia la risposta al generico impulso $\delta_{-1}(t)$

$$y_f(t) = y'_f(t-1) - y'_f(t-3) - 2y'_f(t-4) + 2y'_f(t-5)$$

Segnale porta diagonale

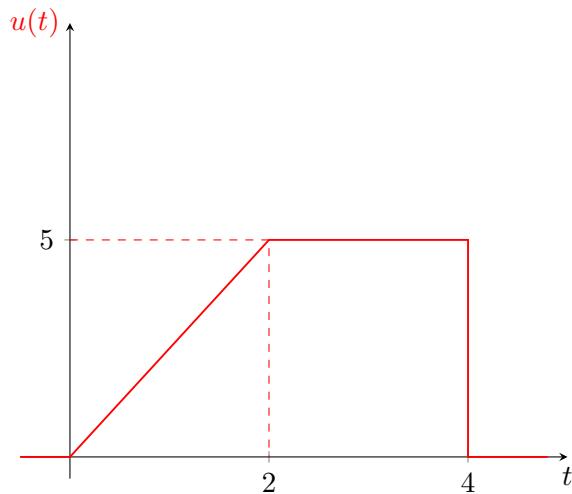
Sia il seguente segnale (in rosso), si vuole rappresentare la sua combinazione lineare che lo genera



$$u(t) = +2\delta_{-2}(t) - 2\delta_{-2}(t-1) - 2\delta_{-2}(t-5) + 2\delta_{-2}(t-6)$$

Rampa con gradino

Un altro esempio



$$u(t) = \frac{5}{2}\delta_{-2}(t) - \frac{5}{2}\delta_{-2}(t-2) - 5\delta_{-1}(t-4)$$

3.5 Modi naturali nel regime forzato

Si analizza lo stato di un sistema forzato da un impulso

$$x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau = e^{At} B c = H(t)c = x_l(t) \Big|_{x_0=Bc}$$

Sia il forzamento impulsivo $u(t) = \delta(t)c$, $H(t)$ è la matrice delle risposte impulsive dello stato. Si ricorda l'equazione dell'evoluzione libera

$$x_l(t) = e^{At} x_0$$

Si nota che x_0 e Bc hanno la stessa dimensione e sono entrambi costanti quindi l'evoluzione forzata è pari all'evoluzione libera con condizioni iniziali x_0 pari Bc , ossia lo stato è stato modificato istantaneamente, a partire dall'origine, mediante la funzione impulso. L'evoluzione libera sarà composta dai modi naturali ricavati nell'analisi dell'evoluzione libera.

Si supponga che il vettore c sia nullo ovunque eccetto per una componente j

$$c^T = [0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]$$

La risposta forzata sarà

$$x_f(t) = e^{at} B c = e^{At} b_j = h_j(t)$$

Si ottiene solo la colonna j -esima di $H(t)$ ossia la risposta all'impulso all'ingresso j -esimo.

$$H(t) = e^{At} B = \sum_j e^{\lambda_j t} u_j v_j^T B$$

Il prodotto $v_j^T B$ è un vettore riga, v_j^T è sicuramente un vettore non nullo, B allo stesso tempo è la matrice degli ingressi, non ha senso considerarla nulla; ad ogni modo il prodotto tra questi due termini può comunque dare origine al vettore nullo, se v_j^T appartiene al *nullo sinistro* di B , o comunque essere nullo per alcuni autovalori j , se ciò accade, il modo j esimo non compare nel risultato, si parla di modo *non eccitabile* dall'ingresso, viceversa

$$v_j^T B \neq 0 \Leftrightarrow \text{Modo } j \text{ eccitabile}$$

Analisi della funzione $\Psi(t)$ dell'uscita

$$\Psi(t) = C e^{At} = \sum_j e^{\lambda_j t} C u_j v_j^T$$

Analogamente al caso precedente, il vettore u_j può essere contenuto nel *kernel* di C , il prodotto sarà il vettore nullo, viceversa

$$C u_j \neq 0 \Leftrightarrow \text{Modo } j \text{ osservabile}$$

L'uscita forzata, si rappresenta la matrice delle risposte all'impulso in uscita

$$W(t) = C e^{At} B = \sum_j e^{\lambda_j t} C u_j v_j^T B$$

Il modo sarà nullo sia se non è osservabile, sia se non è eccitabile.

3.5.1 Risposta al gradino

Si valuta l'equazione dello stato

$$x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \delta_{-1}(\tau) d\tau = \int_0^t e^{A(t-\tau)} d\tau \cdot B$$

Si ipotizza per semplicità che A sia diagonalizzabile

$$\begin{aligned} x_f(t) &\stackrel{A \text{ diag.}}{=} U \int_0^t e^{\Lambda(t-\tau)} d\tau U^{-1} B = U \int_0^t \text{diag} \left\{ e^{\lambda_1(t-\tau)}, \dots, e^{\lambda_n(t-\tau)} \right\} d\tau U^{-1} B \\ &= U \text{diag} \left\{ \frac{e^{\lambda_1 t} - 1}{\lambda_1}, \dots, \frac{e^{\lambda_n t} - 1}{\lambda_n} \right\} U^{-1} B \end{aligned}$$

Il prodotto $U^{-1}B$ è pari a

$$U^{-1}B = \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix} B$$

Sarà dunque nullo per alcune righe, ossia per i modi non eccitabili, dunque non comparirà il modo j -esimo in uscita.

La risposta forzata nell'uscita, con ipotesi semplificativa di sistema strettamente proprio ($D = 0$)

$$y_f(t) = Cx_f(t) = CU \text{diag} \left\{ \frac{e^{\lambda_1 t} - 1}{\lambda_1}, \dots, \frac{e^{\lambda_n t} - 1}{\lambda_n} \right\} U^{-1} B$$

Alcune colonne del prodotto CU si potranno annullare, individuano i modi non osservabili mentre le righe nulle a destra $U^{-1}B$ rappresentano i modi non eccitabili, dunque i modi in uscita devono essere sia osservabili che eccitabili.

Si può eseguire l'estensione degli estremi di integrazione dato che $u(t) = 0 \forall t < 0$ e $H(t) = 0 \forall t > 0$ si ottiene la definizione di **prodotto di convoluzione**, la matrice H contiene dunque solo i modi eccitabili.

$$x_f(t) = \int_0^t H(t-\tau) u(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} H(t-\tau) u(\tau) d\tau \stackrel{\text{def}}{=} H(t) * u(t)$$

Analogamente per la $y_f(t)$

$$y_f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t W(t-\tau) u(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} W(t-\tau) u(\tau) d\tau \stackrel{\text{def}}{=} W(t) * u(t)$$

Capitolo 4

Analisi nel dominio di Laplace

4.1 Trasformata di Laplace

Sia la funzione f reale e nulla per $t < 0$, la seconda ipotesi permette di ricavare univocamente l'antitrasformata, non è necessaria per eseguire la trasformata.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = 0 \quad \forall t < 0$$

Viceversa se la funzione non è nulla per $t < 0$ potrebbe comunque esserlo per un certo istante minore di zero; se il sistema è tempo invariante si può effettuare una traslazione temporale, prima e dopo aver trasformato e antitrasformato. Viceversa una funzione sinusoidale non può essere trasformata nel dominio di laplace e antritrasformata.

Definizione di trasformata, l'integrale parte da 0^- per sottolineare che se sono presenti impulsi all'istante iniziale, questi vanno considerati

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \quad s \in \mathbb{C}$$

Non è detto che l'integrale converga ma se converge per un certo s con parte reale σ allora convergerà per tutti gli altri s con parte reale maggiore di σ , si individua quindi un semipiano destro di convergenza.

Dato che la trasformata di Laplace è una funzione *analitica* si può estendere la definizione a qualunque punto del semipiano di convergenza eccetto le singolarità polari della funzione.

4.1.1 Proprietà della trasformata

- **Linearità:** $\mathcal{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$
- **Traslazione in t :** $\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-s\tau} F(s) \quad \tau > 0$
- **Traslazione in s :** $\mathcal{L}[e^{\sigma t} f(t)] = F(s - \sigma)$

- **Derivazione nel tempo:**

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\dot{f}(t)] &= sF(s) - f(0^-) \\ \mathcal{L}[\ddot{f}(t)] &= s\mathcal{L}[\dot{f}(t)] - \dot{f}(0^-) = s^2F(s) - sf(0^-) - \dot{f}(0^-) \\ &\vdots \quad \text{iterando} \\ \mathcal{L}[f^{(n)}(t)] &= s^nF(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i}f^{(i-1)}(0^-)\end{aligned}$$

- **Derivazione in s :** $\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$
- **Integrazione in t :** $\mathcal{L}[\int_0^t f(\tau)d\tau] = \frac{1}{s}F(s)$
- **Convoluzione in t :** $\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s)$
- **Teorema valore iniziale:**

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s)$$

- **Teorema valore finale:**

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

4.1.2 Trasformate degli ingressi canonici

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\delta(t)] &= 1 & \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)] &= \frac{1}{s} & \mathcal{L}[\delta_{-2}(t)] &= \frac{1}{s^2} & \mathcal{L}[\delta_{-3}(t)] &= \frac{1}{s^3} \\ \mathcal{L}[\delta_{-n}(t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\delta_{-1}(t)\right] = \frac{1}{s^n} \\ \mathcal{L}[e^{\alpha t}\delta_{-1}(t)] &= \frac{1}{s-\alpha} \\ \mathcal{L}[te^{\alpha t}\delta_{-1}(t)] &= \mathcal{L}[e^{\alpha t}\delta_{-2}(t)] = \frac{1}{(s-\alpha)^2} \\ \mathcal{L}\left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\alpha t}\delta_{-1}(t)\right] &= \frac{1}{(s-\alpha)^n} \\ \mathcal{L}[\sin(\omega t)\delta_{-1}(t)] &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad \mathcal{L}[\cos(\omega t)\delta_{-1}(t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\ \mathcal{L}[e^{\alpha t}\sin(\omega t)\delta_{-1}(t)] &= \frac{\omega}{(s-\alpha)^2 + \omega^2}, \quad \mathcal{L}[e^{\alpha t}\cos(\omega t)\delta_{-1}(t)] = \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2 + \omega^2} \\ \mathcal{L}[t\sin(\omega t)\delta_{-1}(t)] &= \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}, \quad \mathcal{L}[t\cos(\omega t)\delta_{-1}(t)] = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2} \\ \mathcal{L}[te^{\alpha t}\sin(\omega t)\delta_{-1}(t)] &= \frac{2\omega(s-\alpha)}{((s-\alpha)^2 + \omega^2)^2}, \quad \mathcal{L}[te^{\alpha t}\cos(\omega t)\delta_{-1}(t)] = \frac{(s-\alpha)^2 - \omega^2}{((s-\alpha)^2 + \omega^2)^2}\end{aligned}$$

Trasformata di una funzione periodica

Sia f una funzione periodica di periodo T

$$f_T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Se ne vuole calcolare la trasformata di Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}[f_T(t)] = \left(\int_0^T f(t)e^{-st} dt \right) \cdot \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

Antitrasformata razionali fratte

Sia la seguente funzione fratta con grado $\frac{m}{n}$

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Le radici del numeratore vengono chiamate **zeri**, le radici del denominatore vengono denominate **poli**. La funzione è ovviamente non definita sui poli. La differenza $n - m$ tra il numero di poli e zeri, chiamata anche *eccesso poli-zeri* viene detta **grado relativo** della funzione.

$$n - m = \begin{cases} n > m \\ n = m \\ n < m \rightarrow \text{Funzioni non causali} \end{cases}$$

I primi due casi saranno gli unici considerati in questo corso.

n=m

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N'(s)}{D(s)} + d \quad \frac{[n-1]}{[n]} + d$$

Si ottiene una funzione con grado del numeratore pari a quello del denominatore meno uno sommata ad una costante d .

Esempio numerico

$$\begin{array}{r} F(s) = \frac{3s^2 + s + 2}{s + 1} \rightarrow \begin{array}{c} 3s^2 + s + 2 \\ - 3s^2 - 3s \\ \hline - 2s + 2 \\ 2s + 2 \\ \hline 4 \end{array} \\ \hline \end{array}$$

Il quoziente d sarà $3s - 2$ e il resto N' sarà 4, la funzione dunque si riscrive come

$$F(s) = \frac{4}{s + 1} + 3s - 2$$

L'antitrasformata sarà

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = 4e^{-t} + 3\dot{\delta}(t) - 2\delta(t)$$

Non ha molto senso fisico la notazione di $\dot{\delta}(t)$

n>m

Si sviluppa la funzione in fratti semplici

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{R_1}{s - p_1} + \frac{R_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{R_n}{s - p_n}$$

I termini R_i sono chiamati residui polari associati al polo p_i , si supponga per il momento che i poli siano tutti distinti tra loro.

$$R_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) F(s)$$

Si dimostra inoltre che

$$\sum_{i=1}^n R_i = \begin{cases} 0 & n - m > 1 \\ \frac{b_m}{a_n} & n - m = 1 \end{cases}$$

I coefficienti a_n e b_n si ottengono dai polinomi del numeratore e denominatore:

$$\begin{cases} N(s) = b_n s^n + \dots + b_0 \\ D(s) = a_n s^n + \dots + a_0 \end{cases}$$

Esempio con poli coincidenti

Si supponga che il polo p_j abbia molteplicità 3

$$F(s) = \frac{R_1}{s - p_1} + \frac{R_2}{s - p_2} + \dots + \frac{R_j}{s - p_j} + \frac{R_j^{(2)}}{(s - p_j)^2} + \frac{R_j^{(3)}}{(s - p_j)^3} + \dots + \frac{R_n}{s - p_n}$$

Il residuo associato alla potenza k -esima del polo i -esimo con molteplicità h si calcola con la seguente

$$R_i^{(k)} = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{1}{(h - k)!} \frac{d^{h-k}}{ds^{h-k}} \left[(s - p_i)^h F(s) \right]$$

4.1.3 Esempi numerici trasformate fratte

Poli distinti

Sia la seguente funzione razionale fratta con due poli distinti: $p_1 = -2$, $p_2 = -5$, $n = 2$, $m = 1$, $n - m = 1$

$$F(s) = \frac{s - 10}{(s + 2)(s + 5)} = \frac{R_1}{s + 2} + \frac{R_2}{s + 5}$$

Si calcolano i residui polari:

$$\begin{aligned} R_1 &= \lim_{s \rightarrow -2} (s + 2)F(s) = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{s - 10}{s + 5} = \frac{-12}{+3} = -4 \\ R_2 &= \lim_{s \rightarrow -5} (s + 5)F(s) = \lim_{s \rightarrow -5} \frac{s - 10}{s + 2} = \frac{-15}{-3} = 5 \\ \sum_{i=1}^2 R_i &= \frac{b_m}{a_n} = \frac{1}{1} \Rightarrow R_2 = 1 - R_1 \end{aligned}$$

L'antitrasformata:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{4}{s+2} + \frac{5}{s+5}\right] = (-4e^{-2t} + 5e^{-5t})\delta_{-1}(t)$$

In alternativa alla tecnica dei residui si può sfruttare il principio di identità dei polinomi

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s - 10}{(s + 2)(s + 5)} = \frac{R_1}{s + 2} + \frac{R_2}{s + 5} = \frac{R_1(s + 5) + R_2(s + 2)}{(s + 2)(s + 5)} = \\ &= \frac{(R_1 + R_2)s + (5R_1 + 2R_2)}{(s + 2)(s + 5)} \Rightarrow \begin{cases} R_1 + R_2 = 1 \\ 5R_1 + 2R_2 = -10 \end{cases} = \dots \\ &= \begin{cases} R_1 = -4 \\ R_2 = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Analogamente è possibile sostituire n valori differenti di s e risolvere il sistema ottenuto per ricavare i residui.

Radici coincidenti

La seguente funzione ha due poli

$$\begin{cases} p_1 = 0 \\ p_2 = -3 & m_a = 2 \\ n - m = 2 \end{cases}$$

$$F(s) = \frac{s+18}{s(s+3)^2} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2^{(1)}}{s+3} + \frac{R_2^{(2)}}{(s+3)^2}$$

Si calcolano i residui

$$\begin{aligned} R_1 &= \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+18}{(s+3)^2} = \frac{18}{9} = 2 \\ R_2^{(2)} &= \lim_{s \rightarrow -3} (s+3)^2 F(s) = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{s+18}{s} = \frac{15}{-3} = -5 \\ R_2^{(1)} &\stackrel{n-m>1}{=} - \sum_{i=1}^2 R_i = -R_1 = -2 \quad \text{oppure} \\ &\quad i \neq 2 \\ R_2^{(1)} &= \lim_{s \rightarrow -3} \frac{d}{ds} [(s+3)^2 F(s)] = -2 \end{aligned}$$

Nella sommatoria vanno calcolati solo i residui semplici e non quelli associati a potenze superiori all'unità.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s} + \frac{-2}{s+3} + \frac{-5}{(s+3)^2}\right] = (2 - 2e^{-3t} - 5e^{-3t} \cdot t) \delta_{-1}(t)$$

4.1.4 Radici complesse e coniugate

$$F(s) = \frac{100}{(s+1)(s^2 + 4s + 13)}$$

I poli saranno $p_1 = -1$, $p_2 = -2 + j3$, $p_3 = p_2^* = -2 - j3$

La decomposizione in fratti semplici

$$F(s) = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s+2-j3} + \frac{R_3 = R_2^*}{s+2+j3}$$

$$\begin{aligned} R_1 &= \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)F(s) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{100}{s^2 + 4s + 13} = \frac{100}{10} = 10 \\ R_2 &= \lim_{s \rightarrow -2+j3} (s+2-j3)F(s) = \lim_{s \rightarrow -2+j3} \frac{100}{(s+1)(s+2+j3)} = \\ &= \frac{100}{(-2+j3+1)(-2+j3+j3)} = -\frac{5}{3}(3-j) = -5 + \frac{5}{3}j = R_3^* \\ R_3 &= -5 - \frac{5}{3}j \end{aligned}$$

Si può dunque antitrasformare

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[f(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{10}{s+1} - \frac{5}{3} \left(\frac{3-j}{s+2-j3} + \frac{3+j}{s+2+j3} \right) \right] = \\ &= 10 \left(e^{-t} - \frac{1}{6} \cdot 2|R_2| e^{\Re(p_2)t} \cos(\Im(p_2) \cdot t + \arg(p_2)) \right) = \\ &= 10 \left(e^{-t} - \frac{1}{6} 2\sqrt{10} e^{-2t} \cos(3t + \arg(-3+j)) \right) \delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

In alternativa sfruttando il principio di identità dei polinomi

$$F(s) = \frac{100}{(s+1)(s^2 + 4s + 13)} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_a s + R_b}{s^2 + 4s + 13}$$

Si calcola $R_1 = 10$ con la formula precedente, si esegue il minimo comune multiplo

$$100 = 10(s^2 + 4s + 13) + (s+1)(R_a s + R_b)$$

In questo caso può essere conveniente sostituire due valori di s

$$\begin{aligned} s = 0 &\rightarrow \begin{cases} 100 = 130 + R_b \\ 100 = 180 + 2(R_a + R_b) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R_a = -10 \\ R_b = -30 \end{cases} \\ s = 1 &\rightarrow \begin{cases} 100 = 130 + R_b \\ 100 = 180 + 2(R_a + R_b) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R_a = -10 \\ R_b = -30 \end{cases} \end{aligned}$$

Si può calcolare l'antitrasformata

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10}{s+1} - 10\frac{s+3}{(s+2)^2+9}\right]$$

Il secondo termine può essere antitrasformato facendo comparire il 3 ed $(s+2)$ in modo da far comparire le trasformate notevoli di seno e coseno.

$$\begin{aligned} \frac{s+3}{(s+2)^2+9} &= \frac{(s+2)+1}{(s+2)^2+3^2} \\ f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10}{s+1} - 10\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} - \frac{10}{3}\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right] = \\ &= 10\left(e^{-t} - e^{-2t}\left(\cos(3t) + \frac{1}{3}\sin(3t)\right)\right)\delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

Con varie formule trigonometriche è possibile ottenere l'espressione identica alla precedente $\sqrt{10}\cos(3t + \arg(-3+j))$.

4.2 Funzione di trasferimento

Strumento molto utile al fine di calcolare le risposte forzate dei sistemi. Si consideri un sistema Lineare tempo-invariante S , sottoposto ad un ingresso $u(t)$ con uscita $y(t)$.

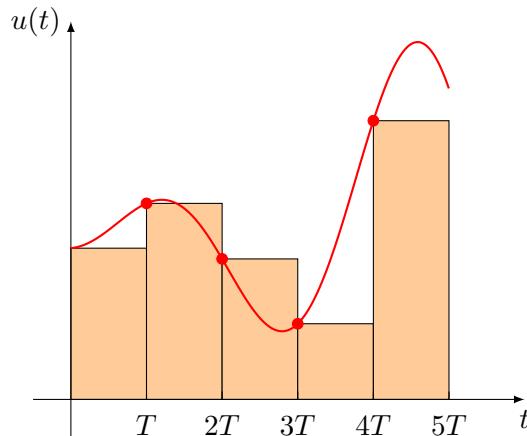
La definizione di *funzione di trasferimento* non è univoca, si definisce in questo corso come la trasformata della matrice delle risposte impulsive.

$$W(s) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}[W(t)]$$

Non sono presenti informazioni riguardo lo stato del sistema nella matrice $W(t)$, per la biunivocità della trasformata, anche la funzione di trasferimento non conterrà informazioni circa lo stato del sistema.

Si considera un ingresso generico $u(t)$, viene *campionato* con una sequenza di impulsi rettangolari di periodo T . Si ottiene dunque una rappresentazione $\tilde{u}(t)$

$$\tilde{u}(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \delta_T(t - iT) T u(iT)$$



Essendo il sistema lineare per ipotesi, l'uscita sarà combinazione lineare delle singole risposte ai differenti impulsi rettangolari

$$\tilde{y}(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} W_T(t - iT) T u(iT) \xrightarrow{T \rightarrow 0} y_f(t) = \int_0^{+\infty} W(t - \tau) u(\tau) d\tau$$

Si può estendere l'estremo di integrazione inferiore dato che $u(\tau)$ è nulla per $\tau < 0$

$$y_f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(t - \tau) u(\tau) d\tau = W(t) * u(t)$$

La risposta forzata di un sistema LTI è sempre data dal prodotto di convoluzione tra la matrice delle risposte agli impulsi e l'ingresso.

Si applica la trasformata di Laplace della risposta forzata

$$\mathcal{L}[y_f(t)] = Y_f(s) = \mathcal{L}[W(t) * u(t)] = \mathcal{L}[W(t)] \cdot \mathcal{L}[u(t)] = W(s) \cdot U(s)$$

Se il sistema è *SISO* (Single-Input-Single-Output) allora

$$W(s) = \frac{Y_f(s)}{U(s)}$$

Con la funzione di trasferimento non è necessario eseguire l'integrale di convoluzione per determinare l'uscita forzata ma è sufficiente eseguire il prodotto delle due trasformate e antitrasformare.

Sia la seguente ISU generica

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Il movimento forzato

$$x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \xrightarrow{u=\delta} x_\delta(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\delta(\tau) d\tau = e^{At} B = H(t)$$

Uscita forzata

$$y_f(t) = Cx_f(t) + Du(t) \xrightarrow{u=\delta} y_\delta(t) = Ce^{At} B + D\delta(t) = W(t)$$

In alternativa

$$y_f(t) = C \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t) = \int_0^t \left(Ce^{A(t-\tau)} B + D\delta(t-\tau) \right) u(\tau) d\tau$$

Si estendono gli estremi di integrazione

$$y_f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(t-\tau) u(\tau) d\tau \stackrel{\text{def}}{=} W(t) * u(t)$$

Esempio nastro trasportatore

Sia dato un nastro di lunghezza L avvolto su due rulli che ruotano con velocità costante v , sul nastro viene depositata una certa quantità di materiale $u(t)$.

Il nastro non altera la quantità di materiale, dunque l'uscita sarà semplicemente l'ingresso traslato nel tempo di una quantità $\tau = \frac{L}{v}$

$$y(t) = u \left(t - \frac{L}{v} \right) = u(t - \tau)$$

Per calcolare la ISU è necessario definire una variabile di stato che ne caratterizzi la condizione iniziale, ossia la quantità di materiale depositata lungo il nastro, funzione

dello spazio s e del tempo t . Il sistema è dunque a parametri *distribuiti* perché ha uno stato che varia con continuità ed ha quindi infiniti valori differenti. Il modello ISU non sarà più alle derivate totali ma alle derivate parziali.

Se si sottopone il sistema ad un ingresso impulsivo si ottiene la risposta all'impulso e trasformando si ottiene anche la funzione di trasferimento

$$u(t) = \delta(t) \Rightarrow w(t) = \delta(t - \tau) \xrightarrow{\mathcal{L}} W(s) = e^{-s\tau}$$

La funzione di trasferimento non è in questo caso legata all'esistenza di una ISU in forma canonica, è sufficiente che il sistema sia lineare-tempo-invariante. L'uscita è ancora il prodotto di convoluzione tra la funzione di trasferimento e l'ingresso.

