



重庆大学

# 硕士学位论文

论文题目: 分数傅里叶变换及其应用

论文作者: 文 亮

专 业: 光学工程

论文导师: 王 丁 教授

答辩日期: 2008 年 5 月 30 日

# 分数傅里叶变换及其应用



## 重庆大学硕士学位论文

学生姓名：文 亮

指导教师：王 丁 教 授

专 业：光学工程

学科门类：工 学

重庆大学数理学院

二 〇〇 八年四月

# **Fractional Fourier Transform and Its Application**



**A Thesis Submitted to Chongqing University  
in Partial Fulfillment of the Requirement for the  
Degree of Master of Engineering**

**by  
Wen Liang**

**Supervisor: Prof. Wang Ding**

**Major: Optical Engineering**

**College of Mathematics and Physics of  
Chongqing University, Chongqing, China**

**April, 2008**

## 摘 要

分数傅里叶光学是将数学中的分数傅里叶变换引入光学而形成的现代光学新分支，它是傅里叶光学的发展和延拓，它可以使我们用一个新的观点去审视光的传播、成像、信息处理等问题，并为我们提供一种新的工具去处理这些问题。分数傅里叶光学是近年来信息光学前沿研究的一个热点它正在被得到越来越多的新应用。

自从分数傅里叶变换被成功引入光学领域，在短短的几年中，分数傅里叶光学的基本理论框架已经建立，但是它的实际应用方面的研究成果相对较少，而且不够成熟。本文以发展分数傅里叶光学的实际应用为目的，对分数域滤波、分数傅里叶变换啁啾滤波在图像处理中的应用等方面作了深入的研究。从常规傅里叶变换的理论出发，着重分析常规傅里叶变换不能解决的问题，从而扩展到分数级次的傅里叶变换，主要探讨分数傅里叶变换及其应用。

本论文详细的介绍了分数傅里叶变换的基本理论和部分应用，阐述了两种分数傅里叶变换的光学实现方式。接着给出了 Wigner 分布函数定义和物理意义，然后在理论上给出了研究光束分数傅里叶变换的 Wigner 分布函数法，探讨了分数傅里叶变换和菲涅耳衍射之间的联系。

针对常规傅里叶变换所不能解决的啁啾噪声滤除问题，利用 Wigner 分布分析函数分数傅里叶变换的空间域和频率域特性，提出在分数傅里叶变换域进行啁啾滤波的原理和方法。并将该方法应用到图像处理当中，建立分数傅里叶变换的数值模拟算法，对分数傅里叶变换滤除一维和二维图像的啁啾噪声进行了计算机仿真，获得了满意的效果，也验证了该方法在图像处理中的有效性，同时也提出了一种改善图像的新方法。

有关用分数傅里叶变换进行啁啾频率的滤波在国内介绍不是很清楚，本文理清了其原理，并制作了一维和二维计算机模拟实验，对此类问题的理解和解决有较好的参考价值。

**关键词：**分数傅里叶变换，Wigner 分布，啁啾滤波，菲涅耳衍射

## ABSTRACT

Fractional Fourier optics becomes a new branch of the modern optics after the introduction of Fractional Fourier Transform (FRT) from mathematics to optics. It is regarded as the development and extension of Fourier optics. It not only makes us look at optical propagation, optical imaging and information processing from a new point, but also provides us a new tool to treat these problems. Fractional Fourier optics has been widely used in many fields of information processing and will be used more widely in the future.

During a few years the basic theoretical frame has been set up since Fractional Fourier Transform was successfully introduced into the optic field. However, the researches on its actual application are relatively sluggish and immature. This dissertation aims at the development of the actual application of Fractional Fourier Transform and involves the further research of Fractional Fourier Domain Filtering and chirp filtering in terms of fractional Fourier transform etc.

In this paper, the basic theory and some applications are introduced. Two optical methods of fractional Fourier transform are represented. The definition and physical of Wigner distribution are presented, then the method of study on fractional Fourier transform by Wigner distribution is suggested. We also do further research on the relation between fractional Fourier transform and Fresnel diffraction.

Aim at the limit of chirp filtering based on the conventional Fourier transform, the characteristics of fractional Fourier transform in spatial domain and frequency domain are discussed in terms of Wigner distribution. The principle of chirp filtering in fractional Fourier domain is proposed. Then, a method of chirp filtering is presented in image processing. The computer-simulation results of chirp filtering for 1D and 2D image are obtained satisfactorily, which have shown the availability of this method in image processing. So, we present a new method to improve the quality of images.

There is few internal theory about chirp filtering in terms of fractional Fourier transform. In this paper, the principle of chirp filtering in terms of fractional Fourier transform is resolved. Then the computer-simulation results of chirp filtering for 1D and 2D image are presented. So, we can have suitable reference about this subject

mentioned above.

**Keywords:** fractional Fourier transform, Wigner distribution, chirp filtering, Fresnel diffraction

# 目 录

摘 要 .....	I
ABSTRACT.....	II
1 绪 论 .....	1
1.1 分数傅里叶变换的发展历史 .....	1
1.2 分数傅里叶变换的研究现状与展望 .....	2
1.3 论文的选题和研究内容 .....	5
1.3.1 研究目的 .....	5
1.3.2 研究内容 .....	5
1.3.3 创新之处 .....	6
2 分数傅里叶变换 .....	7
2.1 分数傅里叶变换的定义 .....	7
2.2 分数傅里叶变换的基本性质 .....	7
2.3 分数傅里叶变换的光学实现 .....	9
2.3.1 渐变折射率介质(GRIN) .....	9
2.3.2 Lohmann 薄透镜系统 .....	11
2.4 分数傅里叶变换与 WIGNER 分布函数 .....	12
2.4.1 Wigner 分布函数 .....	12
2.4.2 分数傅里叶变换与 Wigner 分布函数的关系 .....	13
2.5 分数傅里叶变换与菲涅耳衍射 .....	14
2.5.1 菲涅耳衍射 .....	14
2.5.2 分数傅里叶变换与无透镜的菲涅耳衍射 .....	14
2.5.3 分数傅里叶变换与带透镜的菲涅耳衍射 .....	16
3 分数傅里叶域滤波 .....	20
3.1 分数傅里叶域滤波的特性 .....	20
3.2 分数傅里叶域滤波的原理 .....	20

3.3 分数傅里叶变换的数值模拟 .....	22
3.3.1 分数傅里叶变换的数值模拟算法 .....	22
3.3.2 角谱传播理论 .....	26
3.3.3 分数傅里叶变换数值模拟中的图像采样 .....	27
3.3.4 Lohmann 透镜系统分数傅里叶变换数值模拟的步骤 .....	28
3.3.5 实验结果 .....	29
3.4 啁啾滤波基本原理 .....	29
3.5 分数傅里叶变换啁啾滤波应用于图像处理 .....	30
<b>4 总 结 .....</b>	<b>34</b>
<b>致 谢 .....</b>	<b>36</b>
<b>参考文献 .....</b>	<b>37</b>
<b>附 录 .....</b>	<b>40</b>



# 1 绪 论

## 1.1 分数傅里叶变换的发展历史

信息光学是近四十年发展起来的一门新兴学科，它是在全息术、光学传递函数和激光的基础上，从传统的、经典的波动光学中脱颖而出的。近年来，现代信息光学发展迅速，并已渗透到科学技术的诸多领域，成为信息科学的重要分支，得到越来越广泛的应用。

傅里叶变换(Fourier Transform)是研究线性系统和进行信号分析的重要工具，同时，由于光学系统能实现傅里叶变换，使得它在信息光学中占有重要地位。1946年 P. M. Duffieux 把傅里叶变换的概念引入光学领域，由此逐渐发展而形成信息光学的一个重要分支—傅里叶光学。傅里叶光学应用线性系统理论和空间频谱的概念，分析光的传播、衍射和成像等问题；用改变频谱的方法处理相干成像系统中的光信息；用频谱被改变的观点评价非相干成像系统的像质。在激光技术发展的推动下，傅里叶光学开辟了许多应用领域，已取得了很大的成就。

分数傅里叶变换(Fractional Fourier Transform)是更广义的傅里叶变换。分数傅里叶光学是将数学中的分数傅里叶变换引入光学而形成的现代光学新分支，它是傅里叶光学的发展和延拓，它可以使我们用一个新的观点去审视光的传播、成像、信息处理等问题，并为我们提供一种新的工具去处理这些问题。分数傅里叶变换由于具有分数阶这一参量，使得它比普通傅里叶变换具有更多的功能，从而导致它在光学和信息处理中必将有更多的应用。因此，分数傅里叶光学已成为近年来信息光学前沿研究的一个热点。

分数傅里叶变换的提出最早可以追溯到 1929 年。1937 年 Condon 在他的论文中提出“广义分数傅里叶变换”的概念。1961 年 Bargmann 指出分数傅里叶变换可以重新用厄米多项式和积分变换来分别定义。为解决量子力学中各种条件下的 Schrodinger 方程，V. Namias 于 1980 年比较系统的提出了分数傅里叶的数学定义和性质，并讨论了其本征函数<sup>[1]</sup>。1987 年，A. C. McBride 和 F. H. Kerr 又进一步研究了分数傅里叶变换，把变换看作充分光滑函数构成的向量空间中的算子，建立了分数傅里叶变换的完整理论系统<sup>[34]</sup>。

从1993年开始，分数傅里叶变换作为一种新的研究工具在光学领域迅速得到应用。1993年9月，H.M.Ozaktas和D.Mendlovic首次利用平方率负梯度折射率(GRIN)介质在光学上实现了分数傅里叶变换，并利用分数傅里叶变换进行分数傅里叶变换域滤波<sup>[2]</sup>。1993年10月，A. W.Lohmann利用傅里叶变换相当于在Wigner分布函数相空间中角度为  $\pi/2$  的旋转这一性质，将图像旋转、Wigner分布函数相空间旋转

和分数傅里叶变换三个概念结合起来阐释分数傅里叶变换的物理意义,并基于此给出了实现分数傅里叶变换的单透镜和双透镜结构<sup>[3]</sup>。至此,分数傅里叶变换开始引起光学界的广泛关注,尤其在光学信息领域受到充分的重视,1995年4月H.M.Ozaktas和D.Mendlovic总结了光学分数傅里叶变换的发展过程,研究了Fresnel衍射和光学分数傅里叶变换的关系,提出分数傅里叶光学(Fractional Fourier Optics)这个新概念,目前,分数傅里叶光学已经发展成为现代光学的一个重要分支<sup>[32]</sup>。

D.Mendlovic 等人利用分数傅里叶变换的概念,提出了分数相关的定义,并给出了可能的实现结构和相应的数值模拟结果,同年,刘树田等人研究了光学分数傅里叶变换级联的尺度问题,给出了实现分数傅里叶变换的推广结构。<sup>[7]</sup> 1995年以来,A. Sahin 等较为系统研究了具有轴对称性二维分数傅里叶变换,给出了不同可调参数的光学实现结构<sup>[35]</sup>。1996年,A. W. Lohmann 基于分数傅里叶变换,将光学 Hilber 变换分数化,并给出相应的模拟结果。<sup>[15]</sup> 1997年,华建文等人给出了分数傅里叶变换光学实现的基本单元,提高了分数傅里叶变换光学实现系统设计的自由度<sup>[18]</sup>,同年,D.D.Dragoman 等运用分数傅里叶变换研究了光束的近场和远场特<sup>[21]</sup>。1998年吕百达等人基于光学 ABCD 定理研究了一般光学系统和光学谐振腔的分数傅里叶变换表示,同年,X.E.Wang 等人研究了定标分数傅里叶变换,讨论了定标参数对分数傅里叶变换的影响,并给出了实现定标分数傅里叶变换的光学系统<sup>[23]</sup>。2001年,刘树田等人提出了基于广义分数卷积算子的光学图像加密,2002年王长涛等研究了复数阶分数傅里叶变换的光学实现<sup>[19]</sup>。曾阳素等较为系统的研究了分数傅里叶变换在光学全息、计算全息、滤波中的实际应用,并对其相关理论和技术做了较深入的探讨。2003年谢世伟等研究了变形分数相关及其光学和数字式实现<sup>[17]</sup>。2004年,M. Bultheel 等人将分数傅里叶变换应用于部分相干光脉冲的研究<sup>[10]</sup>。目前,光学分数傅里叶变换正在进一步发展之中,相信其研究成果将对现代光学产生深远的影响。

## 1.2 分数傅里叶变换的研究现状与展望

从分数傅里叶变换引入光学研究的近十年中,国内外学者主要是围绕分数傅里叶变换的定义、光学实现、分数傅里叶变换域滤波、自成像效应、快速算法等方面进行研究,多数研究集中在光学信息处理方面。

分数傅里叶变换的最重要参量是它的分数阶,它的引入使得傅里叶变换成为分数傅里叶变换的一种特殊情况,或者说分数傅里叶变换是傅里叶变换的更为一般的情况,它能解决一些常规傅里叶变换所不能解决的。傅里叶光学中的频域也就成为分数傅里叶光学中的连续分布的分数域中的特殊位置。傅里叶变换中的每一特性和每一种应用都是分数傅里叶变换的一种特殊情况。因此,在发展已相当

完善的使用傅里叶变换和频域概念的每一领域都存在用分数傅里叶变换推广和改善的可能性，这就为分数傅里叶光学的发展提供了广阔的空间，这方面的工作有些已经被研究或被提出，例如：

分数傅里叶变换是空变的，在分数域滤波对于空变的信息处理具有其独特的优越性。分数傅里叶变换是更广义的傅里叶变换，由于引入了分数阶这个新的自由度，使得分数傅里叶变换在操作上比常规傅里叶变换更加灵活。分数傅里叶变换可作为广义空间滤波的基础，它扩展了光学信息处理的内容和方式。分数傅里叶变换的引入，使得滤波操作可以在分数域上进行，通过在不同的分数傅里叶变换面上引入不同的滤波器，可以实现更多的操作，从而增加了滤波操作的自由度。<sup>[4],[5]</sup>

分数傅里叶变换对应于 Wigner 分布函数在相空间的旋转，因此用它来研究相空间的理论具有明显的优势。傅里叶变换不仅是有效的数学工具，而且是一种对研究物体光强分布或光振幅分布函数进行分析和综合的一种分析方法。分析傅里叶变换的基本理论，研究分数傅里叶变换参数和表示方法。研究光传输系统的分数傅里叶变换表述，利用分数傅里叶变换与 Wigner 分布函数相空间的旋转的关系，得到  $P$  阶分数傅里叶变换对应 Wigner 分布函数旋转角度  $\varphi: \varphi = \frac{\pi}{2} \cdot P$ 。而 Wigner 分布函数的旋转可以通过光束经过自由空间和球面薄透镜传输来实现。因而实现 Wigner 分布函数旋转角度中的光学系统就可实现  $P$  阶分数傅里叶变换。<sup>[3]</sup>

