Метод векторных оценок

Студенты:

Бронников Максим

Вельтман Лина

Батяновский Иван

Группа:

М80-407Б-17

Парето-множество

Постановка задачи

Пусть дан вектор критериев:

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \ldots \\ f_i(x) \\ \ldots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

- Требуется минимизировать каждый из критериев таким образом, чтобы не увеличивались значения по другим критериям.

Определение

Тогда данную задачу можно сформулировать следующим образом:

Требуется найти такое множество оптимальных точек $P: \forall x_0 \in P \Rightarrow \nexists x \in D_f:$

$$\begin{cases} f_i(x) < f_i(x_0) \\ f_j(x) \leq f_j(x_0) \end{cases}, \forall j \in \{1, \dots, n\} \setminus \mathrm{i}$$

Такое множество *P называется* *Парето-множеством, когда как его точки* x_0 – Парето-оптимальными.

Множество эффективных оценок

Векторная оценка

Напомним, что $f: X \to Y,$ тогда обозначим:

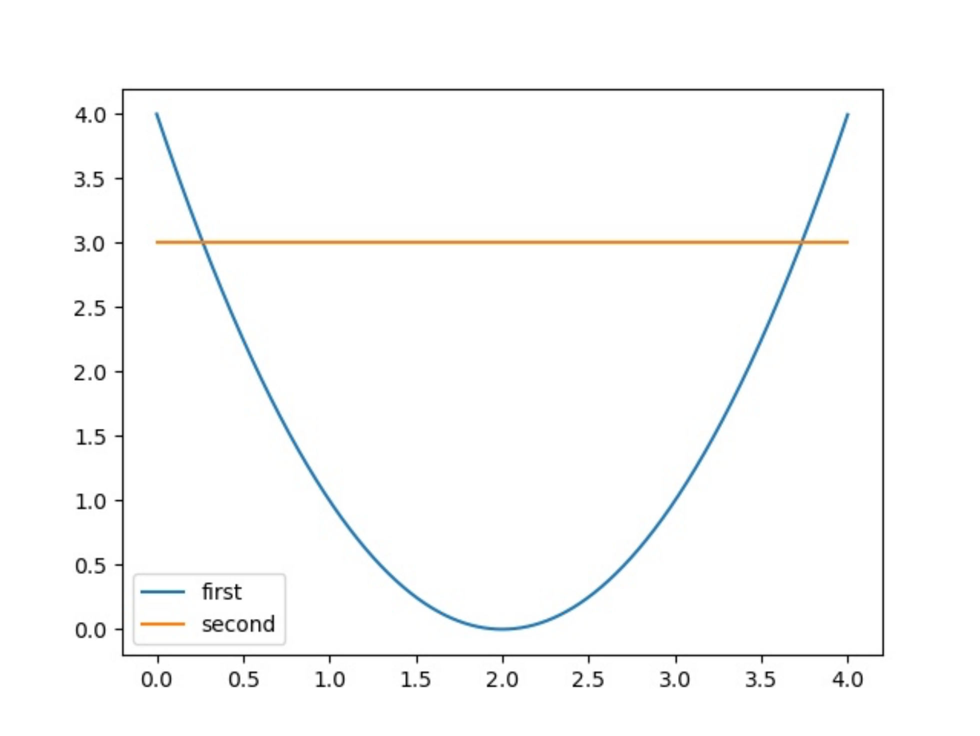
$$y_i = f(x_i) = \begin{pmatrix} f_1(x_i) \\ \cdots \\ f_i(x_i) \\ \cdots \\ f_n(x_i) \end{pmatrix}$$

В таком случае вектор y_i называют <u>векторной оценкой</u> точки x_i .

