Esercizi – Magnetostatica (Lezione 17/11)

Esercizio 1

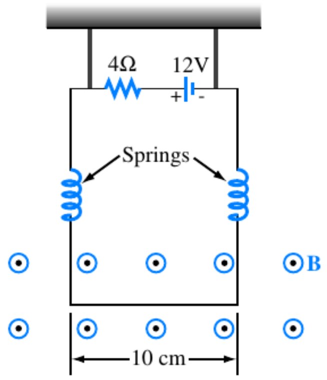
Un elettrone che si muove nella direzione positiva dell'asse *x* perpendicolarmente ad un campo magnetico è soggetto a una deflessione nella direzione negativa dell'asse *z*. Qual è la direzione del campo magnetico?

Soluzione:

La forza magnetica che agisce su una particella carica in movimento è $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$. In questo caso si ha $q = -e$, $\vec{v} = \hat{x}v$, $\vec{F}_m = -\hat{z}F_m$, quindi $-\hat{z}F_m = -\hat{x}ve \times \vec{B}$. Dal prodotto vettoriale si deduce che $\vec{B}$ deve essere nella direzione *y* positiva.

Esercizio 2

Il circuito mostrato in figura usa due molle identiche per sostenere un filo orizzontale di lunghezza 10 cm e massa 20 g. In assenza di campo magnetico, il peso del filo causa un allungamento di ciascuna delle molle di 0.2 cm. Quando si accende un campo magnetico uniforme nella regione contenente il filo orizzontale, si osserva un allungamento delle molle di ulteriori 0.5 cm. Qual è l'intensità dell'induzione magnetica B? L'equazione della forza di una molla è $F = kd$, dove *k* è la costante della molla e *d* è l'allungamento a cui è sottoposta.



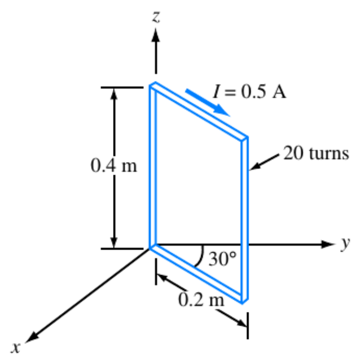
Soluzione:

Le molle sono caratterizzate da una costante *k* e $F = kd$ è la forza esercitata sulla molla, essendo *d* la quantità di cui la molla si allunga rispetto alla sua configurazione di riposo.

In questa situazione, a ciascuna molla è applicato metà del peso del filo: $F = \frac{1}{2}mg = kd$, quindi $k = \frac{mg}{2d} = \frac{20 \cdot 10^{-3} \cdot 9.8}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 49$ N/m. Di conseguenza, quando le molle sono allungate di altri 0.5 cm, si ha un ulteriore aumento della forza di $F = 49 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 245$ mN per ciascuna molla, o una forza addizionale complessiva $F = 0.49$ N. Questa forza è uguale a quella esercitata sul filo dall'interazione del campo magnetico e della corrente descritta dall'equazione $\vec{F}_m = I\vec{l} \times \vec{B}$. Si noti che $\vec{l} \times \vec{B}$ è diretto verso il basso e che $I = V/R = 12/4 = 3$ A. Quindi, $F_m = IlB$ e $B = \frac{F_m}{Il} = \frac{0.49}{3 \cdot 0.1} = 1.63$ T.

Esercizio 3

La bobina rettangolare mostrata in figura è formata da 20 avvolgimenti stretti ed è imperniata lungo l'asse *z*. Il piano della bobina forma un angolo di 30° con l'asse *y*, e la corrente negli avvolgimenti è 0.5 A.



Qual è il modulo del momento torcente esercitato sulla bobina in presenza di un campo di induzione magnetica $\bar{B} = \hat{y}2.4\,T$? Se vista dall'alto, la direzione di rotazione è in senso orario o anti-orario?

Soluzione:

Il momento torcente sulla bobina è dato da $\vec{\tau} = NI\vec{S} \times \vec{B} = NIS\hat{n} \times \vec{B}$. Dai dati dell'esercizio si ricava che $I = 0.5$ A, $N = 20$ e $S = 0.2 \cdot 0.4 = 0.08$ m^2. Dalla figura si ha che $\hat{n} = -\hat{x}\cos 30° + \hat{y}\sin 30°$, perciò $\vec{\tau} = 20 \cdot 0.5 \cdot 0.08 \cdot \left(-\hat{x}\sqrt{3}/2 + \hat{y}\,1/2\right) \times \hat{y}2.4 = -\hat{z}1.66$ N·m. Essendo il momento torcente negativo, la direzione di rotazione della bobina è oraria, se guardata da sopra.