分数傅里叶变换和分数盖伯变换、小波变换等有密切的联系，它对特定信号的处理也颇具传统变换所不具有和无法比拟的优点。<sup>[20]</sup>

负二次型渐变折射率介质和分数傅里叶变换有着共同的本征模式，分数傅里叶变换可作为研究它成像问题的理想工具。<sup>[21]</sup>

由于部分相干成像系统的互强度可用分数傅里叶变换来表示，因此可以将分数傅里叶变换用于部分相干成像系统的研究。<sup>[22]</sup>

通常的相关操作是平移不变的，即输入信号的平移将导致相关输出相应的平移。而分数相关则是平移变化的，其分数阶是空间位置的函数。因此可将分数傅里叶变换同传统的光学相关相结合而用于局域目标的识别，进而建立一种新的分数相关理论。<sup>[2]</sup>

分数傅里叶变换可以在两个方向上实现不同的操作，采用两个互相垂直、焦距不同的柱透镜的组合，可以实现变形分数傅里叶变换(AnamorphicFRT)，可用于变形光学系统的研究。<sup>[27]</sup>

由于分数傅里叶变换中分数阶的特性，用它可以制成一种全新的全息图——分数傅里叶变换全息图(FRTH)。它是利用物光波经分数傅里叶变换后的光波与参考

光波干涉所形成的干涉图样，即 FRTTH 既记录有物光波的信息，又记录有分数傅里叶变换系统的信息，如透镜的焦距  $f$ 、物体到透镜的距离  $z$ 。利用分数傅里叶变换彩虹全息图再现的像的位置、尺度的特征与再现系统分数阶有关的特性，可以将它应用于防伪，其防伪功能表现在以下亮点上：1) 在原参考光方向用白光再现时，人眼不能直接从分数傅里叶变换彩虹全息图读出所记录的图像。2) 在记录分数傅里叶变换全息图时，可用多狭缝对物体各部位进行彩色编码，或对物体进行尺度编码，为了读出经编码的物体信息，再现分数傅里叶变换系统的分数阶  $P_2$  必须与记录系统的分数阶  $P_1$  匹配，这里最简单的情况  $P_1 + P_2 = 2$ ，即若要在一个特定的  $P_2$  阶分数傅里叶变换系统的输出面获得再现像，则记录系统必须为  $P_1$  阶分数傅里叶变换系统。因此，可以依据能否在特定的分数傅里叶变换系统的输出面再现出一定尺度或编码颜色的图像信息，来判断全息图的真伪。<sup>[28]</sup>

分数傅里叶变换具有特殊的级联条件，将分数傅里叶变换与双相位编码技术相结合可用于图象加密，使得密钥由原来的两重变成四重从而提高了系统的安全保密性能。<sup>[17]</sup>

分数傅里叶变换特殊的周期性、连续性和可交换性，可用于对图象信息进行多级次、多通道的编码与解码。<sup>[23]</sup>

由于分数傅里叶变换与菲涅尔衍射有着密切关系，因此用分数傅里叶变换可以研究光束的传播、泰伯(Talbot)效应等问题，还可以用它来进行衍射光学器件的设计、全息存储、波前的分析与校正以及设计激光谐振腔等等。<sup>[32]</sup>

用分数傅里叶变换方法，将一些典型的光传输问题用分数傅里叶变换表示。用 Wigner 分布函数分析方法，研究了椭圆高斯光束、厄米—高斯光束、双曲余弦—高斯光束、Bessel—高斯光束、平顶多高斯光束经过分数傅里叶变换系统的传输变换问题，并与其他研究光传输的方法和有关结果进行比较。研究表明，分数傅里叶变换阶数对椭圆高斯光束、厄米—高斯光束、双曲余弦—高斯光束、Bessel—高斯光束、平顶多高斯光束的光强分布有明显影响，光斑尺寸随阶数周期性变化；通过适当选取分数傅里叶变化阶数可以使二维光束在  $x, y$  方向的束宽相等。光束的轴上光强随分数傅里叶变换阶数也呈周期性变化，其周期为 2。由于椭圆高斯光束、厄米—高斯光束、双曲余弦—高斯光束、Bessel—高斯光束、平顶多高斯光束是实际工作中经常遇到的光束，这些方法和结果对光束整形和研究一般光束的传输特性有实际意义。<sup>[36]</sup>

除一些特殊的函数外，函数的分数傅里叶变换一般不具有解析形式。需要对其进行数值计算。分数傅里叶变换的数值计算一般很复杂，效率低、精度依赖于模型函数。在对具体光束的分数傅里叶变换特性进行研究的同时，对分数傅里叶变换的快速算法进行了研究，从而实现快速、精确计算的目的。<sup>[9]</sup>

分数傅里叶变换在光学信息处理中能够实现更多的操作，具有广泛的应用那个前景，它的更多的应用尚待人们去进一步开拓。

## 1.3 论文的选题和研究内容

### 1.3.1 研究目的

自从分数傅里叶变换被成功引入光学领域，在短短的几年中，分数傅里叶光学的基本理论框架已经建立，但是它的实际应用方面的研究成果相对较少，而且不够成熟。本文以发展分数傅里叶光学的实际应用为目的，对分数域滤波、分数傅里叶变换啁啾滤波在图像处理中的应用等方面作了深入的研究。从常规傅里叶变换的理论出发，着重分析常规傅里叶变换不能解决的问题，从而扩展到分数级次的傅里叶变换，主要探讨分数傅里叶变换及其应用。

### 1.3.2 研究内容

#### ①分数傅里叶变换

首先较为详细的介绍了分数傅里叶变换的基本理论和部分应用，阐述了两种分数傅里叶变换的光学实现方式，一种是 Mendlovic 和 Ozaktas 等人提出的用渐变折射率介质(GRIN)作为分数傅里叶变换器，介质的长度对应于变换阶数；另一种是 Lohmann 提出的用普通透镜来实现分数傅里叶变换。接着给出了 Wigner 分布函数定义和物理意义，然后在理论上给出了研究光束分数傅里叶变换的 Wigner 分布函数法。最后探讨了分数傅里叶变换和菲涅耳衍射之间的联系。

#### ②分数傅里叶域滤波

1) 分数傅里叶变换是更广义的傅里叶变换，由于引入了分数阶这个新的自由度，使得分数傅里叶变换在操作上比常规傅里叶变换更加灵活。分数傅里叶变换可作为广义空间滤波的基础，它扩展了光学信息处理的内容和方式。分数傅里叶变换的引入，使得滤波操作可以在分数域上进行，通过在不同的分数傅里叶变换面上引入不同的滤波器，可以实现更多的操作，从而增加了滤波操作的自由度。

2) 对于分数傅里叶变换的应用，分数傅里叶变换数值模拟算法的研究是十分重要的，因为一般情形下分数傅里叶变换给不出解析表达式。本文对分数傅里叶变换数值模拟算法——解啁啾法和厄米—高斯函数展开法进行了研究，给出模拟结果，并对两种方法进行分析和比较。

由于 Lohmann 型分数傅里叶变换和 Namias 型分数傅里叶变换是完全等价的，所以对 Namias 型分数傅里叶变换的数值模拟实际上就是对 Lohmann 给出的两种类型的光学实现结构的数值模拟。最后通过数值模拟实验证明了理论分析和分数傅里叶变换数值模拟算法的可靠性。

3) 我们知道，通常的滤波系统是在傅里叶频谱面上引入滤波器对噪声进行去

除。然而,对于一些噪声,信号和噪声在常规的傅里叶变换域(即 1 次傅里叶变换域)具有明显重叠,在空域和频域都难以分离。啁啾噪声即是此类噪声,必须在分数域(非整数域)对其进行滤波操作。分数傅里叶变换是一种空间平移变的操作,所以许多在空间域和频率域都重叠的信号和噪音在特定的分数傅里叶变换域却能够很好地分开。根据啁啾信号在特定分数傅里叶域的高度聚焦性,选择一定的分数傅里叶域,那么在时域和频域不容易检测到的啁啾信号就能通过相应的分数傅里叶变换检测到。信号和噪声也就可以很容易的分开了。

啁啾噪声在信号处理中是一种常见的非线性高频噪声,采用常规的傅里叶变换滤波系统已无法滤出噪声,必须采用分数傅里叶变换来滤波。为此,采用 Wigner 分布来分析函数在空间域和频率域的分布特征,即分析函数的 Wigner 分布特性。利用 Wigner 分布分析函数分数傅里叶变换的空间域和频率域特性,提出在分数傅里叶变换域进行啁啾滤波的原理和方法,并建立分数傅里叶变换的数值模拟算法,将该方法应用到图像处理当中,提出了一种新的改善图像质量的方法。

### 1.3.3 创新之处

有关用分数傅里叶变换进行啁啾频率的滤波在国内介绍不是很清楚,本文理清了其原理,并制作了一维和二维计算机模拟实验,对此类问题的理解和解决有较好的参考价值。

常规傅里叶变换只针对整数级次的变换,而分数傅里叶变换则将变换的级次推广到了分数域,藉之可以从一个全新的角度去认识光的传播、成像和信息处理,从而可获得许多新的应用,根据啁啾信号在特定分数傅里叶域的高度聚焦性,选择一定的分数傅里叶域,那么在时域和频域不容易检测到的啁啾信号就能通过相应的分数傅里叶变换检测到,从而实现信号和噪声的分离,改善图像的质量。

## 2 分数傅里叶变换

### 2.1 分数傅里叶变换的定义

设输入函数为  $f(x)$ ，则分数傅里叶变换的定义有<sup>[1]</sup>

$$F^P[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} B_P(x, x') f(x') dx' \quad (2.1)$$

其中

$$B_P(x, x') = \frac{\exp[-i(\pi\hat{\phi}/4 - \phi/2)]}{|\sin \phi|^{1/2}} \bullet \exp[i\pi(x^2 \cot \phi - 2xx' \csc \phi + x'^2 \cot \phi)] \quad (2.2)$$

这里， $\phi = P\pi/2$ ，并且  $\hat{\phi} = \text{sgn}(\sin \phi)$ 。 $P$  为分数傅里叶变换的级次，对  $P=0$  和  $P=\pm 2$  时，函数有确定的值， $B_0(x, x') = \delta(x - x')$  和  $B_{\pm 2}(x, x') = \delta(x + x')$

Mendlovic 和 Ozaktas 等人从光在负二次型渐变折射率介质中的传播入手，给出了分数傅里叶变换的级数形式的表达式，而 Lohmann 则从 Wigner 分布函数出发，用 Wigner 分布函数的旋转来定义分数傅里叶变换。可以证明，这二种定义是完全等效的。<sup>[3]</sup>

### 2.2 分数傅里叶变换的基本性质

#### 1. 线性性质

几个函数线性叠加的分数傅里叶变换等于这几个函数同级次的分数傅里叶变换的线性叠加，

$$F^P \{c_1 f(x) + c_2 g(x)\} = c_1 F^P \{f(x)\} + c_2 F^P \{g(x)\} \quad (2.3)$$

其中， $c_1, c_2$  是任意复常数。

#### 2. 连续性性质

对于  $P_1, P_2$  阶两次分数傅里叶变换，有

$$F^{c_1 P_1 + c_2 P_2} f(x) = F^{c_1 P_1} F^{c_2 P_2} f(x) = F^{c_2 P_2} F^{c_1 P_1} f(x) \quad (2.4)$$

#### 3. 指数可加性和交换性

级联的数学分数傅里叶变换可以改变其先后次序，并有可加性和交换性，有

$$F^{P_1} \{F^{P_2} \{f(x)\}\} = F^{P_2} \{F^{P_1} \{f(x)\}\} = F^{P_1 + P_2} \{f(x)\} \quad (2.5)$$

#### 4. 可逆性质

对一个函数进行  $P$  级分数傅里叶变换后，接着进行  $-P$  级的分数傅里叶变换，则可得到原函数：

$$F^P \{F^{-P} \{f(x)\}\} = F^0 \{f(x)\} = f(x) \quad (2.6)$$

## 5. 周期性质

分数傅里叶变换是周期为 4 的变换,

$$F^{p+4}\{f(x)\}=F^p\{f(x)\} \quad (2.7)$$

特别是当(2.4)式中  $c_2P_2=4$  时, 有

$$F^{c_1P_1+4}f(x)=F^{c_1P_1}F^4f(x)=F^{c_1P_1}f(x) \quad (2.8)$$

这是变换面的自成像。

## 6. 平移性质

分数傅里叶变换具有特殊的平移性质:

$$F^p\{f(x+m)\}=\exp\left[im\sin\alpha(v+m\cos\alpha/2)\right]\cdot F^p\{f(x)\}_{(v+m\cos\alpha)} \quad (2.9)$$

其中  $m$  是输入平移量。可见输入信号的平移不仅导致一个附加的位相因子, 还使其分数傅里叶变换的输出信号产生了一个平移。

## 7. 相似性质

分数傅里叶变换的输入信号的尺度发生变化时, 不仅会引入一个与尺度因子有关的二次位相, 而且还会引起分数傅里叶变换的级次发生改变,

$$F^p\{f(cx)\}=\sqrt{\frac{1-i\cot\alpha}{c^2-i\cot\alpha}}\exp\left[i\frac{v^2}{2}\cot\alpha\cdot\left(1-\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}\right)\right]\cdot F^{p'}\{f(x)\}_{\left(v\frac{\sin\beta}{c\sin\alpha}\right)} \quad (2.10)$$

其中  $c$  是输入信号的尺度变化因子,  $\beta=P'\pi/2$ , 并且有  $\tan\beta=c^2\tan\alpha$ 。这与传统的傅里叶变换有着明显的不同。

## 8. 部分卷积与相关

可如下定义函数  $f(x)$ 、 $g(x)$  的卷积操作: :

$$CONV(f,g)=F^{-1}\{F^1f(x)\times F^1g(x)\} \quad (2.11)$$

类似地可定义分数阶卷积为:

$$CONV^p(f,g)=F^{-p}\{F^pf(x)\times F^pg(x)\} \quad (2.12)$$

分数相关定义为:

$$CORP^p\{f(x),g(x)\}=CONP^p\{f(x),g^*(-x)\} \quad (2.13)$$

## 9. 帕色伐定律

同传统的傅里叶变换相同, 分数傅里叶变换也是能量守恒的, 满足帕色伐定律

$$\int|f(x)|^2dx=\int|F^p\{f(x)\}|^2dv \quad (2.14)$$

## 10. 乘法法则

$$F^p\left[y^mf(y)\right](x)=\left[x\cos(2\pi P)-i\sin(2\pi P)D\right]^mF^p\left[f(y)\right](x) \quad (2.15)$$

