Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann [1];

PAR M. J. HADAMARD.

1. La décomposition d'une fonction entière $F(x)$ en facteurs primaires, d'après la méthode de M. Weierstrass,

$$F(x) = e^{G(x)} \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\xi_p}\right) e^{Q_p(x)} \tag{1}$$

a conduit à la notion du genre de la fonction F.

On dit que F est du genre E si, dans le second membre de l'équation (1), tous les polynômes Q_p sont de degré E, et que la fonction entière $G(x)$ se réduise également à un polynôme de degré E au plus.

Dans un article inséré au *Bulletin de la Société mathématique de France* [2], M. Poincaré a démontré une propriété des fonctions de genre E. L'énoncé auquel il est parvenu est le suivant :

Dans une fonction entière de genre E, *le coefficient de x^m, mul-*

[1] Les principaux résultats contenus dans le présent Mémoire ont été présentés à l'Académie des Sciences dans un travail couronné en 1892 (grand prix des Sciences mathématiques).

[2] Année 1883, pages 136 et suiv.

Ici, cette circonstance apparaît tout d'abord, en supposant seulement connu le développement taylorien de $\sin x$, ou, plus simplement encore, en partant de sa relation avec la fonction exponentielle.

La fonction $\mathfrak{F}(x)$ du n° 6 est également du genre zéro, ainsi que ses combinaisons linéaires avec d'autres fonctions analogues ou des polynômes, etc.

TROISIÈME PARTIE.

APPLICATION A LA FONCTION DE RIEMANN.

34. Dans son Mémoire intitulé : *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* [1], Riemann utilise les propriétés de la fonction

$$\zeta(s) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

dont l'étude est elle-même ramenée à celle d'une fonction entière $\xi(x)$ donnée par la formule

$$\xi(x) = \frac{1}{2} - \left(x^2 + \frac{1}{4}\right) \int_1^{\infty} \Psi(t)\, t^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{x}{2} \log t\right) dt, \tag{45}$$

où

$$\Psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi t}. \tag{46}$$

L'analyse de Riemann repose sur ce fait que $\xi(x)$, considéré comme fonction de x^2, est de genre zéro, fait qui est énoncé dans son Mémoire, mais sans démonstration suffisante.

Les recherches précédentes vont nous permettre de déterminer en toute rigueur le genre de $\xi(x)$.

---

(1) RIEMANN, *Œuvres complètes* (Ed. Weber et Dedekind), p. 136 et suiv.

35. Nous aurons tout d'abord à développer ξ en série. L'intégrale qui figure au second membre de la formule (45) est de la forme $\Sigma(-1)^m C_{2m} x^{2m}$, où l'on a

$$C_m = \frac{1}{2^m m!}\int_1^{\infty} \Psi(t)\, t^{-\frac{3}{4}} (\log t)^m\, dt. \tag{47}$$

On aura donc, en considérant ξ comme fonction de x^2,

$$\xi(x) = \sum_0^{\infty} a_m x^{2m}, \tag{48}$$

où les coefficients a sont donnés, à l'exception du premier, par la formule

$$a_m = (-1)^m \left(\frac{C_{2m}}{4} - C_{2m-2}\right). \tag{49}$$

36. Remarquons tout d'abord que la série $\Psi(t)$ peut être remplacée, à un facteur fini [1] près, par son premier terme $e^{-\pi t}$. On peut également faire abstraction du facteur $t^{-\frac{3}{4}}$ qui est plus petit que 1.

D'ailleurs, si ε est un nombre positif, mais aussi petit qu'on le voudra, l'inégalité

$$(\log t)^m < e^{\varepsilon t}$$

ou

$$\log t < e^{\frac{\varepsilon t}{m}} \tag{50}$$

est vérifiée à partir de la valeur $t = m^{1+\varepsilon}$, du moins pour les grandes valeurs de m; car on a bien, pour m suffisamment grand,

$$(1+\varepsilon)\log m < e^{\varepsilon m^{\varepsilon}}$$

(1) Ce facteur est même très voisin de 1. Il est inférieur à

$$1 + \frac{e^{-3\pi}}{1-e^{-5\pi}} < 1 + \frac{1}{10000}.$$

et de plus, en prenant les dérivées des deux membres de l'inégalité (50), on trouve

$$\frac{1}{t} < \frac{\varepsilon}{m} e^{\frac{\varepsilon t}{m}},$$

inégalité dont le premier membre est décroissant tandis que le second est croissant et qui est vérifiée pour $t = m^{1+\varepsilon}$, si m est suffisamment grand.

Si donc, dans la formule (47), nous décomposons l'intégrale qui multiplie $\frac{1}{2^m m!}$ en deux, l'une prise entre les limites 1 et $m^{1+\varepsilon}$, l'autre entre $m^{1+\varepsilon}$ et $+\infty$, la seconde sera moindre que $\frac{e^{-(\pi-\varepsilon)m^{1+\varepsilon}}}{\pi - \varepsilon}$, c'est-à-dire infiniment petite pour m infini.

La première sera manifestement inférieure à

$$C_0(1+\varepsilon)^m (\log m)^m,$$

où C_0 est l'intégrale $\int_1^x e^{-\pi t} t^{-\frac{3}{4}} dt$.