Определение

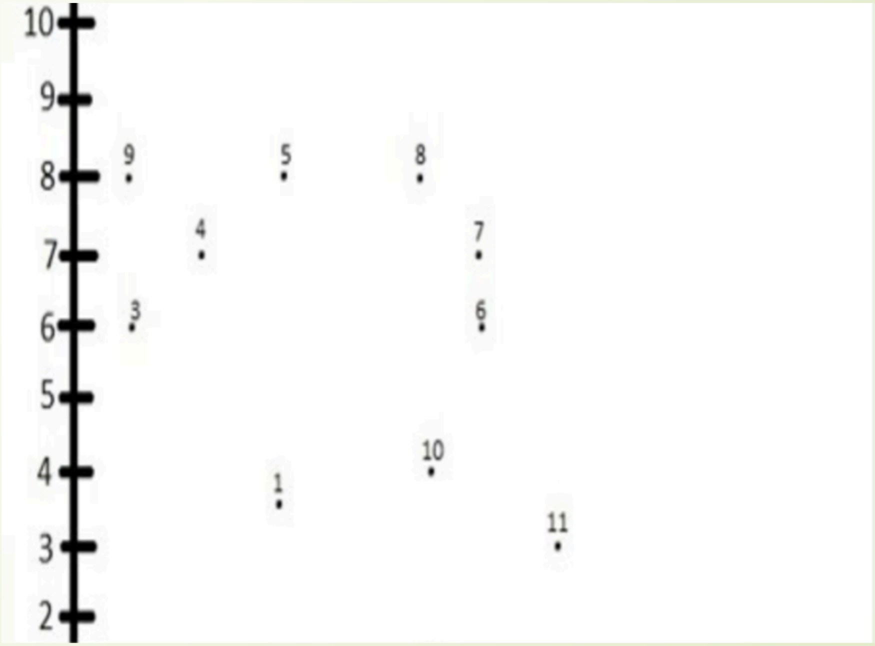
- Каждая Парето-оптимальная точка $x_0 \in P$ отображается в векторную оценку y_0, которая называется Парето-эффективной оценкой.

- Множество Парето-эффективных оценок $M = f(P) = \{y_0\}$ называется эффективным множеством оптимальных оценок.



Пример задачи оптимальности по Парето

- Задача:
на дискретном множестве векторных оценок из 13 заданных точек найти эффективное по Парето множество для 4-х вариантов сочетаний операций максимизации и минимизации.
- Min min: 12, 13
- Max max: 11, 8, 7
- Min max: 9, 12
- Max min: 2, 13, 11



Эффективность по Слейтеру

- Введем на множестве векторных оценок {Y} отношение предпочтения: $Y^1 \leq Y^2 \Leftrightarrow y_i^1 \leq y_i^2$, $(\forall i \in 1, \ldots, n)$, $Y^1 \neq Y^2$.

  Y^0 - эффективное по Парето, если $\nexists\, Y < Y^0$.

- Введем на множестве векторных оценок {Y} другое отношение предпочтения: $Y^1 < Y^2 \Leftrightarrow y_i^1 < y_i^2$, $(\forall i \in 1, \ldots, n)$.

  Y^* - эффективное по Слейтеру, если $\nexists\, Y < Y^*$.

  Справедливо утверждение:
  $\{Y^0\} \subset \{Y^*\}$

Понятия доминирования по Слейтеру.

- Будем говорить, что точка $y' \in W'$ доминирует точку $y'' \in W'$ по Слейтеру и обозначать $y' \rightarrowtail_s y''$, если для всех критериев $j = \{1, \ldots, m\}$ выполнено $y'_j \rightarrowtail y''_j$ (Доминирование по Слейтеру могут также называть слабым доминированием по Парето).
- Критериальная точка $y^0 \in Y$ называется оптимальной по Слейтеру, если $\{y \in Y \mid y \rightarrowtail_s y^0\} = \varnothing$.
Такая точка также называется недоминируемой/слабо эффективной по Слейтеру (на Y).

- Примечание:
- $\rightarrowtail$ - «лучше»
- Можно сформулировать бинарное отношение предпочтения: бинарное отношение предпочтения «лучше» между парами значений числовой функции f, определяемое для $y' = f(x')$ и $y'' = f(x'')$, $x', x'' \in X$ как $y' \rightarrowtail y''$ <=> $y' > y''$.
- W' - критериальное пространство