其中  $D$  表示微分算符  $d/dx$ 。

## 11. 微商法则



$$F^p \left[ D^m f(y) \right] (x) = \left[ -x \sin(2\pi P) + \cos(2\pi P) D \right]^m F^p \left[ f(y) \right] (x) \quad (2.16)$$

12.混合积法则

$$F^p \left[ (yD)^m f(y) \right] (x) = \left\{ \left[ -\sin(2\pi P) + ix^2 \cos(2\pi P) \right] \sin(2\pi P) + x \cos(2\pi P) D - i \sin(2\pi P) x \cos(2\pi P) D^2 \right\}^m \cdot F^p \left[ f(y) \right] (x) \quad (2.17)$$

13.指数规则

$$F^p \left\{ \exp(i b y) f(y) \right\} (x) = \exp \left( i b \cos \left\{ 2\pi P \left[ x + 0.5 b \sin(2\pi P) \right] \right\} \right) \times F^p \left\{ f(y) \right\} \left[ x + b \sin(2\pi P) \right] \quad (2.18)$$

14.定标规则

除以上的各条性质外, 分数傅里叶变换还有定标关系, 即当变换函数  $f(x)$  的自变量  $x$  按比例缩放时, 新函数  $f(x_1)$  的  $a$  阶傅里叶变换  $F^a f(x_1)$  与原函数的  $b$  阶傅里叶变换  $F^b f(x_1)$  之间有关系:

$$\left[ F^a f(x_1) \right] (x_1) = S(a, b, x_1) \left[ F^b f(x) \right] (x) \quad (2.19)$$

## 2.3 分数傅里叶变换的光学实现

通常有两种分数傅里叶变换的光学实现方式, 一种是 Mendlovic 和 Ozaktas 等人提出的用渐变折射率介质(GRIN)作为分数傅里叶变换器, 介质的长度对应于变换阶数。另一种是 Lohmann 提出的用普通透镜来实现分数傅里叶变换。

### 2.3.1 渐变折射率介质(GRIN)

输入光束的横向复振幅分布在渐变折射率(GRIN)介质中的传播可用  $P$  阶 FRT 描写, 分数阶  $P$  与传播距离成正比。

对折射率分布为  $n(r)$  的渐变折射率介质,

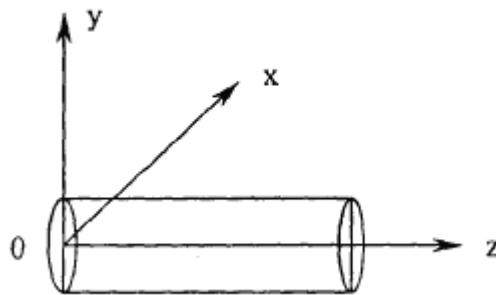


图 2.1.负二次型渐变折射率介质

Fig2.1. -2D GRIN

$$n^2(r) = n_1^2 \left[ 1 - \left( \frac{n_2}{n_1} \right) r^2 \right] \quad (2.20)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (2.21)$$

其中,  $r$  为径向坐标,  $n_1$  为渐变折射率介质中心的最大折射率,  $n_2$  为渐变折射率介质的最小折射率。

设输入面为  $z=0$ , 输入函数为  $f(x)$ , 则在

$$z = L = \frac{\pi}{2} \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^{1/2} \quad (2.22)$$

上得到  $F^1 f$ 。由于系统在轴向完全均匀, 因此在  $z=PL$  的面上得到  $F^P f$ 。

Mendlovic 和 Ozaktas 从光在渐变折射率(GRIN)介质中的传播入手给出了分数阶傅里叶变换的具体数学形式。

在渐变折射率介质中的本征模是厄米—高斯函数:

$$\psi_{lm}(x, y) = H_l \left( \frac{\sqrt{2}x}{\omega} \right) H_m \left( \frac{\sqrt{2}y}{\omega} \right) \exp \left( -\frac{x^2 + y^2}{\omega^2} \right) \quad (2.23)$$

$H_l$ 、 $H_m$  分别是  $l$ 、 $m$  阶厄米多项式

$$\omega = (2/k)^{1/2} (n_1/n_2)^{1/4}, k = 2\pi n_1/\lambda \quad (2.24)$$

$\lambda$  是波长。在渐变折射率介质中, 每个厄米—高斯模以不同的传播常数  $\beta_{lm}$  传播。

$$\beta_{lm} = k \left[ 1 - \frac{2}{k} \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^{1/2} (l+m+1) \right]^{1/2} \approx k - \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^{1/2} (l+m+1) \quad (2.25)$$

则在渐变折射率介质中一个特定的模( $l, m$ )的传输可写为:

$$E_{lm}(x, y, z) = \psi_{lm}(x, y) \exp(i\beta_{lm}(z)) \quad (2.26)$$

由于厄米—高斯函数的正交完备性, 故任意函数  $f(x, y)$  可用它表示:

$$f(x, y) = \sum_l \sum_m A_{lm} \psi_{lm}(x, y) \quad (2.27)$$

$$h_{lm} = 2^{l+m} l m \pi \omega^2 / 2$$

由上面的讨论很容易定义函数  $f(x, y)$  的  $P$  阶傅里叶变换为:

$$F^P[f(x, y)] = \sum_l \sum_m A_{lm} \psi_{lm}(x, y) \exp(i\beta_{lm}PL) \quad (2.28)$$

显然当  $P=1$  时, 只要选取尺度因子:

$$s = \omega\sqrt{\pi} \quad (2.29)$$

则此时的(2-28)式就是普通的傅里叶变换。

其次

$$\begin{aligned} F^b[F^P f] &= F^b \left[ \sum_l \sum_m A_{lm} \psi_{lm}(x, y) \exp(i\beta_{lm}PL) \right] \\ &= \sum_l \sum_m A_{lm} \psi_{lm}(x, y) \exp[i\beta_{lm}(P+b)L] = F^{P+b} f \end{aligned} \quad (2.30)$$

满足分数傅里叶变换性质 3 (2.5 式), 即指数可加性和交换性成立。

按((2.28)式定义的分数阶傅里叶变换为级数表示, 在使用中是不方便的一般情况下, 它可以表示为一个积分变换。

在  $N$  维情况下, 分数傅里叶变换的变换式为:

$$F^a[f(x_1, \dots, x_n)] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) K_a(x_1, u_1, \dots, x_n, u_n) dx_1 \dots dx_n \quad (2.31)$$

式中:

$$K_a(x_1, u_1, \dots, x_n, u_n) = \prod_{i=1}^n K_a(x_i, u_i) \quad (2.32)$$

而变换积分核  $Ka(x_i, u_i)$  由(2.2)式给出。

### 2.3.2 Lohmann 薄透镜系统

#### ①. Lohmann I 型(单透镜系统)

图 2.2 所示为 Lohmann I 型分数傅里叶变换系统, 输入面和输出面距透镜的距离均为  $z$ , 透镜的焦距为  $f$ 。当  $z$  和  $f$  满足下列条件时, 输出函数  $g_I(x_I)$  为输入函数  $g_0(x_0)$  的  $P$  阶分数傅里叶变换:

$$z = f_1 \tan\left(\frac{P\pi}{4}\right), f = f_1 / \sin\left(\frac{P\pi}{2}\right) \quad (2.33)$$

其中,  $f_1$  称为标准焦距, 当变换系统确定时为常数。

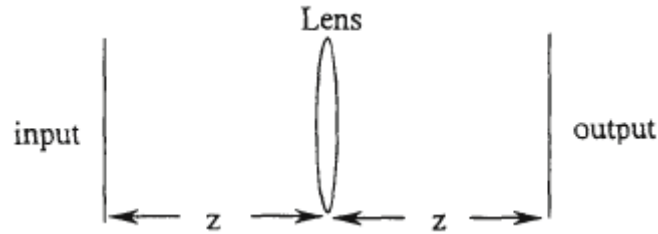


图 2.2 实现  $P$  阶分数傅里叶变换的光学装置:Lohmann I 型

Fig.2.2 optical device in  $P$ -order fractional Fourier transform: Lohmann I

对于 Lohmann I 型的变换装置, 分数傅里叶变换可用一种更为简单的形式表示:

$$g_1(x_1) = F^P[g_0(x_0)] = \int g_0(x_0) \exp\left[i\pi(x_0^2 + x_1^2)/(\lambda f_1 \tan \phi)\right] \exp[-i2\pi x_1 x_0 / \lambda f_1 \sin \phi] dx_0 \quad (2.34)$$

其中,  $\lambda$  是光波长,  $f_1$  称为标准焦距。

特别是, 当  $P=1$  时, 上式为一般的傅里叶变换, 即一般傅里叶变换为分数傅里叶变换的一种特殊情况; 当  $P=2$  时, 由(2-33)式可得:  $z=2f$ , 因此有:

$$g_1(x_1, y_1) = g_0(-x_0, -y_0) \quad (2.35)$$

即物函数的 2 阶分数傅里叶变换为物函数本身, 只发生了坐标反演。

#### ②. Lohmann II 型(双透镜系统)

图 2.3 所示为 Lohmann II 型分数傅里叶变换系统，当  $z$  和  $f$  满足下列条件时，输出函数  $g_I(x_I)$  为输入函数  $g_0(x_0)$  的  $P$  阶分数傅里叶变换：

$$z = f_1 \sin\left(\frac{P\pi}{2}\right), f = f_1 / \tan\left(\frac{P\pi}{4}\right) \quad (2.36)$$

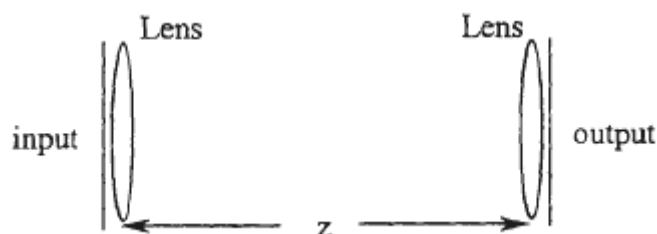


图 2.3 实现  $P$  阶分数傅里叶变换的光学装置:Lohmann II 型

Fig.2.3.optical device in  $P$ -order fractional Fourier transform: Lohmann II

### ③. Lohmann 可变标准焦距型

图 2.4 一所示为 Lohmann 可变标准焦距型分数傅里叶变换系统。

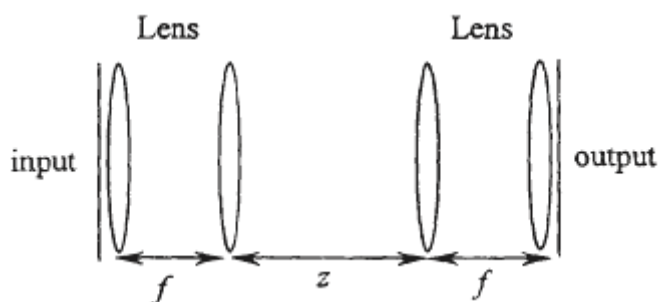


图 2.4.实现分数傅里叶变换的光学装置:Lohmann 可变标准焦距型

Fig.2.4.optical device in  $P$ -order fractional Fourier transform: Lohmann  
changeable standard focal length

光学信息处理中常常需要两个或更多级次的分数傅里叶变换系统进行级联。由于分数傅里叶变换特殊的尺度性质，这就要求前一级结构的输出信号的尺度因子等于后一级结构输入信号的尺度因子。因此 Lohmann 等人提出并发展了一些可以改变标准焦距的装置。如图 2.4，可以通过调节  $z$  来改变标准焦距。

## 2.4 分数傅里叶变换与 Wigner 分布函数

### 2.4.1 Wigner 分布函数

Wigner:分布函数可以将信号在空间域和频率域的特征同时反映出来，因此它在信号处理中有着广泛的应用。

一维函数  $u(x)$  的 Wigner 变换定义为

$$W_0(x, v) = \int u\left(x + \frac{x'}{2}\right) u^*\left(x - \frac{x'}{2}\right) \exp(-i2\pi x'v) dx' \quad (2.37)$$

其反变换为

$$\int W(x, v) \exp(i4\pi vx) dv = u(2x) u^*(0) \quad (2.38)$$

Wigner 变换描述了信号  $u(x)$  的空间和频率信息，即  $W(x_0, v_0)$  描述了信号  $u$  在特定点(或时间)  $x_0$  及其相应的频率  $v_0$  下的能量。

Wigner 变换为人熟知的物理特性包括下列几项：

$$\text{光谱: } \int w(x, v) dx = |\bar{u}(v)|^2 \quad (2.39)$$

$$\text{光强: } \int w(x, v) dx = |u(v)| \quad (2.40)$$

$$\text{能量: } \iint W(x, v) dx dv = E_{total} \quad (2.41)$$

## 2.4.2 分数傅里叶变换与 Wigner 分布函数的关系

### ①.定义

$u(x)$  的傅里叶变换  $\bar{u}(v)$  由下式给出：

$$\bar{u}(v) = \int u(x) \exp(-i2\pi vx) dx \quad (2.42)$$

通过将  $u$  替换为  $\bar{u}$ ，就将 Wigner 分布函数旋转了  $90^\circ$ ：

$$u(x) \rightarrow \bar{u}(v): W_0(-v, x)$$

因此分数傅里叶变换的定义与相应的 WDF 的旋转角度有关，其转角不仅仅为  $90^\circ$ ，而为  $\phi = P\pi/2$ ，可表示为：

$$W[F^P(u)] = R_\phi W[u] \quad (2.43)$$

其中， $R_\phi$  表示一个二维函数顺时针的旋转， $W[u]$  为  $u(x)$  的 Wigner 变换。这个定义满足三个基本要求：

- 1)  $u(x)$  的分数傅里叶变换是线性的。
- 2)  $P=1$  时分数傅里叶变换即为常规傅里叶变换。
- 3) 重复进行的分数傅里叶变换的阶数  $P$  具有可加性：

$$F^{P1} F^{P2} u(x) = F^{P1+P2} u(x)$$

### ②.几个基本函数的 Wigner 分布：

- 1) 脉冲函数 (线状  $\delta$  函数)

$$f(x) = \delta(x - x_c) \Rightarrow W(x, v) = \delta(x - x_c) \quad (2.44)$$

其 Wigner 分布是中心在  $x = x_c$ ，垂直于  $x$  轴的线状  $\delta$  函数。

- 2) 单频函数(纯谐函数)

$$f(x) = \exp(i2\pi v_c x) \Rightarrow W(x, v) = \delta(v - v_c) \quad (2.45)$$

其 Wigner 分布是中心在  $v = v_c$ ，平行于  $x$  轴的线状  $\delta$  函数。

- 3) 啁啾函数(频率线性增加的函数)

$$f(x) = \exp\left[-i2\pi\left(\frac{b_2}{2}x^2 + b_1x + b_0\right)\right] \Rightarrow W(x, v) = \delta(b_2x + b_1 - v) \quad (2.46)$$

