

**Elementi di Elettromagnetismo (AA 19-20)**

**19 dicembre 2019**

Nome e Cognome: \_\_\_\_\_ Matricola: \_\_\_\_\_

*Il candidato risponda ai seguenti quesiti. Si riporti lo svolgimento completo nel foglio protocollo allegato e i risultati negli appositi spazi del foglio delle risposte.*

**Esercizio 1.**

Si determini l'espressione del potenziale  $V_C$  nel centro di un triangolo equilatero di lato  $l$  con una carica di valore  $q$  in ogni vertice.

Si calcoli poi il valore di  $V_C$  nel caso  $q = 20 \mu\text{C}$  e  $l = 2 \text{ m}$ , considerando che  $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ .

**Esercizio 2.**

Un conduttore di sezione uniforme e lunghezza  $l = 150 \text{ m}$  ha ai suoi capi una tensione  $V = 3 \text{ V}$ . Se la densità di corrente che vi fluisce è  $J = 7 \cdot 10^5 \text{ A/m}^2$ , si identifichi il materiale di cui è fatto il conduttore, tenendo in considerazione la seguente tabella.

Materiale	Conducibilità $\sigma$ (S/m)
Argento	$6.2 \cdot 10^7$
Rame	$5.8 \cdot 10^7$
Oro	$4.1 \cdot 10^7$
Alluminio	$3.5 \cdot 10^7$

**Esercizio 3.**

Una bobina avente  $N = 100$  avvolgimenti di raggio  $a = 0.6 \text{ m}$  è percorsa da una corrente  $I = 5 \text{ A}$ . Si calcoli

- il campo di induzione magnetica in un punto lungo l'asse della bobina, a  $0.8 \text{ m}$  dal centro;
- a quale distanza dal centro, lungo l'asse della bobina, l'intensità del campo si riduce a  $1/8$  del valore assunto al centro della bobina.

**Esercizio 4.**

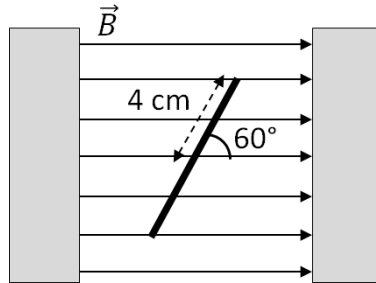
Un solenoide lungo  $l = 20 \text{ cm}$  è formato da  $N = 200$  spire ed è attraversato da una corrente  $I = 3.25 \text{ A}$ . Si calcoli l'intensità della forza esercitata su una particella dotata di una carica  $q = 15 \mu\text{C}$  che si muove con velocità  $v = 1050 \text{ m/s}$  all'interno del solenoide con un'inclinazione di  $11.5^\circ$  rispetto all'asse del solenoide.

**Esercizio 5.**

Si scriva la legge di Ampere modificata in forma integrale, esplicitandone il significato.

**Esercizio 6.**

Una bobina circolare di raggio  $a = 4 \text{ cm}$ , costituita da  $N = 500$  avvolgimenti, è posta fra i poli di un grande elettromagnete. Il campo di induzione magnetica è uniforme e descrive un angolo di  $60^\circ$  con il piano della bobina. Esso diminuisce con derivata pari a  $0.2 \text{ T/s}$ . Quanto vale la forza elettromotrice  $\mathcal{E}$  indotta? Qual è il verso della corrente indotta nella bobina?

**Esercizio 7.**

Un'onda piana di frequenza  $f = 7.5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$  si propaga nel vuoto lungo la direzione positiva dell'asse  $x$ . L'onda è linearmente polarizzata, con il campo elettrico di ampiezza  $E_0 = 500 \text{ V/m}$  diretto lungo l'asse  $z$ . Si trovi

- l'espressione del campo elettrico  $\vec{E}$  nel dominio del tempo;
- l'espressione del campo di induzione magnetica  $\vec{B}$  nel dominio del tempo.

