矩形面积 II

力扣 (LeetCode) 发布于 3 个月前 624 官方 Java Python 线段树

方法一：容斥原理

思路

假设我们有两个矩形 A 和 B，它们叠加后覆盖的总面积为：

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

假设我们有三个矩形 A, B, C，它们叠加后覆盖的总面积为：

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

假设我们有四个矩形 A, B, C, D，它们叠加后覆盖的总面积为：

\begin{align} |A \cup B \cup C \cup D| =\,&\left(|A| + |B| + |C| + |D| \right) - \\ \,&\left(|A \cap B| + |A \cap C| + |A \cap D| + |B \cap C| + |B \cap D| + |C \cap D|\right) +\\ \,&\left(|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D|\right) -\\ \,&\left(|A \cap B \cap C \cap D|\right) \end{align}

可以使用维恩图证明这一点。

n 个矩形 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 重叠后的总面积为：

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq [n]} (-1)^{|S|+1} \left|\bigcap_{i \in S} A_i\right|$$

算法

如果我们不知道上述原理，可以使用 $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$ 范围内任意一点验证上述原理的正确性。假设有一点在所有的矩形 $A_i (i \in S)$ 中，并且令 $|S| = n$。在等式右边，该点被计算了 $\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \cdots \pm \binom{n}{n}$ 次。考虑 $(1-1)^n$ 的二项展开，实际上它等于 1。

从*矩形面积 I* 中可知，两个轴平行矩形的交集要么是一个新的矩形，要么为空。因此 $\bigcap_{i \in S} A_i$ 要么是一个新矩形，要么为空。

算法流程如下：对于 $\{1, 2, 3, \cdots, N\}$（N 是矩形的数量）的每个子集 S，计算该子集的交集 $\bigcap_{i \in S} A_i$ 和它的面积，将结果带入公式得到所有矩形叠加后的覆盖总面积。

Java | Python

```
class Solution {
    public int rectangleArea(int[][] rectangles) {
        int N = rectangles.length;

        long ans = 0;
        for (int subset = 1; subset < (1<<N); ++subset) {
            int[] rec = new int[]{0, 0, 1_000_000_000, 1_000_000_000};
            int parity = -1;
            for (int bit = 0; bit < N; ++bit)
                if (((subset >> bit) & 1) != 0) {
                    rec = intersect(rec, rectangles[bit]);
                    parity *= -1;
                }
            ans += parity * area(rec);
        }

        long MOD = 1_000_000_007;
        ans %= MOD;
        if (ans < 0) ans += MOD;
        return (int) ans;
    }

    public long area(int[] rec) {
        long dx = Math.max(0, rec[2] - rec[0]);
        long dy = Math.max(0, rec[3] - rec[1]);
        return dx * dy;
    }

    public int[] intersect(int[] rec1, int[] rec2) {
```

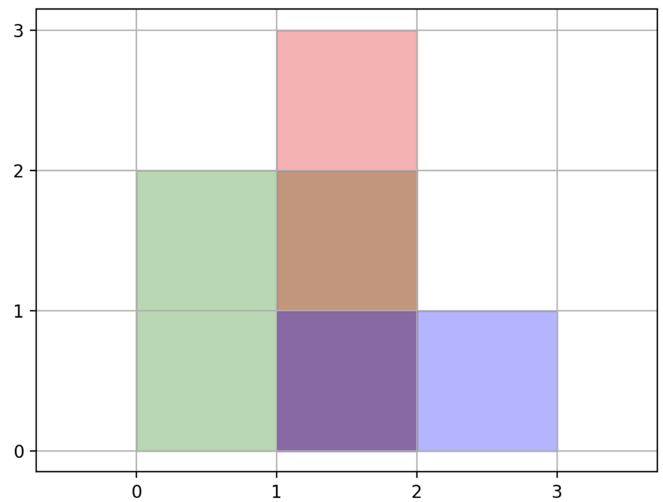
```
            return new int[]{
                Math.max(rec1[0], rec2[0]),
                Math.max(rec1[1], rec2[1]),
                Math.min(rec1[2], rec2[2]),
                Math.min(rec1[3], rec2[3]),
            };
        }
    }
```

复杂度分析

- 时间复杂度：$O(N * 2^N)$，其中 N 是矩形的数量。
- 空间复杂度：$O(N)$。

方法二：坐标压缩

思路



假设矩形列表为 `[[0,0,200,200],[100,0,200,300],[100,0,300,100]]` ，而不是 `rectangles = [[0,0,2,2],[1,0,2,3],[1,0,3,1]]` ，那么答案会扩大 100 倍。

