

# **W-Seminar Physik**

Modellbildung und Simulation

Schuljahr 2024/2026

## **Mit Gravity-Assists zum Saturn**

Simulation der Flugbahn der Raumsonde Cassini-Huygens  
im Vergleich mit realen Daten

**Verfasser:** Linus Richert

**Jahrgangsstufe:** Q13

**Kursleiter:** Wolfgang Guggenberger

**Abgabedatum:** 11.11.2025

Mein besonderer Dank gilt Duane Roth, Leiter des Navigationsteams der Cassini-Huygens-Raumsonde am Jet Propulsion Laboratory. Seine großzügige Unterstützung bei der Rekonstruktion der historischen Manöverdaten war für die Durchführung dieser Arbeit von entscheidender Bedeutung und ermöglichte erst die detaillierte Analyse der tatsächlichen Cassini-Trajektorie.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Gravity-Assists und Weltraumforschung</b>	<b>1</b>
1.1 Zielsetzung . . . . .	1
1.2 Aufbau der Arbeit . . . . .	1
<b>2 Flugbahn der Sonde und der Prozess ihrer Berechnung</b>	<b>1</b>
2.1 Design verschiedener theoretisch möglicher Trajektorien . . . . .	2
2.2 Die VVEJGA-Flugbahn . . . . .	2
<b>3 Gravity-Assists</b>	<b>3</b>
3.1 Physik des Gravity-Assists . . . . .	3
<b>4 Modell</b>	<b>5</b>
4.1 Euler-Verfahren . . . . .	5
4.2 Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	5
4.3 Numerische Integration im Programmcode . . . . .	6
4.4 Simulation . . . . .	7
4.5 Annahmen und Vereinfachungen . . . . .	8
4.6 Rekonstruktion der Manöver . . . . .	8
<b>5 Vergleich der Simulation mit der tatsächlichen Flugbahn</b>	<b>9</b>
5.1 Qualitativer Vergleich . . . . .	9
5.2 Berechnung der Abweichungen des ersten interplanetaren Transfers in Verbindung mit dem ersten Gravity-Assist . . . . .	9
5.3 Berechnung der Abweichungen der einzelnen Gravity-Assists . . . . .	10
5.4 Mögliche Ursachen der Abweichungen . . . . .	10
5.5 Verbesserungsmöglichkeiten . . . . .	11
<b>6 Fazit</b>	<b>12</b>
<b>7 Literaturverzeichnis</b>	<b>13</b>
<b>8 KI-Verzeichnis</b>	<b>16</b>
<b>9 Anhang</b>	<b>17</b>
<b>10 Erklärung</b>	<b>22</b>

# 1 Gravity-Assists und Weltraumforschung

Die Flugbahn der Cassini-Huygens-Raumsonde war aufgrund der vier großen Gravity-Assist-Manöver an Venus, Erde und Jupiter die „komplexeste Gravity-Assist-Trajektorie, die bis jetzt geflogen wurde“ [1]. Außerdem führte die Raumsonde zahlreiche Messungen durch und ermöglichte der Forschung völlig neue Erkenntnisse über den Saturn, seine Magnetosphäre und seine Monde. Schließlich befand sich NASAs Cassini 13 Jahre lang in einem Orbit um den Saturn, während ESAs Huygens auf Saturns Mond Titan landete und dort wertvolle Daten sammelte [2]. Diese Forschungsergebnisse und die äußerst komplexe Trajektorie machen die Betrachtung und Simulation der gesamten Flugbahn sowie der einzelnen Gravity-Assists sehr interessant.

## 1.1 Zielsetzung

Diese Arbeit untersucht, inwieweit sich die Flugbahn und insbesondere die Gravity-Assists der Raumsonde Cassini-Huygens mithilfe des Runge-Kutta-Verfahrens simulieren lassen. Ziel ist es, mit einem einfachen Modell, das lediglich Gravitationskräfte und Triebwerkszündungen berücksichtigt, eine möglichst realitätsnahe Flugbahn zu berechnen.

## 1.2 Aufbau der Arbeit

In dieser Arbeit wird zunächst die tatsächlich geflogene Trajektorie der Raumsonde Cassini-Huygens<sup>1</sup> betrachtet und die Notwendigkeit und Physik von Gravity-Assists erläutert. Anschließend wird das im Modell verwendete Runge-Kutta-Verfahren und die Vorgehensweise der Simulation erklärt. Daraufhin wird die simulierte Trajektorie mit der tatsächlichen Flugbahn verglichen, die Abweichungen werden analysiert und Verbesserungsmöglichkeiten diskutiert. Abschließend wird ein Fazit gezogen, inwieweit es gelungen ist, mit dem Modell eine realitätsnahe Trajektorie zu simulieren.

# 2 Flugbahn der Sonde und der Prozess ihrer Berechnung

Mit den damals verfügbaren Raketen war es nicht möglich, die 5570kg schwere Sonde [3] in einer direkten Flugbahn zum Saturn zu befördern. Deshalb entschied man sich, vier Gravity-Assists zu verwenden. Auf diese Weise konnte die notwendige Energie erreicht werden, um die Strecke zum Saturn in der kurzen Zeit von unter 7 Jahren zu bewältigen. Da die Gravity-Assists eine bestimmte Planetenkonstellation benötigte, wurde der Startzeitraum auf Ende 1997 festgelegt. Außerdem wurde der Ankunftszeitpunkt beim Saturn auf den 01. Juli 2004 festgelegt, da Cassini zu diesem Zeitpunkt die Möglichkeit hätte, Saturns Mond Phoebe näher zu untersuchen [4].

---

<sup>1</sup>Im Folgenden vereinfacht Cassini genannt.

Basierend auf dem Paper von F. Peralta und S. Flanagan [4] wird im Folgenden die genaue Berechnung der Flugbahn durch JPL detailliert dargestellt.

## 2.1 Design verschiedener theoretisch möglicher Trajektorien

Zunächst wurde mithilfe des Trajektorien-Optimierungs-Programms MIDAS eine ungefähre theoretisch mögliche Flugbahn gefunden. Anschließend wurde die Bahn mithilfe von PLATO<sup>2</sup> optimiert.

Die Optimierung muss dabei mehrere Variablen berücksichtigen. Vor allem wird Wert auf das Minimieren des nach dem Start für die Flugbahn benötigten interplanetaren  $\Delta V$  gelegt, also die Größe der Geschwindigkeitsänderung durch Manöver während dem Flug. Außerdem müssen die Startenergie pro Masseinheit  $C_3$  und die jeweiligen Gravity-Assist-Eigenschaften, zum Beispiel Höhe und Zeitpunkt, berücksichtigt werden. Hinzu kommt noch der Injection Margin, also der Masseunterschied zwischen dem theoretisch möglichen und dem auf jeden Fall benötigten Gewicht, das die Titan IV-Rakete aus dem Erd-Gravitationsfeld hinausbefördern muss. Ein weiterer wichtiger Parameter ist das End of Mission  $\Delta V$ , also die Größe der theoretisch noch möglichen Geschwindigkeitsänderung durch Manöver am Ende der Mission, was einen Sicherheitsspielraum für auftretende Fehler oder Ungenauigkeiten in der Berechnung der Flugbahn bietet.

PLATO berechnete zunächst eine Trajektorienfamilie namens Local Optimum Family (LOF), die allerdings nur ein relativ kleines Zeitfenster für den Start zuließ (vom 06.10.1997 bis 23.10.1997). Deshalb wurde eine Lösungsfamilie mit einem längeren Zeitfenster gesucht und es wurde die Global Optimum Family (GOF) gefunden, die sich von der LOF vor allem in einem späteren Venus-1-Gravity-Assist unterschied. Die GOF benötigte allerdings ein deutlich höheres  $C_3$ , was die Titan IV-Rakete nicht erreichen konnte. Daher hätte man für diese Trajektorienfamilie die Huygens-Sonde aus der Mission entfernen müssen und viele geplante Messungen hätten nicht durchgeführt werden können. Zusätzlich zeigten weitere Untersuchungen der GOF, dass ein hohes  $C_3$  eher ineffizient ist, da bei steigendem  $C_3$  das interplanetare  $\Delta V$  nur langsam sinkt.

## 2.2 Die VVEJGA-Flugbahn

Weitere Untersuchungen führten schließlich zu einer Flugbahn, die sich von LOF und GOF vor allem durch den Zeitpunkt des ersten Venus-Gravity-Assists unterschied. Sie heißt VVEJGA (Venus Venus Erde Jupiter Gravity-Assist) und ist auf Abb. 1 dargestellt. VVEJGA kommt mit realisierbaren  $C_3$ -Werten aus und nutzt zwei Gravity-Assists an der Venus und jeweils einen an der Erde und einen am Jupiter aus. Diese Flugbahn wurde letztendlich auch gewählt, da sie ein für den Start vorteilhaftes Zeitfenster vom 06.10.1997 bis zum 04.11.1997 vorsah, die gewünschte Ankunft im Juli 2004 ermöglichte und nur 6,7 Jahre benötigte [4].

