

基于四元数运动学的误差状态卡尔曼滤波器

Joan Solà (翻译: LINYI)

December 19, 2024

Contents

1	四元数的定义和性质	4
1.1	四元数的定义	4
1.1.1	四元数的替代表示方法	5
1.2	四元数的主要性质	6
1.2.1	加法	6
1.2.2	乘法	6
1.2.3	单位四元数	7
1.2.4	共轭四元数	8
1.2.5	范数	8
1.2.6	逆	8
1.2.7	单位或归一化的四元数	8
1.3	附加的四元数性质	9
1.3.1	四元数对易子 (commutator)	9
1.3.2	纯四元数的乘法	9
1.3.3	纯四元数的自然幂	9
1.3.4	纯四元数的指数函数	10
1.3.5	一般四元数的指数函数	10
1.3.6	单位四元数的对数	11
1.3.7	一般四元数的对数	11
1.3.8	形如 \mathbf{q}^t 的指数形式	11
2	旋转与变换关系	11
2.1	3D 向量旋转公式	11
2.2	旋转群 $SO(3)$	13
2.3	旋转群和旋转矩阵	13
2.3.1	指数映射	15
2.3.2	大写的指数映射	16
2.3.3	旋转矩阵与旋转向量: 罗德里格斯旋转公式	17
2.3.4	对数映射	17
2.3.5	旋转操作	18

2.4	旋转群与四元数	18
2.4.1	指数映射	19
2.4.2	大写的指数映射	20
2.4.3	四元数和旋转向量	20
2.4.4	指数映射	21
2.4.5	旋转操作	21
2.4.6	$SO(3)$ 流形的双重覆盖	22
2.5	旋转矩阵和四元数	22
2.6	旋转组合	24
2.7	球面线性插值 (SLERP)	25
2.8	四元数与等斜旋转：解释其中的奥秘	28
3	四元数约定, 我们的选择	30
3.1	四元数的不同形式	30
3.1.1	四元数组成的顺序	32
3.1.2	四元数的代数规范	32
3.1.3	旋转算子的功能	33
3.1.4	旋转算子的方向	33
4	扰动、导数和积分	34
4.1	$SO(3)$ 中的加法和减法运算	34
4.2	四种可能的导数定义	35
4.2.1	从向量空间到向量空间的函数	35
4.2.2	从 $SO(3)$ 到 $SO(3)$ 的函数	36
4.2.3	从向量空间到 $SO(3)$ 的函数	36
4.2.4	从 $SO(3)$ 到向量空间的函数	36
4.3	非常有用的部分：旋转的雅可比	37
4.3.1	对向量求雅可比	37
4.3.2	对四元数求雅可比	37
4.3.3	$SO(3)$ 上的右雅可比	38
4.3.4	对旋转向量求雅可比	39
4.3.5	旋转组合的雅可比	40
4.4	扰动、不确定性和噪声	40
4.4.1	局部扰动	40
4.4.2	全局扰动	41
4.5	时间导数	41
4.5.1	全局-局部的关系	43
4.5.2	四元数乘积的时间导数	43
4.5.3	其他与导数相关的有用表达式	43
4.6	旋转速率的时间积分	44
4.6.1	零阶积分	45
4.6.2	一阶积分	46

5	IMU 驱动系统的误差状态运动学	48
5.1	动机	48
5.2	解释误差状态卡尔曼滤波器	48
5.3	连续时间系统运动学	49
5.3.1	真实状态的运动学	49
5.3.2	名义状态的运动学	51
5.3.3	误差状态的运动学	51
5.4	离散时间下的系统运动学	54
5.4.1	名义状态的运动学	55
5.4.2	误差状态的运动学	55
5.4.3	误差状态雅可比矩阵和扰动矩阵	55
6	将 IMU 与互补传感器数据融合	57
6.1	通过滤波器校正观察误差状态	57
6.1.1	滤波器校正的雅可比矩阵计算	58
6.2	将观察到的误差注入名义状态	59
6.3	ESKF 重置	59
6.3.1	重置操作相对于方向误差的雅可比矩阵	60
7	使用全局角度误差的 ESKF	61
7.1	连续时间中的系统运动学	61
7.1.1	真实状态和名义状态的运动学	61
7.1.2	误差状态的运动学	61
7.2	离散时间中的系统运动学	63
7.2.1	名义状态	63
7.2.2	误差状态	63
7.2.3	误差状态雅可比矩阵和扰动矩阵	64
7.3	与互补传感器数据融合	64
7.3.1	误差状态观测	64
7.3.2	将观测到的误差注入到名义状态	65
7.3.3	ESKF 重置	65
A	龙格-库塔数值积分方法	66
A.1	欧拉方法	67
A.2	中点法	67
A.3	RK4 方法	68
A.4	一般的龙格-库塔方法	68
B	封闭形式的积分方法	69
B.1	角度误差的积分	69
B.2	简化的 IMU 示例	70
B.3	完整的 IMU 示例	73

C 使用截断级数的近似方法	75
C.1 系统级截断	75
C.1.1 一阶截断：有限差分法	75
C.1.2 N 阶截断	76
C.2 区块级截断	76
D 通过 Runge-Kutta 积分得到的转移矩阵	77
D.1 误差状态示例	78
E 随机噪声和扰动的积分	80
E.1 噪声和扰动脉冲	82
E.2 完整的 IMU 示例	83
E.2.1 噪声和扰动脉冲	83

Abstract

这篇文章对与四元数和三维空间旋转相关的概念和公式进行了详尽的修订，并探讨了它们在估计引擎中的正确使用，特别是在误差状态卡尔曼滤波器中的应用。

文章深入研究了旋转群及其李群结构，并使用四元数和旋转矩阵两种方式进行了公式化。特别关注了旋转扰动、导数和积分的定义，并提供了许多直觉性和几何学上的解释，以帮助读者理解三维旋转的内在机制。

所有的材料都用于设计精确的公式，适用于现实应用中的误差状态卡尔曼滤波器，并结合了惯性测量单元 (IMU) 信号的积分。

1 四元数的定义和性质

1.1 四元数的定义

我找到的一个特别有吸引力的四元数介绍是由 Cayley-Dickson 给出的：如果我们有两个复数 $A = a + bi$ 和 $C = c + di$ ，那么构造 $Q = A + Cj$ 并定义 $k \triangleq ij$ ，则可以得到一个四元数空间 \mathbb{H} 中的数，

$$Q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}, \quad (1)$$

其中， $\{a, b, c, d\} \in \mathbb{R}$ ，并且 $\{i, j, k\}$ 是三个虚数单位，它们的定义满足

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \quad (2a)$$

从中我们可以推导出

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j. \quad (2b)$$

从 (1) 中我们可以看到，我们可以将复数，以及实数和虚数，嵌入到四元数的定义中，换句话说，实数、虚数和复数实际上都是四元数，

$$Q = a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{H}, \quad Q = bi \in \mathbb{I} \subset \mathbb{H}, \quad Q = a + bi \in \mathbb{C} \subset \mathbb{H}. \quad (3)$$

同样，为了完整性起见，我们可以在四元数空间 \mathbb{H} 的三维虚数子空间中定义数值。我们称它们为纯四元数，并可以记作 $\mathbb{H}_p = \text{Im}(\mathbb{H})$ ，表示纯四元数的空间，

$$Q = bi + cj + dk \in \mathbb{H}_p \subset \mathbb{H}. \quad (4)$$

值得注意的是，单位长度的常规复数 $\mathbf{z} = e^{i\theta}$ 可以在二维平面中表示旋转（通过一次复数乘法， $\mathbf{x}' = \mathbf{z} \cdot \mathbf{x}$ ），“扩展复数”或单位长度的四元数 $\mathbf{q} = e^{(u_x i + u_y j + u_z k)\theta/2}$ 则能够表示三维空间中的旋转（通过双重四元数乘法， $\mathbf{x}' = \mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^*$ ，正如我们在本文后面将要解释的那样）。

警告：并非所有的四元数定义都是相同的。有些作者将乘积写作 ib 而不是 bi ，因此他们得到的性质是 $k = ji = -ij$ ，这导致 $ijk = 1$ 和左手四元数。此外，许多作者将实部放在末尾位置，得到 $Q = ia + jb + kc + d$ 。这些选择没有根本性的影响，但使整个表述在细节上有所不同。请参考 Section 3 以获取进一步的解释和消除歧义。

警告：还有一些额外的约定，它们也使得公式在细节上有所不同。它们涉及我们对旋转算子的“意义”或“解释”，即旋转向量或旋转参考框架——这本质上是相反的操作。有关进一步的解释和消除歧义，请参见 Section 3。

注意：在上述不同的约定中，本文集中讨论哈密尔顿约定，其最显著的特点是定义 (2)。为了进行恰当且有依据的歧义消除，首先需要开发大量的材料；因此，这一消歧义的内容被推迟到前述的 Section 3 部分。

1.1.1 四元数的替代表示方法

实数 + 虚数符号表示法 $\{1, i, j, k\}$ 对于我们的目的并不总是方便。在使用代数 (2) 的前提下，四元数可以表示为标量 + 向量的和，

$$Q = q_w + q_x i + q_y j + q_z k \quad \Leftrightarrow \quad Q = q_w + \mathbf{q}_v, \quad (5)$$

其中 q_w 称为实数或标量部分， $\mathbf{q}_v = q_x i + q_y j + q_z k = (q_x, q_y, q_z)$ 称为虚数或向量部分。¹ 它也可以定义为一个有序的标量-向量对

$$Q = \langle q_w, \mathbf{q}_v \rangle. \quad (6)$$

我们通常将四元数 Q 表示为一个 4-维向量 \mathbf{q} ，

$$\mathbf{q} \triangleq \begin{bmatrix} q_w \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_w \\ q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}, \quad (7)$$

这使得我们可以使用矩阵代数来进行涉及四元数的运算。在某些情况下，我们可能会允许混合符号，通过滥用符号“=”来表示。典型的例子包括实四元数和纯四元数，

$$\text{general: } \mathbf{q} = q_w + \mathbf{q}_v = \begin{bmatrix} q_w \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} \in \mathbb{H}, \quad \text{real: } q_w = \begin{bmatrix} q_w \\ \mathbf{0}_v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}, \quad \text{pure: } \mathbf{q}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} \in \mathbb{H}_p. \quad (8)$$

¹我们选择使用 (w, x, y, z) 下标符号，源于我们关注四元数在三维笛卡尔空间中的几何性质。其他文献通常使用替代的下标符号，如 $(0, 1, 2, 3)$ 或 $(1, i, j, k)$ ，这些符号可能更适合数学上的解释。

1.2 四元数的主要性质

1.2.1 加法

四元数的加法是非常直观的，

$$\mathbf{p} \pm \mathbf{q} = \begin{bmatrix} p_w \\ \mathbf{p}_v \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} q_w \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_w \pm q_w \\ \mathbf{p}_v \pm \mathbf{q}_v \end{bmatrix}. \quad (9)$$

通过上面的构造，加法运算是满足**交换律**和**结合律**的，

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{q} + \mathbf{p} \quad (10)$$

$$\mathbf{p} + (\mathbf{q} + \mathbf{r}) = (\mathbf{p} + \mathbf{q}) + \mathbf{r}. \quad (11)$$

1.2.2 乘法

用符号 \otimes 表示，四元数乘法需要使用公式 (1) 中的原始形式和公式 (2) 中的四元数性质。将结果写成向量形式得到

$$\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} = \begin{bmatrix} p_w q_w - p_x q_x - p_y q_y - p_z q_z \\ p_w q_x + p_x q_w + p_y q_z - p_z q_y \\ p_w q_y - p_x q_z + p_y q_w + p_z q_x \\ p_w q_z + p_x q_y - p_y q_x + p_z q_w \end{bmatrix}. \quad (12)$$

这也可以用标量部分和向量部分来表示，

$$\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} = \begin{bmatrix} p_w q_w - \mathbf{p}_v^\top \mathbf{q}_v \\ p_w \mathbf{q}_v + q_w \mathbf{p}_v + \mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v \end{bmatrix}, \quad (13)$$

其中，向量积的存在表明，四元数乘法在一般情况下是**不满足交换律**的，

$$\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} \neq \mathbf{q} \otimes \mathbf{p}. \quad (14)$$

这种一般的不可交换性质的例外仅限于以下情况：当 $\mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v = 0$ 时，这发生在一个四元数是实数时，即 $\mathbf{p} = p_w$ 或 $\mathbf{q} = q_w$ ，或者当两个向量部分平行时， $\mathbf{p}_v \parallel \mathbf{q}_v$ 。只有在这些情况下，四元数乘法才是交换的。

然而，四元数乘法是对**结合律**成立的，

$$(\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}) \otimes \mathbf{r} = \mathbf{p} \otimes (\mathbf{q} \otimes \mathbf{r}), \quad (15)$$

并且是**对加法满足分配律**的，

$$\mathbf{p} \otimes (\mathbf{q} + \mathbf{r}) = \mathbf{p} \otimes \mathbf{q} + \mathbf{p} \otimes \mathbf{r} \quad \text{and} \quad (\mathbf{p} + \mathbf{q}) \otimes \mathbf{r} = \mathbf{p} \otimes \mathbf{r} + \mathbf{q} \otimes \mathbf{r}. \quad (16)$$

两个四元数的乘积是双线性的，可以表示为两个等价的矩阵乘积，即

$$\mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_2 = [\mathbf{q}_1]_L \mathbf{q}_2 \quad \text{and} \quad \mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_2 = [\mathbf{q}_2]_R \mathbf{q}_1, \quad (17)$$

其中, $[\mathbf{q}]_L$ 和 $[\mathbf{q}]_R$ 分别是左四元数乘积矩阵和右四元数乘积矩阵, 它们是通过简单的观察从 (12) 和 (17) 得到的。

$$[\mathbf{q}]_L = \begin{bmatrix} q_w & -q_x & -q_y & -q_z \\ q_x & q_w & -q_z & q_y \\ q_y & q_z & q_w & -q_x \\ q_z & -q_y & q_x & q_w \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{q}]_R = \begin{bmatrix} q_w & -q_x & -q_y & -q_z \\ q_x & q_w & q_z & -q_y \\ q_y & -q_z & q_w & q_x \\ q_z & q_y & -q_x & q_w \end{bmatrix}, \quad (18)$$

或者更简洁地, 从 (13) 和 (17) 中得到,

$$[\mathbf{q}]_L = q_w \mathbf{I} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{q}_v^\top \\ \mathbf{q}_v & [\mathbf{q}_v]_\times \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{q}]_R = q_w \mathbf{I} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{q}_v^\top \\ \mathbf{q}_v & -[\mathbf{q}_v]_\times \end{bmatrix}. \quad (19)$$

这里, 斜对称算子 $^2[\bullet]_\times$ 被用于生成叉乘矩阵,

$$[\mathbf{a}]_\times \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

这是一个斜对称矩阵, 满足 $[\mathbf{a}]_\times^\top = -[\mathbf{a}]_\times$, 并且与叉积运算等价, *i.e.*,

$$[\mathbf{a}]_\times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3. \quad (21)$$

最后, 由于

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{p} &= (\mathbf{q} \otimes \mathbf{x}) \otimes \mathbf{p} = [\mathbf{p}]_R [\mathbf{q}]_L \mathbf{x} \\ &= \mathbf{q} \otimes (\mathbf{x} \otimes \mathbf{p}) = [\mathbf{q}]_L [\mathbf{p}]_R \mathbf{x}, \end{aligned}$$

我们得到这样的关系

$$[\mathbf{p}]_R [\mathbf{q}]_L = [\mathbf{q}]_L [\mathbf{p}]_R, \quad (22)$$

也就是说, 左四元数乘积矩阵和右四元数乘积矩阵是可交换的。这些矩阵的进一步性质将在 Section 2.8 中描述。

带有乘积运算 \otimes 的四元数组成一个非交换群。该群的单位元素 $\mathbf{q}_1 = 1$ 和逆元素 \mathbf{q}^{-1} 将在下文中探讨。

1.2.3 单位四元数

单位四元数 \mathbf{q}_1 相对于乘法运算的定义是 $\mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q} = \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}$ 。它对应于实数乘法中的单位元 ‘1’, 用四元数的形式表示为,

$$\mathbf{q}_1 = 1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0}_v \end{bmatrix}.$$

²在文献中, 斜对称算子有多种不同的名称和符号, 通常与叉积运算符 \times 或 “hat” 运算符 $^\wedge$ 相关, 因此下面的所有形式是等价的

$$[\mathbf{a}]_\times \equiv [\mathbf{a}_\times] \equiv \mathbf{a} \times \equiv \mathbf{a}_\times \equiv [\mathbf{a}] \equiv \hat{\mathbf{a}} \equiv \mathbf{a}^\wedge.$$

1.2.4 共轭四元数

四元数的共轭定义为

$$\mathbf{q}^* \triangleq q_w - \mathbf{q}_v = \begin{bmatrix} q_w \\ -\mathbf{q}_v \end{bmatrix}. \quad (23)$$

它具有以下性质

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^* = \mathbf{q}^* \otimes \mathbf{q} = q_w^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = \begin{bmatrix} q_w^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 \\ \mathbf{0}_v \end{bmatrix}, \quad (24)$$

并且

$$(\mathbf{p} \otimes \mathbf{q})^* = \mathbf{q}^* \otimes \mathbf{p}^*. \quad (25)$$

1.2.5 范数

四元数的范数被定义为

$$\|\mathbf{q}\| \triangleq \sqrt{\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^*} = \sqrt{\mathbf{q}^* \otimes \mathbf{q}} = \sqrt{q_w^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2} \in \mathbb{R}. \quad (26)$$

它具有以下性质

$$\|\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}\| = \|\mathbf{q} \otimes \mathbf{p}\| = \|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\|. \quad (27)$$

•

1.2.6 逆

四元数的逆 \mathbf{q}^{-1} 是这样的定义的，四元数与其逆相乘得到单位四元数，

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^{-1} \otimes \mathbf{q} = \mathbf{q}_1. \quad (28)$$

它可以通过以下方式计算

$$\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^* / \|\mathbf{q}\|^2. \quad (29)$$

1.2.7 单位或归一化的四元数

对于单位四元数， $\|\mathbf{q}\| = 1$ ，由此得到

$$\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^*. \quad (30)$$

当将单位四元数解释为方向的表示或旋转运算符时，这一性质意味着逆向旋转可以通过共轭四元数来实现。单位四元数总是可以写成以下形式，

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \mathbf{u} \sin \theta \end{bmatrix}, \quad (31)$$

其中 $\mathbf{u} = u_x i + u_y j + u_z k$ 是一个单位向量并且 θ 是一个标量。

从 (27) 可得，带有乘法运算 \otimes 的单位四元数组成一个非交换群，其中逆元与共轭四元数相同。

1.3 附加的四元数性质

1.3.1 四元数对易子 (commutator)

四元数的对易子定义为 $[\mathbf{p}, \mathbf{q}] \triangleq \mathbf{p} \otimes \mathbf{q} - \mathbf{q} \otimes \mathbf{p}$ 。根据 (13)，我们有

$$\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} - \mathbf{q} \otimes \mathbf{p} = 2 \mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v . \quad (32)$$

这得到了一个显然的结果，

$$\mathbf{p}_v \otimes \mathbf{q}_v - \mathbf{q}_v \otimes \mathbf{p}_v = 2 \mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v . \quad (33)$$

我们将在稍后用到这个性质。

1.3.2 纯四元数的乘法

纯四元数是指实部或标量部分为零的四元数， $Q = \mathbf{q}_v$ or $\mathbf{q} = [0, \mathbf{q}_v]$ 。根据 (13)，我们有

$$\mathbf{p}_v \otimes \mathbf{q}_v = -\mathbf{p}_v^\top \mathbf{q}_v + \mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v = \begin{bmatrix} -\mathbf{p}_v^\top \mathbf{q}_v \\ \mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v \end{bmatrix} . \quad (34)$$

这意味着

$$\mathbf{q}_v \otimes \mathbf{q}_v = -\mathbf{q}_v^\top \mathbf{q}_v = -\|\mathbf{q}_v\|^2 , \quad (35)$$

并且对于单位四元数 $\mathbf{u} \in \mathbb{H}_p$ ， $\|\mathbf{u}\| = 1$ 有，

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} = -1 , \quad (36)$$

这类似于复数中的情况， $i \cdot i = -1$ 。

1.3.3 纯四元数的自然幂

我们定义 \mathbf{q}^n ， $n \in \mathbb{N}$ 为使用四元数乘法 \otimes 计算的 \mathbf{q} 的第 n 次幂。然后，如果 \mathbf{v} 是一个纯四元数，并且我们令 $\mathbf{v} = \mathbf{u}\theta$ ，其中 $\theta = \|\mathbf{v}\| \in \mathbb{R}$ 且 \mathbf{u} 是单位四元数，我们可以从 (35) 中得到一个循环结果

$$\mathbf{v}^2 = -\theta^2 , \quad \mathbf{v}^3 = -\mathbf{u}\theta^3 , \quad \mathbf{v}^4 = \theta^4 , \quad \mathbf{v}^5 = \mathbf{u}\theta^5 , \quad \mathbf{v}^6 = -\theta^6 , \quad \dots \quad (37)$$

并且对于单位纯四元数 \mathbf{u} ，可以简化为如下形式

$$\mathbf{u}^2 = -1 , \quad \mathbf{u}^3 = -\mathbf{u} , \quad \mathbf{u}^4 = 1 , \quad \mathbf{u}^5 = \mathbf{u} , \quad \mathbf{u}^6 = -1 , \quad \dots \quad (38)$$

1.3.4 纯四元数的指数函数

四元数的指数函数是一个类似于常规指数函数的四元数上的函数。与实数指数函数的情况完全相同，它被定义为绝对收敛的幂级数，

$$e^{\mathbf{q}} \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{q}^k \in \mathbb{H}. \quad (39)$$

显然，实四元数的指数函数与常规的指数函数完全一致。

更有趣的是，纯四元数 $\mathbf{v} = v_x i + v_y j + v_z k$ 的指数函数是一个全新的四元数，被定义为

$$e^{\mathbf{v}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{v}^k \in \mathbb{H}. \quad (40)$$

令 $\mathbf{v} = \mathbf{u}\theta$ ，其中 $\theta = \|\mathbf{v}\| \in \mathbb{R}$ 且 \mathbf{u} 是单位四元数，并且考虑 (37)，我们将级数中的标量项和向量项分组为

$$e^{\mathbf{u}\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots\right) + \left(\mathbf{u}\theta - \frac{\mathbf{u}\theta^3}{3!} + \frac{\mathbf{u}\theta^5}{5!} + \cdots\right) \quad (41)$$

并分别在其中识别出 $\cos \theta$ 和 $\sin \theta$ 的级数。³ 这样得到结果

$$e^{\mathbf{v}} = e^{\mathbf{u}\theta} = \cos \theta + \mathbf{u} \sin \theta = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \mathbf{u} \sin \theta \end{bmatrix}, \quad (42)$$

这构成了欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 的一个美丽扩展，该公式是为虚数定义的。注意到，由于 $\|e^{\mathbf{v}}\|^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ ，因此纯四元数的指数是一个单位四元数。还要注意以下性质，

$$e^{-\mathbf{v}} = (e^{\mathbf{v}})^*. \quad (43)$$

对于小角度四元数，我们通过表示 $\sin \theta$ 和 $\cos \theta$ 的泰勒级数并截断，从而避免了在 $\mathbf{u} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ 中除以零的问题，得到了不同程度的近似，

$$e^{\mathbf{v}} \approx \begin{bmatrix} 1 - \theta^2/2 \\ \mathbf{v}(1 - \theta^2/6) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (44)$$

1.3.5 一般四元数的指数函数

由于四元数乘法的非交换性，我们不能一般地写出 \mathbf{p} 和 \mathbf{q} 的四元数满足 $e^{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = e^{\mathbf{p}}e^{\mathbf{q}}$ 。然而，当乘积的任一成员是标量时，交换性成立，因此，

$$e^{\mathbf{q}} = e^{q_w + \mathbf{q}_v} = e^{q_w} e^{\mathbf{q}_v}. \quad (45)$$

然后，使用 (42) 并设 $\mathbf{u}\theta = \mathbf{q}_v$ ，我们得到

$$e^{\mathbf{q}} = e^{q_w} \begin{bmatrix} \cos \|\mathbf{q}_v\| \\ \frac{\mathbf{q}_v}{\|\mathbf{q}_v\|} \sin \|\mathbf{q}_v\| \end{bmatrix}. \quad (46)$$

³我们提醒一下， $\cos \theta = 1 - \theta^2/2! + \theta^4/4! - \cdots$ ，而 $\sin \theta = \theta - \theta^3/3! + \theta^5/5! - \cdots$ 。

1.3.6 单位四元数的对数

可以立即看出, 如果 $\|\mathbf{q}\| = 1$,

$$\log \mathbf{q} = \log(\cos \theta + \mathbf{u} \sin \theta) = \log(e^{\mathbf{u}\theta}) = \mathbf{u}\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{u}\theta \end{bmatrix}, \quad (47)$$

