

Airy 波包及其自加速效应(续 2)

孔红艳

(陕西师范大学 物理学与信息技术学院 陕西 西安 710119)

【DOI】10.16854/j.cnki.1000-0712.170028-2

4 艾里光束

简单介绍艾里光束,观察艾里光束的加速,并分析自聚焦光束的实验研究.

4.1 观察艾里光束的加速

第一个对艾里光束的观测,最初是由贝里和鲍拉日在 1979 年预测,这样一个有趣的类波包已在一维和二维结构中实现.实验中,艾里光束表现出在传播中趋于自由加速并保持长距离衍射等特征.

1979 年贝里和巴拉兹在量子力学的背景下做了一个重要的观测:他们在理论上证明了由薛定谔方程描述的自由粒子可以表现出未扩散的艾里波包.艾里波包最显著的特点是即使在没有任何外在势能下它也能够自由加速.作为首次指出的参考文献[2],一维空间里艾里波包具有唯一性.例如在时间保持不变时,艾里波包是除了平面波解的唯一有效解.

这里,我们介绍第一个对一维和二维艾里光束加速无衍射的观察.与众所周知的无衍射光束相比,这些光束在一维情形下不会导致锥形叠加.实验表明,即使艾里光束指数截断(传达有效的功率),但仍有关键特征.具体的说,当他们的强度达最大值或在加速传播过程中沿抛物线轨迹时他们不衍射.尽管事实是这些波包的重心保持常数并最终衍射,但这种现象保持了很长的距离(埃伦费斯特定理的结果),并衍射最终接管,艾里光束传播动力的观测结果与理论相符.

为观察光学艾里波包的状态,我们用归一化的衍射傍轴方程(无电势薛定谔方程):

$$i \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} = 0 \quad (51)$$

其中 ϕ 是电势, $s = x/x_0$ 代表一个无量纲的横坐标, x_0 是任意的横向距离, $\xi = z/kx_0^2$ 是一个归一化传播距离, $k = 2\pi n/\lambda$. 艾里非色散解为

$$\phi(\xi, s) = \text{Ai}(s - (\xi/2)^2) \exp(i(s\xi/2) - i(\xi^3/12)) \quad (52)$$

显然,在原点 $\phi(0, s) = \text{Ai}(s)$, 式(52)清楚地表明,波的强度分布在恒定不变的加速度传播时保持不变. $(\xi/2)^2$ 在式(52)中描述这个弹道.图 4(a) 描述了加速的艾里波包作为一个 ξ 函数的无衍射传播,这个有趣的结果的另一种解释是由格林伯格通过等效原理得到的.更具体的说,他认为一个静止的艾里波包在一个恒定的引力场的量子力学粒子在惯性引力下通过对自由落体的观察向上加速被视为不存在.这种加速运动与埃伦费斯特定理所描述的对一个波包重心的运动不冲突.这是因为艾里光束不是平方可积的 ($\int \text{Ai}^2(x) dx \rightarrow \infty$). 因此,其质量不能被定义.

最近研究表明,光学范围内理论上的艾里光束具有有限能量(功率)的性质.为了实现这样光束的一种可能方法是引入指数孔径函数,即令 $\phi(0, s) = \text{Ai}(s) \exp(as)$, 其中 a 是一个正参数,从而保证了对无限艾里的牵制.通常情况下, $a \ll 1$ 时得到的波包接近预期艾里函数(见插图 4(b)). 我们发现:

$$\phi(\xi, s) = \text{Ai}(s - (\xi/2)^2 + ia\xi) \exp(as - (a\xi^2/2)) - i(\xi^3/12) + i(a^2\xi/2) + i(s\xi/2) \quad (53)$$

傅里叶变换有限模波包 $\Phi_0(k)$, 则 $\Phi_0(k) \propto \exp(0 - ak^2) \exp(ik^3/3)$. 从后一式中可以容易的推断出这个截断的艾里光束角傅里叶光谱是高斯和涉及一个从傅里叶变换的艾里函数本身所得的立方相(k^3). 此频谱的具体形式在实验合成这种截断的艾里波包中有重要的影响.其结果是,该波是从广义高斯光束通过傅里叶变换并施加一个立方相得到的.