---

<sup>2</sup>(PLANetary Trajectory Optimization)

### 3 Gravity-Assists

Bevor Gravity-Assists (GA) Anwendung fanden, erfolgte die gezielte Beschleunigung und Steuerung von Raumfahrzeugen ausschließlich über Reaktionsantriebe [5]. Diese Art von Antrieb stößt Masse mit einer hohen Geschwindigkeit aus, wodurch das Raumfahrzeug gemäß dem Impulserhaltungssatz beschleunigt wird [6]. Dieser Effekt wurde erstmals von Tsiolkovsky [7] durch die Gleichung

$$v = v_1 \ln \left( \frac{M_1 + M_2}{M_1 + M} \right) \quad (1)$$

mathematisch beschrieben. Dabei ist  $v$  die Geschwindigkeit der Rakete,  $v_1$  die Austrittsgeschwindigkeit des Treibstoffes,  $M_1$  die Masse des Raumfahrzeugs ohne den Treibstoff,  $M_2$  die Masse des zu Beginn vorhandenen Treibstoffes und  $M$  die Masse des noch nicht verbrannten Treibstoffes. Die Gleichung zeigt, dass die für eine Geschwindigkeitsänderung  $\Delta v$  benötigte Treibstoffmenge exponentiell mit dem gewünschten  $\Delta v$  relativ zur Austrittsgeschwindigkeit  $v_1$  wächst. Daraus folgt, dass mit steigenden  $\Delta v$  der Anteil der Nutzlast an der Gesamtmasse sinkt.

Hinzu kommt, dass das theoretische Maximum der Austrittsgeschwindigkeit des Treibstoffes chemischer Triebwerke bei etwa  $4,5 \frac{km}{s}$  liegt.

Diese Einschränkungen führten dazu, dass die äußeren Planeten mit konventionellen Raketentriebwerken nahezu unerreichbar waren. Durch die Nutzung von GAs konnten diese Hindernisse jedoch überwunden werden [5].

Im weiteren Verlauf werden daher die theoretischen Grundlagen eines GAs erklärt.

#### 3.1 Physik des Gravity-Assists

Ein GA ist ein Vorgang, bei dem die Richtung und heliozentrische Geschwindigkeit eines Raumfahrzeugs durch die Gravitation eines Planeten verändert wird. Dabei bewegt sich das Raumfahrzeug durch die Einflussphäre des Planeten, tritt aber nicht in einen Orbit ein und kommt nicht auf dem Planeten auf [8].

Im Folgenden wird basierend auf dem Paper von P. Berg [9] ein vereinfachter zweidimensionaler GA betrachtet, in dem die Richtung des Geschwindigkeitsvektors eines Raumfahrzeugs um  $90^\circ$  relativ zum Planeten gedreht wird, um das Konzept zu erklären.

Der GA wird im Weiteren parallel in einem planetozentrischen und einem heliozentrischen Koordinatensystem betrachtet. Um zwischen den beiden Koordinatensystemen zu unterscheiden, werden Vektoren im heliozentrischen Koordinatensystem mit Apostrophen gekennzeichnet (also  $\vec{v}'$ ) und im planetozentrischen ohne (also  $\vec{v}$ ). Dabei wird angenommen, dass  $m \ll M$ , wobei  $m$  die Masse des Raumfahrzeugs und  $M$  die Masse des Planeten ist. Außerdem wird vereinfachend angenommen, dass der GA von so kurzer Dauer ist, dass die Bahn des Planeten in dieser Zeit annähernd geradlinig verläuft.

Das Raumfahrzeug hat beim Annähern an den Planeten im planetozentrischen Bezugssystem einen Geschwindigkeitsvektor von  $\vec{u}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ u_m^i \end{pmatrix}$ , der im Verlauf des GAs durch die Gravitation des Planeten um  $90^\circ$  im Uhrzeigersinn gedreht wird. Sein Geschwindigkeitsvektor verändert sich im Laufe des GAs also zu  $\vec{v}_m = \begin{pmatrix} u_m^i \\ 0 \end{pmatrix}$ . Dies ist eine Schlussfolgerung aus der Energieerhaltung, da die kinetische Energie des Raumfahrzeugs vor und nach dem GA den gleichen Wert betragen muss.

Die Betrachtung eines GAs im planetozentrischen Koordinatensystem zeigt also bereits eine Richtungsänderung an. Allerdings ist  $|\vec{v}_m| = |\vec{u}_m|$  und damit keine Änderung des Betrags der Geschwindigkeit in diesem Bezugssystem zu erkennen. Daher wird derselbe Vorgang nun im heliozentrischen Koordinatensystem betrachtet.

Um Vektoren vom planetozentrischen ins heliozentrische Koordinatensystem zu transferieren, wird zu den Geschwindigkeitsvektoren des Planeten und des Raumfahrzeugs der Vektor  $\vec{u}_p = \begin{pmatrix} u_p \\ 0 \end{pmatrix}$  addiert, da sich der Planet im heliozentrischen Koordinatensystem im Verlauf des GAs annähernd geradlinig in positiver  $x$ -Richtung mit dem Geschwindigkeitsvektor  $\vec{u}_M = \begin{pmatrix} u_p \\ 0 \end{pmatrix}$  bewegt. Somit hat das Raumfahrzeug vor dem GA einen Geschwindigkeitsvektor von  $\vec{u}_m = \begin{pmatrix} u_p \\ u_m^i \end{pmatrix}$  und nach dem GA einen Geschwindigkeitsvektor von  $\vec{v}_m = \begin{pmatrix} u_m^i + u_p \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Daraus folgt, dass sich die heliozentrische Geschwindigkeit des Raumfahrzeugs im Verlauf des GAs um

$$\Delta u_m = |\vec{v}_m| - |\vec{u}_m| = u_m^i + u_p - \sqrt{(u_p)^2 + (u_m^i)^2} \quad (2)$$

verändert. Im Falle von  $u_m^i = u_p$  ist dann  $\Delta u_m \approx 0,59 u_m^i$ .

Neben den bereits genannten Faktoren (also  $M$ ,  $\vec{u}_m$  und  $\vec{u}_p$ ) haben noch der Abstand des Raumfahrzeugs zum Planeten während des GAs, der Eintreffwinkel des Raumfahrzeugs und die Seite des Planeten, auf der man den GA durchführt, einen Einfluss auf  $\Delta u_m$  und den Winkel, mit dem es von seiner ursprünglichen Bahn abgelenkt wird. Diese in dieser Erklärung zu berücksichtigen würde aber in diesem Kontext zu weit führen.

In der vorhergehenden Betrachtung wurden die Effekte des GAs auf den Planeten nicht betrachtet, wodurch der Eindruck entstehen könnte, dass die Energie- und Impulserhaltung missachtet wurden. Allerdings sind die Änderungen der kinetischen Energie und des Impulses des Planeten praktisch nicht messbar und die Größen bleiben nahezu unverändert, da  $m \ll M$  gilt. Deshalb werden die Erhaltungssätze nicht gebrochen.

Zusammenfassend verändert ein GA also die Richtung und die Größe des Geschwindigkeitsvektors eines Raumfahrzeugs durch die Gravitation eines Planeten, indem ein Austausch von kinetischer Energie zwischen dem Raumfahrzeug und dem Planeten durch die wirkenden Gravitationskräfte stattfindet.

## 4 Modell

Im Folgenden wird zunächst das Euler- und das darauf aufbauende Runge-Kutta-Verfahren basierend auf „Ordinary Differential Equations (ODEs) Initial-Value Problems“ von Kong et al. [10] erklärt. Anschließend wird der Simulationscode beschrieben, der auf numerischer Integration mit dem Runge-Kutta-Verfahren RK5(4) basiert.

### 4.1 Euler-Verfahren

Das Euler-Verfahren ist ein einfaches Verfahren zur numerischen Integration von Differentialgleichungen. Dabei ist für ein  $y(t_n)$  die Ableitung  $y'(t_n)$  bekannt. Der nächste Näherungswert  $y(t_{n+1})$  wird mit

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \Delta t \cdot y'(t_n) \quad (3)$$

und  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  bestimmt. Dieser Schritt kann beliebig oft wiederholt werden, um die Funktion  $y(t)$  näherungsweise zu bestimmen.

Ein Nachteil dieser Methode ist allerdings, dass für den gesamten Zeitschritt  $\Delta t$  dieselbe Steigung angenommen wird. Dadurch wird das Ergebnis bei Funktionen, die in diesem Zeitschritt nicht annähernd linear verlaufen, relativ ungenau. Außerdem basiert der Wert  $y(t_{n+2})$  dann auf dem bereits fehlerbehafteten Wert  $y(t_{n+1})$ , sodass sich die Ungenauigkeit der Methode mit zunehmender Schrittzahl  $n$  deutlich erhöht [11].

### 4.2 Runge-Kutta-Verfahren

Das Euler-Verfahren kann auch als Runge-Kutta-Verfahren (RKV) 1. Ordnung bezeichnet werden. RKV höherer Ordnung können die Ungenauigkeiten vor allem in der Berechnung von nicht-linearen Funktionen gegenüber dem Euler-Verfahren deutlich reduzieren. Dies wird dadurch erreicht, dass mehrere Wegpunkte und ihre Steigungen in einem Zeitschritt berücksichtigt werden.

