Dipartimento di Ingegneria e Architettura
Corso di Laurea in Ingegneria dei Sistemi Informativi

Elementi di Elettromagnetismo (AA 21-22)

11 gennaio 2022

Il candidato risponda ai seguenti quesiti. Si riporti lo svolgimento completo in un foglio a parte in modo ordinato, mettendo bene in evidenza i risultati.

Esercizio 1.
Due cariche di uguale modulo $q = 5 \cdot 10^{-5}$ C e di segno opposto si trovano nel piano (x, y). La carica positiva $q_1 = +q$ si trova nel punto di coordinate (x = 0, y = 2 cm), mentre quella negativa $q_2 = -q$ si trova nella posizione di coordinate (x = 0, y = -2 cm). Si trovi la componente y del campo elettrico nella posizione (x = 10 cm, y = 0).

Esercizio 2.
Una sfera isolante di raggio $2R = 3$ m ha una distribuzione di carica con densità di volume $\rho_1 = 8$ μC/m^3 per $0 \leq r \leq R$ e ρ_2 = -2 μC/m^3 per $R < r \leq 2R$. Determinare

a) l'espressione del campo elettrico $\bar{E}$ in funzione di r;

b) il valore del campo elettrico E per $r = \dfrac{2}{3}R$.

Esercizio 3.
Si consideri un condensatore piano con un dielettrico liquido tra le armature. Il condensatore viene collegato a una pila che fornisce una differenza di potenziale $V = 4.5$ V. Una volta carico, il condensatore viene poi scollegato dalla pila e le sue armature sono allontanate del doppio rispetto alla situazione iniziale. Calcolare la differenza di potenziale tra le armature del condensatore dopo la modifica.

Esercizio 4.
In un filo rettilineo infinito scorre una corrente I di 3 A. Si trovi

a) l'espressione del vettore campo di induzione magnetica $\bar{B}$ generato dal filo alla distanza r;

b) l'intensità B del campo alla distanza r di 4 cm e 8 cm dal filo;

c) la distanza r dal filo a cui l'intensità del campo di induzione magnetica vale 0.02 T.

Esercizio 5.
Un solenoide infinito di raggio $r = 20$ cm con $n = 1200$ spire al metro è percorso da una corrente $i(t) = 25 \cdot t$ A e si trova lungo l'asse di una spira circolare di raggio $R = 10r$. Calcolare la forza elettromotrice ϵ indotta nella spira.

Esercizio 6.
Un'onda elettromagnetica piana di lunghezza d'onda $\lambda = 40$ m si propaga nel vuoto nella direzione positiva dell'asse y. Il campo elettrico associato all'onda è diretto lungo l'asse x e ha ampiezza $E = 25$ V/m. Determinare

a) la frequenza dell'onda f;

b) l'espressione del campo elettrico $\bar{E}$;

c) l'espressione del campo di induzione magnetica $\bar{B}$.

Esercizio 7.
Si scriva l'espressione del vettore di Poynting $\bar{S}$ di un'onda elettromagnetica piana che si propaga nel vuoto, specificando l'unità di misura e cosa rappresentano modulo, direzione e verso del vettore.

Risposte ai quesiti

Esercizio 1.
Nel punto di coordinate ($x = 10$ cm, $y = 0$) il campo elettrico complessivo $\bar{E}$ si ottiene sommando vettorialmente i singoli contributi dovuti alle due cariche, rispettivamente $\bar{E}_1$ e $\bar{E}_2$. In particolare, $\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 = \hat{x}(E_{1x} - E_{2x}) - \hat{y}(E_{1y} + E_{2y})$. Essendo le due cariche equidistanti dal punto, con distanza $d = \sqrt{0.02^2 + 0.1^2} = \sqrt{0.0104} = 10.2$ cm, ed uguali in modulo, le componenti x di $\bar{E}_1$ e $\bar{E}_2$ sono uguali ed opposte, quindi la loro somma è nulla. Al contrario, le componenti y di $\bar{E}_1$ e $\bar{E}_2$ sono uguali e concordi, quindi $\bar{E} = -\hat{y}(E_{1y} + E_{2y}) = -\hat{y}2E_{1y} = -\hat{y}2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d^2}(0.02/d) = -\hat{y}2\frac{1}{4\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}}\frac{5 \cdot 10^{-5}}{0.0104}(0.02/0.102) = -1.695 \cdot 10^7$ V/m.

