

Airy 波包及其自加速效应

孔红艳

(陕西师范大学 物理学与信息技术学院, 陕西 西安 710119)

摘要:结合 Airy(艾里)函数对线性势场中微观粒子的运动规律进行了研究.在此基础上,结合边界条件、归一化关系求解了线性势场和 V 型势场内粒子的波函数和能级结构.根据相对速度伽利略变换,研究了含时薛定谔方程的解——可积分的波包在自由空间的动力学行为,求解出自由空间艾里波包的运动规律和量子力学中艾里波包的唯一性.

关键词:艾里函数;薛定谔方程;波函数;艾里波包;艾里光束

中图分类号:O 413.1

文献标识码:A

文章编号:1000-0712(2017)12-0028-06

【DOI】10.16854/j.cnki.1000-0712.2017.12.008

经典的宏观世界和量子的微观世界存在非常不同的动力学行为,这在很多的量子系统中都有体现.本文将具体研究一类非常简单的一维问题,揭示其中不同于经典的奇怪现象.

微观世界粒子的运动规律遵守量子力学的薛定谔方程,原则上只要能够求解任何系统的薛定谔方程,就能解决该系统内的任何问题,所以对薛定谔方程的求解就成为量子力学的核心问题^[1].但遗憾的是,大多数系统都无法严格求解,而且能够严格求解的问题也非常少.在可以严格求解的一维势场中,线性势是一类简单而重要的势场,微观粒子在这样的线性势场中的运动会出许多让人感到非常奇怪的量子行为.例如在重力场中粒子的动力学行为,如果粒子的初始态是某种特殊的波包,那么这样的粒子就存在一种叫做自加速的奇怪现象.该现象不仅可以通过求解薛定谔方程得到很好的理解^[2],而且可以在实验上进行验证和观测,下面我们将仔细研究这个问题.

本文首先介绍要用到的一类特殊函数——Airy 函数^[3-8],主要给出 Airy 函数的定义、性质及其渐进行为.接下来求解一维线性势场中的薛定谔方程,得到其 Airy 函数解.然后以此为基础,研究 V 型分段线性势场中薛定谔方程解,仔细研究体系的能级并和谐振势进行比较.接着对 Airy 波包在自由空间的动力学进行计算,考察自由 Airy 波包的自加速运动的物理本质.最后,讨论这种自加速现象在物理实验上的观测结果和相关实验研究.

1 Airy 函数及其性质

该部分简单介绍艾里函数,并通过数学方法得出艾里函数的定义与基本性质.

1.1 Airy 函数 $Ai(x)$

艾里函数 $Ai(x)$, 英文名为 Airy function, 是以英格兰天文学家、数学家乔治·比德尔·艾里命名的特殊函数,因为他最早在 1838 年研究光学的时候遇到了这个函数,并对其进行了最早的研究, $Ai(x)$ 的记法是 Harold Jeffreys 引进的.

1.2 定义和性质

Airy 函数是一类特殊的齐次微分方程的解,该方程被称为艾里方程,其形式为

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) = xy(x) \quad (1)$$

该方程的解即为 Airy 函数,其积分形式为

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{1}{3}t^3 + xt\right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(\frac{1}{3}t^3 + xt\right)} dt \quad (2)$$

Airy 函数可以通过幂函数展开为

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi 3^{2/3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{3}\right)}{n!} \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right) (3^{1/3}x)^n$$

定义傅里叶变换:

$$\tilde{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(x) e^{-itx} dx, \quad y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}(t) e^{itx} dx$$

通过傅里叶变换解方程(1)、(2),则式(1)变为

收稿日期:2017-01-09;修回日期:2017-04-17

基金项目:陕西师范大学科研启动项目(1110010628)资助

作者简介:孔红艳(1974—)女,陕西宝鸡人,陕西师范大学副教授,博士,主要从事热学、热力学统计物理、大学物理的教学工作,以及计算物理和凝聚态理论方向的研究工作.

