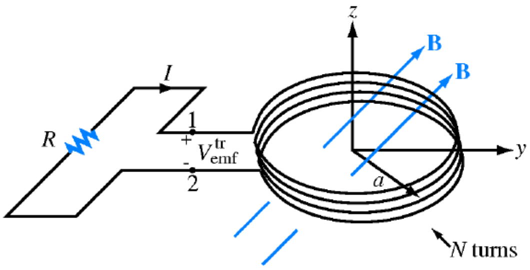
Esercizi – Induzione elettromagnetica (Lezione 30/11)

Esercizio 1 (cfr. Esempio 6.1 di "Applied Electromagnetics")



Un'induttanza è realizzata avvolgendo per *N* volte un filo conduttore sottile intorno a un percorso circolare di raggio *a*. L'avvolgimento dell'induttanza così ottenuta giace nel piano (*x*,*y*), centrata nell'origine, ed è collegata a una resistenza *R*, come mostrato in figura. In presenza del campo di induzione magnetica

$$\vec{B} = B_0(\hat{y}2 + \hat{z}3)\sin(\omega t),$$

dove ω è la frequenza angolare, si determini

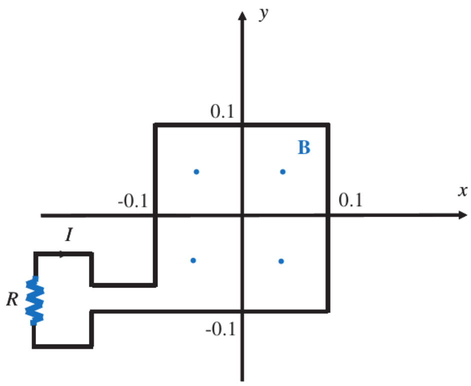
a. il flusso magnetico Φ_B concatenato a un avvolgimento singolo dell'induttanza;
b. la forza elettromotrice $\mathcal{E}$ indotta, quando N = 10, B_0 = 0.2 T, a = 10 cm e $\omega = 10^3$ rad/s;
c. la polarità di $\mathcal{E}$ all'istante t = 0;
d. la corrente indotta nel circuito per R = 1 kΩ, trascurando la resistenza del filo.

Soluzione:

a. Il flusso magnetico concatenato con ciascun avvolgimento dell'induttanza è $\Phi_B = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \iint_S [B_0(\hat{y}2+\hat{z}3)\sin(\omega t)]\cdot \hat{z}dS = 3\pi a^2 B_0 \sin(\omega t)$
b. Per determinare $\mathcal{E}$ si può usare l'espressione $\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(3\pi N a^2 B_0 \sin(\omega t)) = -3\pi N\omega a^2 B_0 \cos(\omega t)$. Per N = 10, B_0 = 0.2 T, a = 10 cm e $\omega = 10^3$ rad/s, si ha $\mathcal{E} = -188.5\cos(10^3 t)$ V
c. All'istante t = 0, $d\Phi_B/dt > 0$ e $\mathcal{E} = -188.5$ V. Poiché il flusso è crescente, la corrente *I* deve avere il verso indicato in figura affinché venga soddisfatta la legge di Lenz. Di conseguenza il punto 2 è a un potenziale maggiore del punto 1 e $\mathcal{E} = V_1 - V_2 = -188.5$ V
d. La corrente *I* è data da $I = \frac{V_2 - V_1}{R} = \frac{188.5}{10^3}\cos(10^3 t) = 0.19\cos(10^3 t)$ A

Esercizio 2 (cfr. Esercizio 6.1 di "Applied Electromagnetics")
Per la spira mostrata nella figura precedente, quanto vale $\mathcal{E}$ se $\vec{B} = \hat{y}B_0\cos(\omega t)$? Si giustifichi la risposta.
Soluzione:
$\mathcal{E} = 0$ perché $\vec{B}$ è ortogonale alla normale $d\vec{S}$ alla superficie della spira

Esercizio 3 (cfr. Esercizio 6.2 di "Applied Electromagnetics")



Si supponga che la spira dell'Esercizio 1 sia sostituita con una spira quadrata formata da 10 avvolgimenti, centrata nell'origine e avente i lati lunghi 20 cm e orientati parallelamente agli assi *x* e *y*.
Se $\vec{B} = \hat{z}B_0 x^2 \cos(10^3 t)$ e B_0 = 100 T, si calcoli la corrente che scorre nel circuito.

