

## 機械手臂 軌跡規劃實例

## Manipulator Trajectory-Planning Example

林沛群

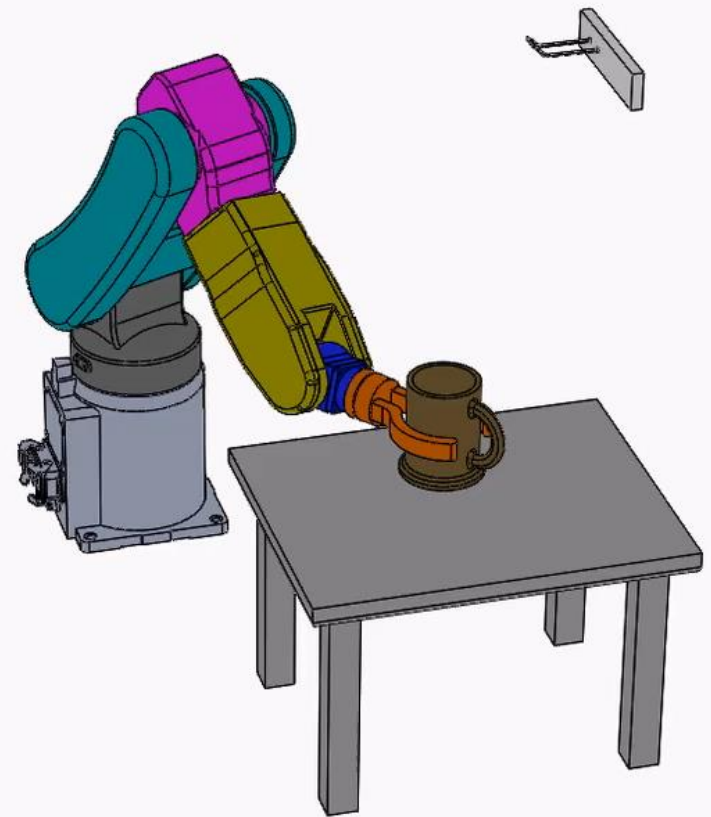
國立台灣大學

機械工程學系



## 任務概說 -1

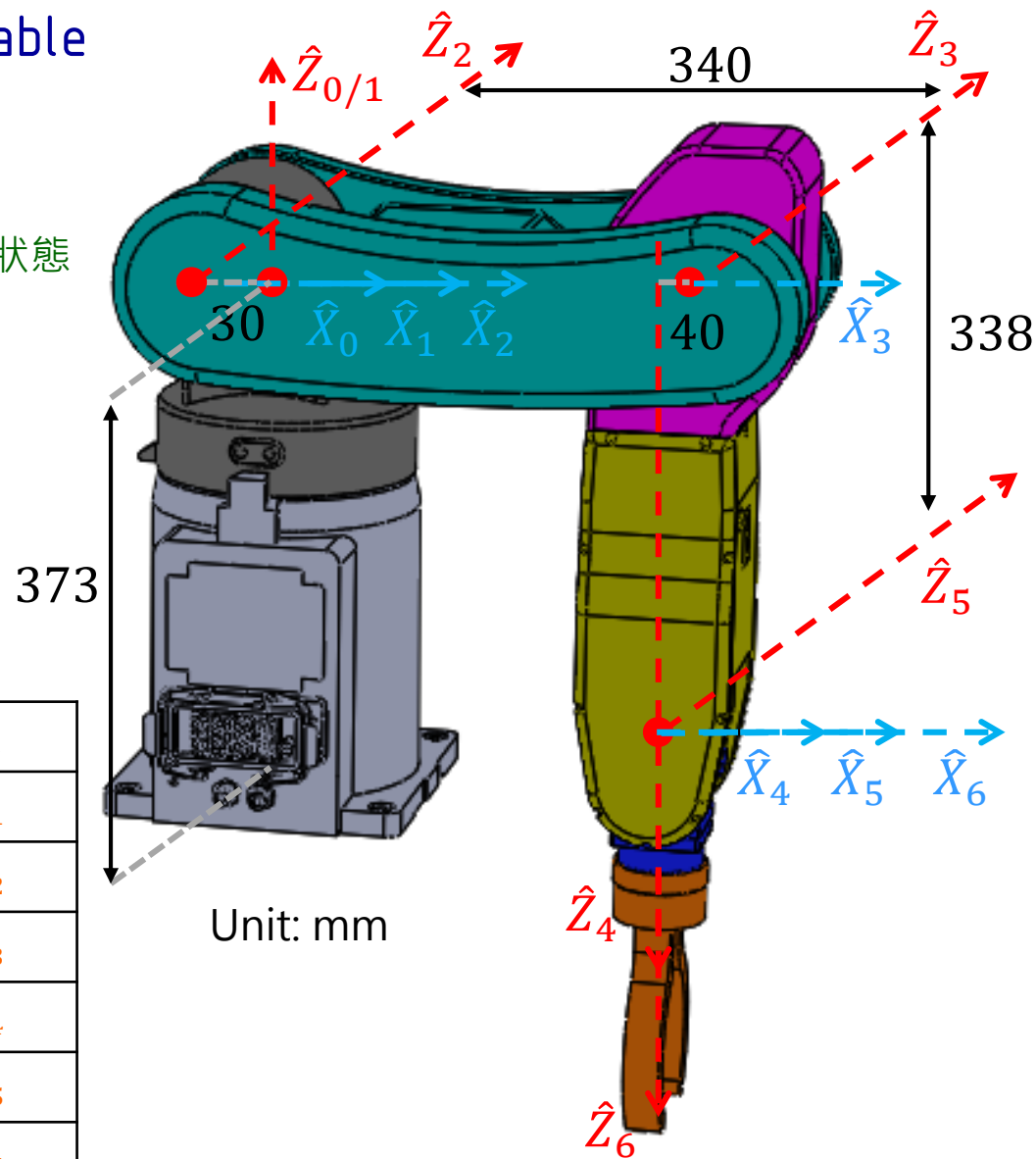
- Revisit物件取放任務之情境：機械手臂夾住放在桌上的杯子，移動手臂將杯子掛到牆上的杯架



## 任務概說 -2

### 六軸RRRRRR手臂之DH Table

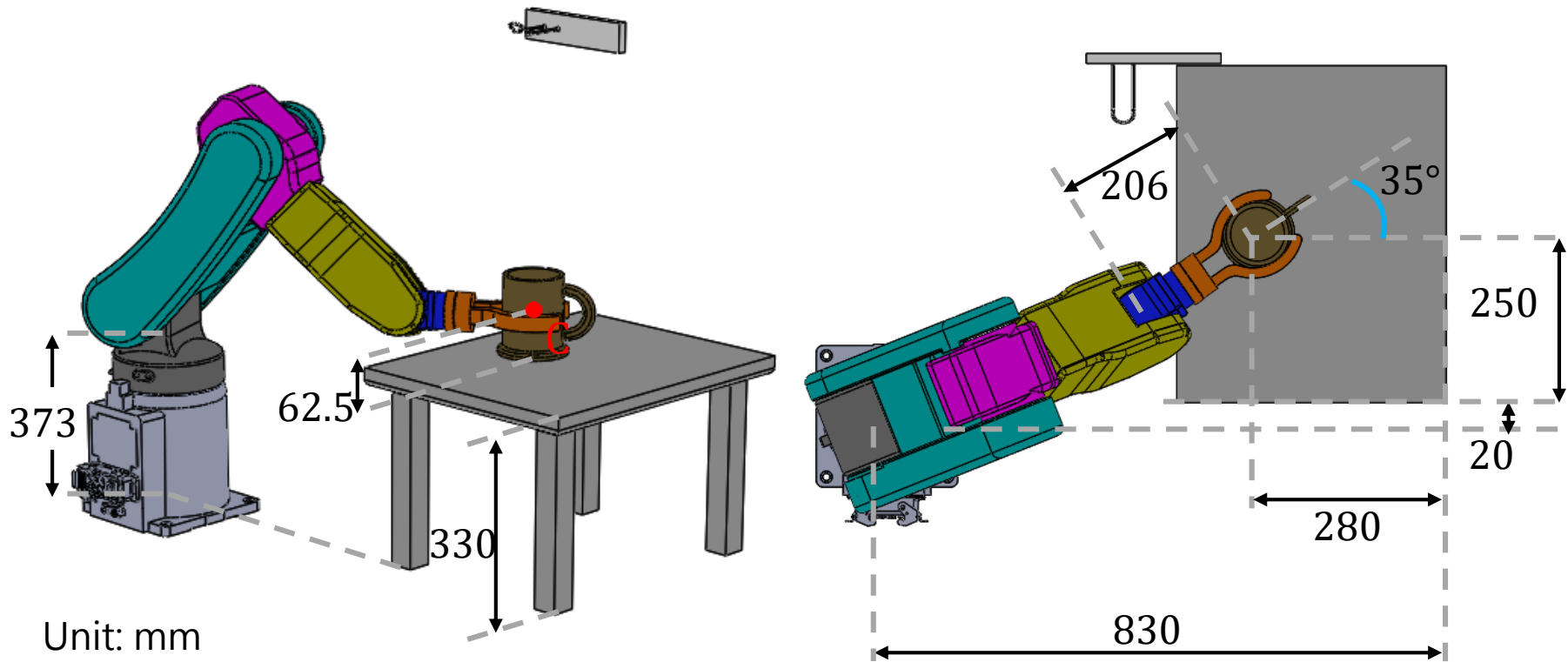
圖中顯示各軸為0°的狀態



$i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	$0^\circ$	0	0	$\theta_1$
2	$-90^\circ$	$a_1 = -30$	0	$\theta_2$
3	$0^\circ$	$a_2 = 340$	0	$\theta_3$
4	$-90^\circ$	$a_3 = -40$	$d_4 = 338$	$\theta_4$
5	$90^\circ$	0	0	$\theta_5$
6	$-90^\circ$	0	0	$\theta_6$