也就是说, 单位四元数的对数是一个纯四元数。角轴值可以通过反转 (42) 来轻松获得,

$$\mathbf{u} = \mathbf{q}_v / \|\mathbf{q}_v\| \quad (48)$$

$$\theta = \arctan(\|\mathbf{q}_v\|, q_w). \quad (49)$$

对于小角度四元数, 我们通过表达 $\arctan(x)$ 的泰勒级数并截断来避免除以零,⁴ 由此获得不同程度的近似。

$$\log(\mathbf{q}) = \mathbf{u}\theta = \mathbf{q}_v \frac{\arctan(\|\mathbf{q}_v\|, q_w)}{\|\mathbf{q}_v\|} \approx \frac{\mathbf{q}_v}{q_w} \left(1 - \frac{\|\mathbf{q}_v\|^2}{3q_w^2}\right) \approx \mathbf{q}_v \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} \mathbf{0}. \quad (50)$$

1.3.7 一般四元数的对数

通过扩展, 如果 \mathbf{q} 是一个一般的四元数,

$$\log \mathbf{q} = \log(\|\mathbf{q}\| \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}) = \log \|\mathbf{q}\| + \log \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} = \log \|\mathbf{q}\| + \mathbf{u}\theta = \begin{bmatrix} \log \|\mathbf{q}\| \\ \mathbf{u}\theta \end{bmatrix}. \quad (51)$$

1.3.8 形如 \mathbf{q}^t 的指数形式

对于 $\mathbf{q} \in \mathbb{H}$ and $t \in \mathbb{R}$ 我们有

$$\mathbf{q}^t = \exp(\log(\mathbf{q}^t)) = \exp(t \log(\mathbf{q})). \quad (52)$$

如果 $\|\mathbf{q}\| = 1$, 我们能写为 $\mathbf{q} = [\cos \theta, \mathbf{u} \sin \theta]$, 由此 $\log(\mathbf{q}) = \mathbf{u}\theta$, 这得到了

$$\mathbf{q}^t = \exp(t \mathbf{u}\theta) = \begin{bmatrix} \cos t\theta \\ \mathbf{u} \sin t\theta \end{bmatrix}. \quad (53)$$

因为指数 t 最终成为角度 θ 的线性乘子, 它可以被视为一个线性角度插值器。我们将在 Section 2.7 中展开这个概念。

2 旋转与变换关系

2.1 3D 向量旋转公式

我们在 Fig. 1 中展示了一个一般三维向量 \mathbf{x} 绕单位向量 \mathbf{u} 定义的轴旋转角度 ϕ 的过程, 遵循右手法则。该旋转通过将向量 \mathbf{x} 分解为与 \mathbf{x} 平行的部分 \mathbf{x}_{\parallel} 和与 \mathbf{x} 正交的部分 \mathbf{x}_{\perp}

⁴我们提醒一下, $\arctan x = x - x^3/3 + x^5/5 - \dots$, 且 $\arctan(y, x) \equiv \arctan(y/x)$ 。

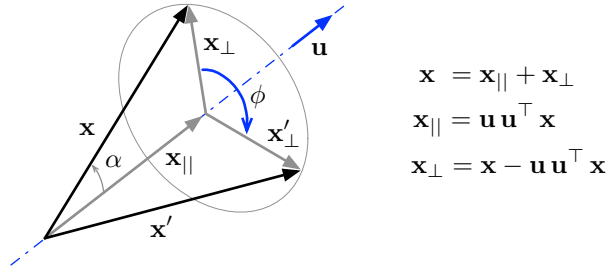


Figure 1: 将向量 \mathbf{x} 绕轴 \mathbf{u} 旋转角度 ϕ 。具体细节见文中。

来完成，因此

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{||} + \mathbf{x}_{\perp} .$$

这些部分可以很容易地计算出来，(α 是向量 \mathbf{x} 与轴 \mathbf{u} 之间的夹角)，

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{||} &= \mathbf{u} (\|\mathbf{x}\| \cos \alpha) = \mathbf{u} \mathbf{u}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_{\perp} &= \mathbf{x} - \mathbf{x}_{||} = \mathbf{x} - \mathbf{u} \mathbf{u}^T \mathbf{x} . \end{aligned}$$

在旋转过程中，平行部分不会旋转，

$$\mathbf{x}'_{||} = \mathbf{x}_{||} ,$$

平行部分保持不变，而正交部分则在垂直于 \mathbf{u} 的平面内经历平面旋转。也就是说，如果我们在这个平面内创建一个正交基 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ，并且

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{x}_{\perp} \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{u} \times \mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{u} \times \mathbf{x} , \end{aligned}$$

满足 $\|\mathbf{e}_1\| = \|\mathbf{e}_2\|$ ，则 $\mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{e}_1 \cdot 1 + \mathbf{e}_2 \cdot 0$ 。在这个平面上进行 ϕ 弧度的旋转会产生：

$$\mathbf{x}'_{\perp} = \mathbf{e}_1 \cos \phi + \mathbf{e}_2 \sin \phi ,$$

该公式展开为，

$$\mathbf{x}'_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp} \cos \phi + (\mathbf{u} \times \mathbf{x}) \sin \phi .$$

加上平行部分后，我们得到旋转后的向量表达式， $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'_{||} + \mathbf{x}'_{\perp}$ ，这就是著名的向量旋转公式，

$$\boxed{\mathbf{x}' = \mathbf{x}_{||} + \mathbf{x}_{\perp} \cos \phi + (\mathbf{u} \times \mathbf{x}) \sin \phi} . \quad (54)$$

2.2 旋转群 $SO(3)$

在 \mathbb{R}^3 中，旋转群 $SO(3)$ 是围绕原点的旋转操作的集合。旋转是保持向量长度和相对向量方向 (即，手性) 的线性变换。它在机器人学中的重要性在于，它表示三维空间中刚体的旋转：刚性运动正是要求在运动过程中，刚体内的距离、角度和相对方向得以保持。否则，如果范数、角度或相对方向不被保持，那么这个物体就不能被视为刚体。我们通过满足这些性质的算子来定义旋转。一个旋转算子 $r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; \mathbf{v} \mapsto r(\mathbf{v})$ ，作用在向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ 上，可以通过欧几里得空间的度量 (包括点积和叉积) 来定义，如下所示。

- 旋转保持向量的范数不变，

$$\|r(\mathbf{v})\| = \sqrt{\langle r(\mathbf{v}), r(\mathbf{v}) \rangle} = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \triangleq \|\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3. \quad (55a)$$

- 旋转保持向量之间的角度不变，

$$\langle r(\mathbf{v}), r(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos \alpha, \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3. \quad (55b)$$

- 旋转保持向量之间的相对方向不变，

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w} \iff r(\mathbf{u}) \times r(\mathbf{v}) = r(\mathbf{w}). \quad (56)$$

容易证明，前两个条件是等价的。因此，我们可以将旋转群 $SO(3)$ 定义为：

$$SO(3) : \{r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3, \|r(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|, r(\mathbf{v}) \times r(\mathbf{w}) = r(\mathbf{v} \times \mathbf{w})\}. \quad (57)$$

旋转群通常通过旋转矩阵来表示。然而，四元数也是旋转群的一个良好表示。本章的目的是展示这两种表示方法是同样有效的。正如读者将在表格 Table 1 中看到的那样，这两种表示在概念上和代数上都存在很多相似之处。也许，最重要的区别在于单位四元数群构成了 $SO(3)$ 的双重覆盖 (因此严格来说，它不是 $SO(3)$ 本身)，但在我们的大多数应用中这一点并不关键。⁵ 表格被提前插入，方便快速对比和评估。接下来的章节将探讨旋转矩阵和四元数在 $SO(3)$ 中的表示。

2.3 旋转群和旋转矩阵

运算符 $r()$ 是线性的，因为它通过标量积和向量积定义的，而这两者都是线性的。因此，它可以通过一个矩阵 $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 来表示，该矩阵通过矩阵乘法对向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ 进行旋转，

$$r(\mathbf{v}) = \mathbf{R} \mathbf{v}. \quad (58)$$

将其代入公式 (55a)，使用点积 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^\top \mathbf{b}$ 并展开，我们可以得到对于任意的 \mathbf{v} ，

$$(\mathbf{R} \mathbf{v})^\top (\mathbf{R} \mathbf{v}) = \mathbf{v}^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R} \mathbf{v} = \mathbf{v}^\top \mathbf{v}, \quad (59)$$

⁵ 当在旋转空间中进行插值时，双重覆盖的影响需要考虑。然而，正如我们在 Section 2.7 中将看到的那样，这一点很容易处理。

Table 1: 旋转矩阵和四元数用于表示旋转群 $SO(3)$.

	旋转矩阵, \mathbf{R}	四元数, \mathbf{q}
参数	$3 \times 3 = 9$	$1 + 3 = 4$
自由度	3	3
约束数量	$9 - 3 = 6$	$4 - 3 = 1$
约束	$\mathbf{R}\mathbf{R}^\top = \mathbf{I} \ ; \ \det(\mathbf{R}) = +1$	$\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^* = 1$
ODE	$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}[\boldsymbol{\omega}]_\times$	$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\omega}$
指数映射	$\mathbf{R} = \exp([\mathbf{u}\phi]_\times)$	$\mathbf{q} = \exp(\mathbf{u}\phi/2)$
对数映射	$\log(\mathbf{R}) = [\mathbf{u}\phi]_\times$	$\log(\mathbf{q}) = \mathbf{u}\phi/2$
和 $SO(3)$ 的关系	单重覆盖	双重覆盖
单位元素	\mathbf{I}	1
逆元	\mathbf{R}^\top	\mathbf{q}^*
组合	$\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2$	$\mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_2$
旋转算子	$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin \phi [\mathbf{u}]_\times + (1 - \cos \phi) [\mathbf{u}]_\times^2$	$\mathbf{q} = \cos \phi/2 + \mathbf{u} \sin \phi/2$
旋转操作	$\mathbf{R} \mathbf{x}$	$\mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^*$
插值	$\mathbf{R}^t = \mathbf{I} + \sin t\phi [\mathbf{u}]_\times + (1 - \cos t\phi) [\mathbf{u}]_\times^2$ $\mathbf{R}_1(\mathbf{R}_1^\top \mathbf{R}_2)^t$	$\mathbf{q}^t = \cos t\phi/2 + \mathbf{u} \sin t\phi/2$ $\mathbf{q}_1 \otimes (\mathbf{q}_1^* \otimes \mathbf{q}_2)^t$ $\mathbf{q}_1 \frac{\sin((1-t)\Delta\theta)}{\sin(\Delta\theta)} + \mathbf{q}_2 \frac{\sin(t\Delta\theta)}{\sin(\Delta\theta)}$
变换关系	$\mathbf{R}\{\mathbf{q}\} = (q_w^2 - \mathbf{q}_v^\top \mathbf{q}_v) \mathbf{I} + 2 \mathbf{q}_v \mathbf{q}_v^\top + 2 q_w [\mathbf{q}_v]_\times$ $\mathbf{R}\{-\mathbf{q}\} = \mathbf{R}\{\mathbf{q}\}$ $\mathbf{R}\{1\} = \mathbf{I}$ $\mathbf{R}\{\mathbf{q}^*\} = \mathbf{R}\{\mathbf{q}\}^\top$ $\mathbf{R}\{\mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_2\} = \mathbf{R}\{\mathbf{q}_1\} \mathbf{R}\{\mathbf{q}_2\}$ $\mathbf{R}\{\mathbf{q}^t\} = \mathbf{R}\{\mathbf{q}\}^t$	double cover identity inverse composition interpolation

这得到了 \mathbf{R} 的正交性条件,

$$\boxed{\mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \mathbf{I} = \mathbf{R} \mathbf{R}^\top} . \quad (60)$$

上述条件实际上是正交性条件, 因为我们可以从中观察到, 通过写为 $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3]$ 并代入上述式子, 矩阵 \mathbf{R} 的列向量 \mathbf{r}_i (其中 $i \in \{1, 2, 3\}$) 是单位长度且彼此正交的。

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i \rangle &= \mathbf{r}_i^\top \mathbf{r}_i = 1 \\ \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j \rangle &= \mathbf{r}_i^\top \mathbf{r}_j = 0, \quad \text{if } i \neq j. \end{aligned}$$

因此, 保持向量范数和角度的变换集合被称为 **正交群** (*Orthogonal group*), 记作 $O(3)$ 。正交群包括旋转 (是刚性运动) 和反射 (是非刚性运动)。这里的 **群** 的概念基本上 (且非正式地) 意味着两个正交矩阵的乘积始终是一个正交矩阵,⁶ 并且, 每个正交矩阵都有逆矩阵。实际上, 正交性条件 (60) 说明逆向旋转是通过转置矩阵来实现的,

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^\top . \quad (61)$$

添加相对方向条件 (56) 保证了刚体运动 (因此排除了反射), 并对 \mathbf{R} 增加了一个额外的约束,⁷

$$\boxed{\det(\mathbf{R}) = 1} . \quad (62)$$

具有正单位行列式的正交矩阵通常称为**正或特殊矩阵**。这样的特殊正交矩阵 (*Special Orthogonal Matrices*) 的集合是 $O(3)$ 的一个子群, 称为**特殊正交群** (*Special Orthogonal group*) $SO(3)$ 。作为一个群, 两个旋转矩阵的乘积总是一个旋转矩阵。⁸

2.3.1 指数映射

指数映射 (以及我们在下一节看到的对数映射) 是一个强大的数学工具, 能够在旋转的三维空间中高效而严谨地进行操作。它是进入适用于旋转空间的无穷小微积分体系的大门。指数映射使我们能够正确地定义导数、扰动和速度, 并对其进行操作。因此, 它在旋转或定向空间中的估计问题中至关重要。

旋转构成刚性运动。刚性意味着可以在 $SO(3)$ 中定义一条连续的轨迹或路径 $r(t)$, 该路径将刚体从其初始朝向 $r(0)$ 旋转到当前朝向 $r(t)$ 。由于是连续的, 研究这种变换的时间导数是合理的。我们通过推导刚才看到的性质 (60) 和 (62) 来进行这一研究。

首先, 我们注意到, 无法在满足 (60) 的同时连续地摆脱单位行列式条件 (62), 因为这将意味着行列式从 $+1$ 跳变到 -1 。⁹ 因此, 我们只需要研究正交性条件约束 (60) 下的时间导数。其形式为

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{R}^\top \mathbf{R}) = \dot{\mathbf{R}}^\top \mathbf{R} + \mathbf{R}^\top \dot{\mathbf{R}} = 0 , \quad (63)$$

⁶ 设 \mathbf{Q}_1 和 \mathbf{Q}_2 是正交的, 并且构建 $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2$ 。然后 $\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_2^\top \mathbf{Q}_1^\top \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_2^\top \mathbf{I} \mathbf{Q}_2 = \mathbf{I}$ 。

⁷ 值得注意的是, 反射变换满足 $|\mathbf{R}| = \det(\mathbf{R}) = -1$, 由于 $|\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2| = 1 \neq -1$, 并不构成一个群。

⁸ 请参见脚注6以了解 $O(3)$ 的相关内容, 并添加关于 $SO(3)$ 的说明: 令 $|\mathbf{R}_1| = |\mathbf{R}_2| = 1$, 则 $|\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2| = |\mathbf{R}_1| |\mathbf{R}_2| = 1$ 。

⁹ 换句话说: 旋转不能通过连续变换变为反射。

这得到结果为

$$\mathbf{R}^\top \dot{\mathbf{R}} = -(\mathbf{R}^\top \dot{\mathbf{R}})^\top, \quad (64)$$

这意味着矩阵 $\mathbf{R}^\top \dot{\mathbf{R}}$ 是反对称的 (即, 它等于其转置的负数)。反对称的 3×3 矩阵集合记作 $\mathfrak{so}(3)$, 并称为 $SO(3)$ 的李代数。反对称的 3×3 矩阵具有以下形式,

$$[\boldsymbol{\omega}]_\times \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}; \quad (65)$$

它们有 3 个自由度, 并对应于叉积矩阵, 正如我们在 (20) 中已经介绍的那样。这建立了一个一一映射: $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3 \leftrightarrow [\boldsymbol{\omega}]_\times \in \mathfrak{so}(3)$ 。我们令一个向量 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \in \mathbb{R}^3$, 并写作

$$\mathbf{R}^\top \dot{\mathbf{R}} = [\boldsymbol{\omega}]_\times. \quad (66)$$

这得到了常微分方程 (ordinary differential equation, ODE):

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} [\boldsymbol{\omega}]_\times. \quad (67)$$

在原点附近, 我们有 $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, 上述方程简化为 $\dot{\mathbf{R}} = [\boldsymbol{\omega}]_\times$ 。因此, 我们可以将李代数 $\mathfrak{so}(3)$ 解释为轨迹 $r(t)$ 在原点处的导数空间; 它构成了 $SO(3)$ 的切空间, 或称为速度空间。基于这些事实, 我们可以很好地将 $\boldsymbol{\omega}$ 称为瞬时角速度向量。

如果 $\boldsymbol{\omega}$ 是常数, 那么上述的微分方程可以被时间积分为

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(0) e^{[\boldsymbol{\omega}]_\times t} = \mathbf{R}(0) e^{[\boldsymbol{\omega}t]_\times} \quad (68)$$

其中, 指数 $e^{[x]_\times}$ 通过其泰勒级数定义, 具体内容将在下一节中看到。由于 $\mathbf{R}(0)$ 和 $\mathbf{R}(t)$ 是旋转矩阵, 因此显然 $e^{[\boldsymbol{\omega}t]_\times} = \mathbf{R}(0)^\top \mathbf{R}(t)$ 也是一个旋转矩阵。将向量 $\boldsymbol{\phi} \triangleq \boldsymbol{\omega} \Delta t$ 定义为在时间段 Δt 内编码完整旋转的旋转向量, 我们有

$$\boxed{\mathbf{R} = e^{[\boldsymbol{\phi}]_\times}}. \quad (69)$$

这被称为指数映射, 它是从 $\mathfrak{so}(3)$ 到 $SO(3)$ 的一个映射应用,

$$\exp : \mathfrak{so}(3) \rightarrow SO(3); [\boldsymbol{\phi}]_\times \mapsto \exp([\boldsymbol{\phi}]_\times) = e^{[\boldsymbol{\phi}]_\times}. \quad (70)$$

2.3.2 大写的指数映射

上述的指数映射有时会使用一种符号上的滥用, 即将 $\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^3$ 与 $[\boldsymbol{\phi}]_\times \in \mathfrak{so}(3)$ 混为一谈。为避免可能出现的歧义, 我们选择使用显式的大写符号 Exp 来表示这个新的从 $\mathbb{R}^3 \rightarrow SO(3)$ 的映射, 定义为 (见 Fig. 2)

$$\text{Exp} : \mathbb{R}^3 \rightarrow SO(3); \boldsymbol{\phi} \mapsto \text{Exp}(\boldsymbol{\phi}) = e^{[\boldsymbol{\phi}]_\times}. \quad (71)$$

它与指数映射的关系是显然的,

$$\text{Exp}(\boldsymbol{\phi}) \triangleq \exp([\boldsymbol{\phi}]_\times). \quad (72)$$

在接下来的几节中, 我们将看到向量 $\boldsymbol{\phi}$, 称为旋转向量或角-轴向量, 通过 $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\omega} \Delta t = \phi \mathbf{u}$ 来编码旋转的角度 ϕ 和旋转轴 \mathbf{u} 。

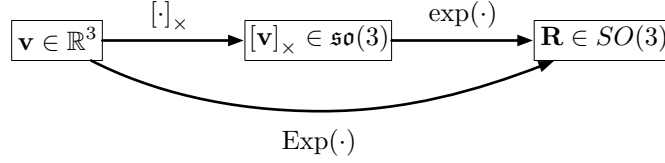


Figure 2: 旋转矩阵的指数映射

2.3.3 旋转矩阵与旋转向量: 罗德里格斯旋转公式

旋转矩阵通过指数映射 (69) 从旋转向量 $\phi = \phi \mathbf{u}$ 定义, 其中叉乘矩阵 $[\phi]_{\times} = \phi [\mathbf{u}]_{\times}$ 如 (20) 中所定义。(69) 的泰勒展开式在 $\phi = \phi \mathbf{u}$ 时为

$$\mathbf{R} = e^{\phi [\mathbf{u}]_{\times}} = \mathbf{I} + \phi [\mathbf{u}]_{\times} + \frac{1}{2} \phi^2 [\mathbf{u}]_{\times}^2 + \frac{1}{3!} \phi^3 [\mathbf{u}]_{\times}^3 + \frac{1}{4!} \phi^4 [\mathbf{u}]_{\times}^4 + \dots \quad (73)$$

当应用于单位向量 \mathbf{u} 时, 矩阵 $[\mathbf{u}]_{\times}$ 满足

$$[\mathbf{u}]_{\times}^2 = \mathbf{u} \mathbf{u}^{\top} - \mathbf{I} \quad (74)$$

$$[\mathbf{u}]_{\times}^3 = -[\mathbf{u}]_{\times}, \quad (75)$$

因此, $[\mathbf{u}]_{\times}$ 的所有幂可以通过 $[\mathbf{u}]_{\times}$ 和 $[\mathbf{u}]_{\times}^2$ 以循环模式表示,

$$[\mathbf{u}]_{\times}^4 = -[\mathbf{u}]_{\times}^2 \quad [\mathbf{u}]_{\times}^5 = [\mathbf{u}]_{\times} \quad [\mathbf{u}]_{\times}^6 = [\mathbf{u}]_{\times}^2 \quad [\mathbf{u}]_{\times}^7 = -[\mathbf{u}]_{\times} \quad \dots \quad (76)$$

然后, 将泰勒级数按 $[\mathbf{u}]_{\times}$ 和 $[\mathbf{u}]_{\times}^2$ 分组, 并分别识别出其中的 $\sin \phi$ 和 $\cos \phi$ 的级数, 最终得到一个封闭形式的公式, 用于从旋转向量得到旋转矩阵, 这就是所谓的 罗德里格斯旋转公式。

$$\boxed{\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin \phi [\mathbf{u}]_{\times} + (1 - \cos \phi) [\mathbf{u}]_{\times}^2}, \quad (77)$$

我们将其表示为 $\mathbf{R}\{\phi\} \triangleq \text{Exp}(\phi)$ 。该公式有一些变体, 例如, 使用 (74),

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} \cos \phi + [\mathbf{u}]_{\times} \sin \phi + \mathbf{u} \mathbf{u}^{\top} (1 - \cos \phi). \quad (78)$$

2.3.4 对数映射

我们将对数映射定义为指数映射的逆运算,

$$\log : SO(3) \rightarrow \mathfrak{so}(3); \quad \mathbf{R} \mapsto \log(\mathbf{R}) = [\mathbf{u} \phi]_{\times}, \quad (79)$$

满足

$$\phi = \arccos \left(\frac{\text{trace}(\mathbf{R}) - 1}{2} \right) \quad (80)$$

$$\mathbf{u} = \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{R}^{\top})^{\vee}}{2 \sin \phi}, \quad (81)$$

其中 \bullet^\vee 是 $[\bullet]_\times$ 的逆操作, 也就是说, $([\mathbf{v}]_\times)^\vee = \mathbf{v}$ 并且 $[\mathbf{V}^\vee]_\times = \mathbf{V}$.