如果矩形列表为 `rectangles = [[0,0,2,2],[1,0,2,3],[1,0,30002,1]]` ，只有蓝色区域的区域的面积为 3000，其他区域均为 1。

我们的思想如下：首先获取所有的 `x` 和 `y` 坐标，将它们重新映射到 `0, 1, 2, ...` 等等。例如将 `rectangles = [[0,0,200,200],[100,0,200,300],[100,0,300,100]]` 映射到 `[[0,0,2,2],[1,0,2,3],[1,0,3,1]]` 。然后，使用暴力解法计算总覆盖面积。但是因为每个矩形实际上可能表示更大的面积，所以最后需要调整。

算法

将所有 `x` 和 `y` 坐标映射到 `0, 1, 2, ...` 。

然后使用暴力解法，在网格上标记每个映射后的矩形。例如对于映射后的矩形 `(rx1, ry1, rx2, ry2)` ，标记满足 `rx1 <= x < rx2` 且 `ry1 <= y < ry2` 的网格 `grid[x][y] = True` 。

如果 `x` 映射得到 `rx` ，则可以通过逆映射 `imapy` 从 `rx` 得到 `x` ，即 `imapx(rx) = x` 。每个网格 `grid[rx][ry]` 代表的实际矩形面积为 `(imapx(rx+1) - imapx(rx)) * (imapy(ry+1) - imapy(ry))` 。

Java | Python

```java
class Solution {
    public int rectangleArea(int[][] rectangles) {
        int N = rectangles.length;
        Set<Integer> Xvals = new HashSet();
        Set<Integer> Yvals = new HashSet();

        for (int[] rec: rectangles) {
            Xvals.add(rec[0]);
            Xvals.add(rec[2]);
            Yvals.add(rec[1]);
            Yvals.add(rec[3]);
        }

        Integer[] imapx = Xvals.toArray(new Integer[0]);
```

```java
        Arrays.sort(imapx);
        Integer[] imapy = Yvals.toArray(new Integer[0]);
        Arrays.sort(imapy);

        Map<Integer, Integer> mapx = new HashMap();
        Map<Integer, Integer> mapy = new HashMap();
        for (int i = 0; i < imapx.length; ++i)
            mapx.put(imapx[i], i);
        for (int i = 0; i < imapy.length; ++i)
            mapy.put(imapy[i], i);

        boolean[][] grid = new boolean[imapx.length][imapy.length];
        for (int[] rec: rectangles)
            for (int x = mapx.get(rec[0]); x < mapx.get(rec[2]); ++x)
                for (int y = mapy.get(rec[1]); y < mapy.get(rec[3]); ++y)
                    grid[x][y] = true;

        long ans = 0;
        for (int x = 0; x < grid.length; ++x)
            for (int y = 0; y < grid[0].length; ++y)
                if (grid[x][y])
                    ans += (long) (imapx[x+1] - imapx[x]) * (imapy[y+1] - imapy[y]);

        ans %= 1_000_000_007;
        return (int) ans;
    }
}
```

复杂度分析

- 时间复杂度：$O(N^3)$，其中 N 是矩形的数量。
- 空间复杂度：$O(N^2)$。

方法三：线性扫描

思想

将每个矩形都看作是一条从底部传递到顶部的水平线段，把从底部到顶部中间的区域称为活动区域，底部边和顶部边称为水平间隔。每个矩形都会更新两次，即在底部添加水平间隔和顶部删除水平间隔。那么 `N` 个矩形共有 `2 * N` 次更新，且每次最多更新 `N` 个水平间隔。

算法

例如矩形 `rec = [1,0,3,1]`，第一次更新是在 `y = 0` 时添加水平间隔 `[1, 3]`，第二次更新是在 `y = 1` 时删除水平间隔。这里需要注意添加和删除的多重性。如果在 `y = 0` 时，添加了两条水平间隔 `[1, 3]` 和 `[0, 2]`，那么在 `y = 1` 时只会删除 `[1, 3]`，不影响 `[0, 2]`。

为每个矩形创建添加和删除事件，然后以 `y` 从小到大的顺序处理所有事件。存在一个问题，在处理 `add(x1, x2)` 和 `remove(x1, x2)` 事件时如何查询到位于同一 `y` 坐标的其他水平间隔。

因为 `remove(...)` 操作总是在 `add(...)` 之后，因此可以把所有的水平间隔以 `y` 坐标由小到大的顺序排列。然后使用类似于 LeetCode 合并区间问题实现查询操作 `query()`。