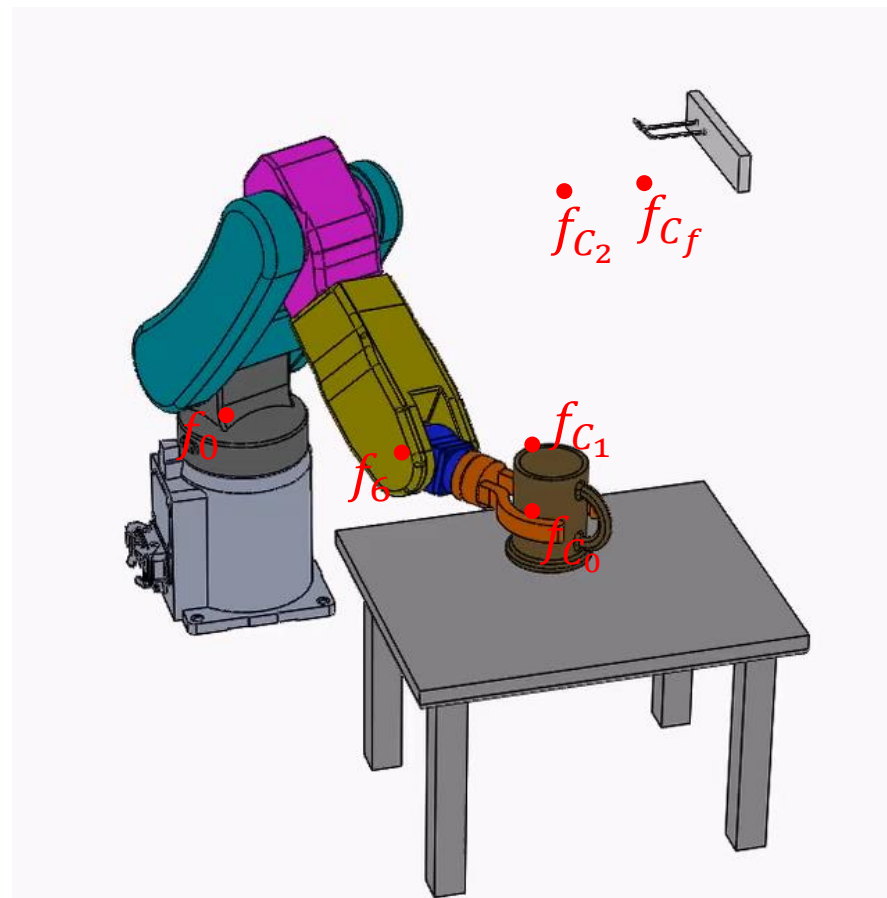
## 任務概說 -3

- 在IK的課程中，練習以IK計算RRRRRR手臂在任務起始點C的6個轉角(joint angles)，讓手臂能順利夾住杯子



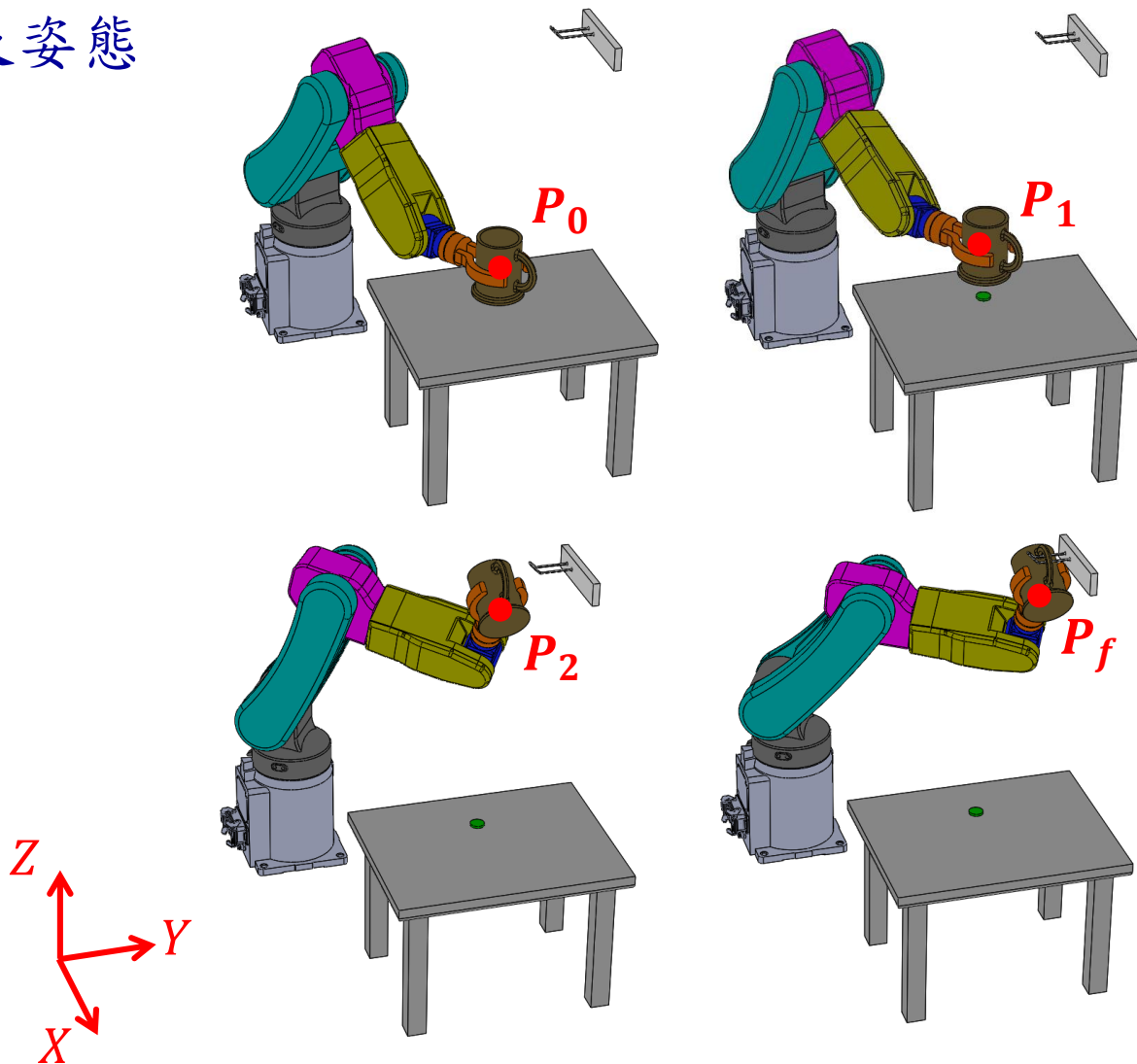
## 任務概說 -4

- 任務：規劃手臂「將杯子從桌面拿起到放上杯架」間的整段軌跡
- 輔助條件：加上兩個via points
  - ◆ 垂直拿起杯子一小段距離
  - ◆ 到達杯架前，調整到適當姿態，讓杯子能順利放上杯架



# 條件設定 -1

- 設定1：清楚定義杯子cup在各點( $P_{0-f}$ )的時間、座標位置、及姿態



## 條件設定 -2

- 設定2：彙整成總表以利後續軌跡規劃

	Time	X	Y	Z	$\Phi_x$	$\Phi_y$	$\Phi_z$
$P_0$	0	550	270	19.5	0	0	35
$P_1$	2	550	270	79.5	0	0	35
$P_2$	6	330	372	367	0	-60	0
$P_f$	9	330	472	367	0	-60	0

對world frame角度，以XYZ  
fixed angle計算

- 設定3：求出各點的Transformation Matrix  ${}^0T$

$${}^0T_0 = \begin{bmatrix} 0.8192 & -0.5736 & 0 & 550 \\ 0.5736 & 0.8192 & 0 & 270 \\ 0 & 0 & 1 & 19.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} 0.8192 & -0.5736 & 0 & 550 \\ 0.5736 & 0.8192 & 0 & 270 \\ 0 & 0 & 1 & 79.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0T_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.866 & 330 \\ 0 & 1 & 0 & 372 \\ 0.866 & 0 & 0.5 & 367 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0T_f = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.866 & 330 \\ 0 & 1 & 0 & 472 \\ 0.866 & 0 & 0.5 & 367 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

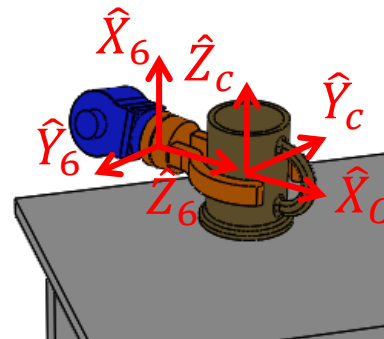
## 條件設定 -3

- 設定4：求出各點的Transformation Matrix  ${}^0_6T$

$${}^0_6T = {}^0_cT {}^c_6T^{-1}$$

$$= {}^0_cT \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 206 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Recall:



$${}^0_6T_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5736 & 0.8192 & 381.3 \\ 0 & -0.8192 & 0.5736 & 151.8 \\ 1 & 0 & 0 & 19.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_6T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5736 & 0.8192 & 381.3 \\ 0 & -0.8192 & 0.5736 & 151.8 \\ 1 & 0 & 0 & 79.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_6T_2 = \begin{bmatrix} -0.866 & 0 & 0.5 & 227 \\ 0 & -1 & 0 & 372 \\ 0.5 & 0 & 0.866 & 188.6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_6T_f = \begin{bmatrix} -0.866 & 0 & 0.5 & 227 \\ 0 & -1 & 0 & 472 \\ 0.5 & 0 & 0.866 & 188.6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## 條件設定 -4