我们还定义了一个大写的对数映射 Log , 它允许我们直接从旋转矩阵恢复旋转向量 $\phi = \mathbf{u}\phi \in \mathbb{R}^3$,

$$\text{Log} : SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^3 ; \mathbf{R} \mapsto \text{Log}(\mathbf{R}) = \mathbf{u}\phi . \quad (82a)$$

它与对数映射的关系是显而易见的,

$$\text{Log}(\mathbf{R}) \triangleq (\log(\mathbf{R}))^\vee . \quad (83)$$

2.3.5 旋转操作

通过单位轴 \mathbf{u} 绕角度 ϕ 旋转一个向量 \mathbf{x} 可以通过线性乘积来实现,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x} , \quad (84)$$

这可以通过展开 (84) 来证明, 使用 (77)、(74) 和 (75),

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{R}\mathbf{x} \\ &= (\mathbf{I} + \sin \phi [\mathbf{u}]_\times + (1 - \cos \phi) [\mathbf{u}]_\times^2) \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x} + \sin \phi [\mathbf{u}]_\times \mathbf{x} + (1 - \cos \phi) [\mathbf{u}]_\times^2 \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x} + \sin \phi (\mathbf{u} \times \mathbf{x}) + (1 - \cos \phi) (\mathbf{u}\mathbf{u}^\top - \mathbf{I}) \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}_\parallel + \mathbf{x}_\perp + \sin \phi (\mathbf{u} \times \mathbf{x}) - (1 - \cos \phi) \mathbf{x}_\perp \\ &= \mathbf{x}_\parallel + (\mathbf{u} \times \mathbf{x}) \sin \phi + \mathbf{x}_\perp \cos \phi , \end{aligned} \quad (85)$$

这正是向量旋转公式 (54)。

2.4 旋转群与四元数

为了教学目的, 我们旨在突出四元数和旋转矩阵作为旋转群 $SO(3)$ 表示之间的联系。为此, 使用众所周知的四元数旋转作用公式, 其表达式为

$$r(\mathbf{v}) = \mathbf{q} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{q}^* , \quad (86)$$

在这里, 这个公式最初被作为一个假设提出。这使我们能够展开完整的四元数部分, 并以类似于我们用于旋转矩阵的论述方式进行推导。这个假设的准确性将在稍后在 Section 2.4.5 中得到证明, 从而验证这一方法。

让我们将上述旋转代入正交性条件 (55a) 中, 并使用 (27) 展开它, 得到

$$\|\mathbf{q} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{q}^*\| = \|\mathbf{q}\|^2 \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\| . \quad (87)$$

这得出 $\|\mathbf{q}\|^2 = 1$, 即四元数的单位范数条件, 表达为,

$$\boxed{\mathbf{q}^* \otimes \mathbf{q} = 1 = \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^*} . \quad (88)$$

这个条件类似于我们在旋转矩阵中遇到的条件，参见 (60)，其表达式为 $\mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \mathbf{I} = \mathbf{R} \mathbf{R}^\top$ 。我们鼓励读者稍作停留，比较它们之间的相似性。

类似地，我们证明了相对方向条件 (56) 通过构造得到了满足（我们使用了 (33) 两次，如下所示），

$$\begin{aligned}
 r(\mathbf{v}) \times r(\mathbf{w}) &= (\mathbf{q} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{q}^*) \times (\mathbf{q} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{q}^*) \\
 (33) \quad &= \frac{1}{2} ((\mathbf{q} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{q}^*) \otimes (\mathbf{q} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{q}^*) - (\mathbf{q} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{q}^*) \otimes (\mathbf{q} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{q}^*)) \\
 &= \frac{1}{2} (\mathbf{q} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{q}^* - \mathbf{q} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{q}^*) \\
 &= \frac{1}{2} (\mathbf{q} \otimes (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} - \mathbf{w} \otimes \mathbf{v}) \otimes \mathbf{q}^*) \\
 (33) \quad &= \mathbf{q} \otimes (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \otimes \mathbf{q}^* \\
 &= r(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) .
 \end{aligned} \tag{89}$$

单位四元数的集合在乘法运算下构成一个群。这个群在拓扑上是一个 3 维球面，即 \mathbb{R}^4 单位球面的三维表面，通常记作 S^3 。

2.4.1 指数映射

让我们考虑一个单位四元数 $\mathbf{q} \in S^3$ ，即 $\mathbf{q}^* \otimes \mathbf{q} = 1$ ，并按照我们处理旋转矩阵的正交性条件 $\mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \mathbf{I}$ 的方式进行推导。对其进行求时间的导数，

$$\frac{d(\mathbf{q}^* \otimes \mathbf{q})}{dt} = \dot{\mathbf{q}}^* \otimes \mathbf{q} + \mathbf{q}^* \otimes \dot{\mathbf{q}} = 0 , \tag{90}$$

可以得到

$$\mathbf{q}^* \otimes \dot{\mathbf{q}} = -(\dot{\mathbf{q}}^* \otimes \mathbf{q}) = -(\mathbf{q}^* \otimes \dot{\mathbf{q}})^* , \tag{91}$$

这意味着 $\mathbf{q}^* \otimes \dot{\mathbf{q}}$ 是一个纯四元数（即，它等于其共轭的负值，因此其实部为零）。因此，我们取一个纯四元数 $\Omega \in \mathbb{H}_p$ 并写作，

$$\mathbf{q}^* \otimes \dot{\mathbf{q}} = \Omega = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega \end{bmatrix} \in \mathbb{H}_p . \tag{92}$$

左乘 \mathbf{q} 得到如下微分方程，

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \otimes \Omega . \tag{93}$$

在原点附近，我们有 $\mathbf{q} = 1$ ，上述方程简化为 $\dot{\mathbf{q}} = \Omega \in \mathbb{H}_p$ 。因此，纯四元数空间 \mathbb{H}_p 构成了单位四元数球面 S^3 的切空间，或者称为李代数。然而，在四元数的情况下，这个空间并不是直接的速度空间，而是半速度空间，正如我们接下来将看到的那样。

如果 Ω 是常数，那么微分方程可以被积分为

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(0) \otimes e^{\Omega t} , \tag{94}$$

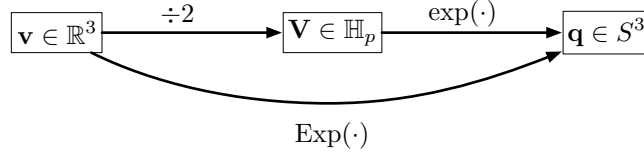


Figure 3: Exponential maps of the quaternion.

其中，由于 $\mathbf{q}(0)$ 和 $\mathbf{q}(t)$ 是单位四元数，指数函数 $e^{\Omega t}$ 也是单位四元数——这一点我们已经从四元数指数公式 (42) 中知道了。定义 $\mathbf{V} \triangleq \Omega \Delta t$ ，我们得到：

$$\boxed{\mathbf{q} = e^{\mathbf{V}}} . \quad (95)$$

这又是一个指数映射：即从纯四元数空间到由单位四元数表示的旋转空间的映射，

$$\exp : \mathbb{H}_p \rightarrow S^3 ; \mathbf{V} \mapsto \exp(\mathbf{V}) = e^{\mathbf{V}} \quad (96)$$

2.4.2 大写的指数映射

正如我们将看到的，指数映射 (96) 中的纯四元数 \mathbf{V} 通过 $\mathbf{V} = \theta \mathbf{u} = \phi \mathbf{u}/2$ 编码了旋转轴 \mathbf{u} 和旋转角度的一半 $\theta = \phi/2$ 。我们将在很快的时间里提供充分的解释，主要在 2.4.5、2.4.6 和 2.8 章节中，详细说明这一半角的事实。目前，仅需指出，由于旋转作用是通过双重乘积 $\mathbf{x}' = \mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^*$ 实现的，向量 \mathbf{x} 经历的旋转是 \mathbf{q} 中编码的旋转的“二倍”，或者等效地，四元数 \mathbf{q} 编码了对 \mathbf{x} 的“半”旋转。

为了表达角轴旋转参数 $\phi = \phi \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ 和四元数之间的直接关系，我们定义了一个大写版本的指数映射，它捕捉了半角效应 (见 Fig. 3)，

$$\text{Exp} : \mathbb{R}^3 \rightarrow S^3 ; \phi \mapsto \text{Exp}(\phi) = e^{\phi/2} \quad (97)$$

它与指数映射的关系是显而易见的，

$$\text{Exp}(\phi) \triangleq \exp(\phi/2) . \quad (98)$$

同时，引入角速度向量 $\omega = 2\Omega \in \mathbb{R}^3$ 也是方便的，这样 (93) 和 (94) 可以变为

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \otimes \omega \quad (99)$$

$$\mathbf{q} = e^{\omega t/2} . \quad (100)$$

2.4.3 四元数和旋转向量

让 $\phi = \phi \mathbf{u}$ 为一个旋转向量，表示绕轴 \mathbf{u} 旋转 ϕ 弧度。然后，指数映射可以通过扩展的欧拉公式来展开 (有关完整的推导，请参见 (37–42))。

$$\boxed{\mathbf{q} \triangleq \text{Exp}(\phi \mathbf{u}) = e^{\phi \mathbf{u}/2} = \cos \frac{\phi}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{\phi}{2} = \begin{bmatrix} \cos(\phi/2) \\ \mathbf{u} \sin(\phi/2) \end{bmatrix}} . \quad (101)$$

我们称这为 旋转向量到四元数的转换公式，并将在本文中表示为 $\mathbf{q} = \mathbf{q}\{\phi\} \triangleq \text{Exp}(\phi)$ 。

2.4.4 指数映射

我们将对数映射定义为指数映射的逆运算，

$$\log : S^3 \rightarrow \mathbb{H}_p ; \mathbf{q} \mapsto \log(\mathbf{q}) = \mathbf{u}\theta , \quad (102)$$

这当然是我们在 Section 1.3.6 中给出的四元数对数的定义。

我们还定义了大写的对数映射，它直接提供了笛卡尔三维空间中的旋转角度 ϕ 和旋转轴 \mathbf{u} ，

$$\text{Log} : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 ; \mathbf{q} \mapsto \text{Log}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}\phi . \quad (103)$$

它与对数映射的关系是显而易见的，

$$\text{Log}(\mathbf{q}) \triangleq 2 \log(\mathbf{q}) . \quad (104)$$

为了实现这一点，我们使用了 $\arctan(y, x)$ 的四象限版本。从 (101) 得到，

$$\phi = 2 \arctan(\|\mathbf{q}_v\|, q_w) \quad (105a)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{q}_v / \|\mathbf{q}_v\| . \quad (105b)$$

对于小角度四元数，(105b) 会发散。我们因此使用了 $\arctan()$ 函数的截断泰勒级数展开，得到，

$$\text{Log}(\mathbf{q}) = \theta \mathbf{u} \approx 2 \frac{\mathbf{q}_v}{q_w} \left(1 - \frac{\|\mathbf{q}_v\|^2}{3q_w^2} \right) . \quad (106)$$

2.4.5 旋转操作

我们终于可以证明我们的假设 (86) 关于使用四元数进行向量旋转，从而验证到目前为止所呈现的所有内容。绕轴 \mathbf{u} 旋转向量 \mathbf{x} 角度为 ϕ 的操作是通过双重四元数乘积实现的，也称为三明治乘积，

$$\mathbf{x}' = \mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^* , \quad (107)$$

其中 $\mathbf{q} = \text{Exp}(\mathbf{u}\phi)$ ，并且向量 \mathbf{x} 已经以四元数的形式表示，即，

$$\mathbf{x} = xi + yj + zk = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \in \mathbb{H}_p . \quad (108)$$

为了证明这个双重乘积确实执行了所需的向量旋转，我们使用 (13)、(101) 和基本的向量及三角恒等式，展开 (107) 如下，

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}' &= \mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^* \\
&= \left(\cos \frac{\phi}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{\phi}{2} \right) \otimes (0 + \mathbf{x}) \otimes \left(\cos \frac{\phi}{2} - \mathbf{u} \sin \frac{\phi}{2} \right) \\
&= \mathbf{x} \cos^2 \frac{\phi}{2} + (\mathbf{u} \otimes \mathbf{x} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{u}) \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{u} \sin^2 \frac{\phi}{2} \\
&= \mathbf{x} \cos^2 \frac{\phi}{2} + 2(\mathbf{u} \times \mathbf{x}) \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} - (\mathbf{x}(\mathbf{u}^\top \mathbf{u}) - 2\mathbf{u}(\mathbf{u}^\top \mathbf{x})) \sin^2 \frac{\phi}{2} \\
&= \mathbf{x}(\cos^2 \frac{\phi}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{x})(2 \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2}) + \mathbf{u}(\mathbf{u}^\top \mathbf{x})(2 \sin^2 \frac{\phi}{2}) \\
&= \mathbf{x} \cos \phi + (\mathbf{u} \times \mathbf{x}) \sin \phi + \mathbf{u}(\mathbf{u}^\top \mathbf{x})(1 - \cos \phi) \\
&= (\mathbf{x} - \mathbf{u} \mathbf{u}^\top \mathbf{x}) \cos \phi + (\mathbf{u} \times \mathbf{x}) \sin \phi + \mathbf{u} \mathbf{u}^\top \mathbf{x} \\
&= \mathbf{x}_\perp \cos \phi + (\mathbf{u} \times \mathbf{x}) \sin \phi + \mathbf{x}_\parallel,
\end{aligned} \tag{109}$$

这正是向量旋转公式 (54)。

2.4.6 $SO(3)$ 流形的双重覆盖

考虑一个单位四元数 \mathbf{q} 。当将其视为一个常规的 4 维向量时， \mathbf{q} 和表示方向原点的单位四元数 $\mathbf{q}_1 = [1, 0, 0, 0]$ 之间的角度 θ 是，

$$\cos \theta = \mathbf{q}_1^\top \mathbf{q} = \mathbf{q}(1) = q_w. \tag{110}$$

同时，四元数 \mathbf{q} 在三维空间中对物体旋转的角度 ϕ 满足

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_w \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi/2 \\ \mathbf{u} \sin \phi/2 \end{bmatrix}. \tag{111}$$

也就是说，我们有 $q_w = \cos \theta = \cos \frac{\phi}{2}$ ，因此四元数向量与 4D 空间中单位四元数之间的角度是四元数在 3D 空间中旋转角度的一半，

$$\theta = \phi/2. \tag{112}$$

我们在 Fig. 4 中展示了这个双重覆盖。当两个四元数向量之间的角度为 $\theta = \pi/2$ 时，三维旋转已经完成了 $\phi = \pi$ 的旋转，即半圈旋转。而当四元数向量完成半圈旋转时，即 $\theta = \pi$ ，三维旋转已经完成了一整圈的旋转。四元数向量的第二次半圈旋转， $\pi < \theta < 2\pi$ ，表示三维旋转的第二次完整旋转， $2\pi < \phi < 4\pi$ ，即旋转流形的第二次覆盖。

2.5 旋转矩阵和四元数

正如我们刚刚所看到的，给定一个旋转向量 $\phi = \mathbf{u} \phi$ ，单位四元数和旋转矩阵的指数映射分别产生旋转算子 $\mathbf{q} = \text{Exp}(\mathbf{u} \phi)$ 和 $\mathbf{R} = \text{Exp}(\mathbf{u} \phi)$ ，它们以相同的角度 ϕ 绕相同的轴 \mathbf{u}

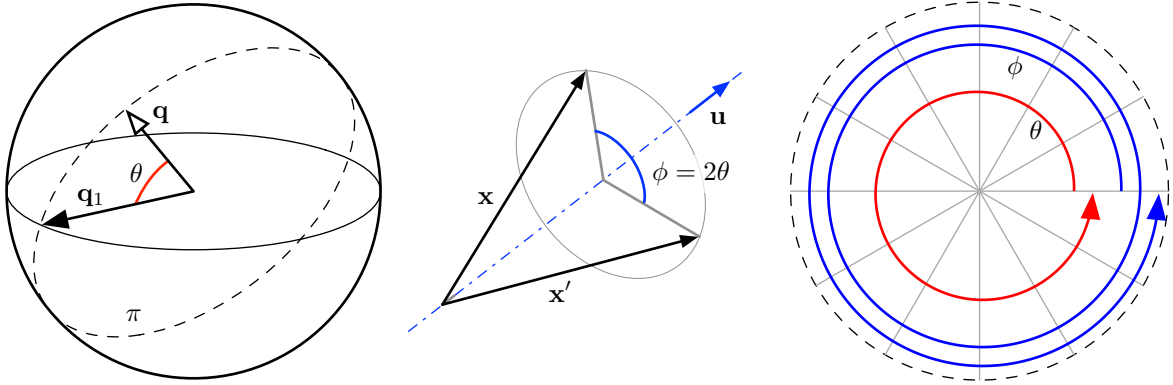


Figure 4: 旋转流形的双重覆盖。左：单位 3-球面上的四元数 \mathbf{q} 与单位四元数 \mathbf{q}_1 定义了角度 θ 。中：由此产生的 3D 旋转 $\mathbf{x}' = \mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^*$ 的角度是原始四元数角度 ϕ 的双倍。右：将 4D 和 3D 旋转平面叠加，观察到四元数 \mathbf{q} 在 3-球面上的一次旋转 (红色) 表示了旋转向量 \mathbf{x} 在 3D 空间中的两次旋转 (蓝色)。

旋转向量 \mathbf{x} 。¹⁰ 那就是说，如果

$$\forall \phi, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{q} = \text{Exp}(\phi), \mathbf{R} = \text{Exp}(\phi) \quad (113)$$

然后有，

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^* = \mathbf{R} \mathbf{x} . \quad (114)$$

由于该恒等式的两边都对 \mathbf{x} 线性展开，因此可以通过展开左边并将右边的项进行比较，从而得到一个与四元数等价的旋转矩阵表达式，这就是四元数到旋转矩阵的转换公式，

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} q_w^2 + q_x^2 - q_y^2 - q_z^2 & 2(q_x q_y - q_w q_z) & 2(q_x q_z + q_w q_y) \\ 2(q_x q_y + q_w q_z) & q_w^2 - q_x^2 + q_y^2 - q_z^2 & 2(q_y q_z - q_w q_x) \\ 2(q_x q_z - q_w q_y) & 2(q_y q_z + q_w q_x) & q_w^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_z^2 \end{bmatrix}, \quad (115)$$

denoted throughout this document by $\mathbf{R} = \mathbf{R}\{\mathbf{q}\}$. 在本文档中，四元数到旋转矩阵的转换公式将表示为 $\mathbf{R} = \mathbf{R}\{\mathbf{q}\}$ 。四元数乘积的矩阵形式 (17-19) 为我们提供了一个替代公式，因为

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^* = [\mathbf{q}^*]_R [\mathbf{q}]_L \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{R} \mathbf{x} \end{bmatrix}, \quad (116)$$

经过一些简单的推导，可以得到

$$\mathbf{R} = (q_w^2 - \mathbf{q}_v^\top \mathbf{q}_v) \mathbf{I} + 2 \mathbf{q}_v \mathbf{q}_v^\top + 2 q_w [\mathbf{q}_v]_\times. \quad (117)$$

¹⁰在指数映射 $\mathbf{R} = \text{Exp}(\phi)$ 和 $\mathbf{q} = \text{Exp}(\phi)$ 之间，显然存在符号上的歧义，但这一问题可以通过上下文来轻松解决：在某些情况下，歧义通过返回值的类型来区分，即 \mathbf{R} 或 \mathbf{q} ；在其他情况下，歧义则通过四元数乘积 \otimes 的有无来区分。

旋转矩阵 \mathbf{R} 相对于四元数具有以下性质,

$$\mathbf{R}\{[1, 0, 0, 0]^\top\} = \mathbf{I} \quad (118)$$

$$\mathbf{R}\{-\mathbf{q}\} = \mathbf{R}\{\mathbf{q}\} \quad (119)$$

$$\mathbf{R}\{\mathbf{q}^*\} = \mathbf{R}\{\mathbf{q}\}^\top \quad (120)$$

$$\mathbf{R}\{\mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_2\} = \mathbf{R}\{\mathbf{q}_1\} \mathbf{R}\{\mathbf{q}_2\}, \quad (121)$$

我们观察到: (118) 单位四元数编码的是零旋转; (119) 一个四元数及其负四元数编码相同的旋转, 定义了 $SO(3)$ 的双重覆盖; (120) 共轭四元数编码的是逆旋转; (121) 四元数乘积按与旋转矩阵相同的顺序合成连续旋转。

此外, 我们还有性质

$$\mathbf{R}\{\mathbf{q}^t\} = \mathbf{R}\{\mathbf{q}\}^t, \quad (122)$$

这与四元数和旋转矩阵在运行标量 t 上的球面插值有关。

2.6 旋转组合

四元数合成与旋转矩阵的合成类似, 即通过适当的四元数乘法和矩阵乘法来进行, 并且顺序相同 (见图 5),

$$\mathbf{q}_{AC} = \mathbf{q}_{AB} \otimes \mathbf{q}_{BC}, \quad \mathbf{R}_{AC} = \mathbf{R}_{AB} \mathbf{R}_{BC}. \quad (123)$$

这可以立即从所涉及的乘法的结合性属性得出,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_A &= \mathbf{q}_{AB} \otimes \mathbf{x}_B \otimes \mathbf{q}_{AB}^* \\ &= \mathbf{q}_{AB} \otimes (\mathbf{q}_{BC} \otimes \mathbf{x}_C \otimes \mathbf{q}_{BC}^*) \otimes \mathbf{q}_{AB}^* \\ &= (\mathbf{q}_{AB} \otimes \mathbf{q}_{BC}) \otimes \mathbf{x}_C \otimes (\mathbf{q}_{BC}^* \otimes \mathbf{q}_{AB}^*) \\ &= (\mathbf{q}_{AB} \otimes \mathbf{q}_{BC}) \otimes \mathbf{x}_C \otimes (\mathbf{q}_{AB} \otimes \mathbf{q}_{BC})^* \\ &= \mathbf{q}_{AC} \otimes \mathbf{x}_C \otimes \mathbf{q}_{AC}^*, \\ \mathbf{x}_A &= \mathbf{R}_{AB} \mathbf{x}_B \\ &= \mathbf{R}_{AB} (\mathbf{R}_{BC} \mathbf{x}_C) \\ &= (\mathbf{R}_{AB} \mathbf{R}_{BC}) \mathbf{x}_C \\ &= \mathbf{R}_{AC} \mathbf{x}_C. \end{aligned}$$

一些注释 一个适当的符号有助于确定合成中因子的正确顺序, 特别是对于多个旋转的合成 (见图 5)。例如, 设 \mathbf{q}_{ji} (或 \mathbf{R}_{ji}) 表示从情况 i 到情况 j 的旋转, 即 $\mathbf{x}_j = \mathbf{q}_{ji} \otimes \mathbf{x}_i \otimes \mathbf{q}_{ji}^*$ (或 $\mathbf{x}_j = \mathbf{R}_{ji} \mathbf{x}_i$)。然后, 给定由四元数 $\mathbf{q}_{OA}, \mathbf{q}_{AB}, \mathbf{q}_{BC}, \mathbf{q}_{OX}, \mathbf{q}_{XZ}$ 表示的一些旋转, 我们只需链接索引即可得到:

$$\mathbf{q}_{OC} = \mathbf{q}_{OA} \otimes \mathbf{q}_{AB} \otimes \mathbf{q}_{BC} \quad \mathbf{R}_{OC} = \mathbf{R}_{OA} \mathbf{R}_{AB} \mathbf{R}_{BC},$$

以及知道相反的旋转对应于共轭, $\mathbf{q}_{ji} = \mathbf{q}_{ij}^*$, 或者对应于转置, $\mathbf{R}_{ji} = \mathbf{R}_{ij}^\top$, 我们还有

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{ZA} &= \mathbf{q}_{XZ}^* \otimes \mathbf{q}_{OX}^* \otimes \mathbf{q}_{OA} \\ &= \mathbf{q}_{ZX} \otimes \mathbf{q}_{XO} \otimes \mathbf{q}_{OA} \\ \mathbf{R}_{ZA} &= \mathbf{R}_{XZ}^\top \mathbf{R}_{OX}^\top \mathbf{R}_{OA} \\ &= \mathbf{R}_{ZX} \mathbf{R}_{XO} \mathbf{R}_{OA}. \end{aligned}$$

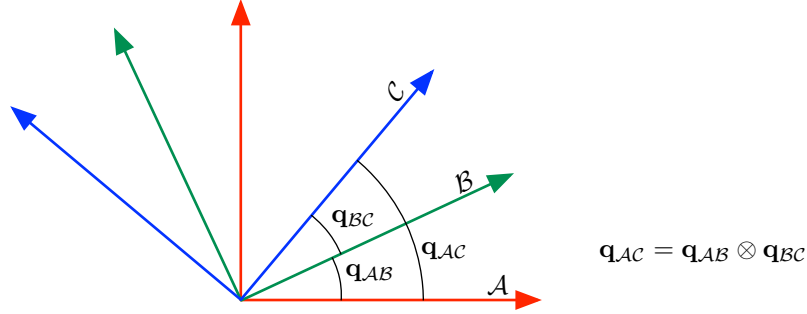


Figure 5: 旋转组合。在 \mathbb{R}^2 中，我们只需执行 $\theta_{AC} = \theta_{AB} + \theta_{BC}$ ，其中操作“和”是可交换的。在 \mathbb{R}^3 中，组合满足 $\mathbf{q}_{AC} = \mathbf{q}_{AB} \otimes \mathbf{q}_{BC}$ ，矩阵形式中， $\mathbf{R}_{AC} = \mathbf{R}_{AB} \mathbf{R}_{BC}$ 。这些运算符是不可交换的，必须严格遵守顺序——适当的符号有助于：‘AB’与‘BC’链接以创建‘AC’。

2.7 球面线性插值 (SLERP)

四元数非常适合计算正确的方向插值。给定由四元数 \mathbf{q}_0 和 \mathbf{q}_1 表示的两个方向，我们希望找到一个四元数函数 $\mathbf{q}(t)$ ， $t \in [0, 1]$ ，它在 $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$ 到 $\mathbf{q}(1) = \mathbf{q}_1$ 之间进行线性插值。这种插值是这样的，即当 t 从 0 到 1 时，物体将沿着固定轴以恒定速度从方向 \mathbf{q}_0 连续旋转到方向 \mathbf{q}_1 。

方法 1 第一种方法使用四元数代数，并遵循 \mathbb{R}^3 中的几何推理，这应该很容易与迄今为止的材料联系起来。首先，计算从 \mathbf{q}_0 到 \mathbf{q}_1 的方向增量 $\Delta\mathbf{q}$ ，使得 $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_0 \otimes \Delta\mathbf{q}$ ，

$$\Delta\mathbf{q} = \mathbf{q}_0^* \otimes \mathbf{q}_1 . \quad (124)$$

然后得到相关的旋转向量， $\Delta\phi = \mathbf{u}\Delta\phi$ ，然后使用对数映射取涉及的旋转的线性分数，¹¹

$$\mathbf{u}\Delta\phi = \text{Log}(\Delta\mathbf{q}) . \quad (125)$$

最后，保留旋转轴 \mathbf{u} 并取旋转角度的线性分数， $\delta\phi = t\Delta\phi$ 。通过指数映射将其转换为四元数形式， $\delta\mathbf{q} = \text{Exp}(\mathbf{u}\delta\phi)$ ，并将其与原始四元数组合以获得插值结果，

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 \otimes \text{Exp}(t\mathbf{u}\Delta\phi) . \quad (126)$$