Java | Python

```java
class Solution {
    public int rectangleArea(int[][] rectangles) {
        int OPEN = 0, CLOSE = 1;
        int[][] events = new int[rectangles.length * 2][];
        int t = 0;
        for (int[] rec: rectangles) {
            events[t++] = new int[]{rec[1], OPEN, rec[0], rec[2]};
            events[t++] = new int[]{rec[3], CLOSE, rec[0], rec[2]};
        }

        Arrays.sort(events, (a, b) -> Integer.compare(a[0], b[0]));

        List<int[]> active = new ArrayList();
        int cur_y = events[0][0];
        long ans = 0;
        for (int[] event: events) {
```

```java
            int y = event[0], typ = event[1], x1 = event[2], x2 = event[3];

            // Calculate query
            long query = 0;
            int cur = -1;
            for (int[] xs: active) {
                cur = Math.max(cur, xs[0]);
                query += Math.max(xs[1] - cur, 0);
                cur = Math.max(cur, xs[1]);
            }

            ans += query * (y - cur_y);

            if (typ == OPEN) {
                active.add(new int[]{x1, x2});
                Collections.sort(active, (a, b) -> Integer.compare(a[0], b[0]));
            } else {
                for (int i = 0; i < active.size(); ++i)
                    if (active.get(i)[0] == x1 && active.get(i)[1] == x2) {
                        active.remove(i);
                        break;
                    }
            }

            cur_y = y;
        }

        ans %= 1_000_000_007;
        return (int) ans;
    }
}
```

复杂度分析

- 时间复杂度：$O(N^2 \log N)$，其中 N 是矩形的数量。
- 空间复杂度：$O(N)$。

方法四：线段树

思路和算法

为了使用线段树的思想，也需要支持和方法三一样的 `add(x1, x2)`， `remove(x1, x2)` 和 `query()` 操作。

关于更多线段树的知识，可以参考题目：[最长递增子序列的个数]，[掉落的方块]。

Java | Python

```
class Solution {
    public int rectangleArea(int[][] rectangles) {
        int OPEN = 1, CLOSE = -1;
        int[][] events = new int[rectangles.length * 2][];
        Set<Integer> Xvals = new HashSet();
        int t = 0;
        for (int[] rec: rectangles) {
            events[t++] = new int[]{rec[1], OPEN, rec[0], rec[2]};
            events[t++] = new int[]{rec[3], CLOSE, rec[0], rec[2]};
            Xvals.add(rec[0]);
            Xvals.add(rec[2]);
        }

        Arrays.sort(events, (a, b) -> Integer.compare(a[0], b[0]));

        Integer[] X = Xvals.toArray(new Integer[0]);
        Arrays.sort(X);
        Map<Integer, Integer> Xi = new HashMap();
        for (int i = 0; i < X.length; ++i)
            Xi.put(X[i], i);

        Node active = new Node(0, X.length - 1, X);
        long ans = 0;
        long cur_x_sum = 0;
        int cur_y = events[0][0];

        for (int[] event: events) {
```

```
            int y = event[0], typ = event[1], x1 = event[2], x2 = event[3];
            ans += cur_x_sum * (y - cur_y);
            cur_x_sum = active.update(Xi.get(x1), Xi.get(x2), typ);
            cur_y = y;

        }

        ans %= 1_000_000_007;
        return (int) ans;
    }
}

class Node {
    int start, end;
    Integer[] X;
    Node left, right;
    int count;
    long total;

    public Node(int start, int end, Integer[] X) {
        this.start = start;
        this.end = end;
        this.X = X;
        left = null;
        right = null;
        count = 0;
        total = 0;
    }

    public int getRangeMid() {
        return start + (end - start) / 2;
    }

    public Node getLeft() {
        if (left == null) left = new Node(start, getRangeMid(), X);
        return left;
    }
```

```java
    public Node getRight() {
        if (right == null) right = new Node(getRangeMid(), end, X);
        return right;
    }

    public long update(int i, int j, int val) {
        if (i >= j) return 0;
        if (start == i && end == j) {
            count += val;
        } else {
            getLeft().update(i, Math.min(getRangeMid(), j), val);
            getRight().update(Math.max(getRangeMid(), i), j, val);
        }

        if (count > 0) total = X[end] - X[start];
        else total = getLeft().total + getRight().total;

        return total;
    }
}
```

复杂度分析

- 时间复杂度：$O(N\log N)$，其中N 是矩形的数量。
- 空间复杂度：$O(N)$。