

Airy 波包及其自加速效应(续 1)

孔红艳

(陕西师范大学 物理学与信息技术学院 陕西 西安 710119)

【DOI】10.16854/j.cnki.1000-0712.170028-1

3 艾里波包

根据相对速度的伽利略变换,研究含时薛定谔方程的解——可积分的波包在自由空间的动力学行为,求解出自由空间艾里波包的运动规律和量子力学中艾里波包的唯一性.

3.1 薛定谔方程的解——艾里波包

在伽利略推导的复合速度移动变换框架下,贝里-巴拉兹含时薛定谔方程的艾里函数解是可积分的波包,这个波包有一定的势能和能量,随着时间增加到零,然后再传播.贝里-巴拉兹表示出了一个极限形式的自由粒子的波包.

贝里-巴拉兹对一个质量为 m 的自由粒子的一维自由运动考虑含时薛定谔方程的解,

$$i\hbar\partial_t\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi \quad (12)$$

即

$$\psi_{BB}(x, t) = \text{Ai}\left[q\left(x - \frac{1}{2}at^2\right)\right] e^{\frac{imv}{\hbar}\left[x - \frac{1}{2}at^2\right]} \quad (13)$$

其中 q 是一个真正的波数,在这里“加速度”被定义为

$$q^3 = \frac{2m^2a}{\hbar^2} \quad (a>0) \quad (14)$$

他们认为概率密度 $|\psi|^2$ 在自由空间中不失真地传播,并且维持着恒定加速度.

图 3 给出了在 3 个连续的时间 $t=0$, 2τ 和 4τ 中模 $|\psi|$ 和 ψ 的实部与虚部,其中 $\tau = (\hbar/4ma^2)^{1/3}$.顶部框架显示的只是实部,虚部在 $t=0$ 时为零.单位长度为 $q^{-1} = (\hbar^2/2m^2a)^{1/3}$, v 被设置等于 $(\hbar a/4m)^{1/3}$,虚部为虚线.概率的中心保持固定在 $q\langle x \rangle = -\frac{1}{4}$.

当 $d^2\psi/dz^2 = z\psi$ 的通解的艾里函数 $\text{Ai}(z)$ 具有如下的渐进形式时,函数 ψ_{BB} 不能平方可积,其中 $\zeta = \frac{2}{3}z^{3/2}$,

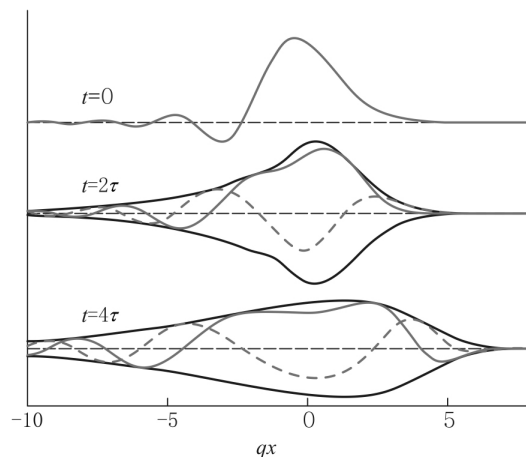


图 3 零动量 ($U=0$) 艾里波包的传播

$$\text{Ai}(z) \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp(-\zeta), \quad |\arg(z)| < \pi$$

$$\text{Ai}(-z) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \sin(\zeta + \pi/4), \quad |\arg(z)| < 2\pi/3 \quad (15)$$

$$\psi(x, t) = \text{Ai}\left[q\left(x - ut + \frac{1}{2}at^2\right)\right] \cdot e^{\frac{imv}{\hbar}\left[x - ut + \frac{1}{2}at^2\right]} e^{\frac{mv}{\hbar}\left[x - ut + \frac{1}{2}at^2\right]} e^{\frac{imu}{\hbar}\left[x - \frac{1}{2}ut\right]} \quad (16)$$

这里我们将讨论一个方积包在式(13)中归纳的属性,当 t 从负值增加时对式(16)所描述的波包在 $t=0$ 时达到最简单的形式,然后随着时间增加传播.从式(16)式来可看出,在任何 u 和 $v>0$ 的情况下都没有加速度,波包在式(16)中时间的变化如图 3 所示.

通过相对速度伽利略变换,式(16)可以从贝瑞-巴拉兹波函数(13)得到.在伽利略变换中

$$x \rightarrow x - ut, \quad t \rightarrow t \quad (17)$$

变换后的波函数被相因子增加了

$$\exp\left[\frac{imu}{\hbar}\left(x - \frac{1}{2}ut\right)\right] \quad (18)$$

当 ψ_{BB} 被提升到复合速度 $u - iv$,这时是波包在式(16)的结果.在特殊情况 $u=0$ 中,我们重新得到

的解相当于近轴近似平面光学光束^[9].