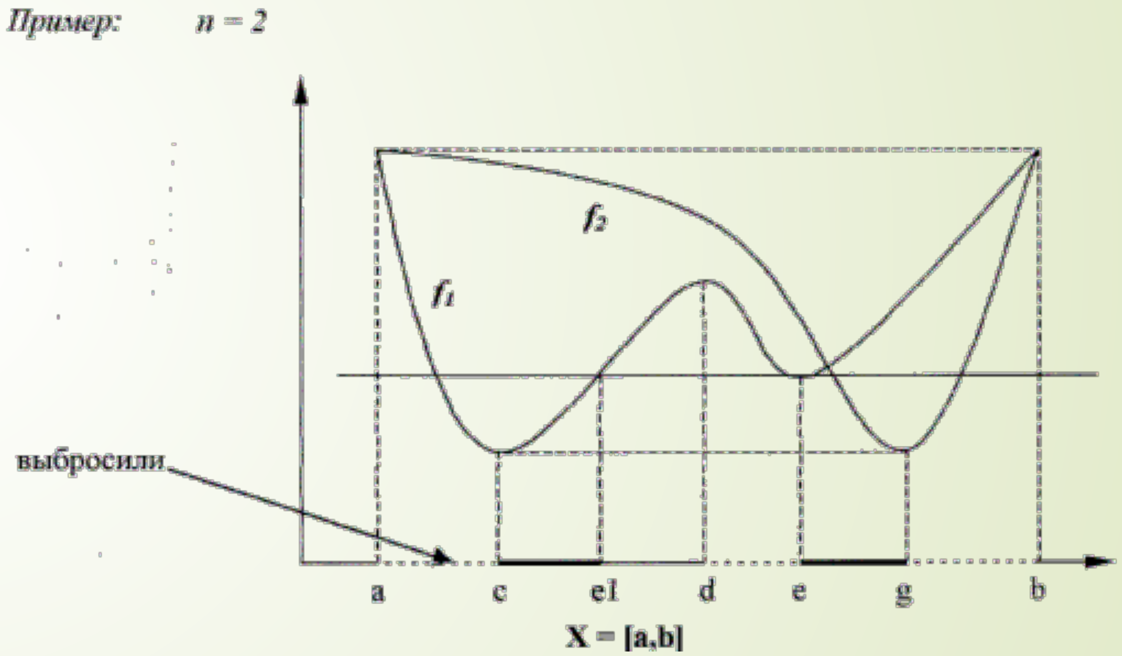
Понятия доминирования по Слейтеру.

- Множество критериальных точек, оптимальных по Слейтеру на Y, называют множеством Слейтера или слабо эффективным множеством в пространстве критериев и обозначают S(Y).
- Поскольку требования к точкам, оптимальным по Парето жестче, чем к точкам, оптимальным по Слейтеру, то
  $P(Y) \subseteq S(Y)$
- Множества недоминируемых элементов множества X обозначают S(X). Это называется множеством решений, оптимальных по Слейтеру, а также множеством слабо эффективных решений.

Пример

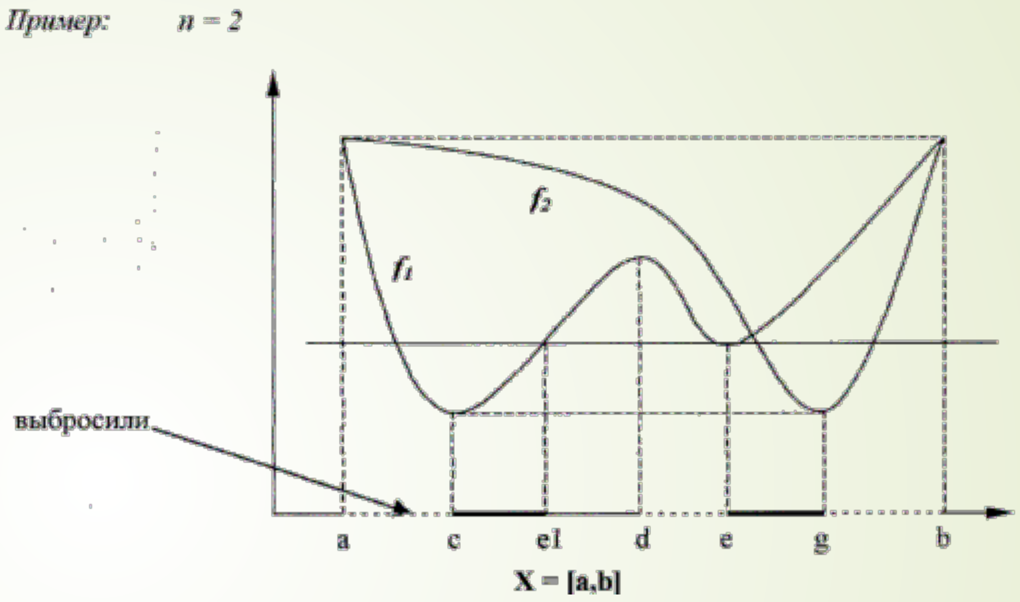
Задача: найти Парето-множество

$$\begin{cases} [a, c) \notin P \\ (g, b] \notin P \\ [d, e) \notin P \end{cases}$$



т.к. функции на этих промежутках одинаково монотонны, и следовательно точки c, g, e улучшат любую из точек соответствующих промежутков $[a, c)$, $(g, b]$ и $[d, e)$.