Dabei geht das RKV der vierten Ordnung folgendermaßen vor:

Wieder ist für ein  $y(t_n)$  die Ableitung  $y'(t_n) = \frac{dy(t_n)}{dt} = f(t_n, y(t_n))$  bekannt.

Zunächst wird die Steigung

$$k_1 = f(t_n, y(t_n)) \quad (4)$$

bei  $y(t_n)$  bestimmt. Mit dieser Steigung wird dann ein Zwischenwert  $y(t_n + \frac{\Delta t}{2})$  berechnet und damit die Steigung

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y(t_n) + k_1 \cdot \frac{\Delta t}{2}\right) \quad (5)$$

in der Mitte des Zeitschritts abgeschätzt. Analog dazu wird ein weiterer Zwischenwert für



$y(t_{n+\frac{\Delta t}{2}})$  mithilfe von  $k_2$  berechnet und damit die Steigung

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y(t_n) + k_2 \cdot \frac{\Delta t}{2}\right) \quad (6)$$

bestimmt. Schließlich wird mit  $k_3$  ein Wert für  $y(t_{n+\Delta t})$  berechnet und dort die Steigung

$$k_4 = f(t_n + \Delta t, y(t_n) + k_3 \cdot \Delta t) \quad (7)$$

bestimmt.

Aus diesen Berechnungen folgen also die vier berechneten Steigungswerte  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  und  $k_4$ . Diese werden dann so gewichtet, dass sie eine gute Annäherung an die tatsächliche Lösung liefern:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \frac{\Delta t}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (8)$$

### 4.3 Numerische Integration im Programmcode

Die Simulation nutzt das RKV der Ordnung 5(4), das aus der Python-Bibliothek SciPy [12] als Funktion `solve_ivp()` [13] importiert wird. In dem Verfahren [14][15] wird zunächst mit dem RKV der fünften Ordnung  $y^{(5)}(t_{n+1})$  berechnet. Dann wird in demselben Schritt mit einem RKV der vierten Ordnung  $y^{(4)}(t_{n+1})$  berechnet und die Differenz

$$\epsilon = |y^{(5)}(t_{n+1}) - y^{(4)}(t_{n+1})| \quad (9)$$

bestimmt. Überschreitet die Differenz, bzw. der geschätzte Fehler, den Wert

$$\epsilon_{max} = atol + rtol \cdot |y^{(5)}(t_{n+1})|, \quad (10)$$

wird die Schrittweite  $\Delta t$  angepasst, sodass  $\epsilon < \epsilon_{max}$  ist. Dabei bestimmt die relative Toleranz `rtol` die relative Genauigkeit und die absolute Toleranz `atol` die absolute Genauigkeit.

Zusätzlich wird eine maximale Schrittweite  $\Delta t_{max}$  festgelegt, sodass der Integrator auch dann keine größere Schrittweite wählen darf, wenn der geschätzte Fehler kleiner als  $\epsilon_{max}$  ist.

Zur Berechnung von Cassinis Flugbahn müssen der Funktion `solve_ivp()` die relative und die absolute Toleranz sowie die maximale Schrittweite vorgegeben werden. Daher wurden einige Versuche mit verschiedenen Kombinationen von Toleranzen und maximalen Zeitschritten für den Zeitraum vom 1. Januar 1998 bis zum 2. Mai 1998 durchgeführt<sup>3</sup>. Ein Auszug dieser Ergebnisse ist in Tab. 1 zu finden. Darin ist zu erkennen, dass im Rahmen der getesteten Kombinationen das genaueste Ergebnis mit den relativen und absoluten Toleranzen  $rtol = 10^{-11}$  und  $atol = 10^{-14}$  und einer maximalen Schrittweite

<sup>3</sup>Also ein Zeitraum, in dem sowohl eine interplanetare Reisephase als auch ein GA liegt [16].

von  $\Delta t_{max} = 0.1$  Tagen erreicht wurde. Daher wird diese Kombination auch in der gesamten Simulation verwendet.

## 4.4 Simulation

Das Modell wurde in der Entwicklungsumgebung Windsurf in Python implementiert. Dabei wurde sowohl auf in Windsurf integrierte KI-Modelle [KI.1] sowie auf Deepseek [KI.2], Chat-GPT [KI.3] und Grok [KI.4] zugegriffen.

Mit Ausnahme der Masse Cassinis [3], der GM-Werte<sup>4</sup> der Planeten und ihrer Baryzentren, des GM-Wertes der Sonne [17] und der  $\Delta V$ -Manöverdaten [18], sind alle Daten mithilfe von Spiceypy [19] aus SPICE [20] entnommen.

Die Simulation wird innerhalb des J2000 ekliptikalen Bezugssystems [21] mit der Sonne als Ursprung im Zeitraum vom 1. Januar 1998 bis zum 1. Januar 2004 durchgeführt. Dieser Zeitraum wurde bewusst so gewählt, dass nur die interplanetare Flugbahn Cassinis und die GAs an Venus, Erde und Jupiter betrachtet werden, während Start und Umlauf um den Saturn am Ende der Mission ausgeklammert bleiben [16]. Dieser Zeitraum wird in mehrere Segmente unterteilt, die jeweils durch die durchgeführten Triebwerkszündungen abgegrenzt sind. Außerdem werden die Position der Sonde zum Startzeitpunkt und die Zustandsvektoren der Planeten im Sonnensystem sowie die Position der Sonne von SPICE<sup>5</sup> abgefragt. Aus diesen Positionsdaten wird dann für die betreffenden Himmelskörper jeweils der Abstand

$$r = \sqrt{(\Delta x_{\text{Cassini-Körper}})^2 + (\Delta y_{\text{Cassini-Körper}})^2 + (\Delta z_{\text{Cassini-Körper}})^2} \quad (11)$$

zur Sonde berechnet. Anhand dieses Abstands lässt sich die Gravitationskraft auf die Sonde

$$F_{G_{\text{Cassini}}} = G \cdot \frac{m_{\text{Körper}} \cdot m_{\text{Cassini}}}{r^2} \quad (12)$$

bestimmen. Die  $x$ -Komponente dieser Kraft wird anschließend mit

$$F_{G_x} = F_{G_{\text{Cassini}}} \cdot \frac{x_{\text{Körper}} - x_{\text{Cassini}}}{r} \quad (13)$$

ermittelt. Mit ihr lässt sich die Beschleunigung

$$a_x = \frac{F_{G_x}}{m_{\text{Cassini}}} \quad (14)$$

berechnen. Diese Beschleunigung  $a_x$  wird dann verwendet, um die neue Geschwindigkeit

$$v_{x,neu} = v_{x,alt} + a_x \cdot \Delta t \quad (15)$$

---

<sup>4</sup>Standardgravitationsparameter

<sup>5</sup>SPICE (Spacecraft, Planet, Instrument, C-matrix, Events) ist ein von der NASA entwickeltes System zum Bereitstellen von vielfältigen Informationen über Messungen, Himmelskörper, etc. [22].

zu bestimmen und daraus die neue Position

$$x_{neu} = x_{alt} + v_{x,neu} \cdot \Delta t \quad (16)$$

nach einem Zeitschritt der Dauer  $\Delta t$  zu berechnen. Analoges Vorgehen erfolgt in  $y$ - und  $z$ -Richtung. Die Abfolge dieser Berechnungen wird über die gesamte Dauer des Segments wiederholt. Anschließend wird die durch ein Manöver verursachte Geschwindigkeitsänderung zur aktuellen Geschwindigkeit von Cassini addiert, und die numerische Integration im nächsten Segment fortgeführt. Dieser Vorgang wiederholt sich solange, bis das Ende des zu simulierenden Zeitraums erreicht ist. Eine vereinfachte Darstellung des Simulationsablaufs zwischen zwei Manövern zeigt Abb. 2.

## 4.5 Annahmen und Vereinfachungen

Im Modell werden einige Annahmen und Vereinfachungen getroffen, um die Komplexität der Simulation zu begrenzen. So werden die Sonne und die Planeten des Sonnensystems als Punktmassen betrachtet. Mars, Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun werden zudem als Baryzentren modelliert. Die Manöver werden als instantane Geschwindigkeitsänderungen dargestellt, da sie im Vergleich zur Gesamtdauer der Simulation nur relativ kurz andauern<sup>6</sup>. Außerdem wird neben den Triebwerkszündungen nur die Gravitationskraft auf Cassini berücksichtigt.

## 4.6 Rekonstruktion der Manöver

Die NASA stellt Daten zu Cassinis Position, Geschwindigkeit, Masse vor und nach Manövern [20] sowie den Betrag der Geschwindigkeitsänderung durch Triebwerkszündungen [18] zur Verfügung. Allerdings ist die Richtung dieser Geschwindigkeitsänderung nicht direkt angegeben. Daher müssen diese Daten vor der Durchführung der Simulation gesondert berechnet werden.