现考虑波包在式(16)的性质. 明显的区别是, 它是自由粒子薛定谔方程(12)的解. 由于 $e^{\frac{mv}{\hbar}x}$, 所以对于 $v > 0$, 它是平方可积的. (在给定的渐进形式(15)是适用的, 因为 $\arg\left[q\left(x-ut+ivt-\frac{1}{2}at^2\right)\right] = \arctan\left[vt/\left(x-ut-\frac{1}{2}at^2\right)\right]$ 位于 $-\pi/2$ 和 $\pi/2$ 之间.) 归一化为

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x, t)|^2 \quad (19)$$

如下薛定谔方程与时间无关, 根据式(12)由空间导数代替时间导数我们可以得出

$$\partial_t N = \frac{i\hbar}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_x (\psi^* \partial_x \psi - \psi \partial_x \psi^*) = 0 \quad (20)$$

这是积分形式的全局连续性概率守恒方程.

在 $t=0$ 时, $N = \int_{-\infty}^{\infty} dx [\text{Ai}(qx)]^2 e^{2m vx/\hbar}$, 则积分表示为^[2, 8]

$$\text{Ai}(qx) = \frac{1}{2\pi q} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{i(kx+k^3/3q^3)} \quad (21)$$

同时

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(k-k'-iQ)x} = 2\pi\delta(k-k'-iQ) \quad (22)$$

令 $Q = 2mv/\hbar$ 则

$$N = \frac{\exp\left(\frac{Q^3}{12q^3}\right)}{2\sqrt{\pi Q q}} \quad (23)$$

期望值 $p = -i\hbar\partial_x$, p^2 , x 和 x^2 都可以由推导得到. 我们还列出均方偏差 $(\nabla p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$ 和 $(\nabla x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$:

$$\langle p \rangle = mu, \quad \frac{1}{2m} \langle p^2 \rangle = \frac{\hbar a}{4v} + \frac{1}{2} mu^2, \quad (\Delta p)^2 = \frac{\hbar ma}{2v} \quad (24)$$

$$\langle x \rangle = \frac{v^2}{2a} - \frac{\hbar}{4mv} + ut, \quad (\Delta x)^2 = \frac{1}{8} \left(\frac{\hbar}{mv}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\hbar v}{ma} + \frac{1}{2} \frac{\hbar a}{mv} t^2 \quad (25)$$

为了比较, 我们列出了相应数量的自由空间高斯包^[10-13]:

$$\Phi_0(x, t) = \frac{b}{\sqrt{b^2 + \frac{i\hbar t}{m}}} \exp\left\{i \frac{mu}{\hbar} \left(x - x_0 - \frac{1}{2} ut\right) - \frac{(x - x_0 - ut)^2}{2(b^2 + i\hbar t/m)}\right\} \quad (26)$$

$$p = mu, \quad \frac{1}{2m} \langle p^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4mb^2} + \frac{1}{2} mu^2, \quad (\Delta p)^2 = \frac{\hbar^2}{2b^2} \quad (27)$$

$$\langle x \rangle = x_0 + ut, \quad (\Delta x)^2 = \frac{1}{2} \left[b^2 + \left(\frac{\hbar t}{mb}\right)^2 \right] \quad (28)$$

我们注意到, 该位置均方偏差在每种情况下都符合一般结果^[14, 15]:

$$(\Delta x)^2 = (\Delta x)_0^2 + \left(\frac{\Delta p}{m}\right)^2 t^2 \quad (29)$$

我们使用的表单是在 $t=0$ 时传播.

下面指出各自的不确定性:

$$\text{艾里:} \quad (\Delta x \Delta p)^2 = \frac{\hbar^2}{4} \left[1 + \frac{1}{4} \frac{\hbar a}{mv^3} + \frac{a^2}{v^2} t^2 \right] \quad (30)$$

$$\text{高斯:} \quad (\Delta x \Delta p)^2 = \frac{\hbar^2}{4} \left[1 + \left(\frac{\hbar}{mb^2}\right)^2 t^2 \right] \quad (31)$$

高斯包在 $t=0$ 时有最小值 $\Delta x \Delta p = \hbar/2$, 而艾里波包有 $\Delta x \Delta p > \hbar/2$, 平方可积性取决于 v 的正值.