Definizione funzione di trasferimento con ISU

Si applica la trasformata di Laplace all'intero sistema ISU

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Raccogliendo i termini della prima equazione

$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

La matrice $(sI - A)$ è invertibile per tutti i valori di s ad eccezione degli autovalori della matrice A . Con tale ipotesi:

$$\begin{cases} X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s) \end{cases}$$

Si è ricavata una ISU in forma esplicita, analoga alle formule di Lagrange ricavate alla sezione 3.2. Per analogia

$$\begin{cases} X(s) = X_l(s) + X_f(s) \\ Y(s) = Y_l(s) + Y_f(s) \end{cases}$$

Si ottiene ancora la funzione di trasferimento

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

L'evoluzione libera

$$\begin{aligned} x_l(t) &= e^{At}x_0 \xleftarrow{\mathcal{L}} X_l(s) = (sI - A)^{-1}x(0) \quad \forall x(0) \\ &\Downarrow \\ \mathcal{L}[e^{At}] &= \mathcal{L}[\Phi(t)] = (sI - A)^{-1} = \Phi(s) \end{aligned}$$

La trasformata della matrice esponenziale è l'inversa di $(sI - A)$, è possibile calcolare la matrice esponenziale come la sua antitrasformata. Analogamente è comodo calcolare la risposta in evoluzione libera.

La matrice delle risposte impulsive nello stato

$$H(t) = e^{At}B \xleftrightarrow{\mathcal{L}} H(s) = (sI - A)^{-1}B = \Phi(s)B$$

$$x_f(t) = \int_0^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau = H(t)*u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_f(s) = H(s)U(s)$$

Analogamente per l'uscita

$$y_l(t) = Ce^{At}x(0) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} Y_l(s) = C(sI - A)^{-1}x(0)$$

$$y_f(t) = C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) + Du(t)d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{L}} Y_f(s) = W(s)U(s)$$

4.2.1 Equazione differenziale generale

Sia un sistema LTI espresso mediante la sua equazione differenziale generale

$$y^{(n)} + \alpha_{n-1}y^{(n-1)} + \alpha_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + \alpha_0y = \beta_m u^{(m)} + \beta_{m-1}u^{(m-1)} + \dots + \beta_0u$$

Si vuole conoscere il legame tra questa equazione e la funzione di trasferimento, è necessario conoscere anche le condizioni iniziali, si può supporre che siano tutte nulle:

$$y(0) = \dot{y}(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0 \quad [y(t) = y_f(t)]$$

Si trasforma l'intera equazione con Laplace

$$\begin{aligned} s^n Y(s) + \alpha_{n-1}s^{n-1}Y(s) + \dots + \alpha_0Y(s) &= \beta_m s^m U(s) + \dots + \beta_0U(s) \\ (s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_0) Y(s) &= (\beta_m s^m + \dots + \beta_0) U(s) \end{aligned}$$

Nel caso di sistemi *SISO* la funzione di trasferimento si ricava con il rapporto tra le trasformate dell'uscita e dell'ingresso, utilizzando la precedente si ottiene

$$W(s) = \frac{Y_f(s)}{U(s)} = \frac{\beta_m s^m + \dots + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_0}$$

Nei sistemi LTI la funzione di trasferimento si esprime sempre in una forma razionale fratta. L'ordine n del polinomio al denominatore sarà sempre maggiore o uguale a quello del numeratore, viceversa si avrebbe un sistema non causale, non di interesse nell'ambito del corso. antitrasformando la funzione di trasferimento si può ricavare l'equazione differenziale generale e viceversa.

4.2.2 Struttura della funzione di trasferimento

Si ricorda che l'unico termine dipendente da s nella funzione di trasferimento è la trasformata della funzione di transizione $\Phi(s)$

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = C\Phi(s)B + D$$

Si analizza la struttura di $\Phi(s)$, l'inversione di una matrice si esegue con il rapporto della trasposta della matrice *aggiunta* e il suo determinante

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{((sI - A)^a)^T}{|sI - A|}$$

Il denominatore è il polinomio caratteristico.

In misura esemplificativa si considera una matrice 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Phi(s) = \begin{pmatrix} s - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s - a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\left(\begin{pmatrix} s - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s - a_{22} \end{pmatrix}^a \right)^T}{(s - a_{11})(s - a_{22}) - a_{12}a_{21}} = \frac{\begin{pmatrix} s - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & s - a_{11} \end{pmatrix}}{p(s)}$$

L'ordine del polinomio è due mentre l'ordine dei polinomi contenuti nella matrice al numeratore sono al più di ordine $n - 1$, questo è sempre vero dato che i complementi algebrici si costruiscono rimuovendo una riga ed una colonna quindi riducendo il grado della matrice di partenza, di conseguenza il grado del suo determinante.

Tornando al caso generale

$$\Phi(s) = \frac{E(s)}{p(n)}$$

I polinomi contenuti nella matrice $E(s)$ possono essere fattorizzati e potrebbe capitare che tutti abbiano uno o più fattori in comune, possono essere messi in evidenza. Qualcuno di questi fattori potrebbe essere in comune anche ai fattori del denominatore, si potrebbero dunque semplificare, in tal caso il polinomio al denominatore indicato con $m(s)$ prende il nome di *polinomio minimo* con grado minore o uguale ad n . Nel caso in cui non ci siano state semplificazioni si parla di sistema in *forma minima*.

La struttura generale del polinomio caratteristico:

$$p(s) = |sI - A| = \prod_{i=1}^{n'} (s - \lambda_i)^{m_{ai}}$$

La struttura corrispondente del polinomio minimo si può dimostrare essere:

$$m(s) = \prod_{i=1}^{n'} (s - \lambda_i)^{m_{gi}}$$

Le radici sono ancora tutte presenti ma stavolta non presenti con esponente la molteplicità algebrica bensì quella geometrica.

Si ricostruisce la matrice $W(s)$ e si indicano le dimensioni delle matrici che la compongono:

$$\begin{array}{cccccc} W(s) & = & C & \Phi(s) & B & + & D \\ & & p \times m & p \times n & n \times n & n \times m & p \times m \end{array}$$

La matrice $\Phi(s)$ è composta da funzioni razionali fratte, tutte strettamente proprie, viene moltiplicata a destra e a sinistra da matrici costanti, sarà ancora formata da funzioni razionali fratte in s strettamente proprie. Quando si somma con la matrice D , se questa non è nulla, si otterranno funzioni razionali fratte proprie, in cui il grado di numeratore e denominatore coincidono.

4.2.3 Trasformazione del sistema in forma di stato

Si ricorda che

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \mathcal{L}[e^{At}] \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)] = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

Esempio numerico:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow (sI - A) = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 2 & s + 3 \end{pmatrix}$$

Si calcola l'inversa

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}}{s(s+3)+2} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s+2}$$

$$(s+1)(s+2)$$

Scomponendo in fratti semplici, in questo caso i residui saranno matrici 2×2 .

$$R_1 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)\Phi(s) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}}{s+2} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}}{1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Analogamente il secondo residuo

$$R_2 = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)\Phi(s) = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}}{s+1} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}}{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Entrambe le matrici sono di rango unitario pari alla molteplicità algebrica della corrispondente radice $\rho(R_i) = m_{ai}$.

Sostituendo si ottiene la trasformata della matrice di transizione allo stato, ossia la funzione di trasferimento del sistema

$$\Phi(s) = \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{s+2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Antitrasformando con Laplace

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)] = e^{-t}R_1 + e^{-2t}R_2 = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^2 e^{\lambda_i t} R_i \stackrel{\text{Radici distinte}}{=} \sum_{i=1}^2 e^{\lambda_i t} u_i v_i^T \Rightarrow R_i = u_i v_i^T$$

Questa considerazione può essere generalizzata anche al caso generico di radici coincidenti. La matrice A è diagonale a blocchi, un autovalore sarà sicuramente -1 , gli altri due si ricavano dal polinomio caratteristico della sotto matrice 2×2 e sono -1 e -2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 & m_{a1} = 2 \\ \lambda_2 = -2 & m_{a2} = 1 \end{cases}$$

La molteplicità geometrica del primo autovalore coincide con quella algebrica, la matrice è ancora diagonalizzabile.

$$\Phi(s) = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s+2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{At} = e^{-t}R_1 + e^{-2t}R_2 = e^{-t}(u'_1 v'_1{}^T + u''_1 v''_1{}^T) + e^{-2t}u_2 v_2^T$$

Confrontando i risultati ottenuti con l'antitrasformata e quelli ottenuti mediante la diagonalizzazione si vede che

$$R_1 = u'_1 v'_1{}^T \quad R_2 = u_2 v_2^T$$

La matrice R_1 ha rango 2 perché somma di due matrici ortogonali di rango unitario.

4.2.4 Legame tra la funzione di trasferimento e i modi naturali

Si riprende la definizione di funzione di trasferimento rispetto ad un riferimento ISU

$$\begin{aligned} W(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D = C\Phi(s)B + D = C \frac{E(s)}{m(s)}B + D \\ &= \frac{E'(s)}{d_w(s)} + D = \frac{M(s)}{d_w(s)} \end{aligned}$$

Eseguendo il prodotto $CE(s)B$ si ottiene una matrice diversa chiamata $E'(s)$, non è detto che al denominatore ci sia ancora $m(s)$, le nuove radici del numeratore potrebbero essere in comune con quelle del polinomio minimo, quindi $m(s) \rightarrow d_w(s)$, non è detto che conterrà ancora tutti gli autovalori della matrice A .

Gli autovalori “persi” godono di alcune proprietà, si antitrasforma e si riprende l’analisi nel dominio del tempo

$$W(t) = \mathcal{L}^{-1}[W(s)] = C\Phi(t)B + D\delta(t) = C \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} Cu_i v_i^T B + D\delta(t)$$

se u_i è contenuto nel *kernel* di C il prodotto si annulla ma il termine $e^{\lambda_i t}$ non è presente nella matrice $W(t)$ allora λ_i non può essere una radice di $d_w(s)$ altrimenti ricomparirebbe durante la scomposizione in fratti semplici e dunque nell’antitrasformata.

I modi per i quali il prodotto Cu_i fosse nullo sono stati chiamati “modi non osservabili”, analogamente per il prodotto $v_i^T B$ sono chiamati “modi non eccitabili”, entrambi non compaiono nella matrice $W(t)$ e dunque non compaiono i rispettivi autovalori nella matrice $d_w(s)$.

Caso con radici complesse e coniugate

Sia data una matrice con $n = 3$ e un autovalore reale e due complessi e coniugati

$$e^{At} \quad n = 3 \quad \lambda, \alpha \pm j\omega$$

La matrice $\Phi(s)$ si ottiene ancora mediante l'utilizzo dei residui, effettuando la somma degli ultimi due termini si ha

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{R_1}{s - \lambda} + \frac{R_a + jR_b}{s - \alpha + j\omega} + \frac{R_a - jR_b}{s - \alpha - j\omega} = \frac{R_1}{s - \lambda} + \frac{2R_a(s - \alpha) - 2R_b\omega}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}$$

L'antitrasformata comprenderà le funzioni trigonometriche

$$\Phi(t) = R_1 e^{\lambda t} + 2R_a e^{\alpha t} \cos(\omega t) - 2R_b e^{\alpha t} \sin(\omega t)$$

Se si confronta il risultato ottenuto con quello a pagina 97 nel dominio del tempo si ottiene

$$\begin{cases} R_1 = uv^T \\ 2R_a = u_a v_a^T + u_b v_b^T \\ 2R_b = u_b v_b^T - u_a v_a^T \end{cases}$$

4.2.5 Usi della funzione di trasferimento

La funzione di trasferimento può essere rappresentata in diverse forme per poter rappresentare particolari proprietà. ($m \leq n$)

$$W(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\beta_m s^m + \dots + \beta_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_0}$$

Le radici del numeratore sono *zeri* e quelle del denominatore *poli*, l'insieme di queste radici prende il nome di *singolarità* della funzione di trasferimento. Le radici del denominatore contengono un insieme degli autovalori della matrice della dinamica, se questo insieme è completo, ossia tutti gli autovalori sono contenuti negli zeri del denominatore della funzione di trasferimento, allora il sistema si dice in forma *minima*.

La prima forma studiata è quella *fattorizzata* ossia si fattorizzano il numeratore e il denominatore, prende anche il nome di **Forma di Evans**, il guadagno (di Evans) in evidenza $K_E = \frac{\beta_m}{\alpha_n}$.

Se capitano radici complesse e coniugate, possono essere poste nella forma trinomiale reale

$$W(f) = K_E \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} = K_E \frac{\prod_i (s - z_i) \prod_i (s^2 + a_{zi}s + b_{zi})}{\prod_i (s - p_i) \prod_i (s^2 + a_{pi}s + b_{pi})}$$

con $b_{zi}, b_{pi} > 0$

Forma di Bode

Si definisce una costante per zeri e poli reali

$$\tau_{zi} = -\frac{1}{z_i} \quad \tau_{pi} = -\frac{1}{p_i}$$

Per i trinomi indivisibili invece si introducono ulteriori due coefficienti, la pulsazione naturale ω e il coefficiente di smorzamento ζ

$$\omega_{nzi} = \sqrt{b_{zi}} \quad \zeta_{zi} = \frac{a_{zi}}{2\omega_{nzi}} \quad \omega_{npi} = \sqrt{b_{pi}} \quad \zeta_{pi} = \frac{a_{pi}}{2\omega_{npi}}$$

Si riscrive la funzione di trasferimento nella seguente forma, K_B è il guadagno di Bode, il termine s indica poli o zeri nell'origine (a seconda del segno di g)

$$W(s) = \frac{K_B}{s^g} \frac{\prod_i (1 + s\tau_{zi}) \prod_i \left(1 + \frac{2\zeta_{zi}}{\omega_{nzi}} s + \frac{s^2}{\omega_{nzi}^2}\right)}{\prod_i (1 + s\tau_{pi}) \prod_i \left(1 + \frac{2\zeta_{pi}}{\omega_{npi}} s + \frac{s^2}{\omega_{npi}^2}\right)}$$

Si indicano i termini messi in evidenza per passare da una forma all'altra

$$K_B = K_E \frac{\prod_i \left(-\frac{1}{z_i}\right) \prod_i (b_{zi})}{\prod_i \left(-\frac{1}{p_i}\right) \prod_i (b_{pi})}$$

L'intero g che compare come esponente della s al denominatore prende il nome di *tipo* del sistema, se $g = 0$ il sistema è di tipo zero, se $g = 1$ il sistema è di tipo uno e così via.

Ad esempio:

$$g = 0 \Rightarrow K_B = W(0)$$

Si annullano tutti i termini nella produttoria quando $s = 0$, resta il termine K_B che prende anche il nome di *guadagno statico*. Si consideri un sistema zero con tutti i poli a parte reale negativa, si applica in ingresso un gradino unitario, si vuole valutare l'uscita $y(t)$. Dopo un periodo di tempo sufficientemente lungo, per il teorema del valore finale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sW(s) \frac{1}{s} = K_B$$

Dopo un certo tempo, l'uscita sarà pari ad un valore costante pari al guadagno statico.

Se il sistema è di tipo uno, la costante K_B prende il nome di *guadagno di velocità*

$$g = 1 \Rightarrow K_B = \lim_{s \rightarrow 0} sW(s)$$

il termine $sW(s)$ è la derivata nel dominio di Laplace dell'uscita, il sistema diverge con una rampa costante di pendenza pari a K_B .

Se il sistema fosse di tipo due si chiamerebbe K_B il guadagno di accelerazione.

4.3 Risposta ai segnali canonici

Ci si riferirà principalmente alla risposta al gradino e all'impulso, facendo uso della funzione di trasferimento presentata nella sezione precedente. Si esegue inizialmente un'analisi di tipo “asintotico”, per $t \rightarrow \infty$, successivamente per $t \rightarrow 0$. Questo tipo di risposta non richiede l'analisi puntuale delle equazioni del sistema, è necessario analizzare alcune caratteristiche della funzione di trasferimento.

La risposta all'impulso è per definizione l'antitrasformata della funzione di trasferimento

$$W(t) = \mathcal{L}^{-1}[W(s)]$$

Sviluppati i fratti, la funzione avrà la seguente forma

$$W(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{R_0}{s} + \frac{R_1}{s^2} + \dots + \frac{R_{g-1}}{s^g} + \frac{p_1}{s - p_1} + \frac{p_2}{s - p_2} + \dots \right]$$

I primi fratti (fino a R_{g-1}) sono associati ai poli nell'origine, seguono i fratti associati ai poli reali (p_i) o eventualmente complessi e coniugati.

Il valore di g permette di capire il tipo di sistema e se positivo, il numero di poli nell'origine. L'antitrasformata del primo termine è un gradino, del secondo è una retta, poi una parabola e così via. Tutti questi segnali (eccetto il primo che resta costante) divergeranno per $t \rightarrow \infty$.

Si analizzano gli altri poli, se ne esiste almeno uno con parte reale positiva, si avrà un esponenziale divergente nell'antitrasformata, se invece sono tutti a parte reale negativa la loro somma convergerà.

$$\begin{cases} \exists p_i : \Re(p_i) > 0 \Rightarrow \text{Divergono} \\ \forall p_i : \Re(p_i) < 0 \Rightarrow \text{Convergono} \\ \forall p_i : \Re(p_i) < 0 \text{ e qualcuno sull'asse } \Im \text{ (} m_a = 1 \text{)} \end{cases}$$

Il terzo caso prevede la presenza di poli a parte reale negativa più qualcuno sull'asse immaginario, a parte reale nulla ma con molteplicità algebrica pari ad uno, in questo caso si ha una permanenza dell'uscita. Se invece la molteplicità algebrica degli autovalori a parte reale nulla è maggiore di uno il sistema diverge.

Un sistema è **asintoticamente stabile** se e soltanto se

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} W(t) = 0$$

ciò è garantito solo se *tutti* i poli hanno parte reale negativa.

4.3.1 Poli dominanti

Sono i poli con parte reale massima, origine dei modi che perdurano per più tempo. Si ipotizza che il sistema sia asintoticamente stabile, tutti i poli sono contenuti nel semipiano sinistro.

Si supponga che il polo dominante sia *reale*, asintoticamente il comportamento è simile ad un sistema del primo ordine. Dopo un tempo pari a tre o quattro volte la costante di tempo del polo dominante è indifferente considerare solo la funzione associata a quel polo o l'intera funzione di trasferimento.

$$W(s) = K_B \frac{\prod_i (1 + s\tau_{zi}) \prod_i \left(1 + \frac{2\zeta_{zi}}{\omega_{nzi}} s + \frac{s^2}{\omega_{nzi}^2}\right)}{\prod_i (1 + s\tau_{pi}) \prod_i \left(1 + \frac{2\zeta_{pi}}{\omega_{npi}} s + \frac{s^2}{\omega_{npi}^2}\right)}$$

Il tipo g , in un sistema asintoticamente stabile, può essere negativo o al più pari a zero. Per $t \rightarrow \infty, s \rightarrow 0$ la funzione di trasferimento tende inizialmente a

$$W(s) = K_B \frac{1}{1 + s\tau_{pj}}$$

con τ_{pj} la costante di tempo dominante associata al polo j -esimo. La semplificazione va eseguita nella forma di *Bode* e va preservato il guadagno statico, non è possibile eseguirla nella forma di *Evans*.

Si supponga che i poli dominanti siano una coppia di poli complessi e coniugati. In questo caso il termine residuo sarebbe

$$W(s) = K_B \frac{1}{1 + \frac{2\zeta_{pi}}{\omega_{npi}} s + \frac{s^2}{\omega_{npi}^2}}$$

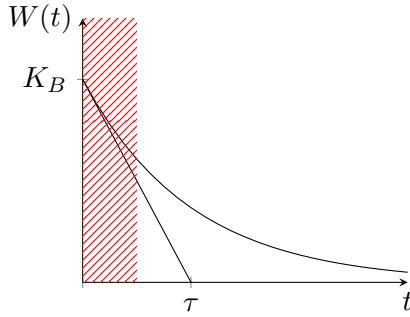
Si considereranno dunque due tipi di sistemi, sistemi del primo ordine o sistemi del secondo ordine.

4.3.2 Sistema del primo ordine

Sia il seguente sistema con funzione di trasferimento del primo ordine, si studia la risposta all'impulso come antitrasformata della funzione di trasferimento

$$W(s) = K_B \frac{1}{1 + s\tau} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} W(t) = K_B e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \delta_{-1}(t)$$

Questa soluzione vale per i sistemi del primo ordine e anche per quelli che si approssi-



simano per $t > \tau_{\max}$ a sistemi del primo ordine, nel secondo caso però le soluzioni per $t < \tau$ devono essere verificate rispetto alle altre costanti di tempo del sistema.

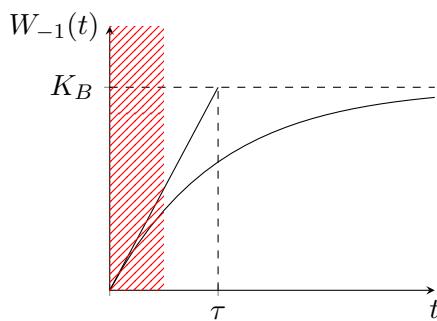
Risposta al gradino

$$u(t) = \delta_{-1}(t) \longrightarrow Y_f(s) = \frac{W(s)}{s} = \frac{K_b}{s(1 + s\tau)}$$

antitrasformando si ottiene la risposta al gradino chiamata anche risposta *indiciale*.

$$\begin{aligned} W_{-1}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K_B}{\tau} \left(\frac{R_0}{s} + \frac{R_1}{s + \frac{1}{\tau}} \right) \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K_B}{\tau} \left(\frac{\tau}{s} + \frac{-\tau}{s + \frac{1}{\tau}} \right) \right] = \\ &= K_B \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

Anche in questo caso bisogna porre attenzione alle analisi condotte vicino lo zero se



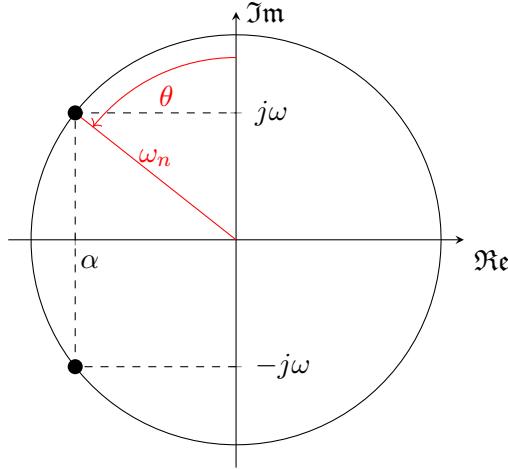
il sistema del primo ordine è stato ottenuto come semplificazione di un sistema più complesso.

4.3.3 Sistema del secondo ordine con poli complessi e coniugati

La funzione di trasferimento ha la seguente forma

$$W(s) = K_B \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

L'angolo θ è tale che il coefficiente di smorzamento $\zeta = \sin \theta$.



La pulsazione naturale ω_n è il modulo del polo dunque $\alpha = -\omega_n \zeta$.

Risposta all'impulso

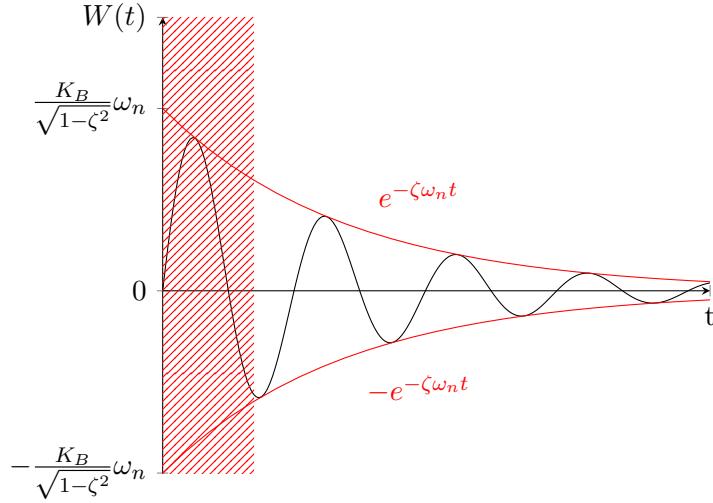
Si prova a calcolare la risposta all'impulso, riorganizzando la funzione di trasferimento

$$W(t) = \mathcal{L}^{-1}[W(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K_B}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \frac{\omega_n^2 \sqrt{1 - \zeta^2}}{(s + \zeta \omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)} \right]$$

Si esegue l'antitrasformata ottenendo una funzione seno.

$$W(t) = \frac{K_B}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \omega_n e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \cdot t) \delta_{-1}(t)$$

Si ottiene un andamento identico a quanto analizzato alla sezione 3.3.2 Anche in



questo caso se il sistema proviene da una semplificazione di un sistema più complesso si devono trascurare le soluzioni ottenute per intervalli di tempo troppo piccoli in funzione delle costanti di tempo eliminate.