图 4(b) 显示了当 $a = 0.05$ 时有限能量艾里波包的传播动力学.可以清楚的看到, $a \ll 1$ 时光束仍显示理想艾里波包的所有特点.在传播期间,当再一次“自由加速”时它的特点是几个衍射长度不变.在这种情况下,光束几乎是一段明显的理想距离,直到最终形成衍射现象.我们注意到,这里的术语“加速度”必须慎重使用,因为质量中心的一个有限能量艾里波包可以被定义,并且事实上也保持距离不变.然

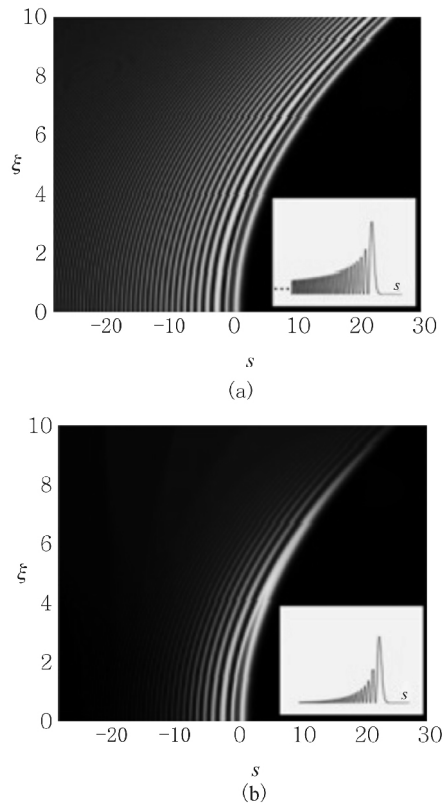


图4 $a=0.05$ 时,传播的动力学无衍射艾里波包 (a) 和一个有限能量艾里波包 (b) 光束对应的输入强度

而,根据图4(b)描述,由于小孔径因素,局部功能强度仍然在抛物线轨迹上运动,最终在光束中加速.

为了研究传播动力学的有限能量艾里波包实验,我们利用 $Ai(s) \exp(as)$ 的傅里叶变换函数(即用3次相位调制高斯光束).一个空冷氩离子连续波激光器在488 nm处发出一条偏振光线,高质量高斯光束随后就会被平行放宽至6.7 mm的距离(即脉冲的半宽高度),这种广义高斯光束是从一种计算机控制的空间光调制器液晶前端面反射后形成(SLM).这是用来对SLM进行3次相位调制, $(-20\pi, +20\pi)$ 在2 cm内)这对产生艾里光线是很有必要的.为了形成一维艾里,一个焦距为 $f=1.2$ m的会聚透镜被放置在距离SLM相位阵列 f 处的前面,这种经相位调制的傅里叶变换高斯光束就会在镜后距离 $d=f=1.2$ m处获得.产生的艾里光束会成像在一个通过5倍显微镜物镜并已仔细校正过的CCD摄影机上.通过对成像装置的了解,传播动力学中的这些光束被记录并推算出计算传播距离的一个函数.图5(a)和5(b)分别显示用于生成一维随后的二维艾里光束的相位掩膜.图5中,立方相被固定于区间 $[0, 2\pi]$,在灰度模式下,黑色对应于0,白色