整个过程可以写为 $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 \otimes \text{Exp}(t\text{Log}(\mathbf{q}_0^* \otimes \mathbf{q}_1))$ ，它简化为

$$\boxed{\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 \otimes (\mathbf{q}_0^* \otimes \mathbf{q}_1)^t} , \quad (127)$$

通常实现为 (见 (53))，

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 \otimes \begin{bmatrix} \cos(t\Delta\phi/2) \\ \mathbf{u}\sin(t\Delta\phi/2) \end{bmatrix} . \quad (128)$$

¹¹我们可以在这里使用 $\log()$ 和 $\exp()$ ，或者它们的大写形式 $\text{Log}()$ 和 $\text{Exp}()$ 。最终角度中涉及的因子 2 最终是无关紧要的，因为它在最终公式中被抵消了。

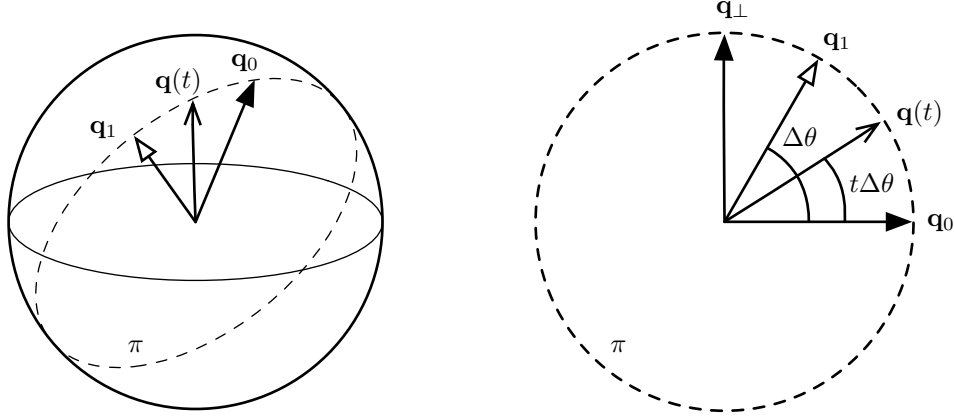


Figure 6: 四元数在 \mathbb{R}^4 的单位球面上的插值，以及 \mathbb{R}^4 的旋转平面 π 的正面视图。

注意： 可以使用类似的方法来定义旋转矩阵的 Slerp，得到

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 \text{Exp}(t \text{Log}(\mathbf{R}_0^\top \mathbf{R}_1)) = \mathbf{R}_0 (\mathbf{R}_0^\top \mathbf{R}_1)^t, \quad (129)$$

其中矩阵指数 \mathbf{R}^t 可以使用 Rodrigues 公式 (77) 实现，得到

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 (\mathbf{I} + \sin(t\Delta\phi) [\mathbf{u}]_\times + (1 - \cos(t\Delta\phi)) [\mathbf{u}]_\times^2). \quad (130)$$

方法 2 可以开发与四元数代数无关的 Slerp 的其他方法，甚至与弧所嵌入的空间的维度无关。特别是，见图 6，我们可以将四元数 \mathbf{q}_0 和 \mathbf{q}_1 视为单位球面上的两个单位向量，并在同一空间中进行插值。插值的 $\mathbf{q}(t)$ 是单位向量，以恒定的角速度沿着连接 \mathbf{q}_0 和 \mathbf{q}_1 的最短球面路径运动。这条路径是由单位球面与由 \mathbf{q}_0 、 \mathbf{q}_1 和原点定义的平面相交而产生的平面弧 (图中的虚线圆)。有关这些方法等价于上述方法的证明，请参见 [Dam et al. \(1998\)](#)。

这些方法中的第一个使用向量代数，并严格遵循上述思想。将 \mathbf{q}_0 和 \mathbf{q}_1 视为两个单位向量；在他们之间的角度¹² 是由标量积得到的，

$$\cos(\Delta\theta) = \mathbf{q}_0^\top \mathbf{q}_1 \quad \Delta\theta = \arccos(\mathbf{q}_0^\top \mathbf{q}_1). \quad (131)$$

我们按照以下步骤进行。我们确定旋转平面，这里称为 π ，并构建其正交规范基 $\{\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_\perp\}$ ，其中 \mathbf{q}_\perp 是通过将 \mathbf{q}_1 正交化到 \mathbf{q}_0 得到的，

$$\mathbf{q}_\perp = \frac{\mathbf{q}_1 - (\mathbf{q}_0^\top \mathbf{q}_1) \mathbf{q}_0}{\|\mathbf{q}_1 - (\mathbf{q}_0^\top \mathbf{q}_1) \mathbf{q}_0\|}, \quad (132)$$

使得 (见图 6 – 右)

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_0 \cos \Delta\theta + \mathbf{q}_\perp \sin \Delta\theta. \quad (133)$$

¹²角度 $\Delta\theta = \arccos(\mathbf{q}_0^\top \mathbf{q}_1)$ 是欧几里得 4 空间中两个四元数向量之间的角度，而不是 3D 空间中的实际旋转角度，根据 (125)，实际旋转角度是 $\Delta\phi = \|\text{Log}(\mathbf{q}_0^* \otimes \mathbf{q}_1)\|$ 。有关更多详细信息，请参见 Section 2.4.6。

然后，我们只需要在平面 π 上旋转 \mathbf{q}_0 的一部分角度 $t\Delta\theta$ ，从而得到球面插值，

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 \cos(t\Delta\theta) + \mathbf{q}_\perp \sin(t\Delta\theta) . \quad (134)$$

方法 3 Glenn Davis 在 Shoemake (1985) 中提出的一种类似方法利用了这样一个事实，即连接 \mathbf{q}_0 和 \mathbf{q}_1 的大圆弧上的任意点必须是其两端的线性组合（因为这三个向量共面）。使用 (131) 计算了角度 $\Delta\theta$ 之后，我们可以从 (133) 中分离出 \mathbf{q}_\perp ，并将其注入 (134)。应用恒等式 $\sin(\Delta\theta - t\Delta\theta) = \sin \Delta\theta \cos t\Delta\theta - \cos \Delta\theta \sin t\Delta\theta$ ，我们得到 Davis' 公式（见 Eberly (2010) 中的另一种推导），

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 \frac{\sin((1-t)\Delta\theta)}{\sin(\Delta\theta)} + \mathbf{q}_1 \frac{\sin(t\Delta\theta)}{\sin(\Delta\theta)} . \quad (135)$$

这个公式的好处是对称的：定义反插值器 $s = 1 - t$ 得到

$$\mathbf{q}(s) = \mathbf{q}_1 \frac{\sin((1-s)\Delta\theta)}{\sin(\Delta\theta)} + \mathbf{q}_0 \frac{\sin(s\Delta\theta)}{\sin(\Delta\theta)} .$$

这与 \mathbf{q}_0 和 \mathbf{q}_1 的交换的公式完全相同。

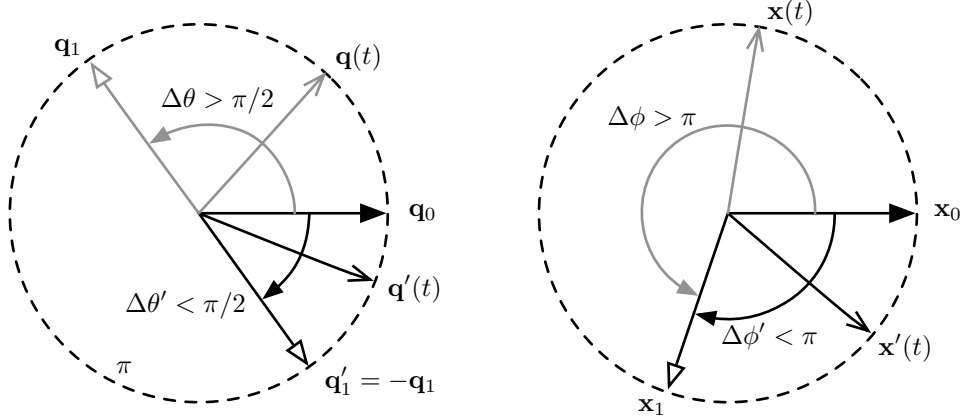


Figure 7: 确保在由 \mathbf{q}_0 和 \mathbf{q}_1 表示的方向之间沿最短路径进行 Slerp。左：4D 空间中的四元数旋转平面，显示初始和最终方向四元数，以及两种可能的插值， $\mathbf{q}(t)$ 从 \mathbf{q}_0 到 \mathbf{q}_1 ， $\mathbf{q}'(t)$ 从 \mathbf{q}_0 到 $-\mathbf{q}_1$ 。右：3D 空间中的向量旋转平面：由于 $\mathbf{q}_1 = -\mathbf{q}_1$ ，我们有 $\mathbf{x}_1 = \mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{x}_0 \otimes \mathbf{q}_1^* = \mathbf{q}'_1 \otimes \mathbf{x}_0 \otimes \mathbf{q}'_1^*$ ，也就是说，两个四元数产生相同的旋转。然而，插值四元数 $\mathbf{q}(t)$ 产生向量 $\mathbf{x}(t)$ ，它从 \mathbf{x}_0 到 \mathbf{x}_1 走了很长的路径，而修正后的 $\mathbf{q}'_1 = -\mathbf{q}_1$ 产生 $\mathbf{q}'(t)$ ，产生了沿着从 \mathbf{x}_0 到 \mathbf{x}_1 的最短路径的向量 $\mathbf{x}'(t)$ 。

所有这些基于四元数的 SLERP 方法都需要一些注意，以确保沿着最短路径进行正确的插值，即旋转角度 $\phi \leq \pi$ 。由于四元数对 $SO(3)$ 的双覆盖（见 Section 2.4.6），只有锐角 $\Delta\theta \leq \pi/2$ 之间的四元数插值才是沿着最短路径进行的（图 7）。测试这种情况并解决它很简单：如果 $\cos(\Delta\theta) = \mathbf{q}_0^\top \mathbf{q}_1 < 0$ ，那么用 $-\mathbf{q}_1$ 替换 *e.g.* \mathbf{q}_1 并重新开始。

2.8 四元数与等斜旋转：解释其中的奥秘

本节提供了关于四元数的两个引人入胜的问题的几何学见解，我们称之为“魔法”：

- 它是如何通过乘积 $\mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^*$ 来旋转向量 \mathbf{x} 的？
- 我们为什么需要在通过 $\mathbf{q} = e^{\phi/2} = [\cos(\phi/2), \mathbf{u} \sin(\phi/2)]$ 构造四元数时考虑半角？

我们希望得到一个几何解释，即一些超越代数证明公式 (109) 和 Section 2.4.6 中的双覆盖事实的理由。

首先，让我们在这里重现方程 (116)，通过四元数乘积矩阵 $[\mathbf{q}]_L$ 和 $[\mathbf{q}^*]_R$ 表达四元数旋转作用，定义在 (19) 中，

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^* = [\mathbf{q}^*]_R [\mathbf{q}]_L \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{R} \mathbf{x} \end{bmatrix} .$$

对于单位四元数 \mathbf{q} ，四元数乘积矩阵 $[\mathbf{q}]_L$ 和 $[\mathbf{q}^*]_R$ 满足两个显著的性质，

$$[\mathbf{q}] [\mathbf{q}]^\top = \mathbf{I}_4 \quad (136)$$

$$\det([\mathbf{q}]) = +1 , \quad (137)$$

因此是 $SO(4)$ 的元素，即 \mathbb{R}^4 空间中的正确旋转矩阵。更具体地说，它们代表一种特殊类型的旋转，称为 *isoclinic rotation* 等斜旋转，我们将在下文中解释。因此，根据 (116)，四元数旋转对应于 \mathbb{R}^4 中的两个链接的等斜旋转。

为了解释四元数旋转的见解，我们需要了解 \mathbb{R}^4 中的等斜旋转。为此，我们首先需要了解 \mathbb{R}^4 中的一般旋转。为了理解 \mathbb{R}^4 中的旋转，我们需要回到 \mathbb{R}^3 ，其旋转实际上是平面旋转。让我们一步一步地走完这些步骤。

\mathbb{R}^3 中的旋转： 在 \mathbb{R}^3 中，让我们考虑绕由向量 \mathbf{u} 表示的任意轴旋转的向量 \mathbf{x} 的旋转—见图 8，并回顾图 1。旋转时，与旋转轴 \mathbf{u} 平行的向量不动，与轴垂直的向量在与轴垂直的平面 π 中旋转。对于一般向量 \mathbf{x} ，向量在平面中的两个分量在该平面中旋转，而轴向分量保持静止。

\mathbb{R}^4 中的旋转： 在 \mathbb{R}^4 中，见图 9，由于额外的维度， \mathbb{R}^3 中的一维旋转轴变成了一个新的二维平面。这第二个平面提供了第二个旋转的空间。实际上， \mathbb{R}^4 中的旋转包括 4 空间的两个正交平面中的两个独立旋转。这意味着每个平面的每个 4-向量在自己的平面中旋转，并且相对于一个平面的一般 4-向量的旋转不会影响另一个平面中的向量分量。因此，这些平面因此被称为“不变”。

\mathbb{R}^4 中的等斜旋转： 等斜旋转（源自希腊语，*iso*：“相等”，*klinein*：“倾斜”）是 \mathbb{R}^4 中的旋转，其中两个不变平面中的旋转角度具有相同的大小。当两个角度也具有相同的符号时，¹³ 我们称之为左等斜旋转。

当它们具有相反的符号时，我们称之为右等斜旋转。等斜旋转的一个显著特性，我们已经在 (22) 中看到，即左等斜旋转和右等斜旋转是可交换的，

$$[\mathbf{p}]_R [\mathbf{q}]_L = [\mathbf{q}]_L [\mathbf{p}]_R . \quad (138)$$

¹³给定两个不变平面，我们任意选择它们的方向，以便我们可以在其中关联正负旋转角度。

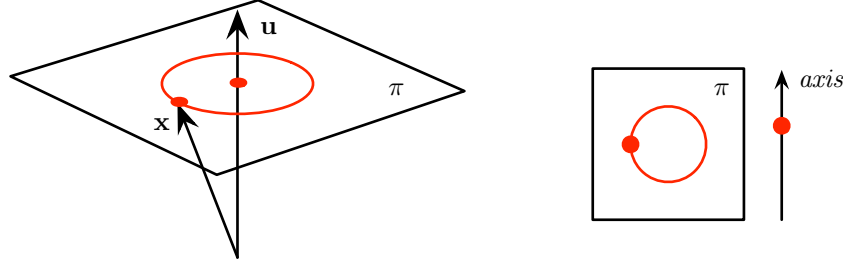


Figure 8: \mathbb{R}^3 中的旋转。绕轴 \mathbf{u} 旋转的向量 \mathbf{x} 在与轴垂直的平面中描述一个圆周。与轴平行的 \mathbf{x} 分量不动，并由轴上的小红点表示。右侧的草图说明了平面和轴子空间上旋转点的截然不同的行为。

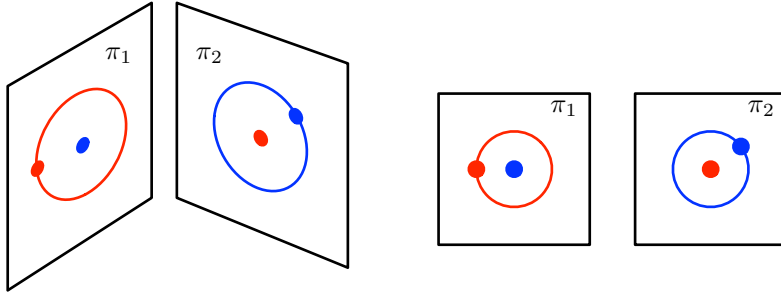


Figure 9: \mathbb{R}^4 中的旋转。两个正交旋转在两个正交平面 π_1 和 π_2 上是可能的。在平面 π_1 中向量 \mathbf{x} (未绘制) 的旋转导致与该平面平行的向量的两个分量 (平面上的红点) 描述一个圆周 (红色圆)，而将另外两个分量保持不变 (红点)。相反，在平面 π_2 中的旋转 (平面 π_2 上的蓝色圆上的蓝点) 保持平面 π_1 中的分量不变 (蓝点)。右侧的草图更好地说明了这种情况，因为在 \mathbb{R}^4 中绘制不可表示的透视图可能会产生误导。

\mathbb{R}^4 和 \mathbb{R}^3 中的四元数旋转： 给定一个单位四元数 $\mathbf{q} = e^{\mathbf{u}\theta/2}$ ，表示绕轴 \mathbf{u} 旋转角度 θ 的 \mathbb{R}^3 中的旋转，矩阵 $[\mathbf{q}]_L$ 是一个左等斜旋转，在 \mathbb{R}^4 中对应于四元数 \mathbf{q} 的左乘，而 $[\mathbf{q}^*]_R$ 是一个右等斜旋转，对应于四元数 \mathbf{q}^* 的右乘。这些等斜旋转的角度恰好是 $\theta/2$ 的大小，¹⁴ 并且不变平面是相同的。然后，旋转表达式 (116) 在此再次重现，

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{x}' \end{bmatrix} = \mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^* = [\mathbf{q}^*]_R [\mathbf{q}]_L \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{x} \end{bmatrix},$$

表示对 4-向量 $(0, \mathbf{x})^\top$ 进行的两个链式等斜旋转，一个是左旋转，一个是右旋转，每个旋转角度为所需旋转角度的一半，在 \mathbb{R}^3 中。在 \mathbb{R}^4 的一个不变平面中 (见 Fig. 10)，两个半角相互抵消，因为它们的符号相反。在另一个平面中，它们相加以得到总的旋转角度 θ 。如果我们从 (116) 定义结果旋转矩阵 \mathbf{R}_4 ，可以很容易地意识到 (另见 (138))，

$$\mathbf{R}_4 \triangleq [\mathbf{q}^*]_R [\mathbf{q}]_L = [\mathbf{q}]_L [\mathbf{q}^*]_R = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix}, \quad (139)$$

¹⁴可以通过提取等斜旋转矩阵的特征值来验证这一点：它们是由共轭复数对构成，且相位为 $\pm\theta/2$ 。

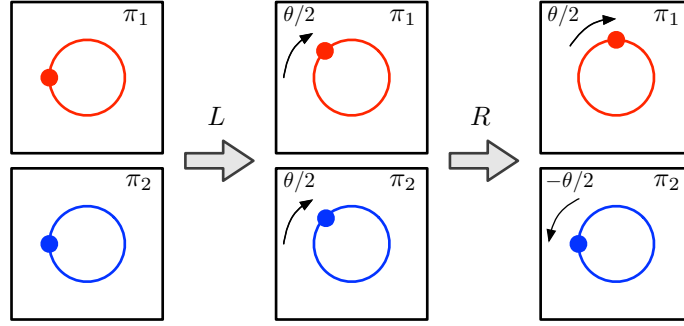


Figure 10: 四元数旋转在 \mathbb{R}^4 中。两个链式等斜旋转，一个是左旋转（具有相等的半角），一个是右旋转（具有相反的半角），仅在一个不变平面中产生完整角度的纯旋转。

其中， \mathbf{R} 是 \mathbb{R}^3 中的旋转矩阵，它显然旋转 \mathbb{R}^4 中 \mathbb{R}^3 子空间中的向量，同时保持第四维不变。

这一讨论超出了本文件的范围。这也是不完整的，因为除了 (139) 中的结果外，它没有提供直觉或几何解释，说明为什么我们需要做 $\mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^*$ 而不是例如 $\mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}$ 。¹⁵ 我们在此包括它，作为提供另一种解释四元数旋转的方式，希望读者能更好地理解其机制。有兴趣的读者建议查阅关于 \mathbb{R}^4 中等斜旋转的相关文献。

3 四元数约定，我们的选择

3.1 四元数的不同形式

有几种方法可以确定四元数。它们基本上与四个二元选择相关：

- 元素的顺序——实部在前还是在后：

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_w \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} \quad vs. \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_v \\ q_w \end{bmatrix} . \quad (140)$$

- 乘法公式——四元数代数的定义：

$$ij = -ji = k \quad vs. \quad ji = -ij = k , \quad (141a)$$

分别对应于不同的手性：

$$\text{右手} \quad vs. \quad \text{左手} . \quad (141b)$$

这意味着，给定一个旋转轴 \mathbf{u} ，四元数 $\mathbf{q}_{right}\{\mathbf{u}\theta\}$ 通过右手法则将向量绕 \mathbf{u} 旋转角度 θ ，而另一个四元数 $\mathbf{q}_{left}\{\mathbf{u}\theta\}$ 则使用左手法则。

¹⁵可以简单地说，如果 \mathbf{q} 是单位四元数，则 $\mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^*$ 适用于旋转。实际上，如果 \mathbf{q}_v 是单位纯四元数，则乘积 $\mathbf{q}_v \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}_v$ 会在 \mathbb{R}^3 中产生反射（而不是旋转！）。最后，乘积 $\mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}$ ，其中 \mathbf{q} 是单位非纯四元数，表现出没有显著的性质。

Table 2: 哈密顿 vs. JPL 四元数约定 with respect to 四个二元选择

四元数类型	Hamilton	JPL
1 组成顺序	(q_w, \mathbf{q}_v)	(\mathbf{q}_v, q_w)
2 代数 手性	$ij = k$ 右手	$ij = -k$ 左手
3 功能	被动的	被动的
4 从右到左乘积意味着 默认的记号, \mathbf{q} 默认的运算	局部到全局 $\mathbf{q} \triangleq \mathbf{q}_{\mathcal{L}\mathcal{C}}$ $\mathbf{x}_{\mathcal{G}} = \mathbf{q} \otimes \mathbf{x}_{\mathcal{L}} \otimes \mathbf{q}^*$	全局到局部 $\mathbf{q} \triangleq \mathbf{q}_{\mathcal{L}\mathcal{G}}$ $\mathbf{x}_{\mathcal{L}} = \mathbf{q} \otimes \mathbf{x}_{\mathcal{G}} \otimes \mathbf{q}^*$

- 旋转算符的功能——旋转坐标系还是旋转向量：

$$\text{被动的} \quad vs. \quad \text{主动的} \quad (142)$$

- 在被动情况下，操作的方向——从局部到全局还是从全局到局部：

$$\mathbf{x}_{global} = \mathbf{q} \otimes \mathbf{x}_{local} \otimes \mathbf{q}^* \quad vs. \quad \mathbf{x}_{local} = \mathbf{q} \otimes \mathbf{x}_{global} \otimes \mathbf{q}^* \quad (143)$$

这些不同的选择导致了 12 种不同的组合。历史发展使得某些约定比其他约定更为流行 (Chou, 1992; Yazell, 2009)。

今天，在现有的文献中，我们可以找到许多不同形式的四元数，如：哈密顿形式，STS¹⁶，JPL¹⁷，ISS¹⁸，ESA¹⁹，工程形式，机器人学形式，以及可能还有更多的命名方式。这些形式中的许多可能是相同的，其他则可能不同，但这一事实很少被明确指出，许多研究工作往往在四个选择方面没有充分描述它们所使用的四元数。

这些差异以非显而易见的方式影响旋转、合成等相关公式。因此，这些公式并不兼容，我们需要从一开始就做出明确的选择。

两种最常用的约定，也是文献中记录最为详细的约定，是哈密顿形式（(140–143) 中左侧的选项）和 JPL 形式（右侧的选项，除了 (142)）。Table 2 显示了它们特征的总结。JPL 主要用于航空航天领域，而哈密顿形式在其他工程领域（如机器人学）中更为常见——尽管这不应视为绝对规则。

我选择的约定（如在方程 (2) 中所示）是采用哈密顿约定，该约定是右手法则并且与许多在机器人学中广泛使用的软件库一致，如 Eigen、ROS、Google Ceres，以及大量关于使用 IMU 进行姿态估计的卡尔曼滤波文献 (Chou, 1992; Kuipers, 1999; Piniés et al., 2007; Roussillon et al., 2011; Martinelli, 2012, 以及许多其他文献)。

JPL 约定可能不如哈密顿约定常用，至少在机器人学领域如此。它在 (Trawny and Roumeliotis, 2005) 中有广泛的描述，该文献的目标和范围与本研究非常相似，但专门集

¹⁶空间运输系统，通常指的是 NASA 的航天飞机。

¹⁷喷气推进实验室。

¹⁸国际空间站。

¹⁹欧洲航天局。

中于 JPL 约定。JPL 四元数在 JPL 文献中（显然）以及 Li、Mourikis、Roumeliotis 等人的关键论文中使用（例如，见 (Li and Mourikis, 2012; Li et al., 2014)），这些论文参考了 Trawny and Roumeliotis 的文献。这些工作是处理视觉惯性里程计和 SLAM（正是我们所做的）时的主要灵感来源。

在本节的剩余部分，我们将更深入地分析这两种四元数约定。

3.1.1 四元数组成的顺序

虽然这不是最根本的区别，但哈密顿四元数和 JPL 四元数之间最显著的差异在于组件的顺序，标量部分要么位于最前面（哈密顿），要么位于最后面（JPL）。这种变化的含义是相当明显的，应该不会构成很大的解释挑战。实际上，一些将四元数的实部放在末尾的工作（例如，C++ 库 Eigen）仍然被视为使用哈密顿约定，只要其他三个方面保持不变。

为了更清晰起见，我们使用了 (w, x, y, z) 作为四元数组件的下标，而不是其他常用的 $(0, 1, 2, 3)$ 。当改变顺序时， q_w 始终表示实部，而 q_0 是否也表示实部则不明确——在某些情况下，可能会看到类似 $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, q_0)$ 的形式，其中 q_0 为实部且位于最后，但在一般情况下，对于 $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ ，实部在末尾的是 q_3 。²⁰ 在从一种约定转换到另一种约定时，我们必须小心涉及完整 4×4 或 3×4 四元数相关矩阵的公式，因为它们的行和/或列需要交换。这并不难做到，但可能难以察觉，因此容易出错。

关于组件顺序的两个小趣事是：

- 当实部在前时，四元数自然地解释为一种扩展复数，具有熟悉的形式 实部 + 虚部。我们中的一些人可能正是因为这个原因，对这种表示方式感到更为熟悉。
- 当实部在最后时，四元数以向量形式表示， $\mathbf{q} = [x, y, z, w] \in \mathbb{H}$ ，具有与射影三维空间中的齐次向量完全等效的格式， $\mathbf{p} = [x, y, z, w] \in \mathbb{P}^3$ ，在这两种情况下， x, y, z 显然与三个笛卡尔坐标轴对应。在处理三维几何问题时，这使得四元数和齐次向量的代数运算更加统一，尤其是在齐次向量约束在单位球面上 ($\|\mathbf{p}\| = 1$) 时，尽管不仅限于此。

3.1.2 四元数的代数规范

Hamilton 规范定义了 $ij = k$ ，因此，

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j, \quad (144)$$

而 JPL 规范定义了 $ji = k$ ，因此它的四元数代数变为：

$$i^2 = j^2 = k^2 = -ijk = -1, \quad -ij = ji = k, \quad -jk = kj = i, \quad -ki = ik = j. \quad (145)$$

有趣的是，这些细微的符号变化下依旧保持了四元数作为旋转算子的基本性质。从数学角度来看，关键的后果是 (13) 中叉积符号的变化，这会引起四元数手性（即旋转方向）的变化 (Shuster, 1993)：Hamilton 规范使用 $ij = k$ ，因此是右手坐标系，即遵循右手法则旋转向量；而 JPL 规范使用 $ji = k$ ，因此是左手坐标系 (Trawny and Roumeliotis,

²⁰可以参考脚注 1.