Risposta al gradino

La funzione di uscita sarà pari a

$$Y_f(s) = \frac{W(s)}{s} = K_B \frac{\omega_n^2}{s(\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n s + s^2)}$$

antitrasformando

$$W_{-1}(t) = K_B \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{R_0}{s} + \frac{R_a s + R_b}{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n s + s^2} \right]$$

Con la formula dei residui $R_0 = 1$

$$W_{-1}(t) = K_B \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{(s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2) + R_a s^2 + R_b s}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2)} \right]$$

Per il principio di identità dei polinomi i due numeratori devono essere identici dunque mentre il coefficiente ω_n^2 è già presente in entrambi i termini, i coefficienti che moltiplicano s ed s^2 devono annullarsi.

$$\begin{cases} 1 + R_a = 0 \\ 2\zeta\omega_n + R_b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R_a = -1 \\ R_b = -2\zeta\omega_n \end{cases}$$

Sostituendo i residui si riprende l'antitrasformata della risposta al gradino

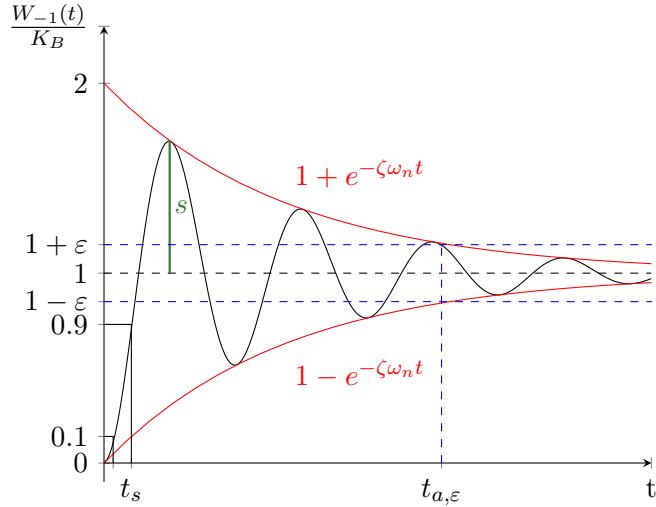
$$\begin{aligned} W_{-1}(t) &= K_B \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right] = K_B \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)} \right] = \\ &= K_B \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)} - \frac{s}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \frac{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)} \right] = \\ &= K_B \left(1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \cdot t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \cdot t) \right) \right) \delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

Si ricorda una forma dell'identità trigonometrica

$$\begin{aligned} a \sin x + b \cos x &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi) \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \arcsin\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \end{aligned}$$

Applicandola alla precedente

$$W_{-1}(t) = K_B \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \cdot t + \arccos(\zeta)) \right) \delta_{-1}(t)$$



Si misura con s il parametro detto *sovraelongazione massima*, valore percentuale che indica di quanto la funzione si "sovraelonga" ossia assume valori maggiori di quello di regime K_B , aumenta al diminuire dello smorzamento ζ .

Si indica con $t_{a,\epsilon}$ il tempo di assestamento, con ϵ pari solitamente all'1%, il 2% o il 3%. Si valuta da quale istante di tempo in poi la funzione si confina nella banda di assestamento.

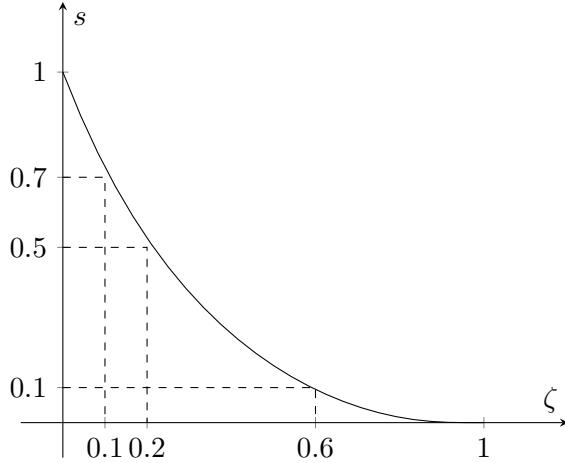
È facile dimostrare che il tempo di assestamento dipende dall'inviluppo esponenziale

$$t_{a,\varepsilon} = -\frac{1}{\zeta \omega_n} \ln(\varepsilon)$$

con ε espressa in percentuale.

Il tempo di *salita* t_s (o t_r dall'inglese *rise*) indica in quanto tempo il segnale passa da un valore del 10% ad un valore del 90% rispetto a quello di regime.

Si riporta l'andamento qualitativo della sovraelongazione s in funzione di ζ . Sono



riportati in figura alcuni valori convenzionali assunti dalla funzione.

4.3.4 Analisi con la forma di Evans

Si analizzano i sistemi per $t \rightarrow 0^+$, si pone la funzione di trasferimento nella forma di Evans con $K_E = \frac{b_m}{a_n}$

$$W(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} = K_E \frac{\prod_i (s - z_i)}{\prod_i (s - p_i)}$$

Si calcola il limite della risposta all'impulso $W(t)$ mediante il teorema del valore iniziale.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} W(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sW(s)$$

Per $s \rightarrow +\infty$ si considerano le potenze massime s^n ed s^m con $n \geq m$ nei casi studiati

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} sW(s) = \begin{cases} K_E \delta(t) & n = m \\ K_E \delta_{-1}(t) & n - m = 1 \\ 0 & n - m > 1 \end{cases}$$

Riassunto delle analisi per $t \rightarrow 0$. Per studiare gli andamenti in sistemi di tipo 2 e 3 si

$u(t)$	$n - m$	0	1	2	3
$\delta(t)$		$K_E \delta(t)$	$K_E \delta_{-1}(t)$	$K_E \delta_{-2}(t)$	$K_E \delta_{-3}(t)$
$\delta_{-1}(t)$		$K_E \delta_{-1}(t)$	$K_E \delta_{-2}(t)$	$K_E \delta_{-3}(t)$	$K_E \delta_{-4}(t)$
$\delta_{-2}(t)$		$K_E \delta_{-2}(t)$	$K_E \delta_{-3}(t)$	$K_E \delta_{-4}(t)$	$K_E \delta_{-5}(t)$

Tabella 4.1: Rappresentazione compatta ingresso-uscita

studia la derivata prima e seconda della risposta all'impulso

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \dot{W}(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s^2 W(s) = \begin{cases} K_E \delta_{-1}(t) & n - m = 2 \\ 0 & n - m > 2 \end{cases}$$

Si vede che si ottengono le funzioni δ_{-n} ricavate precedentemente nella sezione 3.4.1.

Per la risposta al gradino si ottengono gli stessi casi “traslati”

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} W_{-1}(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \cancel{s} \frac{W(s)}{\cancel{s}} = \begin{cases} K_E \delta_{-1}(t) & n - m = 0 \\ 0 & n - m > 0 \end{cases}$$

Si può iterare il procedimento per calcolare la risposta al gradino con sistema di grado 1

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \dot{W}_{-1}(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s^2 \frac{W(s)}{\cancel{s}} = \begin{cases} K_E \delta_{-1}(t) & n - m = 1 \\ 0 & n - m > 1 \end{cases}$$

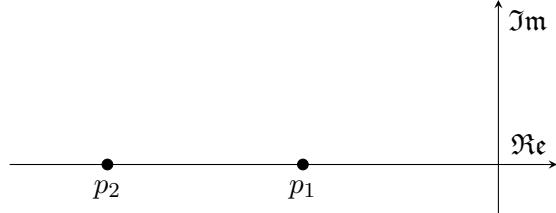
I sistemi propri replicano istantaneamente una parte dell'ingresso, amplificata di K_E mentre quelli di tipo superiore hanno una certa inerzia e l'uscita è generalmente l'integrale $n - m$ volte dell'ingresso. Il guadagno K_E coincide con la matrice D nella rappresentazione ISU.

4.3.5 Analisi delle risposte dei sistemi del secondo ordine

Si considera il caso di un sistema del secondo ordine con due poli reali e distinti, ha la seguente funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{K_B}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}$$

con $\tau_1 > \tau_2$, dunque p_1 è il polo dominante.



Si analizza la risposta all'impulso

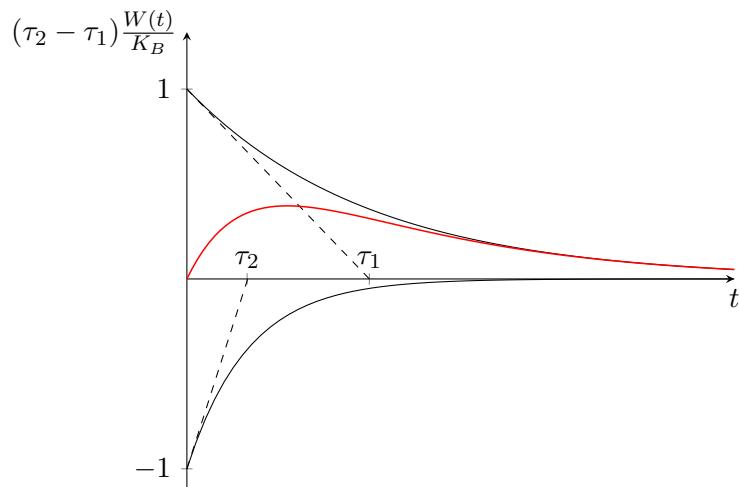
$$W(t) = \mathcal{L}^{-1}[W(s)] = \frac{K_B}{\tau_1 \tau_2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{R_1}{s + \frac{1}{\tau_1}} + \frac{R_2}{s + \frac{1}{\tau_2}} \right]$$

L'eccesso poli zeri è pari a due, dunque la sommatoria dei residui deve essere pari a zero.

$$R_1 = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \rightarrow R_2 = -R_1 = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_2 - \tau_1}.$$

$$W(t) = K_B \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left(e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \delta_{-1}(t)$$

Si mostra l'andamento normalizzato rispetto al guadagno statico e le costanti di tempo. La funzione raggiunge un picco e tende poi a decrescere al valore dell'esponenziale con



la costante di tempo maggiore.

Risposta al gradino

Si vuole calcolare la risposta al gradino, antitrasformata della funzione di trasferimento moltiplicata la trasformata del gradino ($\frac{1}{s}$).

$$\begin{aligned} W_{-1}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{W(s)}{s} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{R_0}{s} + \frac{R_1}{s + \frac{1}{\tau_1}} + \frac{R_2}{s + \frac{1}{\tau_2}} \right] \frac{K_B}{\tau_1 \tau_2} = \\ &= K_B \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

L'eccesso poli-zeri è ancora pari a due ma l'ingresso è un gradino, ricordando la tabella 4.1 si vede che la derivata prima e seconda sono nulle nell'origine.

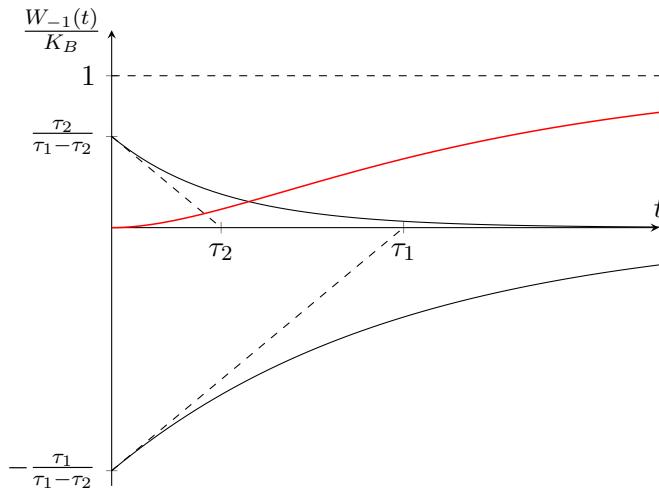


Figura 4.1: Risposta al gradino sistema secondo ordine

In questo caso con $\tau_1 = 1.6$ e $\tau_2 = 0.6$ si vede molto la prevalenza della funzione con costante più lenta sulla risposta, l'uscita tende asintoticamente ad uno. Nel caso particolare in cui $\tau_1 = \tau_2$ ossia due poli coincidenti

$$W_{-1}(t) = K_B \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \delta_{-1}(t)$$

L'andamento sarà comunque simile al caso generale.

4.3.6 Analisi risposta funzione con uno zero

La funzione in analisi del secondo ordine ha anche uno zero al numeratore

$$W(s) = \frac{K_B(1 + s\tau_z)}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)} \quad \tau_1 > \tau_2$$

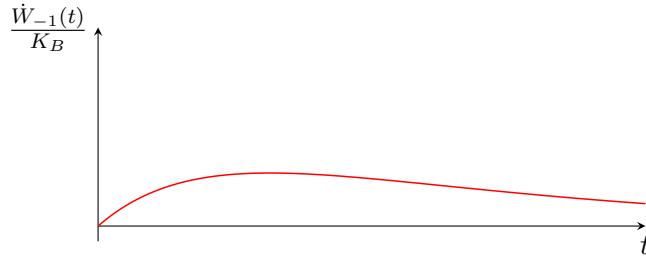
A seconda della posizione dello zero rispetto ai poli si avranno soluzioni differenti. Si analizza il caso in cui $\tau_z = 0$ ossia lo zero si trova sull'asse reale a $-\infty$.

$$W(s) = K_B \frac{1}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)} + K_B \frac{s\tau_z}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}$$

La risposta impulsiva sarà data da due contributi nel tempo, il primo identico a quanto calcolato alla sezione 4.3.5; il secondo termine invece differisce dal primo per $s\tau$, τ è un fattore di scala, la s invece indica la derivata nel tempo, dunque il secondo termine è pari alla derivata del primo contributo. La risposta al gradino sarà dunque:

$$W_{-1}(t) = K_B \left(1 - \frac{\tau_1 - \tau_z}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2 - \tau_z}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \delta_{-1}(t)$$

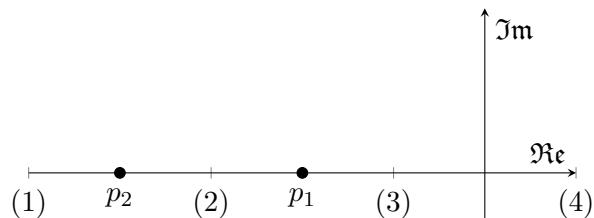
Prendendo riferimento dalla figura 4.1 è sufficiente dunque derivare per ottenere l'andamento della risposta al gradino del nuovo sistema con uno zero aggiuntivo. La funzione



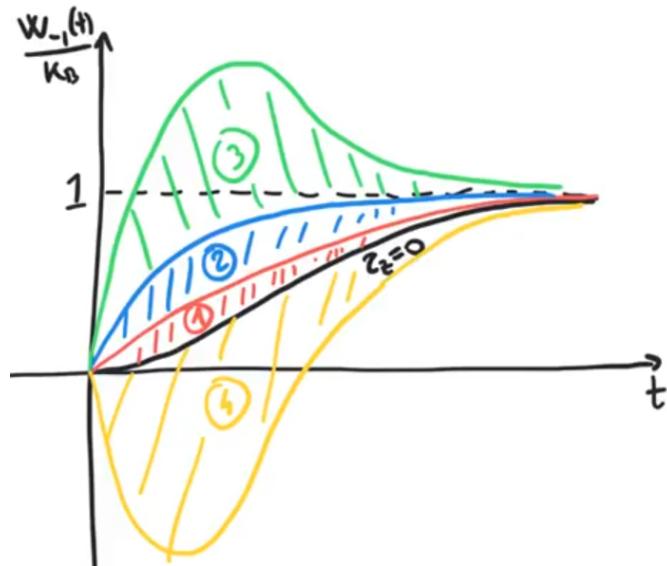
ha un massimo coincidente al punto di flesso della risposta al gradino del sistema precedente. In conclusione per ottenere la risposta al gradino del sistema con due poli e uno zero si sommano queste due funzioni, scalando la funzione di τ_z .

$$W_{-1}(t) = W_{-1}(t) + \tau_z \dot{W}_{-1}(t)$$

Si mostrano le possibili posizioni dello zero rispetto ai poli



1. Se lo zero z si avvicina a p_2 , si elimina il polo p_2 e il sistema coinciderebbe ad un sistema con il solo polo p_1 , la funzione è strettamente crescente con derivata prima diversa da zero nell'origine.
2. Viceversa all'avvicinarsi dello zero a p_1 si ha una funzione con comportamento simile a quello del sistema con costante di tempo τ_2 dunque più veloce. Lo zero *velocizza* la risposta all'avvicinarsi di questo verso l'origine.
3. Al superamento del polo p_1 e all'avvicinarsi all'origine degli assi si ottiene un sistema "troppo" veloce che sovraelonga il valore di regime e si stabilizza successivamente.
4. L'ultimo caso con $z \rightarrow \infty$ si ha una situazione identica al caso iniziale senza alcuno zero. All'avvicinarsi dello zero all'origine genera invece una regione inversa alla (3) con sovraelongazione negativa, questo perché il termine moltiplicativo τ_z ha cambiato segno. Il sistema si muove inizialmente nella direzione opposta alla forzante. Un sistema che presenta questo fenomeno può essere quello di una gru rotante con una massa sospesa, se si dà il comando alla gru di ruotare in un verso, la massa si sposterà inizialmente nella direzione opposta rispetto al braccio e al verso di rotazione. Questo fenomeno può essere mitigato utilizzando un sistema di controllo tra i comandi imposti dall'operatore e quelli inviati al motore della gru.



4.4 Realizzazione

La *realizzazione* è il procedimento che tenta di ricostruire un sistema ISU a partire dalla funzione di trasferimento.

Si ricorda che per ogni sistema fisico esistono infinite ISU equivalenti, mentre esiste una sola funzione di trasferimento, un'unica risposta all'impulso.

$$(A, B, C, D) \longrightarrow W(s)$$

La funzione di trasferimento è sempre esprimibile come un rapporto tra polinomi

$$W(s) = \frac{b_n s^n + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

Se $b_n = 0$ il sistema diventerebbe strettamente proprio. Sono in generale presenti $n+1$ coefficienti al numeratore ed n al denominatore, ossia $2n+1$ coefficienti totali.

Nell'ipotesi semplificativa di sistema SISO, alla rappresentazione ISU sono associati i seguenti parametri

$$\begin{array}{cccc} (A & B & C & D) \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ n^2 & n & n & 1 \end{array}$$

In totale saranno $n^2 + 2n + 1$, si vuole capire come ricostruire la ISU a partire dalla funzione di trasferimento.

Tra le infinite soluzioni possibili sono presenti le cosiddette **forme canoniche**, particolari strutture ISU composte da matrici con solo zeri o uno o coefficienti con un numero massimo pari a $2n+1$.

Forma canonica di raggiungibilità

Si supponga di partire con una funzione di trasferimento in forma polinomiale, si deve porre nella somma di una costante più un rapporto di polinomi eseguendo una divisione.

$$W(s) = \frac{\hat{b}_{n-1} s^{n-1} + \dots + \hat{b}_0}{s^n + a_{n-1} + \dots + a_0} + \hat{b}_n$$

Va sempre normalizzato il denominatore e si ha $\hat{b}_n = b_n$ mentre il generico coefficiente

$$\hat{b}_i = b_i - a_i b_n, \quad i = 0, \dots, n-1$$

Le matrici del sistema possono essere scritte nel seguente modo:

$$A_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \quad B_R = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_R = [\hat{b}_0 \quad \hat{b}_1 \quad \dots \quad \hat{b}_{n-1}] \quad D_R = \hat{b}_n = b_n$$

Forma canonica di osservabilità

Simile alle precedenti, i coefficienti del denominatore si trovano questa volta nell'ultima colonna

$$A_O = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B_O = \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \vdots \\ \hat{b}_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$C_O = [0 \ \dots \ 0 \ 1] \quad D_O = \hat{b}_n = b_n$$

Proprietà di dualità

Le due forme canoniche sono l'una la duale dell'altra, è facile osservare che

$$A_R = A_O^T, \quad B_R = C_O^T, \quad C_R = B_O^T, \quad D_R = D_O$$

C'è uno scambio di matrici tra ingresso e uscita, ottenuta una rappresentazione si può sempre ricavare l'altra. Sono presenti solo $2n + 1$ parametri, dunque la scrittura delle matrici è immediata.

4.5 Riassunto delle forme di rappresentazione dei sistemi

- Equazione differenziale generale, lega le y e le sue derivate alle u e le sue derivate, una rappresentazione di tipo ingresso-uscita
- ISU, utilizzando le regole di Cauchy si ottengono le quattro matrici A, B, C, D
- La funzione di trasferimento $W(s)$, a partire dalla ISU con la formula

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

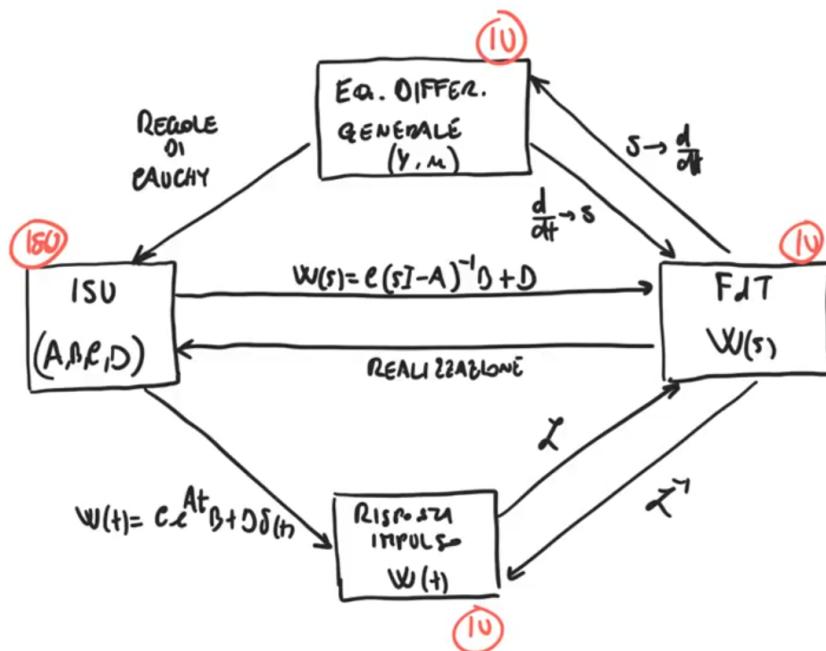
o viceversa mediante la *realizzazione*.

Si ottiene a partire dall'equazione differenziale mediante il rapporto della trasformata di Laplace dell'uscita e dell'ingresso, ricordando che la derivata nel tempo corrisponde a moltiplicare per s . Analogamente il processo inverso è simile.

- Risposta all'impulso mediante la matrice $W(t)$, si ottiene antitrasformando la funzione di trasferimento e viceversa. Si ottiene a partire dalla rappresentazione ISU con la seguente

$$W(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$$

Si rappresenta di seguito uno schema riassuntivo delle varie tipologie di rappresentazione e le diverse procedure di conversione



Capitolo 5

Analisi in regime permanente

Si supponga che il sistema sia asintoticamente stabile e ad esso si applica un ingresso che non svanisce nel tempo, si avrà un'evoluzione iniziale ma trascorso un certo tempo si avrà una risposta simile all'ingresso. Si vuole determinare sotto quali ipotesi questa condizione è verificata.

Definizione di risposta in regime permanente

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x(t_0), \exists T_a(x(t_0)) : t > T_a(x(t_0)) \Rightarrow |y(t) - y_r(t)| < \varepsilon$$

Con T_a il tempo di attesa eventualmente funzione dello stato iniziale, y_r la funzione analitica della risposta a regime.

Si supponga che esista la funzione $y_r(t)$, deve essere indipendente dallo stato iniziale, nell'ipotesi di sistema lineare, usando le formule di Lagrange

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

se si eseguisse il limite per $t \rightarrow \infty$ non si avrebbe più una funzione del tempo, dunque nell'ipotesi che il sistema sia tempo invariante si fa tendere l'istante iniziale t_0 in cui viene applicato l'ingresso a $-\infty$, è analogo considerare un tempo all'infinito o un istante iniziale a $-\infty$ ma in questo modo non si perde la variabile tempo nel risultato del limite:

$$y_r(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \left(Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau \right)$$

La dipendenza da x_0 è solo presente nella componente libera, per $t_0 \rightarrow -\infty$ il coefficiente della matrice esponenziale tende a $+\infty$, se tutti i modi del sistema hanno autovalore negativo, dunque il sistema è asintoticamente stabile allora anche l'esponenziale tenderà a zero.

Se l'ingresso u è una funzione regolare nel tempo (W è sottinteso dato che è composta da sole funzioni esponenziali)

$$y_r(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau \stackrel{t-\tau=\xi}{=} \int_{+\infty}^0 W(\xi)u(t-\xi)(-d\xi) = \int_0^{+\infty} W(\xi)u(t-\xi)d\xi$$

Se l'integrale esiste finito, sarà sicuramente una funzione del tempo allora il sistema ammette un regime permanente.