- 設定5：從 ${}^0T$ 得知  ${}^0P_{6ORG}$  在各點的位置和姿態

	Time	X	Y	Z	$\Phi_x$	$\Phi_y$	$\Phi_z$
$P_0$	0	381.3	151.8	19.5	-145	-90	0
$P_1$	2	381.3	151.8	79.5	-145	-90	0
$P_2$	6	227	372	188.6	0	-30	180
$P_f$	9	227	472	188.6	0	-30	180

## 方法一 -1

- 方法一：以linear function with parabolic blends在Cartesian-space下規劃軌跡
- 步驟1：求出  ${}^0P_{6\ ORG}$  在各DOF (X, Y, Z,  $\Phi_x$ ,  $\Phi_y$ ,  $\Phi_z$ ) 每段的速度及加速度

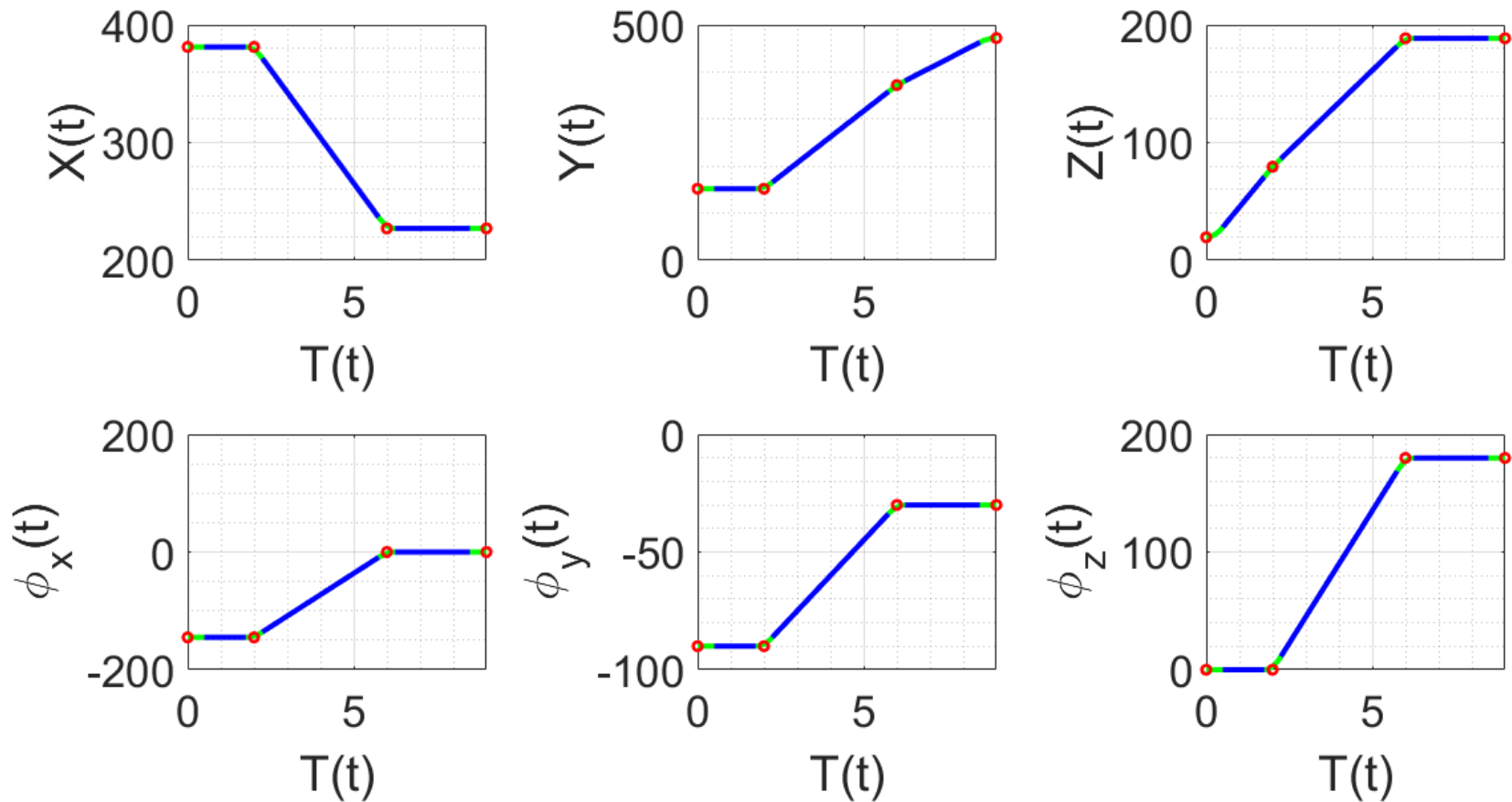
deg/s	X	Y	Z	$\Phi_x$	$\Phi_y$	$\Phi_z$
$V_0$	0	0	0	0	0	0
$V_1$	0	0	34.29	0	0	0
$V_2$	-38.56	55.04	27.27	36.25	15	45
$V_3$	0	36.36	0	0	0	0
$V_f$	0	0	0	0	0	0

deg/s <sup>2</sup>	X	Y	Z	$\Phi_x$	$\Phi_y$	$\Phi_z$
$a_0$	0	0	68.57	0	0	0
$a_1$	-77.13	110.08	-14.02	72.5	30	90
$a_2$	77.13	-37.35	-54.55	-72.5	-30	-90
$a_f$	0	-72.73	0	0	0	0

## 方法一 -2

- 步驟2：建立並繪出各DOF 在每個時間區段軌跡，

Linear/Parabolic共7段 (每段parabolic curve時間設定為0.5秒)

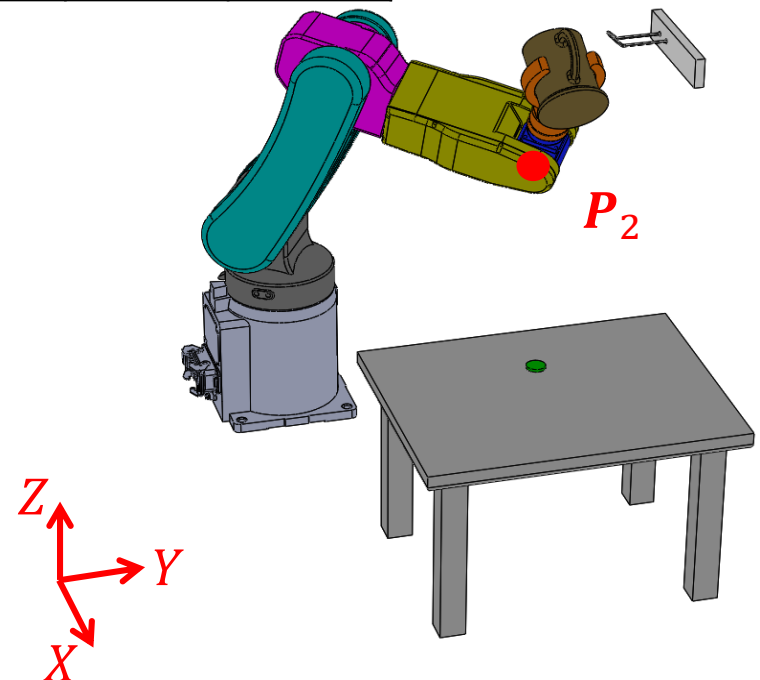


## 方法一 -3

- 步驟3：以IK解出軌跡上所有設定點&軌跡內插點的6軸轉角  
 ${}^0P_{6\ ORG}$ 在各設定點的位置和姿態

	Time	X	Y	Z	$\Phi_x$	$\Phi_y$	$\Phi_z$
$P_0$	0	381.3	151.8	19.5	-145	-90	0
$P_1$	2	381.3	151.8	79.5	-145	-90	0
$P_2$	6	227	372	188.6	0	-30	180
$P_f$	9	227	472	188.6	0	-30	180

以第二個via point  $P_2$  為例，進行細部計算說明



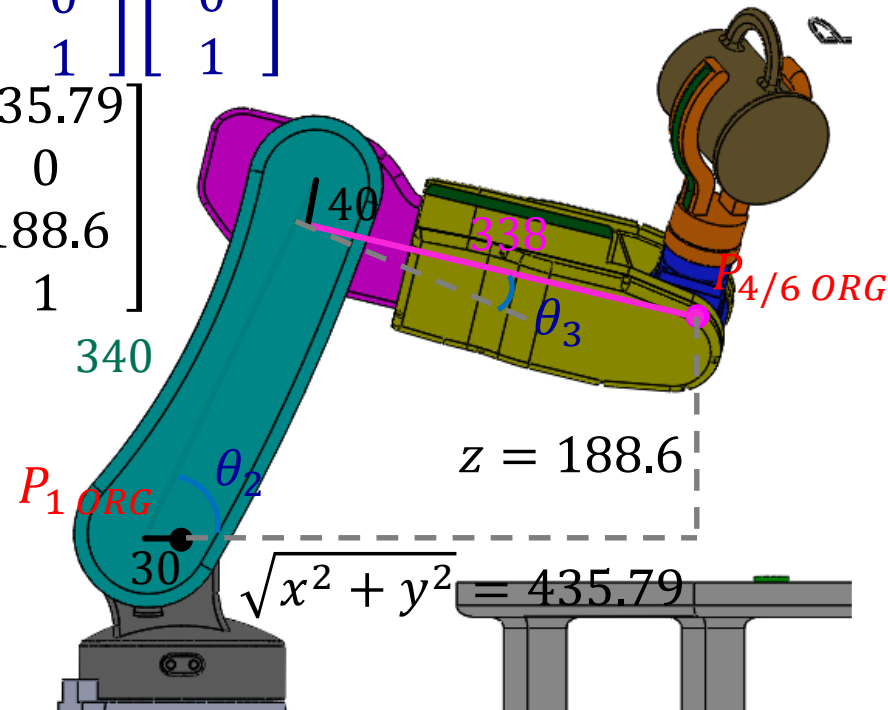
# 方法一 -4

詳細方程式推導參見逆向運動學課程內容

$$\begin{bmatrix} g_1(\theta_2, \theta_3) \\ g_2(\theta_2, \theta_3) \\ g_3(\theta_2, \theta_3) \\ 1 \end{bmatrix} = {}^1_2T \begin{bmatrix} f_1(\theta_3) \\ f_2(\theta_3) \\ f_3(\theta_3) \\ 1 \end{bmatrix} = {}^1_2T {}^2_3T {}^3P_{4\text{ ORG}}$$