Esercizio 4

Due bobine circolari coassiali sono percorse dalla stessa corrente in senso opposto e si trovano a distanza d = 1 m. La prima bobina consiste di N_1 = 360 avvolgimenti di 20 cm di diametro (r_1 = 0.1 m). La seconda bobina ha un diametro di 30 cm (r_2 = 0.15 m). Quanti avvolgimenti N_2 deve avere approssimativamente la seconda bobina perché il campo di induzione magnetica si annulli nel punto medio della congiungente i centri delle due bobine?

Soluzione:

Il campo di induzione magnetica sull'asse di una bobina circolare di raggio r a distanza x dal suo centro è

$$B = \frac{N\mu_0 I\pi r^2}{2\pi(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{N\mu_0 I r^2}{2(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

Si richiede l'uguaglianza dei moduli dei due contributi al campo di induzione magnetica che, lungo l'asse, hanno sempre verso opposto.

$$\frac{N_1\mu_0 I {r_1}^2}{2((d/2)^2 + {r_1}^2)^{3/2}} = \frac{N_2\mu_0 I {r_2}^2}{2((d/2)^2 + {r_2}^2)^{3/2}}$$

Semplificando per il fattore comune $\mu_0 I/2\pi$, si ha

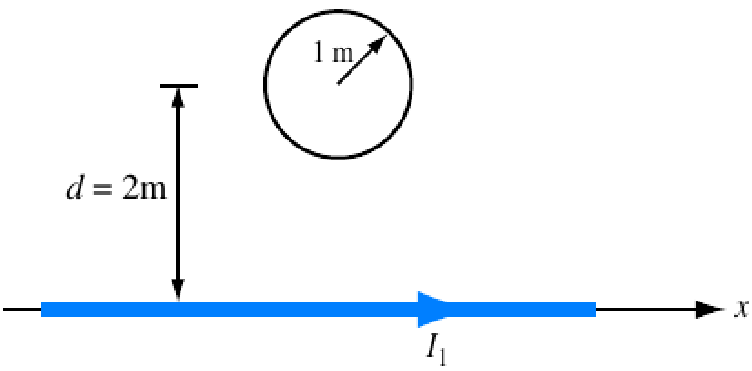
$$\frac{N_1 {r_1}^2}{((d/2)^2 + {r_1}^2)^{3/2}} = \frac{N_2 {r_2}^2}{((d/2)^2 + {r_2}^2)^{3/2}}$$

da cui si ricava

$$N_2 = N_1 \frac{r_1^2}{r_2^2}\frac{((d/2)^2 + {r_2}^2)^{3/2}}{((d/2)^2 + {r_1}^2)^{3/2}} = 360 \cdot \frac{0.1^2}{0.15^2}\frac{0.142}{0.133} \cong 171$$

Esercizio 5

Un filo infinitamente lungo in cui scorre una corrente di 25 A nella direzione positiva dell'asse x è posizionato lungo l'asse x nelle vicinanze di una bobina circolare con 20 avvolgimenti posizionata nel piano (x,y) come mostrato in figura. Se il campo di induzione magnetica al centro della spira è 0, qual è la direzione e il modulo della corrente che fluisce nella spira?



Soluzione:

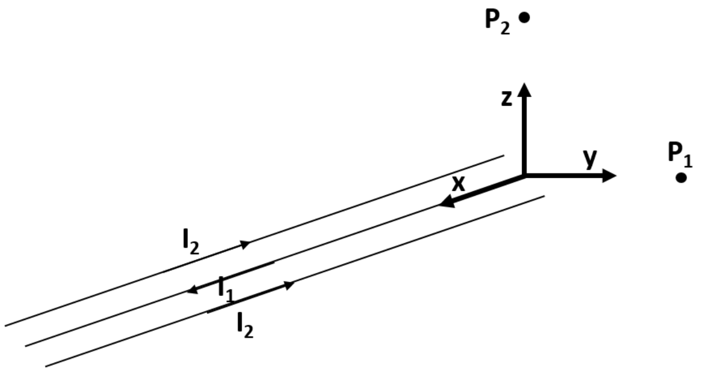
Il campo di induzione magnetica al centro della bobina dovuto al filo è

$$\vec{B}_1 = \hat{z}\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$
dove $\hat{z}$ è uscente dal foglio. Essendo nullo il campo di induzione magnetica complessivo al centro della bobina, I_2 deve essere in senso orario, se vista dall'alto, per opporsi all'effetto di I_1. Il campo di induzione magnetica dovuto a I_2 è
$$\vec{B} = -\hat{z}\frac{N\mu_0 I_2}{2a}$$
Uguagliando il modulo dei due campi si ottiene
$$\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} = \frac{N\mu_0 I_2}{2a}$$
oppure
$$I_2 = \frac{2aI_1}{2\pi N d} = \frac{1\cdot 25}{\pi\cdot 20\cdot 2} = 0.2\ A$$