如果令 $u=0$, $v \rightarrow 0$, 将重新看到贝里-巴拉兹函数(13). 在这种极限规范发散为 $v^{-1/2}$, 能量和位置的期望值也发散. 对任何 $v > 0$ 动量值的期望值为零, $\langle x \rangle$ 在 $v^2/2a - \hbar/4mv$ 被确定(见式(25)). 上述的 at^2 在式(16)中确定波包的形状, 大小以及它的能量和动力, 但是没有给出实际的加速度.

综上所述, 粒子在自由空间中不加速. 我们已经知道, 贝里-巴拉兹在 at^2 中加速的艾里函数解其实是在限制情况下波包的平方可积的集合. 该位置和动量的期望值没有加速度, 所以在贝里-巴拉兹的限制下, 正常期望值平方不可积.

3.2 自由空间中艾里波包的自加速运动

现在考虑艾里波包的运动. 之前是在线性势中考虑艾里波包. 现在不考虑线性势看它的自由运动. 艾里函数的自由运动是什么样的性质? 对于一个自由粒子初始艾里波函数的运动通过下式确定:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \hat{H}_0 \psi(x, t)$$

式中

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m}, \quad \psi(x, 0) = \text{Ai}(ax)$$

一个自由粒子的薛定谔方程为

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t)$$

它的基本解是我们熟悉的平面波:

$$\varphi(x, t) = A e^{i(px - Et)/\hbar} = A e^{i\left(kx - \frac{\hbar k^2}{2m} t\right)}$$

这时上述方程的一般解为

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k) e^{i\left(kx - \frac{\hbar k^2}{2m} t\right)} dk$$

同时

$$\phi(k) = \int \psi(x, t) e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Ai}(ax) e^{-ikx} dx$$

为了方便, 令 $a > 0$ 积分为

$$\phi(k) = \frac{1}{2a} e^{i \frac{k^3}{3a^3}}$$

并且

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \frac{k^3}{3a^3}} e^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m})} dk \\ &= \frac{1}{4\pi a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m} + \frac{k^3}{3a^3})} dk \end{aligned}$$

用式(2)的积分形式, 则

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\frac{1}{3}t^3 + xt)} dt$$

这时

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \frac{1}{4\pi a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m} + \frac{k^3}{3a^3})} dk = \\ \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i[\frac{k}{a}(ax - \frac{\hbar a^2 t}{2m} + \frac{k^3}{3})]} d\left(\frac{k}{a}\right) &\equiv \left(\omega \equiv \frac{k}{a}\right) \\ \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\frac{1}{3}\omega^3 - \frac{\hbar a^2 t}{2m}\omega^2 + a\omega x)} d\omega &= \\ \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i[\frac{1}{3}(\omega - b)^3 - \frac{a^4 \hbar^2 t^2}{4m^2}\omega + \frac{a^6 \hbar^3 t^3}{24m^3} + a\omega x]} d\omega &= \left(b \equiv \frac{\hbar a^2 t}{2m}\right) \\ \frac{1}{4\pi} e^{i \frac{b^3}{3}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i[\frac{1}{3}(\omega - b)^3 + a\omega x - b^2 \omega]} d\omega &= \quad (y = \omega - b) \\ \frac{1}{2} e^{i \frac{b^3}{3}} e^{i(axb - b^3)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i[\frac{1}{3}y^3 + (ax - b^2)y]} dy &= \\ \frac{1}{2} e^{ib(ax - \frac{2}{3}b^2)} \text{Ai}(ax - b^2) &= \\ \frac{1}{2} e^{i \frac{\hbar a^3 t}{2m}(x - \frac{\hbar^2 a^3 t^2}{6m^2})} \text{Ai}\left[a\left(x - \frac{\hbar^2 a^3 t^2}{4m^2}\right)\right] \end{aligned}$$

如果令

$$\frac{B}{\hbar^{2/3}} = a$$

我们将得到

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2} e^{i \frac{B^3 t}{2m\hbar}(x - \frac{B^3 t^2}{6m^2})} \text{Ai}\left[\frac{B}{\hbar^{2/3}}\left(x - \frac{B^3 t^2}{4m^2}\right)\right]$$

这一点不同于下式在文献[2]的结果

$$\psi(x, t) = e^{i \frac{B^3 t}{2m\hbar}(x - \frac{B^3 t^2}{6m^2})} \text{Ai}\left[\frac{B}{\hbar^{2/3}}\left(x - \frac{B^3 t^2}{4m^2}\right)\right]$$

因此, 我们可以得出结论: 艾里波包在自由运动中不传播, 群速度由下式导出:

$$x = \frac{B^3 t^2}{4m^2} \Rightarrow v = \dot{x} = \frac{\hbar^2 a^3}{2m^2} t$$

我们可以看到波包在自由运动中的恒定加速度是 $\hbar^2 a^3 / 2m^2$. 但是, 施加在波包上的力 $F = \hbar^2 a^3 / 2m$ 导

致了这个加速度, 但这个力是什么原因造成的? 显然根据以上计算, 波包的加速是由于 Airy 波包本身的特殊扩散性质决定的一个波包群速度的体现而已.

