1923. № 22.

ANNALEN DER PHYSIK.
VIERTE FOLGE. BAND 72.

1. *Zur Lichtfortpflanzung nach der Relativitätstheorie;*

von W. Gordon.

Im ersten Teil dieser Arbeit wird gezeigt, daß der Einfluß der Materie auf die elektromagnetischen Vorgänge äquivalent ist mit dem Einfluß eines Gravitationsfeldes mit den Potentialen $k u_\mu u_\nu$ (k Fresnelscher Mitführungskoeffizient, u_μ Vierergeschwindigkeit). Durch diese Zurückführung auf das Vakuum erhält man unmittelbar das Prinzip der kleinsten Wirkung und daraus insbesondere den Energietensor des elektromagnetischen Feldes in ponderabeln Körpern. Man gelangt so zu dem von M. Abraham aufgestellten Tensor. Im zweiten Teil werden die für beliebige lineare Tensoren gültigen Wellengleichungen abgeleitet. Zu den aus der speziellen Theorie durch Transformation hervorgehenden Ausdrücken (die nach dem Äquivalenzprinzip in durch Transformation erzeugten „künstlichen" Schwerefeldern gelten würden) kommen noch Terme hinzu, die den unverjüngten und einmal verjüngten Krümmungstensor enthalten. Trotzdem befolgen diese Ausdrücke die Rechnungsregeln, von denen man in der speziellen Theorie Gebrauch macht. Es genügen daher, wie im dritten Teil gezeigt wird, das Feld, das Viererpotential und das Sechserpotential (Hertzscher Tensor) der verallgemeinerten Wellengleichung. Der Vorzug des Sechserpotentials besteht darin, daß außer der Wellengleichung keine weitere Nebenbedingung zu erfüllen ist. Es steht zur Sechserpolarisation in genau derselben Beziehung wie das Viererpotential zum Viererstrom. Im vierten Teil wird präzisiert, unter welchen Voraussetzungen man von Lichtstrahlen in geometrisch-optischer Beziehung sprechen kann. Die Weltlinien der Strahlen sind die geodätischen Nullinien in einem Gravitationsfeld, das außer dem wirklich vorhandenen noch das der Vierergeschwindigkeit der Materie entsprechende enthält.

1.

Transformation der elektromagnetischen Gleichungen. Die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes, die die Grundlage für die Untersuchung der Lichtfortpflanzung bilden, werden gewöhnlich so geschrieben:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g}\, H^{ik}) = s^i, \tag{2}$$

$$H_i = \varepsilon F_i, \tag{3}$$

$$u_i F_{kl} + u_k F_{li} + u_l F_{ik} = \mu (u_i H_{kl} + u_k H_{li} + u_l H_{ik}), \tag{4}$$

$$s_i + u_i (s^k u_k) = \sigma F_i, \tag{5}$$

wo zur Abkürzung

$$F_i = F_{ik} u^k, \quad H_i = H_{ik} u^k \tag{6}$$

gesetzt ist. u^i ist die Vierergeschwindigkeit der Materie

$$u^i = \frac{d x^i}{\sqrt{-d s^2}}, \tag{7}$$

so daß

$$g_{ik} u^i u^k = u^i u_i = -1 \tag{8}$$

(das Linienelement habe eine negative und drei positive Dimensionen). Die Bedeutung der übrigen Größen ist bekannt. Zu diesen Gleichungen treten die inhomogenen Einsteinschen Gravitationsgleichungen, in die die Summe aus elastischem und elektromagnetischem Energietensor einzusetzen ist. Letzteren werden wir später angeben.

Die Gleichungen (3) und (4) stellen zusammen sechs voneinander unabhängige Gleichungen dar; denn sie drücken aus, daß im Ruhsystem (und bei Normalwerten der g_{ik}) $\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$, $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$ ist. Wir wollen sie nach H_{ik} auflösen. Multiplikation von (4) mit u^i ergibt, wenn man (3), (6) und (8) beachtet,

$$\begin{aligned} -F_{kl} + u_k F_l - u_l F_k &= \mu(-H_{kl} + u_k H_l - u_l H_k) \\ &= \mu\{-H_{kl} + \varepsilon(u_k F_l - u_l F_k)\} \end{aligned}$$

oder

$$\mu H_{ik} = F_{ik} + (\varepsilon\mu - 1)(u_i F_k - u_k F_i). \tag{9}$$

Aus (9) folgen wieder rückwärts (3) und (4). Wir können daher (3) und (4) durch (9) ersetzen.

In den Differentialgleichungen (1) und (2) tritt die Vierergeschwindigkeit nicht auf. Wir wollen die Gleichungen so schreiben, daß auch das Gravitationsfeld auf die Zusatzgleichungen verwiesen wird. Wir ersetzen (1) und (2) durch

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0, \tag{1'}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}^{ik}}{\partial x^k} \qquad = \mathfrak{s}^i \tag{2'}$$

und machen auch in den übrigen Gleichungen die Substitution

$$\mathfrak{H}^{ik} = \sqrt{g}\, H^{ik}, \qquad \mathfrak{s}^i = \sqrt{g}\, s^i . \tag{10}$$

Es ist also das elektromagnetische Feld charakterisiert durch

$$F_{ik}, \qquad \mathfrak{H}^{ik}, \tag{11}$$

F_{ik} ein linearer Tensor, $\mathfrak{H}^{ik}$ eine lineare Tensordichte[1]); das Gravitationsfeld durch

$$g_{ik}; \tag{12}$$

der elektrische Zustand der Materie durch

$$\varepsilon, \ \mu, \ \sigma, \ \mathfrak{s}^i, \tag{13}$$

ε, μ, σ Skalare, $\mathfrak{s}^i$ eine Vektordichte; der mechanische Zustand der Materie (durch mechanische Konstante) und durch die Funktionen

$$x^i = x^i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \tau), \tag{14}$$

die die Weltlinien der materiellen Punkte (durch α_1, α_2, α_3 voneinander unterschieden, während τ die Lage auf der Weltlinie angibt) darstellen. In den elektrischen und mechanischen Gleichungen treten nur die Ableitungen dieser Funktionen auf. Die Vierergeschwindigkeit ist eine Kombination der Bestimmungsstücke (12) und (14)

$$u^i = \frac{\dfrac{\partial x^i}{\partial \tau}}{\sqrt{-g_{\mu\nu}\dfrac{\partial x^\mu}{\partial \tau}\dfrac{\partial x^\nu}{\partial \tau}}} . \tag{15}$$

Für die auszuführende Transformation und die daran anschließenden Entwicklungen ist der Umstand ausschlaggebend, daß in der „dielektrischen" Gleichung (9), die für die Lichtfort-

1) Nach der Terminologie von H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. 4. Aufl. S. 51 und 98.

pflanzung in durchsichtigen Körpern maßgebend ist, die Größen (12) und (15) nur in der Verbindung

$$\gamma^{ik} = g^{ik} - (\varepsilon\mu - 1)\, u^i u^k \tag{16}$$

auftreten.

Um dies zu zeigen, schreiben wir (9) zunächst in kontravarianter Form

$$\mu H^{ik} = F^{ik} + (\varepsilon\mu - 1)(u^i F^k - u^k F^i). \tag{9'}$$

Die linke Seite ist nach (10) $\frac{\mu \mathfrak{H}^{ik}}{\sqrt{g}}$; das erste Glied rechts $g^{ir} g^{ks} F_{rs}$. Nach (6) gilt ferner

$$F^k = g^{ks} F_{sr} u^r = - g^{ks} F_{rs} u^r, \qquad F^i = g^{ir} F_{rs} u^s,$$

so daß wir für die rechte Seite von (9′)

$$F_{rs}\{g^{ir} g^{ks} - (\varepsilon\mu - 1)(u^i u^r g^{ks} + u^k u^s g^{ir})\}$$

erhalten. Fügen wir hier in der geschweiften Klammer noch das Glied $(\varepsilon\mu - 1)^2 u^i u^k u^r u^s$ hinzu, das wegen der Antisymmetrie von F_{rs} verschwindet, so wird aus dieser Klammer $(g^{ir} - (\varepsilon\mu - 1)\, u^i u^r)\,(g^{ks} - (\varepsilon\mu - 1)\, u^k u^s)$ oder gemäß (16) $\gamma^{ir}\gamma^{ks}$. Wir können also (9′) einmal in die Form

$$\mu \mathfrak{H}^{ik} = \sqrt{g}\, \gamma^{ir} \gamma^{ks} F_{rs} \tag{17}$$

bringen. Für das weitere führen wir die zu den γ^{ik} reziproken Größen γ_{ik} ein, die sich eindeutig aus der Forderung $\gamma^{ir}\gamma_{rk} = \delta^i_{\ k}$ zu

$$\gamma_{ik} = g_{ik} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right) u_i u_k \tag{18}$$

bestimmen. In Analogie zu g werde die negative Determinante der γ_{ik} mit γ bezeichnet. Das Verhältnis γ/g ist eine Invariante (Zähler und Nenner multiplizieren sich bei Transformation mit dem Quadrat der Funktionaldeterminante). Wir dürfen daher der Rechnung den Fall $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ zugrunde legen und erhalten

$$-\gamma = \begin{vmatrix} g_{11} \cdots g_{14} \\ \cdots\cdots \\ g_{41} \cdots g_{44} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right) u_4 u_4 \end{vmatrix} = -g - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right) g g^{44} u_4 u_4;$$

denn $-g g^{44}$ ist die Unterdeterminante des Elementes (4, 4) der Determinante. Nach (8) ist $g^{44} u_4 u_4 = -1$; also

(19) $$\gamma = \frac{g}{\varepsilon \mu}$$

und damit erhält (17) die Form

(20) $$\mathfrak{H}^{ik} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, \sqrt{\gamma}\, \gamma^{ir} \gamma^{ks} F_{rs},$$

womit unsere Behauptung erwiesen ist.

Wir werden also dazu veranlaßt, an Stelle des Linienelements ds mit den Koeffizienten g_{ik} ein neues Linienelement $d\sigma$ mit den durch (18) gegebenen Koeffizienten γ_{ik} einzuführen. Wir wollen die auf dieses neue Linienelement bezüglichen Indizes durch Einklammern kenntlich machen. (Nur statt $g^{(i)(k)}$ bzw. $g_{(i)(k)}$ schreiben wir wie bisher γ^{ik} bzw. γ_{ik}). Die Bestimmungsstücke (11), (13), (14) bleiben natürlich von dieser Transformation unberührt, und es ist

(21) $$F_{(i)(k)} = F_{ik}, \qquad \mathfrak{H}^{(i)(k)} = \mathfrak{H}^{ik}, \qquad \mathfrak{s}^{(i)} = \mathfrak{s}^{i}.$$

Wir werden daher bei diesen Größen die Klammern bei den Indizes auch weglassen können. Die zu den Dichten $\mathfrak{H}^{(i)(k)}$, $\mathfrak{s}^{(i)}$ bezüglich (18) gehörigen Tensoren $H^{(i)(k)}$, $s^{(i)}$ werden nach dem Muster (10) wegen (19)

(22) $$H^{(i)(k)} = \frac{\mathfrak{H}^{(i)(k)}}{\sqrt{\gamma}} = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}\,\mathfrak{H}^{ik}}{\sqrt{g}} = \sqrt{\varepsilon\mu}\, H^{ik}, \qquad s^{(i)} = \sqrt{\varepsilon\mu}\, s^{i}.$$

Die in (20) auftretende Verbindung $\gamma^{ir}\gamma^{ks}F_{rs}$ kann nach unserer Festsetzung offenbar $F^{(i)(k)}$ geschrieben werden, $\frac{\mathfrak{H}^{ik}}{\sqrt{\gamma}}$ ist $H^{(i)(k)}$. (20) erscheint dann in der symmetrischen Form

(23) $$\sqrt{\varepsilon}\, F^{(i)(k)} = \sqrt{\mu}\, H^{(i)(k)}$$

oder wenn man zu den bezüglich der Metrik γ_{ik} kovarianten Komponenten übergeht

(23') $$\sqrt{\varepsilon}\, F_{(i)(k)} = \sqrt{\mu}\, H_{(i)(k)}.$$

Erzetzt man in (23) $H^{(i)(k)}$ nach (22) durch $\sqrt{\varepsilon\mu}\, H^{ik}$, so erhält man die Gleichung $F^{(i)(k)} = \mu H^{ik}$ und der Vergleich mit (9') zeigt, daß für $F^{(i)(k)}$ die Transformationsformel

(24) $$F^{(i)(k)} = F^{ik} + (\varepsilon\mu - 1)(u^i F^k - u^k F^i)$$

gilt. (3) und (4) gehen in sich über, wenn man ε und μ mit ihren reziproken Werten und gleichzeitig F mit H vertauscht. Bei dieser Vertauschung wird aus der mit (3) und (4) äquivalenten Gleichung (9)

$$\frac{F_{ik}}{\mu} = H_{ik} + \left(\frac{1}{\varepsilon\mu} - 1\right)(u_i H_k - u_k H_i).$$

Vergleicht man dies mit (23'), indem man beachtet, daß nach (21) $F_{(i)(k)} = F_{ik}$ ist, so erhält man für $H_{(i)(k)}$ die Transformationsformel

$$H_{(i)(k)} = \sqrt{\varepsilon\mu}\left[H_{ik} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right)(u_i H_k - u_k H_i)\right]. \tag{25}$$

