湖北师院学报
（自然科学版）

一九八六年第二期
（总第十期）

保角变换与保形变换

李民强

函数$W=e^z$在有限复平面内是否为保形变换？有的学生说是保形变换；有的学生说是保角变换，不是保形变换。他们各自都有书本为依据。这个事例说明，由于有关复变函数论的著作（特别是教材和教学参改书）对保角变换和保形变换（映射或映照）所下的定义不一致，在教学中己导致学生走向了无所适从的地步，值得我们关注。

明确的概念，是人们正确思维的必要条件。只有概念明确才能作出恰当的判断，才能进行合符逻辑的推理，才能得到对事物的正确认识。如果概念不明确，就会引起思想混乱，造成认识上的错误。学生不能正确判断函数$W=e^z$在有限复平面内是否为保形变换，就是由于保形变换的概念不明确而引起的思想混乱。基础课教材中的基本概念，必须强调准确、简明。在教学内容的改革中，把基本概念的定义规一化、明确化是必要的也是可能的。

保角变换、保形变换、共形映射、保形映射、同形映射、保形映照、共形映照……本来是由外文，例如英文“Comformal mapping”俄文“Конформное отображениe”等翻译过来的同一数学名词（概念）。现在把保形变换、共形映射、同形映射、保形映照、共形映照……作为同义语仍为大家所公认，也还有许多人保持着保角度变换与保形变换是同一数学名词（概念）的传统观念。但是随着复变函数理论在中国的发展，由对外文的译法不同，解释不同和后来著书者往往各自对保角变换和保形变换下定义。因而产生了概念上的混乱现象，本文仅将某些复变函数论著作中有关保角度换与保形变换的各种不同定义进行归纳和分析，供正在学习复变函数论课程者参考。

在一般的复变函数论著作中，关于保角变换和保形变换的定义，根据参考书的原文或原意，主要可归纳为下面几种：

定义A（以下简称A）

设连续变换$W=f(z)$能保持过点z_0的任意两条曲线的交角大小及方向（简称保角性），则称它在z_0处为保角变换。如果$W=f(z)$在区域G内每一点均为保角变换，则称它在区域G内为保角变换。

定义B（以下简称B）

如果$W=f(z)$在区域G内是单叶的且保角的则称变换$W=f(z)$在G内是保形的，也称它为保形变换。

注：1.其中的保角性是指A中的保角性。

2．由单叶性和保角性可推出$W=f(z)$在G内的解析性。所以定义B与把单叶解析函数称为保形变换是等价的。

定义C（以下简称C）

设$W=f(z)$在区域G内解析，如果在G内任意一点，变换$W=f(z)$具有：

Ⅰ、旋转角的不变性，并保持角的定向；

Ⅱ、伸缩率的不变性。

则称$W=f(z)$为保角变换或第一类保角变换。

定义D（以下简称D）

在区域G内$W=f(z)$是第一类保角变换同时又是单叶变换时，称为保形变换。

注：定义D与把单叶解析函数称为保形变换是等价的。

义定E（以下简称E）

若连续变换$W=f(z)$在点z_0处具有伸缩率的不变性（即$\operatorname{Lim}\left|\frac{w-w_0}{z-z_0}\right|=$常数），且保持夹角的不变性（指定义A中的保角性），则称$f(z)$在z_0为保形变换。

定义F（以下简称F）

若$W=f(z)$在区域G内每一点构成保形变换（指定义E所述的保形变换），则称$W=f(z)$在G内为保形变换。

注：定义F与把导数不为零的解析函数称为保形变换是等价的。

定义是揭示概念内涵的逻辑方法。给概念下定义，就是揭示概念所反映事物的本质属性，并把这类事物与别的事物区别开来。所以，概念的明确与否，取决于给概念下的定义是否正确，是否合符逻辑。现在我们来考察上述各定义之间的关系。