其 Wigner 分布是与轴成  $\phi = \tan^{-1} b_2$  角度的线状  $\delta$  函数。

由此可知，在 Wigner 域中  $\pi/2$  的旋转操作就是通过一系列的啁啾函数将一个脉冲函数变为一个纯谐函数。由于分数傅里叶变换对应于 Wigner 分布的旋转，因此，谐函数、 $\delta$  函数、啁啾函数实际可看作同一函数在不同分数傅里叶域中的表示。

## 2.5 分数傅里叶变换与菲涅耳衍射

分数傅里叶变换与菲涅耳衍射存在着密切的关系，实际上球面波衍射的过程就是带有尺度因子的光学分数傅里叶变换过程，因此人们自然会想到利用菲涅耳衍射效应来实现分数傅里叶变换。

从 Lohmann I 型和 Lohmann II 型分数傅里叶变换系统可以清楚的看出，分数傅里叶变换与菲涅耳衍射有非常密切的关系，它们都是采用菲涅耳衍射+透镜的方式来实现分数傅里叶变换。鉴于菲涅耳衍射的普遍性，下面我们对分数傅里叶变换和菲涅耳衍射之间的关系作具体的分析。

设输入函数为  $f(s, t)$ ，则二维 P 阶分数傅里叶变换定义为：

$$F^P[f(s, t)] = g(u, v) = \iint f(s, t) B_p(s, t, u, v) ds dt \quad (2.47)$$

$B_p(s, t; u, v)$  为核函数，

$$B_p(s, t, u, v) = \frac{\exp[i(\phi - \phi_s)]}{|\sin \phi|} \exp\left[i\pi(s^2 + t^2 + u^2 + v^2) \cot \phi\right] \exp[-i2\pi(su + tv) \csc \phi] \quad (2.48)$$

其中， $\phi = P\pi/2$ ， $\hat{\phi} = \text{sgn}(\sin \phi)$ ， $P$  为分数阶。

### 2.5.1 菲涅耳衍射

菲涅耳衍射可用如下的积分公式表示

$$U(x, y) = \frac{1}{i\lambda z} \iint f(s, t) \exp\left\{\frac{i\pi}{\lambda z}[(x-s)^2 + (y-t)^2]\right\} ds dt \quad (2.49)$$

上式可写为卷积形式

$$U(x, y) = \frac{1}{i\lambda z} f(x, y) * \left\{ \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda z}(x^2 + y^2)\right] \right\} \quad (2.50)$$

其中， $z$  是物面到观察面的距离，这里舍去了初位相。

### 2.5.2 分数傅里叶变换与无透镜的菲涅耳衍射

设输入函数为  $f(s, t)$ ，输出面上的复振幅分布为  $g(x, y)$ ，由(2-47)有

$$g(x, y) = \frac{\exp[-i(\pi\hat{\phi}/2 - \phi)]}{|\sin\phi|} \exp[i\pi(x^2 + y^2)\cot\phi] \iint f(s, t) \exp[i\pi(s^2 + t^2)\cot\phi] \exp[-i2\pi(sx + ty)\csc\phi] \exp\left\{\frac{i\pi\cot\phi}{\cos^2\phi}[(x^2 + y^2) - (s^2 + t^2)]\right\} ds dt \quad (2.51)$$

$$g(x, y) = \frac{\exp[-i(\pi\hat{\phi}/2 - \phi)]}{|\sin\phi|} \exp[-i\pi\tan\phi(x^2 + y^2)] \iint f(s, t) \exp\left\{i\pi\cot\phi\left[\left(\frac{1}{\cos\phi}x - s\right)^2 + \left(\frac{1}{\cos\phi}y - t\right)^2\right]\right\} ds dt \quad (2.52)$$

令  $u = \frac{1}{\cos\phi}x$ ,  $v = \frac{1}{\cos\phi}y$ , 则

$$g(u, v) = \frac{\exp[-i(\pi\hat{\phi}/2 - \phi)]}{|\sin\phi|} \exp[-i\pi\sin\phi\cos\phi(u^2 + v^2)] \iint f(s, t) \exp\left\{i\pi\cot\phi[(u - s)^2 + (v - t)^2]\right\} ds dt \quad (2.53)$$

$$g(u, v) = \frac{\exp[-i(\pi\hat{\phi}/2 - \phi)]}{|\sin\phi|} \exp[-i\pi\sin\phi\cos\phi(u^2 + v^2)] f(u, v)^* h(u, v) \quad (2.54)$$

其中,  $h(x, v) = \exp[i\pi\cot\phi(u^2 + v^2)]$ , 上式为二维分数傅里叶变换的卷积表达式。

将(2.54)式与(2.50)式表示的无透镜的菲涅耳衍射比较

令  $\cot\phi = \frac{\beta^2}{\lambda z}$ ,  $U = \beta u = \frac{\beta}{\cos\phi}x$ ,  $V = \beta v = \frac{\beta}{\cos\phi}y$ , 有

$$g(U, V) = \frac{\exp[-i(\pi\hat{\phi}/2 - \phi)]}{|\sin\phi|} \exp\left[-\frac{i\pi\sin^2\phi}{\lambda z}(U^2 + V^2)\right] f(U, V)^* h(U, V) \quad (2.55)$$

其中,  $h(U, V) = \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda z}(U^2 + V^2)\right]$ 。

将上式与(2.50)式比较, 可见, 分数傅里叶变换的结果只比一般的菲涅耳衍射多了一个二次位相因子及缩放因子。

或者将((2.55)式经整理后写成:

$$U(x, y) = C \exp\left[\frac{i\pi\sin^2\phi}{\lambda z}(U^2 + V^2)\right] F^P[f(s, t)] \quad (2.55a)$$

式中  $C$  为包含所有的常系数,  $U = \frac{\beta}{\cos\phi}x$ ,  $V = \frac{\beta}{\cos\phi}y$ ,  $\phi = P\pi/2$ ,  $P$  为分数阶。由

上式可得, 菲涅耳衍射完全可以看成是分数阶为  $P$  阶的分数傅里叶变换和一个二次位相因子及缩放因子的乘积, 不同的分数阶对应于不同的缩放因子。

分数阶  $P$  在 0-1 之间变化时, 对应于衍射光场的传播是由原始光场经过菲涅耳

衍射区一直到远场弗朗和费衍射区的全过程。可见用分数傅里叶变换来描述自由空间衍射的全过程是很方便的。

### 2.5.3 分数傅里叶变换与带透镜的菲涅耳衍射

考虑图 2-5 所示的带透镜的菲涅耳衍射，它与 Lohmann I 型分数傅里叶变换系统相似。此情况相当于两次菲涅耳衍射再加一次透镜位相因子的作用。

透镜的位相因子可表示为：

$$\Phi_L(x, y) = \exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda f}(s'^2 + t'^2)\right] \quad (2.56)$$

$d_1, d_2$  分别为物面到透镜的距离和透镜到观察面的距离， $f$  为透镜的焦距。

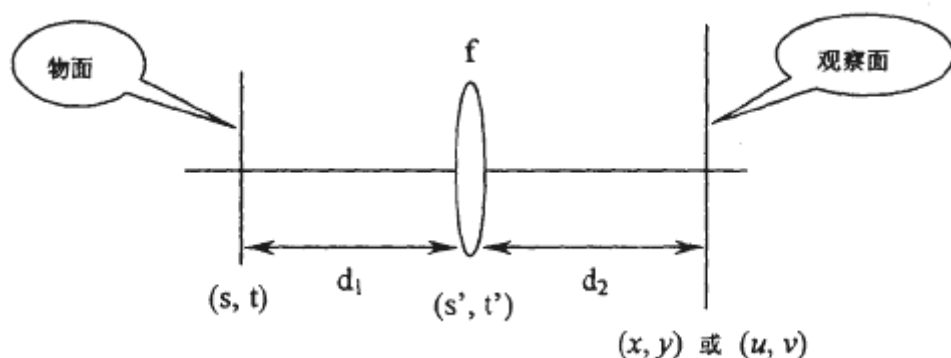


图 2.5 带透镜的菲涅耳衍射

Fig.2.5 Fresnel diffraction with lens

假设输入函数为  $f(s, t)$ ，输出面上的复振幅分布为  $g(x, y)$ ，则有

$$g(x, y) = -\frac{1}{\lambda^2 d_1 d_2} \iiint \int f(s, t) \exp\{ia[(s' - s)^2 + (t' - t)^2]\} \exp[-ib(s'^2 + t'^2)] \exp ic[(x - s')^2 + (y - t')^2] ds dt ds' dt' \quad (2.57)$$

$$g(x, y) = -\frac{1}{\lambda^2 d_1 d_2} \iiint \int f(s, t) \exp\{i[(a - b + c)(s'^2 + t'^2) + a(s^2 + t^2) - 2a(ss' + tt') + c(x^2 + y^2) - 2c(xs' + yt')]\} ds dt ds' dt'$$

$$g(x, y) = -\frac{\exp[ic(x^2 + y^2)]}{\lambda^2 d_1 d_2} \iiint \int f(s, t) \exp\{i[(a - b + c)(s'^2 + t'^2) + a(s^2 + t^2) - 2a(ss' + tt') - 2c(xs' + yt')]\} ds dt ds' dt'$$

$$g(x, y) = -\frac{\exp[ic(x^2 + y^2)]}{\lambda^2 d_1 d_2} \iiint \int f(s, t) \exp[ia(s^2 + t^2)] \exp\{i[(a - b + c)(s'^2 + t'^2) - 2a(ss' + tt') + c(x^2 + y^2) - 2c(xs' + yt')]\} ds dt ds' dt'$$



$$g(x, y) = -\frac{\exp[ic(x^2 + y^2)]}{\lambda^2 d_1 d_2} \iint f(s, t) \exp[ia(s^2 + t^2)] ds dt \iint \exp[i(a - b + c) \cdot (s'^2 + t'^2)] \exp\left[-i2\pi\left(\frac{as + cs'}{\pi}s' + \frac{at + cy}{\pi}t'\right)\right] ds' dt'$$

其中,  $a = \frac{\pi}{\lambda d_1}, b = \frac{\pi}{\lambda f}, c = \frac{\pi}{\lambda d_2}$  (2.58)

令

$$f_x = \frac{as + cx}{\pi}, f_y = \frac{at + cy}{\pi}, \alpha = \sqrt{\frac{\pi}{i(b - a - c)}} \quad (2.59)$$

则

$$g(x, y) = -\frac{\exp[ic(x^2 + y^2)]}{\lambda^2 d_1 d_2} \iint f(s, t) \exp[ia(s^2 + t^2)] ds dt \iint \exp\left(-\pi \frac{s'^2 + t'^2}{a^2}\right) \exp[-i2\pi(f_x s' + f_y t')] ds' dt' \quad (2.60)$$

上式中可利用高斯函数的傅里叶变换关系将四重积分化简为二重积分, 运算整理得

$$g(x, y) = -\frac{\exp[ic(x^2 + y^2)]}{\lambda^2 d_1 d_2} a^2 \iint f(s, t) \exp[ia(s^2 + t^2)] \exp[-\pi a^2(f_x^2 + f_y^2)] ds dt \quad (2.61)$$

将((2.59)式代入上式, 有

$$g(x, y) = -\frac{\exp[ic(x^2 + y^2)]}{\lambda^2 d_1 d_2} \frac{\pi}{i(b - a - c)} \iint f(s, t) \exp[ia(s^2 + t^2)] \exp\left\{-\frac{1}{i(b - a - c)}[(as + cx)^2 + (at + cy)^2]\right\} ds dt \quad (2.62)$$

$$g(x, y) = -\frac{\exp[ic(x^2 + y^2)]}{\lambda^2 d_1 d_2} \frac{\pi}{i(b - a - c)} \iint f(s, t) \exp[ia(s^2 + t^2)] \exp\left\{\frac{i}{b - a - c}[a^2(s^2 + t^2) + c^2(x^2 + y^2) + 2ac(sx + ty)]\right\} ds dt$$

$$g(x, y) = -\frac{\exp\left[i(x^2 + y^2)\frac{c(b - a)}{b - a - c}\right]}{\lambda^2 d_1 d_2} \frac{\pi i}{b - a - c} \iint f(s, t) \exp\left[i\frac{a(b - c)}{b - a - c}(s^2 + t^2)\right] \exp\left[i\frac{2ac}{b - a - c}(sx + ty)\right] ds dt \quad (2.63)$$

将(2.58)代入上式, 得

$$g(x, y) = - \frac{\exp \left[ i(x^2 + y^2) \frac{\pi(d_1 - f)}{\lambda(d_1 d_2 - d_1 f - d_2 f)} \right]}{\lambda^2 d_1 d_2} \frac{i\pi f d_1 d_2}{d_1 d_2 - d_1 f - d_2 f} \iint f(s, t) \exp \left[ i \frac{\pi}{\lambda} \frac{d_2 - f}{(d_1 d_2 - d_1 f - d_2 f)} (s^2 + t^2) \right] \exp \left[ i \frac{2\pi f}{\lambda(d_1 d_2 - d_1 f - d_2 f)} (sx + ty) \right] ds dt \quad (2.64)$$

令

$$f_x = \frac{f}{\lambda(d_1 f - d_1 d_2 + d_2 f)} x, f_y = \frac{f}{\lambda(d_1 f - d_1 d_2 + d_2 f)} y \quad (2.65)$$

则(2.64)式可化为

$$g(f_x, f_y) = i \frac{f}{\lambda(d_1 d_2 - d_1 f - d_2 f)} \exp \left[ i \frac{\pi \lambda (f - d_1)(d_1 f - d_1 d_2 + d_2 f)}{f^2} (f_x^2 + f_y^2) \right] \iint f(s, t) \exp \left[ i \frac{\pi}{\lambda} \frac{d_2 - f}{d_1 d_2 - d_1 f - d_2 f} (s^2 + t^2) \right] \exp \left[ -i 2\pi (f_x s + f_y t) \right] ds dt \quad (2.66)$$

暂不计透镜孔径大小对入射场的影响, 即对所有的  $x, y$  值, 透镜的孔径函数  $\Phi_L(x, y) = 1$ 。同时, 用单位振幅的平行光垂直照明物平面。

当  $d_2 = f$  时, (2.66)式可写为

$$g(x, y) = \frac{-i}{\lambda y} \exp \left[ i \frac{\pi(f - d_1)}{\lambda f^2} (x^2 + y^2) \right] \iint f(s, t) \exp \left[ -i \frac{2\pi}{\lambda f} (sx + ty) \right] ds dt$$

令  $f_x = \frac{1}{\lambda f} x, f_y = \frac{1}{\lambda f} y$ , 则

$$g(f_x, f_y) = \frac{-i}{\lambda f} \exp \left[ i \pi \lambda (f - d_1) (f_x^2 + f_y^2) \right] \iint f(s, t) \exp \left[ -i 2\pi (f_x s + f_y t) \right] ds dt \quad (2.67)$$