3.3 量子力学中艾里波包的唯一性

3.3.1 简介

尽管贝里-巴拉兹已经引入了自由粒子薛定谔方程的解——具有匀加速、无扩散传播的艾里波包, 但是还需对这种波包解的量子力学推导予以补充论证. 贝里-巴拉兹注意到如下一维自由粒子的薛定谔方程(为了方便起见, 我们使用的原子单位为 $m = \hbar = 1$):

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \frac{1}{2} p^2 \psi(x, t) \quad (32)$$

确定一个非稳态的解:

$$\psi(x, t) = e^{iB^3 t/2} e^{i(x - B^3 t^2/6)} \text{Ai}\left\{B\left(x - \frac{B^3 t^2}{4}\right)\right\} \quad (33)$$

其中 B 是任意的正常数, 概率密度向正 x 位置加速, 其状态没有变化. 他们进一步指出, 由艾里波包轨迹的经典分析可以得出, 这是具有这个性质的唯一解. 在这里, 我们给出了一个从第一原理出发的完整的量子力学证明.

3.3.2 在自由空间中未扩散波包的一般形式

波函数 $\psi(x, t)$ 随时间变化, 可将式(32)写成如下形式:

$$\psi(x, t) = e^{-i p^2/2} \psi(x, 0) \quad (34)$$

如果 $\psi(x, t)$ 是一个未扩散波包, 我们有 $|\psi(x, t)| = |\psi(x + \eta(t), 0)|$, 其中 $\eta(t)$ 是 t 的函数. 最简单的进化算子实现了这一分解, 如果它存在的话, 可以是以下的形式:

$$e^{-i p^2/2} = e^{i\delta(t)} e^{i\gamma(t)} g(x) e^{i\eta(t)p} \quad (35)$$

其中 δ 、 γ 和 η 是 t 的标量函数, 而 g 是 x 的某种函数, 但是这是不可能的, 因为我们可以看到方程(35)右边的 $\exp(-i\eta(t)p)$. 因此, 我们用一般分解形式:

$$e^{-i p^2/2} = e^{i\delta(t)} e^{i\gamma(t)} g(x) e^{i\eta(t)p} e^{i f(t) H(x, p)} \quad (36)$$

其中 H 是随 x 和 p 变化, 与 t 无关, 其形式描述如下. 如果我们现在选择 $\psi(x, 0)$ 是 H 的一个特征函数, 并满足 $H\psi(x, 0) = E\psi(x, 0)$, 则式(34)变为

$$\psi(x, t) = e^{i\delta(t)} e^{i\gamma(t)} g(x) e^{iE f(t)} \psi(x + \eta(t), 0) \quad (37)$$

也就是说, 我们有一个未扩散的波包.

确定 H 随 x 和 p 的变化, 式(36)可写为

$$e^{i f(t) H(x, p)} = e^{-i\delta(t)} e^{-i\eta(t)p} e^{-i\gamma(t)} g(x) e^{-i p^2/2} \quad (38)$$

(下转 63 页)

error of the effective bandwidth formula $0.35/t_r$ is less than 3% , and the truncation error of the formula $1/\tau$ is less than 10%. Therefore , the effective bandwidth formula for the ideal rectangular wave is modified to be $3/\tau$. The bandwidths of a signal channel and an oscilloscope should be chosen greater than the effective bandwidths of the measured signals.

Key words: non-sinusoidal wave; Fourier series; effective bandwidth; truncation error

(上接 54 页)