$$\int \left[\frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right] e^{-ix} dx = \int_{-\infty}^{\infty} [xy(x)] e^{-ix} dx \Rightarrow$$

$$(it)^2 \tilde{y}(t) = i \frac{d\tilde{y}(t)}{dt}$$

$$\frac{d\tilde{y}(t)}{dt} = it^2 \tilde{y}(t)$$

上式方程的解为

$$\tilde{y}(t) = e^{it^3/3}$$

以它为反变换, 就可以得到方程(2)的积分形式. 显然 Airy 函数满足式(1):

$$\frac{d^2}{dx^2} \text{Ai}(x) = x \text{Ai}(x)$$

实际上, 方程(1)具有任意边界条件的通解可以写为

$$y(x) = c_1 \text{Ai}(x) + c_2 \text{Bi}(x) \quad (3)$$

其中 $\text{Bi}(x)$ 被称为第二艾里函数, 是独立于艾里函数的. 对于边界条件 $x=0$ 时, $\text{Ai}(x)$ 和 $\text{Bi}(x)$ 及它们的导数的值为:

$$\text{Ai}(0) = \frac{1}{3^{2/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \approx 0.355\ 028,$$

$$\text{Ai}'(0) = -\frac{1}{3^{1/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \approx -0.258\ 819,$$

$$\text{Bi}(0) = \frac{1}{3^{1/6} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \approx 0.614\ 927,$$

$$\text{Bi}'(0) = \frac{3^{1/6}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \approx 0.448\ 288$$

其中 Γ 表示伽玛函数.

艾里函数在某种意义上是正交的, 其满足:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Ai}(x+x_1) \text{Ai}(x+x_2) dx = \delta(x_1-x_2)$$

另一方面, 方程(1)的形式可近似看作如下的二阶微分方程:

$$y''(x) + U(x)y(x) = 0 \quad (4)$$

其中 $U(x)$ 是 x 的函数. 上述方程在一般的势函数下很难求解, 但在一些近似的条件下, 上述方程可以通过在 $x=x_0$ 附近展开 $U(x)$:

$$U(x) = U(x_0) + U'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} U''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots$$

并近似到 x_0 的一阶导, 则有

$$U(x) \approx U(x_0) + U'(x_0)(x-x_0)$$

使方程(4)变为

$$y''(x) + [U_0(x) + U'(x_0)(x-x_0)]y(x) = 0$$

将上式化简为下式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = [a + b(x-x_0)]y = 0 \quad (5)$$

其中

$$a = U(x_0), \quad b = U'(x_0)$$

如果令

$$z = -\frac{a+b(x-x_0)}{b^{2/3}}$$

则通过变换, 可将艾里方程变为

$$\frac{d^2}{dz^2} y = zy$$

并结合方程(5)可得到

$$y \equiv \text{Ai}(z) = \text{Ai}\left(-\frac{a+b(x-x_0)}{b^{2/3}}\right) \quad (6)$$

一维势场中薛定谔方程的一阶展开方法在 $U(x_0)$ 的高阶较小时是有效的, 其中 $U(x_0)=0$ 被称为是一维势场的转折点或经典转折点.

若 $U'(x_0)=0$, 则 x_0 被称为 $U(x)$ 的极点, 则方程(4)将被展开为谐振子的二阶势场方程, 即

$$y''(x) + \frac{1}{2} U''(x_0)(x-x_0)^2 y(x) = 0$$

同样上式构成了量子力学中非常重要的谐振子问题.

总之, 在一维线性势中粒子的量子运动由艾里函数给出, 其满足的方程为

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) = xy(x) \rightarrow y(x) \equiv \text{Ai}(x)$$

该方程的 Airy 函数解具有以下性质:

$$1) \text{ 平移: } \frac{d^2}{dx^2} y(x) = (x-x_0)y(x) \rightarrow$$

$$y(x) \equiv \text{Ai}(x-x_0)$$

$$2) \text{ 振幅: } \frac{d^2}{dx^2} y(x) = b^3(x-x_0)y(x) \rightarrow$$

$$y(x) \equiv \text{Ai}[b(x-x_0)]$$

2 势场中粒子的运动

下面将量子力学的基本方程——薛定谔方程应用到两个比较简单的力学体系线性势场和 V 型势场中, 求解粒子的波函数和能级结构.