2005)。由于左手和右手旋转的符号相反，我们可以说它们的四元数 \mathbf{q}_{left} 和 \mathbf{q}_{right} 之间的关系为：

$$\mathbf{q}_{left} = \mathbf{q}_{right}^* . \quad (146)$$

3.1.3 旋转算子的功能

我们已经看到如何在三维空间中旋转向量。这在 (Shuster, 1993) 中被称为主动解释，因为旋转算子（这适用于所有旋转算子）主动地旋转向量，

$$\mathbf{x}' = \mathbf{q}_{active} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}_{active}^* , \quad \mathbf{x}' = \mathbf{R}_{active} \mathbf{x} . \quad (147)$$

另一种观察四元数 \mathbf{q} 和旋转矩阵 \mathbf{R} 对向量 \mathbf{x} 影响的方式是：假设向量保持不变，而是我们通过四元数 \mathbf{q} 或旋转矩阵 \mathbf{R} 指定的旋转角度改变了我们的观察视角。这被称为框架变换，在 (Shuster, 1993) 中被称为被动解释，因为向量本身没有移动，

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{q}_{passive} \otimes \mathbf{x}_A \otimes \mathbf{q}_{passive}^* , \quad \mathbf{x}_B = \mathbf{R}_{passive} \mathbf{x}_A , \quad (148)$$

其中， A 和 B 是两个笛卡尔参考系， \mathbf{x}_A 和 \mathbf{x}_B 是同一向量 \mathbf{x} 在这两个参考系中的表示。请参阅下文以获取进一步的解释和正确的符号。

主动和被动解释由彼此的逆算符支配，即，

$$\mathbf{q}_{active} = \mathbf{q}_{passive}^* , \quad \mathbf{R}_{active} = \mathbf{R}_{passive}^\top .$$

Hamilton 和 JPL 都使用被动约定。

方向余弦矩阵 一些作者认为被动算符不是旋转算子，而是一个方向的指定，称为方向余弦矩阵，

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} & c_{zx} \\ c_{xy} & c_{yy} & c_{zy} \\ c_{xz} & c_{yz} & c_{zz} \end{bmatrix} , \quad (149)$$

其中，每个分量 c_{ij} 是源参考系中轴 i 与目标参考系中轴 j 之间角度的余弦。我们有以下恒等式，

$$\mathbf{C} \equiv \mathbf{R}_{passive} . \quad (150)$$

3.1.4 旋转算子的方向

在被动情况下，第二种解释来源与旋转矩阵和四元数操作的方向有关，即它们是从局部坐标系转换到全局坐标系，还是从全局坐标系转换到局部坐标系。

给定两个笛卡尔坐标系 \mathcal{G} 和 \mathcal{L} ，我们将 \mathcal{G} 和 \mathcal{L} 分别标识为全局坐标系和局部坐标系。“全局”和“局部”是相对的定义，即， \mathcal{G} 相对于 \mathcal{L} 是全局坐标系，而 \mathcal{L} 相对于 \mathcal{G}

是局部坐标系——换句话说， \mathcal{L} 是在参考系 \mathcal{G} 中指定的坐标系。²¹ 我们指定 $\mathbf{q}_{\mathcal{G}\mathcal{L}}$ 和 $\mathbf{R}_{\mathcal{G}\mathcal{L}}$ 分别为将向量从坐标系 \mathcal{L} 转换到坐标系 \mathcal{G} 的四元数和旋转矩阵，意思是坐标系 \mathcal{L} 中的向量 $\mathbf{x}_{\mathcal{L}}$ 可以通过四元数和矩阵乘积，在坐标系 \mathcal{G} 中表示为

$$\mathbf{x}_{\mathcal{G}} = \mathbf{q}_{\mathcal{G}\mathcal{L}} \otimes \mathbf{x}_{\mathcal{L}} \otimes \mathbf{q}_{\mathcal{G}\mathcal{L}}^*, \quad \mathbf{x}_{\mathcal{G}} = \mathbf{R}_{\mathcal{G}\mathcal{L}} \mathbf{x}_{\mathcal{L}} . \quad (151)$$

从 \mathcal{G} 到 \mathcal{L} 的转换则通过以下方式完成

$$\mathbf{x}_{\mathcal{L}} = \mathbf{q}_{\mathcal{L}\mathcal{G}} \otimes \mathbf{x}_{\mathcal{G}} \otimes \mathbf{q}_{\mathcal{L}\mathcal{G}}^*, \quad \mathbf{x}_{\mathcal{L}} = \mathbf{R}_{\mathcal{L}\mathcal{G}} \mathbf{x}_{\mathcal{G}} , \quad (152)$$

有

$$\mathbf{q}_{\mathcal{L}\mathcal{G}} = \mathbf{q}_{\mathcal{G}\mathcal{L}}^*, \quad \mathbf{R}_{\mathcal{L}\mathcal{G}} = \mathbf{R}_{\mathcal{G}\mathcal{L}}^{\top} . \quad (153)$$

Hamilton 默认使用从局部坐标系到全局坐标系的转换，表示一个框架 \mathcal{L} 在框架 \mathcal{G} 中的表达，

$$\mathbf{q}_{Hamilton} \triangleq \mathbf{q}_{[with\ respect\ to][of]} = \mathbf{q}_{[to][from]} = \mathbf{q}_{\mathcal{G}\mathcal{L}} , \quad (154)$$

而 JPL 使用相反的全局到局部的转换，

$$\mathbf{q}_{JPL} \triangleq \mathbf{q}_{[of][with\ respect\ to]} = \mathbf{q}_{[to][from]} = \mathbf{q}_{\mathcal{L}\mathcal{G}} . \quad (155)$$

注意到

$$\mathbf{q}_{JPL} \triangleq \mathbf{q}_{\mathcal{L}\mathcal{G},left} = \mathbf{q}_{\mathcal{L}\mathcal{G},right}^* = \mathbf{q}_{\mathcal{G}\mathcal{L},right} \triangleq \mathbf{q}_{Hamilton} , \quad (156)$$

这并不是特别有用，但却说明了在混合不同惯例时，容易引起混淆。还需要注意的是，我们可以得出结论， $\mathbf{q}_{JPL} = \mathbf{q}_{Hamilton}$ ，但这一结论远非美妙的结果，反而是混乱的根源，因为这两个四元数的数值相同，但当它们在公式中使用时，代表和含义是不同的。

4 扰动、导数和积分

4.1 $SO(3)$ 中的加法和减法运算

在向量空间 \mathbb{R}^n 中，加法和减法操作使用常规的加法符号 ‘+’ 和减法符号 ‘-’。在 $SO(3)$ 中，这种操作不可行，但可以定义等效的运算符，以建立一个正确的微积分体系。

因此，我们定义了加法和减法运算符 \oplus, \ominus ，它们分别作用于 $SO(3)$ 中的元素 \mathbf{R} 和其切空间 \mathbb{R}^3 中的元素 $\boldsymbol{\theta}$ ，定义如下。

²¹其他常见的全局和局部坐标系的命名包括“父坐标系-子坐标系” (parent-child) 和“世界坐标系-物体坐标系” (world-body)。前者在涉及多个坐标系的系统中较为方便（例如，类人机器人中每个运动部件的坐标系）；后者则在描述一个固体车辆（如飞机、汽车）相对于唯一参考坐标系（称为世界坐标系）时较为方便。

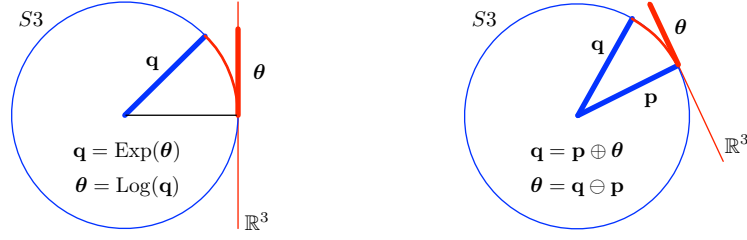


Figure 11: S^3 流形是 \mathbb{R}^4 中的一个单位球体，这里用单位圆（蓝色）表示，其中所有单位四元数都存在此。流形的切空间是超平面 \mathbb{R}^3 ，这里用一条线（红色）表示。左图: $\text{Exp}()$ 和 $\text{Log}()$ 运算符将 \mathbb{R}^3 中的元素映射到/从 S^3 中的元素。右图: \oplus 和 \ominus 运算符将流形中的元素与切空间中的元素关联起来。(同样，这些图形展示了 $SO(3)$ 流形。)

加法运算 ‘加法’运算符 $\oplus : SO(3) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow SO(3)$ 产生 $SO(3)$ 中的元素 S ，它是将 $SO(3)$ 中的参考元素 R 与一个（通常是小的）旋转组合的结果。这个旋转由一个向量 $\theta \in \mathbb{R}^3$ 指定，该向量位于 $SO(3)$ 流形在参考元素 R 处的切空间中，即

$$S = R \oplus \theta \triangleq R \circ \text{Exp}(\theta) \quad R, S \in SO(3), \theta \in \mathbb{R}^3. \quad (157)$$

请注意，这个运算符可以为 $SO(3)$ 的任何表示定义。特别地，对于四元数和旋转矩阵，我们有，

$$\mathbf{q}_S = \mathbf{q}_R \oplus \theta = \mathbf{q}_R \otimes \text{Exp}(\theta) \quad (158)$$

$$\mathbf{R}_S = \mathbf{R}_R \oplus \theta = \mathbf{R}_R \cdot \text{Exp}(\theta). \quad (159)$$

减法运算 ”减法”运算符 $\ominus : SO(3) \times SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是上述运算符的逆运算。它返回两个 $SO(3)$ 元素之间的矢量角度差 $\theta \in \mathbb{R}^3$ 。这个差异表示在参考元素 R 的切向量空间中，

$$\theta = S \ominus R \triangleq \text{Log}(R^{-1} \circ S) \quad R, S \in SO(3), \theta \in \mathbb{R}^3, \quad (160)$$

对于四元数和旋转矩阵来说，表达式为：

$$\theta = \mathbf{q}_S \ominus \mathbf{q}_R = \text{Log}(\mathbf{q}_R^* \otimes \mathbf{q}_S) \quad (161)$$

$$\theta = \mathbf{R}_S \ominus \mathbf{R}_R = \text{Log}(\mathbf{R}_R^\top \mathbf{R}_S). \quad (162)$$

在两种情况下，注意到尽管向量差 θ 通常假定为小值，但上述定义适用于任何 θ 的值（直到 $SO(3)$ 流形的第一次覆盖，即，对于角度 $\theta < \pi$ ）。

4.2 四种可能的导数定义

4.2.1 从向量空间到向量空间的函数

标量和向量的情况遵循经典的导数定义：给定一个函数 $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ，我们使用 $\{+, -\}$ 来定义导数为

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \triangleq \lim_{\delta \mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) - f(\mathbf{x})}{\delta \mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad (163)$$

欧拉积分产生的线性表达式形式为

$$f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}) + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} \quad \in \mathbb{R}^n$$

4.2.2 从 $SO(3)$ 到 $SO(3)$ 的函数

给定一个函数 $f : SO(3) \rightarrow SO(3)$ ，其中 $R \in SO(3)$ 且有一个局部的小角度变化 $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^3$ ，我们使用 $\{\oplus, \ominus\}$ 来定义导数为

$$\frac{\partial f(R)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \triangleq \lim_{\delta \boldsymbol{\theta} \rightarrow 0} \frac{f(R \oplus \delta \boldsymbol{\theta}) \ominus f(R)}{\delta \boldsymbol{\theta}} \quad \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (164)$$

$$= \lim_{\delta \boldsymbol{\theta} \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(f^{-1}(R) f(R \text{Exp}(\delta \boldsymbol{\theta})))}{\delta \boldsymbol{\theta}} \quad (165)$$

欧拉积分产生如下形式的表达式，

$$f(R \oplus \Delta \boldsymbol{\theta}) \approx f(R) \oplus \frac{\partial f(R)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Delta \boldsymbol{\theta} \triangleq f(R) \text{Exp} \left(\frac{\partial f(R)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Delta \boldsymbol{\theta} \right) \quad \in SO(3)$$

4.2.3 从向量空间到 $SO(3)$ 的函数

对于函数 $f : \mathbb{R}^m \rightarrow SO(3)$ 的情况，我们使用 ‘+’ 来表示向量扰动，使用 ‘ \ominus ’ 来表示 $SO(3)$ 差异，

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \triangleq \lim_{\delta \mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) \ominus f(\mathbf{x})}{\delta \mathbf{x}} \quad \in \mathbb{R}^{3 \times m} \quad (166)$$

$$= \lim_{\delta \mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(f^{-1}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}))}{\delta \mathbf{x}} \quad (167)$$

欧拉积分产生的表达式形式为，

$$f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}) \oplus \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} \triangleq f(\mathbf{x}) \text{Exp} \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} \right) \quad \in SO(3)$$

4.2.4 从 $SO(3)$ 到向量空间的函数

对于一个函数 $f : SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的情况，我们使用 ‘ \oplus ’ 来表示 $SO(3)$ 的扰动，使用 ‘-’ 来表示向量的差异。

$$\frac{\partial f(R)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \triangleq \lim_{\delta \boldsymbol{\theta} \rightarrow 0} \frac{f(R \oplus \delta \boldsymbol{\theta}) - f(R)}{\delta \boldsymbol{\theta}} \quad \in \mathbb{R}^{n \times 3} \quad (168)$$

$$= \lim_{\delta \boldsymbol{\theta} \rightarrow 0} \frac{f(R \text{Exp}(\delta \boldsymbol{\theta})) - f(R)}{\delta \boldsymbol{\theta}} \quad (169)$$

欧拉积分产生类似于以下形式的表达式，

$$f(R \oplus \delta \boldsymbol{\theta}) \approx f(R) + \frac{\partial f(R)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Delta \boldsymbol{\theta} \triangleq f(R) + \text{Exp} \left(\frac{\partial f(R)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Delta \boldsymbol{\theta} \right) \quad \in SO(3)$$

4.3 非常有用的部分：旋转的雅可比

我们考虑将向量 \mathbf{a} 旋转 θ 弧度，绕单位轴 \mathbf{u} 旋转。我们将旋转的规范表示为三种等效形式，即 $\boldsymbol{\theta} = \theta\mathbf{u}$ ， $\mathbf{q} = \mathbf{q}\{\boldsymbol{\theta}\}$ 和 $\mathbf{R} = \mathbf{R}\{\boldsymbol{\theta}\}$ 。我们感兴趣的是旋转结果相对于不同量度的雅可比矩阵。

4.3.1 对向量求雅可比

旋转向量 \mathbf{a} 相对于该向量的导数是显而易见的，

$$\boxed{\frac{\partial(\mathbf{q} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{q}^*)}{\partial \mathbf{a}} = \frac{\partial(\mathbf{R} \mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{R}} . \quad (170)$$

4.3.2 对四元数求雅可比

相反，旋转对四元数 \mathbf{q} 的导数是棘手的。为了方便，我们使用简化的四元数符号， $\mathbf{q} = [w \ \mathbf{v}] = w + \mathbf{v}$ 。我们利用 (34)、(33) 和恒等式 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} = (\mathbf{a}^\top \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a}^\top \mathbf{b}) \mathbf{c}$ ，将基于四元数的旋转 (107) 展开如下，

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' &= \mathbf{q} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{q}^* \\ &= (w + \mathbf{v}) \otimes \mathbf{a} \otimes (w - \mathbf{v}) \\ &= w^2 \mathbf{a} + w(\mathbf{v} \otimes \mathbf{a} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{v}) - \mathbf{v} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{v} \\ &= w^2 \mathbf{a} + 2w(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) - [(-\mathbf{v}^\top \mathbf{a} + \mathbf{v} \times \mathbf{a}) \otimes \mathbf{v}] \\ &= w^2 \mathbf{a} + 2w(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) - [(-\mathbf{v}^\top \mathbf{a}) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \otimes \mathbf{v}] \\ &= w^2 \mathbf{a} + 2w(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) - [(-\mathbf{v}^\top \mathbf{a}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \times \mathbf{a})^\top \mathbf{v} + (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{v}] \\ &= w^2 \mathbf{a} + 2w(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) - [(-\mathbf{v}^\top \mathbf{a}) \mathbf{v} + (\mathbf{v}^\top \mathbf{v}) \mathbf{a} - (\mathbf{v}^\top \mathbf{a}) \mathbf{v}] \\ &= w^2 \mathbf{a} + 2w(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) + 2(\mathbf{v}^\top \mathbf{a}) \mathbf{v} - (\mathbf{v}^\top \mathbf{v}) \mathbf{a} . \end{aligned} \quad (171)$$

基于此，我们可以提取导数 $\partial \mathbf{a}' / \partial w$ 和 $\partial \mathbf{a}' / \partial \mathbf{v}$ ，

$$\frac{\partial \mathbf{a}'}{\partial w} = 2(w \mathbf{a} + \mathbf{v} \times \mathbf{a}) \quad (172)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}'}{\partial \mathbf{v}} &= -2w [\mathbf{a}]_\times + 2(\mathbf{v}^\top \mathbf{a} \mathbf{I} + \mathbf{v} \mathbf{a}^\top) - 2\mathbf{a} \mathbf{v}^\top \\ &= 2(\mathbf{v}^\top \mathbf{a} \mathbf{I} + \mathbf{v} \mathbf{a}^\top - \mathbf{a} \mathbf{v}^\top - w [\mathbf{a}]_\times) , \end{aligned} \quad (173)$$

得到

$$\boxed{\frac{\partial(\mathbf{q} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{q}^*)}{\partial \mathbf{q}} = 2 \left[w \mathbf{a} + \mathbf{v} \times \mathbf{a} \mid \mathbf{v}^\top \mathbf{a} \mathbf{I}_3 + \mathbf{v} \mathbf{a}^\top - \mathbf{a} \mathbf{v}^\top - w [\mathbf{a}]_\times \right] \in \mathbb{R}^{3 \times 4}} . \quad (174)$$

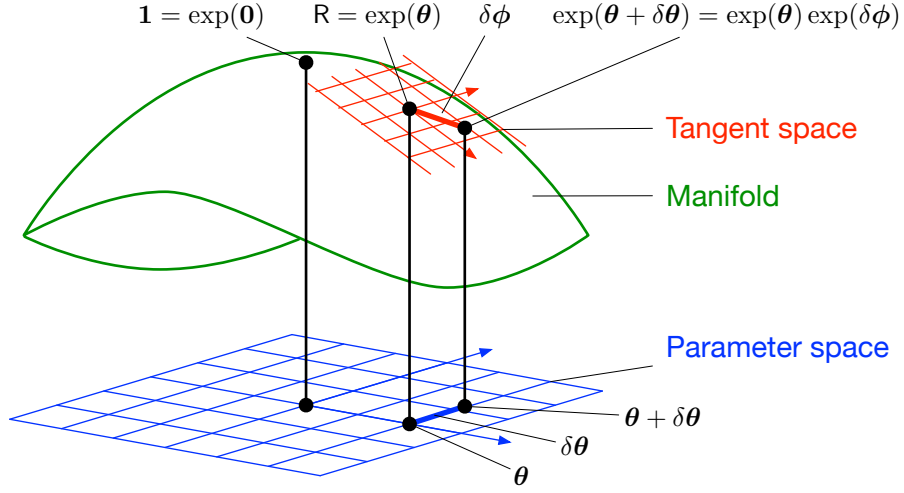


Figure 12: 右雅可比矩阵 $\mathbf{J}_r = \partial\delta\phi/\partial\delta\theta$ 将围绕参数 θ 的变化 $\delta\theta$ 映射到流形上点 $\text{Exp } \theta$ 处切空间上的变化 $\delta\phi$ 。

4.3.3 $SO(3)$ 上的右雅可比

我们考虑（见 Fig. 12）一个元素 $R \in SO(3)$ 和一个旋转向量 $\theta \in \mathbb{R}^3$ ，使得 $R = \text{Exp}(\theta)$ 。当 θ 发生变化，变化量为 $\delta\theta$ 时，元素 R 也会发生变化。将 R 在 $SO(3)$ 的切空间中的变化表示为一个旋转向量 $\delta\phi \in \mathbb{R}^3$ ，我们得到（请参见图示，我并没有发明什么新的东西）

$$\text{Exp}(\theta) \oplus \delta\phi = \text{Exp}(\theta + \delta\theta) \quad (175)$$

这也可以被写为，

$$\text{Exp}(\theta) \circ \text{Exp}(\delta\phi) = \text{Exp}(\theta + \delta\theta), \quad (176)$$

甚至

$$\delta\phi = \text{Log} \left(\text{Exp}(\theta)^{-1} \circ \text{Exp}(\theta + \delta\theta) \right) = \text{Exp}(\theta + \delta\theta) \ominus \text{Exp}(\theta). \quad (177)$$

在极限情况下， $\delta\phi$ 关于 $\delta\theta$ 的变化定义了一个雅可比矩阵

$$\frac{\partial\delta\phi}{\partial\delta\theta} = \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\delta\phi}{\delta\theta} = \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\text{Exp}(\theta + \delta\theta) \ominus \text{Exp}(\theta)}{\delta\theta}, \quad (178)$$

其表达式是 (166) 的一个特例，即它是函数 $f(\theta) = \text{Exp}(\theta)$ 从 \mathbb{R}^3 到 $SO(3)$ 的导数。在极限情况下， $\delta\phi$ 随 $\delta\theta$ 的变化定义了一个雅可比矩阵，

$$\mathbf{J}_r(\theta) \triangleq \frac{\partial \text{Exp}(\theta)}{\partial \theta}. \quad (179)$$

其表达式与所使用的参数化无关，尽管它确实可以针对每种参数化进行特定表达。使用 (166)，我们得到，

$$\mathbf{J}_r(\boldsymbol{\theta}) = \lim_{\delta\boldsymbol{\theta} \rightarrow 0} \frac{\text{Exp}(\boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\theta}) \ominus \text{Exp}(\boldsymbol{\theta})}{\delta\boldsymbol{\theta}} \quad (180)$$

$$= \lim_{\delta\boldsymbol{\theta} \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(\text{Exp}(\boldsymbol{\theta})^\top \text{Exp}(\boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\theta}))}{\delta\boldsymbol{\theta}} \quad \text{if using } \mathbf{R} \quad (181)$$

$$= \lim_{\delta\boldsymbol{\theta} \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(\text{Exp}(\boldsymbol{\theta})^* \otimes \text{Exp}(\boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\theta}))}{\delta\boldsymbol{\theta}} \quad \text{if using } \mathbf{q} . \quad (182)$$

右雅可比矩阵及其逆可以通过封闭形式计算 (Chirikjian, 2012, 第 40 页),

$$\mathbf{J}_r(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{I} - \frac{1 - \cos \|\boldsymbol{\theta}\|}{\|\boldsymbol{\theta}\|^2} [\boldsymbol{\theta}]_\times + \frac{\|\boldsymbol{\theta}\| - \sin \|\boldsymbol{\theta}\|}{\|\boldsymbol{\theta}\|^3} [\boldsymbol{\theta}]_\times^2 \quad (183)$$

$$\mathbf{J}_r^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{I} + \frac{1}{2} [\boldsymbol{\theta}]_\times + \left(\frac{1}{\|\boldsymbol{\theta}\|^2} - \frac{1 + \cos \|\boldsymbol{\theta}\|}{2\|\boldsymbol{\theta}\| \sin \|\boldsymbol{\theta}\|} \right) [\boldsymbol{\theta}]_\times^2 \quad (184)$$