5.1 Regime con specifici segnali di ingresso

Ingresso esponenziale

Si ha il segnale in ingresso

$$u(t) = e^{\lambda t} \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

La risposta a regime, se esiste è pari a

$$y_r(t) = \int_0^{+\infty} W(\zeta) e^{\lambda(t-\zeta)} d\zeta = e^{\lambda t} \int_0^{+\infty} W(\zeta) e^{-\lambda\zeta} d\zeta$$

l'integrale ottenuto è proprio la trasformata di Laplace della risposta all'impulso $W(t)$ calcolata in λ . Per un sistema asintoticamente stabile in forma minima, se l'ingresso è un esponenziale, l'uscita sarà

$$y_r(t) = e^{\lambda t} W(\lambda)$$

con $\lambda \neq \lambda_i$ autovalori della matrice della dinamica. $W(\lambda)$ è dunque una costante, una funzione razionale fratta valutata in λ , di conseguenza l'uscita sarà pari all'ingresso scalato per la suddetta costante. Questa condizione è verificata quasi sempre, ossia le risposte tendono a seguire gli ingressi a regime.

Se λ fosse però pari proprio ad uno zero della funzione di trasferimento allora l'uscita sarebbe nulla per ogni istante di tempo. Si dice che gli zeri reali hanno una proprietà *bloccante* per gli ingressi esponenziali.

Ingresso sinusoidale

Sia l'ingresso sinusoidale, sfruttando l'identità di Eulero e la linearità del sistema, combinate al risultato precedentemente ottenuto per la funzione esponenziale, si ha:

$$u(t) = \sin(\omega t) \stackrel{\text{Eulero}}{=} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \stackrel{\text{Linearità}}{\longrightarrow} y_r(t) = \frac{W(j\omega)e^{j\omega t} - W(-j\omega)e^{-j\omega t}}{2j} \quad (5.1)$$

Va verificata l'esistenza delle funzioni di trasferimento, l'ascissa di convergenza coincide con la singolarità polare a parte reale massima ma il sistema è supposto asintoticamente stabile, di conseguenza tutti gli autovalori avranno parte reale negativa, il semipiano di convergenza conterrà sicuramente l'asse immaginario.

Si analizza la funzione di trasferimento valutata in $j\omega$ sfruttando la definizione di trasformata di Laplace e ancora una volta la formula di Eulero:

$$W(j\omega) = \int_0^{+\infty} W(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} W(t) (\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)) dt$$

Dall'integrale si ottiene che

$$\left. \begin{array}{ll} \Re[W(j\omega)] & \text{è pari} \\ \Im[W(j\omega)] & \text{è dispari} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} |W(j\omega)| & \text{è pari} \\ \underline{/W(j\omega)} & \text{è dispari} \end{array} \right\} \Rightarrow W(-j\omega) = W^*(j\omega)$$

Si rielabora il risultato 5.1 con la proprietà appena ottenuta.

$$\begin{aligned} y_r(t) &= \frac{|W(j\omega)|e^{j\angle(W(j\omega))}e^{j\omega t} - |W(j\omega)|e^{-j\angle(W(j\omega))}e^{-j\omega t}}{2j} = \\ &= |W(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \angle(W(j\omega)))} - e^{-j(\omega t + \angle(W(j\omega)))}}{2j} = \\ &= |W(j\omega)| \sin(\omega t + \angle W(j\omega)) \end{aligned}$$

Si riassume il risultato nel **Teorema della risposta armonica**

$$u(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \longrightarrow y_r(t) = A|W(j\omega)| \sin(\omega t + \angle W(j\omega) + \varphi)$$

Per un sistema asintoticamente stabile in forma minima, la risposta a regime di un ingresso sinusoidale è ancora una sinusoide alla stessa frequenza di quella in ingresso, amplificata o attenuata di una quantità pari al modulo della restrizione all'asse immaginario della funzione di trasferimento, sfasata inoltre di una quantità pari all'argomento della funzione $W(j\omega)$.

La funzione di trasferimento ristretta all'asse immaginario prende il nome di *risposta armonica* del sistema

$$W(j\omega) = W(s)|_{s=j\omega} = C(j\omega I - A)^{-1}B + D$$

dà informazioni sul comportamento in frequenza del sistema, ampiezza e fase dell'uscita dipenderanno dalla specifica frequenza in ingresso.

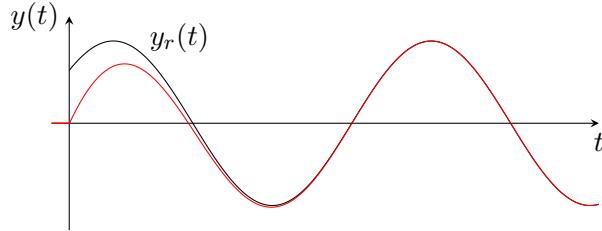
Potrebbe accadere che l'armonica in uscita sia esattamente nulla, quando $j\omega$ è uno zero della funzione di trasferimento, in realtà due zeri complessi e coniugati sull'asse immaginario. Essendo la funzione $W(j\omega)$ una funzione regolare, l'intorno degli zeri viene comunque attenuato dal sistema.

5.2 Risposta transitoria

Si definisce come risposta transitoria la differenza nel tempo tra la risposta del sistema e la risposta a regime.

$$y_t(t) \stackrel{\text{def}}{=} y(t) - y_r(t)$$

Dall'istante iniziale il sistema impiega un certo tempo per raggiungere la risposta di



regime a partire dalle condizioni iniziali, in questo esempio parte a riposo, dunque si può affermare che la soluzione complessiva dell'uscita è somma di due contributi, la risposta transitoria, che si estingue dopo un certo periodo in un sistema stabile e la risposta a regime.

$$y(t) = y_t(t) + y_r(t)$$

Nelle formule di Lagrange sono state definite la *risposta libera* e la *risposta forzata*, queste non coincidono necessariamente con la risposta transitoria e la risposta a regime, la risposta transitoria potrebbe infatti contribuire sia all'evoluzione libera che a quella forzata.

Si considera ad esempio un ingresso esponenziale

$$u(t) = e^{\lambda t} U \longrightarrow U(s) = \frac{U}{s - \lambda}$$

La risposta completa sarà l'antitrasformata delle evoluzioni libere e forzate

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\Psi(s)x_0 + W(s) \frac{U}{s - \lambda} \right]$$

Analizzando la forzata, si esegue la scomposizione in residui aggiungendo il fratto relativo all'ingresso R_u

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\sum_i \frac{R_i}{s - \lambda_i} + \frac{R_u}{s - \lambda} \right]$$

La sommatoria fornirà un termine chiamato $y_1(t)$ e il residuo R_u una funzione $y_2(t)$, per ipotesi i λ_i hanno parte reale negativa, quindi tutti i termini della funzione $y_1(t)$ tendono a zero. Di conseguenza il regime è proprio la seconda parte dell'equazione, $y_2(t) = y_r(t)$, quella parte della forzata che dipende dalle singolarità polari dell'ingresso, per questo motivo ha la stessa forma dell'ingresso, cambiando il residuo R_u che dipende dal sistema cambieranno ampiezza e fase.

La somma di $\mathcal{L}^{-1}[\Psi(s)x_0] = y_l(t)$ e $y_1(t)$ forma il transitorio $y_t(t)$. Il regime esiste se non dipende dallo stato iniziale x_0 , in realtà è il transitorio $y_t(0)$ che deve estinguersi a zero. Potrebbe teoricamente capitare che il transitorio tenda a zero perché $y_l(t)$ e $y_1(t)$ siano istante per istante uguali e opposte. Questo fenomeno può in realtà accadere solo per ingressi esponenziali o combinazioni di esponenziali (es. sinusoidi). Si rimuove l'ipotesi di asintotica stabilità.

Esempio:

$$u(t) = Ue^{\lambda t} \rightarrow y(t) \propto e^{\lambda t}$$

Dato che l'uscita segue l'ingresso, e l'uscita dipende dallo stato, anche lo stato dovrà avere una forma esponenziale. Si supponga che sia della seguente forma:

$$x(t) = e^{\lambda t}x(0) \xrightarrow{\dot{x}=Ax+Bu} \lambda e^{\lambda t}x(0) = Ae^{\lambda t}x(0) + BUe^{\lambda t} \Rightarrow (\lambda I - A)x(0) = BU$$

Si suppone che $\lambda \neq \lambda_i$, la matrice $(\lambda I - A)$ è invertibile dunque la soluzione esiste ed è unica

$$x(0) = (\lambda I - A)^{-1}BU$$

se lo stato iniziale è esattamente questo, la risposta transitoria sarà identicamente nulla $\forall t$ anche senza ipotesi di asintotica stabilità.

$$\begin{aligned} x(t) &= (\lambda I - A)^{-1}BUe^{\lambda t} & t \geq 0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) = (C(\lambda I - A)^{-1}B + D)Ue^{\lambda t} = W(\lambda)Ue^{\lambda t} & t \geq 0 \end{aligned}$$

Quanto ottenuto è solo un risultato puramente matematico, se un sistema non è asintoticamente stabile non ammetterà un regime permanente.

5.3 Identificazione sperimentale della risposta armonica

Si supponga di avere un sistema da studiare di cui si conoscono gli ingressi e le uscite, non si conoscono le caratteristiche interne del sistema a causa della inaccessibilità del sistema stesso o all'impossibilità di realizzarne un modello accurato. È possibile caratterizzare il sistema valutando la **risposta in frequenza**, si applica al sistema una sinusode

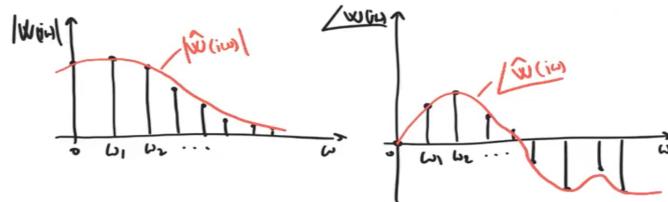
$$u(t) = U \sin(\omega t)$$

Si vede se dopo un certo tempo l'uscita sia ancora una funzione sinusoidale alla stessa frequenza dell'ingresso, il sistema avrà un comportamento lineare a quella specifica frequenza

$$y_r(t) = U|W(j\omega)| \sin(\omega t + \angle W(j\omega))$$

Si misura il rapporto tra ampiezza di ingresso e uscita e si riporta su un grafico funzione della frequenza, analogamente l'angolo.

Si varia successivamente la frequenza, all'estinguersi del transitorio si misurano nuovamente ampiezza e frequenza e così via per più frequenze. Si può valutare anche a frequenza nulla (guadagno statico).



Si scelgono le funzioni interpolanti delle curve ottenute

$$|\hat{W}(j\omega)| \quad \angle \hat{W}(j\omega) \Rightarrow \hat{W}(j\omega)$$

Si è ricostruita sperimentalmente la funzione di risposta armonica.

La $W(s)$ è una funzione razionale fratta, dunque analitica, se si definisce una funzione analitica in un sottoinsieme non numerabile s allora si può estendere la definizione a tutto lo spazio rimanente. Se la funzione $W(j\omega)$ che è una funzione analitica, è definita sull'asse immaginario, che è uno spazio non numerabile, si può estendere la definizione a tutto lo spazio, ottenendo una stima della funzione di trasferimento del sistema sostituendo s a $j\omega$, si ottiene un modello sperimentale approssimato del sistema.

Soltamente un modello approssimato mediante un'analisi sperimentale può essere di ordine più alto dell'ordine reale del sistema, si perdono inoltre informazioni sulle relazioni fisiche del sistema.

Un modello sperimentale potrebbe comunque essere più accurato di un modello costruito analiticamente utilizzando i dati di targa del sistema, con la loro soglia di incertezza che non corrispondono necessariamente alla realtà, un modello sperimentale potrebbe invece approssimare meglio i punti reali raggiunti dal sistema.

Per analizzare l'intero spettro in frequenza del sistema bisognerebbe sollecitare il sistema di volta in volta con un'armonica differente, oppure si può usare direttamente un segnale che contiene più armoniche come ad esempio il gradino che le contiene tutte. Si misura l'uscita e con un analizzatore di spettro si analizzano le frequenze in uscita dal sistema ottenendo facilmente informazioni sul comportamento del sistema ad un gran numero di armoniche.

5.4 Analisi con ingresso periodico

Sia il segnale periodico

$$u(t) \text{ } T \text{ periodico} \Leftrightarrow u(t+T) = u(t)$$

è sviluppabile in *serie di Fourier*

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_n e^{j\omega t}$$

con U_n i coefficienti di Fourier e $\omega = \frac{2\pi}{T}$. La serie dei coefficienti di Fourier definisce lo spettro del segnale in ingresso, che avrà un'infinità numerabile di coefficienti.

L'uscita a regime $y_r(t)$ esisterà per la linearità del sistema e sarà pari alla stessa combinazione lineare dell'ingresso

$$y_r(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} U_n W(jn\omega) e^{jn\omega t} = \sum_{-\infty}^{+\infty} Y_n e^{jn\omega t}$$

L'uscita ha la forma dello sviluppo in serie di Fourier di un segnale, dunque si può affermare che il segnale in uscita è periodico. Il peso dei coefficienti sarà differente dunque il segnale in uscita sarà comunque deformato rispetto a quello in ingresso.

Si supponga che il segnale in ingresso sia dotato di trasformata di Fourier $U(j\omega)$, se ciò è vero esiste ed è finito il seguente integrale

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

La trasformata è bilaterale, non è richiesto che il segnale sia nullo per $t < 0$, sfruttando la linearità del sistema e dell'integrale si ha l'uscita a regime

$$y_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(j\omega) W(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Si è ottenuta l'anttrasformata di Fourier di $Y(j\omega)$ che sarà dunque lo spettro del segnale in uscita, può contenere al più le armoniche del segnale d'ingresso, potranno essere attenuate o amplificate dalla funzione $W(j\omega)$, se la banda del segnale in ingresso è limitata entro certe frequenze, anche l'uscita sarà limitata in quella banda.

Ancora una volta, nell'ipotesi di sistema SISO, la funzione di risposta armonica si ottiene analogamente alla funzione di trasferimento $W(s)$ nel dominio di Laplace:

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \quad \begin{matrix} j\omega \rightarrow s \\ s \leftarrow j\omega \end{matrix} \quad W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

5.5 Diagrammi di Bode

I *diagrammi di Bode* sono strumenti grafici utili a rappresentare la funzione di risposta armonica $W(j\omega)$ che permette di descrivere il comportamento in frequenza dei sistemi dinamici.

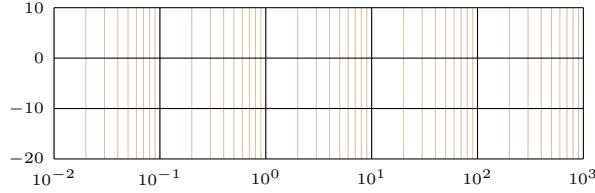
I diagrammi di Bode si dividono in due grafici, uno per rappresentare il modulo di $W(j\omega)$, l'altro per la fase e prendono rispettivamente il nome di diagramma del modulo e diagramma di fase.

Spesso l'asse delle ascisse è rappresentato in scala logaritmica, data l'elevata ampiezza del dominio delle funzioni, di conseguenza il rapporto tra due pulsazioni equidistanziate è sempre pari a dieci. Questa distanza viene chiamata *decade*.

L'asse lineare viene invece rappresentato in scala lineare ma i valori riportati sono espressi in *deciBel*

$$|W(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |W(j\omega)|$$

Si usa per comodità il fattore 20 e non 10 come da definizione. Il grafico prende il nome di scala semilogaritmica.



Il diagramma della fase è anch'esso rappresentato in scala logaritmico e la fase viene rappresentata in scala lineare, in gradi o radianti.

Uno strumento rapido per rappresentare i diagrammi di Bode è quello di utilizzare i *diagrammi asintotici*, una rappresentazione approssimata ma molto rapida dei sistemi. Conviene innanzitutto trasformare la funzione di trasferimento nella forma di Bode

$$W(j\omega) = \frac{K_B}{(j\omega)^g} \cdot \frac{\prod_i (1 + j\omega\tau_{zi}) \prod_i \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nz_i}^2} + \frac{2\zeta_{zi}}{\omega_{nz_i}} \omega j\right)}{\prod_i (1 + j\omega\tau_{pi}) \prod_i \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{np_i}^2} + \frac{2\zeta_{pi}}{\omega_{np_i}} \omega j\right)}$$

Si vuole tracciare il modulo in deciBel

$$|W(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |W(j\omega)|$$

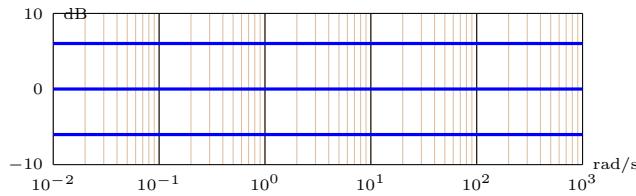
Sfruttando le proprietà del logaritmo

$$\begin{aligned} |W(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \log_{10} |K_B| - 20g \cdot \log_{10} |j\omega| + \sum_i 20 \log_{10} |1 + j\omega\tau_{zi}| + \\ &\quad + \sum_i 20 \log_{10} \left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nz_i}^2} + \frac{2\zeta_{zi}}{\omega_{nz_i}} \omega j \right| - \sum_i 20 \log_{10} |1 + j\omega\tau_{pi}| - \\ &\quad - \sum_i 20 \log_{10} \left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{np_i}^2} + \frac{2\zeta_{pi}}{\omega_{np_i}} \omega j \right| \end{aligned}$$

Sono presenti quattro tipologie di termini, si possono tracciare singolarmente e poi sommare tra di loro. Facendo riferimento in questo caso ai poli si hanno i seguenti termini.

$$W_a(j\omega) = K_B, \quad W_b(j\omega) = \frac{1}{j\omega}, \quad W_c(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}, \quad W_d(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta\omega}{\omega_n}}$$

Termine guadagno Il termine W_a è un guadagno costante, non dipende dalla frequenza, viene rappresentato come una retta orizzontale sul diagramma di Bode, maggiore o minore di 0 se si ha un'amplificazione o un'attenuazione



Termine monomio Si rappresenta il termine W_b

$$|W_b(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log_{10} |j\omega| = -20 \log_{10}(\omega)$$

Si ottiene una retta con pendenza -20 dB/dec (*deciBel per decade*), se ci fosse più

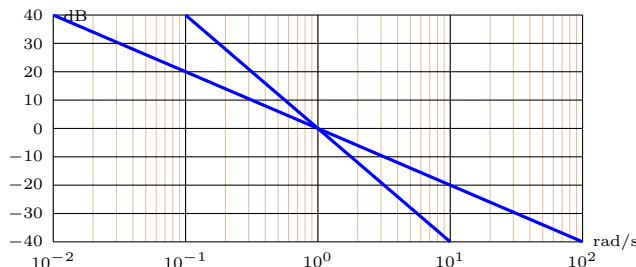


Figura 5.1: Guadagno polo nell'origine

di un polo nell'origine, si avrebbe un esponente g sul termine $j\omega$ che diventerebbe un fattore moltiplicativo della pendenza della retta, in questo caso se i poli sono due la retta ha una pendenza di -40 dB/dec . Viceversa se ci fossero degli zeri nell'origine, quindi g negativo, si avrebbe una pendenza della retta positiva. Si usa spesso una pendenza compatta $-1, -2, +1, +2$ riferendosi al coefficiente g e non al prodotto completo per 20, quindi con una pendenza -1 si indica -20 dB/dec , con -2 saranno -40 dB/dec e così via.

Termine binomio Si vuole rappresentare il modulo del binomio $W_c(j\omega)$

$$|W_c(j\omega)| = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{1 + j\omega\tau} \right| = -20 \log_{10} |1 + j\omega\tau| = -20 \log_{10} \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}$$

Per studiare con comodità questa funzione può essere comodo eseguire prima l'analisi asintotica, ossia l'analisi per ω molto piccoli e molto grandi, si approssima la funzione

$$|W_c(j\omega)| \simeq \begin{cases} -20 \log_{10} \sqrt{1} = 0 & \omega \ll \frac{1}{|\tau|} \\ -20 \log_{10} |\omega\tau| & \omega \gg \frac{1}{|\tau|} \end{cases}$$

La retta in questo caso non passerà più per l'origine (1,0) ma per il punto $(\frac{1}{|\tau|}, 0)$, una decade dopo il punto di intersezione il diagramma coincide con la retta asintotica e l'errore è trascurabile. È facile individuare il *punto di rottura*, intersezione dei due

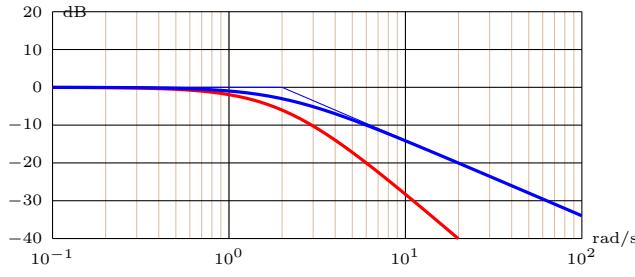


Figura 5.2: $\frac{1}{1+j\omega \cdot 0.5}$, $\frac{1}{(1+j\omega \cdot 0.5)^2}$

asintoti conoscendo τ . L'errore massimo si ha nel punto di rottura, si valuta la funzione in quel punto

$$\left| W_c \left(j \frac{1}{|\tau|} \right) \right|_{\text{dB}} = -20 \log_{10} \left| \frac{1}{1 + j \frac{1}{|\tau|}} \right| = -20 \log_{10} \sqrt{2} \simeq -3 \text{ dB}$$

Il diagramma passa a -3 dB dal punto di rottura. Se esistesse una molteplicità k nel polo si avrebbe una pendenza della curva pari a $-k$ superato il punto di rottura. Viceversa se ci fosse uno zero anziché un polo si avrà una pendenza positiva. Anche lo scostamento dal punto di rottura viene moltiplicato del coefficiente k .

Fattore trinomio Si valuta il diagramma in ampiezza del fattore trinomio utilizzando gli asintoti

$$|W_d(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\zeta\omega}{\omega_n}} \right| = -20 \log_{10} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4\zeta^2\omega^2}{\omega_n^2}}$$

Si confronta ω con ω_n , ζ è minore di 1

$$|W_d(j\omega)|_{\text{dB}} \simeq \begin{cases} -20 \log_{10} \sqrt{1} \simeq 0 & \omega \ll \omega_n \\ -40 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) & \omega \gg \omega_n \end{cases}$$

L'andamento è simile al termine binomio ma la pendenza è questa volta di -40 dB/dec

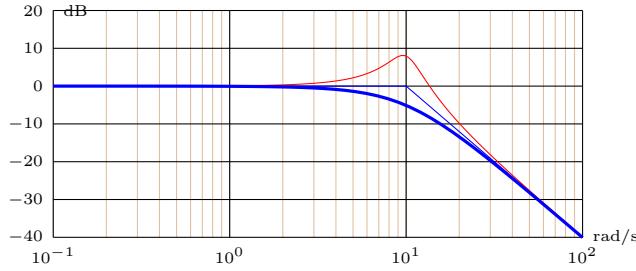


Figura 5.3: $\zeta = 0.2$, $\zeta = 0.9$

Se il termine di smorzamento ζ assume valori molto piccoli ($\zeta < \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.707$) si ha un picco di massimo chiamato *picco di risonanza* e si presenta ad una frequenza di risonanza ω_r più piccola del punto di rottura pari a

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

Il valore del picco di risonanza vale

$$M_r = |W(j\omega_r)| = \frac{1}{2|\zeta|\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Il punto di passaggio nel punto di rottura vale

$$|W(j\omega_n)| = \frac{1}{2|\zeta|}$$

Il caso limite con $\zeta = 0$ si ha un picco di risonanza infinito alla pulsazione di risonanza ω_n . L'errore che si può commettere utilizzando le rette asintotiche va da un minimo di -6 dB ad un massimo infinito, è necessario controllare il valore di ζ e applicare le dovute correzioni. Anche in questo caso la presenza di un coefficiente k che rappresenti la molteplicità dei poli, si avrà un'amplificazione dei picchi e della pendenza dell'asintoto destro, nel caso in cui questo fosse negativo si avrebbe uno zero e il ribaltamento del grafico, con una eventuale cancellazione di una frequenza dall'uscita.

5.5.1 Regole di tracciamento

Si elencano alcune regole per tracciare i diagrammi di Bode dei sistemi.