2.1 线性势场中粒子的运动

线性势场中粒子的运动可以写成如下的一维势形式:

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ kx, & x \geq 0 \end{cases}$$

其中 k 是常数. 这是量子力学众多应用中的非常简单的

问题,通过利用 $F(x) = -\partial V(x)/\partial x = -k$, 我们知道 $-k$ 实际上是在线性势场上对粒子施加的力. 线性势场可以描述在重力作用下粒子向下的运动, 其中 $k = mg$. 一带电粒子放置在一个恒定的电场 E 中也可以用这种形式表示, 即 $V(x) = -qEx$, 其中 $k = -qE$.

定态薛定谔方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + kx\psi(x) = E\psi(x)$$

即

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = \frac{2mk}{\hbar^2} \left(x - \frac{E}{k}\right) \psi(x)$$

它的解为

$$\psi(x) = \text{Ai} \left[\left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3} \left(x - \frac{E}{k}\right) \right]$$

图1为线性势场中粒子的能级和波函数, 其中斜实线为线性势, 虚线为能量水平, 横向实曲线为几个低能量的波函数, 势场梯度力 $k=2$ 和 $m=\hbar=1$.

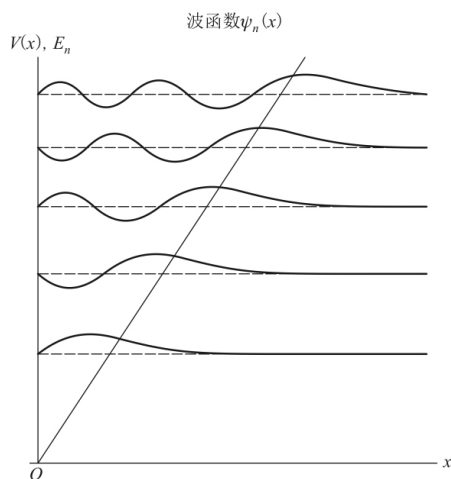


图1 线性势场中粒子的能级和波函数

根据边界条件 $x \rightarrow \infty, \text{Ai}(x) \rightarrow 0$, 波函数满足:

$$\psi(0) = 0 \Rightarrow \text{Ai} \left[- \left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{E}{k} \right] = 0$$

通过艾里函数的零点 $\text{Ai}(\zeta_n) = 0$ 可确定线性势场的能量, 所以该系统的能量是

$$- \left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{E_n}{k} = \zeta_n \Rightarrow E_n = - \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right)^{1/3} \zeta_n$$

因为艾里函数的零点都在 x 的负轴, 例如 $\zeta_1 = -2.33811$, 所以能量 E_n 是正值. 因此, 波函数为

$$\psi_n(x) = \text{Ai} \left[\left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3} \left(x - \frac{E_n}{k}\right) \right] = \text{Ai} \left[\left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3} x + \zeta_n \right]$$

通常, 定态薛定谔方程可以写为

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] \psi(x) = 0 \quad (7)$$

由方程(4)可知

$$U(x) = \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)]$$

我们可以认为经典粒子在转折点 $U(x_0) = 0$, 即 $V(x_0) = E$ 处返回. 在转折点 x_0 处, 可以展开薛定谔方程为

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + [U'(x_0)(x - x_0)] \psi(x) = 0$$

其中 $U'(x_0)$ 与 $F(x_0)$ 关系为

$$U'(x_0) = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{\partial V(x_0)}{\partial x} = \frac{2m}{\hbar^2} F(x_0)$$

如果对于势能 $V(x)$, 其 $V''(x) \ll 1$, 则势能 $V(x) = -\int F(x) dx \approx -F(x_0)x$, 结合方程(6)得到艾里函数解为

$$\psi(x) \approx \text{Ai} \left[- \left(\frac{2m}{\hbar^2} F(x_0) \right)^{1/3} (x - x_0) \right]$$

2.2 V型势场中粒子的运动

现在我们考虑在一个对称的V型势场中分段线性势连接在某一点的粒子, 如 $x=0$ 点处, 则

$$V(x) = \begin{cases} -kx, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \text{ 或 } V(x) = k|x| \\ kx, & x > 0 \end{cases}$$