上式即为带透镜的夫琅和费衍射公式, 对应于透镜的傅里叶变换性质中物置于透镜前, 在透镜的后焦面上进行观察时的情形。当  $d_1 = f$  时, 得到准确的傅里叶变换, 其他情况下得到带有位相弯曲的傅里叶变换。

对(2.66)式作进一步的变换, 可得

$$g(x, y) = i \frac{f \exp \left[ i \frac{\pi(d_1 - f)}{\lambda(d_1 d_2 - d_1 f - d_2 f)} (x^2 + y^2) \right]}{\lambda(d_1 d_2 - d_1 f - d_2 f)} \iint f(s, t) \exp \left\{ i \frac{\pi}{\lambda} \frac{d_2 - f}{(d_1 d_2 - d_1 f - d_2 f)} \left[ \left( s - \frac{f}{f - d_2} x \right)^2 + \left( t - \frac{f}{f - d_2} y \right)^2 \right] \right\} ds dt$$

$$\begin{aligned}
& \exp \left[ -i \frac{\pi f^2}{\lambda (d_2 - f)(d_1 d_2 - d_1 f - d_2 f)} (x^2 + y^2) \right] ds dt \\
g(x, y) = & i \frac{f \exp \left[ i \frac{\pi}{\lambda (d_2 - f)} (x^2 + y^2) \right]}{\lambda (d_1 d_2 - d_1 f - d_2 f)} \iint f(s, t) \\
& \exp \left\{ i \frac{\pi}{\lambda} \frac{d_2 - f}{(d_1 d_2 - d_1 f - d_2 f)} \left[ \left( \frac{f}{f - d_2} x - s \right)^2 + \left( \frac{f}{f - d_2} y - t \right)^2 \right] \right\} ds dt \quad (2.68)
\end{aligned}$$

(2.68)式为带透镜的菲涅耳衍射的光场分布。

对图 2.6 所示的菲涅耳衍射系统，当  $d_2 = d_1 = d$  时，即为 Lohmann I 型分数傅里叶变换系统。再令  $d = K \tan(\frac{\phi}{2})$ ,  $f = K \frac{1}{\sin \phi}$  ( $K$  为与分数阶相关的中间常数， $K \sim 1/\lambda$ )，则菲涅耳衍射的光场分布为

$$\begin{aligned}
g(x, y) = & \frac{1}{i \lambda K \sin \phi} \exp \left[ i \frac{\pi \cot \phi}{\lambda K} (x^2 + y^2) \right] \iint f(s, t) \\
& \exp \left[ i \frac{\pi}{\lambda K} \cot \phi (s^2 + t^2) \right] \exp \left[ -i \frac{2\pi}{\lambda K} \csc \phi (sx + ty) \right] ds dt \\
\text{令 } x = & \lambda K x', y = \lambda K y', s = \lambda K s', t = \lambda K t', \text{ 则} \\
g(x', y') = & \frac{1}{i \sin \phi} \exp \left[ i \pi \cot \phi (x'^2 + y'^2) \right] \iint f(s', t') \\
& \exp \left[ i \pi \cot \phi (s'^2 + t'^2) \right] \exp \left[ -i 2\pi \csc \phi (s'x' + t'y') \right] ds' dt' \quad (2.69)
\end{aligned}$$

将上式与(2.47)，(2.48)式比较，除常数位相外上式与分数傅里叶变换完全相同，可见二者本质上是一样的。分数傅里叶变换就是一种特殊的菲涅耳衍射，分数阶  $P$  对应一个由选定的尺度因子所决定的距离。

### 3 分数傅里叶域滤波

#### 3.1 分数傅里叶域滤波的特性

分数傅里叶变换是更广义的傅里叶变换，由于引入了分数阶这个新的自由度，使得分数傅里叶变换在操作上比常规傅里叶变换更加灵活。分数傅里叶变换可作为广义空间滤波的基础，它扩展了光学信息处理的内容和方式。分数傅里叶变换的引入，使得滤波操作可以在分数域上进行，通过在不同的分数傅里叶变换面上引入不同的滤波器，可以实现更多的操作，从而增加了滤波操作的自由度。

实现广义空间滤波的系统可由多个分数傅里叶变换器(例如 GRIN 介质)和滤波器组成，如图 3.1:

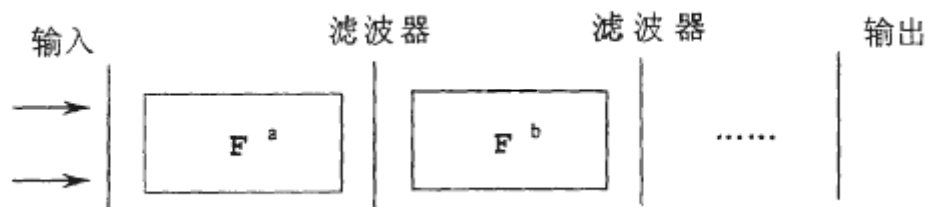


图 3.1 广义空间滤波系统示意图

Fig.3.1 the general spatial filtering

通常的  $4f$  滤波系统是它的一个特例，即在 1 阶的傅里叶变换面上引入了一个滤波器。 $4f$  系统要求输入和输出成物象关系，而分数傅里叶变换系统则没有这种限制，因此整个系统的长度(对应于分数傅里叶变换阶数)可作为设计时的一个自由度。

#### 3.2 分数傅里叶域滤波的原理

考虑到分数傅里叶变换的一些特性，可将分数傅里叶变换应用于光学光刻投影系统中，本节提出了通过在分数域加入滤波器来提高光刻分辨率的一种新方法。利用分数傅里叶变换，可以在非频谱面的其他分数傅里叶变换面上来进行滤波操作，大大提高了设计的灵活性。我们提出用如下的框图来表示一种分数傅里叶域滤波的过程：

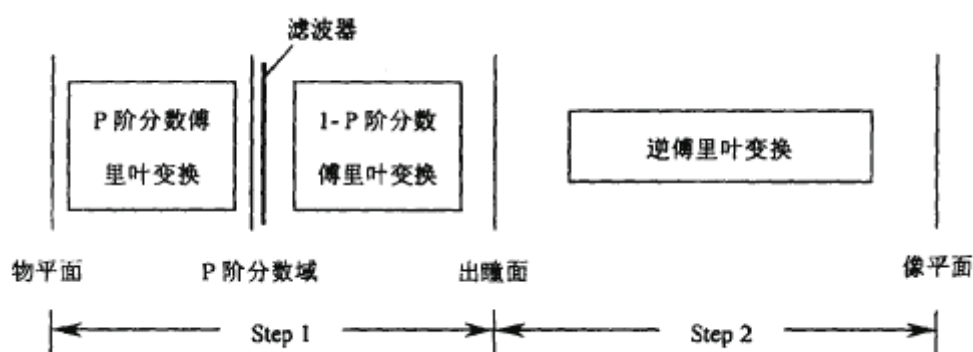


图 3.2 分数傅里叶域滤波过程框图

Fig.3.2 the processing in fractional Fourier domains

假设我们要在  $P$  阶分数域上进行滤波，则可对瞳孔面上的  $f(r)$  进行  $1-P$  阶的分数傅里叶变换，得到其在  $P$  阶分数域上的分布  $f_P(r)$ ，如图 3.2 中 Setp 1 所示。将  $f_P(r)$  作为分数域上的滤波器，则其滤波效果等效于在频谱面上加入  $f(r)$  进行瞳孔滤波的效果。由于分数傅里叶变换具有周期性、阶数可加性等性质，我们可以任意选择滤波面，而不仅仅局限于傅里叶频谱面，从而使滤波操作更加灵活。

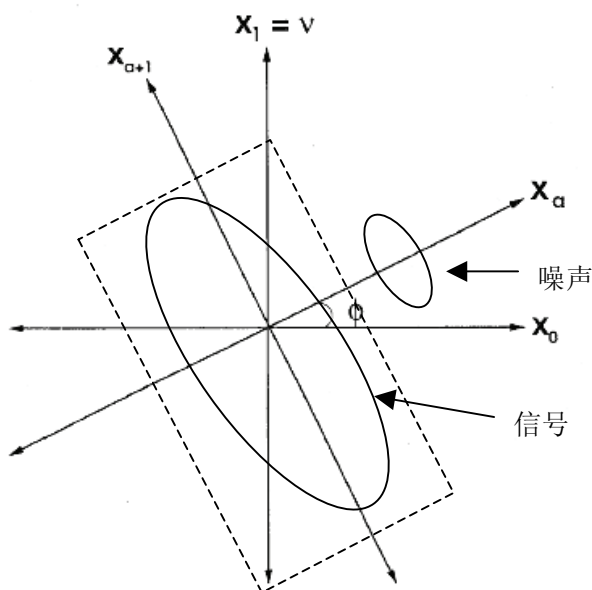


图 3.3 分数傅里叶域示意图

Fig.3.3 the representation of fractional Fourier domains

为了更加形象的说明，绘制了如图 3.3 所示分数域示意图。容易发现，信号和噪声在  $0$ -域和  $1$ -域（即常规傅里叶变换域）都是重叠的（考虑向  $x_0$  轴和  $x_1$  轴的正交投影），但是，它们在相应的  $a$  域是不重叠的，因此只要在相应的  $a$  域用一个振幅滤波窗口（图中虚线所示）就可以清除不受欢迎的噪声从而实现信号的有效滤

波。

根据上述原理, 给出传统傅里叶变换和分数傅里叶变换的滤波器设计示意图, 如图 3.4 所示。

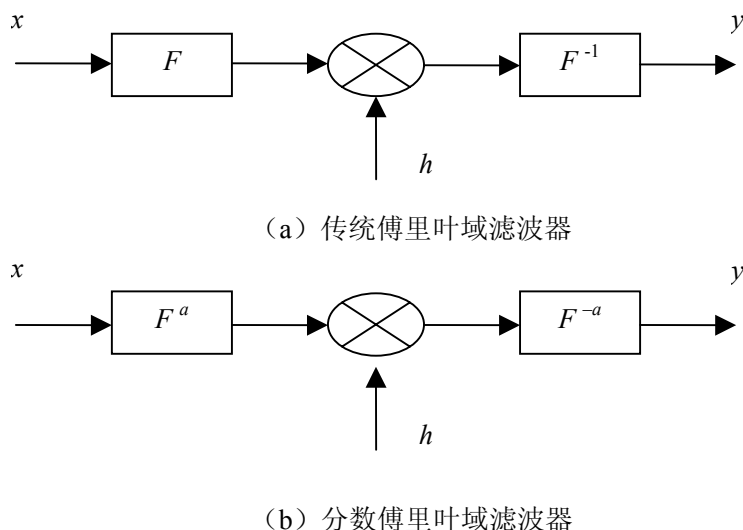


图 3.4 滤波器设计示意图

Fig3.4. diagrams of filtering designs

### 3.3 分数傅里叶变换的数值模拟

#### 3.3.1 分数傅里叶变换的数值模拟算法

##### ① 分数傅里叶变换模拟的解啁啾法

由分数傅立叶变换的积分形式定义离散化得到一种基于 FFT(快速傅立叶变换)的算法。我们命名此方法名称的来历是由于计算分数傅立叶变换的过程中两次与啁啾函数(二次位相项)相乘,而且此方法用于检测啁啾信号特别有效。分数傅立叶变换的积分形式定义为

$$F^a f(u) = c \int \exp(i\pi u^2 \cot \phi_a - 2i\pi ux \csc \phi_a) f(x) dx \quad (3.1)$$

其中  $\phi_a = a\pi/2$  是一个与变换的级次  $a$  相联系的角度。从上式可以看出, 分数傅立叶变换可通过下面五个步骤得到:

- 1) 输入信号  $f(x)$  与一啁啾信号  $\exp(i\pi x^2 \cot \phi_a)$  相乘;
- 2) 进行 FT 运算;
- 3) 进行尺度变换,系数为  $\csc \phi_a$ ;
- 4) 再与啁啾信号  $\exp(i\pi u^2 \cot \phi_a)$  相乘;
- 5) 最后与常数位相相乘。

对上述几个步骤进行离散化处理,得到的分数傅立叶变换的解啁啾法如下各步所示:

- 1) 初始化;
- 2) 由采样定理对输入信号和啁啾信号进行离散化处理得到  $f(n)$  ;  
( $-N/2 \leq n \leq N/2$ ),  $\exp(i\pi n^2 \cot \phi_a)$ , 其中  $N$  为总采样数;
- 3) 信号  $f(n)$  乘以啁啾信号  $\exp(i\pi n^2 \cot \phi_a)$
- 4) 进行 FFT 运算;
- 5) 进行尺度变换,系数为  $\csc \phi_a$ ;
- 6) 再与同一啁啾信号相乘;
- 7) 与常数位相因子相乘。

第 7) 步可以略去而不会对理论分析造成影响,因为常数位相因子不改变分数傅立叶变换的分布,只是使位相增加了一个共同的移动。只要把上述步骤的一维信号变成二维信号,一维 FFT 变为二维 FFT, 那么就可得到分数傅立叶变换模拟的二维解啁啾法,一般在处理光学图象时要用二维算法。

图 3.5 给出一些用解啁啾法计算分数傅立叶变换的数值模拟结果。输入信号为一个一维矩形函数(图中  $a=0$ )。其它分别为  $a=0.4$ ,  $0.6$  和  $1.0$  级分数傅立叶变换。

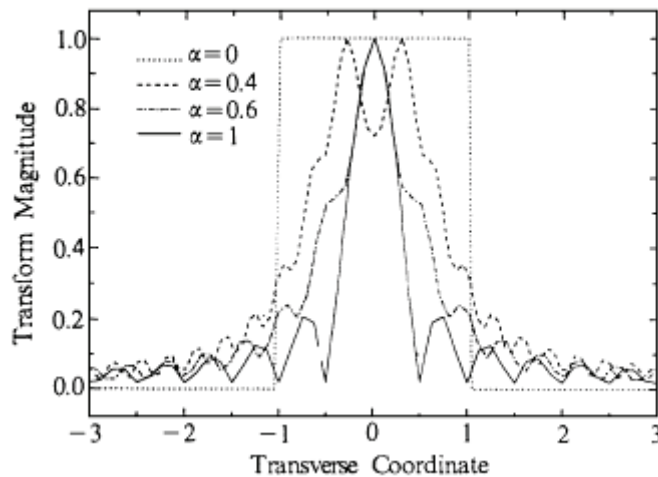


图 3.5. 分数傅立叶变换的解啁啾法模拟结果

Fig.3.5 the analog result by analytical chirp in fractional Fourier transform

## ②分数傅立叶变换的厄米—高斯函数展开模拟法

由分数傅立叶变换的厄米- 高斯函数展开定义离散化可以得到另一种分数傅立叶变换的数值模拟算法。分数傅立叶变换的厄米- 高斯函数展开定义过程如下

$$f(x) = \sum_n A_n \phi_n(x) \quad (3.2)$$

$$A_n = \int f(x) \phi_n(x) d(x) \quad (3.3)$$

$$F^a f(x) = \sum_n A_n \phi_n(x) \exp(ina\pi/2) \quad (3.4)$$

其中  $A_n$  为展开系数,  $\exp(ina\pi/2)$  为分数傅立叶变换算子的本征值,  $\phi_n(x)$  为归一化的  $n$  阶厄米-高斯函数,

$$\phi_n(x) = (1/\sqrt{2^n n!}) H_n(x) \exp(-x^2/2) \quad (3.5)$$

其中  $H_n(x)$  为  $n$  阶厄米多项式。它是分数傅立叶变换算子的本征函数。把上述分数傅立叶变换厄米-高斯函数展开定义离散化如下:

1) 根据所展开的厄米-高斯函数的阶数确定采样间隔

$$\Delta_x \Delta_v \geq n \quad (3.6)$$

其中  $\Delta x$ ,  $\Delta v$  分别为空域范围和频域范围, 又由于空域采样间隔为

$$\delta_x \leq 1/\Delta v \quad (3.7)$$

所以空域采样间隔为

$$\delta_x \leq \Delta x/n \quad (3.8)$$

2) 分数傅立叶变换的离散化厄米-高斯函数定义为

$$\begin{cases} f_m = \sum_n A_n \phi_{nm} \\ A_n = \sum_m f_m \phi_{nm}^* = \sum_m f_m \phi_{nm} \\ [F^a f]_m = \sum_n \lambda_n A_n \phi_{nm} = \sum_n \lambda_n \phi_{nm} \sum_m f_m \phi_{nm} \end{cases} \quad (3.9)$$

若设

$$f = [f_1, f_2, \dots, f_m]^T \quad (3.10)$$

$$\psi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nm} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$F^a f = \left\{ [F^a f]_1, [F^a f]_2, \dots, [F^a f]_m \right\}^T \quad (3.13)$$

则得到分数傅立叶变换的离散化厄米-高斯函数展开矩阵矢量式为



$$F^a f = \psi^T \Lambda \psi f \quad (3.14)$$

可以把此定义推广到输入信号为二维信号的情形。首先,对二维信号进行离散化处理,并用矩阵储存此二维信号值;然后,对此矩阵的列向量进行上述的离散化分数傅立叶变换;最后,对此矩阵的行向量再进行上述的离散化分数傅立叶变换。得到二维分数傅立叶变换的离散化定义过程如下:

1) 对二维离散化信号  $F$  的列向量进行一维离散化分数傅立叶变换

$$F_1 = \psi_1^T \Lambda \psi_1 F \quad (3.15)$$

2) 对  $F_1$  的行向量进行一维离散化分数傅立叶变换

$$F_2 = \psi_2^T \Lambda \psi_2 F_1^T \quad (3.16)$$

3) 对  $F_2$  进行转置,得到二维离散化分数傅立叶变换

$$F_3 = F_2^T \quad (3.17)$$

最后得到二维分数傅立叶变换如下式所示

$$F_3 = \left[ (\psi_2^T \Lambda \psi_2) (\psi_1^T \Lambda \psi_1 F)^T \right]^T = (\psi_1^T \Lambda \psi_1 F) (\psi_2^T \Lambda \psi_2)^T \quad (3.18)$$

运用式 (3.21) 和上式就可以编程来计算分数傅立叶变换。

采用数值计算语言 MATLAB 进行编程,我们分别计算了一维矩形函数的 0, 0.4, 0.6 和 1 级分数傅立叶变换(如图 3.6 所示)。

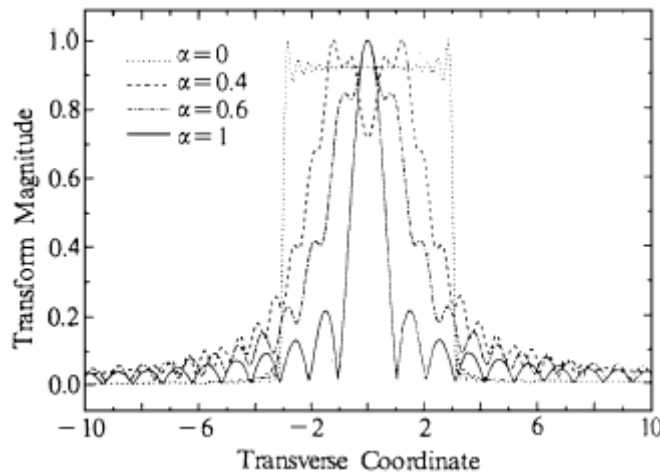


图 3.6 分数傅立叶变换的厄米-高斯函数展开法结果

Fig.3.6 the analog result by Hermite—Gauss function in fractional Fourier transform

### ③ 分析与结论

数值模拟中可以看出,分数傅立叶变换的解啁啾法对变换的级次有一定的要求。由于在级次  $a = 2n$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) 时,啁啾函数  $\exp(i\pi x^2 \cot(a\pi/2))$  快速振荡,使得分数傅立叶变换的解啁啾法失效,因而这种方法不能计算以上级次的傅

立叶变换。但对于其它分数级次的傅立叶变换,该方法是有用的,并且计算速度较快。分数傅立叶变换的厄米-高斯函数展开法的最大优点是它对于变换的级次无任何限制,可以给出任何复数级的模拟结果,因为分数傅立叶变换算子的本征函数为厄米-高斯函数,而且其本征值对于级次  $\alpha$  是连续的。只是由于所用模数较少,计算结果稍有偏差。因此在实际应用时,在计算速度无太大牺牲时,需要尽可能多的选取厄米-高斯函数的模数以保证计算精度。

这一节中给出了计算分数傅立叶变换的两种算法,即解啁啾法和厄米-高斯函数展开法,给出了一维矩形函数分数傅立叶变换的计算机模拟结果同时分析了这两种方法的优缺点。由于大部分函数的分数傅立叶变换不能用解析形式给出,因而研究分数傅立叶变换的数值计算方法对于分数傅立叶变换的应用具有重要的意义和价值。

### 3.3.2 角谱传播理论

对 Namias 型分数傅里叶变换的数值模拟,其实就是对 Lohmann 给出的两种光学单元的模拟,数值计算的基本依据是角谱衍射理论。

角谱理论告诉我们,透过  $xy$  平面向  $+z$  方向传播的光波  $g(x, y)$ , 可以用不同方向的平面波展开:

$$g(x, y) = \iint A(\cos \alpha / \lambda, \cos \beta / \lambda) \exp[j2\pi(x \cos \alpha / \lambda + y \cos \beta / \lambda)] d(\cos \alpha / \lambda) d(\cos \beta / \lambda) \quad (3.19)$$

式中,  $\alpha$  和  $\beta$  分别表示平面波波矢方向与  $x$  轴和  $y$  轴的夹角。光波  $g(x, y)$  的低频成分对应与  $z$  轴夹角不太大的平面波分量,而高频分量则对应于与  $z$  轴夹角较大的平面波分量。不同方向平面波分量的加权函数  $A(\cos \alpha / \lambda, \cos \beta / \lambda)$  称为  $g(x, y)$  的角谱,即空间频谱。

由角谱传播理论知,当方向余弦  $\cos \alpha$  和  $\cos \beta$  满足:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta < 1 \quad (3.20)$$

时,角谱的传播可用下式来描述:

$$A(\cos \alpha / \lambda, \cos \beta / \lambda, z) = A(\cos \alpha / \lambda, \cos \beta / \lambda) \exp[jkz\sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}] \quad (3.21)$$

而  $A(\cos \alpha / \lambda, \cos \beta / \lambda)$  就是  $g(x, y)$  的空间频谱,所以式(3.21)可写为:

$$G(u, v, z) = G(u, v) \exp[jkz\sqrt{1 - (\lambda u)^2 - (\lambda v)^2}] \quad (3.22)$$

式中,  $\exp[jkz\sqrt{1 - (\lambda u)^2 - (\lambda v)^2}]$  称为角谱传播因子。因此,要计算光波在自由空间中传播到  $z$  处的空间分布,可以先对其在  $z=0$  处作一次傅里叶变换,再对频谱乘以角谱传播因子得到光波在自由空间传播到  $z$  处的频谱分布,最后再作一次傅里叶变换得到光场在  $z$  处的空间分布。

### 3.3.3 分数傅里叶变换数值模拟中的图像采样

当一束在自由空间传播的光波  $g(\xi, \eta)$  通过一个薄透镜后，其复振幅分布  $g'(\xi, \eta)$  的变化如下式所示：

$$g(\xi, \eta) = g(\xi, \eta) \exp\left(-jk \frac{\xi^2 + \eta^2}{2f}\right) \quad (3.23)$$

$\xi\eta$  平面表示薄透镜平面。可以看出光波通过薄透镜后只是多了一个二次相位因子，而振幅分布并未改变。

如图 3.7， $x_0y_0$  平面为输入平面，位于透镜前  $d$  处， $x_1y_1$  平面为分数傅里叶变换输出面，位于透镜 L 后  $d$  处，频谱面  $x_fy_f$  平面位于透镜 L 后  $f$  处。波长为  $\lambda$  的平行光从左向右沿  $z$  轴传播。

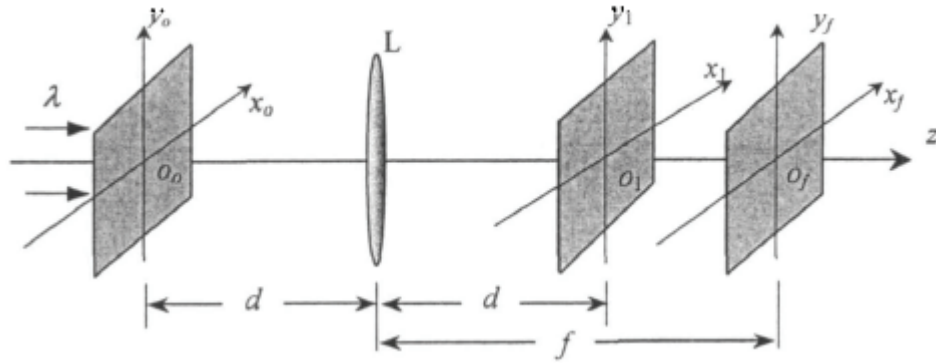


图 3.7 单透镜结构分数傅里叶变换原理

Fig.3.7 the principle of single-lens in fractional Fourier transform

设在  $x_0y_0$  平面上沿水平和垂直方向的采样间隔分别为  $\Delta x_0$  和  $\Delta y_0$ ，采样点个数分别为  $M$  和  $N$ 。由离散傅里叶变换中空域和频域之间采样间隔的关系，设：

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta x_0}, \Delta v = \frac{1}{N\Delta y_0} \quad (3.24)$$

式中  $\Delta u$  和  $\Delta v$  分别为频域中水平和垂直方向的采样间隔。在  $x_fy_f$  平面上的频率谱和坐标之间有如下关系：

$$u = \frac{x_f}{\lambda f}, v = \frac{y_f}{\lambda f} \quad (3.25)$$

由 3.1 节中的理论分析可知，式(3.32)的特殊表达式，只是单透镜结构在级次  $p=1$  时分数傅里叶变换，推广到一般情况下，有：

$$u = \frac{x_1}{\lambda f'}, v = \frac{y_1}{\lambda f'} \quad (3.26)$$

式中， $f'$  为光学分数傅里叶变换的标准焦距，由此得到  $x_1y_1$  面上的采样间隔为：

$$\Delta x_1 = \frac{\lambda f'}{M \Delta x_0}, \Delta y_1 = \frac{\lambda f'}{N \Delta x_0} \quad (3.27)$$

由式(3.27)可以看出,输入平面上的采样间隔与分数傅里叶变换输出平面上的采样间隔成反比关系,为简化代码,这里取 $\Delta x_0 = \Delta x_1$ ,  $\Delta y_0 = \Delta y_1$ ,则有:

$$\Delta x_1 = \frac{\lambda f'}{M \Delta x_0}, \Delta y_1 = \frac{\lambda f'}{N \Delta x_0} \quad (3.28)$$

式(3.28)和式(3.24)分别给出了数值模拟中空域和频域的采样间隔。

### 3.3.4 Lohmann 透镜系统分数傅里叶变换数值模拟的步骤

由于 Lohmann 型分数傅里叶变换和 Namias 型分数傅里叶变换是完全等价的,所以对 Namias 型分数傅里叶变换的数值模拟实际上就是对 Lohmann 给出的两种类型的光学实现结构的数值模拟。

本文中的数值模拟采用 MATLAB 语言进行。MATLAB 是一个非常方便的数学软件,尤其是其强大的矩阵运算功能,使得对数字图像的处理变得非常简单。例如,要得到输入图像的频谱,只要直接输入快速傅里叶变换命令“FFT”即可得到。由于快速傅里叶变换算法在输入图像的像素个数是 2 的幂次方时,运算速度最快,所以输入图像在  $x_0$  方向和  $y_0$  方向均取 2 的幂次方个像素点。

对单透镜结构(见图 2.2),数值模拟可分为以下几步:

- ① 对输入图像  $g(x_0, y_0)$  作快速傅里叶变换得到其频谱  $G(u, v)$ 。
- ②  $G(u, v) \exp[jkz\sqrt{1-(\lambda u)^2-(\lambda v)^2}]$  得到透镜前表面的频谱分布。
- ③ 对②所得图像作快速傅里叶变换得到透镜前表面的空间分布  $g(\xi, \eta)$ 。
- ④  $g(\xi, \eta) \exp(-jk \frac{\xi^2 + \eta^2}{2f})$  得到透镜后表面的空间分布  $g'(\xi, \eta)$ 。
- ⑤ 对  $g'(\xi, \eta)$  作快速傅里叶变换,得到透镜后表面上的频谱分布  $G'(u, v)$ 。
- ⑥  $G'(u, v) \exp[jkd\sqrt{1-(\lambda u)^2-(\lambda v)^2}]$  将角谱分布传播到分数变换平面上。

⑦ 对⑥所得图像作快速傅里叶变换得到输入图像在分数变换平面上的衍射图像亦即输入图像级次为  $p = \pi/2 \arccos(1-d/f)$  的分数傅里叶变换。

对双透镜结构(见图 2.3),数值模拟的步骤为:

- ① 输入图像  $g(x_0, y_0)$  乘以透镜相位因子  $\exp(-jk \frac{x_0^2 + y_0^2}{2f})$  得到第一个透镜后表面

面的空间分布  $g'(x_0, y_0)$ 。

- ②  $g'(x_0, y_0)$  作快速傅里叶变换得到第一个透镜后表面的频谱分布  $G'(u, v)$ 。
- ③  $G'(u, v) \exp[jkz\sqrt{1-(\lambda u)^2-(\lambda v)^2}]$  将角谱传播到第二个透镜的前表面。