$SO(3)$ 的右雅可比矩阵具有以下性质，对于任意的旋转向量 $\boldsymbol{\theta}$ 和小的变化量 $\delta\boldsymbol{\theta}$,

$$\text{Exp}(\boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\theta}) \approx \text{Exp}(\boldsymbol{\theta}) \text{Exp}(\mathbf{J}_r(\boldsymbol{\theta})\delta\boldsymbol{\theta}) \quad (185)$$

$$\text{Exp}(\boldsymbol{\theta}) \text{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta}) \approx \text{Exp}(\boldsymbol{\theta} + \mathbf{J}_r^{-1}(\boldsymbol{\theta})\delta\boldsymbol{\theta}) \quad (186)$$

$$\text{Log}(\text{Exp}(\boldsymbol{\theta}) \text{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta})) \approx \boldsymbol{\theta} + \mathbf{J}_r^{-1}(\boldsymbol{\theta})\delta\boldsymbol{\theta} \quad (187)$$

4.3.4 对旋转向量求雅可比

旋转向量 $\mathbf{a}' = \mathbf{R}\{\boldsymbol{\theta}\} \mathbf{a}$ 相对于旋转向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的变化是一个从 \mathbb{R}^3 到 \mathbb{R}^3 的函数。它相对于旋转向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的导数使用了 (163)，并通过使用 (185) 从之前的结果推导出来，

$$\frac{\partial(\mathbf{q} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{q}^*)}{\partial \delta\boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial(\mathbf{R} \mathbf{a})}{\partial \delta\boldsymbol{\theta}} = \lim_{\delta\boldsymbol{\theta} \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}\{\boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\theta}\} \mathbf{a} - \mathbf{R}\{\boldsymbol{\theta}\} \mathbf{a}}{\delta\boldsymbol{\theta}} \quad \leftarrow (163)$$

$$= \lim_{\delta\boldsymbol{\theta} \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{R}\{\boldsymbol{\theta}\} \text{Exp}(\mathbf{J}_r(\boldsymbol{\theta})\delta\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{R}\{\boldsymbol{\theta}\}) \mathbf{a}}{\delta\boldsymbol{\theta}} \quad \leftarrow (185)$$

$$= \lim_{\delta\boldsymbol{\theta} \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{R}\{\boldsymbol{\theta}\}(\mathbf{I} + [\mathbf{J}_r(\boldsymbol{\theta})\delta\boldsymbol{\theta}]_\times) - \mathbf{R}\{\boldsymbol{\theta}\}) \mathbf{a}}{\delta\boldsymbol{\theta}}$$

$$= \lim_{\delta\boldsymbol{\theta} \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}\{\boldsymbol{\theta}\} [\mathbf{J}_r(\boldsymbol{\theta})\delta\boldsymbol{\theta}]_\times \mathbf{a}}{\delta\boldsymbol{\theta}}$$

$$= \lim_{\delta\boldsymbol{\theta} \rightarrow 0} - \frac{\mathbf{R}\{\boldsymbol{\theta}\} [\mathbf{a}]_\times \mathbf{J}_r(\boldsymbol{\theta}) \delta\boldsymbol{\theta}}{\delta\boldsymbol{\theta}}$$

$$= -\mathbf{R}\{\boldsymbol{\theta}\} [\mathbf{a}]_\times \mathbf{J}_r(\boldsymbol{\theta}) ,$$

其中 $\mathbf{R}\{\boldsymbol{\theta}\} = \text{Exp}(\boldsymbol{\theta})$ 。总的来说，

$$\boxed{\frac{\partial(\mathbf{q} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{q}^*)}{\partial \delta\boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial(\mathbf{R} \mathbf{a})}{\partial \delta\boldsymbol{\theta}} = -\mathbf{R}\{\boldsymbol{\theta}\} [\mathbf{a}]_\times \mathbf{J}_r(\boldsymbol{\theta})} . \quad (188)$$

4.3.5 旋转组合的雅可比

考虑 $SO(3)$ 的复合操作 $P = Q \circ R$ ，它可以通过四元数形式或矩阵形式实现，

$$\mathbf{p} = \mathbf{q}_\theta \otimes \mathbf{r}_\phi \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}_\theta \mathbf{R}_\phi \quad (189)$$

其中下标表示切空间中向量扰动的名称。这些是从 $SO(3)$ 到 $SO(3)$ 的函数，因此我们使用 (165) 来写导数，

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q \circ R}{\partial Q} &= \frac{\partial \mathbf{q}_\theta \otimes \mathbf{r}_\phi}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathbf{Q}_\theta \mathbf{R}_\phi}{\partial \theta} = \lim_{\delta \theta \rightarrow 0} \frac{((\mathbf{Q}_\theta \oplus \delta \theta) \mathbf{R}_\phi) \ominus (\mathbf{Q}_\theta \mathbf{R}_\phi)}{\delta \theta} \\ &= \lim_{\delta \theta \rightarrow 0} \frac{\text{Log}[(\mathbf{Q}_\theta \mathbf{R}_\phi)^\top (\mathbf{Q}_\theta \text{Exp}(\delta \theta) \mathbf{R}_\phi)]}{\delta \theta} \\ &= \lim_{\delta \theta \rightarrow 0} \frac{\text{Log}[\mathbf{R}_\phi^\top \text{Exp}(\delta \theta) \mathbf{R}_\phi]}{\delta \theta} \\ &= \lim_{\delta \theta \rightarrow 0} \frac{\text{Log}[\text{Exp}(\mathbf{R}_\phi^\top \delta \theta)]}{\delta \theta} \\ &= \lim_{\delta \theta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}_\phi^\top \delta \theta}{\delta \theta} = \mathbf{R}_\phi^\top \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q \circ R}{\partial R} &= \frac{\partial \mathbf{q}_\theta \otimes \mathbf{r}_\phi}{\partial \phi} = \frac{\partial \mathbf{Q}_\theta \mathbf{R}_\phi}{\partial \phi} = \lim_{\delta \phi \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{Q}_\theta (\mathbf{R}_\phi \oplus \delta \phi)) \ominus (\mathbf{Q}_\theta \mathbf{R}_\phi)}{\delta \phi} \\ &= \lim_{\delta \phi \rightarrow 0} \frac{\text{Log}[(\mathbf{Q}_\theta \mathbf{R}_\phi)^\top (\mathbf{Q}_\theta \mathbf{R}_\phi \text{Exp}(\delta \phi))]}{\delta \phi} \\ &= \lim_{\delta \phi \rightarrow 0} \frac{\text{Log}[\text{Exp}(\delta \phi)]}{\delta \phi} \\ &= \lim_{\delta \phi \rightarrow 0} \frac{\delta \phi}{\delta \phi} = \mathbf{I} \end{aligned}$$

4.4 扰动、不确定性和噪声

4.4.1 局部扰动

一个受扰的方向 $\tilde{\mathbf{q}}$ 可以表示为未受扰的方向 \mathbf{q} 与一个小的局部扰动 $\Delta \mathbf{q}_\mathcal{L}$ 的组合。由于哈密顿约定，这个局部扰动出现在组合积的右侧——我们还给出了矩阵等价形式以作比较，

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \otimes \Delta \mathbf{q}_\mathcal{L}, \quad \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \Delta \mathbf{R}_\mathcal{L}. \quad (190)$$

这些局部扰动 $\Delta \mathbf{q}_\mathcal{L}$ （或 $\Delta \mathbf{R}_\mathcal{L}$ ）可以通过其等价的向量形式 $\Delta \phi_\mathcal{L} = \mathbf{u} \Delta \phi_\mathcal{L}$ 获得，该向量定义在切空间中，并通过指数映射得到。这给出了

$$\tilde{\mathbf{q}}_\mathcal{L} = \mathbf{q}_\mathcal{L} \otimes \text{Exp}(\Delta \phi_\mathcal{L}), \quad \tilde{\mathbf{R}}_\mathcal{L} = \mathbf{R}_\mathcal{L} \cdot \text{Exp}(\Delta \phi_\mathcal{L}) \quad (191)$$

从而得到局部扰动的表达式

$$\Delta\phi_{\mathcal{L}} = \text{Log}(\mathbf{q}_{\mathcal{L}}^* \otimes \tilde{\mathbf{q}}_{\mathcal{L}}) = \text{Log}(\mathbf{R}_{\mathcal{L}}^{\top} \cdot \tilde{\mathbf{R}}_{\mathcal{L}}) \quad (192)$$

如果扰动角度 $\Delta\phi_{\mathcal{L}}$ 很小，则可以通过 (101) 和 (69) 的泰勒展开，近似得到四元数和旋转矩阵形式的扰动，展开至线性项，

$$\Delta\mathbf{q}_{\mathcal{L}} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\Delta\phi_{\mathcal{L}} \end{bmatrix}, \quad \Delta\mathbf{R}_{\mathcal{L}} \approx \mathbf{I} + [\Delta\phi_{\mathcal{L}}]_{\times}. \quad (193)$$

因此，扰动可以在实际方向的 $SO(3)$ 流形切空间中的局部向量空间 $\Delta\phi_{\mathcal{L}}$ 中指定。例如，将这些扰动的协方差矩阵表示在这个向量空间中是很方便的，即使用常规的 3×3 协方差矩阵。

4.4.2 全局扰动

考虑全局定义的扰动及相关导数是可能的，实际上也是很有意义的。全局扰动出现在组合乘积的左侧，即，

$$\tilde{\mathbf{q}}_{\mathcal{G}} = \text{Exp}(\Delta\phi_{\mathcal{G}}) \otimes \mathbf{q}_{\mathcal{G}}, \quad \tilde{\mathbf{R}}_{\mathcal{G}} = \text{Exp}(\Delta\phi_{\mathcal{G}}) \cdot \mathbf{R}_{\mathcal{G}} \quad (194)$$

这导致了全局扰动的表达式为

$$\Delta\phi_{\mathcal{G}} = \text{Log}(\tilde{\mathbf{q}}_{\mathcal{G}} \otimes \mathbf{q}_{\mathcal{G}}^*) = \text{Log}(\tilde{\mathbf{R}}_{\mathcal{G}} \cdot \mathbf{R}_{\mathcal{G}}^{\top}) \quad (195)$$

同样，这些扰动可以在切空间 $\Delta\phi_{\mathcal{G}}$ 中指定，该切空间是 $SO(3)$ 流形在原点处的切空间。

4.5 时间导数

通过在向量空间中表达局部扰动，我们可以很容易地推导出时间导数的表达式。只需考虑 $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ 作为原始状态， $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}(t + \Delta t)$ 作为扰动状态，并应用导数的定义

$$\frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} \triangleq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{q}(t + \Delta t) - \mathbf{q}(t)}{\Delta t}, \quad (196)$$

对上述内容应用，得到

$$\omega_{\mathcal{L}}(t) \triangleq \frac{d\phi_{\mathcal{L}}(t)}{dt} \triangleq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi_{\mathcal{L}}}{\Delta t}, \quad (197)$$

其中，由于 $\Delta\phi_{\mathcal{L}}$ 是一个局部角扰动，因此它对应于由 \mathbf{q} 定义的局部坐标系中的角速度向量。

四元数的时间导数的推导如下（对于旋转矩阵，采用类似的推理）

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}} &\triangleq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{q}(t + \Delta t) - \mathbf{q}(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{q} \otimes \Delta \mathbf{q}_{\mathcal{L}} - \mathbf{q}}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{q} \otimes \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \Delta \phi_{\mathcal{L}}/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \phi_{\mathcal{L}}/2 \end{bmatrix}}{\Delta t} \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{L}} \end{bmatrix} .
\end{aligned} \tag{198}$$

定义

$$\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}) \triangleq [\boldsymbol{\omega}]_R = \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{\omega}^\top \\ \boldsymbol{\omega} & -[\boldsymbol{\omega}]_{\times} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} , \tag{199}$$

我们从 (198) 和 (17) 中得到（我们也给出了其矩阵等价式）

$$\boxed{\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{L}}) \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{L}} , \quad \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} [\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{L}}]_{\times} .} \tag{200}$$

这些表达式当然与 (99) 和 (67) 相同，它们是在旋转群 $SO(3)$ 框架下推导出来的。然而，有趣的是，在这里我们能够清楚地将角速度 $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{L}}$ 与一个特定的参考框架相关联，在这种情况下，参考框架是由方位 \mathbf{q} 或 \mathbf{R} 定义的局部框架。现在之所以能够做到这一点，是因为我们已经赋予了算子 \mathbf{q} 和 \mathbf{R} 一个精确的几何意义。从这个角度来看，(200) 表达了参考坐标系的方向演化，当角速度以局部坐标系表示时。

与全局扰动相关的时间导数可以通过类似于 (198) 的推导得到，结果为

$$\boxed{\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{G}} \otimes \mathbf{q} , \quad \dot{\mathbf{R}} = [\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{G}}]_{\times} \mathbf{R} ,} \tag{201}$$

其中

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{G}}(t) \triangleq \frac{d\phi_{\mathcal{G}}(t)}{dt} \tag{202}$$

它是以全局框架表示的角速度向量。方程 (201) 表示当角速度在全局参考框架中表示时参考框架的方向演变。

4.5.1 全局-局部的关系

从前一段可以注意到局部角速度和全局角速度之间的以下关系

$$\frac{1}{2} \omega_{\mathcal{G}} \otimes \mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \otimes \omega_{\mathcal{L}} . \quad (203)$$

然后，通过右乘共轭四元数，我们得到

$$\omega_{\mathcal{G}} = \mathbf{q} \otimes \omega_{\mathcal{L}} \otimes \mathbf{q}^* = \mathbf{R} \omega_{\mathcal{L}} . \quad (204)$$

同样地，考虑到对于小的 Δt ，有 $\Delta \phi_R \approx \omega \Delta t$ ，我们可以得到

$$\Delta \phi_{\mathcal{G}} = \mathbf{q} \otimes \Delta \phi_{\mathcal{L}} \otimes \mathbf{q}^* = \mathbf{R} \Delta \phi_{\mathcal{L}} . \quad (205)$$

也就是说，我们可以通过坐标变换使用四元数或旋转矩阵，将角速度向量 ω 和小的角度扰动 $\Delta \phi$ 转换，就像它们是普通的向量一样。同样的结论可以通过设定 $\omega = \mathbf{u} \omega$ 或 $\Delta \phi = \mathbf{u} \Delta \phi$ 来得到，并注意到旋转轴向量 \mathbf{u} 按照正常的方式变换，即

$$\mathbf{u}_{\mathcal{G}} = \mathbf{q} \otimes \mathbf{u}_{\mathcal{L}} \otimes \mathbf{q}^* = \mathbf{R} \mathbf{u}_{\mathcal{L}} . \quad (206)$$

4.5.2 四元数乘积的时间导数

我们使用乘积导数的常规公式，

$$(\dot{\mathbf{q}}_1 \otimes \mathbf{q}_2) = \dot{\mathbf{q}}_1 \otimes \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1 \otimes \dot{\mathbf{q}}_2 , \quad (\mathbf{R}_1 \dot{\mathbf{R}}_2) = \dot{\mathbf{R}}_1 \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_1 \dot{\mathbf{R}}_2 , \quad (207)$$

但需要注意的是，由于乘积是非交换的，我们必须严格遵循操作数的顺序。这意味着 $(\dot{\mathbf{q}}^2) \neq 2 \mathbf{q} \otimes \dot{\mathbf{q}}$ ，如同标量情况下那样，而是

$$(\dot{\mathbf{q}}^2) = \dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q} + \mathbf{q} \otimes \dot{\mathbf{q}} . \quad (208)$$

4.5.3 其他与导数相关的有用表达式

我们可以推导出局部旋转速率的表达式

$$\omega_{\mathcal{L}} = 2 \mathbf{q}^* \otimes \dot{\mathbf{q}} , \quad [\omega_{\mathcal{L}}]_{\times} = \mathbf{R}^{\top} \dot{\mathbf{R}} . \quad (209)$$

以及全局旋转速率，

$$\omega_{\mathcal{G}} = 2 \dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q}^* , \quad [\omega_{\mathcal{G}}]_{\times} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^{\top} . \quad (210)$$

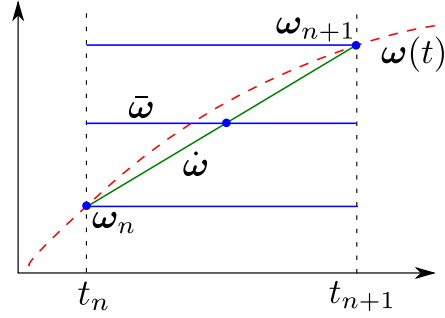


Figure 13: 角速度的积分近似：红色：真实速度。蓝色：零阶近似（从下到上：前向、中心向和后向）。绿色：一阶近似。

4.6 旋转速率的时间积分

通过在四元数形式下积累旋转，实际上是通过积分与旋转速率定义相对应的微分方程来完成的，即，对于局部旋转速率定义使用 (200)，对于全局旋转速率定义使用 (201)。在我们感兴趣的情况下，角速度是由局部传感器测量的，因此在离散时间 $t_n = n\Delta t$ 处提供局部测量 $\omega(t_n)$ 。我们这里只关注这种情况，对于这种情况，我们复现了微分方程 (200)，

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{q}(t) \otimes \omega(t) . \quad (211)$$

我们开发了零阶和一阶积分方法（图 13 和 14），这些方法都是基于四元数 $\mathbf{q}(t_n + \Delta t)$ 在时间 $t = t_n$ 处的泰勒级数展开。我们记 $\mathbf{q} \triangleq \mathbf{q}(t)$ 和 $\mathbf{q}_n \triangleq \mathbf{q}(t_n)$ ，对于 ω 也做相同的定义。其泰勒级数被写为

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + \dot{\mathbf{q}}_n \Delta t + \frac{1}{2!} \ddot{\mathbf{q}}_n \Delta t^2 + \frac{1}{3!} \dddot{\mathbf{q}}_n \Delta t^3 + \frac{1}{4!} \ddot{\mathbf{q}}_n \Delta t^4 + \dots . \quad (212)$$

上述 \mathbf{q}_n 的连续导数可以通过反复应用四元数导数的表达式 (211) 来轻松获得，其中 $\dot{\omega} = 0$ 。我们得到

$$\dot{\mathbf{q}}_n = \frac{1}{2} \mathbf{q}_n \omega_n \quad (213a)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_n = \frac{1}{2^2} \mathbf{q}_n \omega_n^2 + \frac{1}{2} \mathbf{q}_n \dot{\omega} \quad (213b)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_n = \frac{1}{2^3} \mathbf{q}_n \omega_n^3 + \frac{1}{4} \mathbf{q}_n \dot{\omega} \omega_n + \frac{1}{2} \mathbf{q}_n \omega_n \dot{\omega} \quad (213c)$$

$$\mathbf{q}_n^{(i \geq 4)} = \frac{1}{2^i} \mathbf{q}_n \omega_n^i + \dots , \quad (213d)$$

在这里，我们省略了 \otimes 符号以简化符号表示，也就是说，所有的乘积和 ω 的幂次都必须按照四元数乘法来解释。

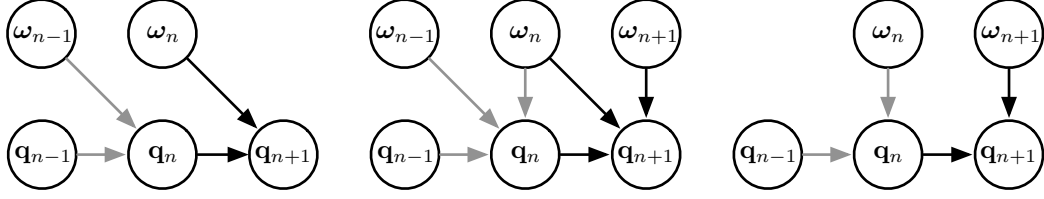


Figure 14: 两个连续时间步长的积分方案（灰色和黑色箭头集），其中共享相同时间戳的变量已按列组织。左侧：前向积分。中间：中心向和一阶积分。右侧：后向积分。

4.6.1 零阶积分

前向积分 在角速度 ω_n 在区间 $[t_n, t_{n+1}]$ 内保持恒定的情况下，我们有 $\dot{\omega} = 0$ ，并且 (212) 退化为

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n \otimes \left(1 + \frac{1}{2}\omega_n\Delta t + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\omega_n\Delta t\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\omega_n\Delta t\right)^3 + \cdots \right), \quad (214)$$

在这里，我们识别出指数函数 $e^{\omega_n\Delta t/2}$ 的泰勒级数 (40)。从 (101) 可知，这个指数对应于表示增量旋转 $\Delta\theta = \omega_n\Delta t$ 的四元数，

$$e^{\omega\Delta t/2} = \text{Exp}(\omega\Delta t) = \mathbf{q}\{\omega\Delta t\} = \begin{bmatrix} \cos(\|\omega\|\Delta t/2) \\ \frac{\omega}{\|\omega\|} \sin(\|\omega\|\Delta t/2) \end{bmatrix},$$

因此，

$$\boxed{\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n \otimes \mathbf{q}\{\omega_n\Delta t\}}. \quad (215)$$

后向积分 我们也可以认为，在时间段 Δt 内的恒定速度对应于 ω_{n+1} ，即在该时间段结束时测得的速度。这可以通过类似的方式展开，即对 \mathbf{q}_n 在 t_{n+1} 处进行泰勒展开，从而得到

$$\mathbf{q}_{n+1} \approx \mathbf{q}_n \otimes \mathbf{q}\{\omega_{n+1}\Delta t\}. \quad (216)$$

我们在这里要特别指出，当到达的运动测量需要实时处理时，这是一种典型的积分方法，因为积分的时间范围对应于最后的测量（在这种情况下是 t_{n+1} ，参见 Fig. 14）。为了更清楚地说明这一点，我们可以重新标记时间索引，使用 $\{n-1, n\}$ 而不是 $\{n, n+1\}$ ，并写作，

$$\boxed{\mathbf{q}_n = \mathbf{q}_{n-1} \otimes \mathbf{q}\{\omega_n\Delta t\}}. \quad (217)$$

中值积分 类似地，如果认为在时间段 Δt 内的速度是以中间速率保持恒定的（这不一定是时间段中点处的速度），

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_{n+1} + \omega_n}{2}, \quad (218)$$

我们有，

$$\boxed{\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n \otimes \mathbf{q}\{\bar{\omega}\Delta t\}}. \quad (219)$$

4.6.2 一阶积分

角速度 $\omega(t)$ 现在是随时间线性变化的。它的第一导数是常数，所有更高阶的导数均为零，

$$\dot{\omega} = \frac{\omega_{n+1} - \omega_n}{\Delta t} \quad (220)$$

$$\ddot{\omega} = \ddot{\omega} = \dots = 0. \quad (221)$$

我们可以将中间速率 $\bar{\omega}$ 表示为 ω_n 和 $\dot{\omega}$ 的函数，

$$\bar{\omega} = \omega_n + \frac{1}{2}\dot{\omega}\Delta t, \quad (222)$$

并推导出在四元数导数 (213) 中出现的 ω_n 的幂次表达式，以便使用更方便的 $\bar{\omega}$ 和 $\dot{\omega}$ 来表示，

$$\omega_n = \bar{\omega} - \frac{1}{2}\dot{\omega}\Delta t \quad (223a)$$

$$\omega_n^2 = \bar{\omega}^2 - \frac{1}{2}\bar{\omega}\dot{\omega}\Delta t - \frac{1}{2}\dot{\omega}\bar{\omega}\Delta t + \frac{1}{4}\dot{\omega}^2\Delta t^2 \quad (223b)$$

$$\omega_n^3 = \bar{\omega}^3 - \frac{3}{2}\bar{\omega}^2\dot{\omega}\Delta t + \frac{3}{4}\bar{\omega}\dot{\omega}^2\Delta t^2 + \frac{1}{8}\dot{\omega}^3\Delta t^3 \quad (223c)$$

$$\omega_n^4 = \bar{\omega}^4 + \dots. \quad (223d)$$

将它们代入四元数导数，并代入泰勒级数 (212)，经过适当的重新排列后，我们得到，

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q} \left(1 + \frac{1}{2}\bar{\omega}\Delta t + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2}\bar{\omega}\Delta t \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2}\bar{\omega}\Delta t \right)^3 + \dots \right) \quad (224a)$$

$$+ \mathbf{q} \left(-\frac{1}{4}\dot{\omega} + \frac{1}{4}\dot{\omega} \right) \Delta t^2 \quad (224b)$$

$$+ \mathbf{q} \left(-\frac{1}{16}\bar{\omega}\dot{\omega} - \frac{1}{16}\dot{\omega}\bar{\omega} + \frac{1}{24}\dot{\omega}\bar{\omega} + \frac{1}{12}\bar{\omega}\dot{\omega} \right) \Delta t^3 \quad (224c)$$

$$+ \mathbf{q} \left(\dots \right) \Delta t^4 + \dots, \quad (224d)$$

在 (224a) 中, 我们识别出指数级数 $e^{\bar{\omega}\Delta t/2} = \mathbf{q}\{\bar{\omega}\Delta t\}$, (224b) 项为零, (224d) 表示高重数的项, 我们将忽略这些项。经过简化后, 我们得到 (现在恢复了正常的 \otimes 符号表示),