其中 $k > 0$. 势场是对称的, 波函数是对称或不对称的都具有一定的奇偶性, 其公式为:

$$\psi''(x) = -\frac{2mk}{\hbar^2} \left(x + \frac{E}{k}\right) \psi(x), \quad x < 0$$

$$\psi''(x) = \frac{2mk}{\hbar^2} \left(x - \frac{E}{k}\right) \psi(x), \quad x > 0$$

这时方程(3)的有界解为:

$$\psi(x) = c_1 \text{Ai} \left[- \left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3} \left(x + \frac{E}{k}\right) \right], \quad x < 0$$

$$\psi(x) = c_2 \text{Ai} \left[\left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3} \left(x - \frac{E}{k}\right) \right], \quad x > 0$$

由归一化条件确定 c_1 和 c_2 这两个常数, 艾里函数归一化为

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = |c_1|^2 \int_{-\infty}^0 \text{Ai}^2 \left[- \left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3} \left(x + \frac{E}{k}\right) \right] dx + |c_2|^2 \int_0^{\infty} \text{Ai}^2 \left[\left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3} \left(x - \frac{E}{k}\right) \right] dx = |c_1|^2 \int_0^{\infty} \text{Ai}^2 \left[\left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3} \left(x - \frac{E}{k}\right) \right] dx +$$

$$|c_2|^2 \int_0^\infty \text{Ai}^2 \left[\left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3} \left(x - \frac{E}{k} \right) \right] dx$$

根据边界条件

$$\begin{aligned} c_1 \text{Ai} \left[\left(-\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{E}{k} \right] &= c_2 \text{Ai} \left[-\left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{E}{k} \right] - \\ c_1 \left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3} \text{Ai}' \left[\left(-\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{E}{k} \right] &= \\ c_2 \left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3} \text{Ai} \left[-\left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{E}{k} \right] \end{aligned}$$

可知 $c_1 = c_2 = c$, 能量将由下式确定:

$$\text{Ai} \left[\left(-\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{E}{k} \right] \text{Ai}' \left[-\left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{E}{k} \right] = 0$$

归一化可写为

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = \\ 2 |c|^2 \int_0^\infty \text{Ai}^2 \left[\left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3} \left(x - \frac{E}{k} \right) \right] dx &= \\ \frac{2 |c|^2}{\left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3}} \int_{-\left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{E}{k}}^\infty \text{Ai}^2(z) dz &= \\ \frac{2 |c|^2}{\left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3}} \left[\left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{E}{k} \text{Ai}^2 \left(-\left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{E}{k} \right) + \right. \\ \text{Ai}'^2 \left(-\left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{E}{k} \right) &= \\ 2 |c|^2 \left[\frac{E}{k} \text{Ai}^2 \left(-\left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{E}{k} \right) + \right. \\ \left. \frac{\text{Ai}'^2 \left(-\left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{E}{k} \right)}{\left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3}} \right] &= \\ 2 |c|^2 \left[\frac{E}{k} \text{Ai}^2(\alpha) + \frac{\text{Ai}'^2(\alpha)}{\left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3}} \right] \end{aligned}$$

其中

$$\alpha \equiv -\left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{E}{k} \Rightarrow E = \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{-1/3} k^{2/3} \alpha$$

我们将下式

$$\int_z^\infty \text{Ai}^2(x) dx = -z \text{Ai}^2(z) + \text{Ai}'^2(z)$$

用在上面的推导中, 则实常数为

$$c = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{E}{k} \text{Ai}^2(\alpha) + \left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{-1/3} \text{Ai}'^2(\alpha)}}$$

波函数为

$$\psi(x) = \frac{\text{Ai} \left[\left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3} |x| + \alpha \right]}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{E}{k} \text{Ai}^2(\alpha) + \left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{-1/3} \text{Ai}'^2(\alpha)}}$$

为了满足波函数的对称我们取适当的实常数 c . 如果波函数是对称的, 则 $\psi'(0) = 0$, 那么

$$\text{Ai}' \left[-\left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{E}{k} \right] = \text{Ai}'(\alpha) = 0,$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{2E/k} \text{Ai}(\alpha)}$$