Für das Linienelement $d\sigma$ finden wir allgemein nach (18)

$$\begin{cases} d\sigma^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right)(u_i\, dx^i)^2 = ds^2 \\ \qquad\qquad + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right)(u_i\, dx^i)^2. \end{cases} \tag{26}$$

Für die Weltrichtung der Materie ist $dx^i = u^i\sqrt{-ds^2}$ und daher wegen (8) $d\sigma^2 = \frac{ds^2}{\varepsilon\mu}$. Es ist also

$$u^{(i)} = \frac{dx^i}{\sqrt{-d\sigma^2}} = u^i\sqrt{\varepsilon\mu}. \tag{27}$$

Die kovarianten Komponenten $u_{(i)} = \gamma_{ir} u^{(r)}$ werden, wenn man wiederum (8) berücksichtigt,

$$u_{(i)} = \frac{u_i}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{28}$$

Nach (21_1) und (27) wird

$$F_{(i)} = F_{(i)(k)} u^{(k)} = F_{ik} u^k \sqrt{\varepsilon\mu} = F_i\sqrt{\varepsilon\mu} \tag{29}$$

und nach (16)

$$F^{(i)} = \gamma^{ir} F_{(r)} = \left(g^{ir} - (\varepsilon\mu - 1)\, u^i u^r\right) F_r\sqrt{\varepsilon\mu} = F^i\sqrt{\varepsilon\mu}, \tag{30}$$

denn es ist $F_r u^r = 0$. Ganz analog erkennt man, daß

$$H^{(i)} = H^i, \qquad H_{(i)} = H_i. \tag{31}$$

Wir sind jetzt in der Lage, auch das Ohmsche Gesetz (5) auf das neue Linienelement umschreiben zu können. Die kontravariante Komponente der linken Seite von (5) ist nach (22_2), (27) und (28) $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\left(s^{(i)} + u^{(i)}(u_{(k)} s^{(k)})\right)$, die kontravariante rechte Seite nach (30) $\frac{\sigma F^{(i)}}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$. Demnach

$$s^{(i)} + u^{(i)}\left(u^{(k)} s^{(k)}\right) = \sigma F^{(i)}, \tag{32}$$

oder (bezüglich γ_{ik}) kovariant geschrieben

(32') $$s_{(i)} + u_{(i)} (u^{(k)} s_{(k)}) = \sigma F_{(i)} .$$

Für das hier auftretende $s_{(i)}$ erhält man nach (18) und (22_2)

(33) $$s_{(i)} = \gamma_{ir} s^{(r)} = \sqrt{\varepsilon \mu} \left[s_i + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \mu}\right) u_i (u^r s_r) \right] .$$

Zusammenfassend können wir also folgenden Satz aussprechen:

Transformiert man das Gravitationsfeld von g_{ik} auf γ_{ik} durch die Transformationsformeln

$$\gamma_{ik} = g_{ik} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \mu}\right) u_i u_k ,$$

d. h. bildet man die Komponenten der den Differentialgleichungen des Feldes zugrunde liegenden Größen F_{ik}, $\mathfrak{H}^{ik}$, $\mathfrak{s}^i$ bezüglich dieser Metrik, dann nehmen die Zusatzgleichungen die Form

$$\sqrt{\varepsilon}\, F_{(i)(k)} = \sqrt{\mu}\, H_{(i)(k)} , \quad s_{(i)} + u_{(i)} (u^{(k)} s_{(k)}) = \sigma F_{(i)} , \quad u^{(i)} = \frac{d x^i}{\sqrt{- d \sigma^2}}$$

an. Aus der dielektrischen Gleichung fällt die Vierergeschwindigkeit heraus, während das Ohmsche Gesetz seine Form behält.

Für nichtleitende ($\sigma = 0$), ungeladene ($u^k s_k = 0$), homogene (ε, μ konstant) Medien sind die Differentialgleichungen für das Feld F mit denen des reinen Vakuums beim Gravitationsfeld γ_{ik} identisch.

Im letzteren Falle können wir unserm Satze die folgenden zwei physikalischen Deutungen geben:

1. Die elektromagnetischen Erscheinungen in ponderablen Körpern sind dieselben wie im Vakuum, in dem außer dem vorhandenen Gravitationsfeld noch ein Zuzatzfeld mit den Potentialen $\left(1 - \frac{1}{\varepsilon \mu}\right) u_i u_k$ herrscht. In der speziellen Theorie ist bei Beschränkung auf Größen erster Ordnung

$$\gamma_{\alpha\beta} = 1 , \quad \gamma_{\alpha 4} = - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \mu}\right) \frac{v_\alpha}{c} , \quad \gamma_{44} = - \frac{1}{\varepsilon \mu}$$
$$\left(\alpha, \beta = 1, 2, 3;\ v_\alpha = \frac{d x_\alpha}{d t}\right)$$

und das Linienelement $d\sigma$ wird

(34) $$d \sigma^2 = d x_\alpha d x^\alpha - 2 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \mu}\right) v_\alpha d x^\alpha d t - \frac{c^2}{\varepsilon \mu} d t^2 .$$

Die Lichtgeschwindigkeit wird (wie wir im vierten Teil zeigen werden) bei gegebener Richtung durch $d \sigma^2 = 0$ bestimmt. Sind

Licht- und Körpergeschwindigkeit einander parallel, so folgt aus (34) die bekannte Formel

$$\frac{d\,x}{d\,t} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\,\mu}} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\,\mu}\right) v, \tag{35}$$

oder mit derselben Genauigkeit

$$\frac{d\,x}{d\,t} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\,\mu} - (\varepsilon\,\mu - 1)\,\frac{v}{c}}\,. \tag{35'}$$

(35') kann man dahin interpretieren, daß sich das Licht, wie in einem ruhenden Medium vom Brechungsindex $\sqrt{\varepsilon\,\mu} - (\varepsilon\,\mu - 1)\,\frac{v}{c}$ fortpflanzt. Unsere Deutung des Transformationstheorems ist eine Verallgemeinerung dieser Interpretation. Wir haben gewissermaßen eine „Ruhtransformation" vor uns.

In der vorrelativistischen Physik wurde der Term $\left(1 - \frac{1}{\varepsilon\,\mu}\right) v$ in (35) als „Mitführung des Äthers" angesprochen. Wir können unserm Satz eine analoge Deutung geben.

2. Wir zerlegen die Weltverschiebung PQ in die der Vierergeschwindigkeit parallele Mitführungskomponente PP'

$$- \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\,\mu}}\right) u^i\,u_r\,d\,x^r \tag{36}$$

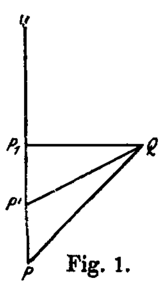

Fig. 1.

und in die Ätherkomponente $P'\,Q$

$$d\,\xi^i = d\,x^i + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\,\mu}}\right) u^i\,u_r\,d\,x^r\,.$$

Für die Entfernung $P'\,Q$ nach der *tatsächlich vorhandenen Metrik* ergibt sich

$$g_{ik}\,d\,\xi^i\,d\,\xi^k = g_{ik}\,d\,x^i\,d\,x^k + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\,\mu}\right)(u_r\,d\,x^r)^2,$$

also nach (26) gleich der Entfernung PQ nach der Metrik γ_{ik}. Ist PQ ein Lichtstrahl im Körper, dann ist $d\,\sigma^2 = 0$, woraus $g_{ik}\,d\,\xi^i\,d\,\xi^k = 0$ folgt, d. h. $P'\,Q$ ist ein Lichtstrahl im Vakuum (beim tatsächlich vorhandenen Gravitationsfeld g_{ik}). Beide unterscheiden sich durch die Mitführung (36). P_1 sei die senkrechte Projektion von Q auf die Richtung u, so daß $PP' = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\,\mu}}\right) PP_1$. Das Analogon der Hertzschen Theorie wäre die Zerlegung PP_1, $P_1\,Q$, was einer unendlich großen Vakuum-lichtgeschwindigkeit im Ruhsystem (P_1 und Q sind in ihm gleichzeitig) entsprechen würde, ganz gemäß dem Galileischen Relativitätsprinzip, das dieser Theorie zugrunde liegt. Man könnte demnach den Faktor $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)$ als „relativistischen" Mitführungskoeffizienten bezeichnen.[1])

Aus dem Vergleich mit den Vakuumfeldgleichungen können wir unmittelbar das *Prinzip der kleinsten Wirkung* und damit nach den Ergebnissen der allgemeinen Relativitätstheorie den *Energietensor* ableiten. Wir sehen vom Ohmschen Gesetz ab, und fassen $\mathfrak{S}^i$ als eine an der Materie haftende Eigenschaft auf wie ε und μ [vgl. (13)]. Dann haben wir nurmehr die Zusatzgleichung (20), die wir nach den getroffenen Festsetzungen auch

$$(20') \qquad \mathfrak{H}^{ik} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sqrt{\gamma}\, F^{(i)(k)}$$

schreiben können. (20) bzw. (20') unterscheiden sich von den im Vakuum beim Gravitationsfeld γ_{ik} zu den Differentialgleichungen (1') und (2') hinzutretenden Zusatzgleichung nur dadurch, daß an Stelle von $\sqrt{\gamma}$ der Faktor $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sqrt{\gamma}$ steht. Demnach erhalten wir ohne weiteres durch diese Substitution aus der elektrischen Wirkungsdichte $L^{(e)}$ des Wirkungsprinzips für das Vakuum (beim Gravitationsfeld γ_{ik})

$$(37) \qquad \delta_\varphi W^{(e)} = \delta_\varphi \int L\, d S = 0\,, \quad (d S = d x^1 d x^2 d x^3 d x^4)\,,$$

$$(38) \qquad L^{(e)} = \tfrac{1}{4}\sqrt{\gamma}\, F_{rs} F^{(r)(s)} - \mathfrak{S}^i \varphi_i\,,$$

wo das Viererpotential φ_i mit dem Felde F durch die Gleichung

$$(39) \qquad F_{ik} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$$

zusammenhängt, die elektrische Wirkungsdichte bei Anwesenheit von Materie

---

1) Die erste Deutung ist, wenn man schon einmal die Verhältnisse in bewegten Körpern mit denen bei Ruhe vergleichen will, offenbar die dem Geist der Relativitätstheorie angemessene. Denn anstatt dem Äther eine Eigenschaft der Materie, nämlich eine Geschwindigkeit zuzuschreiben, wird umgekehrt der Materie ein Gravitationsfeld, also eine Eigenschaft des Äthers, zugeschrieben.

(40) $$L^{(e)} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sqrt{\gamma}\, F_{rs} F^{(r)(s)} - \mathfrak{s}^i \varphi_i$$

oder nach (20′)

(40′) $$L^{(e)} = \tfrac{1}{4} F_{rs} \mathfrak{H}^{rs} - \mathfrak{s}^i \varphi_i\,;$$

denn es ist nur das Viererpotential zu varieren (was wir durch δ_φ angedeutet haben). An den Grenzen des Gebietes, über das das Integral in (37) erstreckt wird, sollen diese Variationen verschwinden.[1]

Um die Gleichungen für die Materie zu erhalten, haben wir zur elektrischen Wirkungsgröße $W^{(e)}$ noch die mechanische $W^{(m)}$ hinzuzufügen. In der Variationsgleichung

(41) $$\delta_m W^{(e)} + \delta_m W^{(m)} = 0$$

sind nur die Funktionen (14) zu varieren. (Dies soll durch δ_m angedeutet werden, an der Grenze sei $\delta_m = 0$). Dabei erleidet die Vierergeschwindigkeit (15) die lokale Änderung

(42) $$\left\{\begin{aligned} \delta_m u^i = \frac{\partial\, \delta x^i}{\partial x^r} u^r - \frac{\partial u^i}{\delta x^r}\delta x^r + u^i u_\mu \frac{\partial\, \delta x^\mu}{\partial x^r} u^r \\ + \tfrac{1}{2} u^i \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^r} u^\mu u^\nu \delta x^r\,. \end{aligned}\right.$$

(Diese Größe ist natürlich ein Vektor. Um das auch in der Darstellung hervortreten zu lassen, hat man nur die gewöhnlichen Ableitungen durch die im zweiten Teil erklärten kovarianten Ableitungen zu ersetzen[2].) Von der durch die Funktionen δx^i charakterisierten Verrückung der Materie werden auch die in der Materie enthaltenen elektrischen Korpuskeln mitgenommen. Die durch die Variation δx^i induzierte Variation von ε und μ (gebundene Elektronen) und $\mathfrak{s}^i$ (freie Elektronen) erhält man am einfachsten[3] aus dem Transformationscharakter dieser Größen (ε, μ Skalare, $\mathfrak{s}^i$ kontravariante Vektordichte):

(43)[4] $$\delta_m \varepsilon = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial x^r}\delta x^r\,, \qquad \delta_m \mu = -\frac{\partial \mu}{\partial x^r}\delta x^r\,.$$

---

1) Das Prinzip (37) (40′) ist von E. Henschke, Diss. Berlin 1912. Ann. d. Phys. 42. S. 887. 1913 aufgestellt worden.

2) Es ist $\delta_m u^i = u^r D_r\, \delta x^i - \delta x^r D_r u^i + u^i u_\mu u^r D_r\, \delta x^\mu$.

