Esercizi – Elettrostatica (Lezione 27/10)

Esercizio 1

Due particelle fisse di carica q_1 = +8q e q_2 = -2q sono poste, rispettivamente, nell'origine dell'asse x ed in un punto di coordinata $x = L$.

In che punto a distanza finita si può collocare un protone p in modo che resti in equilibrio?

Soluzione:

Sia $\overrightarrow{F_1}$ la forza esercitata da q_1 su p (forza repulsiva) e $\overrightarrow{F_2}$ la forza esercitata da q_2 su p (forza attrattiva). Per avere equilibrio, la forza netta sul protone dev'essere nulla.

$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = 0$

$\overrightarrow{F_1} = -\overrightarrow{F_2} \Rightarrow F_1 = F_2$

Il punto di equilibrio può essere solo sull'asse x. Si determina la posizione col seguente ragionamento.

1. Il punto di equilibrio NON può trovarsi tra le due cariche, dato che $\overrightarrow{F_1}$ e $\overrightarrow{F_2}$ avrebbero versi concordi.
2. NON può trovarsi a sinistra di q_1: sebbene in tale zona $\overrightarrow{F_1}$ e $\overrightarrow{F_2}$ abbiano versi discordi, F_1 è sempre maggiore di F_2, essendo generata da una carica maggiore posta a distanza minore.
3. Alla destra di q_2 le forze hanno ancora versi opposti e si può cercare in tale regione una posizione di equilibrio, essendo la carica maggiore più lontana.

   $F_1 = F_2 \Rightarrow \dfrac{8qq_p}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \dfrac{2qq_p}{4\pi\varepsilon_0 (x-L)^2} \Rightarrow 4(x-L)^2 = x^2 \Rightarrow 2(x-L) = \pm x$

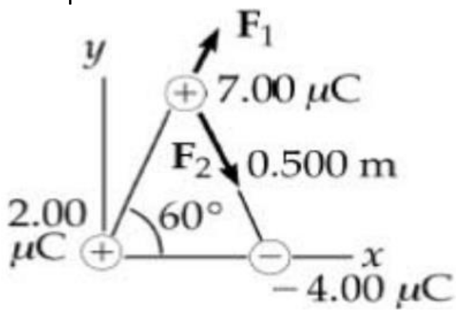
   +: $2(x-L) = x \Rightarrow x = 2L$ ($x>L$: OK)

   -: $3x - 2L = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}L$ ($x<L$: NO)

Il protone resta in equilibrio se collocato alla distanza x = 2L.

Esercizio 2

Tre cariche puntiformi sono poste ai vertici di un triangolo equilatero, come mostrato in figura. Calcolare la forza elettrica risultante sulla carica di 7 µC.



Soluzione:

$\varepsilon_0 \cong \dfrac{1}{36\pi} 10^{-9}\ F/m$

$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cong 9 \cdot 10^9\ N \cdot m^2/C^2$

$F_1 = \dfrac{9 \cdot 10^9 \cdot 7 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{(0.5)^2} = 0.504\ N$

$F_2 = \dfrac{9 \cdot 10^9 \cdot 7 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-6}}{(0.5)^2} = 1.008\ N$

Si proiettano entrambe le forze su x e y.

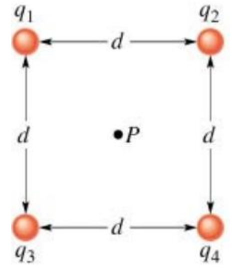
$F_x = F_1 \cos 60° + F_2 \cos 60° = 0.504 \cos 60° + 1.008 \cos 60° = 0.756\ N$

$F_y = F_1 \sin 60° - F_2 \sin 60° = 0.504 \sin 60° - 1.008 \sin 60° = -0.436\ N$

$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{0.756^2 + 0.436^2} = 0.873\ N$

$\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{F_y}{F_x}\right) = \tan^{-1}\left(-\dfrac{0.436}{0.756}\right) = -30°$

Esercizio 3
Si calcoli il potenziale nel punto *P*, al centro del quadrato di cariche puntiformi mostrate in figura. Si assuma: d = 1.3 m, q_1 = +12 nC, q_2 = -24 nC, q_3 = +31 nC, q_4 = +17 nC.