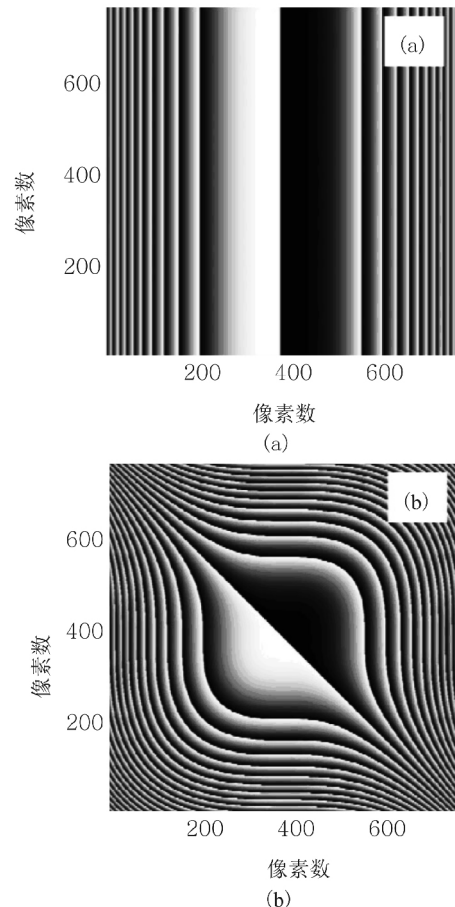


图5 相位模用于生成1维(a)和2维(b)艾里光束

对应 2π 弧度数.

图6(a)描述的是在原点处($z=0$)被缩短的艾里光束的一维强度分布指数.实验中 $x_0=53 \mu\text{m}$, $a=0.11$,图6(b)和图6(c)分别显示该艾里波包在 $z=10$ cm、20 cm处的相应强度分布.正如预期的那样,该光束几乎无衍射现象而其主瓣倾向于二次加速.测量显示主瓣的空间半峰宽(包含大于光束总能量70%的情况)距离几乎保持不变达到约25 cm,并保持其原有值约为 $90 \mu\text{m}$.值得注意的是,这发生在自由空间中,并非是某些光学非线性结果.

图6(d—f)描述了同一艾里波包在同一距离处相应的预期理论.应注意,图6(g)和图6(h)这种大小的高斯光束在同一距离处会有至少6~7次衍射现象.此外,3次相位技术在初始的宽波前并没有被应用,产生的高斯光束在25 cm以内会扩大24倍.

图7是实验中能清晰展示的横向加速的局部强度最大值,圆圈标记为实验结果,而实线代表预期的理论结果.只要光束保持自由衍射并且在衍射效应

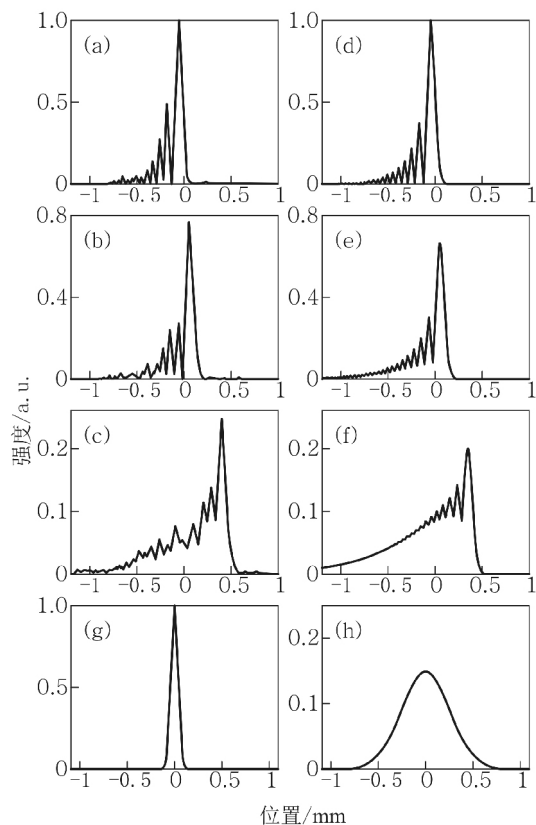


图6 横截面平面的艾里光束的强度在 (a) 0、(b) 10 cm 和 (c) 20 cm 处. 这些距离相应的理论曲线为 (d) — (f). (g) 为具有相同强度的 FWHM 高斯光束作为第一个艾里波瓣. (h) 为在 25 cm 后传播对应的衍射谱图