C_m sera donc au plus de l'ordre de $\left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)^m \frac{(\log m)^m}{m!}$, ce qui donne

$$|a_m| < \left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)^{2m} \frac{(\log 2m)^{2m}}{(2m)!}.$$

Il faut donc prendre ([1])

$$\varphi(m) = \left(\frac{2}{1+\varepsilon} \frac{2m}{e \log m}\right)^2.$$

D'après ce qui précède, cette formule exprime également la loi de croissance des racines de l'équation $\xi(x) = 0$, considérée comme équation en x^2.

Si l'on considère x comme l'inconnue de l'équation, il faut prendre

---

([1]) La fonction $\varphi(m)$ ainsi définie satisfait manifestement aux conditions indiquées au n° 27.

la racine carrée de l'expression précédente et l'on trouve

$$(51) \qquad \rho_p > \frac{kp}{\log p},$$

en posant

$$(52) \qquad k = \frac{4-\varepsilon}{e}.$$

37. Si nous voulions avoir une limite supérieure des modules des racines successives, il faudrait commencer par trouver une limite inférieure du module de a_m. Or on aura une limite inférieure de C_m en prenant l'intégrale entre les limites $m^{1-\varepsilon}$ et $m^{1-\varepsilon'}$ (où ε et $\varepsilon' < \varepsilon$ sont deux nombres positifs très petits. On trouve ainsi

$$C_m > \frac{(1-\varepsilon)^m (\log m)^m e^{-\pi m^{1-\varepsilon'}} m^{-\frac{3}{4}(1-\varepsilon')}}{2^m m!}(m^{1-\varepsilon'} - m^{1-\varepsilon}),$$

ce qui peut s'écrire

$$C_m > \frac{(1-\varepsilon)^m (\log m)^m}{2^m m!},$$

en réunissant tous les facteurs de la forme $(1-\varepsilon)^m$.

D'ailleurs le rapport $\frac{C_m}{C_{m-2}}$ tend vers zéro; car dans l'évaluation de ce rapport on peut, d'après ce que nous avons vu, considérer l'intégrale prise seulement jusqu'à la limite $t = m^{1+\varepsilon}$, et il vient alors

$$C_m < C_{m-2}\frac{(1+\varepsilon)^2 \log^2 m}{4m(m-1)}.$$

Il en résulte que $|a_m|$ est, à un facteur constant près, supérieur à C_{2m-2} ou à $\frac{(1-\varepsilon)^{2m}(\log m)^{2m}}{2^{2m}(2m)!}$.

Nous pourrons alors appliquer les raisonnements des n^{os} **19-20** en prenant $\varphi(p) = \left(\frac{k'p}{\log p}\right)^2$, où k' est une constante indéterminée. On a ici $\alpha = 2 - \varepsilon$, et l'on trouve

$$|a_m| < \left[\frac{(2e + \varepsilon)\log m}{k' m}\right]^{2m}.$$

En appliquant la réduction indiquée dans la note 1 (p. 21), on obtient une limite un peu moins élevée

$$|a_m| < \left[\frac{(1,88 + \varepsilon)\, e \log m}{k' m}\right]^{2m}.$$

Si l'on compare cette valeur à celle qui vient d'être trouvée pour a_m, il vient

$$k' = 7,56\ldots$$

Telle est la quantité que $\frac{\rho_p \log p}{p}$ ne saurait dépasser constamment, lorsque p grandit indéfiniment.

Les conclusions auxquelles nous arrivons sont donc les suivantes :

Le rapport $\frac{1}{\rho_p}\frac{p}{\log p}$ *reste fini et sa limite supérieure, pour p infini, est comprise entre* $\frac{1}{7,56}$ *et* $\frac{e}{4}$.

Riemann donne, entre un module ρ et le nombre p des racines de module plus petit que ρ, la relation approchée

$$(53)\qquad p = \frac{\rho}{2\pi}\left(\log\frac{\rho}{2\pi} - 1\right).$$

Pour comparer ce résultat à ceux que nous venons d'obtenir, il faut résoudre cette équation par rapport à ρ, ce qui se fait aisément par la méthode des approximations successives. On trouve ainsi comme valeur approchée

$$\rho = \frac{2\pi p}{\log p},$$

de sorte que le rapport $\frac{1}{\rho}\frac{p}{\log p}$ devrait tendre vers $\frac{1}{2\pi}$. Cette valeur est comprise entre les deux limites précédemment indiquées, de sorte que nous ne sommes pas à même de décider si le coefficient $\frac{1}{2\pi}$ de la formule (53) est exact ou non.

38. Mais, ainsi que nous l'avons dit plus haut, ce point n'est pas celui sur lequel repose le raisonnement de Riemann. C'est la détermination du genre de $\xi(x)$ qui constitue la question essentielle et les recherches qui précèdent en donnent immédiatement la solution.

Nous avons, en effet, constaté que, en considérant toujours $\xi(x)$ comme fonction de x^2, son développement satisfait à la condition (8) avec $\alpha = 2 - \varepsilon$, et, par conséquent, $\lambda = \frac{1}{2} + \varepsilon$.

Dès lors, les conclusions du n° **33** nous permettent d'affirmer la proposition suivante :

La fonction $\xi(x)$ (considérée comme fonction de x^2) est de genre zéro.

Elle s'exprime par le produit de facteurs primaires et d'une simple constante, sans aucun facteur exponentiel.

C'est le résultat que nous nous proposions d'établir.