Soluzione:
Si calcola il potenziale elettrostatico in *P* come somma algebrica dei potenziali creati dalle 4 cariche.

$$V = \sum_{i=1}^{4} V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{r} + \frac{q_3}{r} + \frac{q_4}{r}\right)$$

dove r è la distanza del punto P dalle cariche.

$$d^2 + d^2 = (2r)^2 \Rightarrow r = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)}{d/\sqrt{2}} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (12 - 24 + 31 + 17) \cdot 10^{-9}}{1.3/\sqrt{2}} = 352\ V$$

Esercizio 4
La corrente che fluisce in un filo conduttore di lunghezza l = 100 m con sezione uniforme ha una densità J = $3{\cdot}10^5$ A/m^2. Si trovi la tensione V ai capi del filo se il materiale con cui è realizzato ha una conducibilità σ = $2{\cdot}10^7$ S/m.

Soluzione:

$$E = \frac{J}{\sigma}$$

$$V = El = \frac{Jl}{\sigma} = \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 100}{2 \cdot 10^7} = 1.5\ V$$

Esercizio 5
Un filo in rame di lunghezza l = 50 m ha sezione circolare con raggio r = 2 cm. Sapendo che la conducibilità del rame è σ = $5.8{\cdot}10^7$ S/m, si trovi

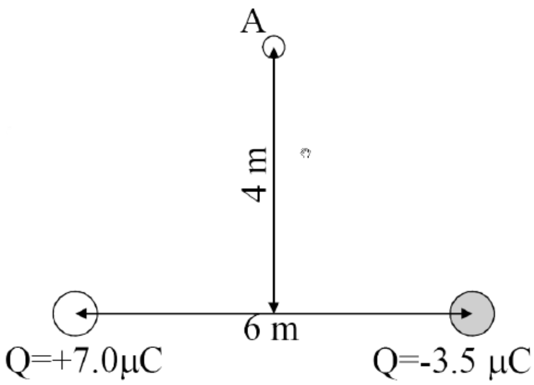
1. la resistenza R del filo;
2. la potenza dissipata nel filo $P = V^2/R$ se la tensione ai suoi capi è V = 1.5 mV

Soluzione:

$$R = \frac{l}{\sigma A} = \frac{50}{5.8 \cdot 10^7 \cdot \pi \cdot 0.02^2} = 6.86 \cdot 10^{-4}\ \Omega$$

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{(1.5 \cdot 10^{-3})^2}{6.86 \cdot 10^{-4}} = 3.3\ mW$$

Esercizio 6
Calcolare il potenziale elettrico nel punto *A* sull'asse di simmetria della distribuzione di cariche in figura. Quanto lavoro bisogna spendere per portare una carica da 2 μC dall'infinito al punto A?



Soluzione:
Il potenziale a distanza *r* da una carica puntiforme *q* è dato da

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

quindi è sufficiente calcolare V_{sx} dovuto alla carica a sinistra

$$V_{sx} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{sx}}{r} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 7 \cdot 10^{-6}}{5} = 12.6 \cdot 10^3\ V$$

e calcolare V_{dx} dovuto alla carica posta a destra

$$V_{dx} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{dx}}{r} = -\frac{9 \cdot 10^9 \cdot 3.5 \cdot 10^{-6}}{5} = -6.3 \cdot 10^3\ V$$

Si noti che la distanza del punto *A* dalla carica di sinistra e da quella di destra è

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5\ m$$

In virtù del principio di sovrapposizione, si sommano i valori ottenuti

$$V_{tot} = V_{sx} + V_{dx} = 12.6 \cdot 10^3 - 6.3 \cdot 10^3 = 6.3 \cdot 10^3\ V$$

Il lavoro necessario per portare una carica da 2 μC dall'infinito al punto *A* coincide con la variazione di energia potenziale elettrica, che in questo caso è positiva (l'energia potenziale finale è maggiore di quella iniziale, pari a 0)

$$L = \Delta U = q\Delta V = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 6.3 \cdot 10^3 = 12.6\ mJ$$