<u>Soluzione:</u>

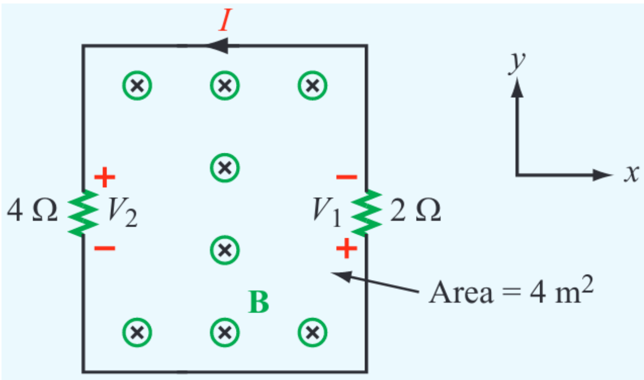
$$\phi_B = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_{x=-0.1}^{0.1}\int_{y=-0.1}^{0.1} (\hat{z}100x^2\cos(10^3t))\cdot\hat{z}dxdy = (100\cos(10^3t))\cdot 0.2\int_{-0.1}^{0.1} x^2dx =$$

$$= 20\cos(10^3t)\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-0.1}^{0.1} = \frac{20}{3}\cos(10^3t)\,(0.1^3+0.1^3) = 13.3\cdot 10^{-3}\cos(10^3t)$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R}N\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{10}{1000}\frac{d}{dt}(13.3\cdot 10^{-3}\cos(10^3t)) = 133\sin(10^3t)\text{ mA}$$

Per *t* = 0, $d\Phi_B/dt < 0$ e $\mathcal{E} > 0$. Essendo il flusso decrescente, la legge di Lenz richiede che la corrente *I* sia in direzione opposta a quella mostrata in figura, in modo che il flusso indotto da *I* sia in opposizione alla variazione $d\Phi_B/dt$. Dunque, in riferimento alla direzione di I indicata, si ha $I = -133\sin(10^3t)$ mA.

Esercizio 4 (cfr. Esempio 6.2 di "Applied Electromagnetics")



Determinare le tensioni V_1 e V_2 ai capi delle due resistenze da 2 Ω e 4 Ω mostrate in figura. Il circuito si trova nel piano (x,y), la sua area è 4 m^2, l'intensità del campo di induzione magnetica è $B = -\hat{z}0.3t\,T$ e la resistenza interna del conduttore può essere trascurata.

<u>Soluzione:</u>
Il flusso concatenate con il circuito è

$$\phi_B = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \iint_S (-\hat{z}0.3t)\cdot\hat{z}d\vec{s} = -0.3t\iint_S d\vec{s} = -0.3t\cdot 4 = -1.2t\ \ Wb$$

e la corrispondente f.e.m. indotta è

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(-1.2t) = 1.2\ \ V$$

Il flusso magnetico concatenato con il circuito è nella direzione $-\hat{z}$ (entrante nella pagina) ed è crescente con il tempo t. La legge di Lenz stabilisce che la corrente indotta abbia il senso mostrato in figura perché il corrispondente campo di induzione magnetica deve essere nella direzione $\hat{z}$ nella regione interna al circuito. Questo implica che V_1 e V_2 siano tensioni positive. La f.e.m. totale di 1.2 *V* si distribuisce tra i due resistori in serie. Di conseguenza,

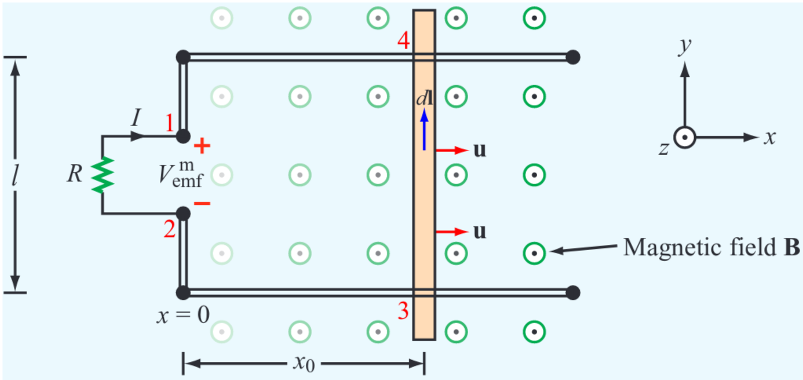
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1+R_2} = \frac{1.2\,V}{2\,\Omega + 4\,\Omega} = 0.2\,A$$

e

$$V_1 = IR_1 = (0.2\,A)\cdot(2\,\Omega) = 0.4\,V$$

$$V_2 = IR_2 = (0.2\,A)\cdot(4\,\Omega) = 0.8\,V$$

Esercizio 5 (cfr. Esempio 6.3 di "Applied Electromagnetics")



Il circuito rettangolare mostrato in figura ha larghezza costante l, mentre la sua lunghezza x_0 aumenta col tempo per la presenza di un conduttore in moto con velocità uniforme $\vec{u}$ in un campo di induzione magnetica statico $\vec{B} = \hat{z}B_0 x$. Si noti che l'intensità B aumenta linearmente con x. Il conduttore mobile si trova inizialmente in $x = 0$ per $t = 0$. Trovare la f.e.m. tra i terminali 1 e 2 e la corrente *I* che fluisce sulla resistenza *R*. Si consideri che la resistenza del circuito $R_i \ll R$.