3) H. Weyl, a. a. O. S. 212.

4) Wir sehen damit von der Veränderlichkeit von ε und μ mit dem Deformationszustand der Materie ab.

$$(44)\quad \begin{cases} \delta_m \mathfrak{s}^i = \mathfrak{s}^r \dfrac{\partial\,\delta x^i}{\partial x^r} - \dfrac{\partial}{\partial x^r}(\mathfrak{s}^i\,\delta x^r) = \dfrac{\partial}{\partial x^r}(\delta x^i\,\mathfrak{s}^r - \delta x^r\,\mathfrak{s}^i) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \dfrac{\partial\,\mathfrak{s}^r}{\partial x^r}\,\delta x^i\,. \end{cases}$$

Aus der zweiten Form von $\delta_m \mathfrak{s}^i$ sieht man, daß $\delta_m \mathfrak{s}^i$ eine Vektordichte ist (vgl. Gl. (98) und (99)). Setzen wir den aus (2′) sich ergebenden Erhaltungssatz der Elektrizität $\dfrac{\partial\,\mathfrak{s}^r}{\partial x^r} = 0$ voraus, so vereinfacht sich (44) zu

$$(44')\qquad \delta_m \mathfrak{s}^i = \frac{\partial}{\partial x^r}(\delta x^i\,\mathfrak{s}^r - \delta x^r\,\mathfrak{s}^i)\,.$$

Der Vektor u^i wird dagegen von der Variation δx^i nicht mitgenommen, weil sich, da das metrische Feld an Ort und Stelle bleibt, der Abstand zweier materieller Raumzeitpunkte im allgemeinen ändert. (Vgl. Anmerkung 1) S. 432.)

Die zu $W^{(m)}$ gehörige Wirkungsdichte $L^{(m)}$ ist abhängig von den ersten Ableitungen der Funktionen (14) und den g_{ik}.[1])

Aus den elektrischen Gleichungen (37) und den mechanischen Gleichungen (41) folgt der Energieimpulssatz. Man zeigt dies, ohne von dem expliziten Ausdruck von $L^{(e)}$ und $L^{(m)}$ Gebrauch zu machen, bekanntlich[2]), indem man eine Variation betrachtet, bei der alle Größen, auch das Gravitationsfeld, mitgenommen werden. Dann gilt wegen der Invarianz von $W^{(e)}$ und $W^{(m)}$ identisch

$$(45)\qquad \delta_\varphi W^{(e)} + \delta_m W^{(e)} + \delta_g W^{(e)} = 0\,,$$

$$(46)\qquad \delta_m W^{(m)} + \delta_g W^{(m)} = 0\,,$$

wo δ_g auf die Änderung der g_{ik} hinweist. Wir setzen

$$(47)\qquad \delta_g L^{(e)} = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{T}_{ik}\,\delta g^{ik}\,,\quad \delta_g L^{(m)} = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{M}_{ik}\,\delta g^{ik}\,;$$

$\mathfrak{T}_{ik}$ und $\mathfrak{M}_{ik}$ elektrische und mechanische Energietensordichte. In δ_g ist für δg^{ik} einzusetzen

$$(48)\qquad \delta g^{ik} = g^{ir}\frac{\partial\,\delta x^k}{\partial x^r} + g^{kr}\frac{\partial\,\delta x^i}{\partial x^r} - \frac{\partial\,g^{ik}}{\partial x^r}\,\delta x^r\,.$$

---

1) G. Herglotz, Ann. d. Phys. 36. S. 493. 1911; G. Nordström, Versl. Amst. 25. S. 836. 1916.

2) H. Weyl, a. a. O. § 28.

(Den Tensorcharakter von δg^{ik} erkennt man, indem man wie oben die gewöhnlichen durch die kovarianten Ableitungen ersetzt.) Partielle Integration ergibt

(49) $$\delta_g W^{(e)} = -\int \left(\frac{\partial \mathfrak{T}_i^r}{\partial x^r} + \frac{1}{2} \mathfrak{T}_{\alpha\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^i} \right) \delta x^i \, dS$$

und eine analoge Formel (49′) für $\delta_g W^{(m)}$. Aus (45), (46), (49) und (49′) folgt

(50) $$\delta_\varphi W^{(e)} + \delta_m W^{(e)} + \delta_m W^{(m)} = \int \left(\frac{\partial \mathfrak{S}_i^r}{\partial x^r} + \frac{1}{2} \mathfrak{S}_{\alpha\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^i} \right) \delta x^i \, dS,$$

wo $\mathfrak{S}_{ik}$ die Summe beider Energietensordichten ist. Die Gleichungen (37) und (41) haben also in der Tat den Energieimpulssatz

(60) $$\frac{\partial \mathfrak{S}_i^r}{\partial x^r} + \frac{1}{2} \mathfrak{S}_{\alpha\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^i} = 0$$

zur Folge.

Den aus (47_1) sich ergebenden elektrischen Energietensor können wir nun leicht auf Grund unseres Satzes aus demjenigen für das Vakuum ableiten. Im Vakuum beim Gravitationsfeld γ_{ik} gilt

(61) $$\delta_\gamma L^{(e)} = \frac{1}{2} \mathfrak{T}_{(i)(k)} \delta \gamma^{ik}$$

(62) $$\mathfrak{T}_{(i)}^{(k)} = \sqrt{\gamma} \left(F_{ir} F^{(k)(r)} - \frac{1}{4} F_{rs} F^{(r)(s)} \delta_i^k \right).$$

Wir haben hier einfach wieder wie oben $\sqrt{\gamma}$ durch $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sqrt{\gamma}$ zu ersetzen und erhalten, wenn wir wiederum (20′) berücksichtigen

(63) $$\mathfrak{T}_{(i)}^{(k)} = F_{ir} \mathfrak{H}^{kr} - \frac{1}{4} F_{rs} \mathfrak{H}^{rs} \delta_i^k .$$

Um die Beziehung zwischen $\mathfrak{T}_i^k$ und $\mathfrak{T}_{(i)}^{(k)}$ zu ermitteln, haben wir bloß noch $\delta \gamma^{ik}$ durch δg^{ik} auszudrücken. Es ist zunächst nach (15)

(64)[1] $$\delta_g u^i = \frac{1}{2} u^i u^\mu u^\nu \delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} u^i u_\mu u_\nu \delta g^{\mu\nu}$$

---

1) Setzt man hier für δg^{ik} den Wert (48) ein, so wird

$$\delta_g u^i = -u^i u_\mu \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^r} u^r + \frac{1}{2} u^i \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^r} u_\mu u_\nu \delta x^r = -u^i u_\mu \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^r} u^r - \frac{1}{2} u^i \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^r} u^\mu u^\nu \delta x^r .$$

Dadurch werden die zwei letzten Terme in (42) kompensiert:

und daher weiter

$$(65)\quad \begin{cases} \delta\gamma^{ik} = \delta\{g^{ik} - (\varepsilon\mu - 1)u^i u^k\} = \delta g^{ik} \\ \qquad\qquad\qquad + (\varepsilon\mu - 1)u^i u^k u_\mu u_\nu \delta g^{\mu\nu}. \end{cases}$$

Setzen wir dies in (61) ein und vergleichen mit (47_1), so finden wir

$$(66)\qquad \mathfrak{T}_{ik} = \mathfrak{T}_{(i)(k)} + (\varepsilon\mu - 1)u_i u_k \mathfrak{T}_{(\mu)(\nu)} u^\mu u^\nu.$$

Die gemischten Komponenten ergeben sich hieraus, indem man die linke Seite und das zweite Glied rechts mit g^{kl}, das erste Glied rechts mit $\gamma^{kl} + (\varepsilon\mu - 1)u^k u^l$ multipliziert zu

$$(66')\quad \mathfrak{T}_i^l = \mathfrak{T}_{(i)}^{(l)} + (\varepsilon\mu - 1)(\mathfrak{T}_{(i)(k)} u^k + u_i \mathfrak{T}_{(\mu)(\nu)} u^\mu u^\nu) u^l.$$

Im Ruhsystem (und bei Normalwerten der g_{ik}) hat der Faktor von $(\varepsilon\mu - 1)u^l$ die Werte $\mathfrak{T}_{(\alpha)(4)}$, 0 $(\alpha = 1, 2, 3)$. Nach (66) ist in diesem Fall $\mathfrak{T}_{\alpha 4} = \mathfrak{T}_{(\alpha)(4)}$. Mithin

$$(67)\qquad \mathfrak{T}_i^l = \mathfrak{T}_{(i)}^{(l)} + (\varepsilon\mu - 1)(\mathfrak{T}_{ik} u^k + u_i \mathfrak{T}_{\mu\nu} u^\mu u^\nu) u^l$$

und daraus gemäß (63)

$$(67')\qquad T_i^k = F_{ir} H^{kr} - \tfrac{1}{4} F_{rs} H^{rs} \delta_i^k - (\varepsilon\mu - 1)\Omega_i u^k,$$

wo wir den „Ruhstrahl“

$$(68)\qquad \Omega^i = -(T_r^i u^r + u^i T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu)$$

eingeführt haben. Denn ist $\mathfrak{S}^\alpha$ der Energiestrom $(\alpha = 1, 2, 3)$, so ist $T_4^{\ \alpha} = -\dfrac{\mathfrak{S}^\alpha}{c}$ und im Ruhsystem

$$(68')\qquad \Omega^\alpha = \frac{\mathfrak{S}^\alpha}{c}, \quad \Omega^4 = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Trägt man (67′) in (68) ein, so findet man wegen $\Omega^r u_r = 0$

$$(69)\quad \Omega^i = F_l H^{il} - F_l H^l u^i = u_k F_l (H^{ik} u^l + H^{kl} u^i + H^{li} u^k).$$

Durch die Formeln (67′) und (69) ist der von *M. Abraham angegebene Energietensor* bestimmt.[1])

$$(42')\qquad \delta u^i = \delta_m u^i + \delta_g u^i = \frac{\partial\, \delta x^i}{\partial x^r} u^r - \frac{\partial u^i}{\partial x^r}\delta x^r.$$

Dies ist in der Tat die lokale Variation von u^i bei vollständiger Mitnahme von der Verrückung δx^i.

1) W. Pauli jr., Enz. d. math. Wiss. V 19, Formel (303). Nach (50) und (60) gilt auch das Variationsprinzip

$$(\mathrm{A})\qquad \delta_\varphi W^{(l)} + \delta_m W^{(l)} + \delta_m W^{(l)} = 0,$$

wo in δ_φ das Viererpotential von der Variation mitgenommen wird

2.

Die Wellenausdrücke. Der Einfachheit halber werden wir uns im folgenden mit der Lichtausbreitung in homogenen (ungeladenen) Isolatoren beschäftigen. Für diese gelten, wie wir gesehen haben, die Gleichungen des Vakuums beim Gravitationsfeld γ_{ik}. Bis auf weiteres werden wir auch die Klammern bei den Indizes weglassen (und zuweilen auch g_{ik} für γ_{ik} schreiben).

An Stelle der Feldgleichungen verwendet man bei optischen Fragen die aus ihnen abgeleiteten Wellengleichungen. In der speziellen Relativitätstheorie wird die wellenartige Fortpflanzung einer Größe A durch eine Gleichung der Form

$$\square A = \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial x_4^2} = 0$$

gegeben. Diese Summe vom zweiten Differentialquotienten ist der (vierdimensionale) Laplacesche Operator angewandt auf A. Wir wollen zunächst die entsprechenden Operatoren der allgemeinen Theorie aufstellen. Dies gelingt leicht, wenn wir die gewöhnliche Differentiation durch die sog. kovariante Differentiation ersetzen.[1]

Sei p ein Skalar, φ_i ein Vektor, T_{ik} ein Tensor, so lauten die kovarianten Differentialquotienten

---

Dann wird auch das Feld F_{ik} mitgenommen, *nicht aber das Feld* H_{ik}, weil die u^i die Variation (42) und nicht die (42′) Anm. 1) S. 432 erfahren (denn das metrische Feld bleibt unverändert). I. Ishiwara ist, Ann. d. Phys. **42**. S. 986. 1913, von dem Prinzip (A) ausgegangen, wobei er aber noch verlangt (a. a. O. Gleichung (15a)), daß H von der Variation mitgenommen wird. Dann würde dasselbe auch für die u^i folgen, d. h. man legt die Variation δu^i (42′) zugrunde, die auch bei konstanten g_{ik} mit (42) *nicht verträglich* ist. Setzt man aber in die Identität (45) in $\delta_m W^{(l)}$ die Variation (42′) ein, so hat man dafür in $\delta_g W^{(l)}$ die g_{ik} nur soweit sie nicht in den u^i vorkommen zu varieren. Dann ist $\delta \gamma^{ik} = \delta g^{ik}$ und man gelangt gemäß (61) zur Tensordichte (63), die zum von Minkowski (W. Pauli, a. a. O. Formel (301)) angegebenen Energietensor führt, wie dies in der Tat auch aus den expliziten Rechnungen von I. Ishiwara hervorgeht.