1. Scrivere la $W(j\omega)$ nella forma di Bode
2. Il tratto iniziale ha pendenza pari a $-g$ e alla frequenza $\omega = 1$ (o il suo prolungamento) assume valore $20 \log_{10} |K_B| = [K_B]_{\text{dB}}$
3. In corrispondenza dei punti di rottura di zeri o poli reali la pendenza aumenta o diminuisce, rispettivamente di un numero di unità pari alla molteplicità dello zero o del polo corrispondente.
4. In corrispondenza dei punti di rottura di zeri o poli complessi la pendenza aumenta o diminuisce, rispettivamente di un numero *doppio* di unità pari alla molteplicità dello zero o del polo corrispondente.
5. Se i punti di rottura sono distanti almeno di una decade è possibile applicare le eventuali correzioni in quei punti, altrimenti se le frequenze di rottura sono vicine tra loro, le correzioni si influenzerebbero.

Esercizio di tracciamento

Si consideri la seguente funzione

$$W(s) = \frac{(s-1)(s+10)}{s(s^2+s+16)}$$

Va posta nella forma di Bode

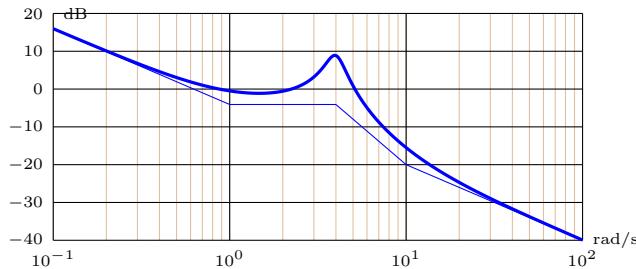
$$W(j\omega) = \frac{(-1)(10)}{16} \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{(1-j\omega)(1+0.1j\omega)}{\left(1 + \frac{1}{16}j\omega + \frac{j\omega^2}{16}\right)}$$

$$K_B = -\frac{10}{16} = -\frac{5}{8} \xrightarrow{\text{dB}} [K_B]_{\text{dB}} = -4, \quad g = 1, \quad \tau_{z_1} = -1, \quad \tau_{z_2} = 0.1$$

Si ricavano inoltre la pulsazione naturale e la ζ

$$\omega_n = \sqrt{16} = 4, \quad \frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{1}{16} \longrightarrow \zeta = \frac{1}{8} = 0.125 < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

I punti di rottura sono presenti in 1, 4, 10 rad/s, si traccia il diagramma



Si tracciano inizialmente i diagrammi asintotici, il primo passa a quota -4 dB con una pendenza di $-20 \text{ dB} (-2)$, poi si somma lo zero centrato in 1, si somma 1 e si ha una pendenza nulla fino al punto di rottura situato in $\omega = 4$ con pendenza -2, (polo del secondo ordine), fino al punto di rottura in $\omega = 10$ in cui si somma nuovamente uno zero, aumentando la pendenza di 1 quindi si termina asintoticamente la funzione con una pendenza -1. La pendenza finale è sempre pari all'ordine relativo $-(n - m)$.

5.5.2 Diagramma della fase

Per presentare il diagramma della fase si riporta la funzione di trasferimento nella forma di Bode

$$W(s) = \frac{K_B}{(s)^g} \cdot \frac{\prod_i (1 + s\tau_{zi}) \prod_i \left(1 + \frac{s^2}{\omega_{nz_i}^2} + \frac{2\zeta_{zi}}{\omega_{nz_i}} s\right)}{\prod_i (1 + s\tau_{pi}) \prod_i \left(1 + \frac{s^2}{\omega_{np_i}^2} + \frac{2\zeta_{pi}}{\omega_{np_i}} s\right)}$$

Si studia la funzione sull'asse immaginario ossia quando $s = j\omega$

$$W(j\omega) = \frac{K_B}{(j\omega)^g} \cdot \frac{\prod_i (1 + j\omega\tau_{zi}) \prod_i \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nz_i}^2} + \frac{2\zeta_{zi}}{\omega_{nz_i}} \omega j\right)}{\prod_i (1 + j\omega\tau_{pi}) \prod_i \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{np_i}^2} + \frac{2\zeta_{pi}}{\omega_{np_i}} \omega j\right)}$$

Si ricordano le proprietà della fase: la fase del prodotto è la somma delle fasi, la fase del rapporto è la differenza delle fasi.

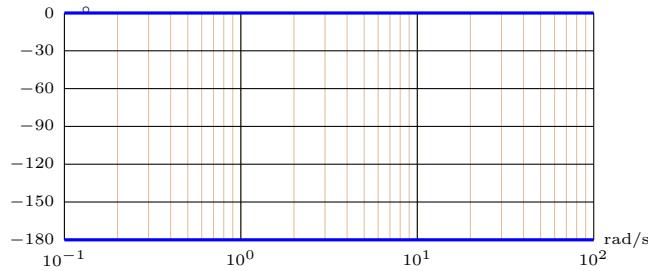
$$\begin{aligned} \angle W(j\omega) = & \angle K_B - g \angle j\omega + \sum_i \angle 1 + j\omega\tau_{zi} + \sum_i \angle 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nz_i}^2} + \frac{2\zeta_{zi}}{\omega_{nz_i}} \omega j - \\ & - \sum_i \angle 1 + j\omega\tau_{pi} - \sum_i \angle 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{np_i}^2} + \frac{2\zeta_{pi}}{\omega_{np_i}} \omega j \end{aligned}$$

Anche per la fase si può fare prima un diagramma asintotico e poi applicare le correzioni.

$$W_a(j\omega) = K_B, \quad W_b(j\omega) = \frac{1}{j\omega}, \quad W_c(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}, \quad W_d(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j\frac{2\zeta}{\omega_n}\omega}$$

Fase del guadagno È un numero reale dunque la sua fase può essere 0 o -180°

$$\angle W_a(j\omega) = \angle K_B \begin{cases} 0 & K_b > 0 \\ -180^\circ & K_b < 0 \end{cases}$$



Fattore monomiale Un polo nell'origine ha un comportamento costante pari a $-g90^\circ$ in base al tipo di sistema si ha un ritardo di fase

$$\underline{\angle W_b(j\omega)} = \underline{\angle \frac{1}{(j\omega)^g}} = -g90^\circ \quad (5.2)$$

Uno zero nell'origine introducirà invece un anticipo di fase

Termine binomio

$$\underline{\angle W_c(j\omega)} = \underline{\angle \frac{1}{1+j\omega\tau}} = -\underline{\angle 1 + j\omega\tau} = -\arctan(\omega\tau)$$

L'analisi asintotica

$$\underline{\angle W_c(j\omega)} \simeq \begin{cases} -\underline{\angle 1} = 0 & \omega \ll \frac{1}{|\tau|} \\ -\underline{\angle j\omega\tau} = \begin{cases} -90^\circ & \tau > 0 \\ 90^\circ & \tau < 0 \end{cases} & \omega \gg \frac{1}{|\tau|} \end{cases}$$

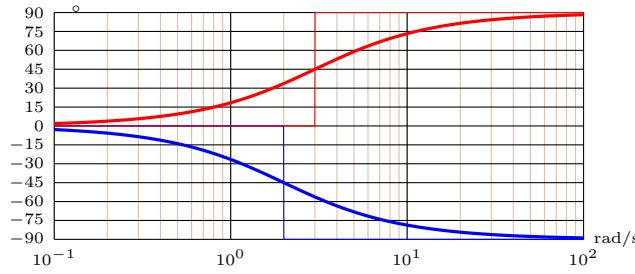


Figura 5.4: $\tau = < 0$, $\tau = > 0$

Nel punto di rottura si introduce l'inversione del livello della fase. Un punto di correzione certo è il passaggio a $\frac{1}{\tau}$ pari a $\pm 45^\circ$. Se ci si riferisce ad uno zero anziché un polo si ribalta il grafico. Anche in questo caso il fattore esponenziale g moltiplica la funzione scalando il valore degli asintoti a 180 per $g = 2$ e così via.

Fattore trinomio

$$\underline{W_d(j\omega)} = -\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\zeta}{\omega_n} \omega}$$

Si ricorda che $-1 < \zeta < 1$, si studia il caso limite $\zeta = 0$ ossia due poli puramente immaginari

$$W_d(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} = \begin{cases} > 0 & \omega < \omega_n \\ < 0 & \omega > \omega_n \end{cases}$$

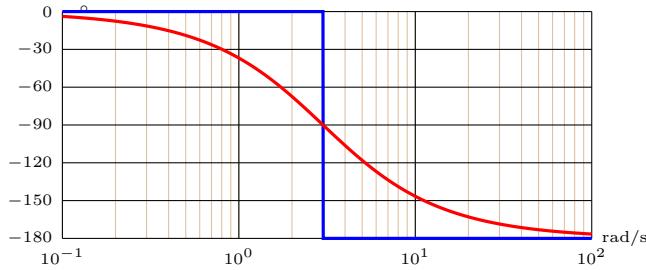


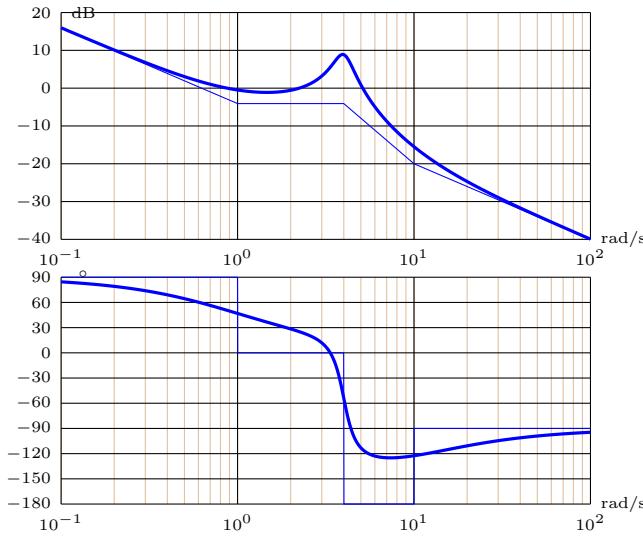
Figura 5.5: $\zeta = 0$, $\zeta = 1$

Se invece $\zeta = 1$ si ricade nel caso di due fattori binomiali coincidenti, si ottiene una curva passante per -90° . Se ζ fosse negativo si invertirebbe ancora una volta il grafico, con asintoto a 180° e punto intermedio a 90° . Con gli zeri si inverte il grafico.

Si espongono le regole di tracciamento per il diagramma di fase. La prima parte coincide con quella vista nel diagramma dei moduli

1. Per pulsazioni molto piccole, minori del primo punto di rottura, gli unici contributi sono dati dal guadagno (se negativo) e da eventuali poli centrati nell'origine, l'ordinata iniziale sarà a quota pari a $\underline{K_B - g \cdot 90^\circ}$
2. In corrispondenza di punti di rottura di poli o zeri reali, l'ordinata aumenta ($\tau_p < 0, \tau_z > 0$) o diminuisce ($\tau_p > 0, \tau_z < 0$) di $90^\circ \cdot m_a$
3. In corrispondenza di punti di rottura di poli o zeri complessi, l'ordinata aumenta ($\zeta_p < 0, \zeta_z > 0$) o diminuisce ($\zeta_p > 0, \zeta_z < 0$) di $180^\circ \cdot m_a$

Si riporta il diagramma in frequenza della funzione studiata a pag. 139



Lo sfasamento iniziale con $K_B = -\frac{5}{8}$ è pari a -270° , nel grafico il diagramma è traslato è inizia in realtà a 90° ($360 - 270 = 90$), l'andamento resta identico. I punti di rottura sono ancora 1, 4, 10, il punto di rottura in 1 è uno zero situato nel semipiano destro, introdurrà un ritardo di 90° , quello situato in $\omega = 10$ è uno zero con τ positiva, introdurrà un anticipo di 90° . La coppia complessa e coniugata centrata in 4 con ζ positiva introduce un ritardo di 180° .

Un sistema è a **fase minima** se il guadagno è positivo e tutte le singolarità polari sono nel semipiano sinistro (tipo 0). In tal caso la pendenza iniziale è zero a causa dell'assenza di poli nell'origine, ad ogni cambio di pendenza del modulo di k corrisponde un cambio di pendenza della fase di $k \cdot 90^\circ$.

5.6 Filtri in frequenza

Si ha un sistema generico con un ingresso $u(t)$ a regime permanente, la funzione di risposta armonica può essere espressa come il rapporto tra lo spettro dell'uscita e lo spettro dell'ingresso.

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}$$

Qualunque tipo di sistema, ottenuta la funzione di risposta armonica, può essere trattato come un **filtro** in frequenza. Si forniscono alcune definizioni di filtro passa-basso e filtro passa-alto.

Filtro passa basso

Un filtro passa basso ha un diagramma del seguente tipo, idealmente dovrebbe attenuare con potenza infinita le frequenze superiori alla pulsazione di taglio ω_H , nella realtà ci sarà una pendenza pari al grado relativo del sistema $-(n - m)$ dato che tutti i sistemi reali sono strettamente propri.

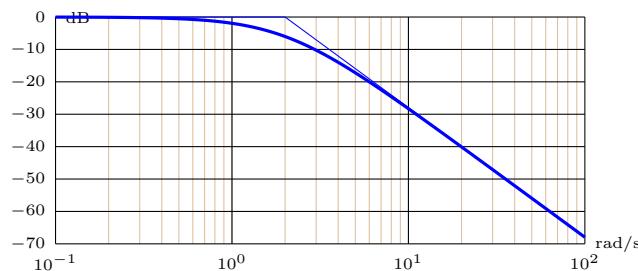


Figura 5.6: $\omega_H = 2 \text{ rad/s}$

Un sistema è un filtro passa-basso reale se rispetta le seguenti condizioni (si assume implicitamente che la $g = 0$ altrimenti si avrebbe una pendenza iniziale non nulla)

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{|W(j\omega)|}{|W(j0)|} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} & \omega < \omega_H \\ \frac{|W(j\omega)|}{|W(j0)|} < \frac{1}{\sqrt{2}} & \omega > \omega_H \end{cases}$$

Il termine $\sqrt{2}$ si utilizza per convenzione perché indica una perdita di potenza di un segnale pari al 50%, sul decibel il rapporto diventa una differenza, dunque 3 dB

$$\begin{cases} |W(j0)| - 3 \text{ dB} \leq |W(j\omega)| \leq |W(j0)| + 3 \text{ dB} & \omega < \omega_H \\ |W(j\omega)| < |W(j0)| - 3 \text{ dB} & \omega > \omega_H \end{cases}$$

Il segnale deve essere contenuto nella banda di $\pm 3 \text{ dB}$ per $\omega < \omega_H$, deve poi sottostare al valore di -3 dB superata la pulsazione di taglio. Non vengono specificate condizioni sulla fase in questo corso.

Filtro passa-alto

La frequenza di taglio si chiama stavolta frequenza di taglio inferiore ω_L , un filtro passa alto ideale deve necessariamente essere un sistema proprio, non strettamente proprio, deve esistere lo stesso numero di poli e zeri. Nella realtà prima o poi i sistemi tagliano sempre.

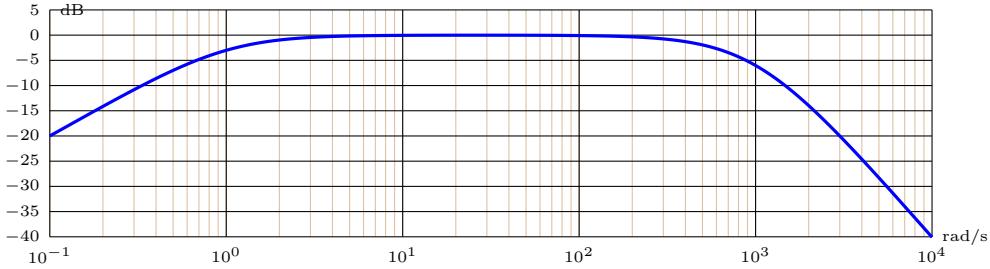
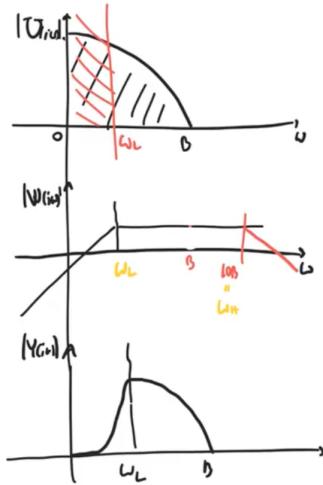


Figura 5.7: $\omega_L = 1$, $\omega_H \simeq 600$

$$\begin{cases} \frac{|W(j\omega)|}{|W(j\infty)|} < \frac{1}{\sqrt{2}} & \omega < \omega_L \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{|W(j\omega)|}{|W(j\infty)|} \leq \sqrt{2} & \omega > \omega_L \end{cases}$$

L'intervallo compreso tra ω_L e ω_H prende il nome di banda passante. Nella realtà infatti il filtro passa-alto prende il nome di passa-banda.

Se si considera un segnale con una certa frequenza massima, se ne vuole filtrare la bassa frequenza, bisognerebbe usare un filtro passa-alto, in realtà se si usa un passa-banda con frequenza di taglio superiore maggiore della massima frequenza del segnale in ingresso, allora si comporterà proprio come un passa-alto.



5.7 Diagrammi di Nyquist

Sono una forma di rappresentazione della risposta armonica, definiti sul piano di Gauss, si ottiene una curva *graduata* in ω , ossia per ogni punto ω corrisponderà una coppia di punti sul piano di Gauss.

Il modulo e la fase della funzione $W(j\omega)$ sono quelli ricavati nell'analisi per i diagrammi di Bode.

Si potrebbe costruire il grafico tabellando tutti i valori per ogni ω , in alternativa si arriva alla costruzione a partire dai diagrammi di Bode. Seguono le regole di tracciamento

1. Costruire i diagrammi di Bode (con le eventuali correzioni)
2. $g = 0 \Rightarrow W(j0) \in \mathbb{R}$ si partirà da un punto sull'asse reale di valore K_B
3. $W(j\omega)$ abbandona l'asse reale sempre ortogonalmente.
4. $g < 0 : W(j0) = 0$ il diagramma parte dall'origine *oppure*
 $g > 0 : |W(j0)| = +\infty$ Asintoto dipendente dalla fase iniziale
5. $n - m > 0 \Rightarrow W(j\infty) = 0$ Sistema strettamente proprio, la tangente dipenderà ancora dalla fase $\angle W(j\infty)$

Si consideri un sistema del primo ordine

$$W(s) = \frac{K_B}{1 + s\tau} \quad \begin{cases} \tau > 0 \\ K_B > 0 \end{cases}$$

Facendo riferimento alle figure 5.2 per il modulo e 5.4 per la fase si partirà da un punto sull'asse reale K_B dato che la fase iniziale è nulla mentre si termina nell'origine con angolo asintoticamente pari a -90°

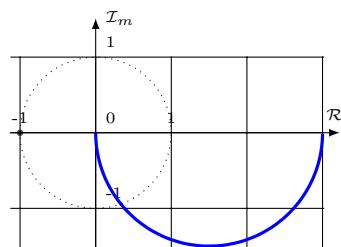


Figura 5.8: $K_B = 3, \tau = 0.5$

La distribuzione di punti non è uniforme lungo la curva, sono in realtà tutti addensati nel punto iniziale e nell'origine per $\omega \ll \omega_H$ e $\omega \gg \omega_H$.

Se K_B fosse negativa con τ positiva si avrebbe il grafico ribaltato nel secondo quadrante.

Funzione del secondo ordine

Si consideri una funzione del secondo ordine

$$W(s) = \frac{K_B}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

Le figure d'esempio saranno questa volta la 5.3 per quanto riguarda il modulo e la 5.5 per la fase.

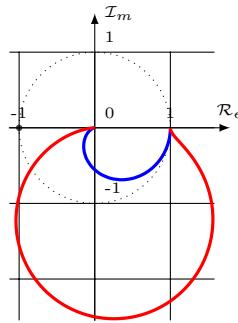


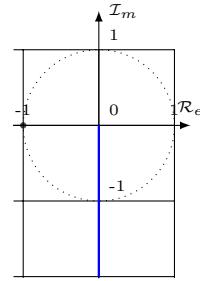
Figura 5.9: $\zeta = 0.9$, $\zeta = 0.2$

La sovraelongazione dovuta a coefficienti di smorzamento ζ minori di $\frac{1}{\sqrt{2}}$ tende ad aumentare la distanza della traiettoria dall'origine. Al limite per $\zeta \rightarrow 0$ il grafico degenera in una coppia di semirette da K_B a $+\infty$ e da $-\infty$ a 0 rispettando la discontinuità dell'angolo.

Polo nell'origine

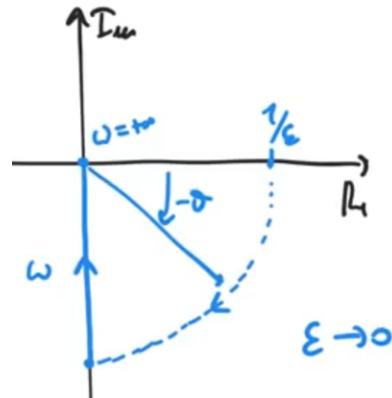
$$W(s) = \frac{K_B}{s} \quad (5.3)$$

Si ha una funzione di trasferimento con un polo nell'origine, facendo riferimento alla figura 5.1 per il guadagno e si considera il segno della fase pari a -90° come ricavato dalla equazione 5.2



Esiste in realtà una singolarità nell'origine, si pensa di deformare l'asse immaginario intorno l'origine con un arco di circonferenza di raggio ε ed angolo $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, dunque la precedente equazione 5.3 diventa

$$W(j\omega) = \frac{K_B}{\varepsilon e^{j\theta}}$$



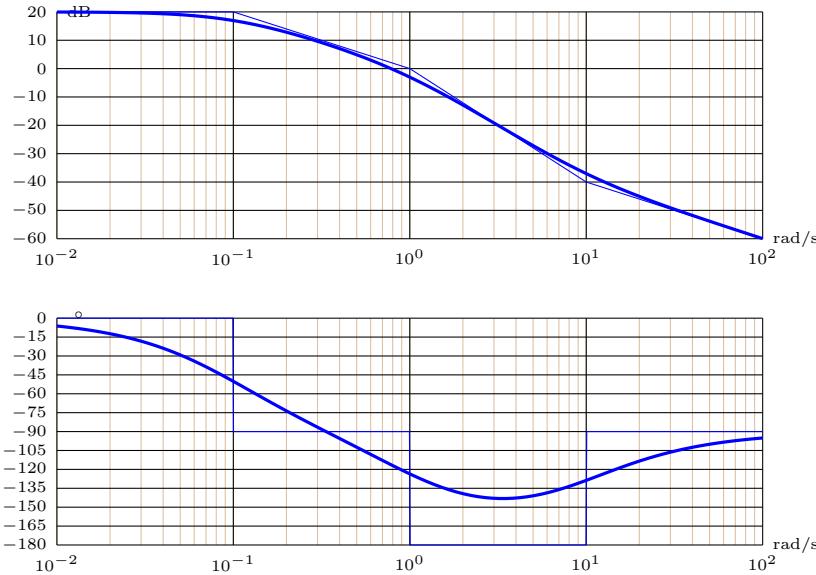
Esempio complesso

Si ha la seguente funzione (in forma di Bode)

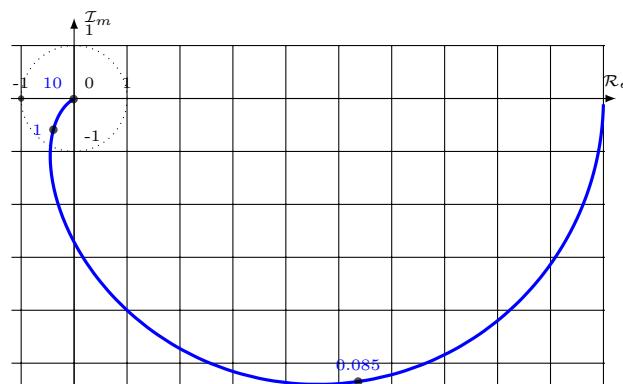
$$W(s) = 10 \frac{1 + 0.1s}{(1 + s)(1 + 10s)}$$

Si ricavano i seguenti dati

$$g = 0, n - m = 1, \tau_z = 0.1, \tau_{p_1} = 1, \tau_{p_2} = 10, K_B = 10$$



Si rappresenta il conseguente diagramma di Nyquist. Sono riportate sulla curva



alcune frequenze per notare come la distribuzione dei punti non sia uniforme.