Dazu wird  $\vec{v}_{vor}$  und  $\vec{v}_{nach}$  für das Manöver von SPICE abgefragt, um die Geschwindigkeitsänderung

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_{nach} - \vec{v}_{vor} \quad (17)$$

zu bestimmen. Die Richtung von  $\Delta \vec{v}$  entspricht dabei näherungsweise der durch das Manöver verursachten Richtungsänderung [24]. Damit die berechnete Richtungsänderung möglichst genau ist, wird das Zeitfenster  $\Delta t$  so gewählt, dass es den gesamten Zeitraum der Triebwerkszündung umfasst und trotzdem möglichst klein bleibt. Schließlich sollen die während dieses Zeitraums wirkenden Gravitationskräfte nur einen vernachlässigbaren Einfluss auf die Richtungsänderung haben. Abschließend wird  $\Delta \vec{v}$  auf den bekannten Betrag der Geschwindigkeitsänderung des Manövers skaliert, während die berechnete Richtung beibehalten wird.

---

<sup>6</sup>Das längste Manöver (Deep Space Maneuver) im Simulationszeitraum dauerte etwa 88 Minuten [23].

## 5 Vergleich der Simulation mit der tatsächlichen Flugbahn

Die Abb. 3 und 4 stellen die simulierte Trajektorie der tatsächlichen Flugbahn gegenüber. Diese Ergebnisse werden im Folgenden zunächst qualitativ verglichen. Danach wird eine Berechnung der Abweichungen durchgeführt und analysiert, was die Abweichungen bewirkt haben könnte und wie man die Simulation verbessern kann.

### 5.1 Qualitativer Vergleich

Die Abb. 3 und 4 zeigen, dass die simulierte Flugbahn bis zum ersten Venus-GA relativ gut mit der tatsächlichen Trajektorie übereinstimmt. Danach divergieren die beiden Bahnen deutlich: Die simulierte Sonde tritt in einen Orbit um die Sonne ein, während die tatsächliche Trajektorie einen weiteren Venus-GA, einen Erde-GA und einen Jupiter-GA zeigt und schließlich am Saturn endet. Dies zeigt, dass die Simulation die tatsächliche Flugbahn bis zum ersten GA zuverlässig nachbildet, die nachfolgenden GAs aber nicht mehr erfasst. Wird jedoch jeder GA separat simuliert<sup>7</sup>, so lässt sich in den Abb. 5 bis 8 erkennen, dass das Modell die einzelnen GAs relativ gut simuliert. Es lassen sich sogar die Richtungsänderungen durch die GAs in den Grafiken erkennen und die simulierte und die tatsächliche Flugbahn sind fast deckungsgleich. Aufgrund dieser sehr verschiedenen Ergebnisse werden im Folgenden der interplanetare Transfer in Verbindung mit dem ersten GA und die einzelnen GAs separat analysiert.

### 5.2 Berechnung der Abweichungen des ersten interplanetaren Transfers in Verbindung mit dem ersten Gravity-Assist

Bis zum 26. März 1998, also einen Monat vor dem ersten GA [16], beträgt das durchschnittliche Positionsfehlerwachstum  $132,00 \frac{km}{Tag}$  und die durchschnittliche Geschwindigkeitsabweichung  $1,57 \frac{m}{s}$ . Dies entspricht einem relativen Geschwindigkeitsfehler von etwa 0,0041% und zeigt, dass die Simulation bis zum ersten GA sehr genau arbeitet.

Im Gegensatz dazu zeigt die Simulation im weiteren Verlauf im Zeitraum um den ersten GA (vom 26. März bis zum 26. Mai 1998) mit einem durchschnittlichen Positionsfehlerwachstum von  $349633,69 \frac{km}{Tag}$  und einem durchschnittlichen Geschwindigkeitsfehler von  $6566,28 \frac{m}{s}$  (entspricht einem relativen Geschwindigkeitsfehler von 15,9356%) eine sehr große Abweichung von der tatsächlichen Flugbahn.

Nach dem ersten GA ist eine weiterführende Fehlerberechnung einer durchgehenden Simulation nicht mehr aussagekräftig, da die simulierte Sonde in einen Orbit um die Sonne übergeht, während die reale Sonde ihren interplanetaren Transfer zum Saturn fortführt.

---

<sup>7</sup>Hier wurde ein Zeitfenster von einem Monat vor bis einen Monat nach dem jeweiligen GA gewählt.

### 5.3 Berechnung der Abweichungen der einzelnen Gravity-Assists

Simuliert man allerdings denselben Zeitraum um den ersten GA (vom 26. März bis zum 26. Mai 1998) mit korrekten SPICE-Startwerten separat, so liegt das durchschnittliche Positionsfehlerwachstum nur bei  $11916,43 \frac{\text{km}}{\text{Tag}}$  und die durchschnittliche Geschwindigkeitsabweichung bei  $237,13 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  (entspricht einem relativen Geschwindigkeitsfehler von  $0,5586\%$ ). Diese durchschnittliche Geschwindigkeitsabweichung beträgt also nur ca.  $3,6\%$  der Abweichung des kontinuierlich simulierten ersten Venus-GAs.

Der separat simulierte GA weist deutlich geringere Abweichungen auf, da er mit korrekten SPICE-Startwerten beginnt und somit nicht durch die während des interplanetaren Transfers aufgetretenen Fehler beeinflusst wird. Beim kontinuierlich simulierten GA hingegen führen die im Transfer angesammelten Positions- und Geschwindigkeitsfehler zu ungenauen Anfangsbedingungen und damit zu einer deutlich größeren Abweichung.

Ein ähnliches Verhalten zeigt sich bei den drei anderen GAs. Die Ergebnisse der Fehlerberechnungen der einzelnen separat simulierten GAs sind in Tab. 2 dargestellt. Daraus lässt sich schließen, dass die Simulation für kurze Zeiträume eine hohe Genauigkeit erreicht, für längere Zeiträume aber nicht geeignet ist.

### 5.4 Mögliche Ursachen der Abweichungen

Zunächst ist festzuhalten, dass bereits sehr kleine Abweichungen in numerischen Integrationen über lange Zeiträume zu sehr großen Fehlern führen können. Schließlich baut jeder Zeitschritt auf dem vorherigen auf, was zu einer Fortpflanzung der Fehler führt<sup>8</sup>. Diese Abweichungen können unterschiedliche Auslöser haben, die sich in numerische Ursachen und in modellbedingte Vereinfachungen einteilen lassen.

Der numerische Fehleranteil setzt sich aus Rundungsfehlern [25] sowie aus der vorher angesprochenen Fortpflanzung der Fehler zusammen. Dies stellt vor allem bei GAs eine bedeutende Fehlerquelle dar, wie aus den Simulationsergebnissen hervorgeht, da zu diesen Zeitpunkten sehr große Kräfte wirken, die dann aufgrund fehlerbehafteter Startwerten zu erheblichen Abweichungen führen.

Die andere Fehlerkomponente besteht im Vernachlässigen oder Vereinfachen verschiedener physikalischer Effekte. Darunter fallen zum Beispiel der Strahlungsdruck der Sonne [26], thermische Rückstoßeffekte [27] sowie elektromagnetische Kräfte auf geladene Komponenten der Sonde [28].

Außerdem wird bei der Rekonstruktion und Modellierung der Manöver angenommen, dass sich die Sonde im Zeitraum des Manövers ohne eine Triebwerkszündung annähernd linear fortbewegt hätte. Da sich Cassini aber nicht unbedingt linear in diesen Zeiträumen bewegt, wird hier eine weitere Ungenauigkeit in Kauf genommen. Hinzu kommt, dass die Manöver als plötzliche Geschwindigkeitsänderung modelliert werden, während sie in der Realität nicht instantan sondern kontinuierlich auftreten.

---

<sup>8</sup>Darauf wurde bereits in Abschnitt 4.1 hingewiesen.

Darüber hinaus werden die Planeten als Punktmassen anstelle von realen Masseverteilungen modelliert und kleinere Himmelskörper wie zum Beispiel Zwergplaneten werden nicht berücksichtigt.

## 5.5 Verbesserungsmöglichkeiten

Die offensichtlichen Verbesserungsmöglichkeiten umfassen vor allem die Berücksichtigung der oben genannten physikalischen Effekte, wie etwa der Strahlungsdruck der Sonne, thermische Rückstoßeffekte und elektromagnetische Kräfte auf geladene Komponenten der Sonde. Außerdem könnte man die Planeten als kontinuierliche Massenverteilungen anstelle von Punktmassen bzw. Baryzentren modellieren. Auch die Einbeziehung kleinerer Himmelskörper sowie die explizite Simulation der Monde als eigenständige Körper könnte die Genauigkeit des Modells erhöhen.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, genauere Daten für die Manöver zu verwenden. Dazu kann man zum Beispiel die Flugbahn Cassinis im Zeitraum eines Manövers unter Vernachlässigung der Manövereffekte aber unter Berücksichtigung der Gravitationskräfte modellieren. Aus dem Unterschied zwischen der tatsächlichen und der modellierten Flugbahn lässt sich dann die Richtungsänderung durch ein Manöver genauer bestimmen. Außerdem kann man die Manöver als kontinuierliche Geschwindigkeitsänderungen modellieren.