1) Sie stammt von E. B. Christoffel. Die angegebenen Regeln 1 bis 4 sind von G. Ricci und T. Levi-Civita. Math. Ann. **54**. S. 135, 1901 aufgestellt worden. Für den Beweis des Tensorcharakters der kovarianten Ableitungen vgl. z. B. M. v. Laue, Relatitivitätsprinpzip II, § I9.

$$(70) \qquad D_i p = p_i = \frac{\partial p}{\partial x_i},$$

$$(71) \qquad D_k \varphi_i = \varphi_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} - \begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix} \varphi_l,$$

$$(72) \qquad D_l T_{ik} = T_{ikl} = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_l} - \begin{Bmatrix} i\,l \\ m \end{Bmatrix} T_{mk} - \begin{Bmatrix} k\,l \\ m \end{Bmatrix} T_{im}$$

und allgemein für einen Tensor

$$(73) \qquad \left\{ \begin{aligned} D_m T_{i_1 i_2 \ldots i_s} = T_{i_1 i_2 \ldots i_s m} &= \frac{\partial T_{i_1 i_2 \ldots i_s}}{\partial x^m} \\ &- \begin{Bmatrix} i_1\, m \\ n \end{Bmatrix} T_{n i_2 \ldots i_s} \ldots - \begin{Bmatrix} i_s\, m \\ n \end{Bmatrix} T_{i_1 i_2 \ldots i_{s-1} n}. \end{aligned} \right.$$

Die Andeutung der Differentiation durch einen Index ist deshalb bequem, weil nach Definition folgendes gelten soll:

1. Regel. Die kontravariante Ableitung wird aus der kovarianten durch den üblichen Übergang von ko- zu kontravarianten Komponenten erhalten, d. h. es ist

$$(74) \qquad D_m T_{i_1 i_2 \ldots i_s} = T_{i_1 i_2 \ldots i_s}{}^{m} = g^{m r} T_{i_1 i_2 \ldots i_s r}.$$

2. Regel. Auf dieselbe Weise geht man von der Ableitung der kovarianten zu der der kontravarianten Komponenten über, d. h.

$$(75) \qquad \left\{ \begin{aligned} &D_m T_{i_1 \ldots i_s}{}^{k_1 \ldots k_t}{}_{l_1 \ldots l_n} \\ &\quad = g^{k_1 r_1} g^{k_2 r_2} \ldots g^{k_t r_t} D^m T_{i_1 \ldots i_s r_1 \ldots r_t l_1 \ldots l_n}. \end{aligned} \right.$$

Auf Grund dieser beiden Regeln kann man daher in einer Gleichung, die diese allgemeinen Ableitungen enthält, entsprechende Indizes nach oben oder nach unten bringen, gleichgültig, ob diese Indizes die Komponente oder die Differentiation andeuten.

Mit Hilfe der Identität

$$(76) \qquad \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = -g^{nk} \begin{Bmatrix} n\,l \\ i \end{Bmatrix} - g^{in} \begin{Bmatrix} n\,l \\ k \end{Bmatrix}$$

kann man auf der rechten Seite von (75) die entsprechenden gemischten Komponenten wie links auftreten lassen. Z. B. ist nach (72) und (75)

$$D_l T^i{}_k = g^{is} T_{skl} = g^{is} \frac{\partial T_{sk}}{\partial x^l} - g^{is} \begin{Bmatrix} s\,l \\ m \end{Bmatrix} T_{mk} - g^{is} \begin{Bmatrix} k\,l \\ m \end{Bmatrix} T_{sm}$$

und für das erste Glied rechts kann man gemäß (76) schreiben

$$\frac{\partial}{\partial x^l}(g^{is}T_{sk}) - \frac{\partial g^{is}}{\partial x^l}T_{sk} = \frac{\partial T^i{}_k}{\partial x^l} + g^{ns}\left\{ {nl \atop i} \right\} T_{sk} + g^{in}\left\{ {nl \atop s} \right\} T_{sk},$$

so daß die Formel

$$D_l T^i{}_k = \frac{\partial T^i{}_k}{\partial x^l} + \left\{ {nl \atop i} \right\} T^n{}_k - \left\{ {kl \atop n} \right\} T^i{}_n$$

resultiert. Allgemein ist

$$(77)\quad \begin{cases} D_m T_{i_1\ldots i_s}{}^{k_1\ldots k_t}{}_{l_1\ldots l_n} = \dfrac{\partial}{\partial x^m} T_{i_1\ldots i_s}{}^{k_1\ldots k_t}{}_{l_1\ldots l_n} \\ \quad - \sum\limits_{\lambda=1}^{s} \left\{ {i_\lambda m \atop p} \right\} T_{i_1\ldots i_{\lambda-1}\,p\,i_{\lambda+1}\ldots i_s}{}^{k_1\ldots k_t}{}_{l_1\ldots l_n} \\ \quad + \sum\limits_{\lambda=1}^{t} \left\{ {pm \atop k_\lambda} \right\} T_{i_1\ldots i_s}{}^{k_1\ldots k_{\lambda-1}\,p\,k_{\lambda+1}\ldots k_t}{}_{l_1\ldots l_n} \\ \quad - \sum\limits_{\lambda=1}^{n} \left\{ {l_\lambda m \atop p} \right\} T_{i_1\ldots i_s}{}^{k_1\ldots k_t}{}_{l_1\ldots l_{\lambda-1}\,p\,l_{\lambda-1}\ldots l_n}. \end{cases}$$

3. Regel. Für die Differentiation von Summe und Produkt gelten die gewöhnlichen Differentiationsregeln.

Dies folgt daraus, daß in einem geodätischen Koordinatensystem, in welchem die Ableitungen der g_{ik} und daher auch die Dreiindizessymbole verschwinden, die kovarianten mit dem gewöhnlichen Ableitungen zusammenfallen.

4. Regel. Vertauschung der Differentiation ist im allgemeinen nicht gestattet, sondern es gilt

$$(78)\quad p_{ik} - p_{ki} = 0,$$

$$(79)\quad \varphi_{ikl} - \varphi_{ilk} = R^h{}_{ikl}\varphi_h,$$

$$(80)\quad T_{iklm} - T_{ikml} = R^h{}_{ilm}T_{hk} + R^h{}_{klm}T_{ih}$$

und allgemein

$$(81)\quad \begin{cases} T_{i_1\ldots i_s lm} - T_{i_1\ldots i_s ml} = R^h{}_{i_1 lm}T_{h i_2\ldots i_s} + \ldots \\ \qquad + R^h{}_{i_s lm}T_{i_1\ldots i_{s-1}h}, \end{cases}$$

wo

$$(82)\quad \begin{cases} R^i{}_{klm} = \dfrac{\partial}{\partial x^l}\left\{ {km \atop i} \right\} - \dfrac{\partial}{\partial x^m}\left\{ {kl \atop i} \right\} + \left\{ {ln \atop i} \right\}\left\{ {km \atop n} \right\} \\ \qquad - \left\{ {mn \atop i} \right\}\left\{ {kl \atop n} \right\} \end{cases}$$

der Riemann-Christoffelsche Krümmungstensor ist. Man bestätigt (81) leicht in einem geodätischen System. In einem solchen ist

$$T_{i_1 \ldots i_s l m} = \frac{\partial^2 T_{i_1 \ldots i_s}}{\partial x^l \partial^m} - \sum_{\lambda=1}^{s} T_{i_1 \ldots i_{\lambda-1} n i_{\lambda+1} \ldots i_s} \frac{\partial}{\partial x^m} \begin{Bmatrix} i_\lambda l \\ n \end{Bmatrix},$$

$$T_{i_1 \ldots i_s l m} - T_{i_1 \ldots i_s m l}$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{s} T_{i_1 \ldots i_{\lambda-1} n i_{\lambda+1} \ldots i_s} \left(\frac{\partial}{\partial x^l} \begin{Bmatrix} i_\lambda m \\ n \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^m} \begin{Bmatrix} i_\lambda l \\ n \end{Bmatrix} \right).$$

Setzen wir ferner

$$\begin{Bmatrix} (i)(k) \\ (l) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} i k \\ l \end{Bmatrix} + p^l_{ik}, \tag{83}$$

wo gemäß der im ersten Teil getroffenen Verabredung die Dreiindizessymbole mit eingeklammerten Indizes sich aus den γ_{ik} genau so aufbauen, wie die gewöhnlichen Symbole aus den g_{ik}. Setzt man (83) z. B. in (72) ein, so findet man unmittelbar

$$D_{(l)} T_{ik} = D_l T_{ik} - p^m{}_{il} T_{mk} - p^m{}_{kl} T_{im}, \tag{84}$$

woraus man erkennt, daß die p Tensoren sind. Durch Zurückgehen auf ein geodätisches System bestätigt man sofort

$$p^l{}_{ik} = \gamma^{rl} \left((k u_k u_r)_i + (k u_r u_i)_k - (k u_i u_k)_r \right), \quad k = 1 - \frac{1}{\varepsilon \mu}. \tag{85}$$

Auf gleiche Weise

$$R^{(i)}{}_{(k)(l)(m)} = R^i{}_{klm} + D_l p^i{}_{km} - D_m p^i{}_{kl} + p^i{}_{ln} p^n{}_{kn} - p^i{}_{mn} p^n{}_{kl}. \tag{86}$$

5. Regel. Man erhält die auf γ_{il} bezogenen kovarianten Ableitungen aus den auf g_{ik} bezogenen, indem man die gewöhnlichen durch die kovarianten (auf g_{ik} bezogenen) Ableitungen und die Dreiindizessymbole durch die Größen p ersetzt. Der Krümmungstensor $R^{(i)}{}_{(k)(l)(m)}$ geht aus $R^i{}_{klm}$ durch Hinzufügung eines Gliedes hervor, das man aus $R^i{}_{klm}$ durch dieselbe Substitution gewinnt.

Nach diesen Vorbereitungen sind wir imstande, die Laplaceschen Ausdrücke niederzuschreiben. Es ist

$$\Box\, p = p^k{}_k, \tag{87}$$

$$\Box\, {}_i\varphi = \varphi_i{}^k{}_k, \tag{88}$$

$$\Box\, {}_{ik}T = T_{ik}{}^l{}_l \quad \text{usw.} \tag{89}$$

Man sieht, daß diese Ausdrücke jeweils denselben Tensorcharakter haben, wie die Größe, auf die der Operator angewandt wird. Bei einem Skalar p treten nach (70) und (71) nur die ersten Ableitungen der g_{ik} auf. Daher wird der Wellenausdruck für einen Skalar auch in der allgemeinen Relativitätstheorie mit dem Laplaceschen Ausdruck zusammenfallen. Wenden wir allgemein den Buchstaben W für einen Wellenausdruck an und führen die Bezeichnungen

$$\text{(90)} \qquad \operatorname{Grad}_i p = \frac{\partial p}{\partial x^i},$$

$$\text{(91)} \qquad \operatorname{Div} \varphi = \varphi^k{}_k$$

ein, so haben wir also für einen Skalar

$$\text{(92)} \qquad \operatorname{Div} \operatorname{Grad} p = W p.$$

Die Ausdrücke (83), (84) usw. enthalten die zweiten Ableitungen g_{ik}. Sie werden daher nur noch im Bereich der speziellen Relativitätstheorie oder in Gravititationsfeldern mit verschwindendem Krümmungstensor Wellenausdrücke darstellen; im allgemeinen Falle werden noch Terme hinzutreten, in denen dieser Tensor vorkommt. Wir wollen diese Zusatzterme bestimmen.

Dazu gelangen wir, wenn wir die Relation (92) auf Tensoren zu verallgemeinern suchen. Diese Verallgemeinerung ist in der speziellen Theorie wohlbekannt. Für einen Vektor gilt dort die Formel[1])

$$\text{(93)} \qquad \operatorname{Div} \operatorname{Rot} \varphi = \operatorname{Grad} \operatorname{Div} \varphi - W \varphi,$$

wo der Wellenausdruck W mit $\square$ identisch ist. Die Operatoren Rot und Div existieren auch in der allgemeinen Theorie. Bezeichnen wir mit p, φ_i, F_{ik}; S_{ikl}, L_{iklm} usw. *lineare* Tensoren 0. (Skalar), 1., 2., 3., 4. usw. Stufe[2]), so sind die Rotationen definiert durch

$$\text{(94)} \qquad \operatorname{Rot}_i p = \frac{\partial p}{\partial x^i},$$

$$\text{(95)} \qquad \operatorname{Rot}_{ik} \varphi = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k},$$

$$\text{(96)} \qquad \operatorname{Rot}_{ikl} F = \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k},$$

$$\text{(97)} \qquad \operatorname{Rot}_{iklm} S = \frac{\partial S_{klm}}{\partial x^i} - \frac{\partial S_{lmi}}{\partial x^k} + \frac{\partial S_{mik}}{\partial x^l} - \frac{\partial S_{ikl}}{\partial x^m} \quad \text{usw.},$$

---

1) M. v. Laue, Relativitätstheorie I, Formel (115).