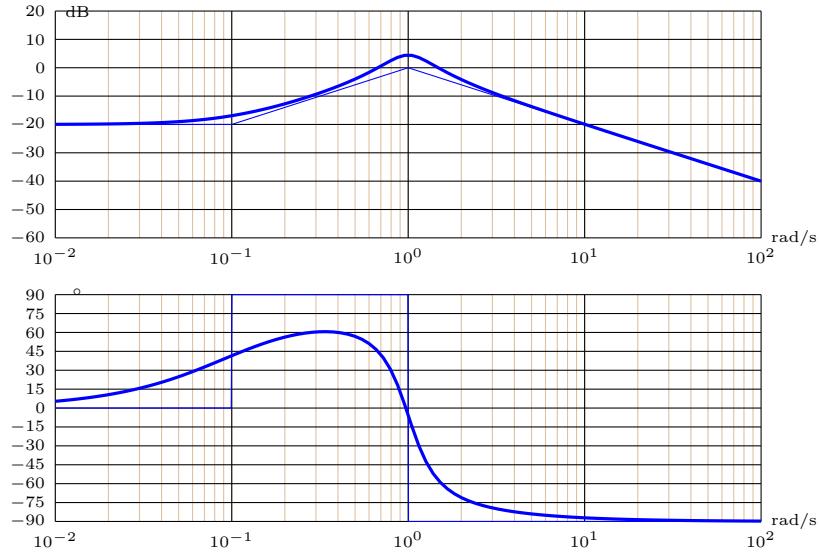
Esempio poli del secondo ordine

Si riporta un ulteriore esempio con un polo del secondo ordine al denominatore

$$W(s) = 0.1 \cdot \frac{1 + 10s}{1 + 0.6s + s^2}$$

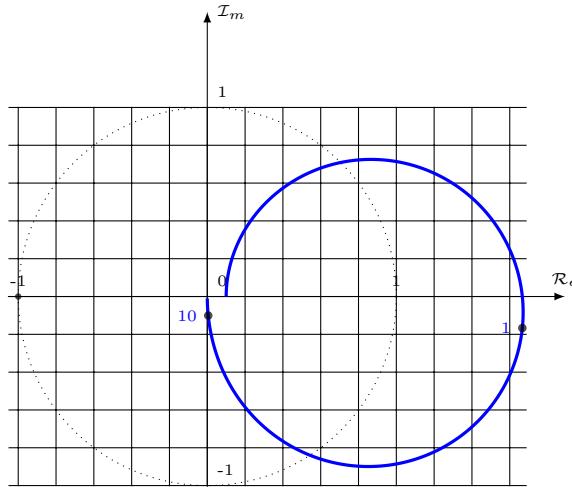
I valori caratteristici sono:

$$K_B = 0.1, \tau_z = 10, \omega_n = 1, \zeta = 0.3 < \frac{1}{\sqrt{2}}, g = 0, n - m = 1$$



Il basso valore di ζ causa la sovraelongazione della curva e il ripido cambio di fase per $\omega = 1$.

Si rappresenta il diagramma di Nyquist



Funzione con polo nell'origine

Sia una funzione di trasferimento nella seguente forma con un solo polo nell'origine

$$W(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s} \quad a_0 = 0 \quad g = 1$$

Il diagramma di Nyquist presenterà un asintoto ortogonale all'asse reale passante per il punto R_a calcolabile con la seguente

$$r_a = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_0 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix}}{a_1^2}$$

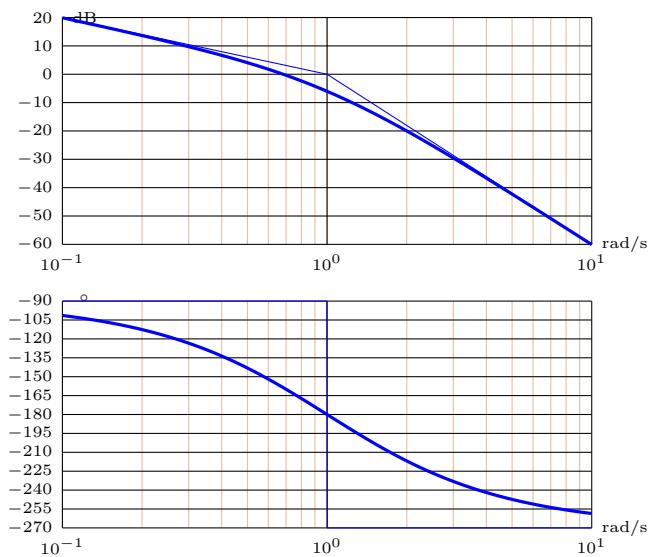
Si consideri la seguente funzione di trasferimento, si sviluppa il denominatore

$$W(s) = \frac{K_B}{s(1+s)^2} = \frac{K_B}{s^3 + 2s^2 + s} = \frac{b_0}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s}$$

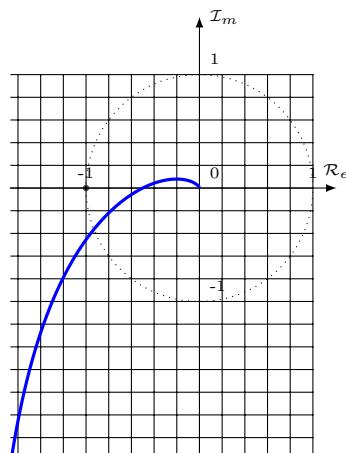
Si individuano i coefficienti della matrice

$$r_a = \frac{\begin{vmatrix} 0 & K_B \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{1^2} = -2K_B$$

Si mostrano i diagrammi di Bode supponendo $K_B > 0$



e quello di Nyquist



Funzione con ritardo

Si aggiunge un ritardo T ad una funzione di trasferimento con singolo polo

$$W(s) = \frac{K_B}{1 + s\tau} e^{-sT}$$

non c'è alcun contributo al modulo che resta invariato

$$|e^{j\omega T}| = 1 \forall \omega$$

mentre la fase è traslata di ωT

$$\angle e^{-j\omega T} = -\omega T$$

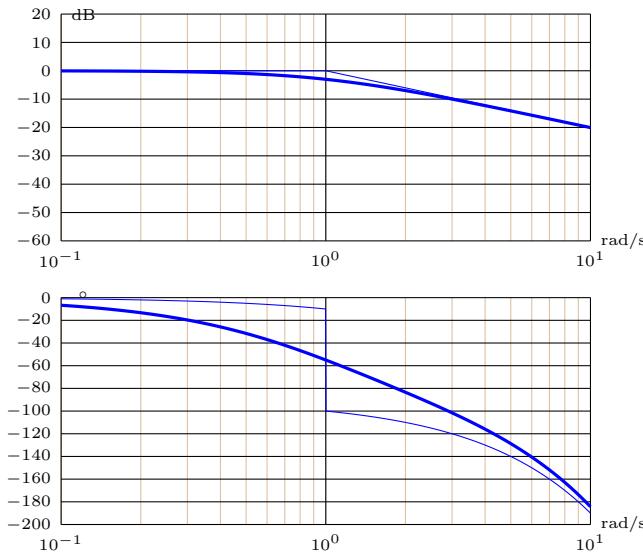


Figura 5.10: $T = 10$

Si osserva come il diagramma del modulo resti invariato mentre quello della fase decresce all'aumentare di ω .

Questa differenza può essere apprezzata nel diagramma di Nyquist

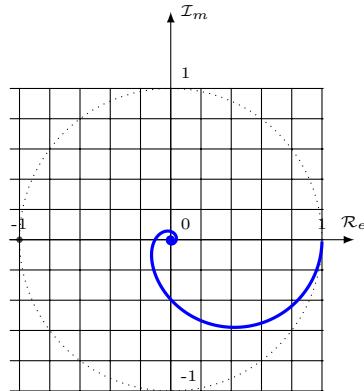


Figura 5.11: $T = 10, K_B = 1$

In questo caso il ritardo è contenuto e il sistema converge comunque nell'origine nonostante la porzione di grafico presente nel secondo quadrante, potrebbe accadere invece che la curva passi all'esterno del punto $(-1, 0)$ e il sistema risulti instabile, esiste dunque un limite al guadagno K_B che si può imporre ad un sistema con ritardo.

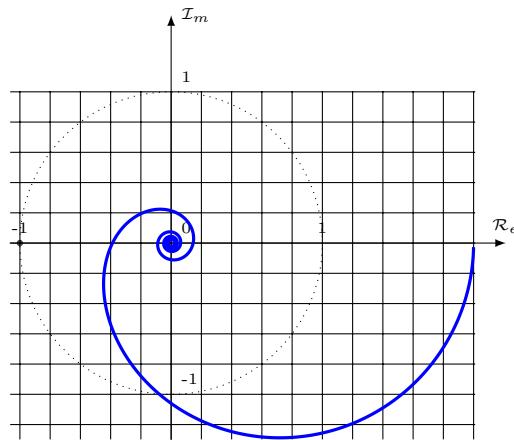


Figura 5.12: $T = 20, K_B = 2$

5.8 Stabilità interna (Lyapunov)

La stabilità interna, chiamata anche *stabilità secondo Lyapunov* fa riferimento alla stabilità di un punto di equilibrio di un sistema, cerca di qualificare il tipo di equilibrio. Si riprende come esempio l'equilibrio del pendolo rigido analizzato alla sezione 2.7.1, sono stati trovati due differenti punti di equilibrio rispettivamente a 0° e 180° . Se il sistema viene perturbato mentre si trova nel suo punto di equilibrio inferiore, ritornerà nello stesso punto di equilibrio.

Si ricorda la condizione di equilibrio

$$f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$$

si perturba lo stato del sistema

$$\bar{x} \rightarrow \bar{x} + \Delta x$$

si genererà un movimento che dipenderà dal tempo, nel caso del pendolo, considerando l'attrito con l'aria, inizierà ad oscillare intorno al punto di equilibrio con oscillazioni di ampiezza sempre minore. Se si trovasse invece nel punto di equilibrio superiore, dopo una perturbazione infinitesima, la massa cadrebbe inevitabilmente nel punto più in basso.

Uno dei due punti di equilibrio ha una proprietà di *attrattività* rispetto all'altro, se i movimenti dello stato ritornano nel punto di equilibrio dopo la perturbazione, anche dopo un tempo asintotico, allora questo punto si dirà *stabile*. Se la traiettoria $x(t)$ si allontanerà definitivamente dal punto di equilibrio, si dirà che questo punto è *instabile*.

Definizione formale secondo Lyapunov

Sia un sistema lineare tempo invariante con ingresso costante

$$\dot{x} = f(x, u), \quad u(t) = \bar{u} = \text{cost} : f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$$

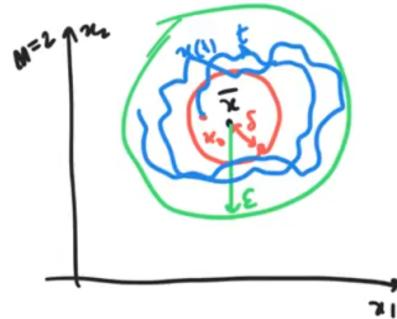
Il punto di equilibrio \bar{x} è stabile se e solo se

$$\bar{x} \text{ stabile} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x_0 : \|\bar{x} - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon$$

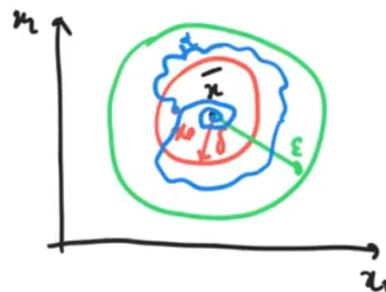
Un punto di equilibrio è asintoticamente stabile se

$$\bar{x} \text{ asintoticamente stabile} \Leftrightarrow \begin{cases} 1) & \bar{x} \text{ è stabile} \\ 2) & \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0 \end{cases}$$

Si rappresenta graficamente la definizione di stabilità per un sistema di dimensione due.



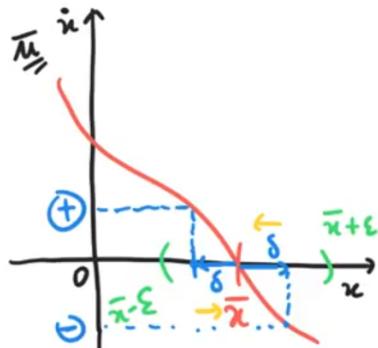
Invece per la asintoticamente stabilità si ha la seguente traiettoria



Un punto di equilibrio è invece instabile se non è stabile.

Esempio stabilità sistema del primo ordine

Si consideri per semplicità un sistema del primo ordine, può essere rappresentata la sua equazione caratteristica $\dot{x} = f(x, \bar{u})$, il punto di stabilità si individua mediante l'intersezione con l'asse delle ascisse ($\dot{x} = 0$). Si individua su questo asse l'intorno $\bar{x} \pm \varepsilon$, si applica una perturbazione δ spostando il punto di equilibrio, ad esempio verso sinistra, ma a sinistra la derivata è positiva, dunque la x tenderà nuovamente ad aumentare e ritornare nel punto di equilibrio, viceversa se si analizza una perturbazione verso destra, la derivata sarà negativa e quindi lo stato tenderà a diminuire nuovamente. Se la curva



fosse monotona decrescente, l'ampiezza ε potrebbe essere comunque grande, il sistema ritornerà sempre nel punto di equilibrio.

Ciò potrebbe non essere vero, dunque è necessario definire la **Regione di Asintotica Stabilità** o RAS il luogo delle traiettorie che ritornano sempre nel punto di equilibrio.

$$\text{RAS}(\bar{x}) = \left\{ x_0 \in X^n : \begin{array}{l} u=\bar{u} \\ x_0 \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \bar{x} \end{array} \right\}$$

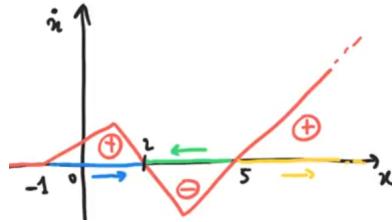
Nel caso in esame il RAS è tutto il dominio \mathbb{R} dunque il punto \bar{x} viene definito globalmente asintoticamente stabile. L'asintotica stabilità non dipende da δ .

Funzione spezzata

Si presenta una funzione definita da una spezzata come in figura. Si individuano i punti di equilibrio

$$\bar{x} = (-\infty, -1] \cup \{2, 5\}$$

Si vede, valutando il segno della derivata che il punto 2 ad esempio è asintoticamente stabile per $RAS(2) = (-1, 5)$. Viceversa per il punto 5, qualunque sia la ε scelta, la traiettoria si allontanerà sempre dal punto di equilibrio dunque $\bar{x} = 5$ è instabile. Nella



regione minore di -1 la derivata è nulla su un intero intervallo, dunque esiste un'intera regione di punti di equilibrio, è verificata la proprietà di stabilità ma non di asintotica stabilità, lo stato resta nello stesso punto dopo essere stato perturbato.

Il punto -1 è instabile a causa della pendenza positiva della funzione a destra.

5.8.1 Stabilità nei sistemi lineari e stazionari

Si scrive il sistema nella forma lineare di stato e ingresso, ponendo un ingresso costante

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad u(t) = \bar{u} = \text{cost} : 0 = A\bar{x} + B\bar{u}$$

Si supponga che il sistema non sia omogeneo

$$\begin{aligned} \bar{u} \neq 0 & \begin{cases} \det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists! \text{ equilibrio} : \bar{x} = -A^{-1}B\bar{u} \\ \det(A) = 0 \begin{cases} B\bar{u} \in \text{Immagine}\{A\} \Rightarrow \infty \text{ equilibri} : \bar{x} + x_{\ker(A)} \\ B\bar{u} \notin \text{Immagine}\{A\} \Rightarrow \nexists \text{ equilibrio} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Se invece l'ingresso \bar{u} è nullo si risolvono i seguenti due casi

$$\bar{u} = 0 \Rightarrow (A\bar{x} = 0) \begin{cases} \det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists! \text{ equilibrio} : \bar{x} = 0 \\ \det(A) = 0 \Rightarrow \exists \infty \text{ equilibri} : \bar{x} \in \text{Ker}(A) \end{cases}$$

Analisi di un punto di equilibrio

Si scelga un punto di equilibrio qualsiasi (\bar{x}, \bar{u}) se il sistema è in equilibrio vale l'equazione di Lagrange, ricordando che il punto iniziale è pari allo stato in cui si trova il sistema in quel momento

$$\bar{x} = e^{At}\bar{x} + \int_0^t e^{a(t-\tau)}B\bar{u}d\tau$$

si perturba lo stato

$$x(t) = e^{At}(\bar{x} + \Delta x) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}B\bar{u}d\tau$$

Si valuta la differenza tra lo stato dopo la perturbazione e prima, accertandosi che la norma della differenza sia minore di ε

$$x(t) - \bar{x} = e^{At}\Delta x \longrightarrow \|x(t) - \bar{x}\| = \|e^{At}\Delta x\| < \varepsilon$$

Nella norma non compaiono il punto di equilibrio e lo stato iniziale, dunque la stabilità del punto di equilibrio dipende solo dalla matrice A e dalla perturbazione Δx , se un solo punto di equilibrio è stabile, allora lo saranno tutti. Questa affermazione vale solo per i sistemi lineari e non quelli non lineari, un chiaro esempio è il pendolo analizzato precedentemente che ha un punto stabile ed uno instabile ma non è un sistema lineare.

Le funzioni del tempo contenute nella matrice esponenziale e^{At} sono i *modi naturali*, se questi sono limitati nel tempo, allora la norma sarà sicuramente limitata. I modi dipendono però dagli autovalori della matrice A

$$A = \begin{cases} \Re \lambda_i < 0 \ \forall i & \Leftrightarrow \text{Sistema asintoticamente stabile} \\ \Re \lambda_i \leq 0 \ \forall i & \Re \{\lambda_j\} = 0 \Rightarrow m_{aj} = m_{gj} \Rightarrow \text{Sistema stabile, i modi sono limitati} \\ \text{Altri casi} & \text{Sistema instabile} \end{cases}$$

Si è capito che al fine di analizzare la stabilità di un sistema è sufficiente conoscere le radici del suo polinomio caratteristico. Non sempre è però facile calcolare le radici di un polinomio se questo è di ordine superiore al secondo.

5.8.2 Criterio di Routh-Hurwitz

Al fine di verificare la asintotica stabilità di un sistema è però necessario solo calcolare il segno della parte reale delle radici e non il loro valore esatto, per fare ciò è comodo utilizzare il criterio di Routh, composto da una condizione necessaria ed una necessaria e sufficiente.

- Condizione necessaria: i coefficienti del polinomio sono tutti dello stesso segno (per $n \leq 2$ è anche sufficiente)
- Condizione sufficiente: la tabella di Routh-Hurwitz è ben definita e tutti i coefficienti della prima colonna devono avere lo stesso segno

Sia $P(\lambda)$ un polinomio caratteristico

$$P(\lambda) = \alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_0$$

si costruisce la seguente tabella di Routh con $n+1$ righe, si dispongono nelle prime due righe i coefficienti del polinomio, il resto delle righe sono nulle.

n	α_n	α_{n-2}	α_{n-4}	\dots
$n-1$	α_{n-1}	α_{n-3}	\dots	\dots
$n-2$	$c_{n-2,1}$	$c_{n-2,2}$	\dots	\dots
$n-3$	$c_{n-3,1}$	$c_{n-3,2}$	\dots	\dots
\vdots				
0	$c_{0,1}$			

Tabella 5.1: Tabella di Routh

Il generico coefficiente $c_{i,k}$ si ottiene

$$c_{i,k} = -\frac{1}{c_{i+1,1}} \begin{vmatrix} c_{i+2,1} & c_{i+2,k+1} \\ c_{i+1,1} & c_{i+1,k+1} \end{vmatrix}$$

Gli elementi nella prima colonna nel determinante sono sempre gli stessi e non dipendono dalla colonna k in cui si sta calcolando il coefficiente.

Se la prima colonna della tabella 5.1 contiene tutti numeri diversi da zero allora la tabella si definisce ben definita. Il numero di radici a parte reale negativa è pari al numero di permanenze di segno nella tabella, ossia il numero di volte in cui si contano due numeri consecutivi con lo stesso segno. Il numero di radici a parte reale negativa è pari al numero di permanenze di segno della prima colonna della matrice, viceversa quelle a parte positiva sono pari alle differenze di segno tra due valori consecutivi nella colonna. Può essere utile capire il numero di radici positive al fine di correggere eventualmente il sistema.

Esempio numerico

Si consideri il seguente polinomio

$$P(s) = s^4 + 6s^3 + 13s^2 + 12s + 4$$

La condizione necessaria è verificata, tutti i coefficienti sono positivi, si costruisce la tabella di Routh. Si calcolano i coefficienti

	4	1	13	4
$p \mid$	3	6	12	
$p \mid$	2	11	4	
$p \mid$	1	108		($\times 11$)
$p \mid$	0	4		

$$c_{2,1} = -\frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 13 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 11$$

$$c_{2,2} = -\frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

In questo caso è presente lo zero nella matrice, il coefficiente $c_{2,2}$ è proprio pari al termine presente nella posizione $c_{4,3}$ ovvero 4, non è necessario calcolare il determinante.

$$c_{1,1} = -\frac{1}{11} \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} = \frac{108}{11}$$

Si può moltiplicare per qualunque scalare positivo un'intera riga senza alterare il risultato, si può moltiplicare la riga 1 per 11. Anche il termine $c_{0,1}$ assume direttamente il valore 4, senza calcolare il determinante. La matrice è ben definita, sono presenti quattro permanenze di segno, il polinomio ha tutte radici a parte reale negativa. Il polinomio si poteva infatti riscrivere come

$$p(s) = (s+1)^2(s+2)^2$$

Polinomi con coefficienti discordi

Si consideri il seguente polinomio

$$p(s) = s^5 + 8s^4 + 17s^3 + 8s^2 - 14s - 10$$

La condizione necessaria non è soddisfatta, il polinomio non può rappresentare un sistema asintoticamente stabile, esisteranno delle radici la cui parte reale sarà maggiore o uguale a zero. Si costruisce comunque la tabella di Routh per esercizio e per contare il numero di radici positive. Sono presenti quattro permanenze di segno consecutive

	5	1	17	-4
p	4	8	8	-10
p	3	16	-23/2	
p	2	55/4	-20	
p	1	259/22		
c	0	-20		

mentre il passaggio dalla riga 1 alla riga 0 contiene una variazione di segno. Il polinomio avrà una sola radice a parte reale positiva, la presenza del termine noto -10 esclude la presenza di uno zero a parte reale nulla. Risolvendo il polinomio con un calcolatore si ottiene:

$$\lambda_i = \{-5, -2, -1 \pm j, 1\}$$

Ulteriore esempio

Anche in questo caso non è soddisfatta la condizione necessaria

$$p(s) = s^4 - 6s^3 - 11s^2 + 74s + 78$$

Si applica la tabella di Routh

	4	1	-11	78
c	3	-6	74	
c	2	4/3	78	
p	1	425		
p	0	78		

Il polinomio ha due radici a parte reale negativa e due a parte reale maggiore o uguale a zero

$$\lambda_i = \{-3, -1, 5 \pm j\}$$

Tabella contenente uno zero

Si analizza il seguente polinomio

$$p(s) = s^4 + s^3 + s^2 + s + 2$$

È soddisfatta la condizione necessaria ma nella costruzione della tabella compare uno zero, dunque non è ben definita e il polinomio non ammette tutte le soluzioni a parte reale negativa.

4	1	1	2
3	1	1	
<hr/>			
2	0		
1			
0			

Se si volesse comunque contare il numero di zeri a parte reale positiva e negativa esistono alcune tecniche equivalenti per continuare il calcolo.

Tecnica delle perturbazioni elementari

Si può sommare una ε infinitesima positiva ai coefficienti, ossia perturbarli localmente per eliminare lo zero, si continua lo sviluppo della tabella:

$\varepsilon < 0$	$\varepsilon > 0$	4	1	1	2
p	p	3	1	1	
<hr/>		2	ε	2	
c	p	1	$-2/\varepsilon$		
c	c	0	2		
p	c				

Il primo elemento sotto lo zero sarà

$$c_{1,1} = -\frac{1}{\varepsilon} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\varepsilon}(2 - \varepsilon) \simeq -\frac{2}{\varepsilon}$$

Con ε infinitesimo positivo si hanno due permanenze e due cambi di segno, se ε fosse negativo invece si vede che il risultato non cambia. Questa tecnica è valida se si azzera un elemento in prima colonna ma non più di uno zero per riga.

Zeri multipli sulla stessa riga

Si consideri una riga i -esima contenente più di uno zero tra i primi p elementi, si moltiplicano i coefficienti della riga per $(-1)^p$, successivamente si trasla la riga verso sinistra di p posizioni eliminando gli zeri, si somma questa nuova riga più piccola ottenuta e la si somma alla riga i -esima originale; il risultato della somma viene sostituito al posto della riga i -esima.

Si applica la tecnica al polinomio precedente, si vede che $p = 1$, la riga 2 (0, 2) viene moltiplicata per -1 e traslata di una posizione a sinistra ottenendo (-2, 0), successivamente sommata alla riga iniziale, si ottiene la nuova tabella

	4	1	1	2
p	3	1	1	
c	2	-2	2	
c	1	2		
p	0	2		

Un’ulteriore tecnica prevede di moltiplicare il polinomio per una radice nota, aumentandone il grado, si ricostruisce la tabella di Routh, non dovrebbe comparire più lo zero nella prima colonna, salvo casi eccezionali, se ciò non dovesse accadere si può cambiare il valore della radice. Si dovrà togliere successivamente al numero di radici positive o negative quella aggiunta arbitrariamente, in base al suo segno.