如果 Ai' 的零点由 η_n 表示, 则

$$E_n = -\left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)^{1/3} b^{2/3} \eta_n, \quad c_n = \sqrt{\frac{k}{2E_n}} \frac{1}{\text{Ai}(\eta_n)}$$

如果波函数是反对称的, 就应该在 $x = 0$ 处有一个节点, $\psi(0) = 0$, 那么

$$\text{Ai} \left[-\left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{E}{k} \right] = \text{Ai}(\alpha) = 0,$$

$$c = \frac{\left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/6}}{\sqrt{2} \text{Ai}'(\alpha)}$$

如果 Ai 的零点由 ζ_n 表示, 则

$$E_n = -\left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)^{1/3} b^{2/3} \zeta_n, \quad c_n = -\frac{\left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/6}}{\sqrt{2} \text{Ai}'(\zeta_n)}$$

最后, 我们结合上述两种情况, 可以写出波函数为

$$\psi(x) = [\text{sign}(x)]^n c_n \text{Ai} \left[\left(\frac{2mk}{\hbar^2} \right)^{1/3} |x| + \alpha_n \right]$$

同时

$$E_n = -\left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)^{1/3} k^{2/3} \alpha_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

其中, n 为偶数时, $\alpha_n = \eta_n$, n 为奇数时, $\alpha_n = \zeta_n$. 函数 $\text{sign}(x)$ 是 x 的函数, 以满足该对称的波函数. 图 2 给出了 V 型势场中粒子的能级和波函数.

Ai 和 Ai' 的零点列举如下:

η_n	ζ_n	α_n
1.018 792 971 6...	2.338 107 410 4...	1, 2
3.248 197 582 1...	4.087 949 444 1...	3, 4
4.820 099 211 1...	5.520 559 828 0...	5, 6
6.163 307 355 6...	6.786 708 090 0...	7, 8
7.372 177 255 0...	7.944 133 587 1...	9, 10

一般来说, 如果我们将势能分段为

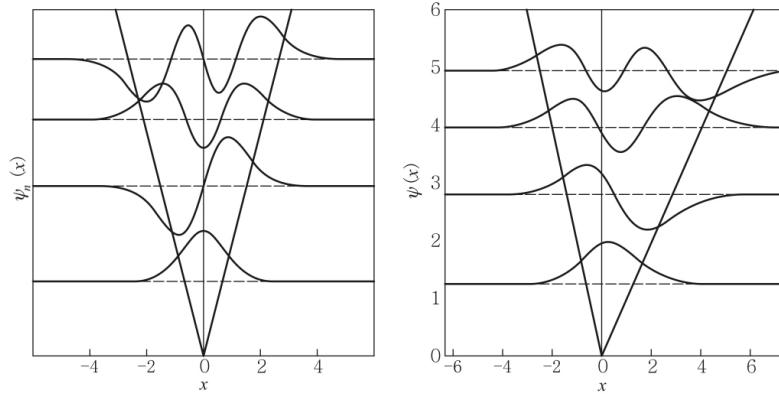


图2 V型势场中粒子的能级和波函数

$$V(x) = \begin{cases} b_1 x, & x < x_0 \\ 0, & x = 0 \\ b_2 x, & x > x_0 \end{cases} \quad \text{或 } V(x) = bx$$

对于不同的 b 在不同的定域中, 我们可以通过位移从 x_0 到 $x=0$ 移动零点的势能, 解薛定谔方程:

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} = \frac{2mb}{\hbar^2} \left(x - \frac{E}{b} \right) \psi(x)$$

其中有界解为:

$$\psi(x) = c \text{Ai} \left[\left(\frac{2mb}{\hbar^2} \right)^{1/3} \left(x - \frac{E}{b} \right) \right]$$

因此边界条件为:

$$c_- \text{Ai} \left[- \left(\frac{2mb_1}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{E}{b_1} \right] = c_+ \text{Ai} \left[- \left(\frac{2mb_2}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{E}{b_2} \right] \quad (8)$$

$$c_- (b_1)^{1/3} \text{Ai}' \left[- \left(\frac{2mb_1}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{E}{b_1} \right] = c_+ (b_2)^{1/3} \text{Ai}' \left[- \left(\frac{2mb_2}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{E}{b_2} \right] \quad (9)$$

