Esercizi – Onde piane (Lezione 15/12)

Esercizio 1

Il campo di induzione magnetica di un'onda che si propaga attraverso un materiale non-magnetico ($\mu = \mu_0$) è

$\bar{B} = \hat{z}37.7\sin(0.5y - 10^8 t)$ nT

Trovare

a. la direzione di propagazione dell'onda
b. la velocità di propagazione *v*
c. la lunghezza d'onda nel materiale
d. la permittività relativa del materiale
e. l'espressione del campo elettrico

Soluzione:

a. Direzione y positiva
b. Essendo $\omega = 10^8$ rad/s e $k = 0.5$ rad/m, si ha $v = \frac{\omega}{k} = \frac{10^8}{0.5} = 2 \cdot 10^8$ m/s
c. $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0.5} = 12.6$ m
d. Essendo $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$, si ha $\varepsilon_r = \left(\frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^8}\right)^2 = 2.25$
e. Essendo $\vec{E} = \vec{B} \times \vec{c}$ e $\vec{c} = \hat{y}v = \hat{y}2 \cdot 10^8$ m/s, si trova
   $\vec{E} = -\hat{x}37.7 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot \sin(0.5y - 10^8 t) = -\hat{x}7.54\sin(0.5y - 10^8 t)$ V/m

Esercizio 2

Scrivere l'espressione del campo elettrico di un'onda piana a frequenza $f = 1$ GHz che si propaga nella direzione +*y* in un mezzo non-magnetico ($\mu = \mu_0$) con permittività relativa $\varepsilon_r = 9$. Il campo elettrico è diretto lungo *x*, il suo valore di picco è 6 V/m e la sua intensità è 4 V/m per *t* = 0 e *y* = 2 cm.

Soluzione:

Data la frequenza $f = 1$ GHz, la pulsazione angolare dell'onda è $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 10^9 = 6.28 \cdot 10^9$ rad/s.

Il numero d'onda *k* si ricava da $v = \frac{\omega}{k}$, essendo $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$. Si ha quindi $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{c/\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{2\pi f\sqrt{\varepsilon_r}}{c} = \frac{2\pi \cdot 10^9 \cdot \sqrt{9}}{3 \cdot 10^8} = 20\pi = 62.83$ rad/m.

Tenendo conto di direzione e valore di picco, l'espressione del campo elettrico è

$\vec{E}(y,t) = \hat{x}6\sin(20\pi \cdot y - 2\pi \cdot 10^9 \cdot t + \varphi)$ V/m.

Essendo l'intensità 4 V/m per *t* = 0 e *y* = 2 cm, si ottiene

$4 = 6\sin(20\pi \cdot 2 \cdot 10^{-2} + \varphi)$,

da cui si ricava $\varphi = \sin^{-1}\left(\frac{4}{6}\right) - 0.4\pi = 0.73 - 0.4\pi = -0.527$ rad = -30.19°. Si ha quindi

$\vec{E}(y,t) = \hat{x}6\sin(20\pi \cdot y - 2\pi \cdot 10^9 \cdot t - 0.527)$ V/m

Esercizio 3

L'espressione del campo elettrico di un'onda piana uniforme è

$\vec{E}(z,t) = \hat{y}10\sin(0.2z + 9.54\pi \cdot 10^6 t)$ V/m

Se la velocità dell'onda è $v = 1.5 \cdot 10^8$ m/s e la permeabilità relativa del mezzo è $\mu_r = 2.4$, si trovi

a. la lunghezza d'onda
b. la frequenza dell'onda
c. la permittività relativa del mezzo
d. il campo di induzione magnetica $\bar{B}(z,t)$.

Soluzione:

a. Essendo $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 0.2$ rad/m, si trova $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0.2} = 31.42$ m
b. Essendo $\omega = 2\pi f = 9.54\pi \cdot 10^6$ rad/s, si trova $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{9.54\pi \cdot 10^6}{2\pi} = 4.77 \cdot 10^6$ Hz = 4.77 MHz

c. Essendo $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}} = 1.5 \cdot 10^8$ m/s, si ricava $\varepsilon_r = \frac{1}{\mu_r}\left(\frac{c}{v}\right)^2 = \frac{1}{2.4}\left(\frac{3\cdot 10^8}{1.5\cdot 10^8}\right)^2 = 1.67$

d. Tenendo conto che $\vec{E} = \vec{B} \times \vec{c}$ e che $\vec{c} = -\hat{z}v$, si ricava
$\vec{B}(z,t) = \hat{x}\frac{10}{1.5\cdot 10^8}\sin(0.2z + 9.54\pi \cdot 10^6 t) = \hat{x}66.67\sin(0.2z + 9.54\pi \cdot 10^6 t)$ nT