2) In einem vierdimensionalen Raum bricht die Reihe mit L_{iklm} ab. Um die formalen Zusammenhänge besser erkennen zu lassen, setzen wir im folgenden einen n-dimensionalen Raum voraus.

die Divergenzen durch

(98) $$\mathrm{Div}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}\,\varphi^k),$$

(99) $$\mathrm{Div}\,{}^i F = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}\,F^{ik}),$$

(100) $$\mathrm{Div}\,{}^{ik} S = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{g}\,S^{ikl}),$$

(101) $$\mathrm{Div}\,{}^{ikl} L = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^m}(\sqrt{g}\,L^{iklm}) \text{ usw.}$$

An Stelle der Bezeichnung (94) wird gewöhnlich die in (90) angeführte Grad benutzt. Die durch diese Bildungen entstehenden Tensoren sind wiederum linear. Die Namen Rotationen und Divergenzen rühren daher, daß für sie verallgemeinte Stokessche bez. Gausssche Sätze[1]) gelten. Diese Darstellungen der Rotationen gelten nur für die kovarianten, diejenigen der Divergenzen nur für die kontravarianten Komponenten. Ersetzen wir aber in (94) bis (97) die gewöhnlichen durch die kovarianten Ableitungen, so erhalten wir die Formeln

(94′) $$\mathrm{Rot}_i\,p = p_i\,,$$

(95′) $$\mathrm{Rot}_{ik}\,\varphi = \varphi_{ki} - \varphi_{ik}\,,$$

(96′) $$\mathrm{Rot}_{ikl}\,F = F_{ikl} + F_{kli} + F_{lik}\,,$$

(97′) $$\mathrm{Rot}_{iklm}\,S = S_{klmi} - S_{lmik} + S_{mikl} - S_{iklm} \text{ usw.},$$

wo wir nunmehr nach Regel 1 und 2 auf beiden Seiten die gleichen Indizes nach oben bringen dürfen. Verfahren wir analog mit (98) und (101), indem wir beachten, daß die kovariante Anleitung von $\sqrt{g}$ verschwindet, so gewinnen wir die Formeln

(98′) $$\mathrm{Div}\,\varphi = \varphi^k{}_k \quad (\text{vgl. } 91),$$

(99′) $$\mathrm{Div}\,{}^i F = F^{ik}{}_k\,,$$

(100′) $$\mathrm{Div}\,{}^{ik} S = S^{ikl}{}_l\,,$$

(101′) $$\mathrm{Div}\,{}^{ikl} L = L^{iklm}{}_m \text{ usw.}$$

---

1) W. Pauli jun., a. a. O., S. 606. Für die eindimensionale „Rotation“ lautet der Stokessche Satz $\int_{P_1}^{P_2} \mathrm{Rot}_i\,p\,\delta x^i = p_2 - p_1$.

Durch Herunterziehen des Indizes erhalten wir die kovarianten Komponenten. Die Tensoren (94) bis (101) sind bez. mit den Tensoren (94′) bis (101′) identisch, weil sie in einem geodätischen System miteinander übereinstimmen.

Aus der Darstellung (94′) bis (101′) geht hervor, daß nicht nur die geometrische, sondern auch die *formale* Definition der Rotation und Divergenz aus der gewöhnlichen Vektoranalysis in die allgemeine übertragen werden kann Bekanntlich ist, wenn ∇ der Vektoroperator $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right)$ und $\mathfrak{a}$ ein Vektor ist,

(102) $$\operatorname{rot} \mathfrak{a} = [\nabla \mathfrak{a}] \text{ (äußeres Produkt)},$$

(103) $$\operatorname{div} \mathfrak{a} = \nabla \mathfrak{a} \text{ (inneres Produkt)}.$$

An Stelle von ∇ tritt der Operator D. Das äußere Produkt eines Vektors (linearer Tensor erster Stufe) A mit den linearen Tensoren 1., 2., 3. usw. Stufe φ_i, F_{ik}, S_{ikl} usw. ist

(104) $$[A\varphi]_{ik} = A_i \varphi_k - A_k \varphi_i,$$

(105) $$[AF]_{ikl} = A_i F_{kl} + A_k F_{li} + A_l F_{ik},$$

(106) $$[AS]_{iklm} = A_i S_{klm} - A_k S_{lmi} + A_l S_{mik} - A_m S_{ikl} \text{ usw.}$$

Ist der Vektor A speziell eine Verschiebung $\xi_{(1)}$ und der lineare Tensor $s$ter Stufe, mit dem man ihn äußerlich multipliziert, ein aus den s-Verschiebungen $\xi_{(2)}, \xi_{(3)}, \ldots \xi_{(s+1)}$ gebildeter s-dimensionaler Raumtensor, so ist also das äußere Produkt der aus den $s+1$ Verschiebungen $\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \ldots \xi_{(s+1)}$ gebildete $s+1$-dimensionale Raumtensor. Entsprechend definiert man das äußere Produkt zweier beliebiger Tensoren[1]) und allgemein das äußere Produkt zweier Tensoren, die in den zu multiplizierenden Indizes vollständig antisymmetrisch sind (was

1) Das äußere Produkt von A_{ik} und B_{lm} wird also gegeben durch Entwicklung der Determinante

$$[AB]_{iklm} = \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_k & \alpha_l & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_k & \beta_l & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_k & \gamma_l & \gamma_m \\ \delta_i & \delta_k & \delta_l & \delta_m \end{vmatrix}$$

nach den Unterdeterminanten der ersten zwei Zeilen, indem man nach der Entwicklung $\begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_k \\ \beta_i & \beta_k \end{vmatrix} = A_{ik}$, $\begin{vmatrix} \gamma_l & \gamma_m \\ \delta_l & \delta_m \end{vmatrix} = B_{lm}$ setzt. Man sieht sofort, daß das äußere Produkt sein Vorzeichen bei Vertauschung der Faktoren nur dann ändert, wenn beide Faktoren ungerader Stufe sind.

bei den übrigen Indizes nicht der Fall zu sein braucht). Ist z. B. $A_{\varrho\sigma i k}$ in i und k und $B_{\lambda l m}$ in l und m antisymmetrisch, so wollen wir mit

$$A_{\varrho\sigma[i][k]}\, B_{\lambda[l][m]} \tag{107}$$

das äußere Produkt bezüglich dieser Indizes anzeigen.

Nach diesen Erklärungen lautet die allgemeine formale Definition der Rotation eines linearen Tensors M

$$\operatorname{Rot} M = [D\, M]\,. \tag{108}$$

Die innere Multiplikation besteht bekanntlich (bei beliebigen, nicht notwendig linearen Tensoren) in dem Prozeß der Verjüngung an den zu multiplizierenden Indizes. Es ist also

$$\operatorname{Div} M = D\, M, \tag{109}$$

wo die Multiplikation über den letzten Index von M vorzunehmen ist.

Entsprechend den Formeln (92) und (93) in Verbindung mit (94) definieren wir allgemein den *Wellenausdruck W für einen beliebigen linearen Tensor M* durch

$$\operatorname{Div} \operatorname{Rot} M = \operatorname{Rot} \operatorname{Div} M \pm W M, \tag{110}$$

wo das obere oder das untere Vorzeichen gilt, je nachdem M von gerader oder ungerader Stufe ist.

Für einen Tensor erster Stufe φ_i ist nach (88), (95'), (99')

$$\operatorname{Div}_i \operatorname{Rot} \varphi = \varphi^k{}_{ik} - \varphi_i{}^k{}_k = \varphi^k{}_{ik} - \Box_i \varphi\,.$$

Nach der vierten Regel Formel (79) ist

$$\varphi^k{}_{ik} = \varphi^k{}_{ki} + R^{hk}{}_{ik}\, \varphi_h = \varphi^k{}_{ki} - R_i^h \varphi_h\,,$$

wo $-R_h{}^k{}_{ik} = R^k{}_{hik} = R^k{}_{ihk}$ der verjüngte Krümmungstensor ist. Unter Beachtung von (94') und (98') wird also

$$\operatorname{Div}_i \operatorname{Rot} \varphi = \operatorname{Rot}_i \operatorname{Div} \varphi - \Box_i \varphi - R_i^h \varphi_h$$

und der Vergleich mit (110) lehrt, daß

$$W_i\, \varphi = \Box_i\, \varphi + R_i^h\, \varphi_h\,. \tag{111}$$

Es ist bemerkenswert, daß der Zusatzterm hier nur den verjüngten Krümmungstensor enthält.

Für einen Tensor zweiter Stufe F_{ik} ist gemäß (96') und (100')

$$\operatorname{Div}_{ik} \operatorname{Rot} F = F_{ikl}{}^l + F_{kli}{}^l + F_{lik}{}^l\,. \tag{112}$$

Das erste Glied ist nach (89) $\Box_{ik} F$, die beiden anderen sind zusammen von der Form $K_{ki} - K_{ik}$, wenn $K_{ik} = F_{ilk}{}^{l}$ bedeutet. Nach der 4. Regel Formel (80) ist

$$K_{ik} = F_{il}{}^{l}{}_{k} + R^{h}{}_{lk}{}^{l} F_{ih} + R^{h}{}_{ik}{}^{l} F_{hl},$$

oder unter Einführung der Divergenz (99′) und des verjüngten Krümmungstensors

$$K_{ik} = (\mathrm{Div}_i F)_k + R_k{}^h F_{hi} + R^h{}_{ik}{}^l F_{hl},$$

so daß nach der Definition (95′) der Rotation

$$K_{ki} - K_{ik} = \mathrm{Rot}_{ik} \mathrm{Div} F + R_i{}^h F_{hk} - R_k{}^h F_{hi} + (R^h{}_{ki}{}^l - R^h{}_{ik}{}^l) F_{hl}.$$

Infolge der Symmetrieeigenschaften von R_{iklm} ist schließlich noch $R_{hkil} - R_{hikl} = R_{ikhl}$ und damit geht (112) über in (110) für $M = F$ mit

$$W_{ik} F = \Box_{ik} F + R_i{}^h F_{hk} - R_k{}^h F_{hi} + R_{ik}{}^{hl} F_{hl}. \tag{113}$$

Nach (104) kann man dies mit Benutzung der Schreibweise (107) auch

$$W_{ik} F = \Box_{ik} F + R_{[i]}{}^h F_{h[k]} + R_{ik}{}^{hl} F_{hl} \tag{113'}$$

schreiben.

Genau so leitet man für den Tensor dritter Stufe S_{ikl}

$$\left\{\begin{aligned} W_{ikl} S = \Box_{ikl} S &+ R_i{}^h S_{hkl} + R_k{}^h S_{hli} + R_l{}^h S_{hik} \\ &+ R_{ik}{}^{hm} S_{hml} + R_{kl}{}^{hm} S_{hmi} + R_{li}{}^{hm} S_{hmk} \end{aligned}\right. \tag{114}$$

ab, was sich wieder nach (105)

$$W_{ikl} S = \Box_{ikl} S + R_{[i]}{}^h S_{h[k][l]} + R_{[i][k]}{}^{hm} S_{hm[l]} \tag{114'}$$

schreiben läßt.

Die *allgemeine* Formel für den Wellenausdruck W des linearen Tensors $s$ter Stufe $M_{i_1 i_2 \ldots i_s}$ lautet

$$\left\{\begin{aligned} W_{i_1 \ldots i_s} M = \Box_{i_1 \ldots i_s} M &+ R_{[i_1]}{}^h M_{h[i_2]\ldots[i_s]} \\ &+ R_{[i_1][i_2]}{}^{hm} M_{hm[i_3]\ldots[i_s]}. \end{aligned}\right. \tag{115}$$

Aus den Formen (94) bis (101) der Rotationen und Divergenzen folgt unmittelbar

$$\mathrm{Div}\,\mathrm{Div}\, M = \mathrm{Rot}\,\mathrm{Rot}\, M = 0. \tag{116}$$

Nimmt man also von (110) die Divergenz bzw. die Rotation, so wird

$$\mathrm{Div}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{Div}\, M = \mp \mathrm{Div}\, WM, \quad \mathrm{Rot}\,\mathrm{Div}\,\mathrm{Rot}\, M = \pm \mathrm{Rot}\, WM.$$

Da sich die Stufenzahl eines Tensors bei Divergenz- oder

Rotationsbildung um eine Einheit ändert, gibt (110) angewandt auf Div M und Rot M

$$\operatorname{Div}\operatorname{Rot}\operatorname{Div} M = \mp W \operatorname{Div} M, \quad \operatorname{Rot}\operatorname{Div}\operatorname{Rot} W = \pm W \operatorname{Rot} M.$$

Demnach ist

(117) $$\operatorname{Div} WM = W \operatorname{Div} M, \qquad \operatorname{Rot} WM = W \operatorname{Rot} M.$$

Der Wellenausdruck ist mit Rot und Div vertauschbar.

Für zwei lineare Tensoren gleicher (etwa zweiter) Stufe M und N gilt für das innere Produkt $M \square N$ wegen der 3. Regel unter Beachtung von (98) und (98')

$$M^{ik} \square_{ik} N = M^{ik} N_{ik\,l}^{\;\;\;l} = (M^{ik} N_{ik}^{\;\;l})_l - M^{ik}_{\;\;l} N_{ik}^{\;\;l}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^l} (\sqrt{g}\, M^{ik} N_{ik}^{\;\;l}) - M^{ik}_{\;\;l} N_{ik}^{\;\;l}$$

und damit

(118) $$M \square N - M \square N = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^l} \{\sqrt{g}\,(M^{ik} N_{ik}^{\;\;l} - M^{ik} N_{ik}^{\;\;l})\}.$$

Hier kann man $\square$ durch W ersetzen; denn die Zusatzterme heben sich, wie man an (111), (113), (114) und der allgemeinen Formel (115) erkennt, wegen der Symmetrie von R_{ik} bzw. R_{iklm} in den Indizes i, k bzw. in dem Indexpaar (ik), (lm) fort. Integrieren wir (118) über einen geschlossenen vierdimensionalen Raum (Volumenelement $d\Sigma = \sqrt{g}\, dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4$), so erhält man aus dem Gaussschen Satz[1])

(119) $$\int (M W N - N W M)\, d\Sigma = \int (M N_n - N M_n)\, dS$$

(dS Oberflächenelement der Begrenzungsfläche, n *kovariante* Ableitung nach der äußern Normalen). *Für die Wellenausdrücke* (*und Laplaceschen Operatoren*) *gilt der Greensche Satz.*[2])

3.