一、保角变换

保角变换的定义有A和C两种。因为从连续变换$W=f(z)$具有保角性，不能断言它具有伸缩率的不变性，例如一个变换在微分为零的点可能保角但不保形，所以A与C是有本质差别的两个不同定义。根据定义的条件可知，凡满足C的条件的连续函数都满足A的条件，反之则不然。可见C所定义的保角变换的外延完全包含在A所定义的保角变换的外延之中，反之则不然。同是保角变换一个概念，给出使其外延不重合的两种定义，而且两种定义并存、并用这是不合逻辑的。它必将在我们的教学中带来困难。

二、保形变换

在一个区域G内。因为连续单叶变换具有保角性时必然为解析函数，所以B与D实际上是等价定义，简而言之，它们所定义的保形变换就是单叶解析函数。另外，由F所确定的保形变换就是导数不为零的解析函数。

在区域G内的单叶解析函数，其导数必定不为零。然而在G内导数不为零的解析函数它在G内不一定具有单叶性。因此在区域内保形变换的两种不同定义又造成了同一个概念具有两种不同外延的逻辑错误。很自然这种错误直接影响对函数性质的判断，会在学生的思想上造成混乱。像前面提到的$W=e^z$，它在有限复平面内不是单叶函数，按前一种定义，它不构成保形变换；另一方面在有限复平面内$(e^z)'=e^z\neq 0$，所以按后一

定义，它是保形变换。谁是谁非就难裁决了。

当然我们也会注意到，如果函数$W=f(z)$在某一点z_0解析而且$f'(z_0)\neq 0$，那么$f(z)$在z_0的充分小邻域内必具单叶性。所以对某一点而言，把单叶解析函数称为保形变换与把导数不为零的解析函数称为保形变换，两种定义是等价的。可是函数$W=f(z)$在区域G内每一点的充分小邻域单叶，不能断言$f(z)$是区域G内的单叶函数，这就决定了在区域G内保形变换的两种定义不等价性。

三、保角变换与保形变换的关系

1、我们采用A来定义保角变换这一概念，那么不管用B、D、E、F中那一个定义来确定保形变换，很明显保角变换的外延总大于保形变换的外延，也就是说保形变换是种概念而保角变换是属概念，它们之间是属种关系。所以应把保角变换与保形变换看作截然不同的两个概念。

2、如果我们采用C作保角变换的定义，采用导数不为零的解析函数作为保形变换的定义，则保角变换与保形变换两概念的外延完全重合，它们之间是同一关系。这就是把保角变换与保形变换视为同一个概念的情况。

3、当我们以C作保角变换的定义，把单叶解析函数称为保形变换时，则在单叶性区域内保角变换与保形变换是同一关系，可以把它们视为同一个概念。但在非单叶性区域内它们又是属种关系，是不相同的两个概念了。

四、结论

根据科学本身的逻辑性和在教学中传授知识的准确性原则。我们建议在今后出版的数学书籍中，最好是以A作保角变换的定义，以E和F作保形变换的定义，以B作为单叶保形变换的定义。这样做可使保角变换、保形变换、单叶保形变换三个概念都很明确，而且三者之间区别明显，关系清晰，从而剪除由定义不一致所造成的弊端。在几何意义上，保角变换的特点就是变换保持过点z_0的角度大小及方向不变，保形变换的特点是可以保持无穷小三角形的形状不变，（相似变换），单叶保形变换是在保形变换的前提下加上一一对应的条件。所以根据几何意义，可使学生见文思义，便于理解，便于记忆，从而能获得更好的教学效果。

参 考 资 料

1、英叶，1980，复变函数论．山东科学技术出版社。

2、N、N、普里瓦洛夫、1956。复变函数引论，高等教育出版社

3、朱静航，1983，复变函数论，辽宁人民出版社

4、钟玉泉，1981，复变函数论，人民教育出版社

5、余家荣，1979，复变函数，人民教育出版社

6、张楚庭，1983，复变函数论学习指导。湖南科学技术出版社

7、庄圻泰、张南岳，1984．复变函数，北京大学出版社

8、W、Rudin。1981。Real and Complex Analysis

9、ORROLDE、MARSDEn。1973。Basic Comxlex Analysis

10、CHRISTIAN POMMERENKE。1975。UNiValenT, Func tions