这时归一化条件为

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = |c_-|^2 \int_{-\infty}^0 \text{Ai}^2 \left[\left(\frac{2mb_1}{\hbar^2} \right)^{1/3} \left(x - \frac{E}{b_1} \right) \right] dx + |c_+|^2 \int_0^{+\infty} \text{Ai}^2 \left[\left(\frac{2mb_2}{\hbar^2} \right)^{1/3} \left(x - \frac{E}{b_2} \right) \right] dx$$

由以上3式我们可以得出 c_{\pm} 和 E .

实际上, 该系统能量可以根据边界条件方程式(8)和式(9)求解, 即

$$(b_2)^{1/3} \text{Ai} \left[- \left(\frac{2mb_1}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{E}{b_1} \right] \text{Ai}' \left[- \left(\frac{2mb_2}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{E}{b_2} \right] = (b_1)^{1/3} \text{Ai} \left[- \left(\frac{2mb_2}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{E}{b_2} \right] \text{Ai}' \left[- \left(\frac{2mb_1}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{E}{b_1} \right]$$

同时, 归一化方程为:

$$1 = |c_-|^2 \int_{-\infty}^0 \text{Ai}^2 \left[- \left(\frac{2m|b_1|}{\hbar^2} \right)^{1/3} \left(x + \frac{E}{|b_1|} \right) \right] dx + |c_+|^2 \int_0^{+\infty} \text{Ai}^2 \left[\left(\frac{2m|b_2|}{\hbar^2} \right)^{1/3} \left(x - \frac{E}{|b_2|} \right) \right] dx = |c_-|^2 \left(\frac{2m|b_1|}{\hbar^2} \right)^{-1/3} \int_{-\left(\frac{2m|b_1|}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{E}{|b_1|}}^{\infty} \text{Ai}^2(z) dz + |c_+|^2 \left(\frac{2m|b_2|}{\hbar^2} \right)^{-1/3} \int_{-\left(\frac{2m|b_2|}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{E}{|b_2|}}^{\infty} \text{Ai}^2(z) dz = |c_-|^2 \left(\frac{2m|b_1|}{\hbar^2} \right)^{-1/3} \left[\left(\frac{2m|b_1|}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{E}{|b_1|} \cdot \text{Ai}^2 \left(- \left(\frac{2m|b_1|}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{E}{|b_1|} \right) + \text{Ai}'^2 \left(- \left(\frac{2m|b_1|}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{E}{|b_1|} \right) \right] + |c_+|^2 \left(\frac{2m|b_2|}{\hbar^2} \right)^{-1/3} \left[\left(\frac{2m|b_2|}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{E}{|b_2|} \cdot \text{Ai}^2 \left(- \left(\frac{2m|b_2|}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{E}{|b_2|} \right) + \text{Ai}'^2 \left(- \left(\frac{2m|b_2|}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{E}{|b_2|} \right) \right]$$

其中

$$\int_z^{\infty} \text{Ai}^2(x) dx = -z \text{Ai}^2(z) + \text{Ai}'^2(z)$$

如果我们用自然单位 $\hbar = 2m = 1$, 那么能量将由下式确定:

$$|b_2|^{1/3} \text{Ai}(-|b_1|^{-2/3} E) \text{Ai}'(-|b_2|^{-2/3} E) + |b_1|^{1/3} \text{Ai}(-|b_2|^{-2/3} E) \text{Ai}'(-|b_1|^{-2/3} E) = 0 \quad (10)$$

规范化为:

$$1 = |c_-|^2 \left[\frac{E \text{Ai}^2(-|b_1|^{-2/3} E)}{|b_1|} + \frac{\text{Ai}'^2(-|b_1|^{-2/3} E)}{|b_1|^{1/3}} \right] + |c_+|^2 \left[\frac{E \text{Ai}^2(-|b_2|^{-2/3} E)}{|b_2|} + \frac{\text{Ai}'^2(-|b_2|^{-2/3} E)}{|b_2|^{1/3}} \right]$$