Feld, Viererpotential, Hertzscher Tensor. Die Differentialgleichungen für das Feld F schreiben sich (wieder mit Fortlassung der Klammern bei den Indizes), wenn man die Definitionen (96) und (99) einführt

(120) $$\operatorname{Rot} F = 0, \qquad \operatorname{Div} F = 0.$$

---

1) W. Pauli jun., a. a. O., Formel (139a).

2) Die Dichten $\sqrt{g}\,\square$, $\sqrt{g}\,W$ stellen also sich selbst adjungierte Differentialausdrücke dar.

Aus (110) folgt sodann

$$WF = 0. \tag{121}$$

WF ist der Ausdruck (113) (wobei Regel 5 zu beachten ist). *Das Feld pflanzt sich wellenartig fort.* Mit Hilfe des Vertauschungssatzes (117) beweist man ganz analog wie in der klassischen Theorie[1]) die Umkehrung: Eine Lösung der Wellengleichung (121), die zu einem Zeitpunkt der Feldgleichungen (120) genügt, tut dies stets.

Die unbequeme Einschränkung der Anfangswerte kann man mildern oder ganz beseitigen, das erstere durch Einführung des *Viererpotentials* φ, das letztere durch Einführung des *Sechserpotentials* Z, das wir auch den *Hertzschen Tensor* nennen wollen. (Wir werden diesen Namen sogleich rechtfertigen.) Wie in (39) setzen wir

$$F = \operatorname{Rot} \varphi, \tag{122}$$

wodurch nach (116) die erste Gleichung (120) erfüllt wird. Aus (93) folgt dann

$$\operatorname{Div} F = \operatorname{Div} \operatorname{Rot} \varphi = \operatorname{Grad} \operatorname{Div} \varphi - W\varphi, \tag{123}$$

so daß auch die zweite Gleichung (120) erfüllt wird, wenn φ der Wellengleichung

$$W_i \varphi = \Box_i \varphi + R_i^h \varphi_h = 0 \tag{124}$$

mit der Nebenbedingung

$$\operatorname{Div} \varphi = 0 \tag{125}$$

unterworfen wird. Von dieser kann man sich endlich nach (116) noch befreien durch den Ansatz

$$\varphi = \operatorname{Div} Z. \tag{126}$$

Nach der Vertauschungsregel (117) ist

$$W\varphi = W \operatorname{Div} Z = \operatorname{Div} WZ, \tag{127}$$

so daß (124) durch die Gleichung

$$WZ = 0 \tag{128}$$

Genüge geleistet wird. Aus (122) und (126) erhält man die Darstellung des Feldes durch das Sechserpotential

$$F = \operatorname{Rot} \operatorname{Div} Z, \tag{129}$$

1) Vgl. E. Cohn, Das elektromagnetische Feld, S. 410—412.

oder wegen (110) und (128)

$$F = \operatorname{Div}\operatorname{Rot} Z. \tag{129'}$$

Vierer- und Sechserpotential erfüllen die Wellengleichung.

Ein System geladener Teilchen (im folgenden kurz Molekül genannt) von der Gesamtladung e ruft im Weltpunkt P (x^1, x^2, x^3, x^4) nach der speziellen Relativitätstheorie (wir legen für den Rest dieses Teils die Elektronentheorie des Vakuums zugrunde) in erster Annäherung ein Viererpotential

$$\varphi_i = \frac{e\,u_i}{R}, \qquad R = -(x_r - \xi_r)\,u^r \tag{130) [1]}$$

hervor. (ξ_r, u_r Koordinaten und Vierergeschwindigkeit des Moleküls im Schnittpunkt seiner Weltlinie mit dem Vorkegel $(x_r - \xi_r)(x^r - \xi^r) = 0$ von P). Statt der Eigenzeit s können wir aber wie in (14) einen beliebigen Parameter τ wählen, durch den die Lage des Moleküls auf seiner Weltlinie bestimmt wird. Die in (15) auftretende Wurzel hebt sich in (130) in Zähler und Nenner weg und wir können schreiben

$$\varphi_i = \frac{e}{R}\,\frac{d\xi_i}{d\tau}, \qquad R = -(x_r - \xi_r)\,\frac{d\xi^r}{d\tau}. \tag{130'}$$

Verschwindet die Gesamtladung e, so ist das Molekül *elektromagnetisch polarisiert* (wobei die Trennung in elektrische und magnetische Polarisation abhängt von der Trennung in Raum und Zeit). In diesem Falle reicht (130') nicht aus, sondern man hat in der Näherung einen Schritt weiter zu gehen. Nach (126) liegt Z eine Differentiationsstufe vor φ. Wir werden daher vermuten, daß in Analogie zu (130') durch die Formel

$$Z_{ik} = \frac{m_{ik}}{R} \tag{131}$$

das Sechserpotential eines elektromagnetischen Dipols dargestellt wird (in erster Annäherung, falls die elektromagnetischen Momente m nicht verschwinden). Spalten wir in Raum und Zeit nach dem Schema

$$\begin{aligned}
F_{14}\ F_{24}\ F_{34},\ F_{23}\ F_{31}\ F_{12} &= \mathfrak{E}, \mathfrak{H}, \\
\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3,\ \varphi_4 &= \mathfrak{A}, \varphi, \\
Z_{14}\ Z_{24}\ Z_{34},\ Z_{23}\ Z_{31}\ Z_{12} &= -\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}', \\
m_{14}\ m_{24}\ m_{34},\ m_{23}\ m_{31}\ m_{12} &= -\mathfrak{p}, \mathfrak{m},
\end{aligned}$$

---

1) M. v. Laue, Relativitätstheorie I, Formel (218); W. Pauli jun., a. a. O., Formel (238 a).

$\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ elektrische und magnetische Feldstärke, $\mathfrak{A}$, φ Vektor- und skalares Potential, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{p}$ polare, $\mathfrak{Z}'$, $\mathfrak{m}$ axiale räumliche Vektoren, so zerfällt zunächst (126) und (129), (129') in die Gleichungen

$$(126') \qquad \mathfrak{A} = \frac{\dot{\mathfrak{Z}}}{c} + \operatorname{rot} \mathfrak{Z}', \qquad \varphi = -\operatorname{div} \mathfrak{Z},$$

$$(129'') \qquad \mathfrak{E} = \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathfrak{Z} - \frac{1}{c}\operatorname{rot} \dot{\mathfrak{Z}}', \qquad \mathfrak{H} = \frac{1}{c}\operatorname{rot}\dot{\mathfrak{Z}} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{Z}'$$

$$\left(\text{Punkt} = \frac{\partial}{\partial t}\right).$$

Aus (128) geht die gewöhnliche Wellengleichung für $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}'$ hervor. (131) aber zerfällt, wenn das Molekül ruht $\left(\frac{d\xi^1}{d\tau} = \frac{d\xi^2}{d\tau} = \frac{d\xi^3}{d\tau} = 0\right)$, in

$$(131') \qquad \mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}, \quad \mathfrak{Z}' = \frac{\mathfrak{m}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \quad \left(\begin{matrix} r = \text{Entfernung} \\ P - \text{Molekül} \end{matrix}\right)$$

Ist $\mathfrak{m}$ und damit $\mathfrak{Z}'$ gleich Null, so ist, wie man aus (126'), (129'') und (131') erkennt, $\mathfrak{Z}$ gleich dem *Hertzschen Vektor* für ein *elektrisch* polarisiertes Molekül vom Moment $\mathfrak{p}$.[1] Ist umgekehrt $\mathfrak{p} = \mathfrak{Z} = 0$, so wird durch (126'), (129'') in Verbindung mit (131') Potentiale und Feld eines *magnetisch* polarisierten Moleküls vom Moment $\mathfrak{m}$ wiedergegeben.[2] $\mathfrak{Z}'$ ist das magnetische Gegenstück zu $\mathfrak{Z}$. *Das Sechserpotential ist die vierdimensionale Zusammenfassung des elektrischen und magnetischen Hertzschen Vektors.*

Wir wollen den Hertzschen Tensor für ein beliebiges ungeladenes Molekül angeben und damit auch die Formel (131) bestätigen. Sei

$$(132) \qquad \eta^i(\tau, \varepsilon) = \xi^i(\tau) + \varepsilon\,\delta\xi^i, \qquad \varepsilon = 1$$

die Weltlinie eines der geladenen Teilchen von der Ladung e, $\xi^i(\tau)$ die Weltlinie des Molekülmittelpunktes, die $\delta\xi^i$, Funktionen von τ, also die relativen Koordinaten des Teilchens. Die formale Einführung des Faktors ε dient in bekannter Weise dazu, die Entwicklung nach den $\delta\xi^i$ und ihren Ableitungen nach τ in eine solche nach ε zu verwandeln. (Hinterher ist dann

1) Vgl. z. B. M. Planck, Einführung in die Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. § 87, 88.

2) H. A. Lorentz, Enz. d. math. Wiss. V. 14. Nr. 15.

wieder ε gleich 1 zu setzen.) Nach (130′) ist das Viererpotential des Teilchens

$$\varphi_i = \frac{e}{R}\frac{\partial \eta_i}{\partial \tau}, \qquad R = -(x_r - \eta_r)\frac{\partial \eta^r}{\partial \tau}, \tag{133}$$

wo τ die aus der Gleichung

$$(x_r - \eta_r)(x^r - \eta^r) = 0 \tag{134}$$

des Nullkegels in P sich ergebende Funktion von ε und den Koordinaten x^1, x^2, x^2, x^4 von P ist. Die rechten Seiten von (133), die ursprünglich (wo die η^i die Funktionen (132) von ε und τ sind) Funktionen ψ_i (τ, ε, x^1, x^2, x^3, x^4) sind, verwandeln sich durch die Substitution von τ in Funktionen $\varphi_i(\varepsilon, x^1, x^2, x^2, x^4)$:

$$\psi_i(\tau, \varepsilon, x^1, x^2, x^3, x^4) = \varphi_i(\varepsilon, x^1, x^2, x^3, x^4). \tag{135}$$

Um nach ε zu entwickeln, haben wir die Ableitungen $\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon^2}$ usw. zu bilden. Differentiation von (134) und (135) liefert sofort

$$\frac{\partial \tau}{\partial x^k} = -\frac{x_k - \eta_k}{R}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon} = \frac{x_r - \eta_r}{R}\frac{\partial \eta^r}{\partial \varepsilon} = -\frac{\partial \tau}{\partial x^r}\frac{\partial \eta^r}{\partial \varepsilon}, \tag{136}$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \psi_i}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon} = \frac{d \psi_i}{d \varepsilon}, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x^k} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x^k}, \tag{136′}$$

woraus folgt

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \psi_i}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \psi_i}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x^r}\frac{\partial \eta^r}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \psi_i}{\partial \varepsilon} + \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x^r} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^r}\right)\frac{\partial \eta^r}{\partial \varepsilon}. \tag{137}$$

Für die hier rechts auftretenden Posten erhält man aus (133)

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \varepsilon} = \frac{e}{R}\frac{\partial^2 \eta_i}{\partial \tau \partial \varepsilon} - \frac{e}{R^2}\frac{\partial \eta_i}{\partial \tau}\left\{\frac{\partial \eta_r}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \eta^r}{\partial \tau} - (x_r - \eta_r)\frac{\partial^2 \eta^r}{\partial \tau \partial \varepsilon}\right\}$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x^r}\frac{\partial \eta^r}{\partial \varepsilon} = \frac{e}{R^2}\frac{\partial \eta_i}{\partial \tau}\frac{\partial \eta_r}{\partial \tau}\frac{\partial \eta^r}{\partial \varepsilon}$$

$$-\frac{\partial \varphi_i}{\partial x^r}\frac{\partial \eta^r}{\partial \varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\varphi_i \frac{\partial \eta^r}{\partial \varepsilon}\right) + \varphi_i \frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial \eta^r}{\partial \varepsilon}\right).$$

Bei der Summation dieser drei Ausdrücke hebt sich das zweite Glied des ersten Ausdrucks gegen den zweiten Ausdruck weg. Das letzte Glied des ersten Ausdrucks ist nach (133) und der ersten Gleichung (136) $-\varphi_i \frac{\partial \tau}{\partial x^r}\frac{\partial^2 \eta^r}{\partial \tau \partial \varepsilon} = -\varphi_i \frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial \eta^r}{\partial \varepsilon}\right)$ und wird also durch das letzte Glied des dritten Ausdrucks vernichtet. Nach der ersten Gleichung (136) und der Definition von R in (133) ist $\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial \eta^i}{\partial \varepsilon}\right) \cdot \frac{\partial \eta^r}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \eta^i}{\partial \tau \partial \varepsilon}\frac{\partial \tau}{\partial x^r}\frac{\partial \eta^r}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \eta^i}{\partial \tau \partial \varepsilon}$, so daß man für das erste Glied des ersten Ausdrucks $\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial \eta^i}{\partial \varepsilon}\right) \cdot \varphi^r$ oder wegen der Divergenzfreiheit (125) des Viererpotentials $\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial \eta^i}{\partial \varepsilon}\varphi^r\right)$ schreiben kann. Wir erhalten somit schließlich