Soluzione:
Applicando la legge di Faraday, si valuta il flusso attraverso la superficie del circuito

$$\phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S (\hat{z}B_0 x) \cdot \hat{z} d\vec{s} = B_0 l \int_0^{x_0} x dx = B_0 l \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{x_0} = B_0 l \frac{x_0^2}{2}$$

Sostituendo $x_0 = ut$, si ha

$$\phi_B = B_0 l \frac{x_0^2}{2} = B_0 l \frac{u^2 t^2}{2}$$

Valutando poi la derivata negativa del flusso rispetto al tempo si ottiene

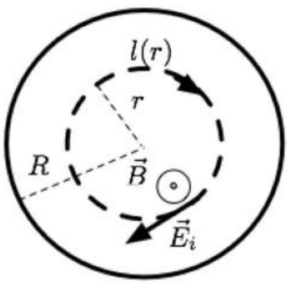
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(B_0 l \frac{u^2 t^2}{2}\right) = -B_0 l u^2 t$$

La corrente che fluisce sulla resistenza *R*

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{B_0 l u^2 t}{R}$$

ha il senso indicato in figura.

Esercizio 6
Si calcoli, in funzione della distanza *r* dall'asse, il modulo del campo elettrico indotto E_i, generato da un solenoide infinito di raggio *R* in cui l'induzione magnetica *B(t)* varia nel tempo secondo la legge *B(t) = at*, con *a>0*. In particolare, si trovi il valore massimo di E_i per *a* = 0.25 *T/s* e *R* = 10 *cm*.
Si noti che per ragioni di simmetria le linee del campo elettrico indotto sono circonferenze centrate sull'asse del solenoide e quindi il modulo del campo indotto dipende solo dalla distanza *r* dall'asse del solenoide.



Soluzione:
Essendo il solenoide infinito, il campo di induzione magnetica è uniforme e parallelo all'asse al suo interno, e nullo al suo esterno. Si suppone che $\vec{B}$ abbia verso uscente dal piano del foglio.
Per la legge di Faraday

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Per ragioni di simmetria, le linee del campo indotto sono sempre cerchi concentrici perpendicolari alle linee di campo magnetico e il modulo del campo indotto dipende solo dalla distanza *r* dall'asse del solenoide.
Si considera un percorso circolare di raggio *r*, giacente nel piano perpendicolare alla direzione di $\vec{B}$.
Avendo considerato $\frac{dB}{dt} > 0$, un'ideale corrente indotta che fluisse attraverso un circuito coincidente col percorso circolare dovrebbe scorrere in senso orario, in modo da generare un flusso che si oppone alla variazione che l'ha generata.
Nel calcolo del modulo E_i del campo elettrico indotto si devono distinguere due casi:

1. $\boldsymbol{0 \le r \le R}$: il flusso concatenato con la circonferenza di raggio *r* vale, con i versi scelti in figura per il campo di induzione magnetica e per la percorrenza della circonferenza

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -B\pi r^2$$

per cui, dalla legge di Faraday, si ha

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \pi r^2 \frac{dB}{dt} = \pi r^2 \frac{d(at)}{dt} = \pi r^2 a$$

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = \oint E_i dr = E_i \oint dr = E_i 2\pi r$$

$$E_i 2\pi r = \pi r^2 a$$

$$E_i = \frac{ra}{2}$$

2. $\boldsymbol{r \ge R}$: il flusso concatenato con la circonferenza di raggio *r* vale

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -B\pi R^2$$

tenendo conto del fatto che il campo magnetico è nullo per $r > R$
Dalla legge di Faraday si ha quindi

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \pi R^2 \frac{dB}{dt} = \pi R^2 \frac{d(at)}{dt} = \pi R^2 a$$

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = \oint E_i dr = E_i \oint dr = E_i 2\pi r$$

$$E_i 2\pi r = \pi R^2 a$$

$$E_i = \frac{R^2 a}{2r}$$

Il massimo di E_i si ha per $r = R$ e vale

$$E_i(r = R) = \frac{Ra}{2} = 1.25 \cdot 10^{-2}\ V/m$$