Eine weitere Reduktion der Toleranzen und der maximalen Schrittweite wäre jedoch problematisch. Schließlich steigt durch die daraus resultierende zusätzliche Anzahl an Schritten der Rundungsfehler weiter an. Dies lässt sich auch im Vergleich der Zeilen 1 und 4 in Tab. 1 erkennen. Dort ist die maximale Schrittweite von Zeile 4 nur ein Hundertstel der maximalen Schrittweite von Zeile 1, das Ergebnis von Zeile 4 aber ca. 8,3% ungenauer als das von Zeile 1. Die Genauigkeit einer numerischen Integration lässt sich daher durch das Absenken der Toleranzen und der maximalen Schrittweite nur bis zu dem Punkt verbessern, an dem der durch zusätzliche Rundungsfehler verursachte Genauigkeitsverlust den Gewinn durch die präzisere Integration überwiegt [25].

## 6 Fazit

Diese Arbeit hat gezeigt, dass eine realitätsnahe Simulation der gesamten Cassini-Huygens-Mission mit einem einfachen Modell, das lediglich Triebwerkszündungen und Gravitationskräfte berücksichtigt, vor allem aufgrund von Rundungsfehlern und der Fehlerfortpflanzung im Laufe der numerischen Integration nicht erreichbar ist. Allerdings hat die Simulation des ersten interplanetaren Transfer und vor allem der einzelnen Gravity-Assists auch gezeigt, dass es durchaus möglich ist, kürzere Zeitabschnitte mit einem solchen Modell zu simulieren und zufriedenstellende Ergebnisse zu erzielen.

Um eine realitätsnahe Simulation der gesamten Mission zu erreichen, ist es nun erforderlich, die genannten Verbesserungsmöglichkeiten umzusetzen. Dann sollte evaluiert werden, inwieweit sich numerische Integration mit dem Runge-Kutta-Verfahren für die Simulation komplexer interplanetarer Trajektorien eignet. Abschließend sollte man überprüfen, inwiefern diese Verbesserungsmöglichkeiten zu einem genaueren Ergebnis beigetragen haben.

## 7 Literaturverzeichnis

- [1] J. Bellerose, „The Cassini Mission: Reconstructing Thirteen Years of the Most Complex Gravity-Assist Trajectory Flown to Date,“ in *Space operations: inspiring humankind's future*, Springer International Publishing, 2019, S. 575–588.
- [2] NASA Science. „Why Cassini Mattered,“ besucht am 7. Okt. 2025. Adresse: <https://science.nasa.gov/mission/cassini/grand-finale/why-cassini-mattered/>
- [3] T. A. Burk, *Cassini Spacecraft Mass Table*, 2018.
- [4] F. Peralta und S. Flanagan, „Cassini interplanetary trajectory design,“ *Control Engineering Practice*, Jg. 3, Nr. 11, S. 1603–1610, 1995.
- [5] M. A. Minovitch, „The invention that opened the solar system to exploration,“ *Planetary and Space Science*, Jg. 58, Nr. 6, S. 885–892, 2010.
- [6] LEIFIphysik. „Raketenphysik | LEIFIphysik,“ besucht am 4. Okt. 2025. Adresse: <https://www.leifiphysik.de/mechanik/impulserhaltung-und-stoesse/grundwissen/raketenphysik>
- [7] K. E. Tsiolkovsky, „Interdependence of the speed of the rocket and the mass of explosion components,“ in *Study of outer space by reaction devices*, 1967, S. 702–710.
- [8] H. Curtis, „Planetary Flyby,“ in *Orbital Mechanics for Engineering Students*, Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005, S. 375–386.
- [9] P. Berg, „The fundamental concepts of the gravity-assist manoeuvre,“ *European Journal of Physics*, Jg. 44, Nr. 2, S. 025 002, 2023.
- [10] Q. Kong, T. Siau und A. M. Bayen, „Chapter 22 - Ordinary Differential Equations (ODEs) Initial-Value Problems,“ in *Python Programming and Numerical Methods*, Academic Press, 2021, S. 371–398.
- [11] L. Evans, „Limitations of Euler's Method for Numerical Integration,“ Massachusetts Institute of Technology (MIT), Technical Report, 2007.
- [12] P. Virtanen et al., „SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python,“ *Nature Methods*, Jg. 17, S. 261–272, 2020.
- [13] SciPy developers. „solve\_ivp - SciPy v1.16.2 Manual,“ besucht am 10. Nov. 2025. Adresse: [https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.solve\\_ivp.html](https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.solve_ivp.html)
- [14] SciPy developers. „RK45 - SciPy v1.16.2 Manual,“ besucht am 3. Nov. 2025. Adresse: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.RK45.html>
- [15] W. H. Press und S. A. Teukolsky, „Adaptive Stepsize Runge-Kutta Integration,“ *Computer in Physics*, Jg. 6, Nr. 2, S. 188–191, 1992.



- [16] NASA Science. „Cassini Trajectory,“ besucht am 3. Nov. 2025. Adresse: <https://science.nasa.gov/resource/cassini-trajectory/>
- [17] Jet Propulsion Laboratory. „Astrodynamic Parameters,“ Solar System Dynamics Group, besucht am 4. Nov. 2025. Adresse: [https://ssd.jpl.nasa.gov/astro\\_par.html](https://ssd.jpl.nasa.gov/astro_par.html)
- [18] D. Roth, S. Hernandez und S. Wagner, „Cassini Navigation Performance Assessment,“ *Deep Space Communications and Navigation Systems Center of Excellence (DESCANSO)*, DESCANSO Design and Performance Summary Series, Nr. 17, S. 87–94, 2021.
- [19] A. M. Annex et al., „SpiceyPy: a Pythonic Wrapper for the SPICE Toolkit,“ *Journal of Open Source Software*, Jg. 5, Nr. 46, S. 2050, 2020.
- [20] NASA Navigation and Ancillary Information Facility (NAIF), *SPICE Toolkit*, Verwendete SPICE-Kernels: naif0012.tls (Schaltsekunden-Kernel), pck00010.tpc (Planetenkonstanten-Kernel), de440.bsp (Planetenephemeriden), co\_1997319\_99311\_i\_cru\_v1.bsp (Cassini Trajektorie - erste Periode), co\_1999312\_01066\_o\_cru\_v1.bsp (Cassini Trajektorie - mittlere Periode), 041014R\_SCPSE\_01066\_04199.bsp (Cassini Trajektorie - letzte Periode), jup365.bsp (Jupiter-Ephemeriden), sat441.bsp (Saturn-Ephemeriden), ura111xl-799.bsp (Uranus-Ephemeriden), nep097.bsp (Neptun-Ephemeriden), mar099.bsp (Mars-Ephemeriden). Abgerufen am 02.11.2025, NASA Jet Propulsion Laboratory, 2018. Adresse: <https://naif.jpl.nasa.gov/naif/>
- [21] Andrew Annex, *SpiceyPy Documentation*, Section 6.4.18: Spacecraft State, 2020, S. 87–88.
- [22] NAIF. „SPICE Concept,“ besucht am 3. Nov. 2025. Adresse: <https://naif.jpl.nasa.gov/naif/spiceconcept.html>
- [23] Jet Propulsion Laboratory. „Cassini-Huygens Mission Status Report,“ besucht am 4. Nov. 2025. Adresse: <https://www.jpl.nasa.gov/news/cassini-huygens-mission-status-report-4/>
- [24] D. Roth, Persönliche Kommunikation, 2025.
- [25] H. Sormann. „Numerische Integration,“ Institut für Theoretische Physik, TU Graz, besucht am 4. Nov. 2025. Adresse: <https://itp.tugraz.at/LV/sormann/numerik/numerik/node6.html>
- [26] L. Zardaín, A. Farrés und A. Puig, „High-fidelity modeling and visualizing of solar radiation pressure: A framework for high-fidelity analysis,“ 2020.
- [27] V. T. Toth und S. G. Turyshev, „Thermal recoil force, telemetry, and the Pioneer anomaly,“ *Physical Review D*, Jg. 79, Nr. 4, 2009.

- [28] A.-A. Y. Ahmed und K. K. Ibrahim, „Electromagnetic effects on the orbital motion of a charged spacecraft,“ *Research in Astronomy and Astrophysics*, Jg. 14, Nr. 5, S. 589–600, 2014.

## 8 KI-Verzeichnis

Anmerkung: Die Chatprotokolle der verwendeten KI-Modelle sind im beiliegenden USB-Stick im Ordner `chat_logs` zu finden. Die Konversationen mit Chat-GPT, Deepseek und Windsurf sind über einen längeren Zeitraum geführt worden, daher sind hier keine genauen Daten aufgelistet. Zudem wurde in Windsurf eine Vielzahl von verschiedenen KI-Modellen verwendet, die allerdings nicht aufgezeichnet wurden.

[**KI.1**] Windsurf, verschiedene Modelle, Windsurf, <https://windsurf.com>,  
September–November 2025

[**KI.2**] DeepSeek, DeepSeek-V3, DeepSeek, <https://chat.deepseek.com>,  
September 2025

[**KI.3**] ChatGPT, GPT-4, OpenAI, <https://chatgpt.com>, September 2025

[**KI.4**] Grok, Grok-3, xAI, <https://grok.com>, 18.09.2025

## 9 Anhang

Die Code-Dateien sind im beiliegenden USB-Stick im Ordner `Simulationscode` zu finden.