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial \eta^i}{\partial \varepsilon}\varphi^r - \frac{\partial \eta^r}{\partial \varepsilon}\varphi^i\right) \tag{138}$$

oder, wenn wir die Definition (104) des äußern Produkts zweier Vektoren einführen,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} = \operatorname{Div}\left[\frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon}\varphi\right]. \tag{138'}$$

Nach der ersten Gleichung (136') angewandt auf $\left[\frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon}\varphi\right]$ ist ferner

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon^2} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\operatorname{Div}\left[\frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon}\varphi\right] = \operatorname{Div}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left[\frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon}\varphi\right] = \operatorname{Div}\frac{d}{d\varepsilon}\left[\frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon}\psi\right], \tag{139}$$

wo zuerst $\partial\eta/\partial\varepsilon$ als Funktion von ε und den x, zuletzt als Funktion von ε und τ gedacht ist. Aus (138') und (139) ersieht man, daß das *Sechserpotential eines polarisierten Moleküls* durch

$$Z = z + \frac{1}{2!}\frac{dz}{d\varepsilon} + \frac{1}{3!}\frac{d^2 z}{d\varepsilon^2} + \dots \tag{140}$$

dargestellt wird, worin für z nach (132), (133) und (138')

$$\left\{\begin{aligned} z &= \left[\frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon}\varphi\right] = \frac{e}{R}\left(\left[\delta\xi\,\frac{d\xi}{d\tau}\right] + \varepsilon\left[\delta\xi\,\frac{d\,\delta\xi}{d\tau}\right]\right), \\ R &= -(x_r - \xi_r)\frac{d\xi^r}{d\tau} - \varepsilon\frac{d}{d\tau}\{(x_r - \xi_r)\,\delta\xi^r\} + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{d}{d\tau}(\delta\xi_r\,\delta\xi^r)\end{aligned}\right. \tag{140'}$$

einzusetzen ist. (τ ist die durch (134) implizit gegebene Funktion von ε und dem x); z und seine Differentialquotienten sind für $\varepsilon = 0$ zu nehmen. Es ist über alle Teilchen des Moleküls zu summieren.

Um $dz/d\varepsilon$ zu bilden, beachte man, daß nach (132), (136) und (140')

$$\frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{R}\{(x_r - \xi_r)\,\delta\xi^r - \varepsilon\,\delta\xi_r\,\delta\xi^r\};$$
$$\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = -\frac{d}{d\tau}\{(x_r - \xi_r)\,\delta\xi^r\} + \varepsilon\frac{d}{d\tau}(\delta\xi_r\,\delta\xi^r)$$

ist, so daß

$$\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial \tau}\left(R\frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon}\right), \quad \frac{dR}{d\varepsilon} = \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial R}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon} = -R\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon}\right).$$

Danach erhält man aus (140′) ohne weiteres

$$\frac{d z}{d \varepsilon} = \frac{e}{R}\left\{\left[\delta \xi \frac{d \delta \xi}{d \tau}\right] + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\left(\left[\delta \xi \frac{d \xi}{d \tau}\right] + \varepsilon\left[\delta \xi \frac{d \delta \xi}{d \tau}\right]\right) \frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon}\right)\right\}.$$

Für $\varepsilon = 0$ ist also

$$(141)\left\{\begin{aligned} z &= \frac{e}{R}\left[\delta \xi \frac{d \xi}{d \tau}\right], \\ \frac{d z}{d \varepsilon} &= \frac{e}{R}\left[\delta \xi \frac{d \delta \xi}{d \tau}\right] + \frac{e}{R^2}\left\{\frac{d}{d \tau}\left((x_r - \xi_r)\, \delta \xi^r \left[\delta \xi \frac{d \xi}{d \tau}\right]\right)\right. \\ &\qquad \left. + \frac{\zeta}{R}(x_r - \xi_r)\, \delta \xi^r \left[\delta \xi \frac{d \xi}{d \tau}\right]\right\}, \\ R &= -(x_r - \xi_r) \frac{d \xi^r}{d \tau} \end{aligned}\right.$$

mit der Abkürzung

$$(141') \qquad \zeta = -\left(\frac{\partial R}{\partial \tau}\right)_{\varepsilon = 0} = -\frac{d \xi_r}{d \tau} \frac{d \xi^r}{d \tau} + (x_r - \xi_r) \frac{d^2 \xi^r}{d \tau^2}.$$

Beschränken wir uns in (140) auf die zwei ersten Glieder, so resultiert

$$(140'') \left\{\begin{aligned} Z = \frac{m}{R} + \frac{e}{2 R^2} & \left\{\frac{d}{d \tau}\left((x_r - \xi_r)\, \delta \xi^r \left[\delta \xi \frac{d \xi}{d \tau}\right]\right)\right. \\ & \left. + \frac{\zeta}{R}(x_r - \xi_r)\, \delta \xi^r \left[\delta \xi \frac{d \xi}{d \tau}\right]\right\} \end{aligned}\right.$$

mit

$$(140''') \qquad m = e\left[\delta \xi \frac{d \xi}{d \tau}\right] + \frac{e}{2}\left[\delta \xi \frac{d \delta \xi}{d \tau}\right].$$

Bei Vernachlässigung der Momente zweiten Grades $\delta \xi^r \delta \xi^s$ gilt demnach in der Tat die Formel (131). Zerspalten wir in Raum und Zeit, indem wir als Parameter τ die Variable $\xi^4 = c t$ wählen $\left(\text{dann wird } \frac{d \xi^4}{d \tau} = -\frac{d \xi_4}{d \tau} = 1,\ \delta \xi^4 = -\delta \xi_4 = 0\right)$, so gewinnen wir für das elektrische und magnetische Moment die Darstellungen

$$(142) \qquad \mathfrak{p} = \sum e \mathfrak{s}, \quad \mathfrak{m} = \left[\mathfrak{p} \frac{\mathfrak{v}}{c}\right] + \tfrac{1}{2} \sum e \left[\mathfrak{s} \frac{\mathfrak{u}}{c}\right].$$

Hier bedeuten $\mathfrak{s}$ die Lagenvektoren der Teilchen vom Molekülmittelpunkt aus, $\mathfrak{v}$ dessen Geschwindigkeit, $\mathfrak{u}$ die relative Geschwindigkeit der Teilchen. Die Summen sind zu erstrecken über die Figur des Moleküls zur Zeit $t - \frac{r}{c}$, wo r die Entfernung Beobachter–Molekül zu dieser Zeit ist. Für die beiden Vektoren $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}'$ finden wir nach (140″), (141$_3$) und (141′)

$$(143)\quad \begin{cases} \mathfrak{Z} = \dfrac{\mathfrak{p}}{r\left(1-\frac{v_r}{c}\right)} + \dfrac{1}{2r^2\left(1-\frac{v_r}{c}\right)^2} \\ \qquad\qquad \left\{\dfrac{1}{c}\dfrac{d}{dt}\sum e\,\mathfrak{s}\,(\mathfrak{r}\,\mathfrak{s}) + \dfrac{\zeta}{r\left(1-\frac{v_r}{c}\right)}\sum e\,\mathfrak{s}\,(\mathfrak{r}\,\mathfrak{s})\right\}, \end{cases}$$

$$(143')\quad \begin{cases} \mathfrak{Z}' = \dfrac{\mathfrak{m}}{r\left(1-\frac{v_r}{c}\right)} + \dfrac{1}{2r^2\left(1-\frac{v_r}{c}\right)^2} \\ \left\{\dfrac{1}{c}\dfrac{d}{dt}\sum e\left[\mathfrak{s}\,\dfrac{\mathfrak{v}}{c}\right](\mathfrak{r}\,\mathfrak{s}) + \dfrac{\zeta}{r\left(1-\frac{v_r}{c}\right)}\sum e\left[\mathfrak{s}\,\dfrac{\mathfrak{v}}{c}\right](\mathfrak{r}\,\mathfrak{s})\right\}, \end{cases}$$

$$(143'')\,[1]\qquad \zeta = 1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{(\dot{\mathfrak{v}}\,\mathfrak{r})}{c^2},$$

$\mathfrak{r}$ Radiusvektor Molekül–Beobachter, v_r Komponente von $\mathfrak{v}$ in dieser Richtung, $\dot{\mathfrak{v}} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt}$. (142) zeigt, daß ein *bewegter* Hertzscher Oszillator ein magnetisches Moment $\left[\mathfrak{p}\,\frac{\mathfrak{v}}{c}\right]$ besitzt und daß daher zur Darstellung seines Feldes die *beiden* Vektoren $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}'$ notwendig sind.

Setzen wir $H = F - M$, so lauten die Feldgleichungen (2) $\operatorname{Div} F = s + \operatorname{Div} M$. Nach (123) ist dann wegen (125) $W\varphi = -s - \operatorname{Div} M$. Trennen wir φ in zwei Teile $\varphi_1 + \varphi_2$ derart, daß $W\varphi_1 = -s$, $W\varphi_2 = -\operatorname{Div} M$ und setzen $\varphi_2 = \operatorname{Div} Z$, so ergibt sich $\operatorname{Div} WZ = -\operatorname{Div} M$, was durch $WZ = -M$ befriedigt wird. Daraus schließen wir: *Das Feld F läßt sich durch ein Vierer- und ein Sechserpotential*

$$(144)\quad F = \operatorname{Rot}\varphi + \operatorname{Rot}\operatorname{Div} Z,\quad \varphi = \int\frac{[s]}{r}\,dV,\quad Z = \int\frac{[M]}{r}\,dV$$

(dV = räumliches Volumenelement)

darstellen $\left([\;]\text{ Wert zur Zeit } t - \frac{r}{c}\right)$, *von denen sich das erste auf den Viererstrom, das zweite auf die Sechserpolarisation bezieht.* Aus (143) und (143') erhält man (bei Vernachlässigung der Momente zweiten Grades)

$$(144')\qquad \mathfrak{P} = N\sum e\,\mathfrak{s},\quad \mathfrak{M} = \left[\mathfrak{P}\,\frac{\mathfrak{v}}{c}\right] + \tfrac{1}{2}N\sum e\left[\mathfrak{s}\,\frac{\mathfrak{u}}{c}\right]$$

---

1) Vgl. M. Abraham, Theorie der Elektrizität 2. 4. Aufl. Formel (72c).

(N Anzahl der Moleküle in der Volumeneinheit). Dies ist die wohlbekannte Darstellung des Feldes nach der Elektronentheorie.[1]) Auf dem oben erwähnten magnetischen Moment bewegter polarisierter Moleküle beruht die magnetische Wirkung des Röntgenstroms.

4.

Die Strahlen. Der Fall, daß nach gegebenen Anfangsbedingungen das Feld in allen Einzelheiten bestimmt werden soll, entspricht nicht den in der Optik im allgemeinen vorliegenden Verhältnissen. Dort kommt es vielmehr darauf an, die Geschwindigkeit der „Strahlen" zu kennen, um die durch die Bewegung und das Gravitationsfeld hervorgebrachten Interferenzeffekte beurteilen zu können.

Durch die vorhergehenden Entwicklungen haben wir den in der klassischen elektromagnetischen Optik verwendeten formalen Apparat gewonnen. Wir können uns daher bei der Behandlung unseres jetzigen Problems vollkommen an die klassischen Methoden halten.[2]) Wie wir gesehen haben, brauchen wir, wenn wir den Hertzschen Tensor als Darstellungsmittel des elektromagnetischen Feldes wählen, uns nur mit der Wellengleichung zu beschäftigen und haben weiter keine Nebenbedingung zu berücksichtigen. Wir machen für Z den Ansatz

$$Z = A \cos \varkappa E + a \tag{145}$$

($\varkappa$ eine Konstante, E ein Skalar, A und a lineare Tensoren zweiter Stufe). Nach Regel 3 des zweiten Teils ist (wenn wir wieder die Klammern bei den Indizes fortlassen

$$Z_l = A_l \cos \varkappa E - \varkappa A E_l \sin \varkappa E + a_l$$

$$\Box Z = Z_l^l = A_l^l \cos \varkappa E - 2\varkappa A_l E^l \sin \varkappa E - \varkappa A E_l^l \sin \varkappa E - \varkappa^2 A E_l E^l \cos \varkappa E + a_l^l$$

und daher nach (92) und (113)

$$\left\{\begin{aligned} WZ = &- \varkappa^2 A E_l E^l \cos \varkappa E - 2\varkappa (A_l E^l + \tfrac{1}{2} A W E) \sin \varkappa E \\ &+ \cos \varkappa E \cdot WA + Wa = 0\,. \end{aligned}\right. \tag{146}$$

Unter Strahlen versteht man Linien, die, wenn man die Beugungsphänomene außer Acht läßt, Lichtkomplexe seitlich

1) H. A. Lorentz, a. a. O.; W. Dällenbach, Ann. d. Phys. 58. S. 523. 1919.