Esercizio 6

Tre conduttori rettilinei paralleli e di lunghezza infinita giacciono sullo stesso piano (*x,y*), con il conduttore centrale che coincide con l'asse *x*. La distanza tra i conduttori contigui è d = 10 cm. Il conduttore centrale è percorso da una corrente costante I_1 = 1 A, nelle verso delle *x* crescenti, mentre i due conduttori laterali sono percorsi ciascuno da una corrente I_2 = 5/4 A nel verso opposto. Determinare:

1. il campo di induzione magnetica generato dai conduttori nel punto P_1 di coordinate (0,2*d*,0);
2. il campo di induzione magnetica generato dai conduttori nel punto P_2 di coordinate (0,0,2*d*).



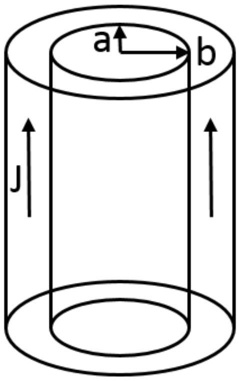
Soluzione:

1. Il campo di induzione magnetica in P_1 ha solo la componente lungo $\hat{z}$, con un contributo positivo generato dal filo centrale e negativo dagli altri due, mentre $B_x = B_y = 0$. In particolare, si ha
$$B_z = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(2d)} - \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} - \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(3d)} = -\frac{7\mu_0}{12\pi d} = -2.3\cdot 10^{-6}\ T$$
2. In P_2 il campo di induzione magnetica generato dal filo centrale ha direzione orizzontale, in particolare $-\hat{y}$, mentre quello generato dagli altri fini conduttori hanno sia la componente lungo $\hat{y}$ che quella lungo $\hat{z}$ non nulle, essendo tangenti a circonferenze centrate sui fili.

$$B_x = 0$$
$$B_y = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(2d)} + \frac{2\mu_0 I_2 \cos\vartheta}{2\pi(\sqrt{5}d)} = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(2d)} + \frac{2\mu_0 I_2 \frac{2}{\sqrt{5}}}{2\pi(\sqrt{5}d)} = -\frac{\mu_0 I_1}{4\pi d} + \frac{2\mu_0 I_2}{5\pi d} = -\frac{\mu_0}{4\pi d} + \frac{2\mu_0 \frac{5}{4}}{5\pi d}$$
$$= -\frac{\mu_0}{4\pi d} + \frac{2\mu_0}{4\pi d} = \frac{\mu_0}{4\pi d} = 10^{-6}\ T$$
$$B_z = \frac{\mu_0 I_2 \sin\vartheta}{2\pi(\sqrt{5}d)} - \frac{\mu_0 I_2 \sin\vartheta}{2\pi(\sqrt{5}d)} = 0$$

Esercizio 7

In un conduttore cilindrico cavo indefinito, di raggio interno *a* ed esterno *b*, scorre una corrente, lungo la direzione assiale, distribuita con densità uniforme $\bar{J}$ sulla sezione del conduttore. Calcolare il campo di induzione magnetica in tutto lo spazio.



Soluzione:

Si applica la legge di Ampere considerando come percorso una circonferenza *C* con centro sull'asse del conduttore cilindrico e giacente in un piano perpendicolare ad esso. Sia *r* il raggio della circonferenza *C*. Si ha

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

1. Sia *r* < *a*: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$. Poiché per simmetria $\vec{B}$ è tangente punto per punto a $d\vec{l}$ e dipende solo da *r*, si ha $B \oint_C d\vec{l} = 0$, ossia *B* = 0;
2. *a* < *r* < *b*: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint_C d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu I = \mu J(\pi r^2 - \pi a^2) = \mu J \pi (r^2 - a^2)$. Si ha quindi $B = \frac{\mu J(r^2-a^2)}{2r} = \frac{\mu I(r^2-a^2)}{2\pi r(b^2-a^2)}$, essendo $J = \frac{I}{\pi(b^2-a^2)}$;
3. *r* > *b*: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint_C d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu I$. Si ha quindi $B = \frac{\mu I}{2\pi r}$.