$$= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 340 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -40 \\ 338 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 340c_2 - 40c_{23} - 338s_{23} - 30 \\ 0 \\ 40s_{23} - 338c_{23} - 340s_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 435.79 \\ 0 \\ 188.6 \\ 1 \end{bmatrix}$$



## 方法一 -5

$$g_1(\theta_2, \theta_3) = 340c_2 - 40c_{23} - 338s_{23} - 30 = 435.79$$

$$g_1(\theta_2, \theta_3) = -40c_{23} - 338s_{23} + 340c_2 = 465.79 \quad - \text{Eq1}$$

$$g_3(\theta_2, \theta_3) = +40s_{23} - 338c_{23} - 340s_2 = 188.6 \quad - \text{Eq2}$$

□  $\text{Eq1}^2 + \text{Eq2}^2 \rightarrow \text{Eq3}$

$$40^2 + 338^2 + 340^2 + 2(40)(340)(-c_3) + 2(338)(340)(-s_3) = 252530$$

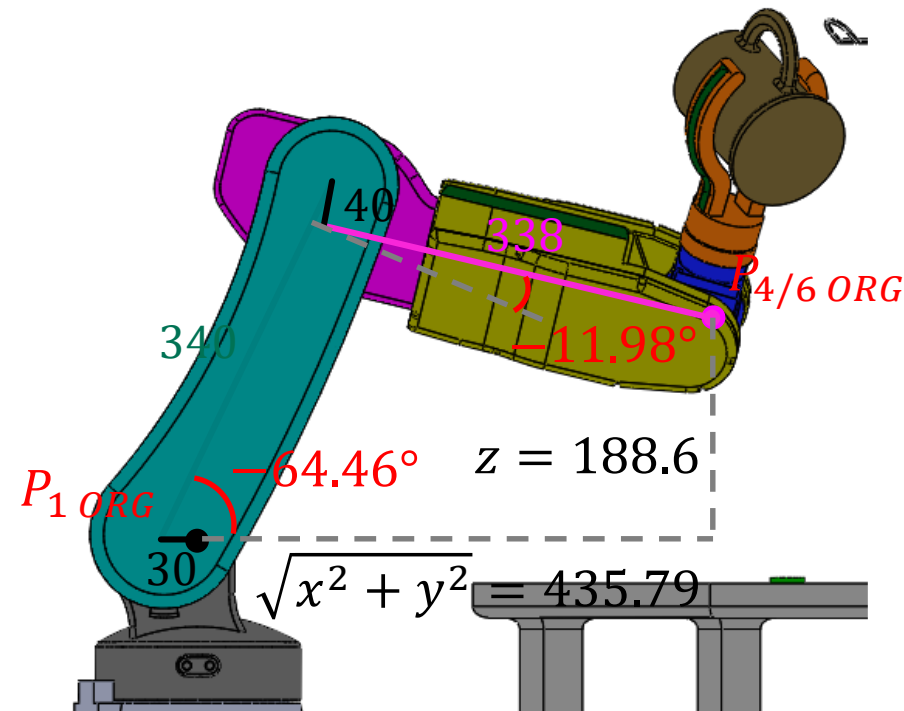
□ 從Eq3解出第二/三軸轉角

$$\theta_3 = -11.98^\circ \text{ or } 178.48^\circ$$

$$\theta_2 = -64.46^\circ \text{ or } 20.37^\circ$$

□ 第一軸轉角:

$$\theta_1 = \text{atan2}(y, x) = 58.61^\circ$$



## 方法一 -6

□ Euler Angles ZYZ 求出  $\theta_4\theta_5\theta_6$

□ 先求出  ${}^0_3R$ :

$${}^0_3R = X(\alpha_0)Z(\theta_1)X(\alpha_1)Z(\theta_2)X(\alpha_2)Z(\theta_3)$$

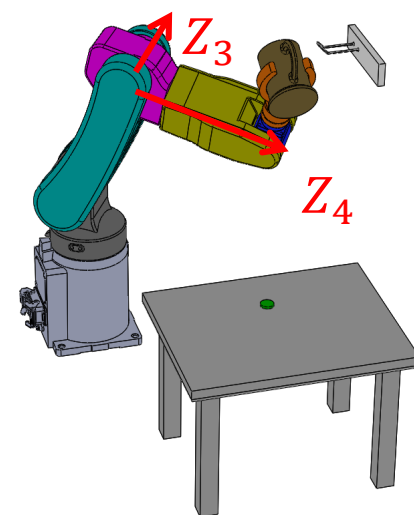
$${}^0_3R = X(0^\circ)Z(58.61^\circ)X(-90^\circ)Z(-64.46^\circ)X(0^\circ)Z(-11.98^\circ)$$

$${}^0_3R = \begin{bmatrix} 0.1222 & 0.5064 & -0.8536 \\ 0.2003 & 0.8298 & 0.5209 \\ 0.9721 & -0.2346 & 0 \end{bmatrix}$$

□ 為讓手臂姿態和ZYZ重合，需先做 ${}^3_4R$ 之中對X軸之旋轉： ${}^0_3R = {}^0_3R X(\alpha_3)$

$${}^0_3R = {}^0_3R X(-90^\circ) = \begin{bmatrix} 0.1222 & 0.8536 & 0.5064 \\ 0.2003 & -0.5209 & 0.8298 \\ 0.9721 & 0 & -0.2346 \end{bmatrix}$$

$${}^3_6R = {}^0_3R^{-1}{}^0_6R = \begin{bmatrix} 0.3802 & -0.2003 & 0.9030 \\ -0.7393 & 0.5209 & 0.4268 \\ -0.5558 & -0.8298 & 0.05 \end{bmatrix}$$



## 方法一 -7

- 以 ${}^3_6R$ 求出當中的Euler ZYZ Angles  $(\alpha, \beta, \gamma)$

$${}^3_6R = {}^3_4R_{Z'Y'Z'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} 0.3802 & -0.2003 & 0.9030 \\ -0.7393 & 0.5209 & 0.4268 \\ -0.5558 & -0.8298 & 0.05 \end{bmatrix}$$

- 由 ${}^3_6R$ 推算YZZ Euler Angles

詳細方程式推導參見逆向運動學課程內容

$$\beta = \text{Atan2}\left(\sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2}, r_{33}\right) = 87.13^\circ \text{ or } -87.13^\circ$$

$$\alpha = \text{Atan2}\left(\frac{r_{23}}{s\beta}, \frac{r_{13}}{s\beta}\right) = -154.70^\circ \text{ or } 25.30^\circ$$

$$\gamma = \text{Atan2}\left(\frac{r_{32}}{s\beta}, \frac{-r_{31}}{s\beta}\right) = 123.81^\circ \text{ or } -56.19^\circ$$



## 方法一 -8

□ ZYZ的  $(\alpha, \beta, \gamma)$  和 DH的  $(\theta_4, \theta_5, \theta_6)$ ，在  $(\theta_4, \theta_6)$  有  $+180^\circ$  的差異，需補回來