**Esercizio 8.**

Un laser ad anidride carbonica emette un'onda elettromagnetica sinusoidale che si propaga nel vuoto con un campo di induzione magnetica  $\vec{B}(x, t) = \hat{y} 5 \sin(5.93 \cdot 10^5 x + 1.78 \cdot 10^{14} t) \text{ mT}$ . Si calcolino

- la direzione di propagazione dell'onda;
- la lunghezza d'onda  $\lambda$ ;
- la frequenza  $f$ ;
- l'espressione del campo elettrico  $\vec{E}$  nel dominio del tempo.

## Risposte ai quesiti

Nome e Cognome: \_\_\_\_\_

Matricola: \_\_\_\_\_

### Esercizio 1.

$V_C = \sum_{i=1}^3 \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i} = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 R}$ . La distanza  $R$  di ogni carica dal centro è tale che  $\frac{l}{2} = R \cos 30^\circ = R \frac{\sqrt{3}}{2}$ , da cui

deriva che  $R = \frac{l}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . Quindi, si ha  $V_C = \frac{3\sqrt{3}q}{4\pi\epsilon_0 l}$ .

Se  $q = 20 \mu\text{C}$  e  $l = 2 \text{ m}$ ,  $V_C = \frac{3\sqrt{3} \cdot 20 \cdot 10^{-6}}{4\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 2} = 0.47 \cdot 10^6 = 4.7 \cdot 10^5 \text{ V}$ .

### Esercizio 2.

Essendo  $V = El$ , si ha  $E = \frac{V}{l}$ . Da  $J = \sigma E$  si ottiene  $\sigma = \frac{J}{E} = \frac{Jl}{V}$  e risulta  $\sigma = \frac{7 \cdot 10^5 \cdot 150}{3} = 3.5 \cdot 10^7 \text{ S/m}$ .  
Il materiale del conduttore è quindi l'alluminio.

### Esercizio 3.

a) Supponendo di scegliere l'asse  $x$  come asse della spira, si ha  $B_x = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{NIS}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$ , con  $S = \pi a^2$ .

Usando  $x = 0.80 \text{ m}$ , si ottiene  $B_x = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \frac{NI\pi a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{100 \cdot 5 \cdot \pi \cdot 0.60^2}{(0.80^2 + 0.60^2)^{3/2}} = 1.13 \cdot 10^{-4} \text{ T}$ . Si ricordi che il campo di induzione magnetica in un punto dell'asse della spira ha la direzione dell'asse.

b) Considerando che  $B_x = \frac{\mu_0}{2} \frac{NIa^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$ , si deve trovare un valore di  $x$  tale che  $\frac{1}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{8} \frac{1}{(0^2 + a^2)^{3/2}}$ . Prendendo il reciproco di entrambi i membri, si ha  $(x^2 + a^2)^{3/2} = 8a^3$ . Elevando poi alla potenza  $2/3$ , si ottiene  $x = \pm\sqrt{3}a = \pm 1.04 \text{ m}$ .

### Esercizio 4.

La particella carica è soggetta alla forza magnetica, per cui si calcola inizialmente il campo di induzione magnetica prodotto dal solenoide  $B = \mu_0(N/L)I = 4\pi \cdot 10^{-7}(200/0.2) \cdot 3.25 = 4.08 \cdot 10^{-3} \text{ T}$ .

Il campo di induzione magnetica di un solenoide è parallelo al suo asse, quindi la forza magnetica è data da  $F_m = qvB \sin \theta$  con  $\theta = 11.5^\circ$ . Utilizzando il valore di  $B$  per determinare la forza esercitata sulla particella carica, si ha  $F_m = 15 \cdot 10^{-6} \cdot 1050 \cdot 4.08 \cdot 10^{-3} \sin(11.5^\circ) = 1.28 \cdot 10^{-5} \text{ N}$ .