④ 对③所得图像作快速傅里叶变换得到第二个透镜前表面的空间分布  $g(x_1, y_1)$ 。

⑤  $g(x_1, y_1) \exp(-jk \frac{x_1^2 + y_1^2}{2f})$  得到透镜后表面的空间分布亦即输入图像级次为  $p = \pi/2 \arccos(1 - d/f)$  的分数傅里叶变换。

由于我们关心的是输入图像分数傅里叶变换的强度分布，所以对于双透镜结构，第二个透镜实际上并没有起到作用。也就是说，我们再做数值模拟的时候并不需要上面的第 5 步，而直接由第 4 步就可以得到最终的结论了。

### 3.3.5 实验结果

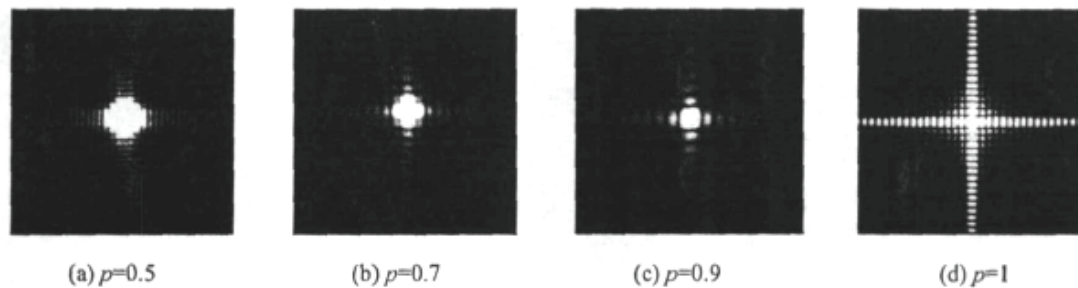


图 3.8 Lohmann 透镜系统分数傅里叶变换的数值模拟结果

Fig.3.8 the analog result of system of the system with Lohmann lens in fractional Fourier transform

实验中输入图像是一个大小为  $64 \times 64$  像素的方孔。图 3.8 表示输入图像的 Namias 型分数傅里叶变换数值模拟结果。图(a)、图(b)、图(c)和图(d)均分别表示分数级次为 0.5, 0.7, 0.9 和 1 四种情况下的实验结果。

## 3.4 啁啾滤波基本原理

半导体激光器在高速及超高速工作时，促使注入有源层的载流子加速变化，而导致输出激光增益随传输材料（如光纤）折射率的改变，又使得激光器的输出增益随传输介质材料折射率的变化。从光谱角度看，这种变化会引起谐振光谱加宽，又引起色散效应。对此现象，用专业术语来说，就称之为啁啾或啁啾波。本文主要讨论啁啾在光信息处理领域的应用，并研究如何滤除图像中的啁啾噪声。

我们知道，通常的滤波系统是在傅里叶频谱面上引入滤波器对噪声进行去除。然而，对于一些噪声，信号和噪声在常规的傅里叶变换域（即 1 次傅里叶变换域）具有明显重叠，在空域和频域都难以分离。啁啾噪声即是此类噪声，必须在分数域（非整数域）对其进行滤波操作。

啁啾噪声在信号处理中是一种常见的非线性高频噪声，采用常规的傅里叶变换滤波系统已无法滤出噪声，必须采用分数傅里叶变换来滤波。为此，采用 Wigner 分布来分析函数在空间域和频率域的分布特征，即分析函数的 Wigner 分布特性。下面具体分析啁啾噪声滤波原理。

啁啾函数表达式为：  $f(x) = \exp[2i\pi(b_2x^2/2 + b_1x + b_0)]$

按照 Wigner 分布函数的定义<sup>[4]</sup>，通过计算，我们可以得到如下结果：

$$f(x) = \exp(2i\pi v_0 x), \Rightarrow W(x, v) = \delta(v - v_0) \quad (3.29)$$

$$f(x) = \delta(x - x_0), \Rightarrow W(x, v) = \delta(x - x_0) \quad (3.30)$$

$$f(x) = \exp[2i\pi(b_2x^2/2 + b_1x + b_0)] \quad (3.31)$$

$$\Rightarrow W(x, v) = \delta(b_2x + b_1 - v) \quad (3.32)$$

其中  $f(x)$  表示原函数， $W(x, v)$  是 Wigner 分布函数。

以上结果表明：首先，纯谐波  $\exp(2i\pi v_0 x)$  的 Wigner 分布是在  $v = v_0$  处，平行于  $x$  轴的直线上分布的  $\delta$  函数；其次， $\delta(x - x_0)$  函数的 Wigner 分布是在  $x = x_0$  处，与  $x$  轴正交直线上分布的  $\delta$  函数；最后，啁啾函数 (3.31) 的 Wigner 分布是与  $x$  轴成角度为  $\theta$  的直线上的  $\delta$  函数，并且  $\theta = \tan^{-1} b_2$  (3.33)

下面来看啁啾函数的分数傅里叶变换的 Wigner 分布特性。由参考文献[4]知道，任意一个函数  $f(x)$  的  $a$  次分数傅里叶变换  $F^a[f(x)]$  的 Wigner 分布可以用如下式子表达：

$$W\{F^a[f(x)]\} = W_a(x, v) = W_0(x \cos \phi - v \sin \phi, v \cos \phi + x \sin \phi) \quad (3.34)$$

式中  $F^a[f(x)]$  表示函数  $f(x)$  的  $a$  级次分数傅里叶变换， $W_a(x, v)$  表示  $a$  级次分数傅里叶变换的 Wigner 分布。 $W_0(x, v)$  是零级分数傅里叶变换的 Wigner 分布，即是函数  $f(x)$  本身的 Wigner 分布。(3.34) 式表明  $f(x)$  的  $a$  级次分数傅里叶变换的 Wigner 分布，就等于  $f(x)$  的 Wigner 分布在  $(x, v)$  平面内旋转角度  $\phi$ ，其中

$$\phi = a\pi/2 \quad (3.35)$$

一个特殊情况就是，对于常规傅里叶变换， $a=1$ ，即 Wigner 分布函数在  $(x, v)$  平面内旋转角度  $\phi$  为  $\pi/2$ ，则对应的  $F^1[f(x)] = W_1(x, v) = W_0(-v, x)$ 。

(3.32) 式表示的啁啾函数的 Wigner 分布是与  $x$  轴夹角为  $\theta = \tan^{-1} b_2$  的直线上分布的  $\delta$  函数。如果让

$$\begin{aligned} \phi &= a\pi/2 = \theta = \tan^{-1} b_2 \\ \Rightarrow a &= \frac{2}{\pi} \tan^{-1} b_2 \end{aligned}$$

则啁啾函数的  $a$  级次分数傅里叶变换的 wigner 分布就是一条垂直于  $x$  轴的直线上分布的  $\delta$  函数，即是啁啾信号在特定的分数傅里叶变换域具有高度空间聚焦性，显然就可以在此分数傅里叶变换空间某一点滤出所有的啁啾函数噪声。

### 3.5 分数傅里叶变换啁啾滤波应用于图像处理

利用上述原理，啁啾信号在特定的分数傅里叶变换域具有高度空间聚焦性。所以，选择合适的分数级次  $a$ ，对混叠信号进行分数傅里叶变换，可以分离在普通空

间域和频率域不能分离的含啁啾信号的混叠信号，再通过简单的滤波，则可以去除信号中自带的啁啾噪声。下面分别在一维和二维情况下，对图像进行啁啾滤波仿真。

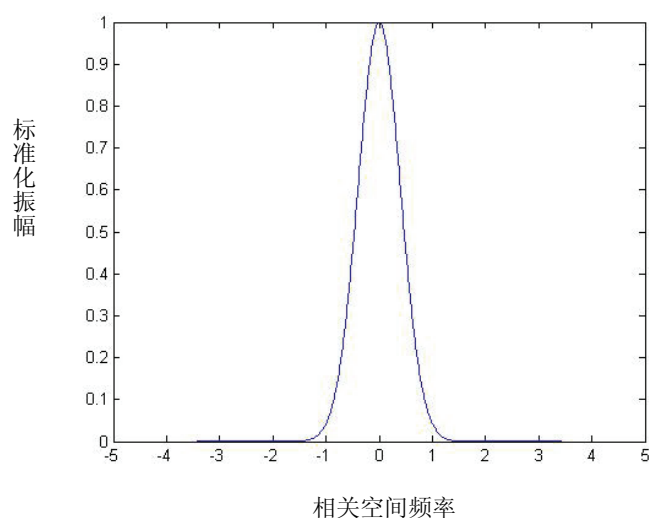


图 3.9 (a) 原高斯信号  $f(x) = \exp(-\pi x^2)$

Fig. 3.9(a) the original Gaussian function

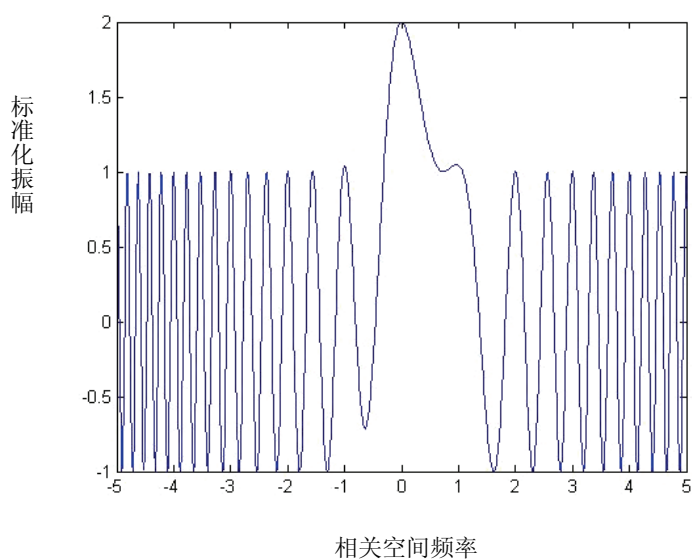


图 3.9 (b) 加入啁啾噪声后的混叠信号  $f(x) = \exp(-\pi x^2) + \exp(i\pi(x^2 - x))$

Fig. 3-9(b) the Gaussian function with added chirp noise

如图 3.9 (b) 所示的混叠信号  $f(x) = \exp(-\pi x^2) + \exp(i\pi(x^2 - x))$ ，即原始图像是高斯信号  $f(x) = \exp(-\pi x^2)$  和啁啾信号  $f(x) = \exp(i\pi(x^2 - x))$  的叠加。根据式 (5) 可知，此啁啾信号的  $b_2 = 1$ ，那么再根据 (3.35) 式，相应的  $\phi = \pi/4$ ，求得  $a=0.5$ ，

即表明该啁啾噪声在 0.5 阶分数域上为一  $\delta$  函数。采用上述分数傅里叶变换的算法，利用 Matlab 进行编程，对信号作 0.5 阶分数傅里叶变换，可以看出，啁啾信号聚焦变成了峰值信号（ $\delta$  函数），也就是说，两个信号已经分离，如图 3.8（c）。因此，只需要一个简单的振幅滤波器就可以实现信号分离或噪声去除。

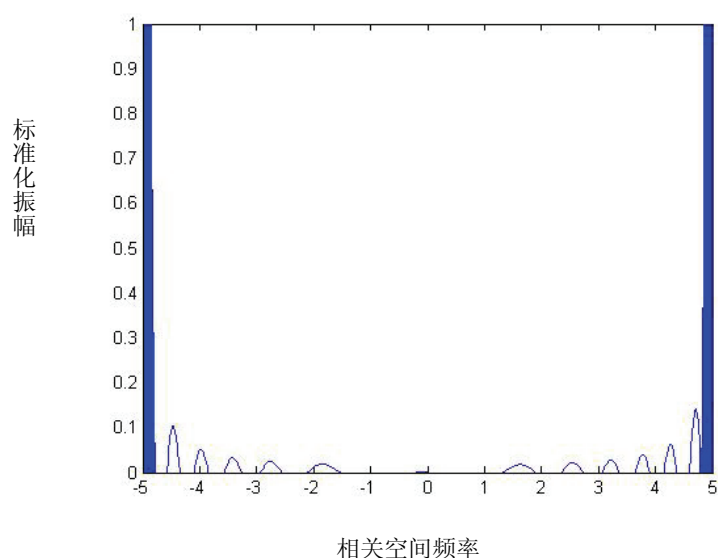


图 3.9（c）混叠信号进行 0.5 阶分数傅里叶变换后的效果

Fig. 3.9(c) the distribution of the Gaussian function with added chirp noise in 0.5 fractional Fourier transform

图 3.10 是对一副二维图像加入啁啾噪声  $f(x,y)$  后，用分数傅里叶变换实现噪声去除的示意图， $f(x,y) = \exp(i\pi(x^2 + y^2 - 8x - 8y))$ 。原始图像和啁啾噪声混合的情况下，质量明显受到影响。同样利用（3.31）式和（3.35）式，求得相应分数级次为  $\alpha=0.5$ ，即啁啾噪声在 0.5 阶分数域上为  $\delta$  函数，和图像的谱分开。采用分数傅里叶变换的一种算法<sup>[9]</sup>，对含有啁啾噪声的图像作 0.5 阶的分数傅里叶变换后，根据分数傅里叶变换的性质，滤波后再作 -0.5 阶的逆变换，通过 Matlab 编程处理，得到最后的输出结果。从仿真结果来看，还原出了比较清晰的图像，这可以有效地说明分数傅里叶变换啁啾滤波在图像处理中的效果。



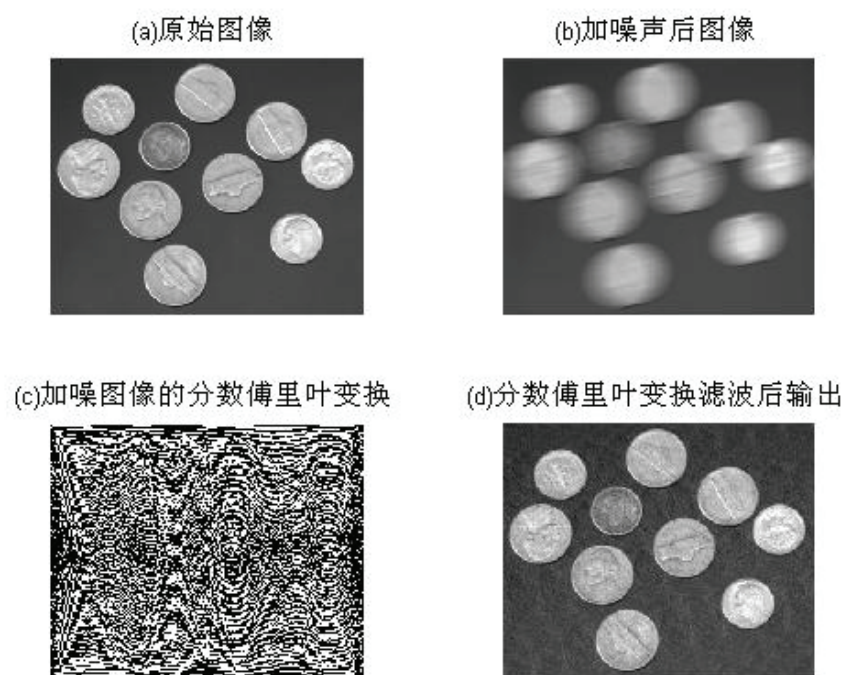


图 3.10 二维图像的分数傅里叶变换啁啾滤波

Fig. 3.10 chirp filtering of 2D image in terms of fractional Fourier transform

Fig. 3.10 (a) the original 2D image

Fig. 3.10 (b) the 2D image with added chirp noise

Fig. 3.10(c) the distribution of the 2D image and chirp noise in 0.5 fractional Fourier transform