Esercizio 4

Il campo elettrico di un'onda piana che si propaga in un materiale non-magnetico ($\mu = \mu_0$) è
$\bar{E} = [\hat{y}3\sin(0.2\pi \cdot x - \pi \cdot 10^7 t) + \hat{z}4\sin(0.2\pi \cdot x - \pi \cdot 10^7 t)]$ V/m

Determinare

a. la lunghezza d'onda
b. ε_r
c. $\bar{B}(x,t)$

Soluzione:

a. Essendo $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 0.2\pi$ rad/m, si trova $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0.2\pi} = 10$ m

b. Essendo $\omega = \pi \cdot 10^7$ rad/s e $k = 0.2\pi$ rad/m, si ha $v = \frac{\omega}{k} = \frac{\pi\cdot 10^7}{0.2\pi} = 5 \cdot 10^7$ m/s. Dal momento che $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$, si ha $\varepsilon_r = \left(\frac{3\cdot 10^8}{5\cdot 10^7}\right)^2 = 36$

c. Tenendo conto che $\vec{E} = \vec{B} \times \vec{c}$ e che $\vec{c} = \hat{x}v$, si ricava
$\bar{B}(x,t) = \left[\hat{z}\frac{3}{5\cdot 10^7}\sin(0.2\pi \cdot x - \pi \cdot 10^7 t) - \hat{y}\frac{4}{5\cdot 10^7}\sin(0.2\pi \cdot x - \pi \cdot 10^7 t)\right] =$
$[\hat{z}60\sin(0.2\pi \cdot x - \pi \cdot 10^7 t) - \hat{y}80\sin(0.2\pi \cdot x - \pi \cdot 10^7 t)]$ nT.

Esercizio 5

Un'onda piana di frequenza 60 MHz che si propaga nella direzione –*x* nel terreno asciutto con permittività relativa $\varepsilon_r = 4$ ha il campo elettrico polarizzato nella direzione *z*. Considerando il terreno secco come un mezzo approssimativamente senza perdite, e dato che il campo di induzione magnetica ha un valore di picco di 4π nT e che assume il valore 2.8π nT per $t = 0$ e $x = -0.75$ m, si determinino le espressioni complete dei campi elettrico e di induzione magnetica dell'onda.

Soluzione:

Data la frequenza $f = 60$ MHz, la pulsazione angolare dell'onda è $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 6 \cdot 10^7 = 1.2\pi \cdot 10^8$ rad/s.

Il numero d'onda *k* si ricava da $v = \frac{\omega}{k}$, essendo $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$. Si ha quindi $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{c/\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{2\pi f\sqrt{\varepsilon_r}}{c} = \frac{2\pi\cdot 6\cdot 10^7\cdot\sqrt{4}}{3\cdot 10^8} = 0.8\pi$ rad/m.

Dato che il campo elettrico è diretto lungo *z* e si propaga nella direzione –*x*, si può scrivere
$\bar{E}(x,t) = \hat{z}E_0\sin(0.8\pi \cdot x + 1.2\pi \cdot 10^8 t + \varphi_0)$ V/m, con E_0 e φ_0 costanti incognite.

Tenendo conto che $\vec{E} = \vec{B} \times \vec{c}$ e che $\vec{c} = -\hat{x}v$, con $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3\cdot 10^8}{\sqrt{4}} = 1.5 \cdot 10^8$ m/s, si ricava

$\bar{B}(x,t) = \hat{y}\frac{E_0}{v}\sin(0.8\pi \cdot x + 1.2\pi \cdot 10^8 t + \varphi_0) = \hat{y}4\pi\sin(0.8\pi \cdot x + 1.2\pi \cdot 10^8 t + \varphi_0)$ nT.

Essendo il valore di picco $\frac{E_0}{v} = 4\pi$ nT, si ottiene $E_0 = 4\pi \cdot 10^{-9} \cdot 1.5 \cdot 10^8 = 0.6\pi$ V/m e quindi $\bar{E}(x,t) = \hat{z}0.6\pi\sin(0.8\pi \cdot x + 1.2\pi \cdot 10^8 t + \varphi_0)$ V/m

Poiché $B(-0.75,0) = 4\pi \cdot 10^{-9}\sin(0.8\pi \cdot (-0.75) + \varphi_0) = 2.8\pi \cdot 10^{-9}$, si ricava $\varphi_0 = \sin^{-1}\left(\frac{2.8}{4}\right) + 0.6\pi = 2.66$ rad = 152.43°