Esercizio 2.

a) Il campo elettrico $\bar{E}$ si calcola sfruttando la simmetria sferica della distribuzione di carica e usando la legge di Gauss. Data la simmetria sferica, il campo elettrico è radiale e dipende solo dalla distanza r dal centro. Risulta quindi conveniente scegliere come superficie gaussiana una sfera di raggio r concentrica a quella di raggio $2R$. Per la legge di Gauss si ha $\phi_E = \iint_S \bar{E} \cdot d\bar{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$, dove q_{int} è la carica interna alla superficie sferica S di raggio r. Il flusso del campo elettrico $\bar{E}$ attraverso S è dato da $\phi_E = \iint_S \bar{E} \cdot d\bar{S} = \iint_S EdS = E\iint_S dS = E4\pi r^2$. Per il calcolo di q_{int} si considerano tre regioni nella distribuzione di carica.
$\mathbf{r < R}$: $q_{int} = \iiint_V \rho_1 dV = \rho_1 \iiint_V dV = \rho_1 \frac{4}{3}\pi r^3$, quindi dalla legge di Gauss si ricava $E = \frac{\rho_1 r}{3\varepsilon_0}$.
$\mathbf{R < r < 2R}$: $q_{int} = \iiint_V \rho(r)dV = \iiint_{V_R} \rho_1 dV + \iiint_{V_{R-r}} \rho_2 dV = \rho_1 \iiint_{V_R} dV + \rho_2 \iiint_{V_{R-r}} dV =$
$= \rho_1 \frac{4}{3}\pi R^3 + \rho_2 \frac{4}{3}\pi(r^3 - R^3)$, quindi dalla legge di Gauss si ricava $E = \frac{\rho_1 R^3}{3\varepsilon_0 r^2} + \frac{\rho_2}{3\varepsilon_0 r^2}(r^3 - R^3)$.
$\mathbf{r > 2R}$: $q_{int} = \iiint_V \rho(r)dV = \iiint_{V_R} \rho_1 dV + \iiint_{V_{2R}} \rho_2 dV = \rho_1 \iiint_{V_R} dV + \rho_2 \iiint_{V_{2R}} dV =$
$= \rho_1 \frac{4}{3}\pi R^3 + \rho_2 \frac{4}{3}\pi(8R^3 - R^3) = \rho_1 \frac{4}{3}\pi R^3 + \rho_2 \frac{4}{3}\pi 7R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3(\rho_1 + 7\rho_2)$, quindi dalla legge di Gauss si ricava $E = \frac{(\rho_1 + 7\rho_2)R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$.

b) il valore del campo elettrico E per $r = \frac{2}{3}R$ si trova considerando l'espressione $E = \frac{\rho_1 r}{3\varepsilon_0}$. Si ha $E = \frac{\rho_1 r}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho_1}{3\varepsilon_0}\frac{2}{3}R = \frac{2\rho_1 R}{9\varepsilon_0} = \frac{2 \cdot 8 \cdot 10^{-6} \cdot 1.5}{9 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} = 30.13 \cdot 10^4$ V/m.

Esercizio 3.
La capacità di un condensatore a facce piane e parallele con armature di area A poste a una distanza d, tra cui è posto un dielettrico con ε_r, è $C = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{d}$. Al termine della carica, sulle armature del condensatore si ha $Q = CV$. La carica rimane inalterata quando il generatore viene scollegato dalla pila, quindi $Q' = Q$. La capacità del condensatore diminuisce all'aumentare della distanza delle armature. In particolare, $C' = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{d'} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{2d} = \frac{1}{2}C$. Al termine della carica, si ha quindi $Q' = C'V' = \frac{1}{2}CV'$. Da questa espressione, considerando le uguaglianze precedenti, si ricava $\frac{1}{2}CV' = Q' = Q = CV$, quindi $V' = 2V = 2 \cdot 4.5 = 9$ V.