2) Vgl. z. B. J. Hadamard, Leçons sur la propagation des ondes, Paris 1902, S. 331 ff; H. A. Lorentz, Abh. über theor. Physik, S. 415.

begrenzen können und sich unabhängig voneinander verhalten. Damit man von der Beugung absehen kann, müssen die Wellenlängen klein gegenüber den Dimensionen der Apparate sein. Um diese Voraussetzung mathematisch zu formulieren, geben wir dem Parameter $\varkappa$ die Dimension und Größenordnung einer reziproken Wellenlänge λ. Die ersten Ableitungen von E haben dann die Größenordnung von Richtungskosinussen und Brechungsindizes, also die Größenordnung 1. Der leichtern Ausdrucksweise wegen wollen wir ferner annehmen, daß ds (und damit auch $d\sigma$) und die Koordinaten x die Dimensionen von Längen haben. (g_{ik}, g^{ik}, γ_{ik}, γ^{ik} sind dann dimensionslos). Wir nennen eine Größe langsam veränderlich[1]), wenn ihre relative Änderung und die ihrer (gewöhnlichen) Ableitungen auf der Strecke λ klein ist, d. h. $\frac{\lambda P'}{P} \ll 1$, $\frac{\lambda P''}{P'} \ll 1$ usw., wenn P, P', P'' usw. die Größenordnung der betreffenden Größe und ihrer Ableitungen sind. Dann lautet die Voraussetzung, die wir machen müssen, um von Strahlen reden zu können: A, E', γ_{ik} sind langsam veränderlich, a ist klein gegen A. Ferner mögen die Koordinaten so gewählt sein, daß g_{ik} und u_i (höchstens) von der Ordnung 1 sind. (Das gilt dann auch von g^{ik} und u^i). Ist γ diese Ordnung, so haben wir also

$$(147)\quad \begin{cases} \frac{\lambda A'}{A} \ll 1, \ \frac{\lambda A''}{A'} \ll 1, \ E' \sim 1, \ \lambda E'' \ll 1, \ \gamma \sim 1, \ \lambda \gamma' \ll 1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\lambda \gamma''}{\gamma'} \ll 1, \ a \ll A. \end{cases}$$

Langsamveränderlichkeit von A und Kleinheit von a (das schnell veränderlich sein wird) bedeutet Außerachtlassung der Randerscheinungen, die Voraussetzung über E'' Beschränkung der Krümmung der Wellenfronten (Beugung in der Nähe der Bildpunkte), Langsamveränderlichkeit von γ_{ik} heißt: die durch die mechanische und Schwerewirkung des Lichtes hervorgebrachten Geschwindigkeiten und Gravitationsfelder (die schnell veränderlich sind) sind so klein, daß man ihre Rückwirkung auf die Lichtfortpflanzung vernachlässigen kann und unter g_{ik} und u_i nur die von außen erregten (langsam veränderlichen) Größen zu verstehen hat.

---

1) H. A. Lorentz, a. a. O.

Die Größenordnung der ersten kovarianten Ableitung ist nach (73) $P' + \gamma' P$, die der zweiten daher $(P' + \gamma' P)' + \gamma'(P' + \gamma' P) \sim P'' + \gamma'' P + \gamma' P' + \gamma'^2 P$ (bei einem Skalar ist $P = O$ zu setzen), die des Krümmungstensors nach (82) $\gamma'' + \gamma'^2$ und damit die von WZ nach (92), (113), (146) und (147)

$$(146') \quad \frac{A}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}(A' + \gamma' A + AE'') + (A'' + \gamma' A' + \gamma'' A + \gamma'^2 A) + (a)$$

((a) ist analog wie der vorhergehende Ausdruck zu bilden). Wenn wir daher die zweiten und die Produkte der ersten Ableitungen der langsam veränderlichen Größen, sowie das Beugungsglied a vernachlässigen, so haben wir in (146) nur die Terme mit $\varkappa$ und $\varkappa^2$ zu berücksichtigen, die, wie aus (147) und (146′) zu ersehen ist, von verschiedener Größenordnung sind. Deshalb zerfällt (146) in die zwei Gleichungen

$$(148) \qquad E_l E^l = \gamma^{lr} \frac{\partial E}{\partial x^l} \frac{\partial E}{\partial x^r} = 0\,,$$

$$(149) \qquad A_l E^l = -\tfrac{1}{2} A W E\,.$$

(148) ist die Jacobische Differentialgleichung eines „mechanischen" Problems mit der Hamiltonschen Funktion $H = \frac{1}{2}\gamma^{lr} p_l p_r$, wo $p_l = \frac{\partial E}{\partial x^l}$ die Impulse sind. Nach den kanonischen Gleichungen ist

$$(150) \quad \frac{d x^i}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p^i} = \gamma^{ir} p_r = p^i = E^i, \quad (\tau = \text{Parameter}).$$

Daher $H = \frac{1}{2}\gamma_{lr} \frac{d x^l}{d\tau} \frac{d x^r}{d\tau}$, so daß die aus dem Variationsproblem $\delta \int H\, d\tau$ fließenden Lagrangeschen Gleichungen die Gleichungen

$$(151) \qquad \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \left\{ {kl \atop i} \right\} \frac{d x^k}{d\tau} \frac{d x^l}{d\tau} = 0$$

der geodätischen Linien[1]) (der Mannigfaltigkeit mit dem Linienelement $d\sigma$) sind, und zwar handelt es sich, da nach (148) und (150)

$$(152) \qquad \gamma_{lr} \frac{d x^l}{d\tau} \frac{d x^r}{d\tau} = 0$$

ist, um *geodätische Nullinien.*

1) Vgl. z. B. W. Pauli jun., a. a. O. Nr. 15.

Wegen der Langsamveränderlichkeit der γ^{ir} kann man (148) durch Funktionen E mit langsam veränderlichen Ableitungen auflösen. Tragen wir die Lösung in (149) ein, so entstehen nach (150), unter Beachtung der Definition (72) der kovarianten Ableitung, Gleichungen der Form

$$\frac{dA}{d\tau} = \text{lineare homogene Funktion der } A, \tag{153}$$

d. h. gewöhnliche lineare homogene Differentialgleichungen für die Komponenten von A, deren Koeffizienten sich aus den ersten und zweiten Ableitungen von E und den (mit den γ_{ik} gebildeten) Dreiindizessymbolen zusammensetzen, also bekannte langsamveränderliche Funktionen sind. Aus (153) bestimmen sich die Änderungen der Amplituden A längs der geodätischen Nullinien, sobald die Anfangswerte für ein τ bekannt sind. Diese Anfangswerte können von Nullinie zu Nullinie *beliebig* gewählt werden, unter der Einschränkung, daß sie langsam veränderlich sind. Abgesehen hiervon sind aber die Amplituden völlig unabhängig voneinander. Ihr Verschwinden an einem Punkte hat wegen der Linearität und Homogeneität der Gleichungen (153) ihr Verschwinden auf der ganzen von diesem Punkte ausgehenden Nullinie zur Folge. *Daher können die geodätischen Nullinien Weltgebiete begrenzen, außerhalb deren die Amplituden verschwinden.* Aus (148) und (150) folgt ferner

$$\frac{dE}{d\tau} = 0, \tag{148'}$$

d. h. die Phase E bleibt auf jeder Nullinie konstant.

Wir müssen noch zeigen, daß die letzte der Ungleichheiten (147) erfüllt werden kann. Wegen (148) und (149) reduziert sich (146) auf

$$W a = - W A \cdot \cos \varkappa E. \tag{154}$$

Wir haben also die inhomogene Wellengleichung zu lösen. Diese Lösung kann mittels des Greenschen Satzes (119) prinzipiell auf dieselbe Weise wie in der klassischen Theorie bewerkstelligt werden. Die Lösung wird darstellbar sein durch Integrale der Form[1])

$$a = \int (G \cos \varkappa E\, W A)_L \, dx^1 \, dx^2 \, dx^3,$$

1) M. v. Laue, Berl. Ber. 1922, S. 118.

wo G eine Funktion ist, die wie in der klassischen Theorie im Aufpunkt von der ersten Ordnung unendlich wird, und der Index L auf dem vom Aufpunkt ausgehenden Vorkegel hinweist. Die Theorie der Fourrierschen Reihen lehrt uns, daß a durch Vergrößerung von $\varkappa$, d. h. Verkleinerung der Wellenlänge beliebig klein gemacht werden kann.[1]) Wir sind mithin zu dem Resultat gelangt, daß *die Strahlen in bewegten Körpern durch geodätische Nullinien der Mannigfaltigkeit mit dem Linienelement* $d\sigma^2 = \gamma_{ik}\, dx^i\, dx^k$ *dargestellt sind.* Die Strahlgeschwindigkeit ist dabei nach (148') gleich der Phasengeschwindigkeit längs des Strahls.

Aus $d\sigma^2 = 0$ folgt nach (26) $ds^2 = -\left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right)(u_i\, dx^i)^2$. Für $\varepsilon\mu > 1$ haben also die Weltlinien der Strahlen zeitartige Richtung. Es existiert dann eine *Viererstrahlgeschwindigkeit*, die nach (15) und (150) (wenn wir wieder die Klammern bei den Indizes einführen) gleich

$$(155)\qquad w^i = \frac{E^{(i)}}{\sqrt{-g_{\mu\nu}\, E^{(\mu)}\, E^{(\nu)}}}, \qquad E^{(i)} = \gamma^{ir}\frac{\partial E}{\partial x^r}$$

ist. Aus der Existenz einer Vierergeschwindigkeit folgt[2]) die *Gültigkeit des Additionstheorems der Geschwindigkeiten.*

Als Beispiel für die Lichtfortpflanzung in einem Körper bei Anwesenheit eines Gravitationsfeldes nehmen wir den Fall eines in einem Zentrifugalkraftfeld ruhenden Mediums (Harreßscher Versuch). Bei Benutzung von Polarkoordinaten und Beschränkung auf die Ebene ist

$$(156)\quad ds^2 = dx_1{}^2 + x_1{}^2\, dx_2{}^2 - \frac{2\omega}{c}\, x_1{}^2 dx_2\, dx_4 - \left(1 - \frac{\omega^2 x_1{}^2}{c^2}\right) dx_4{}^2$$

(x_1 Radiusvektor, x_2 Polarwinkel, ω Drehgeschwindigkeit). Da die Materie ruht, ist $u^1 = u^2 = u^3 = 0$, $u^4 = 1/\sqrt{-g_{44}} = 1/\sqrt{1 - \frac{\omega^2 x_1{}^2}{c^2}}$. Die kovarianten Komponenten sind

$$u_1 = u_2 = 0,\ u_2 = g_{24}\, u^4 = \frac{-\frac{\omega}{c}\, x_1{}^2}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 x_1{}^2}{c^2}}},\ u_4 = g_{44}\, u^4$$

$$= -\sqrt{1 - \frac{\omega^2 x_1{}^2}{c^2}}\ .$$

1) Vgl. z. B. M. Born, Dynamik der Kristallgitter, Anhang.

2) W. Pauli jun., a. a. O. Nr. 25.

Für die γ_{ik} findet man hieraus nach (18)

$$\gamma_{22} = \frac{\left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\frac{\omega^2 x_1^2}{c^2}\right) x_1^2}{1 - \frac{\omega^2 x_1^2}{c^2}}, \quad \gamma_{24} = -\frac{1}{\varepsilon\mu}\frac{\omega}{c} x_1^2,$$

$$\gamma_{44} = -\frac{1}{\varepsilon\mu}\left(1 - \frac{\omega^2 x_1^2}{c^2}\right).$$

Die übrigen γ_{ik} sind gleich den g_{ik}. Es wird also

$$(157)\left\{\begin{aligned} d\sigma^2 = d x_1^2 + x_1^2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\frac{\omega^2 x_1^2}{c^2}}{1 - \frac{\omega^2 x_1^2}{c^2}} d x_2^2 - \frac{2\omega}{\varepsilon\mu c} x_1^2 d x_2 \, d x_4 \\ - \frac{1}{\varepsilon\mu}\left(1 - \frac{\omega^2 x_1^2}{c^2}\right) d x_4^2. \end{aligned}\right.$$

Bei Vernachlässigung von ω^2 reduzieren sich (156) und (157) auf

$$(156') \qquad ds^2 = dx_1^2 + x_1^2 dx_2^2 - \frac{2\omega}{c} x_1^2 dx_2 \, dx_4 - dx_4^2,$$

$$(157') \qquad d\sigma^2 = dx_1^2 + x_1^2 dx_2^2 - \frac{2\omega}{\varepsilon\mu c} x_1^2 dx_2 \, dx_4 - \frac{dx_4^2}{\varepsilon\mu}.$$

Aus $ds^2 = 0$ leitet man die Erscheinungen im Vakuum ab (Versuch von Sagnac).[1] In diesem Falle ist der Unterschied der Umlaufszeiten zweier in entgegengesetzter Richtung umlaufender Strahlen $\Delta t = \frac{4\omega F}{c^2}$ (F umlaufene Fläche). Vertauscht man nun in (156') x_4 mit $x_4/\sqrt{\varepsilon\mu}$ und ω mit $\omega/\sqrt{\varepsilon\mu}$, so erhält man (157'). Bei dieser Vertauschung geht aber die Formel für Δt in sich über. Sie gilt daher auch in einem ponderabeln Medium.[2]

Berlin, Institut für theoretische Physik.

1) P. Langevin, Compt. Rend. 173. 831. 1921; R. Ortvay, Phys. Zeitschr. 23. 176. 1922.

2) M. v. Laue, Relativitätstheorie I, § 24d.

(Eingegangen 28. Mai 1923.)