Annulloamento di un’intera riga

Si consideri il polinomio

$$p(s) = s^5 + s^4 + s^3 + s^2 + s + 1$$

La condizione necessaria è verificata, si costruisce la tabella di Routh, tutta la riga 3 sarà nulla

	5	1	1	1
p	4	1	1	1
	3	0	0	
	2			
	1			
	0			

In questo caso il polinomio di partenza può essere fattorizzato in un prodotto di due polinomi $p'(s) \cdot p''(s)$, il primo polinomio dipende da tutte le righe della tabella di Routh fino a quella prima della riga nulla, in questo caso 5 e 4. Un’intera riga si può annullare solo in posizioni dispari (3). Le radici contenute nel polinomio p' rispettano la permanenza di segno delle righe precedenti a quella annullata, di conseguenza in questo caso il polinomio p' avrà una sola radice con parte reale negativa. Le restanti righe riguardano il polinomio p'' , sarà di ordine pari al numero di righe rimanenti, è di ordine sempre pari ed è biquadratico, ossia scrivibile nella forma s^2 .

Le radici di un polinomio biquadratico hanno sempre simmetria quadrantale, una radice reale avrà una radice simmetrica sull'asse reale di segno opposto, una coppia di radici complesse e coniugate avranno un'altra coppia sul lato opposto rispetto all'asse reale; ogni quadrante ha la stessa disposizione delle radici, si ottiene ruotando quello adiacente.

Sicuramente la condizione necessaria di Routh non è soddisfatta, avrà solo i coefficienti delle potenze pari mentre quelli delle potenze dispari saranno nulli, in ogni caso non potrebbero esistere radici che non appartengano almeno all'asse immaginario o siano a parte reale positiva.

I coefficienti del polinomio p'' sono quelli dell'ultima riga prima della riga nulla

$$p''(s) = s^4 + s^2 + 1$$

Si potrebbe ottenere il polinomio p' eseguendo una divisione

$$\begin{array}{c} s^5 + s^4 + s^3 + s^2 + s + 1 \\ - s^5 \quad - s^3 \quad - s \\ \hline s^4 \quad + s^2 \quad + 1 \\ - s^4 \quad - s^2 \quad - 1 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} s^4 + s^2 + 1 \\ s + 1 \end{array} \right.$$

Più rapidamente si può ottenere la riga mancante in tabella derivando il polinomio p'' ed inserendo i coefficienti ottenuti $\frac{dp''(s)}{ds} = 4s^3 + 2s$.

La nuova tabella ottenuta sarà

	5	1	1	1
p	4	1	1	1
p	3	4	2	$\frac{dp''}{ds}$
p	2	2	4	($\times 4$)
c	1	-12		($\times 2$)
c	0	4		

Il polinomio p'' avrà due radici a parte reale negativa e due a parte reale positiva.

5.8.3 Studio dei sistemi a parametri incerti

Un sistema è a parametri incerti se alcuni suoi parametri sono forniti con un intervallo di incertezza oppure non sono ancora stati dimensionati, ad esempio il sistema può contenere dei regolatori a struttura preassegnata come i regolatori “PID” (*Proporzionali-Integrali-Derivativi*) la cui struttura e consecutiva legge di controllo sono già assegnati, vanno solo impostati i giusti parametri. Si cerca dunque la regione di asintotica stabilità (RAS) nell'insieme dei parametri, il criterio di Routh si presta bene a questi studi.

Si consideri il polinomio

$$p(s) = s^3 + (2 + \beta)^2 s^2 + (1 + 2\beta)s + \alpha + \beta \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

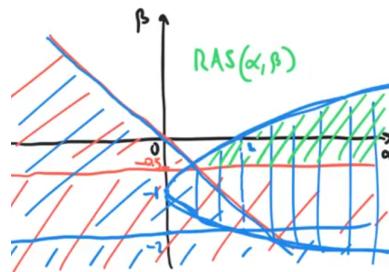
Si deve sempre imporre la condizione necessaria

$$\begin{cases} 2 + \beta > 0 \\ 1 + 2\beta > 0 \\ \alpha + \beta > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta > -2 \\ \beta > -\frac{1}{2} \\ \beta > -\alpha \end{cases}$$

Con soli due parametri è possibile rappresentare graficamente questa regione, la RAS è sicuramente contenuta in questa regione, potrebbe essere però più piccola. Per individuare la RAS si costruisce la tabella di Routh, i coefficienti della prima colonna devono avere tutti lo stesso segno

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & 1 + 2\beta & \\ \hline 2 & 2 + \beta & \alpha + \beta & \\ \hline 1 & \frac{2(\beta+1)^2 - \alpha}{2 + \beta} & & \\ \hline 0 & \alpha + \beta & & \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 2 + \beta > 0 \\ \frac{2(\beta+1)^2 - \alpha}{2 + \beta} > 0 \\ \alpha + \beta > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta > -2 \\ 2(\beta+1)^2 > \alpha \\ \beta > -\alpha \end{cases}$$

Intersecando i due sistemi ottenuti si ottiene la RAS



Criterio di Karithonov

Il criterio di Karithonov fa uso del criterio di Routh per risolvere il problema di un sistema definito da parametri con una certa tolleranza.

Si consideri un polinomio definito dalla seguente lista di coefficienti compresi in un certo intervallo di valori:

$$P(s) : \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \quad \alpha_i \in [\alpha_i^-, \alpha_i^+] \quad i = 0, \dots, n$$

È un caso tipico di tutti i sistemi i cui parametri sono forniti dal costruttore con una tolleranza oppure sono stati studiati mediante un certo strumento con un'accuratezza finita o ancora sono sottoposti a temperature molto diverse tra loro e i loro parametri hanno una certa dipendenza dalla temperatura.

Al fine di studiare l'asintotica stabilità vengono costruiti quattro polinomi utilizzando gli estremi di ogni parametro secondo uno specifico ordine

$$\begin{aligned} P_a(s) &: \{\alpha_0^+, \alpha_1^+, \alpha_2^-, \alpha_3^-, \alpha_4^+, \alpha_5^+, \dots\} \\ P_b(s) &: \{\alpha_0^-, \alpha_1^-, \alpha_2^+, \alpha_3^+, \alpha_4^-, \alpha_5^-, \dots\} \\ P_c(s) &: \{\alpha_0^+, \alpha_1^-, \alpha_2^-, \alpha_3^+, \alpha_4^+, \alpha_5^-, \dots\} \\ P_d(s) &: \{\alpha_0^-, \alpha_1^+, \alpha_2^+, \alpha_3^-, \alpha_4^-, \alpha_5^+, \dots\} \end{aligned}$$

Il polinomio P_b è il negato (nel senso dei segni) di P_a , il polinomio P_c ha i segni traslati di una posizione verso sinistra rispetto a P_a , il polinomio P_d è il negato (nel senso dei segni) di P_a .

Il criterio di Karithonov garantisce che il polinomio di partenza $P(s)$ abbia tutte radici a parte reale negativa, per qualunque combinazione di valori di α compresi nei rispettivi intervalli prima definiti se i quattro polinomi costruiti hanno tutti radici a parte reale negativa, si applica il criterio di Routh ad ogni singolo polinomio.

5.8.4 Legame tra stabilità asintotica e funzione di trasferimento

Un sistema è stabile se la sua funzione di trasferimento converge asintoticamente a zero, questo tipo di stabilità prende il nome di stabilità esterna o ingresso-uscita, chiamata anche *BIBO* Bounded-Input-Bounded-Output o *LIL*O Limited-Input-Limited-Output.

La stabilità secondo Liapunov è invece un concetto di stabilità interna al sistema, locale nell'intorno del punto di equilibrio. È comunque un concetto di stabilità più forte perché riguarda lo stato del sistema e implica quella esterna, se i modi del sistema, studiati con il criterio di Liapunov, sono convergenti allora lo saranno sicuramente quelli eccitabili ed osservabili, analizzati dalla funzione di trasferimento.

L'implicazione inversa è vera solo per i sistemi in forma minima, ossia se tutti i suoi modi sono raggiungibili (eccitabili) ed osservabili. La matrice esponenziale e^{At} può essere espressa come rapporto tra una matrice $E(s)$ e un polinomio $m(s)$. Si applica l'impulso, ovvero si moltiplica per le matrici C e B per ottenere la risposta all'impulso e si ricava il rapporto tra una matrice $N(s)$ e un polinomio $dw(s)$ chiamato polinomio minimo. Se

il polinomio minimo coincide con il polinomio caratteristico $P(s) = |sI - A|$, allora il sistema è in forma minima.

$$W(t) = Ce^{At}B = C \frac{E(s)}{m(s)} B = \frac{N(s)}{dw(s)}$$

Nel polinomio $m(s)$ sono presenti tutti i modi, moltiplicando per C e B potrebbero esserci delle cancellazioni e il polinomio $dw(s)$ potrebbe non contenere tutti i modi e il sistema non essere in forma minima.

Se il sistema è in forma ISU si costruisce la matrice A e si calcola il polinomio caratteristico, studiandolo con il criterio di Routh. In alternativa si può costruire la funzione di trasferimento $W(s) = \frac{N(s)}{dw(s)}$, si può utilizzare il polinomio $dw(s)$ ma devono essere eseguite prima tutte le cancellazioni, se e solo se il polinomio ha ancora grado n allora si può utilizzare per studiare la stabilità interna.

5.8.5 Metodo indiretto di Lyapunov (I criterio)

Si vuole studiare la stabilità di un punto di equilibrio non lineare mediante lo studio di un sistema linearizzato attorno a quel punto.

Sia il sistema non lineare con ingresso costante situato in un suo punto di equilibrio

$$\dot{x} = f(x, u) \quad u(t) = \bar{u} \longrightarrow f(\bar{x}, \bar{u}) = 0 : \bar{x} \text{ punto di equilibrio}$$

Si costruisce il sistema linearizzato nell'intorno dei punti di equilibrio di cui si vuole studiare la stabilità, si introducono le variabili di variazione

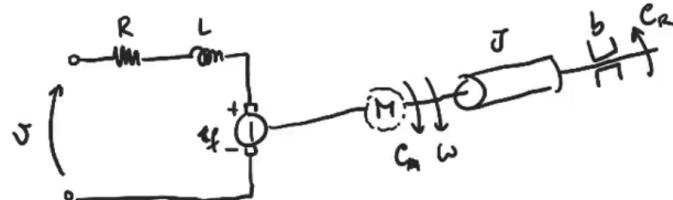
$$\delta x = x - \bar{x}, \quad \delta u = u - \bar{u} \rightarrow A = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{u=\bar{u} \\ x=\bar{x}}}$$

Si definisce una matrice A come lo Jacobiano della funzione f rispetto ad x calcolato nel punto di equilibrio, per ogni punto di equilibrio.

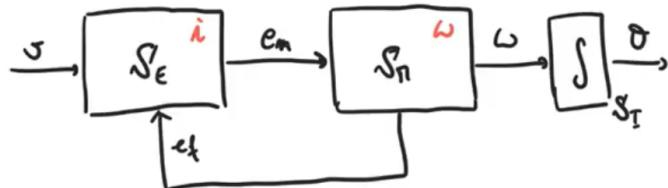
Il primo criterio di Lyapunov afferma che il punto di equilibrio \bar{x} è asintoticamente stabile se la matrice A ha tutti autovalori a parte reale negativa. \bar{x} è instabile se la matrice A ha qualche autovalore a parte reale positiva. Non sono presenti condizioni circa la semplice stabilità del sistema, non si può cioè affermare nulla se la matrice A ha qualche autovalore a parte reale nulla, si ricorre in questi casi al teorema di LaSalle, non si può utilizzare questo metodo perché la stabilità dipenderebbe dai parametri trascurati nel processo di linearizzazione.

5.9 Sistemi interconnessi

Si consideri un sistema elettromeccanico, un motore elettrico a magneti permanenti è un sistema che ha un ingresso elettrico e un'uscita meccanica. Il circuito elettrico è formato da una serie R-L e un generatore di tensione proporzionale mediante una costante K alla coppia resistente e alla velocità angolare del rotore mentre la coppia motrice è proporzionale alla corrente che circola nella maglia tramite la medesima costante K .



Si può suddividere il sistema in un sottosistema elettrico che ha in ingresso la tensione v e la tensione e_f , in uscita la coppia C_m che risulta essere l'ingresso per il sistema meccanico che ha in uscita la ω oppure ponendo un sistema integratore si otterebbe la posizione angolare θ .



Si scrive l'equazione alla maglia del sottosistema elettrico e meccanico

$$\begin{cases} v = Ri + Li + e_f \\ e_f = K\omega \end{cases} \quad \begin{cases} j\dot{\omega} = C_m - b\omega - C_r \\ C_m = Ki \end{cases}$$

Si aggiunge l'integratore

$$\theta = \int_0^t \omega(\tau) d\tau$$

Si costruisce la ISU del sottosistema elettrico e meccanico

$$\begin{cases} x_1 = i \\ \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 + \frac{1}{L}v - \frac{1}{L}e_f \\ y' = C_m = Kx_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \omega \\ \dot{x}_2 = -\frac{b}{J}x_2 + \frac{1}{J}C_m - \frac{1}{J}C_r \\ y'' = x_2 \\ y''' = e_f = Kx_2 \end{cases}$$

Il sottosistema integratore

$$\begin{cases} x_3 = \theta \\ \dot{x}_3 = \omega \\ y = x_3 \end{cases}$$

Il vettore di stato complessivo è formato dall'unione di tutti gli stati ponendo $v = u_1$ e $C_r = u_2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 + \frac{1}{L}u_1 - \frac{K}{L}x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{b}{J}x_2 + \frac{K}{J}x_1 - \frac{1}{J}u_2 \\ \dot{x}_3 = x_2 \\ y = x_3 \end{cases}$$

Il sistema ISU complessivo è stato costruito tenendo in considerazione la relazione di interconnessione tra i sistemi e le rispettive variabili che permettono la loro interazione.

5.10 Raggiungibilità ed osservabilità

Queste due proprietà cercano di studiare in modo qualitativo le potenzialità dell'ingresso di un certo sistema ISU e la possibilità che offre l'uscita rispetto alla possibilità di capire cosa accade nel sistema osservando l'uscita. Le potenzialità dell'ingresso possono influenzare l'evoluzione dello stato, racchiuso in un sottospazio X^n dell'intero sistema, non è infatti detto che l'ingresso possa modificare senza vincoli tutte le variabili di stato, questo fenomeno viene studiato attraverso la proprietà di raggiungibilità.

Si vuole inoltre capire se è possibile ricostruire l'evoluzione interna dello stato attraverso l'osservazione dell'uscita, in generale non è possibile, si può ricostruire una parte dello stato e non tutto.

5.10.1 Raggiungibilità (LTI)

Uno stato \hat{x} è raggiungibile se e solo se

$$\hat{x} \text{ raggiungibile} \Leftrightarrow \exists \hat{t}, \hat{u}_{[t_0, \hat{t}]} : x_f(\hat{t})|_{u=\hat{u}} = \hat{x}$$

esiste un tempo \hat{t} ed un ingresso \hat{u} tali per cui l'evoluzione forzata $x_f(\hat{t})$ coincida con lo stato \hat{x} . Questa caratteristica equivale a dire che è possibile pilotare il sistema mediante l'ingresso in un certo intervallo finito e portarlo proprio nello stato desiderato. Un sistema in cui tutti gli stati sono raggiungibili si dirà *completamente raggiungibile*, si definisce il sottospazio di raggiungibilità X_R sottoinsieme dello spazio dello stato.

$$X_R = \{x \in X^n : x \text{ è raggiungibile}\} \subseteq X^n$$

Se il sottospazio di raggiungibilità coincide con lo spazio dello stato allora il sistema nella sua forma ISU è completamente raggiungibile. La raggiungibilità è fondamentale per un progettista, permette di capire se si hanno a disposizione i giusti ingressi per il sistema in esame e per modificarne lo stato.

Si consideri la funzione della risposta forzata dalle formule di Lagrange

$$x_f(t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

Nell'espressione compaiono solo le matrici A e B , dunque la proprietà di raggiungibilità dipende solo da queste due matrici. La matrice A contiene i modi naturali e le caratteristiche interne al sistema, la matrice B invece modula l'ingresso e lo lega alla variabile di stato.

Un drone ad esempio è un sistema sottoattuato, non si può controllare istantaneamente la sua posizione e il suo orientamento ma si possono solo comandare i motori e quindi la spinta risultante, non si può in alcun modo applicare una spinta (senza aggiungere ulteriori eliche e dunque variabili di ingresso) che sia ortogonale al piano del drone.

Matrice di raggiungibilità

Permette di studiare la raggiungibilità del sistema, è una matrice a blocchi per colonna, il primo blocco è la matrice B , poi il prodotto di $A \times B$ fino ad $A^{n-1}B$ dove n è la dimensione del sistema (o della matrice A)

$$R = (B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-1}B) \quad n \times (n \cdot m)$$

Uno stato \hat{x} è raggiungibile se e solo se

$$\hat{x} \text{ raggiungibile} \Leftrightarrow \hat{x} \in X_R = \text{Immagine}\{R\}$$

Un sistema è completamente raggiungibile se X_R corrisponde a tutto lo spazio X^n ma ciò è vero se la matrice R è di ragno pieno. Per i sistemi con un solo ingresso la matrice diventa quadrata, è sufficiente assicurarsi che il determinante sia diverso da zero affinché abbia rango massimo.

Si consideri il seguente esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow R = \begin{pmatrix} B & AB \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \rho(R) = 1 < 2$$

Il sottospazio di raggiungibilità X_R non coincide con tutto lo spazio di stato, si deve ricavare la base associata alla matrice R estraendo le colonne linearmente indipendenti, in questo caso è sufficiente usare la prima colonna

$$\text{Immagine}\{R\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Lo spazio ha dimensione 2 ($n = 2$) mentre la base ha dimensione 1, dunque il sottospazio di raggiungibilità è la retta passante per l'origine degli assi dello stato con pendenza unitaria. Ciò significa che si può fornire al sistema un ingresso qualsiasi ma lo stato sarà vincolato a muoversi solo lungo la retta X_R ossia tale che $x_1 = x_2$ qualunque sia l'ingresso. La proprietà di raggiungibilità è una proprietà differenziale, non dipende dalla durata dell'ingresso, se pure si fornisse un ingresso per un tempo inferiore, al limite infinitesimo, aumentando l'ampiezza dell'ingresso, al limite impulsivo, si otterrebbe comunque uno stato pari al prodotto $Bu(t)$.

Per capire quali parti dello stato sono raggiungibili e quali non lo sono, è necessario eseguire una trasformazione di similitudine mediante una matrice, ci si pone nell'ipotesi $\rho(R) = n_r < n$ altrimenti il sistema sarebbe completamente raggiungibile, esiste un'intera classe di matrici T_R invertibili

$$\rho(R) = n_r < n \Rightarrow \exists T_R \text{ invertibile} : x = T_r z$$

dunque le matrici A e B diventano

$$A_R = T_R^{-1} A T_R = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \quad B_R = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} = T_R^{-1} B$$

Si otterranno delle matrici a blocchi triangolari superiori, la matrice A_{11} di dimensioni $n_r \times n_r$ mentre la B_1 sarà $n_r \times m$

La matrice C diventa

$$C_R = CT_r = (C_1 \quad C_2)$$

Il nuovo sistema ISU diventa

$$\begin{cases} \dot{z} = A_R z + B_R u \\ y = C_R z + D u \end{cases}$$

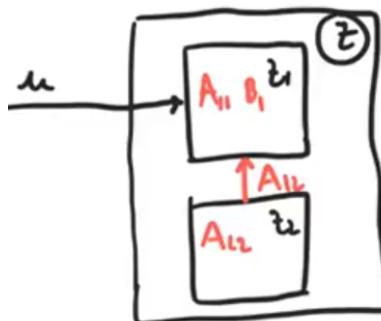
Si partiziona il vettore z chiamando i suoi primi n_R elementi Z_1 e i restanti $n - n_R$ si chiameranno Z_2 .

$$z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

Il sistema così partizionato assume la seguente struttura

$$\begin{cases} \dot{Z}_1 = A_{11}Z_1 + A_{12}Z_2 + B_1 u \\ \dot{Z}_2 = A_{22}Z_2 \\ y = C_1 Z_1 + C_2 Z_2 + D u \end{cases}$$

Si mostra una rappresentazione grafica del sistema, può essere visto suddiviso in due sottosistemi, il primo associato alla prima equazione differenziale e il secondo alla seconda. Per il primo sottosistema la matrice A_{11} coincide alla sua matrice della dinamica, dipende dallo stato Z_1 mentre la matrice A_{12} rappresenta la mutua relazione tra il sottosistema Z_1 e l'ingresso Z_2 fornito dal rispettivo sottosistema, dunque Z_2 può essere considerato come un ingresso per il sottosistema Z_1 . Il sottosistema Z_2 è autonomo, non ha ingressi, dunque non è raggiungibile.



Si dimostra che la coppia (A_{11}, B_1) è completamente raggiungibile

$$\rho(R) = \rho(B_R, A_R B_R \dots A_R^{n-1} B_R) = \rho \begin{pmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & \dots & A_{11}^{n-1}B_1 \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \stackrel{\text{ipotesi}}{=} n_R$$

La prima riga della matrice R contiene n_R righe per costruzione, dato che il rango è massimo allora tutte le colonne saranno linearmente indipendenti tra loro ma queste

colonne formano proprio la matrice di raggiungibilità del sottosistema 1, dunque esso è completamente raggiungibile.

La matrice della dinamica è triangolare alta, dunque i suoi autovalori sono gli autovalori dei blocchi sulla diagonale, ossia di A_{11} e A_{22} ma i primi appartengono alla parte raggiungibile, quelli di A_{22} no.

La matrice T_R deve essere invertibile, si costruisce nel seguente modo: si inseriscono n_R colonne linearmente indipendenti tali che siano una base di X_R possono essere prese dalla matrice di raggiungibilità R ed eventualmente combinarle affinché siano ancora una base, si completa la matrice T_R con $(n - n_R)$ colonne arbitrarie, rispettando sempre il vincolo $\det(T_R) \neq 0$.

Si considerino le matrici dell'esempio precedente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad X_R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad T_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si calcola la matrice di trasformazione e le matrici A_R e B_R , si ricorda che in questo specifico caso il valore A_{22} è zero perché è uno degli autovalori di A , non è un motivo strutturale della matrice A_R come lo zero in posizione (2,1).

$$A_R = T_R^{-1} A T_R = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_R = T_R^{-1} B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 3$ è l'autovalore della parte raggiungibile, $\lambda_2 = 0$ è non raggiungibile.

Influenza sull'uscita dalla raggiungibilità

La risposta di un sistema è la convoluzione della funzione di trasferimento e l'ingresso

$$w(t) = C e^{At} B = C T_R T_R^{-1} e^{At} T_R T_R^{-1} B = C T_R e^{T_R^{-1} A T_R t} T_R^{-1} B = C R e^{A_R t} B_R$$

Il legame ingresso-uscita non dipende dunque dalla forma di rappresentazione dello stato. Ricordando la definizione della matrice esponenziale

$$\begin{aligned} w(t) &= (C_1 \ C_2) e^{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} t} \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} = (C_1 \ C_2) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= (C_1 \ C_2) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} A_{11}^k & * \\ 0 & A_{22}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} = (C_1 \ C_2) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} A_{11}^k B_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= C_1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A_{11}^k \right) B_1 = C_1 e^{A_{11} t} B_1 = w_1(t) \end{aligned}$$

La seconda colonna della matrice esponenziale viene moltiplicata per 0, non è necessario calcolare il termine *. Si è ricavato che la risposta all'impulso si può calcolare più rapidamente se si usa una matrice più piccola ($A_{11} = 3$) nel caso in cui il sistema non sia completamente raggiungibile. Si è dimostrato inoltre che la risposta all'impulso dipende solo dalla parte raggiungibile del sistema. Eseguendo la trasformata di Laplace si ottiene la funzione di trasferimento e si ricavano i poli rispettivi alla parte raggiungibile.

5.10.2 Osservabilità

Definisce la possibilità di capire l'evoluzione interna di uno stato osservando l'uscita. Si fornisce la definizione di cosa *non* è osservabile dato che ha una struttura di spazio vettoriale mentre l'osservabilità è uno spazio algebrico.

Si definiscono due stati inosservabili, o meglio *indistinguibili*. Si sottopone un sistema ad un ingresso u e si osserva l'uscita y , lo stato avrà un'evoluzione nel tempo, la $y = Cx + Du$. Lo stesso sistema partendo da uno stato differente X_0'' , sottoposto allo stesso ingresso potrebbe raggiungere la stessa uscita. In tal caso i due stati si direbbero *indistinguibili* se le due uscite coincidono.