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n \otimes \mathbf{q}\{\bar{\omega}\Delta t\} + \frac{\Delta t^3}{48} \mathbf{q}_n \otimes (\bar{\omega} \otimes \dot{\omega} - \dot{\omega} \otimes \bar{\omega}) + \cdots . \quad (225)$$

将 $\dot{\omega}$ 和 $\bar{\omega}$ 代入它们的定义 (220) 和 (218) 后, 我们得到,

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n \otimes \mathbf{q}\{\bar{\omega}\Delta t\} + \frac{\Delta t^2}{48} \mathbf{q}_n \otimes (\omega_n \otimes \omega_{n+1} - \omega_{n+1} \otimes \omega_n) + \cdots , \quad (226)$$

这是一个与 (Trawny and Roumeliotis, 2005) 中的结果等价的表达式, 但使用了哈密顿约定, 并采用了四元数乘法形式, 而不是矩阵乘法形式。最后, 由于 $\mathbf{a}_v \otimes \mathbf{b}_v - \mathbf{b}_v \otimes \mathbf{a}_v = 2 \mathbf{a}_v \times \mathbf{b}_v$, 见 (33), 我们得到以下的替代形式,

$$\boxed{\mathbf{q}_{n+1} \approx \mathbf{q}_n \otimes \left(\mathbf{q}\{\bar{\omega}\Delta t\} + \frac{\Delta t^2}{24} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n \times \omega_{n+1} \end{bmatrix} \right)} . \quad (227)$$

在这个表达式中, 和式的第一项是中心向零阶积分器 (219)。第二项是一个二阶修正项, 当 ω_n 和 ω_{n+1} 共线时它会消失,²² 即, 当旋转轴从 t_n 到 t_{n+1} 没有发生变化时。

固定旋转轴的情况 我们可以写作 $\omega(t) = \mathbf{u}(t) \omega(t)$, 并称 \mathbf{u} 为旋转轴。在旋转轴恒定的情况下 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}$, 我们有 $\omega_n \times \omega_{n+1} = 0$, 因此,

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n \otimes \mathbf{q}\{\mathbf{u} \bar{\omega} \Delta t\} . \quad (228)$$

事实上, 这个结果对于不仅限于 $\omega(t)$ 的一阶导数的情况是很有意义的。实际上, 如果旋转轴是恒定的, 那么旋转对四元数的微小贡献是可交换的, 即,

$$\exp(\mathbf{u} \omega_1 \delta t_1) \exp(\mathbf{u} \omega_2 \delta t_2) = \exp(\mathbf{u} \omega_2 \delta t_2) \exp(\mathbf{u} \omega_1 \delta t_1) = \exp(\mathbf{u} (\omega_1 \delta t_1 + \omega_2 \delta t_2)) ,$$

因此我们得到以下恒等式,

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n \otimes \exp \left(\frac{\mathbf{u}}{2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \omega(t) \delta t \right) \quad (229a)$$

$$= \mathbf{q}_n \otimes \exp(\mathbf{u} \Delta \theta_n / 2) \quad (229b)$$

$$= \mathbf{q}_n \otimes \mathbf{q}\{\mathbf{u} \Delta \theta_n\} . \quad (229c)$$

其中 $\Delta \theta_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \omega(t) dt \in \mathbb{R}$ 是在区间 $[t_n, t_{n+1}]$ 内旋转的总角度。

²²还可以注意到, 从 (226) 可以看出, 如果四元数乘法是交换的, 这项将始终消失, 但四元数乘法并非交换的。

旋转轴变化的情况 显然, (227) 中和式的第二项通过 $\omega_n \times \omega_{n+1} \neq 0$ 捕捉到旋转轴变化对积分方向的影响。对于其实际应用, 我们注意到, 由于惯性的原因, 通常 IMU 的采样时间 $\Delta t \leq 0.01\text{s}$, 以及通常 ω_n 和 ω_{n+1} 的近共线性, 这个二阶项的值大约为 $10^{-6}\|\omega\|^2$, 或者更小。具有更高重数的 $\omega\Delta t$ 项更小, 已经被忽略。

请注意, 虽然所有零阶积分器在构造时都会得到单位四元数 (因为它们是作为两个单位四元数的乘积计算的), 但由于 (227) 中的和项, 对于一阶积分器来说情况并非如此。因此, 在使用一阶积分器时, 即使如前所述和项很小, 用户仍应注意检查四元数范数随时间的变化, 并在需要时对四元数进行重新归一化, 使用四元数更新形式 $\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{q}/\|\mathbf{q}\|$ 。只有当假设旋转轴恒定时, (228) 才成立, 这时重新归一化就不再是必要的。

5 IMU 驱动系统的误差状态运动学

5.1 动机

我们希望写出惯性系统的误差状态方程, 该系统通过整合带有偏差和噪声的加速度计和陀螺仪读数, 并使用哈密顿四元数来表示空间中的姿态或者说方向。加速度计和陀螺仪读数通常来自惯性测量单元 (IMU)。通过 IMU 度数积分可以得到航位推算定位系统, 但是这种系统会随着时间漂移。避免漂移的关键是将这些信息与绝对位置读数 (如 GPS 或视觉) 融合。误差状态卡尔曼滤波器 (ESKF) 是我们可以用于这一目的的工具之一。在卡尔曼滤波范式中, ESKF 的最显著优势如下 (Madyastha et al., 2011):

- 方向误差状态是最小的 (即, 它的参数数量与自由度相同), 避免了与过度参数化 (或冗余) 相关的问题, 以及由于强制约束而导致的涉及协方差矩阵的奇异性的风险。
- 误差状态系统总是在原点附近运行, 因此远离可能的参数奇异性、万向节锁定问题等, 确保线性化的有效性始终保持。
- 误差状态始终很小, 这意味着所有二阶乘积都是可以忽略的。这使得雅可比矩阵的计算非常简单快速。有些雅可比矩阵甚至可能是常数或等于可用状态量。
- 误差动态变化很慢, 因为所有大信号动态都已经集成在名义状态中。这意味着我们可以以比预测更低的速率应用 KF 校正 (这是观察误差的唯一手段)。

5.2 解释误差状态卡尔曼滤波器

在误差状态滤波器的表述中, 我们谈论真实状态、名义状态和误差状态值, 真实状态被表达为名义状态和误差状态的合适组合 (线性和、四元数乘积或矩阵乘积)。这个想法是将名义状态视为大信号 (以非线性方式可积分), 将误差状态视为小信号 (因此线性可积分, 适用于线性高斯滤波)。

误差状态滤波器可以解释如下。

一方面, 高频 IMU 数据 \mathbf{u}_m 被积分到名义状态 \mathbf{x} 中。这个名义状态不考虑噪声项 \mathbf{w} 和其他可能的模型缺陷。结果, 它会积累误差。这些误差被收集在误差状态 $\delta\mathbf{x}$ 中, 并通过误差状态卡尔曼滤波器 (ESKF) 进行估计, 这一次包括所有的噪声和扰动。误差状态

由小信号幅度组成，其演化函数由一个（时间变化的）线性动态系统正确定义，其动态、控制和测量矩阵是从名义状态的值计算得到的。与名义状态的积分并行，ESKF 预测了误差状态的高斯估计。它只是预测，因为现在没有其他测量可用来校正这些估计。在除 IMU 之外的信息到达时（例如 GPS、视觉等），滤波器校正被执行，这些信息能够使误差可观测，通常发生在比积分阶段低得多的速率。这种校正提供了误差状态的后验高斯估计。之后，误差状态的均值被注入到名义状态中，然后被重置为零。误差状态的协方差矩阵被方便地更新以反映这个重置。系统就这样永远继续下去。

5.3 连续时间系统运动学

所有涉及变量的定义总结在 Table 3 中。有两个关于约定的重要决定值得一提：

- 角速度 ω 是相对于名义四元数局部定义的。这使我们可以直接使用陀螺仪测量 ω_m ，因为它们提供了以机体为参考的角速度。
- 角误差 $\delta\theta$ 也是相对于名义方向局部定义的。这不一定是最佳的处理方式，但它对应于大多数 IMU 集成工作中的选择——我们可以称之为经典方法。有证据表明 (Li and Mourikis, 2012)，全局定义的角误差具有更好的性质。这也将在本文档中探讨，Section 7，但这里的大部分发展、例子和算法都是基于这种局部定义的角误差。

5.3.1 真实状态的运动学

真实运动学方程为

$$\dot{\mathbf{p}}_t = \mathbf{v}_t \quad (230a)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_t = \mathbf{a}_t \quad (230b)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_t = \frac{1}{2} \mathbf{q}_t \otimes \omega_t \quad (230c)$$

$$\dot{\mathbf{a}}_{bt} = \mathbf{a}_w \quad (230d)$$

$$\dot{\omega}_{bt} = \omega_w \quad (230e)$$

$$\dot{\mathbf{g}}_t = 0 \quad (230f)$$

在 (232) 中描述的旋转运动学中，通常忽略地球的自转速率 ω_ε ，否则将是 $\omega_m = \omega_t + \mathbf{R}_t^\top \omega_\varepsilon + \omega_{bt} + \omega_n$ 。在绝大多数实际情况下，考虑非零的地球自转速率复杂且没有理由的。然而，我们注意到，当使用具有非常小的噪声和偏差的高端 IMU 传感器时， $\omega_\varepsilon = 15^\circ/\text{h} \approx 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$ 的值可能会直接测量；在这种情况下，为了保持 IMU 误差模型有效，不应该在公式中忽略速率 ω_ε 。

$$\mathbf{a}_m = \mathbf{R}_t^\top (\mathbf{a}_t - \mathbf{g}_t) + \mathbf{a}_{bt} + \mathbf{a}_n \quad (231)$$

$$\omega_m = \omega_t + \omega_{bt} + \omega_n \quad (232)$$

其中 $\mathbf{R}_t \triangleq \mathbf{R}\{\mathbf{q}_t\}$ 。这样，真实值可以被分离出来（这意味着我们已经反转了测量方程），

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{R}_t (\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_{bt} - \mathbf{a}_n) + \mathbf{g}_t \quad (233)$$

$$\omega_t = \omega_m - \omega_{bt} - \omega_n. \quad (234)$$

Table 3: 误差状态卡尔曼滤波器中的所有变量。

Magnitude	真实	名义	误差	组合	测量	噪声
全部状态 ⁽¹⁾	\mathbf{x}_t	\mathbf{x}	$\delta\mathbf{x}$	$\mathbf{x}_t = \mathbf{x} \oplus \delta\mathbf{x}$		
位置	\mathbf{p}_t	\mathbf{p}	$\delta\mathbf{p}$	$\mathbf{p}_t = \mathbf{p} + \delta\mathbf{p}$		
速度	\mathbf{v}_t	\mathbf{v}	$\delta\mathbf{v}$	$\mathbf{v}_t = \mathbf{v} + \delta\mathbf{v}$		
四元数 ^(2,3)	\mathbf{q}_t	\mathbf{q}	$\delta\mathbf{q}$	$\mathbf{q}_t = \mathbf{q} \otimes \delta\mathbf{q}$		
旋转矩阵 ^(2,3)	\mathbf{R}_t	\mathbf{R}	$\delta\mathbf{R}$	$\mathbf{R}_t = \mathbf{R} \delta\mathbf{R}$		
轴角向量 ⁽⁴⁾			$\delta\boldsymbol{\theta}$	$\delta\mathbf{q} = e^{\delta\boldsymbol{\theta}/2}$ $\delta\mathbf{R} = e^{[\delta\boldsymbol{\theta}]_{\times}}$		
加速度计零偏	\mathbf{a}_{bt}	\mathbf{a}_b	$\delta\mathbf{a}_b$	$\mathbf{a}_{bt} = \mathbf{a}_b + \delta\mathbf{a}_b$		\mathbf{a}_w
陀螺仪零偏	$\boldsymbol{\omega}_{bt}$	$\boldsymbol{\omega}_b$	$\delta\boldsymbol{\omega}_b$	$\boldsymbol{\omega}_{bt} = \boldsymbol{\omega}_b + \delta\boldsymbol{\omega}_b$		$\boldsymbol{\omega}_w$
重力向量	\mathbf{g}_t	\mathbf{g}	$\delta\mathbf{g}$	$\mathbf{g}_t = \mathbf{g} + \delta\mathbf{g}$		
加速度	\mathbf{a}_t				\mathbf{a}_m	\mathbf{a}_n
角速率	$\boldsymbol{\omega}_t$				$\boldsymbol{\omega}_m$	$\boldsymbol{\omega}_n$

⁽¹⁾ 符号 \oplus 表示一种通用的组合。

⁽²⁾ 表示非最简表达。

⁽³⁾ 对于全局定义的角度误差的组合公式，见 Table 4

⁽⁴⁾ 指数函数定义如式 (101) 和 (69, 77) 所示。

代入上述得到运动学系统

$$\dot{\mathbf{p}}_t = \mathbf{v}_t \quad (235a)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_t = \mathbf{R}_t(\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_{bt} - \mathbf{a}_n) + \mathbf{g}_t \quad (235b)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_t = \frac{1}{2}\mathbf{q}_t \otimes (\boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_{bt} - \boldsymbol{\omega}_n) \quad (235c)$$

$$\dot{\mathbf{a}}_{bt} = \mathbf{a}_w \quad (235d)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{bt} = \boldsymbol{\omega}_w \quad (235e)$$

$$\dot{\mathbf{g}}_t = 0 \quad (235f)$$

我们可以称之为 $\dot{\mathbf{x}}_t = f_t(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}, \mathbf{w})$ 。这个系统有状态 \mathbf{x}_t ，由 IMU 噪声读数 \mathbf{u}_m 控制，由白高斯噪声 \mathbf{w} 扰动，所有定义为

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_t \\ \mathbf{v}_t \\ \mathbf{q}_t \\ \mathbf{a}_{bt} \\ \boldsymbol{\omega}_{bt} \\ \mathbf{g}_t \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_m - \mathbf{a}_n \\ \boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_w \\ \boldsymbol{\omega}_w \end{bmatrix}. \quad (236)$$

在上述公式中，重力矢量 \mathbf{g}_t 将由滤波器估计。它有一个恒定的演化方程，(235f)，因为它是已知为恒定的量。系统从一个固定的并且任意已知的初始方向 $\mathbf{q}_t(t=0) = \mathbf{q}_0$ 开始，通常不在水平平面上，使得初始重力矢量通常是未知的。为了简单起见，通常取 $\mathbf{q}_0 = (1, 0, 0, 0)$ ，因此 $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}\{\mathbf{q}_0\} = \mathbf{I}$ 。我们估计 \mathbf{g}_t 在框架 \mathbf{q}_0 中表示，而不是 \mathbf{q}_t 在水平框架中表示，因此方向的初始不确定性被转移到重力方向的初始不确定性。我们这样做是为了提高线性度：实际上，方程 (235b) 现在是 \mathbf{g} 的线性方程，它携带了所有的不确定性，而初始方向 \mathbf{q}_0 是已知的没有不确定性的，所以 \mathbf{q} 开始没有不确定性。一旦重力矢量被估计出来，水平平面就可以恢复，如果需要，整个状态和恢复的运动轨迹可以重新定向以反映估计的水平面。进一步的理由请参见 (Lupton and Sukkariéh, 2009)。当然，这是可选的，读者可以从系统中删除所有与重力有关的方程，并采用更经典的方法，即考虑 $\mathbf{g} \triangleq (0, 0, -9.8xx)$ ，其中 xx 是实验地点重力矢量的适当小数位数，以及一个不确定的初始方向 \mathbf{q}_0 。

5.3.2 名义状态的运动学

名义状态的运动学对应于没有噪声或扰动的模型系统，

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \quad (237a)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{R}(\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b) + \mathbf{g} \quad (237b)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \otimes (\boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_b) \quad (237c)$$

$$\dot{\mathbf{a}}_b = 0 \quad (237d)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = 0 \quad (237e)$$

$$\dot{\mathbf{g}} = 0. \quad (237f)$$

5.3.3 误差状态的运动学

目标是确定误差状态的线性化动态。对于每个状态方程，我们写出它的组合（在 Table 3中），解出误差状态并简化所有二阶无穷小。我们在这里给出完整的误差状态动态系

统，然后进行评论和证明。

$$\dot{\delta \mathbf{p}} = \delta \mathbf{v} \quad (238a)$$

$$\dot{\delta \mathbf{v}} = -\mathbf{R} [\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b]_{\times} \delta \boldsymbol{\theta} - \mathbf{R} \delta \mathbf{a}_b + \delta \mathbf{g} - \mathbf{R} \mathbf{a}_n \quad (238b)$$

$$\dot{\delta \boldsymbol{\theta}} = -[\boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_b]_{\times} \delta \boldsymbol{\theta} - \delta \boldsymbol{\omega}_b - \boldsymbol{\omega}_n \quad (238c)$$

$$\delta \mathbf{a}_b = \mathbf{a}_w \quad (238d)$$

$$\delta \boldsymbol{\omega}_b = \boldsymbol{\omega}_w \quad (238e)$$

$$\dot{\delta \mathbf{g}} = 0. \quad (238f)$$

方程 (238a)、(238d)、(238e) 和 (238f) 分别是位置、两个偏差和重力误差的线性方程，它们的误差状态动态是简单的。例如，考虑真实和名义位置方程 (235a) 和 (237a)，从 Table 3 中得到它们的组合 $\mathbf{p}_t = \mathbf{p} + \delta \mathbf{p}$ ，并解出 $\dot{\delta \mathbf{p}}$ 得到 (238a)。

方程 (238b) 和 (238c)，速度和方向误差，需要对非线性方程 (235b) 和 (??) 进行一些复杂的操作，以获得动态的线性化它们的证明在接下来的两节中展开。

方程 (238b): 线速度误差。 我们希望确定 $\dot{\delta \mathbf{v}}$ ，速度的动态误差。我们从以下关系开始

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{R}(\mathbf{I} + [\delta \boldsymbol{\theta}]_{\times}) + O(\|\delta \boldsymbol{\theta}\|^2) \quad (239)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{R} \mathbf{a}_B + \mathbf{g}, \quad (240)$$

其中 (239) 是 \mathbf{R}_t 的小信号近似，(240) 是 (237b) 的重写，但引入了 \mathbf{a}_B 和 $\delta \mathbf{a}_B$ ，定义为机体坐标系中的大信号和小信号加速度，

$$\mathbf{a}_B \triangleq \mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b \quad (241)$$

$$\delta \mathbf{a}_B \triangleq -\delta \mathbf{a}_b - \mathbf{a}_n \quad (242)$$

这样我们就可以将真实加速度写成惯性坐标系中的大信号和小信号项的组合，

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{R}_t(\mathbf{a}_B + \delta \mathbf{a}_B) + \mathbf{g} + \delta \mathbf{g}. \quad (243)$$

我们通过以两种不同的形式（左和右展开）写出 $\dot{\mathbf{v}}_t$ 的表达式 (235b)，其中忽略了 $O(\|\delta \boldsymbol{\theta}\|^2)$ 项，

$$\dot{\mathbf{v}} + \dot{\delta \mathbf{v}} = \boxed{\dot{\mathbf{v}}_t} = \mathbf{R}(\mathbf{I} + [\delta \boldsymbol{\theta}]_{\times})(\mathbf{a}_B + \delta \mathbf{a}_B) + \mathbf{g} + \delta \mathbf{g}$$

$$\mathbf{R} \mathbf{a}_B + \mathbf{g} + \dot{\delta \mathbf{v}} = \quad = \mathbf{R} \mathbf{a}_B + \mathbf{R} \delta \mathbf{a}_B + \mathbf{R} [\delta \boldsymbol{\theta}]_{\times} \mathbf{a}_B + \mathbf{R} [\delta \boldsymbol{\theta}]_{\times} \delta \mathbf{a}_B + \mathbf{g} + \delta \mathbf{g}$$

这在从左到右移除 $\mathbf{R} \mathbf{a}_B + \mathbf{g}$ 后导致

$$\dot{\delta \mathbf{v}} = \mathbf{R}(\delta \mathbf{a}_B + [\delta \boldsymbol{\theta}]_{\times} \mathbf{a}_B) + \mathbf{R} [\delta \boldsymbol{\theta}]_{\times} \delta \mathbf{a}_B + \delta \mathbf{g} \quad (244)$$

消除二阶项并重新组织一些叉乘项 ($[\mathbf{a}]_{\times} \mathbf{b} = -[\mathbf{b}]_{\times} \mathbf{a}$)，我们得到

$$\dot{\delta \mathbf{v}} = \mathbf{R}(\delta \mathbf{a}_B - [\mathbf{a}_B]_{\times} \delta \boldsymbol{\theta}) + \delta \mathbf{g}, \quad (245)$$

然后，回顾 (241) 和 (242)，

$$\dot{\delta \mathbf{v}} = \mathbf{R}(-[\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b]_{\times} \delta \boldsymbol{\theta} - \delta \mathbf{a}_b - \mathbf{a}_n) + \delta \mathbf{g} \quad (246)$$

经过适当的重新排列，得到线速度误差的动态，

$$\boxed{\dot{\delta \mathbf{v}} = -\mathbf{R}[\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b]_{\times} \delta \boldsymbol{\theta} - \mathbf{R} \delta \mathbf{a}_b + \delta \mathbf{g} - \mathbf{R} \mathbf{a}_n} . \quad (247)$$

为了进一步简化这个表达式，我们通常可以假设加速度计噪声是白噪声、具有不相关和各向同性²³，

$$\mathbb{E}[\mathbf{a}_n] = 0 \quad \mathbb{E}[\mathbf{a}_n \mathbf{a}_n^{\top}] = \sigma_a^2 \mathbf{I}, \quad (248)$$

即，协方差椭球是以原点为中心的球，这意味着其均值和协方差矩阵在旋转下不变（证明： $\mathbb{E}[\mathbf{R} \mathbf{a}_n] = \mathbf{R} \mathbb{E}[\mathbf{a}_n] = 0$ 和 $\mathbf{E}[(\mathbf{R} \mathbf{a}_n)(\mathbf{R} \mathbf{a}_n)^{\top}] = \mathbf{R} \mathbb{E}[\mathbf{a}_n \mathbf{a}_n^{\top}] \mathbf{R}^{\top} = \mathbf{R} \sigma_a^2 \mathbf{I} \mathbf{R}^{\top} = \sigma_a^2 \mathbf{I}$ ）。然后，我们可以重新定义加速度计噪声矢量，而不会产生任何后果，如下

$$\mathbf{a}_n \leftarrow \mathbf{R} \mathbf{a}_n \quad (249)$$

这得到了

$$\boxed{\dot{\delta \mathbf{v}} = -\mathbf{R}[\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b]_{\times} \delta \boldsymbol{\theta} - \mathbf{R} \delta \mathbf{a}_b + \delta \mathbf{g} - \mathbf{a}_n} . \quad (250)$$

Equation (238c): The orientation error. 我们希望确定 $\delta \boldsymbol{\theta}$ ，角误差的动态。我们从以下关系开始

$$\dot{\mathbf{q}}_t = \frac{1}{2} \mathbf{q}_t \otimes \boldsymbol{\omega}_t \quad (251)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\omega}, \quad (252)$$

这是四元数导数的真实和名义定义。

与加速度一样，我们将角速率中的大信号和小信号项分组以便清晰的表达，

$$\boldsymbol{\omega} \triangleq \boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_b \quad (253)$$

$$\delta \boldsymbol{\omega} \triangleq -\delta \boldsymbol{\omega}_b - \boldsymbol{\omega}_n, \quad (254)$$

这样 $\boldsymbol{\omega}_t$ 可以用一个名义部分和一个误差部分来表示，

$$\boldsymbol{\omega}_t = \boldsymbol{\omega} + \delta \boldsymbol{\omega}. \quad (255)$$

我们通过两种不同的方法（左和右展开）计算 $\dot{\mathbf{q}}_t$

$$\begin{aligned} (\mathbf{q} \otimes \delta \mathbf{q}) &= \boxed{\dot{\mathbf{q}}_t} = \frac{1}{2} \mathbf{q}_t \otimes \boldsymbol{\omega}_t \\ \dot{\mathbf{q}} \otimes \delta \mathbf{q} + \mathbf{q} \otimes \dot{\delta \mathbf{q}} &= \frac{1}{2} \mathbf{q} \otimes \delta \mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\omega}_t \\ \frac{1}{2} \mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\omega} \otimes \delta \mathbf{q} + \mathbf{q} \otimes \dot{\delta \mathbf{q}} &= \end{aligned}$$