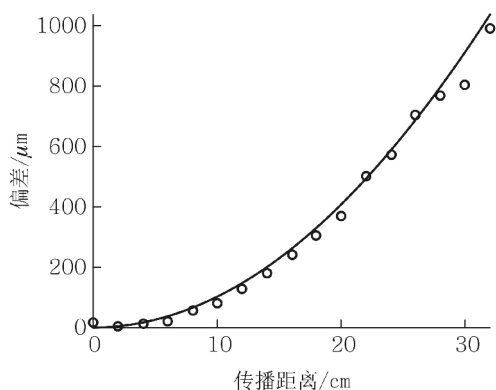


图7 艾里光束的横向加速度在 $a = 0.11$ 时被用作的距离函数

发生之前, 则这条抛物线轨迹就是加速的结果, 并且符合理论逻辑关系 $x_d \cong \lambda_0^2 z^2 / (16\pi^2 x_0^3)$. 图7中的实线对应于后者的解析表达式, 该结果表明, 光束在传播 30 cm 后会有 820 μm 的偏差. 对比所有艾里波包的大小(约为艾里光束的 1/10), 我们再次强调在这里观察到的加速度是指局部强度艾里波包的特

征. 根据所有情况表明, 波的重心保持不变, 是因为 $d \langle s \rangle / d\xi = (i/2) \int (\phi_s^* \phi - \phi_s \phi^*) ds$ 是恒定的.

同样, 我们考虑满足二维衍射傍轴方程的二维艾里光束. 理想的二维艾里波包是由 Besiers 首次提出, 在这种情况下, 一个二维 SLM(空间光调制器) 相位模式(图5(b)) 通过高斯光线得以实现, 然后通过一球状透镜进行傅里叶变换. 通常这样做, 我们能够产生有限能量, 艾里波包的形式为 $\phi = \text{Ai}(x/x_0) \text{Ai}(y/y_0) \exp(x/w_1) \exp(x/w_2)$. 这种波的强度分布如图8(a), 当 $w_1 = w_2$ 时, $x-y$ 的相应截断因子 $a = 0.11$. 在这种情况下, 约 50% 的能量在主要的波瓣强度角落中. 一般来说, $x-y$ 的分离变量参数的灵活性允许其控制二维非衍射光束的矢量横向加速度. 实验中考虑了 $x-y$ 轴的等尺度光束, 使加速发生在 45° 轴方向. 对于该图形, $x_0 = 53 \mu\text{m}$, 孔径因子 $a =$