Пример



Единственная точка глобальных минимумов функции, очевидно, оптимальна по Парето, значит $c \in P$, $g \in P$. Исследуем точку e:

ни для какого $x \in$ [a, b] не выполняется ни та, ни другая из приведенных систем:

$$\begin{cases} f_1(x) < f_1(e) \\ f_2(x) \le f_2(e) \end{cases}, \begin{cases} f_1(x) \le f_1(e) \\ f_2(x) < f_2(e) \end{cases} \Rightarrow$$ e оптимально по Парето.

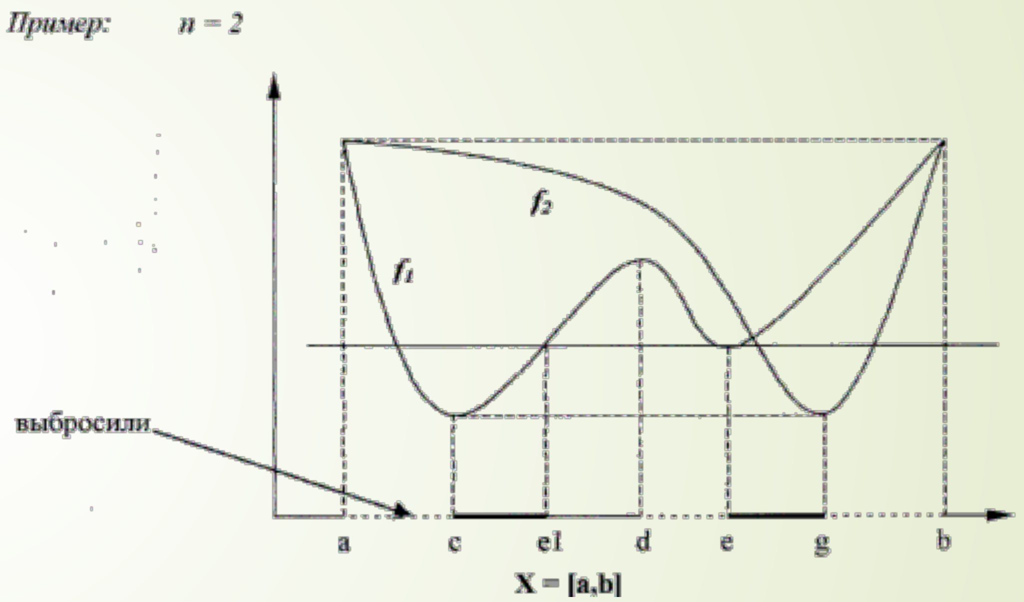
Пример

$e_1 \notin$ *P* т.к. точка е будет лучше.

$[e, g] \in P$ *т.к. ни одна из точек не может быть улучшена.*

$[c, e_1) \in P$ т.к. ни одна из точек не может быть улучшена.

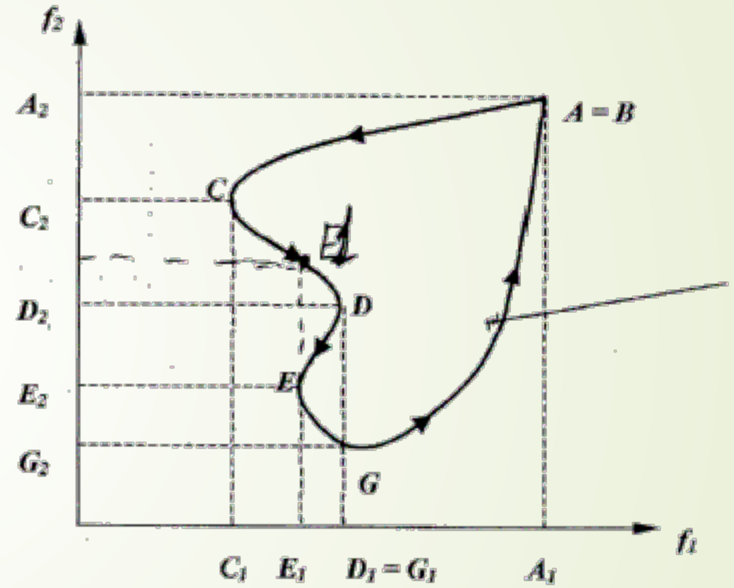
Ответ: $P = \{[c, e_1), [e, g]\}$



Пример

Применим для предыдущей задачи метод векторных оценок.

Для каждой векторной оценки лучшие оценки могут быть только на границе или внутри нижнего левого угла (для некоторых точек отмечен пунктиром), так что если этот угол пустой, то возможна оценка по Парето. Отсюда сразу получаем область Р.



(Получим из исходного графика)

кривая – множество векторных оценок

Заключение

Метод векторных оценок используется для поиска Парето-множества. Данный метод значительно упрощает поиск Парето-множества и делает решение нагляднее.