$$\theta_4 = \alpha + 180^\circ = 25.30^\circ \text{ or } -154.70^\circ$$

$$\theta_5 = \beta = -87.13^\circ \text{ or } 87.13^\circ$$

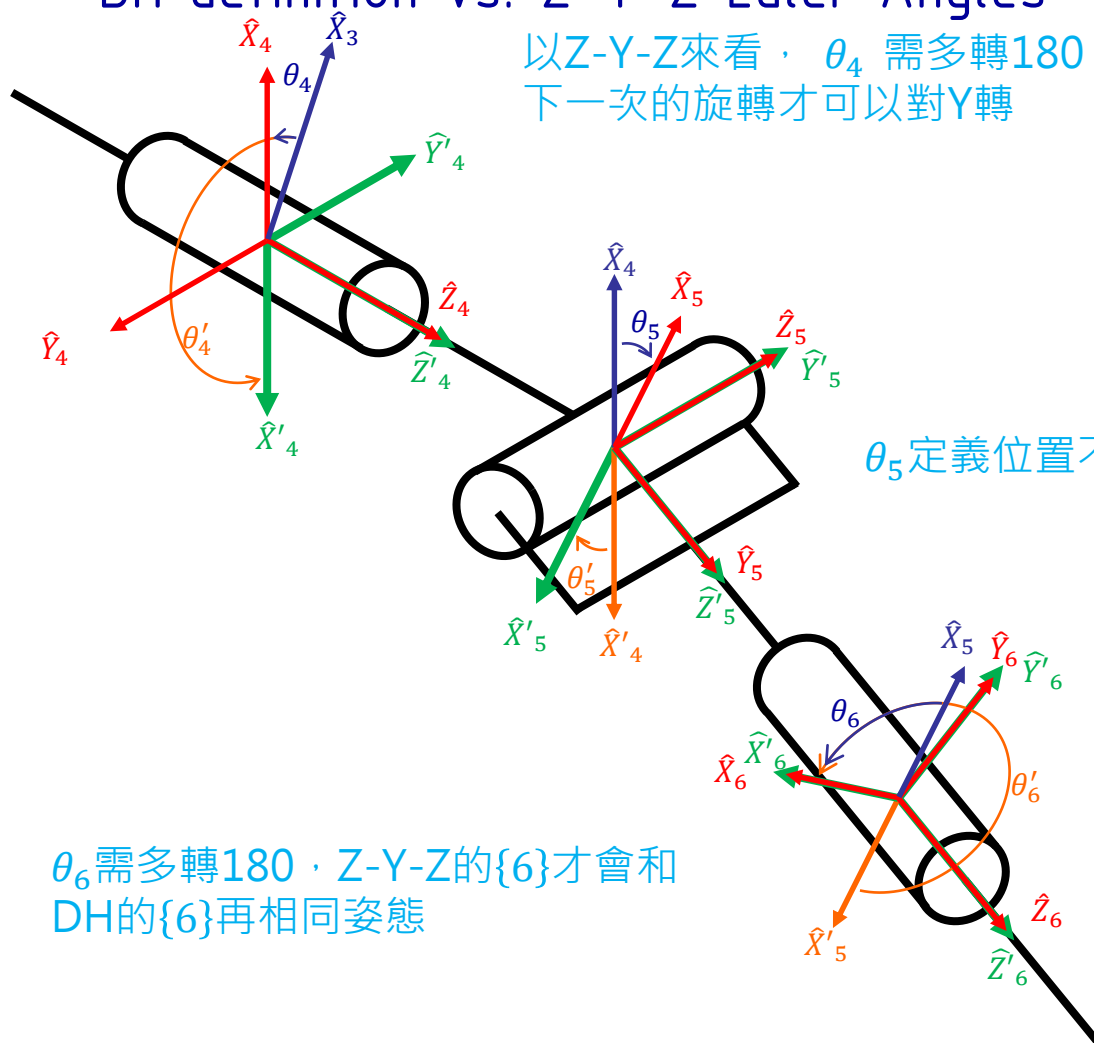
$$\theta_6 = \gamma + 180^\circ = -56.19^\circ \text{ or } 123.81^\circ$$

# 方法一 -9

□ Euler Angles ZYZ 求出  $\theta_4\theta_5\theta_6$

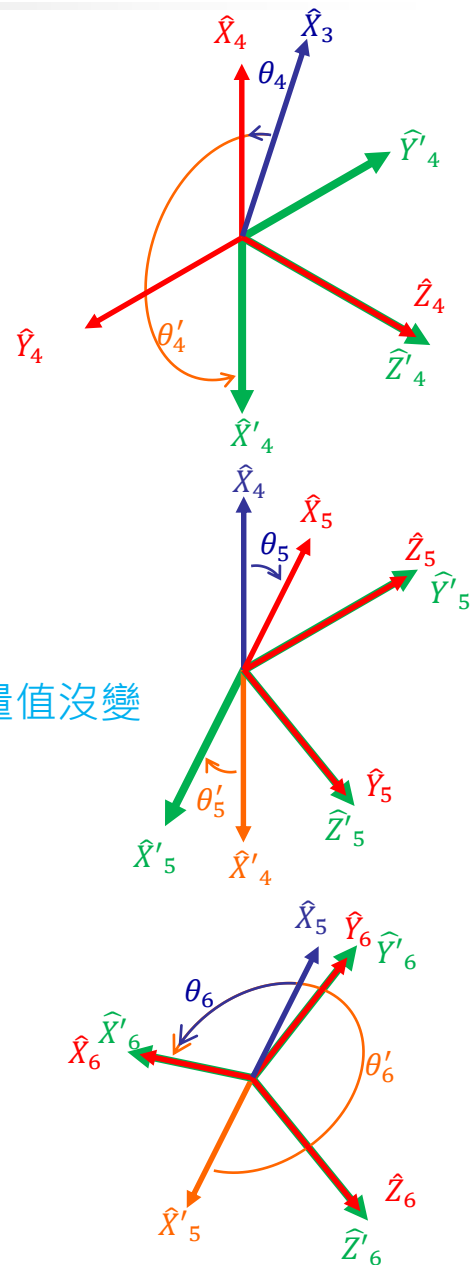
DH definition vs. Z-Y-Z Euler Angles

以Z-Y-Z來看， $\theta_4$  需多轉180°，  
下一次的旋轉才可以對Y轉



$\theta_6$  需多轉180°，Z-Y-Z的{6}才會和  
DH的{6}再相同姿態

$\theta_5$  定義位置不同，但量值沒變

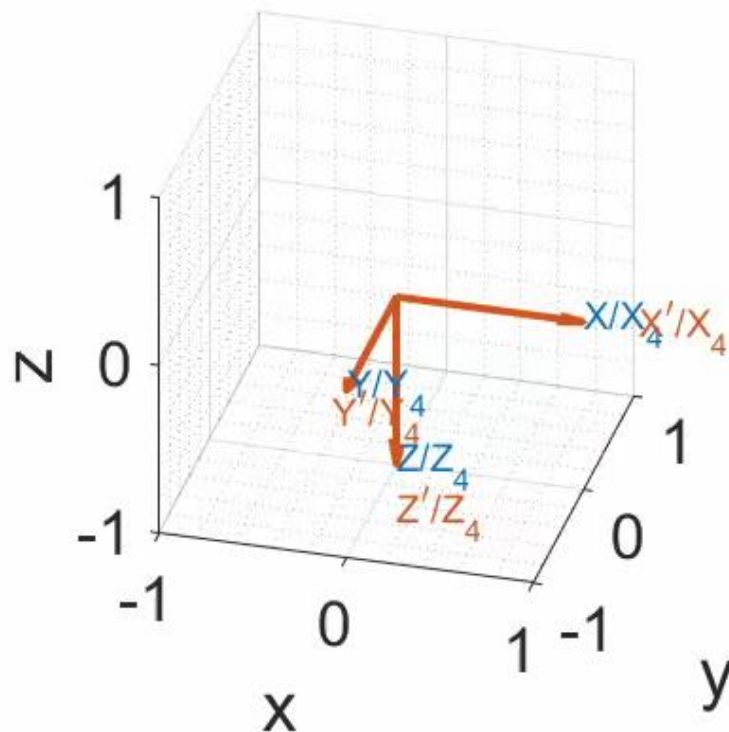


## 方法一 -10

- 舉例說明：ZYZ的  $(\alpha, \beta, \gamma)$  和DH的  $(\theta_4, \theta_5, \theta_6)$ ，在  $(\theta_4, \theta_6)$  有  $+180^\circ$  的差異