Die folgenden Tabellen und Abbildungen wurden eigenständig erstellt. Dabei wurde auf SPICE [20] zugegriffen, um Cassinis tatsächliche Flugbahn und die Positionen der Planeten abzubilden. Außerdem wurden die dokumentierten Zeitpunkte der Gravity-Assists [16] verwendet.

Tabelle 1: Vergleich verschiedener Integrator-Konfigurationen im Zeitraum 1. Januar 1998 bis 2. Mai 1998

Nr.	rtol	atol	Max. Schrittweite (in Tagen)	Positionsfehler (in km)
1	$10^{-11}$	$10^{-14}$	0.1	120697.97
2	$10^{-8}$	$10^{-11}$	0.1	127480.18
3	$10^{-11}$	$10^{-14}$	0.01	128648.00
4	$10^{-11}$	$10^{-14}$	0.001	130964.37
5	$10^{-5}$	$10^{-8}$	1.0	157307.16

Tabelle 2: Fehleranalyse der einzelnen Gravity-Assists (Zeitraum der Simulation und Analyse: Jeweils ein Monat vor bis ein Monat nach dem GA)

GA	Ø-Positions- fehlerwachstum (in $\frac{\text{km}}{\text{Tag}}$ )	Ø-Geschwindigkeits- fehler (in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ )	Relativer Geschwindigkeitsfehler (in %)
Venus GA 1	11916,43	237,13	0,5586
Venus GA 2	1733,73	89,65	0,1988
Earth GA	50908,68	1116,51	2,9561
Jupiter GA	63,41	0,73	0,0056

