b) Es soll jetzt

$$(32) \qquad \Psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}\left(e^t + e^{-t} + 2\,a\sqrt{e}\right)$$

gesetzt werden, wobei a eine positive Konstante bedeutet. Bei dieser Wahl ist

$$(33) \qquad 2\int_0^{\infty}\Psi(t)\cos zt\,dt = 2\sqrt{2\,\pi\,e}\,e^{-\frac{z^2}{2}}(a + \cos z).$$

Nun hat die Funktion (32) ersichtlicherweise folgende Eigenschaften:

I. Es gilt für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-1}\log|\Psi^{(n)}(t)| = -\infty.$$

II. $\Psi(t)$ ist eine gerade Funktion.

III. Es ist $\psi(t) > 0$ für reelles t.

IV. Es ist für $t \to +\infty$

$$\psi(t) \sim e^{-\frac{t^2}{2}}(e^t + e^{-t}). \tag{34}$$

Wird in (33) $\psi(t)$ durch die rechte Seite von (34) ersetzt, so entsteht eine Funktion mit nur reellen Nullstellen.

Diese Eigenschaften entsprechen den unter Nr. 4 betrachteten Eigenschaften I—IV der Funktion $\Phi(t)$, die in der Integraldarstellung der ξ-Funktion auftritt. Wir sehen, dass aus diesen Eigenschaften nicht auf die Realität der Nullstellen geschlossen werden kann: (33) hat nur reelle Nullstellen, wenn $0 < a \leqq 1$, und nur imaginäre Nullstellen, wenn $a > 1$.