### Esercizio 5.

La legge di Ampere è

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left( \iint \vec{J} \cdot d\vec{S} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} \right),$$

dove  $\vec{B}$  è il vettore campo induzione magnetica,  $\mu_0$  è la permeabilità magnetica del vuoto,  $\vec{J}$  è il vettore densità di corrente di conduzione,  $\epsilon_0$  è la costante dielettrica del vuoto e  $\vec{E}$  il vettore campo elettrico.

La legge di Ampere modificata per tener conto della corrente di spostamento, tramite il termine aggiunto da Maxwell, afferma che la circuitazione (ossia l'integrale di linea lungo una curva chiusa) del campo di induzione magnetica è proporzionale alla somma di due termini: il primo contiene la corrente totale concatenata con la curva chiusa, mentre il secondo contiene la derivata temporale del flusso del campo elettrico attraverso una superficie delimitata dalla curva considerata.

**Esercizio 6.**

Si deve trovare la forza elettromotrice indotta dal flusso del campo magnetico variabile attraverso la bobina. Il flusso varia perché il campo di induzione magnetica diminuisce di intensità.

Sia  $\vec{S}$  il vettore normale all'area della bobina. Il campo di induzione magnetica è uniforme su tutta la spira, quindi si può calcolarne il flusso come  $\Phi_B = BS \cos \phi$ , dove  $\phi = 30^\circ$ . In questa espressione l'unica quantità che cambia nel tempo è il modulo di  $B$ , per cui  $d\Phi_B/dt = (dB/dt)S \cos \phi$ .

Con  $N = 500$  la f.e.m. indotta risulta  $\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = -N \frac{dB}{dt} S \cos \phi = 500(-0.2)\pi a^2 \cos 30^\circ = 0.435 \text{ V}$ .

Il fatto che il risultato sia positivo vuol dire che puntando il pollice della mano destra nel verso di  $\vec{S}$ , la f.e.m. è diretta come le dita della mano. Vedendo la bobina da sinistra nella figura, tale direzione è in senso orario.

**Esercizio 7.**

a) Poiché  $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 7.5 \cdot 10^{14} = 4.71 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}$  e  $v = c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ , si ha  $k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c} = \frac{4.71 \cdot 10^{15}}{3 \cdot 10^8} = 1.57 \cdot 10^7 \text{ rad/m}$ . Quindi  $\vec{E}(x, t) = \hat{z} 500 \sin(1.57 \cdot 10^7 x - 4.71 \cdot 10^{15} t) \text{ V/m}$ ;

b) essendo  $\vec{E} = \vec{B} \times \vec{c}$  e  $\vec{c} = \hat{x}c$ , si ha  $\vec{B}(x, t) = -\hat{y} \frac{E_0}{c} \sin(1.57 \cdot 10^7 x - 4.71 \cdot 10^{15} t) = -\hat{y} 1.67 \sin(1.57 \cdot 10^7 x - 4.71 \cdot 10^{15} t) \mu\text{T}$ .

**Esercizio 8.**

a) L'onda si propaga nella direzione negativa dell'asse  $x$ ;

b) essendo  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , la lunghezza d'onda è  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{5.93 \cdot 10^5} = 10.6 \mu\text{m}$ ;

c) poiché l'onda si propaga nello spazio libero,  $c = f\lambda$ , quindi la frequenza è  $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{1.06 \cdot 10^{-5}} = 28.3 \text{ THz}$ ;

d) essendo  $\vec{E} = \vec{B} \times \vec{c}$  e  $\vec{c} = -\hat{x}c$ , il campo elettrico associato all'onda piana è  $\vec{E}(x, t) = \hat{z} 5 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot \sin(5.93 \cdot 10^5 x + 1.78 \cdot 10^{14} t) = \hat{z} 1.5 \cdot 10^6 \cdot \sin(5.93 \cdot 10^5 x + 1.78 \cdot 10^{14} t) \text{ V/m}$ .