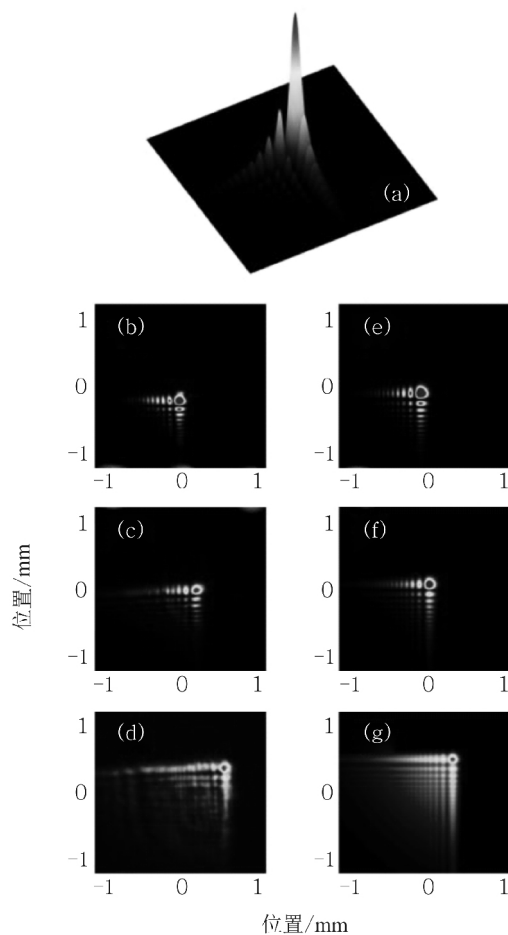


图8 (a) 一个二维艾里波包的示意图. 观察到的二维艾里光束在 (b) $z = 0 \text{ cm}$, (c) $z = 10 \text{ cm}$ 和 (d) $z = 20 \text{ cm}$ 处的强度分布. 相同距离处的相应理论结果 (e) — (g)

0.11. 在一维情况下,实验结果表明,该二维光束传播接近高达 25 cm 距离的衍射光束.主波瓣保持它的点尺寸($90\text{ }\mu\text{m}$) 距离达到约 25 cm,并且光束在 $x_d=y_d$ 处的二维抛物线轨迹运动.这些二维艾里光束的衍射动态显示如图 8(b—g). 我们想指出一维艾里波包也可以在时间域采用分散元素合成,这肯会在第一次光纤、正常和反常色散区中观察到衍射光束艾里脉冲.对于艾里光束无衍射进行的粒子操纵或在非线性介质中进行操纵会是富有成效的方向.

总之,我们已经对艾里光学波包的首次观察有所了解.实验表明,这些艾里光束可以表现出不寻常的特点,例如在传播过程中能自由加速并长距离保持无衍射现象.

4.2 自聚焦光束的实验研究

人们一般采用空间光调制器,并结合相位掩模或者计算全息技术在实验中产生艾里光束.具体办法是在空间光调制器中输入计算生成的全息图,同时调制出 4 个艾里光束.计算全息图的制作通过计算机完成,即是利用 Matlab 编程计算 4 个分别在正负 x 、 y 轴上艾里光束和一束平面波干涉的强度图样,如图 9(a) 所示.用同样的办法,能制备出 8AAB 对应的计算全息图,如图 9(b) 所示.4AAB 和 8AAB 的产生的实验光路如图 9(c),高斯光先经过空间滤波器和透镜 1 扩束准直,通过分束镜后垂直照射到空间光调制器上,来读出计算机输入的 4AAB 和 8AAB 计算全息图.从空间光调制器反射的光经过透