圖示：

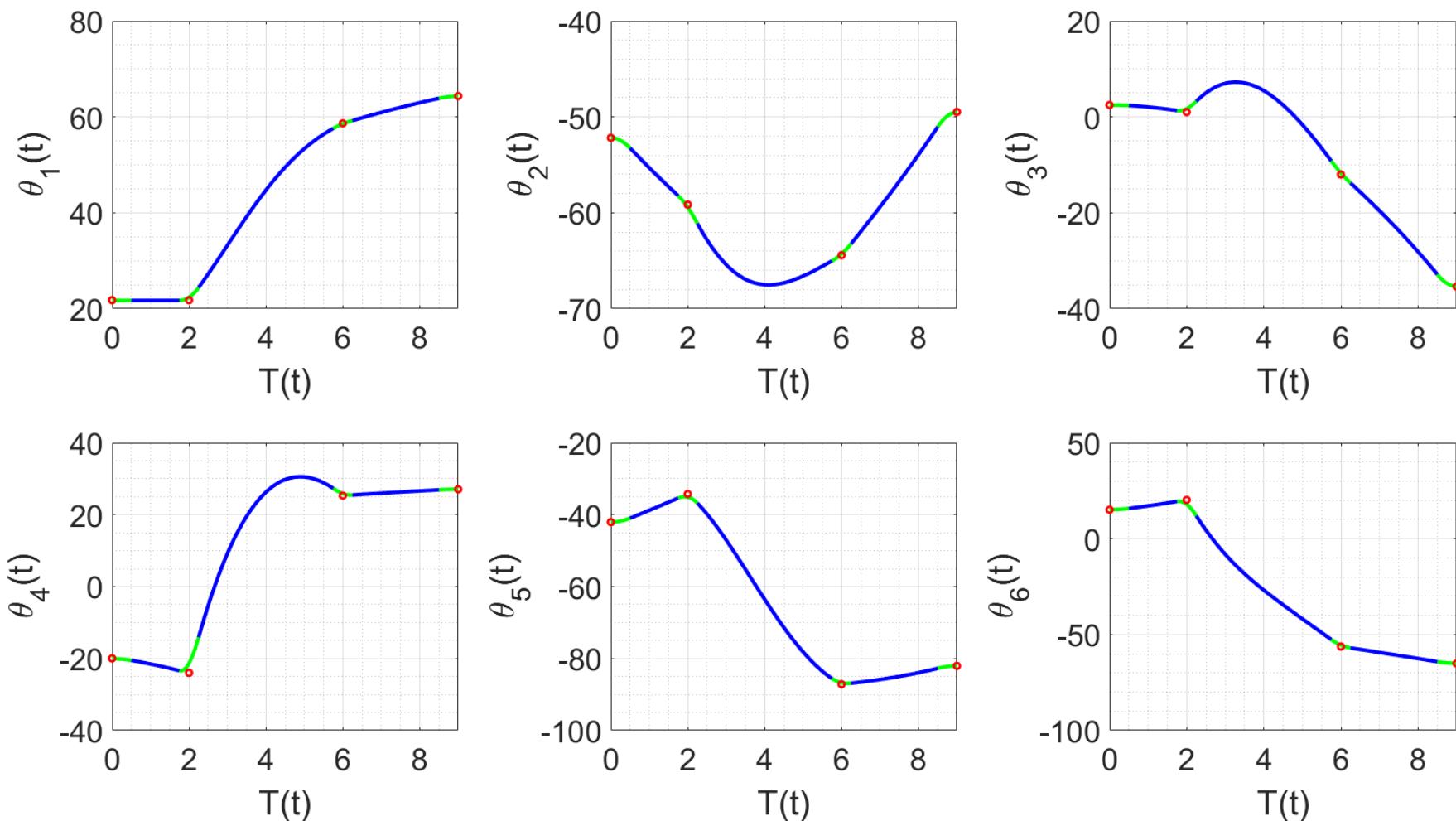
$X(\text{Euler軸})/X_4(\text{DH定義軸})$



1. Euler(Z) / Z4轉 $\theta_4$
2. 需要對Z多轉 $180^\circ$ 度, Euler XYZ軸才吻合當初定義手臂 frame{5}之方向
3. Euler(Y) / Z5轉 $\theta_5$
4. 需要對Z多轉 $180^\circ$ 度, Euler XYZ軸才吻合當初定義手臂 frame{6}之方向
5. Euler(Z) / Z6轉 $\theta_6$

## 方法一 -11

- 步驟4：將解出設定點 & 軌跡內插點的6軸轉角各自對時間畫成軌跡圖（附註：在joint space下的軌跡不再是直線，但依然smooth）



## 方法一 -12

- 步驟5：將轉角帶入FK，繪出杯子  ${}^0P_{CORG}$  的座標及姿態，以  
確認軌跡規劃正確性
- 同樣以第二個via point  $P_2$  為例，進行細部計算說明

$$\theta_1 = 58.61^\circ \quad \theta_2 = -64.46^\circ \quad \theta_3 = -11.98^\circ$$

$$\theta_4 = 25.30^\circ \quad \theta_5 = -87.13^\circ \quad \theta_6 = -56.19^\circ$$

根據DH table：

$${}^0T_6 = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6$$

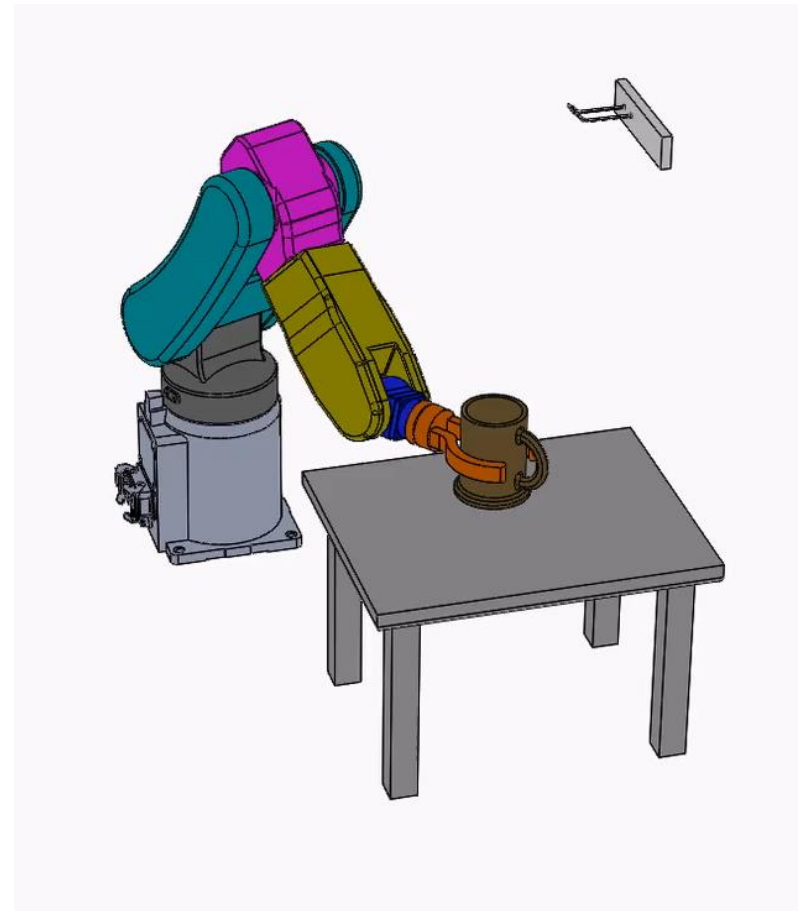
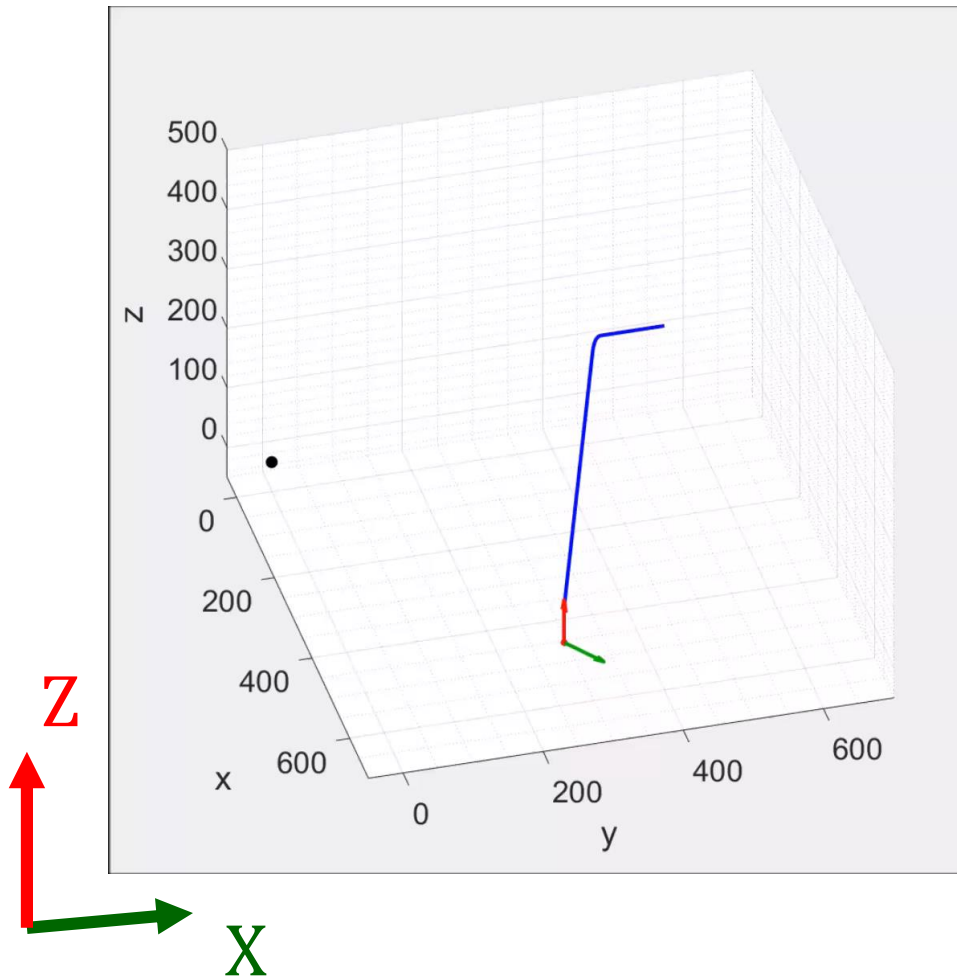
$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_2 & -\cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & 340 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 1 & 338 \\ -\sin \theta_4 & -\cos \theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin \theta_5 & \cos \theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_6 & -\cos \theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= {}^0T_2 \text{ (得出與設定4相同的transformation matrix)}$$

## 方法一 -13

### □ 步驟6：軌跡模擬



## 方法二 -1

□ 方法二：以linear function with parabolic blends在joint-space下  
規劃軌跡

□ 步驟1：以IK先計算出各點的6軸轉角

	X	Y	Z	$\Phi_x$	$\Phi_y$	$\Phi_z$
$P_0$	381.3	151.8	19.5	-145	-90	0
$P_1$	381.3	151.8	79.5	-145	-90	0
$P_2$	227	372	188.6	0	-30	180
$P_f$	227	472	188.6	0	-30	180



	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$
$P_0$	22	-52	2.5	-20	-42	15
$P_1$	22	-59	1	-24	-34	20
$P_2$	59	-64	-12	25	-87	-56
$P_f$	64	-49	-35	27	-82	-65