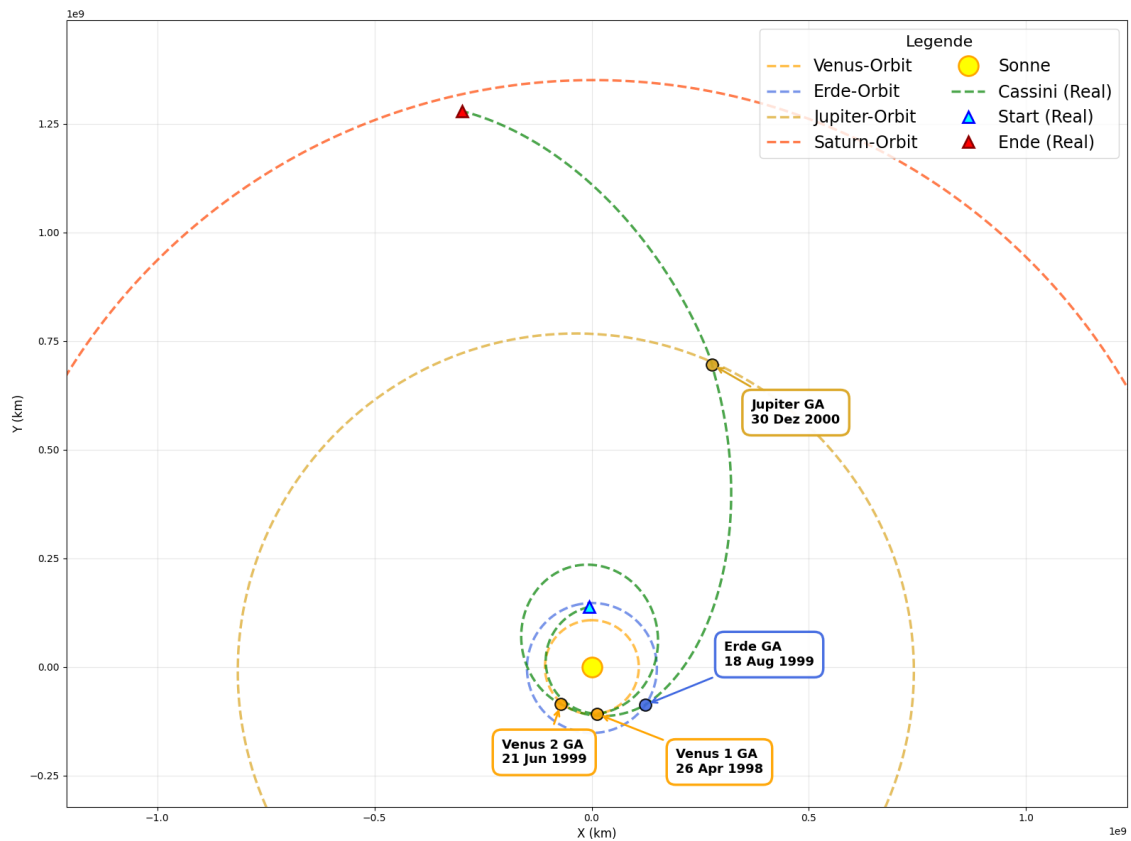


Abbildung 1: VVEJGA-Trajektorie

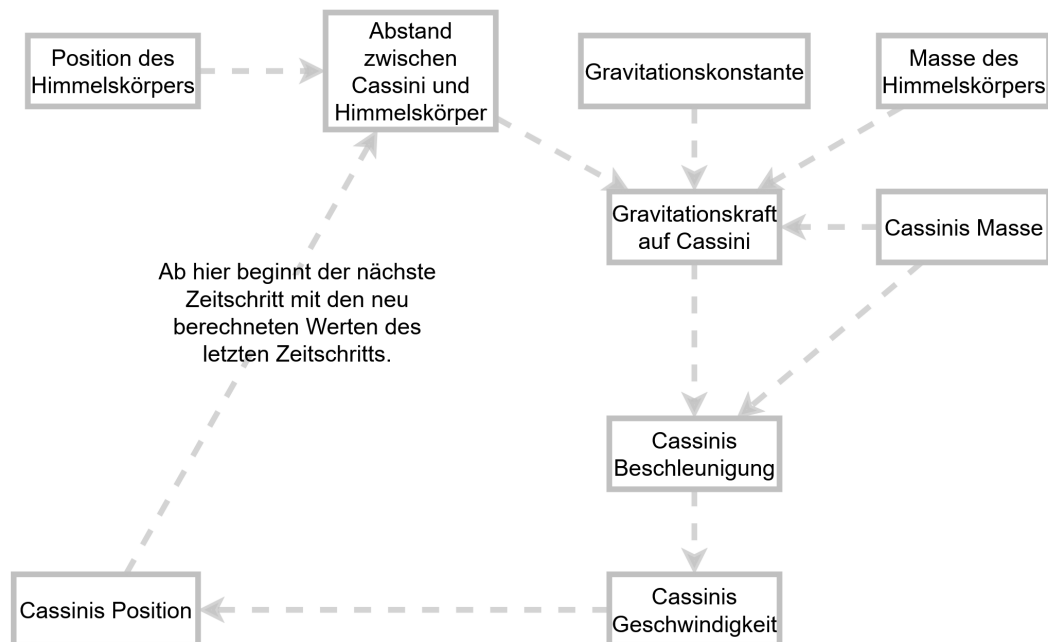


Abbildung 2: Vereinfachter Simulationsvorgang zwischen zwei Manövern

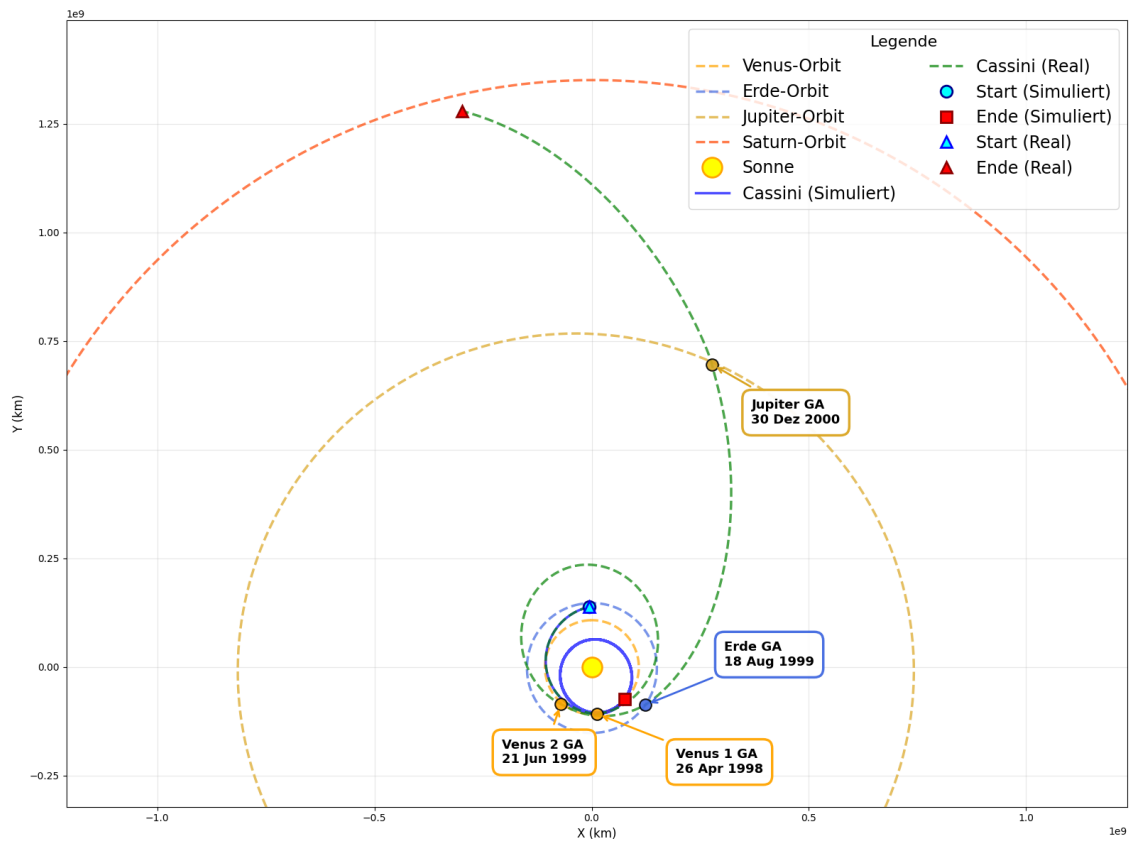


Abbildung 3: Simulierte Cassini-Trajektorie im Vergleich zur tatsächlichen Flugbahn

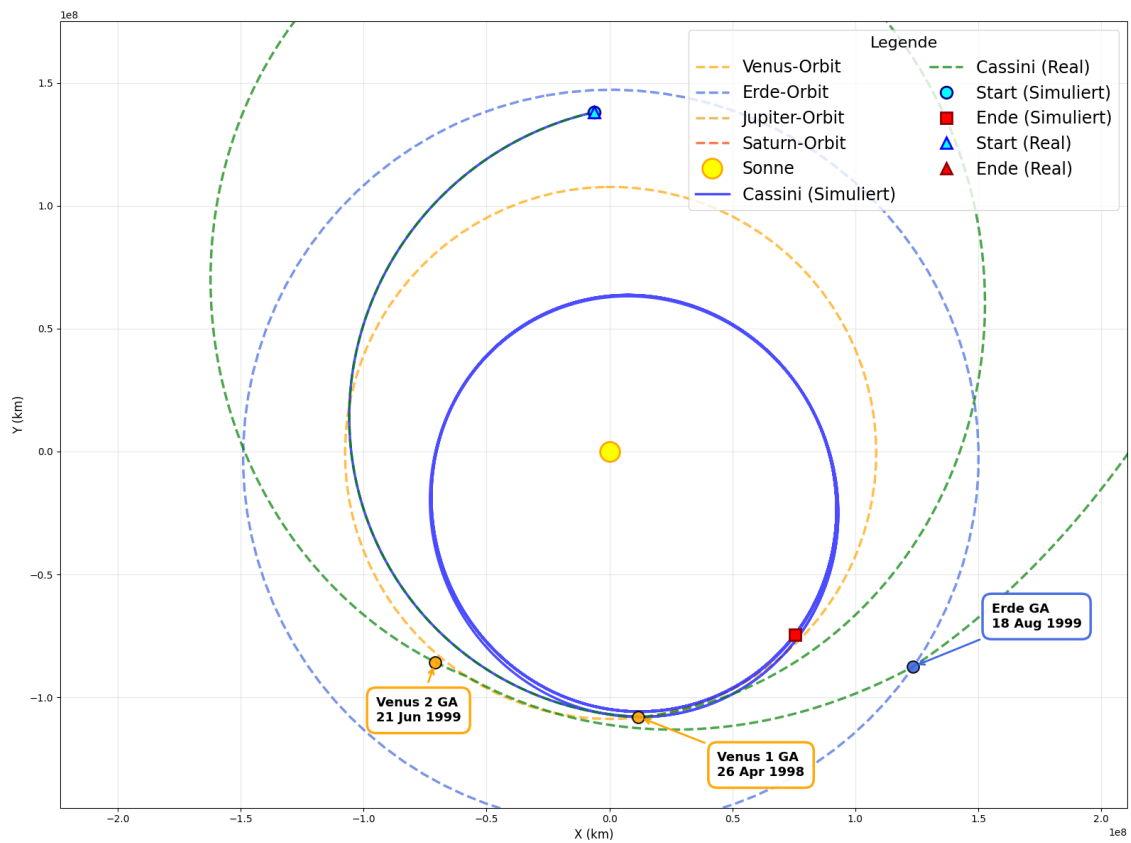


Abbildung 4: Fokussierte Ansicht der simulierten Cassini-Trajektorie im Vergleich zur tatsächlichen Flugbahn