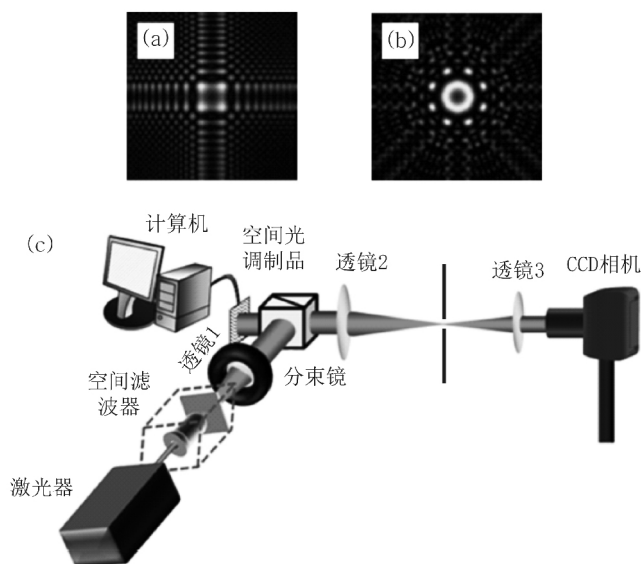


图 9 产生 4AAB(a) 和 8AAB(b) 的计算全息图 (c) 为实验装置示意图

镜 2 和透镜 3 组成的 4f 系统进行滤波处理后,便能得到相应的自聚焦光束.自聚焦光束在不同的位置横截面上光强分布由 CCD 相机进行记录和观察.通过更换空间光调制器中的计算全息图,能改变艾里光束之间的间距,从而改变光束自聚焦的位置,实现对焦距的非机械调节.实验结果和相应数值模拟结果如图 10,从图可看出,在初始位置附近(图 10(a) 中虚线 1 处) 4 个艾里光束形成方形结构,四周散布了许多光瓣,这些光瓣在远离中心的方向上,强度依次减弱,光强极大处为 4 个顶点位置(图 10(b1) 和 (c1)),实验测得相邻顶点间距约为 $250\text{ }\mu\text{m}$,该间距可通过变换计算全息图去改变;随着光束向前传播,光强极大值点间距逐渐缩小,在图 10(a) 虚线 2 处形成了一个极大值光瓣,其直径约是 $75\text{ }\mu\text{m}$.四周散布一些条形光瓣(图 10(b2) 和图 10(c2));随着光束继续向前传播,图 10(a) 虚线 3 处获得了一个直径最小、光强最大的光斑(图 10(b3), (c3)),实验测得它的直径约为 $25\text{ }\mu\text{m}$,说明 4AAB 完成了自聚焦;然后,在焦点后的图 10(a) 虚线 4 处,光强极大值四周又重新出现了旁瓣(图 10(b4) 和图 10(c4)),说明光束开始发散.

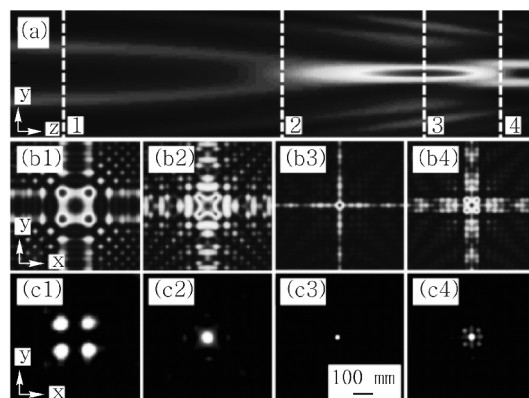


图 10 (a) 4AAB 在传播方向上的光束强度分布数值模拟图; (b1) — (b4) 4AAB 在 (a) 中 1—4 处的横截面强度分布数值模拟图; (c1) — (c4) 分别为对应于 (b1) — (b4) 的实验结果

由图 10 还可看到 4 个相向横向加速的艾里光束可以合成自聚焦光束,理论模拟结果与实验结果符合比较好.为了验证合成光束数目的扩展性,对 8AAB 也进行了研究实验.8AAB 对应的计算全息图如图 9(b) 所示,实验结果和数值模拟如图 11.由图可看出,输入面上 8 个艾里光束的合成光束在横截面上表现为连续圆环(图 11(b1) 和 11(c1)),环直径约为 $300\text{ }\mu\text{m}$,环周围散布了一些微弱的小光瓣

和 8 个二级光瓣; 随着光束继续向前传播, 环状光束在图 11(a) 中虚线 2 处汇聚成一实心主瓣(如图 11(b2) 和图 11(c2)) , 直径约为 $80\text{ }\mu\text{m}$. 主瓣周围除 8 个清晰的二级光瓣外, 其余光瓣不像 4AAB 清晰, 但表现为一些花纹结构的瓣; 随着光束传播, 实心主瓣逐渐变小, 图 11(a) 中的虚线 3 汇聚成一个尺寸约为 $25\text{ }\mu\text{m}$ 的光瓣(如图 11(b3) , c3)) . 这时, 主瓣附近二级光瓣消失没有, 花纹结构的光瓣强度也很大的减弱, 主瓣强度达到最大, 完成了自聚焦; 聚焦后的光束开始发散, 在光束的中心重新出现一个环状结构(如图 11(b4) 和 11(c4)) .