## 方法二 -2

- 步驟2：求出各軸( $\theta_1$ - $\theta_6$ ) 在每個時段的速度及加速度

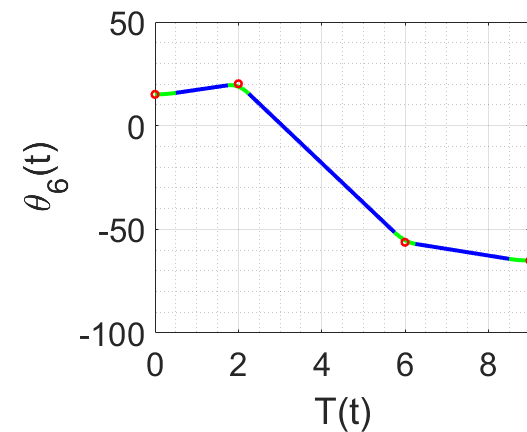
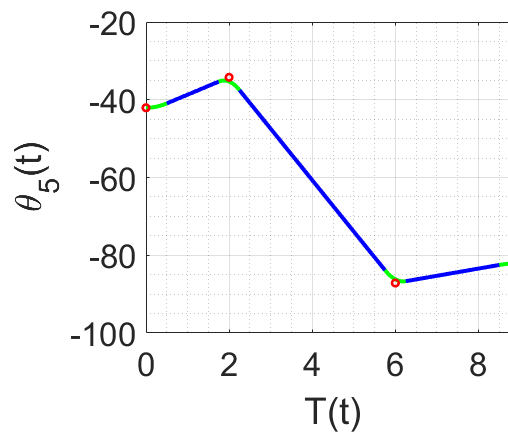
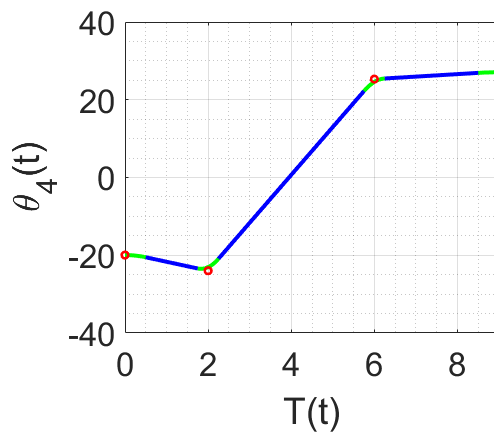
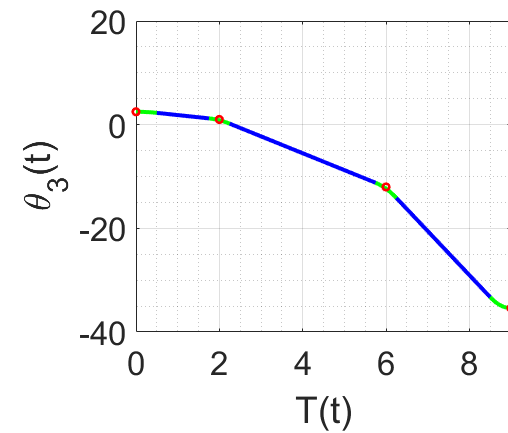
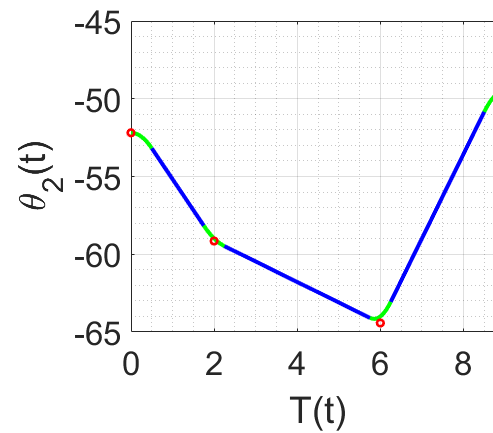
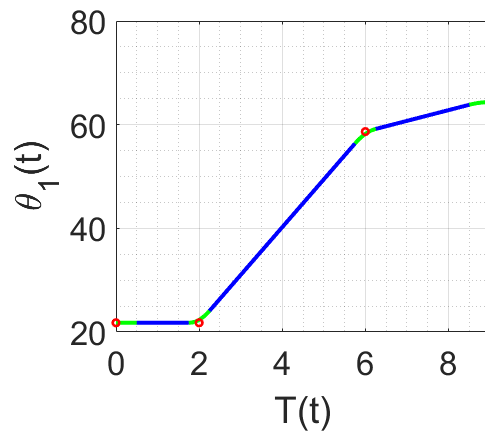
deg/s	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$
$V_0$	0	0	0	0	0	0
$V_1$	0	-3.98	-0.85	-2.30	4.48	2.92
$V_2$	9.22	-1.32	-3.26	12.32	-13.23	-19.11
$V_3$	2.07	5.43	-8.50	0.64	1.85	-3.21
$V_f$	0	0	0	0	0	0

deg/s <sup>2</sup>	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$
$a_0$	0	-7.95	-1.70	-4.61	8.96	5.84
$a_1$	18.44	5.32	-4.81	29.25	-35.42	-44.06
$a_2$	-14.30	13.49	-10.49	-23.37	30.17	31.80
$a_f$	-4.14	-10.86	17.00	-1.28	-3.71	6.41



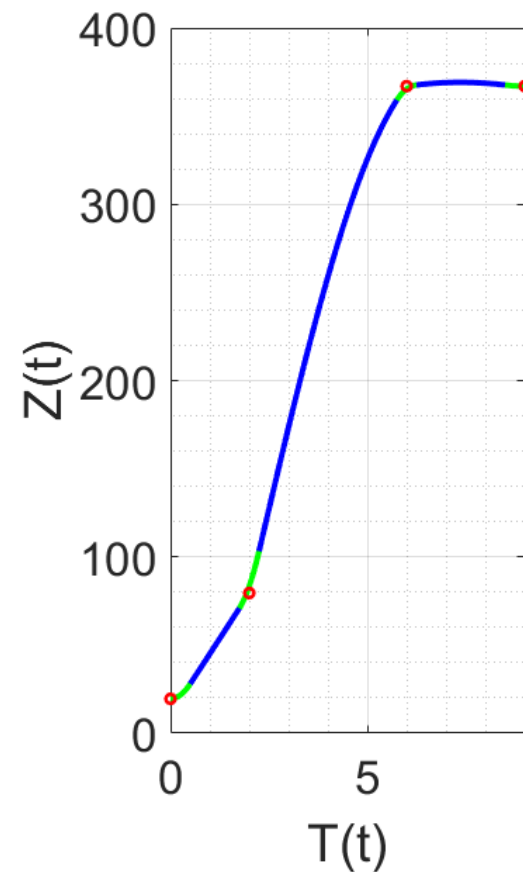
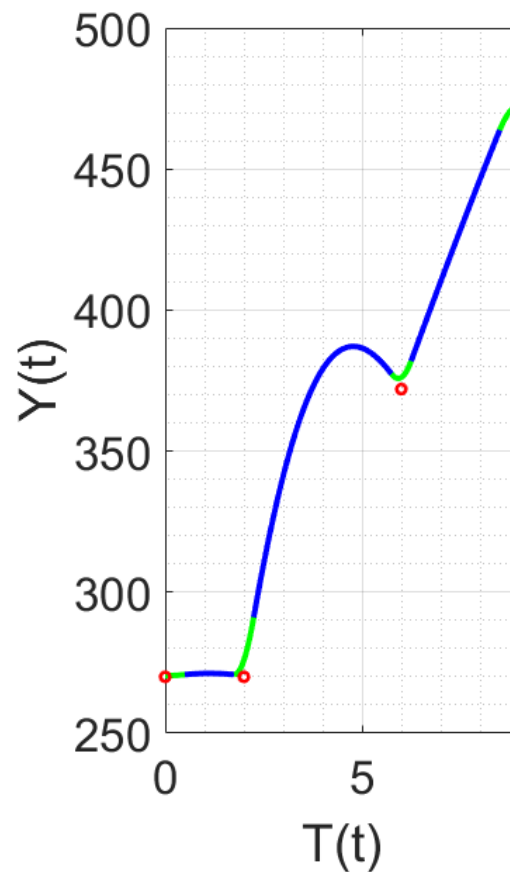
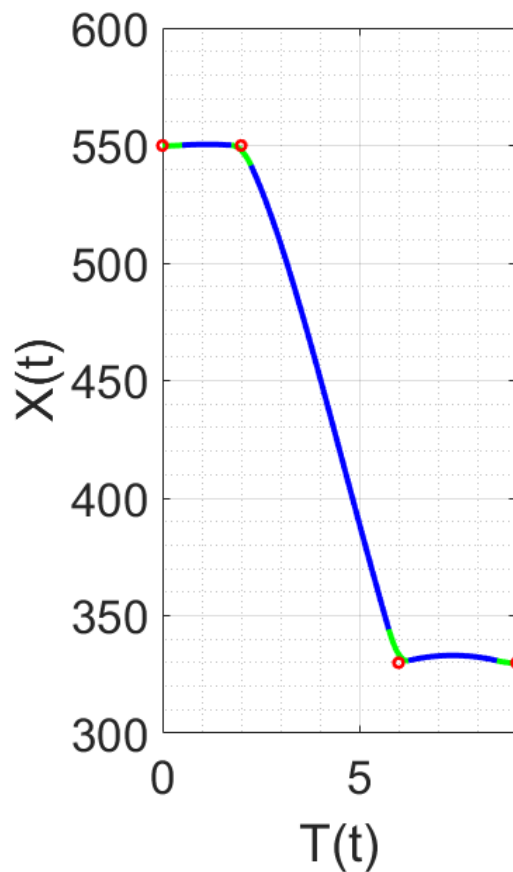
## 方法二 -3

- 步驟3：建立各軸在每個時段的equation (Linear/Parabolic 共7段)，繪出平滑的軌跡 (每段parabolic curve時間為0.5秒)