Si riportano le formule di Lagrange in tale condizione

$$Ce^{A(t-t_0)}x'_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = Ce^{A(t-t_0)}x''_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

La inosservabilità degli stati non dipende dagli ingressi ma solo dall'evoluzione libera.

$$Ce^{A(t-t_0)}(x'_0 - x''_0) = 0 = y_l(t)|_{x_0=(x'_0-x''_0)}$$

Lo stato x_0 definito come differenza tra gli altri due potrebbe portare ad avere un'uscita libera nulla, nonostante il sistema evolva necessariamente al suo interno. Si dirà il generico stato \bar{x} inosservabile se e solo se è indistinguibile dall'evoluzione libera che parte dallo stato nullo

$$y_l(t) = Ce^{A(t-t_0)}\bar{x} = 0$$

Si vuole studiare se un sistema ISU ha stati inosservabili, mediante l'ausilio della matrice di osservabilità. Si definisce lo spazio di inosservabilità

$$X_I \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X^n : x \text{ è inosservabile}\}$$

La matrice di osservabilità riempita a blocchi per righe invece

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \quad (p \cdot n) \times n$$

Un vettore \bar{X} è inosservabile se

$$\bar{x} \text{ inosservabile} \Leftrightarrow \bar{x} \in X_I = \text{Ker}\{O\}$$

Se lo spazio di inosservabilità è vuoto

$$X_I = \emptyset \Leftrightarrow \text{Sistema ISU } (A, C) \text{ è completamente osservabile}$$

Esempio numerico

Sia il seguente sistema

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = (1 \ 1) \longrightarrow O = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

La dimensione del Kernel di O è pari alla sua dimensione n meno il suo rango, se la matrice O fosse di rango pieno, la dimensione di inosservabilità sarebbe vuota.

$$\rho(O) = \rho \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 1 < 2$$

$$X_I = \text{Ker}\{O\} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} x = 0 \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Rappresentando graficamente lo spazio di inosservabilità si ottiene una retta passante per l'origine e il punto $(1, -1)$, ossia a pendenza -1. Qualunque stato iniziale che giace su questa retta è inosservabile.

Sottosistemi osservabili e non osservabili

Ricapitolando

$$X_I \subseteq X^n \text{ spazio vettoriale}$$

$$\rho(O) = n \Leftrightarrow X_I = \emptyset \Leftrightarrow \text{Sistema (coppia } (A, C) \text{) completamente osservabile}$$

Se il numero di uscite $p = 1$ è sufficiente verificare che il determinante di O sia diverso da zero affinché il sistema sia completamente osservabile.

Se

$$\rho(O) = n_o < n \quad \dim \{\text{Ker}\{O\}\} = n - n_o > 0$$

allora

$$\exists T_o \text{ invertibile} : x = T_o z : \begin{cases} \dot{z} = A_o z + B_o u \\ y = C_o z + D u \end{cases}$$

La struttura delle matrici trasformate è triangolare bassa

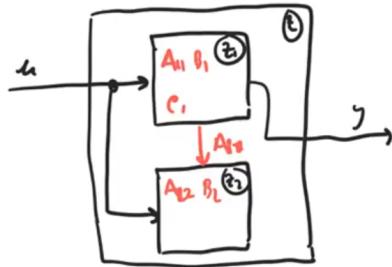
$$A_o = T_o^{-1} A T_o = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad C_o = C T_o = (C_1 \ 0) \quad B_o = T_o^{-1} B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

$A_{11} = (n_o \times n_o)$, $C_1 = (p \times n_o)$ mentre la matrice B_o non ha alcuna struttura particolare ma si suddividono le sue prime n_o righe in B_1 .

Si suddivide il vettore di stato z in cui Z_1 si trovano le prime n_o righe e Z_2 le rimanenti $(n - n_o)$, il sistema ISU diventa

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = A_{11} Z_1 + B_1 u \\ \dot{z}_2 = A_{21} Z_1 + A_{22} Z_2 + B_2 u \\ y = C_1 Z_1 \end{cases}$$

Una rappresentazione grafica del sistema è la seguente. L'uscita non ha influenza



ze dirette o indirette dal sotto-sistema Z_2 . Se si considera il rango della matrice di osservabilità

$$\rho(O) = \rho \begin{pmatrix} C_o \\ C_o A_o \\ \vdots \\ C_o A_o^{n-1} \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ C_1 A_{11} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ C_1 A_{11}^{n-1} & 0 \end{pmatrix} \stackrel{\text{H.p.}}{=} n_o$$

La prima colonna è formata da n_o elementi, dunque saranno necessariamente indipendenti tra loro, possono essere però associati alla matrice di osservabilità del primo sotto-sistema O_1 , dunque $\rho(O_1) = n_o$ la matrice (A_{11}, C_1) è completamente osservabile mentre la matrice A_{22} corrisponde alla parte inosservabile.

Essendo A_o triangolare, i suoi autovalori saranno gli autovalori delle matrici A_{11} e A_{22} sulla diagonale, A_{11} conterrà gli autovalori della parte osservabile, viceversa A_{22} quelli della parte non osservabile.

La matrice T_o si costruisce nel seguente modo: si posiziona una base dello spazio inosservabile X_I nelle ultime n_o colonne, si completa la matrice con le restanti $(n - n_o)$ colonne affinché il determinante di T_o sia sempre diverso da zero. Ad esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = (1 \ 1) \rightarrow X_I = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow T_o = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dunque la matrice A_o

$$A_o = T_o^{-1} A T_o = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3 è l'autovalore osservabile, -1 è quello non osservabile, lo 0 in posizione (1,2) è strutturale, quello in (2,1) è capitato.

$$C_0 = (1 \ 0)$$

Si analizza la risposta all'impulso

$$\begin{aligned} w(t) &= Ce^{At}B = CT_oT_o^{-1}e^{At}T_oT_o^{-1}B = C_o e^{A_o t}B_o = (C_1 \ 0)e^{\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}t} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \\ &= C_1 e^{A_{11}t} B_1 = w_1(t) \end{aligned}$$

La risposta all'impulso dipende solo dalla parte osservabile del sistema.

Se un sistema non è completamente raggiungibile e osservabile, avrà una risposta all'impulso molto più piccola dimensionalmente dell'intero sistema.

Test di Popov-Belevitch-Hautus (PBH)

Un sistema è completamente raggiungibile se e solo se

$$\rho(A - \lambda I \ B) = n \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Il sistema è completamente osservabile se e solo se

$$\rho \begin{pmatrix} A - \lambda_i I \\ C \end{pmatrix} = n \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Questi due test devono essere eseguiti per ogni autovalore λ_i .

5.11 Sistemi interconnessi - esteso

È possibile suddividere un sistema comunque complesso, composto da più sottosistemi che interagiscono tra loro. Al fine di formalizzare correttamente i sistemi interconnessi si presentano i tre blocchi principali.

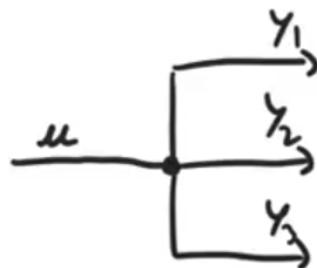
Il primo è il blocco sistema, rappresenta il modello di un sistema, disegnato mediante un rettangolo, con le frecce in ingresso e in uscita si indicano le variabili di ingresso e uscita.

$$Y_f(s) = W(s)U(s)$$



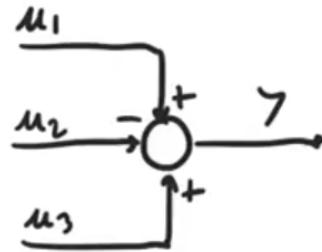
Il secondo elemento è il nodo diramatore, ha un ingresso, poi con un punto calcato si suddividono le uscite (nel dominio del tempo o di Laplace)

$$y_1(t) = y_2(t) = y_3(t) = u(t)$$



Il nodo sommatore invece, rappresentato mediante un cerchio o un quadrato esegue somme o sottrazioni degli ingressi, fornendo una sola uscita

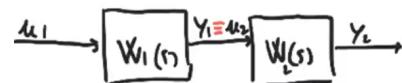
$$y(t) = u_1(t) - u_2(t) + u_3(t)$$



Per ottenere la rappresentazione di tutto il sistema è comodo operarne la sua riduzione, per via algebrica o più comodamente per via grafica. Le regole di riduzione si basano sulla presenza di tre connessioni canoniche, in serie, in parallelo e in retroazione.

5.11.1 Connessione in serie

Due o più blocchi sono connessi in serie se l'ingresso del blocco successivo coincide con l'uscita del precedente. Dal punto di vista sistemistico la serie può essere vista come un



unico blocco più grande con un'unica funzione di trasferimento $W(s)$ con ingresso u e uscita y .

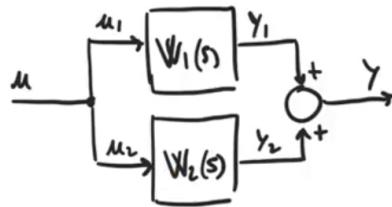
Si ricava la riduzione, si presentano le relazioni algebriche dei due blocchi e il vincolo topologico

$$\begin{cases} Y_1(s) = W_1(s)U_1(s) \\ Y_2(s) = W_2(s)U_2(s) \\ Y_1(s) = U_2(s) \end{cases} \quad \begin{aligned} Y(s) &= Y_2(s) = W_2(s)U_2(s) = W_2(s)Y_1(s) = \\ &= W_2(s)W_1(s)U_1(s) = W_2(s)W_1(s)U(s) \end{aligned}$$

La funzione di trasferimento del blocco ridotto è dunque pari al prodotto delle due funzioni di trasferimento dei sottosistemi. Se il sistema è SISO la moltiplicazione è commutativa, non è vero per i sistemi non SISO.

5.11.2 Connessione in parallelo

Due o più sottosistemi sono connessi in parallelo se condividono lo stesso ingresso, uscita di un nodo diramatore, e la loro uscita viene combinata in un nodo sommatore. Per rica-



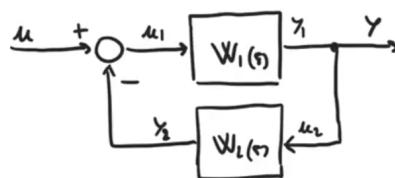
vare l'unica funzione di trasferimento si procede in maniera analoga al caso precedente, scrivendo le relazioni dei blocchi e dei due vincoli sull'ingresso e l'uscita

$$\begin{cases} Y_1(s) = W_1(s)U_1(s) \\ Y_2(s) = W_2(s)U_2(s) \\ U_1(s) = U_2(s) = U(s) \\ Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) \end{cases} \quad Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = W_1(s)U_1(s) + W_2(s)U_2(s) = (W_1(s) + W_2(s))U(s)$$

La funzione di trasferimento del blocco in parallelo è pari alla somma algebrica delle rispettive funzioni di trasferimento dei sottosistemi.

5.11.3 Connessione in retroazione

Un sistema in retroazione è composto da due blocchi, il sistema W_1 che genera l'uscita è chiamato *catena di andata*, il blocco W_2 inferiore prende il nome di *catena di ritorno* (*o retroazione*) e chiude un anello in cui “girano” le informazioni chiamato *anello di retroazione*. L'ingresso del sistema principale è dato dal confronto dell'ingresso u di riferimento e l'uscita y_2 del blocco di retroazione. Si può avere una retroazione negativa o positiva a seconda del segno che compare nel blocco sommatore in ingresso (quella in figura è negativa).



Si analizzano le equazioni dei singoli blocchi e le due relazioni topologiche

$$\begin{cases} Y_1(s) = W_1(s)U_1(s) \\ Y_2(s) = W_2(s)U_2(s) \\ U_1(s) = U(s) - Y_2(s) \\ Y(s) = U_2(s) = Y_1(s) \end{cases}$$

Sviluppando il sistema a partire dalla funzione in uscita si ricavano le due funzioni di trasferimento per i sistemi in retroazione positiva e negativa

$$\begin{aligned} Y(s) &= W_1(s)U_1(s) = W_1(s)(U(s) - Y_2(s)) = \\ &= W_1(s)(U(s) - W_2(s)U_2(s)) = W_1(s)(U(s) - W_2(s)Y(s)) \Rightarrow \\ (1 + W_1(s)W_2(s))Y(s) &= W_1(s)U_1(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}U(s) \end{aligned}$$

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Retroazione negativa} \\ \text{Retroazione positiva} \end{array} \right. \quad W(s) = \frac{W_1(s)}{1 - W_1(s)W_2(s)}$$

Esempio non SISO

Se il sistema non dovesse essere di tipo SISO come quello in esempio

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{W(s)}{2 \times 2} \rightarrow y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

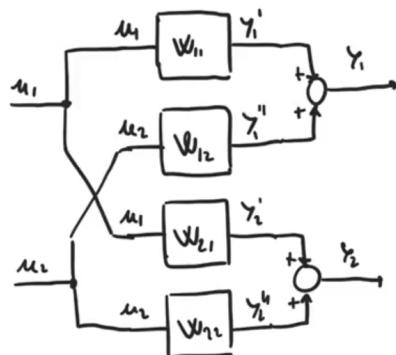
Sfruttando la sovrapposizione degli effetti si possono scomporre le uscite, ogni termine può essere visto come la somma degli effetti di un singolo ingresso alla volta, dunque per calcolare y_1 si studia la risposta ad u_1 quando u_2 è nulla e viceversa, poi si sommano i due contributi; analogamente per y_2 .

$$\begin{cases} Y_1 = Y'_1 + Y''_1 = W_{11}U_1 + W_{12}U_2 \\ Y_2 = Y'_2 + Y''_2 = W_{21}U_1 + W_{22}U_2 \end{cases}$$

Dunque la $W(s)$ sarà

$$W(s) = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) \end{bmatrix}$$

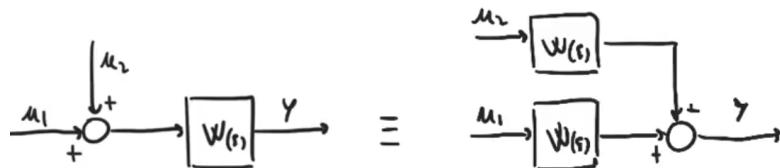
Da un punto di vista grafico saranno presenti quattro blocchi elementari



5.11.4 Regole di riduzione

Può capitare che in una rete complessa non sia chiaro quali blocchi siano in serie o in parallelo, potrebbe essere necessario eseguire delle *manovre* di spostamento dei blocchi che coincidono ad operazioni algebriche che devono lasciare però inalterata la funzione di trasferimento complessiva. Durante queste operazioni è molto probabile che si perda il senso fisico delle operazioni, l'importante è non variare la funzione di trasferimento.

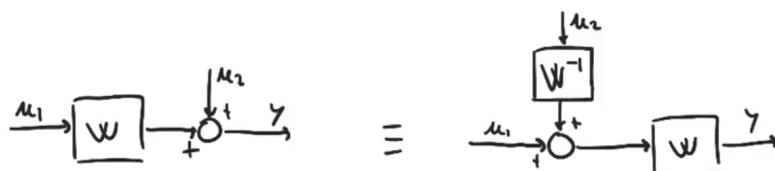
Si supponga di avere la seguente condizione, per qualche motivo si vuole spostare il blocco $W(s)$ a monte del nodo sommatore, sarà equivalente al sistema formato da due blocchi. Algebricamente si ottiene lo stesso risultato



$$Y = W(U_1 + U_2) \quad \equiv \quad Y = WU_1 + WU_2 = W(U_1 + U_2)$$

da un punto di vista fisico il sistema iniziale ha n variabili di stato, il secondo ha invece $2n$ variabili di stato, ma sono variabili "fittizie" e non variabili fisiche.

Il caso duale è il seguente

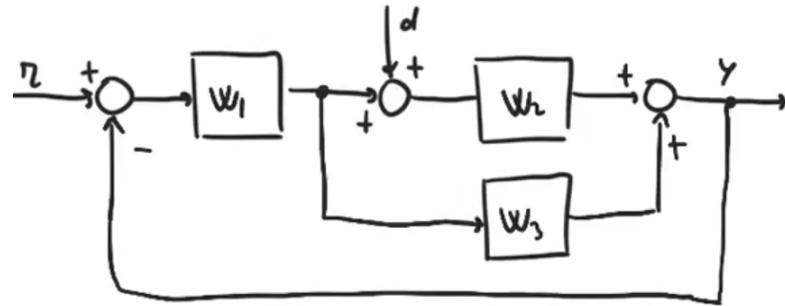


$$Y = U_2 + WU_1 \quad \equiv \quad Y = W(U_1 + W^{-1}U_2) = WU_1 + U_2$$

I due sistemi sono ancora algebricamente equivalenti. Il sistema W^{-1} ha un ordine inverso rispetto al sistema W , se il sistema W fosse un sistema reale strettamente proprio, il sistema W^{-1} diventerebbe improprio, il numero di radici al numeratore sarebbe maggiore del numero di radici al denominatore, dunque rappresenterebbe un sistema anticausale, non fisicamente realizzabile.

Esempio di riduzione schema a blocchi

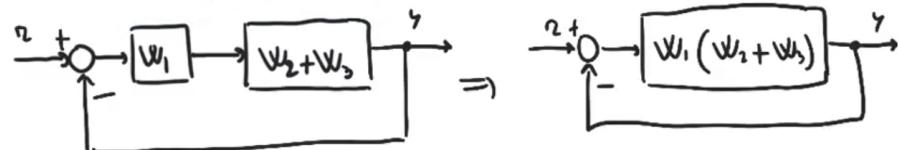
Si riduca il seguente sistema



Ha due ingressi r e d e un'uscita y , dunque la funzione di trasferimento equivalente deve essere una matrice (1×2)

$$W(s) = [W_{y,r}(s) \quad W_{y,d}(s)]$$

Per ricavare il primo termine mediante il PSE si pone $d = 0$, il nodo sommatore in cui incide d si elide, dunque i sottosistemi W_2 e W_3 si trovano ad essere in parallelo, successivamente in serie al sistema W_1 . In questo caso non c'è alcun blocco in retroazione,



questo tipo di collegamento coincide in realtà con una funzione di trasferimento unitaria, la funzione di trasferimento complessiva, applicando la retroazione sarà dunque:

$$W_{y,r}(s) = \frac{W_1(s)(W_2(s) + W_3(s))}{1 + W_1(s)(W_2(s) + W_3(s))}$$

Per calcolare il secondo termine $W_{y,d}$ si deve annullare l'ingresso r e considerare solo quello d .

5.11.5 Analisi della stabilità di un sistema interconnesso

Sistemi in serie

Si considerino due sistemi in serie S_1 ed S_2 , si supponga di conoscere i modelli ISU dei due sistemi

$$\begin{aligned} S_1 : & \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u_1 \end{cases} \\ S_2 : & \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{cases} \\ \text{Vincoli :} & \begin{cases} u = u_1 \\ y = y_2 \\ u_2 = y_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Si vuole studiare la stabilità dell'intero sistema dunque si può pensare di aggregare le variabili di stato in un unico vettore, lo stato dell'intero sistema è l'aggregazione dei due sottosistemi, si sostituiscono i termini usando i vincoli

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2(C_1 x_1 + D_1 u) \\ y = C_2 x_2 + D_2(C_1 x_1 + D_1 u) \end{cases}$$

In forma compatta si realizzano delle matrici a blocchi

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} D_2 C_1 & C_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} D_2 D_1 \end{pmatrix} u \end{cases}$$

La stabilità dipende dagli autovalori della matrice della dinamica A , matrice triangolare bassa, dunque i suoi autovalori saranno l'unione degli autovalori dei due sottosistemi, se entrambi sono asintoticamente stabili allora anche il sistema serie sarà asintoticamente stabile. Viceversa se almeno uno dei suoi blocchi è instabile allora la serie sarà instabile, oppure sarà stabile se i blocchi sono tutti stabili oppure tutti asintoticamente stabili e almeno uno stabile (se non si creano molteplicità sulla frontiera, ovvero ci sono più autovalori identici a parte reale nulla).

Si vuole studiare la raggiungibilità e l'osservabilità, si rappresentano le due funzioni di trasferimento in forma minima

$$W_1 = \frac{N_1}{D_1} \quad W_2 = \frac{N_2}{D_2}$$

se i sistemi sono rispettivamente di grado n_1 ed n_2 , la serie dovrà avere $n_1 + n_2$ stati, ma la serie si ottiene con il prodotto delle funzioni di trasferimento

$$W(s) = W_1(s) \cdot W_2(s) = \frac{N_1(s) N_2(s)}{D_1(s) D_2(s)}$$

I poli del sistema saranno l'unione dei poli se non ci sono cancellazioni incrociate tra i termini del numeratore di un sistema con il denominatore dell'altro. In caso di semplificazioni si sarà sicuramente ridotto il grado del denominatore, dunque si saranno persi dei modi, il sistema non sarà più dunque completamente raggiungibile e/o completamente osservabile. Se uno zero del primo sistema cancella un polo del secondo sistema allora si perde raggiungibilità, viceversa un polo del primo sistema con uno zero del secondo si perde osservabilità.

Nel caso di perdita di osservabilità infatti il sistema W_1 genera un certo modo, funzione del suo denominatore che viene eventualmente annullato da uno zero del secondo sistema, dunque il modo si perde nell'uscita e quindi non è più osservabile.

Viceversa se un modo di D_2 viene eliminato da uno zero del primo sistema allora il modo non è raggiungibile.

Sistemi in parallelo

Siano due sistemi W_1 e W_2 in parallelo, si costruisce il modello interno

$$\begin{aligned} S_1 : & \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u_1 \end{cases} \\ S_2 : & \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{cases} \\ \text{Vincoli :} & \begin{cases} u = u_1 = u_2 \\ y = y_1 + y_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Aggregando lo stato si ottiene

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B u \\ y = y_1 + y_2 = C_1 x_1 + C_2 x_2 + (D_1 + D_2) u \end{cases}$$

In forma vettoriale

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u \\ y = (C_1 \ C_2) x + (D_1 + D_2) u \end{cases}$$

Analogamente al sistema serie gli autovalori sono ancora l'unione degli autovalori dei due sottosistemi dunque valgono le stesse considerazioni riguardo la stabilità.

Si studia la raggiungibilità e l'osservabilità con $W_1 = \frac{N_1}{D_1}$ e $W_2 = \frac{N_2}{D_2}$, sommando le due equazioni si ha

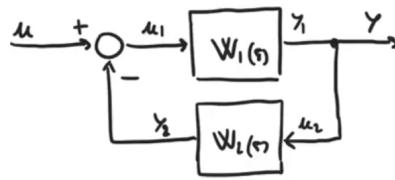
$$W(s) = W_1(s) + W_2(s) = \frac{N_1(s)D_2(s) + N_2(s)D_1(s)}{D_1(s)D_2(s)}$$

Può esserci una cancellazione solo se D_1 e D_2 hanno radici in comune, può essere messa in evidenza al numeratore, la radice al denominatore permane con una molteplicità inferiore. Si perdono in questo caso simultaneamente la raggiungibilità e l'osservabilità.

Se i due sistemi forniscono in uscita lo stesso modo, non si può determinare con che peso contribuisca uno o l'altro sistema, analogamente la sollecitazione che raggiunge quello specifico modo non può essere inviata allo specifico sottosistema dato che l'ingresso è lo stesso dunque non si può pilotare lo specifico modo dello specifico sottosistema ma reagiranno necessariamente entrambi.

Sistemi in retroazione

Sia il sistema W_1 retroazionato da W_2 , si sviluppa il modello interno, si suppone per semplicità di trattazione che i sistemi siano strettamente propri



$$\begin{aligned} S_1 : & \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases} \\ S_2 : & \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 \end{cases} \\ \text{Vincoli : } & \begin{cases} y = y_1 = u_2 \\ u_1 = u - y_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Aggregando gli stati

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1(u - C_2 x_2) \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2(C_1 x_1) \\ y = C_1 x_1 \end{cases}$$

In forma compatta

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \begin{pmatrix} A_1 & -B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

La matrice A non ha alcuna struttura particolare, dunque in generale gli autovalori non hanno nulla a che fare con gli autovalori delle matrici A_1 e A_2 . Potrebbe anche accadere che il collegamento in retroazione di due sistemi asintoticamente stabili generi un

sistema instabile, viceversa due sistemi instabili potrebbero diventare stabili, la retroazione è l'unica connessione che modifica gli autovalori. È l'unica soluzione che permette di stabilizzare un sistema inizialmente instabile.

La funzione di trasferimento complessiva

$$W(s) = \frac{N_1(s)D_2(s)}{D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)}$$

Potrebbero esserci delle cancellazioni se N_1 e D_2 avessero divisori in comune, uno zero del blocco di andata cancella un polo del blocco in ritorno, si ottiene una parte del sistema contemporaneamente non raggiungibile e non osservabile. Se i termini in comune sono invece tra D_1 ed N_2 non si cancella nulla ma il corrispondente autovalore non viene alterato dalla retroazione.