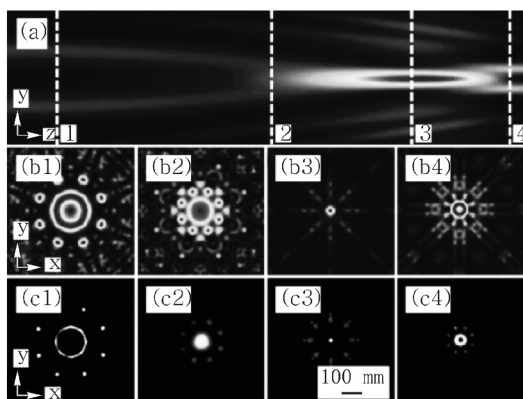


图 11 (a) 8AAB 在传播方向上的光束强度分布数值模拟图; (b1) —(b4) , 8AAB 在(a) 中 1—4 处的横截面强度分布数值模拟图; (c1) —(c4) 分别为对应于 (b1) —(b4) 的实验结果

5 总结

通过以上的论述和研究, 我们深入了解了如何利用薛定谔方程求解线性势场与 V 形势场内粒子的波函数和能级结构. 并且根据相对速度伽利略变换, 研究了薛定谔方程的解—可积分波包, 并得到了自由空间艾里波包的运动规律和量子力学中艾里波包的唯一性.

Airy wave packet and the auto acceleration effect(Continuation—2)

KONG Hong-yan

(College of Physics and Information Technology , Shaanxi Normal University , Xi' an , Shaanxi 710119 , China)

Abstract: Combined with the Airy function and its basis properties , this article studies the microscopic motion of a wave packet of a particle in a linear potential field. The Schrödinger equations for the linear potential and the V potential are solved to give the wave functions and the energy level structure of the particle. Then , in the free space , the free motion of Airy package is investigated in detail. The calculation reveals that a free Airy wave packet shows a self-acceleration in the free space. Finally , some experiments to show the strange evolution of Airy wave packet are demonstrated.

Key words: Airy function; Fourier transformation; Schrödinger equation; wave function; Airy beam

参考文献:

- [1] 周世勋. 量子力学教程 [M]. 2 版. 高等教育出版社, 2010.
- [2] Berry M V , Balazs N L. Nonspreading wave packets [J]. Am J Phys , 1979 , 47: 264.
- [3] Greenberger D M. Comment on ‘Nonspreading wave packet’ [J]. Am J Phys , 1980 , 48: 256.
- [4] Holstein B R. The extended Galilean transformation and the path integral [J]. Am J Phys , 1983 , 51: 1015.
- [5] Nassar A B , Bassalo J M F , Alencar P S. Dispersive Airy packets [J]. Am J Phys , 1995 , 63: 849.
- [6] Unnikrishnan K , Rau A R P. Uniqueness of the Airy packet in quantum mechanics [J]. Am J Phys , 1996 , 64: 1034.
- [7] Woo C H. Particles pushed by an accelerated mirror [J]. Am J Phys , 1997 , 65: 446.
- [8] Vallee O , Soares M. Airy Function and Application in Physics [M]. London: Imperial College Press , 2004.
- [9] Siviloglou G A , Christodoulides D N. Accelerating finite energy Airy beams [J]. Opt Lett , 2007 , 32: 979.
- [10] Kennard E H. Zur quantenmechanik einfacher bewegungstypen [J]. Z Phys , 1927 , 44: 326.
- [11] Darwin C G. Free motion in quantum mechanics [J]. Proc R Soc A , 1928 , 117: 258.
- [12] Lekner J. Reflectionless eigenstates of the sech² potential [J]. Am J Phys , 2007 , 75: 1151.
- [13] Cox C , Lekner J. Reflection and non-reflection of particle wave packets [J]. Eur J Phys , 2008 , 29: 671.
- [14] Nicola M. Position uncertainty of a free particle: a matrix derivation [J]. Am J Phys , 1972 , 40: 342.
- [15] Bradford H M. Propagation and spreading of a pulse or wave packet [J]. Am J Phys , 1976 , 44: 1058.