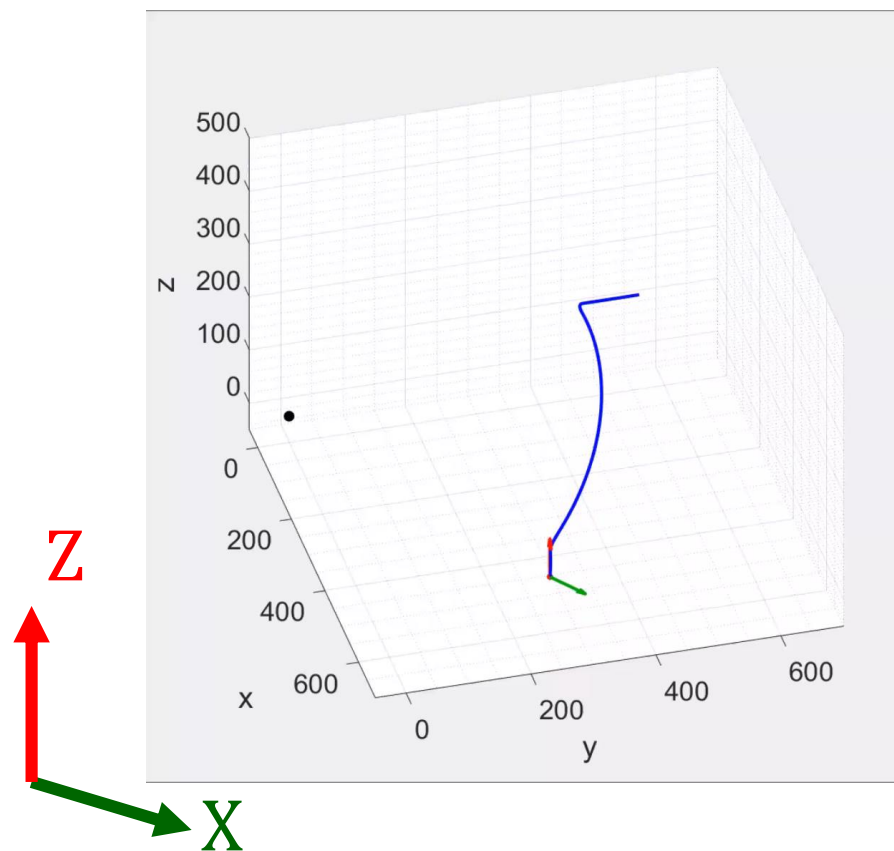
## 方法二 -4

- 步驟4：以FK繪出  ${}^0P_{CORG}$  對時間軌跡，確認軌跡有通過設定點



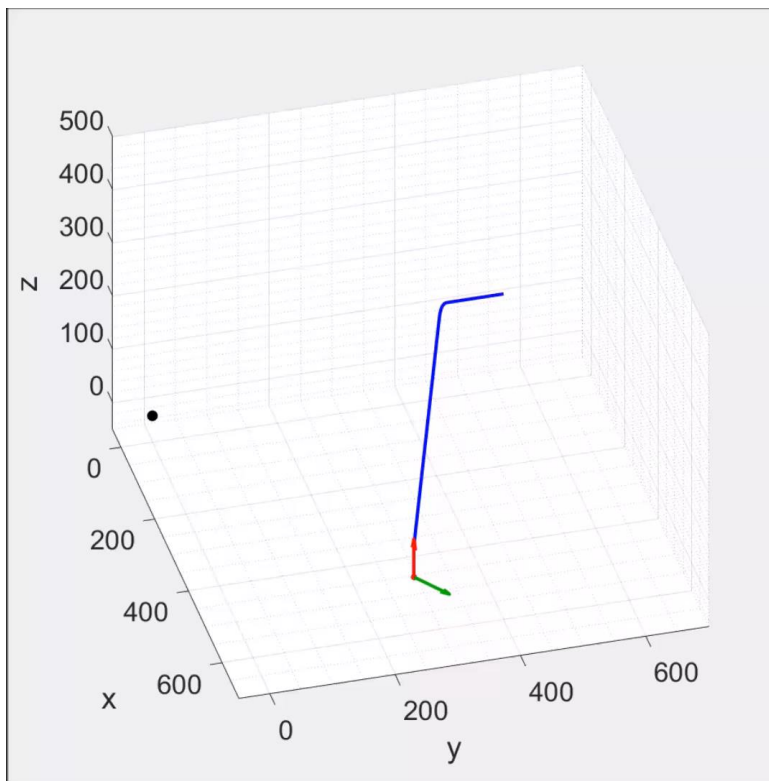
## 方法二 -5

- 步驟5：繪出杯子的運動軌跡（ ${}^0P_{CORG}$ 及旋轉姿態），以驗證答案

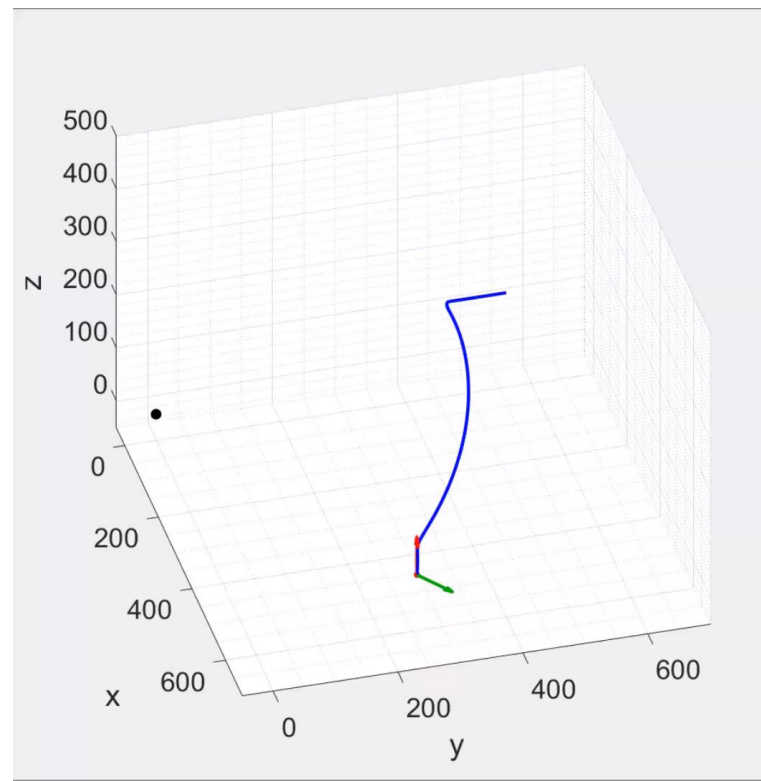


## 方法二 -6

- 在Cartesian-space下和在joint-space下軌跡比較



Cartesian-space



Joint-space



## 註解 -1

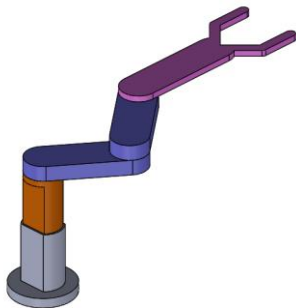
---

- 本例題實為本課程的總整例題(Capstone example)，在解題過程中運用了本課程所講授的每個主題，和其內含的多個知識點
  - ◆ 剛體運動狀態的描述
  - ◆ 順向運動學
  - ◆ 逆向運動學
  - ◆ 軌跡規劃

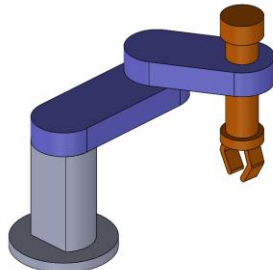
- 軌跡規劃一般為任務導向，設定手臂末端點和物件（工件）之間的關係，獨立於手臂的類型（或自由度配置）
  - ◆ Cubic polynomials
  - ◆ Linear function with parabolic blends
  
- 本課程所講授兩種軌跡規劃方式為基礎方法，可使用。若實際應用時仍不滿足所需，可以照課程講授法則適度延伸（如規劃位置速度和加速度都連續的軌跡等）

## 註解 -3

- 順向運動學和逆向運動學則和手臂的自由度配置相關，不同的配置方式，有不同的計算方式，尤以逆向運動學影響甚大，本課程主要是講授開鏈(open-chain)手臂的IK，移動方面
  - ◆ 平面RRR自由度手臂的IK
    - SCARA和晶圓機器人可視為此類型的延伸
  - ◆ 空間RRRRRR自由度手臂的IK
    - 多關節機器人(articulated manipulator)

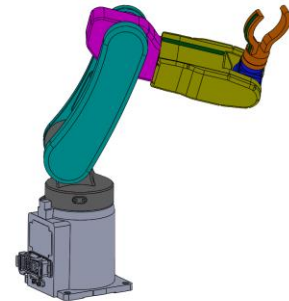


晶圓機器人



SCARA

2D IK

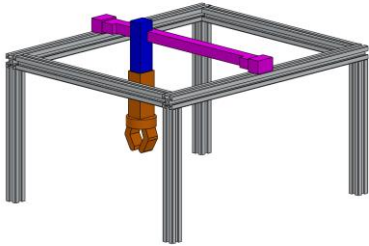


Articulated

3D IK

## 註解 -4

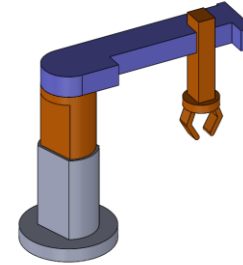
- ◆ 「座標型」機器人則不需要FK和IK



Cartesian



Spherical



Cylindrical

轉動方面可以Euler Angles方式求解

- 閉鏈(closed-chain)手臂的FK和IK有不同的計算方式
  - ◆ DELTA機器人、Stewart platform等





## 註解 -5

---

- 若手臂具有冗自由度(redundant DOF)，軌跡規劃和IK一般具有無限多解，需導入最佳化方法（可避障、時間最快、最省能等）