并结合下式

$$c_- \text{Ai}(-|b_1|^{-2/3} E) = c_+ \text{Ai}(-|b_2|^{-2/3} E) \Rightarrow$$

$$|c_-|^2 \frac{\text{Ai}^2(-|b_1|^{-2/3} E)}{\text{Ai}^2(-|b_2|^{-2/3} E)} = |c_+|^2$$

得到

$$|c_-|^2 = \left[\frac{E}{|b_1|} \text{Ai}^2(\lambda_1) + \frac{E}{|b_2|} \text{Ai}^2(\lambda_1) + |b_1|^{-1/3} \text{Ai}'^2(\lambda_1) + |b_2|^{-1/3} \frac{\text{Ai}'^2(\lambda_1) \text{Ai}'^2(\lambda_2)}{\text{Ai}'^2(\lambda_2)} \right]^{-1} \quad (11)$$

上式中 $\lambda_1 = -|b_1|^{-2/3} E$, $\lambda_2 = -|b_2|^{-2/3} E$

最后, 得到解在不同定域中不同的波函数与波函数的结合.

当然, 当 $|b_1| = |b_2| = k$ 时, 不对称的情况将通过下式变成对称的情况:

$$c_- = c_+ = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{E}{k} \text{Ai}^2(\lambda_0) + k^{-1/3} \text{Ai}'^2(\lambda_0)}}, \quad \lambda_0 = -k^{-2/3} E$$

(未完待续)

(上接 27 页)

- [4] 林福忠, 马松华. (2+1) 维色散长波方程的新精确解及其复合波激发 [J]. 物理学报, 2014, 63 (4): 4405081-0405087.
- [5] 员保云, 庞晶. 求解非线性薛定谔方程的几种方法 [J]. 激光与光电子学进展, 2014, 51 (3): 406041-0406046.
- [6] 庄彬先, 郭琨, 项元江, 等. F-函数扩展法求解超介质中的亮孤子和暗孤 [J]. 物理学报, 2013, 62 (5): 0542071-0542079.
- [7] 林福忠, 马松华. (2+1) 维孤子系统的复合波解和分形结构 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 2015, 46 (6): 568-573.
- [8] X. Lu, F. H. Lin. Soliton excitations and shape-changing collisions in alpha helical proteins with interspine coupling at higher order [J]. Commun. Nonlinear Sci. Numer Simulat. 2016, (32): 241.
- [9] 杨娟, 冯庆江. 应用改进的简单方程法求 (2+1) 维 ZK-MEW 方程的精确解 [J]. 量子电子学报, 2016, 33 (3): 287-291.
- [10] 杨娟, 冯庆江. 应用改进的试探函数法求非线性数学物理方程的精确解 [J]. 量子电子学报, 2016, 33 (4): 444-450.
- [11] 那仁满都拉. 求解贝塞尔方程的推广试探函数法 [J]. 大学物理, 2016, 35 (6): 8-10.
- [12] 郭鹏, 陈宗广, 孙小伟. 非线性电报方程的简洁解法 [J]. 大学物理, 2014, 33 (4): 15-17.
- [13] 郭鹏, 陈宗广, 孙小伟. 求解非线性传输线方程的简洁解法 [J]. 大学物理, 2012, 31 (9): 25-26.
- [14] Lee Y, An J H. New exact solutions of some nonlinear evolution equations by Sub-ODE method [J]. Honam Mathematical Journal, 2013, 35 (4): 683-699.

Exact solutions for (2+1)-dimensional dispersive long wave equation

YANG Juan¹, YU You-sheng²

(1. College of Mathematical Sciences, Kaili University, Kaili, Guizhou 556011, China;

2. College of Physics and Electronic Engineering, Kaili University, Kaili, Guizhou 556011, China)

Abstract: With the help of the symbolic computation system Mathematica, the new exact solutions of the (2+1)-dimensional dispersive long wave equation are derived in terms of both extended F/G -expansion method and variable separation method. By choosing the appropriate function, the bright and dark dromion solution and the periodic solitary wave solution of the (2+1)-dimensional dissipative long wave equation are obtained.

Key words: extended F/G -expansion method; variable separation method; (2+1)-dimensional dispersive long wave equation; exact solutions