Esercizio 4.

a) Il campo di induzone magnetica generato nel vuoto da un filo rettilineo infinito in cui fluisce una corrente stazionaria I è $\bar{B} = \hat{\phi}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, dove $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m è la permeabilità magnetica del vuoto e r è la distanza dal filo. Le linee di campo sono circonferenze nel piano perpendicolare al filo, con centro nel filo stesso. Il verso delle linee di campo è indicato dalle dita della mano destra che si chiudono, quando il pollice punta nel verso in cui fluisce la corrente;

b) l'intensità B decresce linearmente con la distanza r dal filo. Se $r = 4$ cm, $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3}{2\pi \cdot 0.04} = 15 \cdot 10^{-6}$ T $= 15$ μT. Se la distanza raddoppia, l'intensità si dimezza. Per $r = 8$ cm risulta infatti $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3}{2\pi \cdot 0.08} = 7.5 \cdot 10^{-6}$ T $= 7.5$ μT;

c) essendo $r = \frac{\mu_0 I}{2\pi B}$, l'intensità del campo di induzione magnetica è pari a 0.02 T quando $r = \frac{\mu_0 I}{2\pi B} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3}{2\pi \cdot 0.02} = 3 \cdot 10^{-5}$ m $= 30$ μm.

Esercizio 5.

Essendo il solenoide percorso da una corrente variabile nel tempo, il campo di induzione magnetica generato al suo interno dipende dal tempo. Si ha qundi una variazione del flusso del campo di induzione magnetica concatenato con la spira, che dà origine a una f.e.m. indotta.
Il campo di induzione magnetica $\bar{B}$ del solenoide ideale è uniforme e parallelo all'asse del solenoide stesso all'interno, e nullo all'esterno. Poiché la spira circolare ha asse coincidente con quello del solenoide, il flusso del campo di induzione magnetica concatenato con la spira è $\phi_B = \iint_{S_{sp}} \bar{B} \cdot d\bar{S} = \iint_{S_{sol}} \bar{B} \cdot d\bar{S} = \iint_{S_{sol}} B dS = B \iint_{S_{sol}} dS = B\pi r^2 = \mu_0 n i(t) \pi r^2$.
La forza elettromotrice indotta ϵ è allora $\epsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}[\mu_0 n i(t) \pi r^2] = -\mu_0 n \pi r^2 \frac{di(t)}{dt} =$
$= -\mu_0 n \pi r^2 \frac{d(25t)}{dt} = -4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1200 \cdot \pi \cdot (0.2)^2 \cdot 25 =$ -4.74 mV.

Esercizio 6.

a) La velocità dell'onda elettromagnetica nel vuoto è $c = f\lambda$, quindi la frequenza è $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{40} = 7.5 \cdot 10^6$ Hz $= 7.5$ MHz;

b) essendo il numero d'onda $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{40} = 0.16$ rad/m e la pulsazione $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 7.5 \cdot 10^6 = 47.12 \cdot 10^6$ rad/s, l'espressione del campo elettrico associato all'onda è $\bar{E}(y,t) = \hat{x} E \sin(ky - \omega t) = \hat{x} 25 \sin(0.16y - 47.12 \cdot 10^6 \cdot t)$ V/m;

c) essendo $\bar{E} = \bar{B} \times \bar{c}$, $\bar{c} = \hat{y} c$ e $\bar{E}$ diretto come $\hat{x}$, il campo di induzione magnetica $\bar{B}$ è diretto nel verso negativo dell'asse z e ha intensità $B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{25}{3 \cdot 10^8} = 83.33 \cdot 10^{-9}$ T $= 83.33$ nT. L'espressione del campo di induzione magnetica è $\bar{B}(y,t) = -\hat{z} 83.33 \sin(0.16y - 47.12 \cdot 10^6 \cdot t)$ nT.

Esercizio 7.

Il vettore di Poynting $\bar{S}$, diretto nella direzione di propagazione dell'onda elettromagnetica, ha espressione $\bar{S} = \frac{1}{\mu_0} \bar{E} \times \bar{B}$, dove $\bar{E}$ e $\bar{B}$ sono il campo elettrico e il campo di induzione magnetica associati all'onda, rispettivamente. Per un'onda piana che si propaga nella direzione positiva dell'asse x il vettore di Poynting è $\bar{S} = \hat{x} \frac{1}{\mu_0} E_0 B_0 \sin^2(kx - \omega t)$, dove E_0 e B_0 sono il modulo del campo elettrico e del campo di induzione magnetica, rispettivamente. L'unità di misura è W/m^2. Il modulo del vettore di Poynting rappresenta l'intensità dell'onda elettromagnetica, mentre la direzione e il verso di $\bar{S}$ indicano la la direzione e il verso in cui l'energia è trasportata dall'onda.