接下来,我们将式(38)右边作为一个单一指数,对双连续指数应用贝克-坎贝尔-豪斯多夫公式(BCH).BCH 公式表述为

$$e^A e^B = e^{(A+B+C_1+C_2+C_3+\dots)} \quad (39)$$

其中 C_1, C_2, C_3, \dots 为 A, B 的嵌套交换子,如

$$C_1 = (1/2) [A, B];$$

$$C_2 = (1/12) [A, [A, B]] - [B, [A, B]] \quad (40)$$

将上式应用到式(38)右边的最后两个指数,其中 $A = -i\gamma(t)g(x)$, $B = -itp^2/2$, 我们看到一系列 C_i , $i=1, 2, \dots$, 只有当 $g(x) = x$ 时结束.在这种情况下, $i \geq 3$ 时, $C_i = 0$. 在式(38)中,令 $g(x) = x$, 利用式(39)和式(40)得到下式(独立的 x 或 p 的减小相位):

$$e^{i\gamma(t)H(x,p)} = e^{-i\delta(t)} e^{-it\gamma^2(t)/12} e^{i\eta(t)\gamma(t)/2} e^{-i\left[tp^2/2 + p\left\{\eta(t) + \frac{i\gamma(t)}{2}\right\} + \gamma(t)x\right]} \quad (41)$$

式(41)中任何 t 都必须满足 $f(t) = -t$, $\gamma(t) = \beta t$, $\eta(t) = \alpha t - \beta t^2/2$, 其中 α 和 β 是实数,并且

$$\delta(t) = \frac{-t\gamma^2(t)}{12} + \frac{\eta(t)\gamma(t)}{2}$$

因此,我们需要考虑 H 最普遍的形式是

$$H = p^2/2 + \alpha p + \beta x \quad (42)$$

自由粒子的演化算符可以在式(36)中用所需的形式表达,如

$$e^{-itp^2/2} = e^{-i\beta t^2(\beta t/3 - \alpha/2)} e^{i\beta t x} e^{i\beta t(\alpha - \beta t/2)} e^{-itH} \quad (43)$$

我们通过解下式确定 H 的本征函数:

$$[p^2/2 + \alpha p + \beta x - E] \Phi_E(x) \quad (44)$$

通过下式很容易得到

$$\Phi_E(x) = e^{-i\alpha x} \chi(x) \quad (45)$$

因此 χ 满足微分方程:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - 2\beta \left(x - \frac{2E + \alpha^2}{2\beta} \right) \right] \chi(x) = 0 \quad (46)$$

这类似于粒子在均匀磁场中的薛定谔方程.为了明确,我们取 β 为正值,可以通过改变如下变量解方程(35):

$$\xi = (2\beta)^{1/3} \left(x - \frac{2E + \alpha^2}{2\beta} \right) \quad (47)$$

将 $\chi(x)$ 变换为 $\chi'(\xi)$, 从而满足艾里函数的微分方程,即

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \xi \right) \chi'(\xi) = 0 \quad (48)$$

由方程(45)、(47)、(48),可得到:

$$\Phi_E(x) = e^{-i\alpha x} \text{Ai} \left[B \left(x - \frac{\alpha^2 + 2E}{B^3} \right) \right] \quad (49)$$

由式(44)可定义 $B = (2\beta)^{1/3}$. 现在我们可以通过选择 $\psi(x, t)$ 是 $\Phi_E(x)$ 与演化算子由式(32)给出的公式对它运算确定波包的时间演化.此时,可以方便地通过 $[(\alpha^2 + 2E)/B^3]$, 即移动 x 的原点,用 $x + [(\alpha^2 + 2E)/B^3]$ 代替 x . 这里我们只讨论非归一化波函数,因此所有的乘法常数可以忽视.所以 $\psi(x, t)$ 可简化为:

$$\psi(x, t) = e^{-iB^3 t^2(B^3 t/12 - \alpha/2)} e^{-i\alpha^2 t/2} e^{iB^3 t x/2} e^{-i\alpha x} \text{Ai} \left[B \left(x + \alpha t - \frac{B^3 t^2}{4} \right) \right] \quad (50)$$

很容易可以证明,尽管上面给出的 $\psi(x, t)$ 不同于式(33),但它满足式(32),并且 $|\psi(x, t)|^2$ 传播状态不发生变化,具有相同的恒定加速度.事实上,方程(33)和(50)本质上是一样的,可以通过 x 和 t 最初的变化来看.这两式的主要区别是,方程(33)是正 x 向一个单调递增的速度 $B^3 t/2$ 传播,方程(50)只满足 $t > t_0$, 其中 $t_0 = 2\alpha/B^3$, 速度 $v = 0$, $x = -\alpha^2/B^3$. 数据表明,如果最初的 x 和 t 分别为 $x \rightarrow (x - \alpha^2/B^3)$ 和 $t \rightarrow (t + 2\alpha/B^3)$, 则方程(50)可简化为式(44).

综上所述,贝里-巴拉兹的补充表明了自由粒子薛定谔方程的艾里波包解是唯一一个不传播的经典论点,该解的唯一性已经在量子力学中得以证明.

(未完待续)