Fig. 3.10 (d) the output 2D image of filtering in 0.5 fractional Fourier transform

## 4 总 结

随着对傅里叶变换研究和应用的深入,人们认识到傅里叶变换在处理某些数据时具有局限性。分数傅里叶变换是传统傅里叶变换的推广。自从分数傅立叶变换引入光学信息处理领域以来,分数傅立叶变换凭借其自身比傅立叶更具灵活性及其便利的光学实现,已经成为信号处理领域的有力工具,它与传统傅里叶变换和菲涅尔变换有着紧密的联系,但又具有许多新的特性。近年来,国内外对分数傅里叶变换的性质、光学实现和应用进行了研究,利用分数傅里叶变换对许多物理概念提出了一些全新的观点。目前,分数傅里叶变换已成为光学、信息处理领域的热门话题,将分数傅立叶变换推广应用在各个领域是现在的一个研究热点。

本论文以发展分数傅里叶光学的应用为目标,深入研究了分数傅里叶变换在滤波中的实际应用,并对其相关的理论和技术做了较深入的探讨。

在讲述分数傅里叶变换这一部分内容中,首先较为详细的介绍了分数傅里叶变换的基本理论和部分应用,阐述了两种分数傅里叶变换的光学实现方式,一种是 Mendlovic 和 Ozaktas 等人提出的用渐变折射率介质(GRIN)作为分数傅里叶变换器,介质的长度对应于变换阶数;另一种是 Lohmann 提出的用普通透镜来实现分数傅里叶变换。接着给出了 Wigner 分布函数定义和物理意义,然后在理论上给出了研究光束分数傅里叶变换的 Wigner 分布函数法。最后探讨了分数傅里叶变换和菲涅耳衍射之间的联系。

在讲述分数傅里叶域滤波这一部分内容中,本论文主要围绕以下几个方面来展开:

(1) 分数傅里叶变换是更广义的傅里叶变换,由于引入了分数阶这个新的自由度,使得分数傅里叶变换在操作上比常规傅里叶变换更加灵活。分数傅里叶变换可作为广义空间滤波的基础,它扩展了光学信息处理的内容和方式。分数傅里叶变换的引入,使得滤波操作可以在分数域上进行,通过在不同的分数傅里叶变换面上引入不同的滤波器,可以实现更多的操作,从而增加了滤波操作的自由度。

(2) 对于分数傅里叶变换的应用,分数傅里叶变换数值模拟算法的研究是十分重要的,因为一般情形下分数傅里叶变换给不出解析表达式。本文对分数傅里叶变换数值模拟算法——解啁啾法和厄米—高斯函数展开法进行了研究,给出模拟结果,并对两种方法进行分析和比较。

由于 Lohmann 型分数傅里叶变换和 Namias 型分数傅里叶变换是完全等价的,所以对 Namias 型分数傅里叶变换的数值模拟实际上就是对 Lohmann 给出的两种类型的光学实现结构的数值模拟。最后通过数值模拟实验证明了理论分析和分数

傅里叶变换数值模拟算法的可靠性。

(3) 我们知道, 通常的滤波系统是在傅里叶频谱面上引入滤波器对噪声进行去除。然而, 对于一些噪声, 信号和噪声在常规的傅里叶变换域(即 1 次傅里叶变换域)具有明显重叠, 在空域和频域都难以分离。啁啾噪声即是此类噪声, 必须在分数域(非整数域)对其进行滤波操作。分数傅里叶变换是一种空间平移变的操作, 所以许多在空间域和频率域都重叠的信号和噪音在特定的分数傅里叶变换域却能够很好地分开。根据啁啾信号在特定分数傅里叶域的高度聚焦性, 选择一定的分数傅里叶域, 那么在时域和频域不容易检测到的啁啾信号就能通过相应的分数傅里叶变换检测到。信号和噪声也就可以很容易的分开了。

啁啾噪声在信号处理中是一种常见的非线性高频噪声, 采用常规的傅里叶变换滤波系统已无法滤出噪声, 必须采用分数傅里叶变换来滤波。为此, 采用 Wigner 分布来分析函数在空间域和频率域的分布特征, 即分析函数的 Wigner 分布特性。利用 Wigner 分布分析函数分数傅里叶变换的空间域和频率域特性, 提出在分数傅里叶变换域进行啁啾滤波的原理和方法, 并建立分数傅里叶变换的数值模拟算法, 将该方法应用到图像处理当中, 提出了一种新的改善图像质量的方法。

论文的主要创新点如下:

针对常规傅里叶变换所不能解决的啁啾噪声滤除问题, 利用 Wigner 分布分析函数分数傅里叶变换的空间域和频率域特性, 提出在分数傅里叶变换域进行啁啾滤波的原理和方法。并将该方法应用到图像处理当中, 建立分数傅里叶变换的数值模拟算法, 对分数傅里叶变换滤除一维和二维图像的啁啾噪声进行了计算机仿真, 获得了满意的效果, 也验证了该方法在图像处理中的有效性。

有关用分数傅里叶变换进行啁啾频率的滤波在国内介绍不是很清楚, 本文理清了其原理, 并制作了一维和二维计算机模拟实验, 对此类问题的理解和解决有较好的参考价值。

分数傅里叶变换是一个富有生命力和具有挑战性的前沿领域, 具有比常规傅里叶变换更普遍的特性, 尤其是在一些常规傅里叶变换不能解决的应用场合, 扩展了光学信息处理领域。然而, 分数傅里叶变换的实际应用研究目前尚处在初始阶段, 还有众多方面的工作可以做。可以预见在不久的将来, 当研究工作深入下去时, 必将推动光学信息处理领域的扩展, 具有良好的应用前景。

## 致 谢

研究生三年的学习生涯，伴随着太多人的帮助和鼓励。在三年的学习历程当中，尤其是在本文的研究工作开展期间，无不是在我的导师王丁教授的精心指导和悉心关怀下完成的，在我的学业和论文的研究工作中无不倾注着导师辛勤的汗水。在此深深地感谢王老师，他严谨的治学态度、渊博的知识和独到的见解，他高尚的品质和无私的奉献精神，给学生树立了终身学习的榜样。从王老师身上，我不仅学到了扎实、宽广的专业知识，也学到了做人的道理。再次向老师献上学生由衷的感谢和深深的祝福。

在三年的学习生活中，还有许许多多的人给了我热情的关怀和帮助，在此谨向他们表示衷心的感谢。

感谢陶纯匡老师和汪涛老师在我攻读硕士学位期间所给予的培养和帮助。

感谢巢亚锋和彭婉娟两位同学三年来的热情相助和坦诚相待。

衷心感谢在百忙之中评阅论文和参加答辩的各位专家、教授。

文 亮

二〇〇八年四月 于重庆

## 参考文献

- [1] Namias V. The fractional order Fourier transform and its applications in the quantum mechanics. [J]. *Inst. Math. Appl.* , 1980,25(2) : 241~ 265.
- [2] Mendlovic D, Ozaktas H M. Fractional Fourier transforms and their optical implement: [J]. *Opt. Soc.Am. (A)* , 1993,10(9) : 1875~ 1881.
- [3] Lohmann A W. Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform. [J]. *Opt. Soc.Am. (A)* , 1993,10(10) : 2181~ 2186.
- [4] Dorsch G, Adolf, Lohmann W. Fractional Fourier transform used for a lens-design problem. [J] *Appl. Opt.* ,1995,34(20) : 4111~ 4112.
- [5] Dorsch G, Adolf, Lohmann W. Chirp filtering in the fractional domains. [J] *Appl. Opt.* , 1995,34(32) : 7599~ 7602.
- [6] Berardo L M , Soares D D. Fractional Fourier transforms and imaging. [J]. *Opt. Soc. Am. (A)* , 1994,11(10) : 2622~ 2626.
- [7] Ozaktas H M , MendlovicD. Fractional Fourier as a tool for analyzing beam propagation and spherical mirror resonators. [J] *Opt. Lett.* , 1994,19(21) : 1678~ 1680.
- [8] C. Capus and K. Brown. Fractional Fourier transform of the Gaussian and fractional domain signal support. [J].*IEE Proc.-Vis. Image Signal Process.* Vol1150, No.12. : 99-106, 2003.
- [9] Ozaktas H M , Arikan O , Kutay M A , et al. Digital Computation of Fractional Fourier Transform. *IEEE Trans [J].* , vol.144, no.19. : 2141-2150, 1996.
- [10] Adhemar Bultheel and Hector E. Martinez Sulbaran. Computation of the Fractional Fourier Transform [J]. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*16: 182-202. 2004.
- [11] Candan C, Kutay M A, Ozaktas H M. The discrete fractional Fourier transform [J]. *IEEE Trans Signal Processing*, 2000, 48 (5): 1329-1336.
- [12] Daomu Zhao. Fractional Fourier transform and the diffraction of any misaligned optical system in spatial-frequency domain. [J] *Optics & Laser Technology* 33 (2001) 443–447.
- [13] M. Gunhan Ertosun. Complex signal recovery from two fractional Fourier transform intensities: order and noise dependence. [J] *Optics Communications* 244 (2005) 61–70.
- [14] J. Kaffanke, T. Dierkes, S. Romanzetti. Application of the chirp z-transform to MRI data. *Journal of Magnetic Resonance.* [J] 178 (2006) 121–128.
- [15] Adolf W. Lohmann. Synthesis of pattern recognition filters for fractional Fourier processing. *Optics Communications* [J]128 (1996) 199-204.
- [16] Weimin Jin, Lihong Ma, Caijie Yan. Real color fractional Fourier transform holograms. [J]

- Optics Communications 259 (2006) 513–516.
- [17] Yangsu Zeng, Yongkang Guo, Fuhua Gao, Jianhua Zhu. Principle and application of multiple fractional Fourier transform holography. [J] Optics Communications 215 (2003) 53–59.
  - [18] Jianwen Hua, Liren Liu, Guoqiang Li. Performing fractional Fourier transform by one Fresnel diffraction and one lens. [J] Optics Communications 137 (1997) 11 – 12.
  - [19] Baida Lü, Fanlong Kong, Bin Zhang. Optical systems expressed in terms of fractional Fourier transforms. [J] Optics Communications 137 (1997) 13-16.
  - [20] Yan Zhang, Cheng-Han Zheng, Naohiro Tanno. Optical encryption based on iterative fractional Fourier transform. [J] Optics Communications 202 (2002) 277–285.
  - [21] D. Dragoman, M. Dragoman. Near and far field optical beam characterization using the fractional Fourier transform. [J] Optics Communications 141 (1997) 5-9.
  - [22] Samil Yetik, M. Alper Kutay, Haldun M. Ozaktas. Image representation and compression with the fractional Fourier transform. [J] Optics Communications 197 (2001) 275-278.
  - [23] Xiaogang Wang, Daomu Zhao, Linfei Chen. Image encryption based on extended fractional Fourier transform and digital holography technique. [J] Optics Communications 260 (2006) 449–453.
  - [24] Sang-il Jin, You-Seok Bae, Soo-Young Lee. Holographic data storage with fractional Fourier transform. [J] Optics Communications 198 (2001) 57–63.
  - [25] Chongwei Zheng. Fractional Fourier transform for a hollow Gaussian beam. [J] Physics Letters A 355 (2006) 156–161.
  - [26] S. Granieri, O.Trabocchi, E.E. Sicre. Fractional Fourier transform applied to spatial filtering in the Fresnel domain. [J] Optics Communications 119 ( 1995) 275-278.
  - [27] Pierre Pellat-Finet, Eric Fogret. Complex order fractional Fourier transforms and their use in diffraction theory. Application to optical resonators. [J] Optics Communications 258 (2006) 103–113.
  - [28] 郭永康, 黄奇忠, 杜惊雷. 分数傅里叶变换全息图及其在防伪中的应用. [J] 光学学报, 19 (6), 1999.
  - [29] 杨虎,李万松. 分数傅里叶变换全息图及其再现像的解析性. [J] 中国激光,26(3),1999.
  - [30] 张岩, 顾本源, 杨国桢. 光学分数傅里叶变换及其应用. [J] 物理, 28 (8), 1999.
  - [31] 姚红玉, 刘粤钳. 分数傅里叶变换滤波优化算法及滤波器设计. [J] 应用光学,27(5),2006.
  - [32] 冉启文, 谭立英. 分数傅里叶光学导论. [M] 科学出版社. 2004.
  - [33] 宋丰华. 现代空间光电信息处理技术及应用. [M] 国防工业出版社. 2004.
  - [34] A. C. McBride, F. H. Kerr. On Namia's fractional Fourier transforms. IMA [J]. Appl. Math.1987,39: 159 — 175.

- [35] A. Sahin, H. M. Ozaktas, D. Mendlovic. Optical implementations of two-dimensional fractional Fourier transforms and linear canonical transforms with arbitrary parameters. [J].Opt.Soc. Am. (A), 1998, 37(11): 2130 — 2141.
- [36] 吴平, 吕百达, 陈天禄. 光束分数傅里叶变换的 Wigner 分布函数分析方法. [J] 物理学报., 54 (2), 2005.

## 附 录

### 作者在攻读学位期间发表的论文目录:

- [1] 文亮, 王丁. 分数傅里叶变换啁啾滤波. 光学与光电技术, 2008, 6(5) (已收录, 拟刊登期号).



## 独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得重庆大学或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签名： 签字日期：2008年5月30日

## 学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解重庆大学有关保留、使用学位论文的规定，有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权重庆大学可以将学位论文的全部或部分内 容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

保密（☐），在\_\_\_\_年解密后适用本授权书。

本学位论文属于

不保密（☒）。

（请只在上述一个括号内打“√”）

学位论文作者签名： 导师签名：

签字日期：2008年5月30日 签字日期：2008年5月30日



**CHONGQING UNIVERSITY**