Квадратурный метод решения интегральных уравнений Вольтера II рода

Зарипова Ф. Ф.

Зарипова Фания Фаритовна / Zaripova Faniya Faritovna – студент магистратуры,
факультет математики и информационных технологий,
Стерлитамакский филиал
Башкирский государственный университет, г. Стерлитамак

Аннотация: *при построении математических моделей различных явлений естествознания задачи часто сводятся к решению интегральных уравнений, в которых неизвестная функция входит под знак интеграла. В данной статье рассматриваются некоторые общие понятия о широко применяемых линейных интегральных уравнениях Вольтерра второго рода. Описывается способ решения данных уравнений. При конкретизации вида квадратурной формулы для замены определенных интегралов в равенствах конечными суммами было отдано предпочтение квадратурной формуле трапеций.*

Ключевые слова: *интегральные уравнения Вольтерра, квадратурный метод, формула трапеции.*

Интегральные уравнения Вольтерра исторически являются одним из первых видов интегральных уравнений, ставших известными математикам. Несмотря на более чем столетнюю историю, теория интегральных уравнений Вольтерра продолжает активно развиваться [1].

Линейным интегральным уравнением Вольтерра II-го рода называется уравнение вида

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^t K(t,s)\varphi(s)dt + f(t), a \le t \le b. \qquad (1)$$

Это уравнение является частным случаем уравнения Фредгольма, а именно, тем случаем, когда $K(t,s) = 0$ при $t > s$, т. е. когда ядро обращается в нуль в половине квадрата k_0, лежащей с одной стороны от его диагонали $t = s$. Считаем, что свободный член $f(t)$ – непрерывная функция в некотором промежутке $a \le t \le b$ и $K(t,s)$ – непрерывная функция.

В случае использования квадратурной формулы трапеции с постоянным шагом $h = t_i - t_{i-1}$, $i = 2,3,\dots,n$ треугольная система для получения каркаса $x_1, x_2, \dots, x_n$ приближенного решения линейного интегрального уравнения Вольтера II рода (1) будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_1 = f_1, \\ -\frac{h}{2}Q_{21}x_1 + \left(1 - \frac{h}{2}Q_{22}\right)x_1 = f_2, \\ -\frac{h}{2}Q_{31}x_1 - hQ_{32}x_2 + \left(1 - \frac{h}{2}Q_{33}\right)x_3 = f_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\frac{h}{2}Q_{n1}x_1 - hQ_{n2}x_2 - \dots - hQ_{n,n-1}x_{n-1} + \left(1 - \frac{h}{2}Q_{nn}\right)x_n = f_n. \end{cases} \qquad (2)$$

Найдем решение интегрального уравнения Вольтера II рода методом квадратур на сегменте [0,1]. Дано интегральное уравнение Вольтера II рода

$$\varphi(x) = \sin(x) + \int_0^x (x-t)\varphi(t)ds. \qquad (3)$$

Здесь $f(x) = \sin(x)$, $Q(x, s) = (x - s)$. Применим к нему квадратурную формулу трапеции с шагом $h = 0.25$, используя пять узлов:

$$x_1 = t_1 = 0,\ \ x_2 = t_2 = 0.25,\ \ x_3 = t_3 = 0.5,\ \ x_4 = t_4 = 0.75,\ \ x_5 = t_5 = 1.$$

В соответствии с сеткой, рис. 1, и видом отвечающих данному случаю уравнений (2) имеем: $\varphi_1 = f(0) = 0$,

$$\varphi_2 = \frac{\sin(x_2) + \frac{h}{2}(x_2 - t_1)\varphi_1}{1 - \frac{h}{2}(x_2 - t_2)} = \frac{\sin(x_2) + 0}{1 - 0} = 0.2474,$$

$$\varphi_3 = \frac{\sin(x_3) + h(x_3 - t_2)\varphi_2 + \frac{h}{2}(x_3 - t_1)\varphi_1}{1 - \frac{h}{2}(x_3 - t_3)} = 0.4949,$$

$$\varphi_4 = \frac{\sin(x_4) + h(x_4 - t_3)\varphi_3 + h(x_4 - t_2)\varphi_2 + \frac{h}{2}(x_4 - t_1)\varphi_1}{1 - \frac{h}{2}(x_4 - t_4)} = 0.7435,$$

$$\varphi_5 = \frac{\sin(x_5) + h(x_5 - t_4)\varphi_4 + h(x_5 - t_3)\varphi_3 + h(x_5 - t_2)\varphi_2 + 0}{1 - \frac{h}{2}(x_5 - t_5)} = 0.9962.$$

Полученные значения φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_5 хорошо согласуются с соответствующими значениями $\varphi(0)$, $\varphi(0.25)$, $\varphi(0.5)$, $\varphi(0.75)$, $\varphi(1)$ точного решения данного уравнения (3) $\varphi(x) = \frac{1}{2}\, sh(x) + \frac{1}{2}\sin(x)$:

$$\varphi(0) = 0, \qquad \varphi(0.25) = 0.25,$$
$$\varphi(0.5) = 0.5,$$
$$\varphi(0.75) = 0.75198,\ \ \varphi(1) = 1.0083.$$

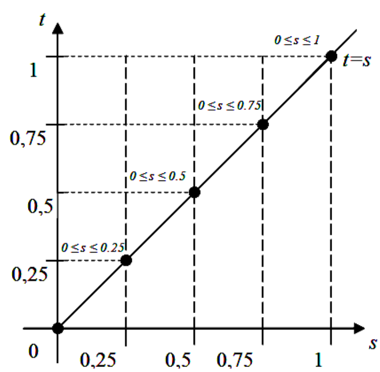

Рис. 1. Узлы и промежутки, при решении уравнения (1) методом трапеции с $h = 0.25$

При этом с удалением от точки $a = 0$ точек t_i – фиксированных верхних границ интегрирования в выражениях вида (2) – точность уменьшается, что характерно и при численном нахождении решений задачи Коши для ОДУ с постоянным шагом при удалении от начальной точки [2].

Литература

1. *Вержбицкий В. М.* Основы численных методов: Учебник для вузов / В. М. Вержбицкий. М. Высш. шк., 2002. 840 с.: ил.
2. Об одном итерационном методе решения интегральных уравнений Вольтерра / Бойков, Кучумов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки, 2009. № 2. С. 25-38.