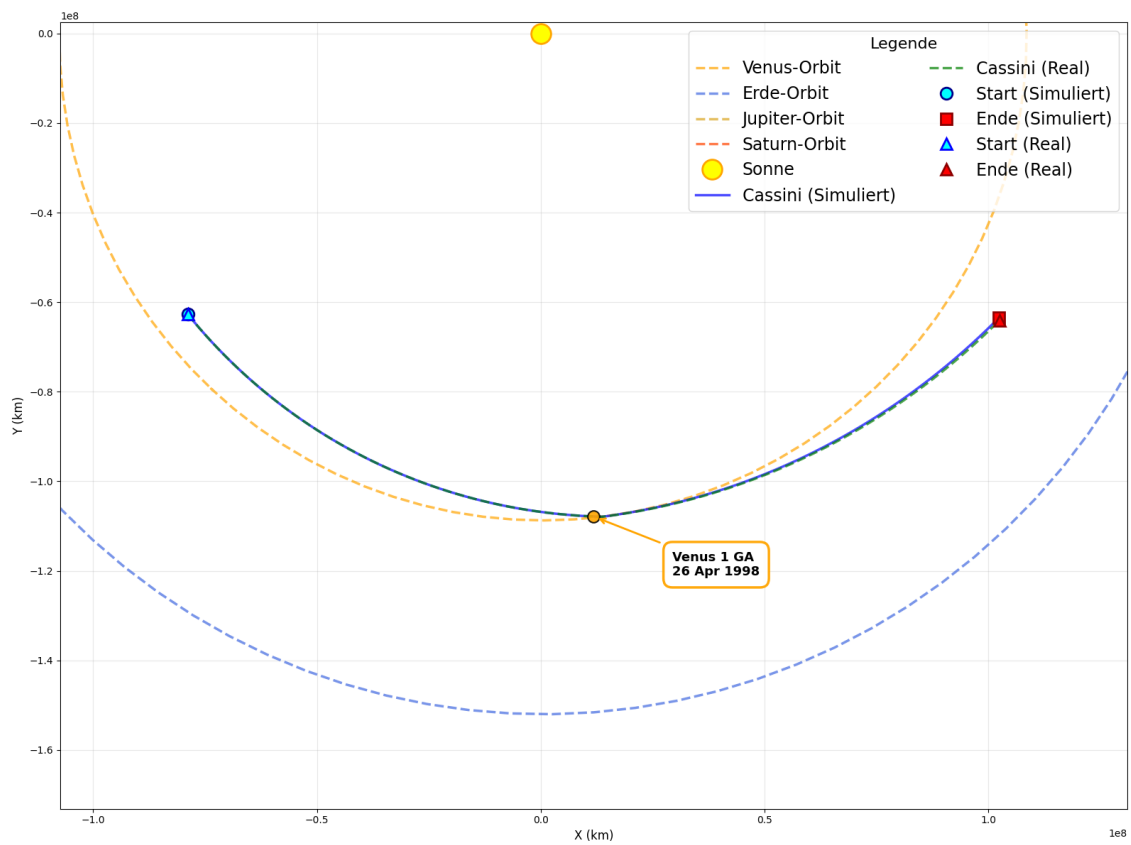


Abbildung 5: Der 1. Venus-Gravity-Assist

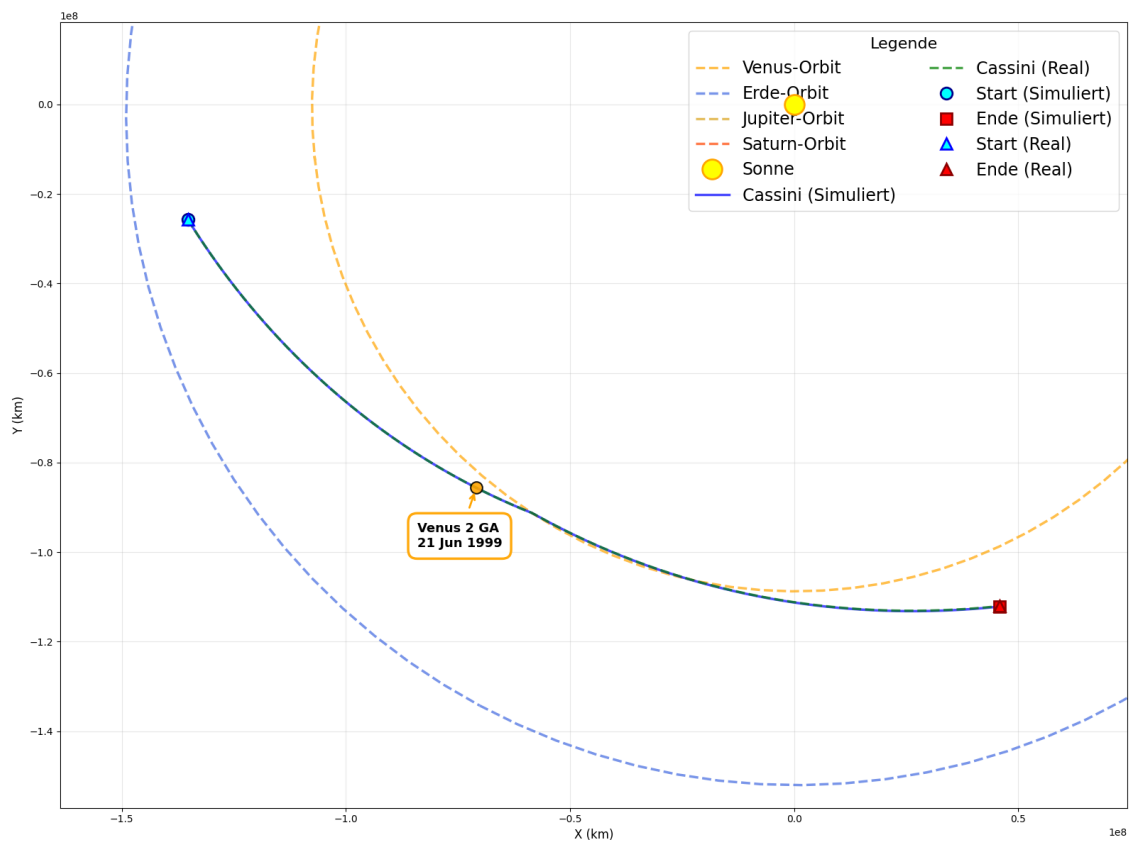


Abbildung 6: Der 2. Venus-Gravity-Assist

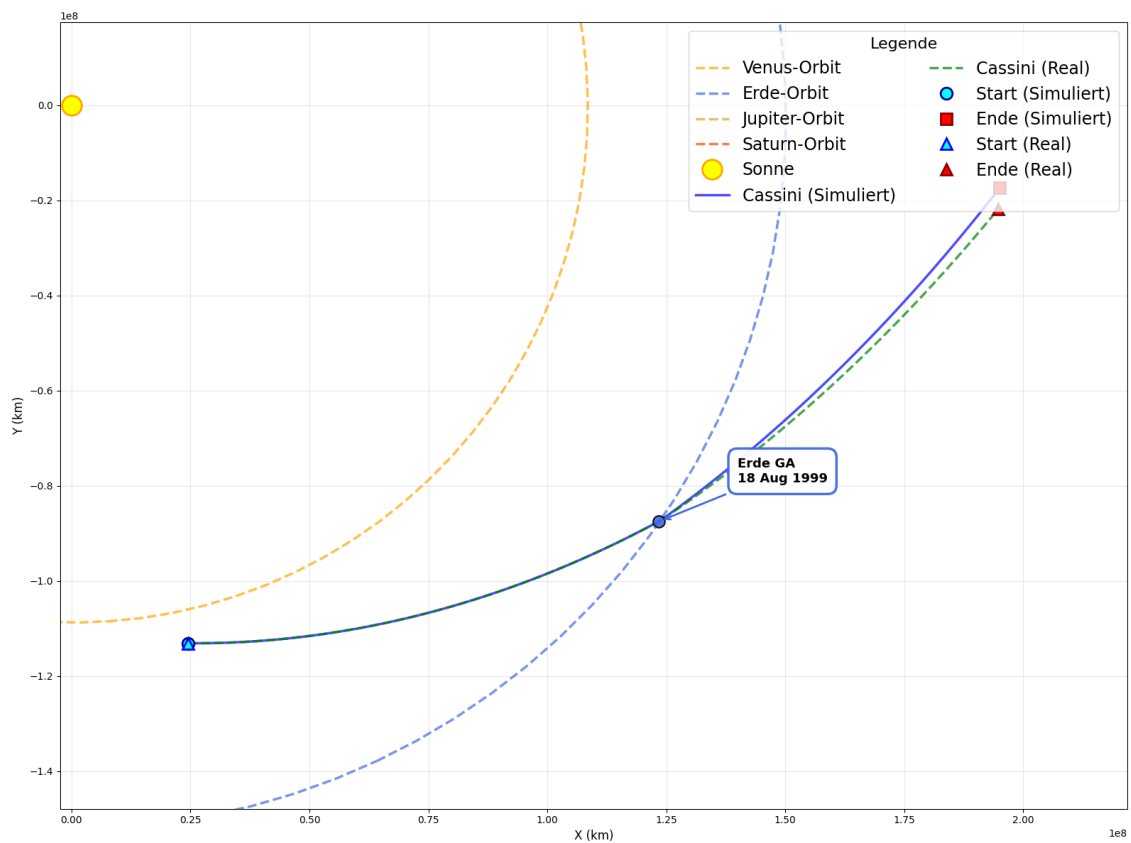


Abbildung 7: Der Erde-Gravity-Assist

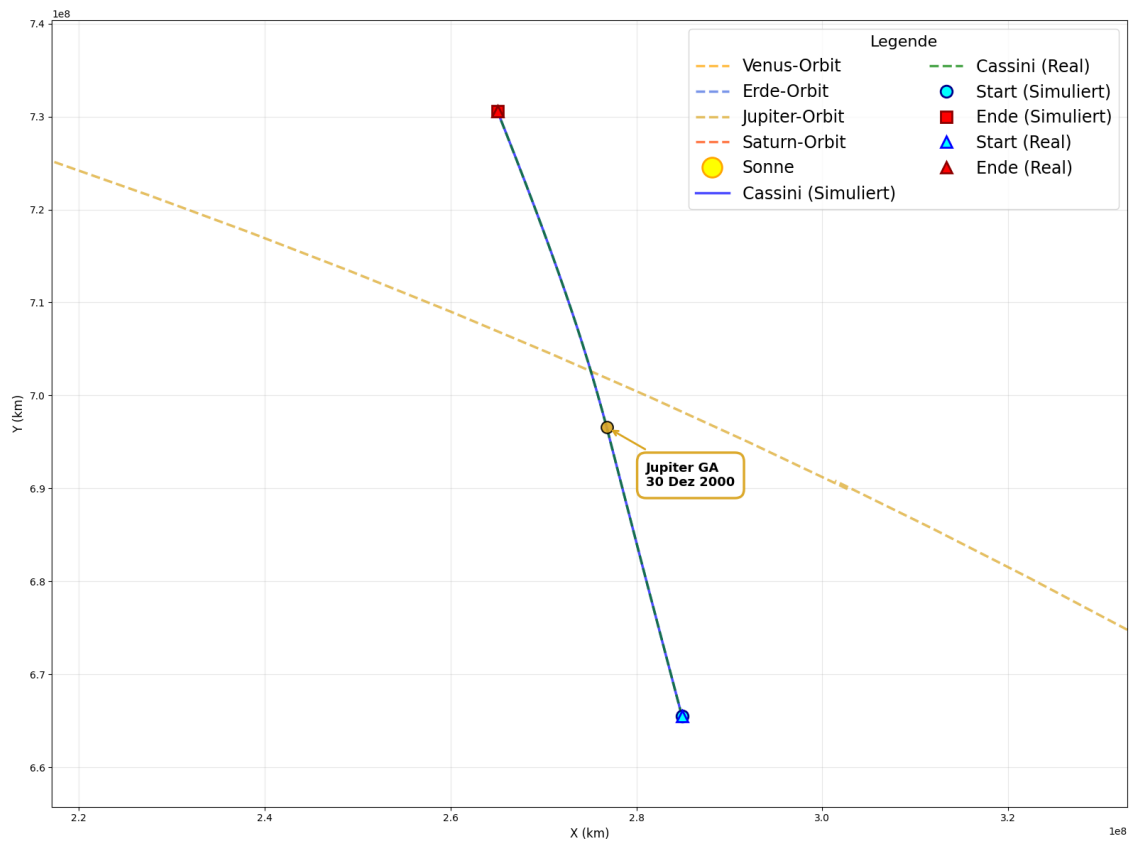


Abbildung 8: Der Jupiter-Gravity-Assist



## 10 Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorgelegte Seminararbeit persönlich und unverfälscht verfasst, sämtliche hierfür zu Hilfe genommene gedruckte sowie digitale Quellen im Literaturverzeichnis angegeben und die aus diesen Quellen stammenden Zitate oder Belegstellen für sinngemäß wiedergegebene Inhalte in meiner Seminararbeit als solche kenntlich gemacht habe. Die Seminararbeit ist in dieser oder einer ähnlichen Form in keinem anderen Kurs des diesjährigen oder eines vorhergehenden Abiturjahrgangs vorgelegt worden.

\_\_\_\_\_, den \_\_\_\_\_  
(Unterschrift des Schülers)