²³在三个 XYZ 加速度计不相同的情况下，不能做出这种假设。

简化主导的 \mathbf{q} 并分离 $\delta\dot{\mathbf{q}}$, 我们得到

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 \\ \delta\dot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} &= \boxed{2\delta\dot{\mathbf{q}}} = \delta\mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\omega}_t - \boldsymbol{\omega} \otimes \delta\mathbf{q} \\
&= [\mathbf{q}]_R(\boldsymbol{\omega}_t)\delta\mathbf{q} - [\mathbf{q}]_L(\boldsymbol{\omega})\delta\mathbf{q} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -(\boldsymbol{\omega}_t - \boldsymbol{\omega})^\top \\ (\boldsymbol{\omega}_t - \boldsymbol{\omega}) & -[\boldsymbol{\omega}_t + \boldsymbol{\omega}]_\times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \delta\boldsymbol{\theta}/2 \end{bmatrix} + O(\|\delta\boldsymbol{\theta}\|^2) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\delta\boldsymbol{\omega}^\top \\ \delta\boldsymbol{\omega} & -[2\boldsymbol{\omega} + \delta\boldsymbol{\omega}]_\times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \delta\boldsymbol{\theta}/2 \end{bmatrix} + O(\|\delta\boldsymbol{\theta}\|^2)
\end{aligned} \tag{256}$$

这导致一个标量和一个矢量等式方程

$$0 = \delta\boldsymbol{\omega}^\top \delta\boldsymbol{\theta} + O(\|\delta\boldsymbol{\theta}\|^2) \tag{257a}$$

$$\delta\dot{\boldsymbol{\theta}} = \delta\boldsymbol{\omega} - [\boldsymbol{\omega}]_\times \delta\boldsymbol{\theta} - \frac{1}{2} [\delta\boldsymbol{\omega}]_\times \delta\boldsymbol{\theta} + O(\|\delta\boldsymbol{\theta}\|^2). \tag{257b}$$

第一个方程得到 $\delta\boldsymbol{\omega}^\top \delta\boldsymbol{\theta} = O(\|\delta\boldsymbol{\theta}\|^2)$, 由二阶无穷小组成, 没有太大用处。第二个方程得到, 在忽略所有二阶项后,

$$\delta\dot{\boldsymbol{\theta}} = -[\boldsymbol{\omega}]_\times \delta\boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\omega} \tag{258}$$

最后, 回顾 (253) 和 (254), 我们得到动态线性化的角误差,

$$\boxed{\delta\dot{\boldsymbol{\theta}} = -[\boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_b]_\times \delta\boldsymbol{\theta} - \delta\boldsymbol{\omega}_b - \boldsymbol{\omega}_n} . \tag{259}$$

5.4 离散时间下的系统运动学

上述微分方程需要被积分成差分方程, 以考虑离散时间间隔 $\Delta t > 0$ 。积分方法可能有所不同。在某些情况下, 可以使用精确的闭合形式解。在其他情况下, 可以使用不同精度的数值积分。有关积分方法的相关细节, 请参考附录。

需要对以下子系统进行积分:

1. 名义状态。
2. 误差状态。
 - (a) 确定性部分: 状态动态和控制。
 - (b) 随机部分: 噪声和扰动。

5.4.1 名义状态的运动学

我们可以将名义状态的差分方程写成

$$\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p} + \mathbf{v} \Delta t + \frac{1}{2}(\mathbf{R}(\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b) + \mathbf{g}) \Delta t^2 \quad (260a)$$

$$\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v} + (\mathbf{R}(\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b) + \mathbf{g}) \Delta t \quad (260b)$$

$$\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}\{(\boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_b) \Delta t\} \quad (260c)$$

$$\mathbf{a}_b \leftarrow \mathbf{a}_b \quad (260d)$$

$$\boldsymbol{\omega}_b \leftarrow \boldsymbol{\omega}_b \quad (260e)$$

$$\mathbf{g} \leftarrow \mathbf{g}, \quad (260f)$$

其中 $x \leftarrow f(x, \bullet)$ 表示类型为 $x_{k+1} = f(x_k, \bullet_k)$ 的时间更新, $\mathbf{R} \triangleq \mathbf{R}\{\mathbf{q}\}$ 是与当前名义方向 \mathbf{q} 相关联的旋转矩阵, $\mathbf{q}\{v\}$ 是与旋转 v 相关联的四元数, 根据 (101)。

我们还可以使用更精确的积分, 请参考附录获取更多信息。

5.4.2 误差状态的运动学

确定性部分通常是正常积分的 (在这种情况下, 我们遵循 App. C.2 中的方法), 随机部分的积分导致随机向量 (见 App. E), 因此,

$$\delta \mathbf{p} \leftarrow \delta \mathbf{p} + \delta \mathbf{v} \Delta t \quad (261a)$$

$$\delta \mathbf{v} \leftarrow \delta \mathbf{v} + (-\mathbf{R}[\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b]_{\times} \delta \boldsymbol{\theta} - \mathbf{R} \delta \mathbf{a}_b + \delta \mathbf{g}) \Delta t + \mathbf{v}_i \quad (261b)$$

$$\delta \boldsymbol{\theta} \leftarrow \mathbf{R}^{\top} \{(\boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_b) \Delta t\} \delta \boldsymbol{\theta} - \delta \boldsymbol{\omega}_b \Delta t + \boldsymbol{\theta}_i \quad (261c)$$

$$\delta \mathbf{a}_b \leftarrow \delta \mathbf{a}_b + \mathbf{a}_i \quad (261d)$$

$$\delta \boldsymbol{\omega}_b \leftarrow \delta \boldsymbol{\omega}_b + \boldsymbol{\omega}_i \quad (261e)$$

$$\delta \mathbf{g} \leftarrow \delta \mathbf{g}. \quad (261f)$$

这里, \mathbf{v}_i 、 $\boldsymbol{\theta}_i$ 、 \mathbf{a}_i 和 $\boldsymbol{\omega}_i$ 是应用于速度、方向和偏差估计的随机向量, 由白高斯过程建模。它们的均值为零, 其协方差矩阵是通过在步长时间 Δt 上积分 \mathbf{a}_n 、 $\boldsymbol{\omega}_n$ 、 \mathbf{a}_w 和 $\boldsymbol{\omega}_w$ 的协方差得到的 (见 App. E),

$$\mathbf{V}_i = \sigma_{\tilde{\mathbf{a}}_n}^2 \Delta t^2 \mathbf{I} \quad [m^2/s^2] \quad (262)$$

$$\boldsymbol{\Theta}_i = \sigma_{\tilde{\boldsymbol{\omega}}_n}^2 \Delta t^2 \mathbf{I} \quad [rad^2] \quad (263)$$

$$\mathbf{A}_i = \sigma_{\mathbf{a}_w}^2 \Delta t \mathbf{I} \quad [m^2/s^4] \quad (264)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_i = \sigma_{\boldsymbol{\omega}_w}^2 \Delta t \mathbf{I} \quad [rad^2/s^2] \quad (265)$$

其中 $\sigma_{\tilde{\mathbf{a}}_n}[m/s^2]$ 、 $\sigma_{\tilde{\boldsymbol{\omega}}_n}[rad/s]$ 、 $\sigma_{\mathbf{a}_w}[m/s^2\sqrt{s}]$ 和 $\sigma_{\boldsymbol{\omega}_w}[rad/s\sqrt{s}]$ 需要根据 IMU 数据表中的信息或实验测量结果确定。

5.4.3 误差状态雅可比矩阵和扰动矩阵

雅可比矩阵通过简单检查上一节中的误差状态差分方程获得。

为了以紧凑的形式写出这些方程，我们考虑名义状态向量 \mathbf{x} 、误差状态向量 $\delta\mathbf{x}$ 、输入向量 \mathbf{u}_m 和扰动向量 \mathbf{i} ，如下（详细信息和理由见 App. E.1），

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{q} \\ \mathbf{a}_b \\ \boldsymbol{\omega}_b \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}, \quad \delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{p} \\ \delta\mathbf{v} \\ \delta\boldsymbol{\theta} \\ \delta\mathbf{a}_b \\ \delta\boldsymbol{\omega}_b \\ \delta\mathbf{g} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_m \\ \boldsymbol{\omega}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \boldsymbol{\theta}_i \\ \mathbf{a}_i \\ \boldsymbol{\omega}_i \end{bmatrix} \quad (266)$$

误差状态系统现在为

$$\delta\mathbf{x} \leftarrow f(\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}, \mathbf{u}_m, \mathbf{i}) = \mathbf{F}_x(\mathbf{x}, \mathbf{u}_m) \cdot \delta\mathbf{x} + \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{i}, \quad (267)$$

ESKF 预测方程可以写成：

$$\hat{\delta\mathbf{x}} \leftarrow \mathbf{F}_x(\mathbf{x}, \mathbf{u}_m) \cdot \hat{\delta\mathbf{x}} \quad (268)$$

$$\mathbf{P} \leftarrow \mathbf{F}_x \mathbf{P} \mathbf{F}_x^\top + \mathbf{F}_i \mathbf{Q}_i \mathbf{F}_i^\top, \quad (269)$$

其中 $\delta\mathbf{x} \sim \mathcal{N}\{\hat{\delta\mathbf{x}}, \mathbf{P}\}$ ²⁴； \mathbf{F}_x 和 \mathbf{F}_i 是 $f()$ 相对于误差和扰动向量的雅可比矩阵； \mathbf{Q}_i 是扰动向量的协方差矩阵。

上述雅可比矩阵和协方差矩阵的表达式如下。这里出现的所有与状态相关的值都直接从名义状态中提取。

$$\mathbf{F}_x = \left. \frac{\partial f}{\partial \delta\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}, \mathbf{u}_m} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I}\Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & -\mathbf{R}[\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b]_\times \Delta t & -\mathbf{R}\Delta t & 0 & \mathbf{I}\Delta t \\ 0 & 0 & \mathbf{R}^\top\{(\boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_b)\Delta t\} & 0 & -\mathbf{I}\Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (270)$$

$$\mathbf{F}_i = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{i}} \right|_{\mathbf{x}, \mathbf{u}_m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Theta}_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{\Omega}_i \end{bmatrix}. \quad (271)$$

请特别注意， \mathbf{F}_x 是系统的转移矩阵，可以通过多种方法以不同精度近似。我们在这里展示了它的最简单形式之一（欧拉形式）。参见附录B到D以获取更多参考资料。

还请注意，由于误差 $\delta\mathbf{x}$ 的均值初始化为零，线性方程 (268) 总是返回零。你应该在代码中跳过 (268) 行。我建议你写下它，但是你要注释掉它，这样你就可以确保没有遗漏任何东西。

最后，请注意，你不应该跳过协方差预测 (269)!! 实际上， $\mathbf{F}_i \mathbf{Q}_i \mathbf{F}_i^\top$ 项不为零，因此这个协方差会持续增长——在任何预测步骤中都必须如此。

²⁴ $x \sim \mathcal{N}\{\mu, \Sigma\}$ 表示 x 是一个均值和协方差矩阵由 μ 和 Σ 指定的高斯随机变量。

6 将 IMU 与互补传感器数据融合

当除 IMU 之外的其他信息到达时，例如 GPS 或视觉，我们将对 ESKF 进行校正。在设计良好的系统中，这应该使 IMU 偏差可观测，并允许 ESKF 正确估计它们。有无数的可能性，最流行的是 GPS + IMU、单目视觉 + IMU 和立体视觉 + IMU。近年来，视觉传感器与 IMU 的组合引起了很多关注，因此产生了大量的科学活动。这些视觉 + IMU 设置非常适合在无 GPS 环境中使用，并且可以在移动设备（通常是智能手机）上实现，也可以在无人机和其他小型、灵活的平台实现。

到目前为止，IMU 信息用于对 ESKF 进行预测，而其他信息用于校正滤波器，从而观察 IMU 偏差误差。校正包括三个步骤：

1. 通过滤波器校正观察误差状态，
2. 将观察到的误差注入名义状态，以及
3. 重置误差状态。

这些步骤在以下各节中详细介绍。

6.1 通过滤波器校正观察误差状态

通常情况下，我们假设有一个传感器，它提供依赖于状态的信息，例如

$$\mathbf{y} = h(\mathbf{x}_t) + v, \quad (272)$$

其中 $h()$ 是系统状态（真实状态）的一般非线性函数， v 是具有协方差 \mathbf{V} 的白高斯噪声，

$$v \sim \mathcal{N}\{0, \mathbf{V}\}. \quad (273)$$

我们的滤波器正在估计误差状态，因此滤波器校对方程²⁵，

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{H}^\top (\mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^\top + \mathbf{V})^{-1} \quad (274)$$

$$\delta\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{K}(\mathbf{y} - h(\hat{\mathbf{x}}_t)) \quad (275)$$

$$\mathbf{P} \leftarrow (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{P} \quad (276)$$

需要定义雅可比矩阵 \mathbf{H} 相对于误差状态 $\delta\mathbf{x}$ ，并在最佳真实状态估计 $\hat{\mathbf{x}}_t = \mathbf{x} \oplus \delta\mathbf{x}$ 处进行评估。在这个阶段，误差状态均值为零（我们还没有观察到它），我们有 $\hat{\mathbf{x}}_t = \mathbf{x}$ ，我们可以使用名义误差 \mathbf{x} 作为评估点，导致

$$\mathbf{H} \equiv \left. \frac{\partial h}{\partial \delta\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}}. \quad (277)$$

²⁵我们给出了协方差更新的最简单形式， $\mathbf{P} \leftarrow (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{P}$ 。这种形式已知数值稳定性较差，因为其结果不能保证是对称的也不一定是正定的。读者可以使用更稳定的形式，例如 1) 对称形式 $\mathbf{P} \leftarrow \mathbf{P} - \mathbf{K}(\mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^\top + \mathbf{V})\mathbf{K}^\top$ 和 2) 对称和正定的 *Joseph* 形式 $\mathbf{P} \leftarrow (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{P}(\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})^\top + \mathbf{K}\mathbf{V}\mathbf{K}^\top$ 。

6.1.1 滤波器校正的雅可比矩阵计算

上述雅可比矩阵可以通过多种方式计算。最具说明性的方法是利用链式法则，

$$\mathbf{H} \triangleq \frac{\partial h}{\partial \delta \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}_t} \bigg|_{\mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}_t}{\partial \delta \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}} = \mathbf{H}_{\mathbf{x}} \mathbf{X}_{\delta \mathbf{x}}. \quad (278)$$

这里， $\mathbf{H}_{\mathbf{x}} \triangleq \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}_t} \bigg|_{\mathbf{x}}$ 是 $h()$ 相对于自己的参数的标准雅可比矩阵（即，在常规 EKF 中使用的雅可比矩阵）。链式法则的第一部分取决于所使用的特定传感器的测量函数，这里不做介绍。

第二部分 $\mathbf{X}_{\delta \mathbf{x}} \triangleq \frac{\partial \mathbf{x}_t}{\partial \delta \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}}$ 是真实状态相对于误差状态的雅可比矩阵。这部分可以在这里推导，因为它只取决于 ESKF 状态的组合。我们有导数，

$$\mathbf{X}_{\delta \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\mathbf{p}+\delta \mathbf{p})}{\partial \delta \mathbf{p}} & & & & & \\ & \frac{\partial(\mathbf{v}+\delta \mathbf{v})}{\partial \delta \mathbf{v}} & & & & 0 \\ & & \frac{\partial(\mathbf{q} \otimes \delta \mathbf{q})}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}} & & & \\ & & & \frac{\partial(\mathbf{a}_b + \delta \mathbf{a}_b)}{\partial \delta \mathbf{a}_b} & & \\ 0 & & & & \frac{\partial(\boldsymbol{\omega}_b + \delta \boldsymbol{\omega}_b)}{\partial \delta \boldsymbol{\omega}_b} & \\ & & & & & \frac{\partial(\mathbf{g} + \delta \mathbf{g})}{\partial \delta \mathbf{g}} \end{bmatrix} \quad (279)$$

这导致所有的单位 3×3 块（例如， $\frac{\partial(\mathbf{p}+\delta \mathbf{p})}{\partial \delta \mathbf{p}} = \mathbf{I}_3$ ）除了 4×3 四元数项 $\mathbf{Q}_{\delta \boldsymbol{\theta}} = \partial(\mathbf{q} \otimes \delta \mathbf{q}) / \partial \delta \boldsymbol{\theta}$ 。因此，我们有以下形式，

$$\mathbf{X}_{\delta \mathbf{x}} \triangleq \frac{\partial \mathbf{x}_t}{\partial \delta \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_6 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_{\delta \boldsymbol{\theta}} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_9 \end{bmatrix} \quad (280)$$

使用链式法则，方程 (17-19) 和极限 $\delta \mathbf{q} \xrightarrow{\delta \boldsymbol{\theta} \rightarrow 0} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}$ ，可以导出四元数项 $\mathbf{Q}_{\delta \boldsymbol{\theta}}$ 如下，

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\delta \boldsymbol{\theta}} &\triangleq \frac{\partial(\mathbf{q} \otimes \delta \mathbf{q})}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}} \bigg|_{\mathbf{q}} = \frac{\partial(\mathbf{q} \otimes \delta \mathbf{q})}{\partial \delta \mathbf{q}} \bigg|_{\mathbf{q}} \frac{\partial \delta \mathbf{q}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}} \bigg|_{\delta \boldsymbol{\theta}=0} \\ &= \frac{\partial([\mathbf{q}]_L \delta \mathbf{q})}{\partial \delta \mathbf{q}} \bigg|_{\mathbf{q}} \frac{\partial \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}} \bigg|_{\delta \boldsymbol{\theta}=0} \\ &= [\mathbf{q}]_L \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

这得到了

$$\mathbf{Q}_{\delta \boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_x & -q_y & -q_z \\ q_w & -q_z & q_y \\ q_z & q_w & -q_x \\ -q_y & q_x & q_w \end{bmatrix}. \quad (281)$$

•

6.2 将观察到的误差注入名义状态

ESKF 更新后，使用适当的组合（求和或四元数乘积，参见 Table 3）将观察到的误差状态注入名义状态，

$$\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} \oplus \hat{\delta\mathbf{x}}, \quad (282)$$

即，

$$\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p} + \hat{\delta\mathbf{p}} \quad (283a)$$

$$\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v} + \hat{\delta\mathbf{v}} \quad (283b)$$

$$\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}\{\hat{\delta\boldsymbol{\theta}}\} \quad (283c)$$

$$\mathbf{a}_b \leftarrow \mathbf{a}_b + \hat{\delta\mathbf{a}}_b \quad (283d)$$

$$\boldsymbol{\omega}_b \leftarrow \boldsymbol{\omega}_b + \hat{\delta\boldsymbol{\omega}}_b \quad (283e)$$

$$\mathbf{g} \leftarrow \mathbf{g} + \hat{\delta\mathbf{g}} \quad (283f)$$

6.3 ESKF 重置

在将误差注入名义状态后，误差状态均值 $\hat{\delta\mathbf{x}}$ 被重置。这对于方向部分尤为重要，因为新的方向误差将相对于新名义状态的方向框架在本地表达。为了使 ESKF 更新完整，需要根据这种修改更新误差的协方差。

我们将误差重置函数称为 $g()$ 。它的表达式如下，

$$\delta\mathbf{x} \leftarrow g(\delta\mathbf{x}) = \delta\mathbf{x} \ominus \hat{\delta\mathbf{x}}, \quad (284)$$

其中 \ominus 表示 \oplus 的逆运算。因此，ESKF 误差重置操作为，

$$\hat{\delta\mathbf{x}} \leftarrow \mathbf{0} \quad (285)$$

$$\mathbf{P} \leftarrow \mathbf{G} \mathbf{P} \mathbf{G}^\top. \quad (286)$$

其中 \mathbf{G} 是由以下定义的雅可比矩阵，

$$\mathbf{G} \triangleq \left. \frac{\partial g}{\partial \delta\mathbf{x}} \right|_{\hat{\delta\mathbf{x}}}. \quad (287)$$

与上面的更新雅可比矩阵类似，这个雅可比矩阵在所有对角块上都是单位矩阵，除了方向误差。我们在这里给出完整的表达式，并在下一节中推导方向误差块 $\partial\delta\boldsymbol{\theta}^+/\partial\delta\boldsymbol{\theta} = \mathbf{I} - \left[\frac{1}{2}\hat{\delta\boldsymbol{\theta}}\right]_\times$ ，

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_6 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} - \left[\frac{1}{2}\hat{\delta\boldsymbol{\theta}}\right]_\times & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_9 \end{bmatrix}. \quad (288)$$

在大多数情况下，误差项 $\hat{\delta\theta}$ 可以忽略，从而简单地导致雅可比矩阵 $\mathbf{G} = \mathbf{I}_{18}$ ，因此误差重置是简单的。这是 ESKF 的大多数实现所做的。这里提供的表达式应该能够产生更精确的结果，这对于减少里程计系统中的长期误差漂移可能是有益的。

6.3.1 重置操作相对于方向误差的雅可比矩阵

我们希望得到新的角误差 $\delta\theta^+$ 相对于旧误差 $\delta\theta$ 和观察误差 $\hat{\delta\theta}$ 的表达式。考虑以下事实：

- 真实方向在误差重置时不会改变，即 $\mathbf{q}_t^+ = \mathbf{q}_t$ 。这给出：

$$\mathbf{q}^+ \otimes \delta\mathbf{q}^+ = \mathbf{q} \otimes \delta\mathbf{q} . \quad (289)$$

- 观察到的误差均值已经被注入到名义状态中（参见 (283c) 和 (123)）：

$$\mathbf{q}^+ = \mathbf{q} \otimes \hat{\mathbf{q}} . \quad (290)$$

结合这两个等式，我们得到 $\delta\mathbf{q}^+$ 的表达式，

$$\delta\mathbf{q}^+ = (\mathbf{q}^+)^* \otimes \mathbf{q} \otimes \delta\mathbf{q} = (\mathbf{q} \otimes \hat{\mathbf{q}})^* \otimes \mathbf{q} \otimes \delta\mathbf{q} = \hat{\delta\mathbf{q}}^* \otimes \delta\mathbf{q} = [\hat{\delta\mathbf{q}}^*]_L \cdot \delta\mathbf{q} . \quad (291)$$

考虑到 $\hat{\delta\mathbf{q}}^* \approx \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}\hat{\delta\theta} \end{bmatrix}$ ，上述等式可以展开为

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\delta\theta^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\hat{\delta\theta}^\top \\ -\frac{1}{2}\hat{\delta\theta} & \mathbf{I} - \left[\frac{1}{2}\hat{\delta\theta}\right]_\times \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\delta\theta \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\|\delta\theta\|^2) , \quad (292)$$

这给出一个标量方程和一个矢量方程，

$$\frac{1}{4}\hat{\delta\theta}^\top \delta\theta = \mathcal{O}(\|\delta\theta\|^2) \quad (293a)$$

$$\delta\theta^+ = -\hat{\delta\theta} + \left(\mathbf{I} - \left[\frac{1}{2}\hat{\delta\theta}\right]_\times\right) \delta\theta + \mathcal{O}(\|\delta\theta\|^2) , \quad (293b)$$

其中第一个方程并不是很有信息量，因为它只是一个无穷小关系。从第二个方程可以得出 $\hat{\delta\theta}^+ = 0$ ，这是我们从重置操作中期望的结果。通过简单的观察得到雅可比矩阵，

$$\boxed{\frac{\partial\delta\theta^+}{\partial\delta\theta} = \mathbf{I} - \left[\frac{1}{2}\hat{\delta\theta}\right]_\times} . \quad (294)$$

7 使用全局角度误差的 ESKF

我们在本节中探讨了将角度误差定义为全局参考的影响，而不是我们迄今为止使用的局部定义。我们重温第5和第6节的发展，并特别关注相对于新定义的变化子节。

全局定义的角度误差 $\delta\theta$ 意味着在左手边进行组合，即，

$$\mathbf{q}_t = \delta\mathbf{q} \otimes \mathbf{q} = \mathbf{q}\{\delta\theta\} \otimes \mathbf{q}.$$

为了完整起见，我们保留角速度向量 ω 的局部定义，即， $\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{q} \otimes \omega$ 在连续时间中，因此，无论角度误差是如何定义的，离散时间中 $\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}\{\omega\Delta t\}$ 。这样做是为了方便，因为陀螺仪提供的角速度测量是在机体坐标系中的，即局部坐标系。

7.1 连续时间中的系统运动学

7.1.1 真实状态和名义状态的运动学

真实和名义运动学不涉及误差，它们的方程保持不变。

7.1.2 误差状态的运动学

我们首先写出误差状态运动学的方程，然后继续进行评论和证明。

$$\dot{\delta\mathbf{p}} = \delta\mathbf{v} \tag{295a}$$

$$\dot{\delta\mathbf{v}} = -[\mathbf{R}(\mathbf{a}_m - b\mathbf{a}_b)]_{\times} \delta\theta - \mathbf{R}\delta\mathbf{a}_b + \delta\mathbf{g} - \mathbf{R}\mathbf{a}_n \tag{295b}$$

$$\dot{\delta\theta} = -\mathbf{R}\delta\omega_b - \mathbf{R}\omega_n \tag{295c}$$

$$\delta\dot{\mathbf{a}}_b = \mathbf{a}_w \tag{295d}$$

$$\delta\dot{\omega}_b = \omega_w \tag{295e}$$

$$\delta\dot{\mathbf{g}} = 0, \tag{295f}$$

其中，除了 $\dot{\delta\mathbf{v}}$ 和 $\dot{\delta\theta}$ 的方程外，所有方程都是平凡的。具体的详细表达式如下。

方程 (295b): 线速度误差。 我们希望确定 $\dot{\delta\mathbf{v}}$ ，即速度误差的动态。我们从以下关系开始，

$$\mathbf{R}_t = (\mathbf{I} + [\delta\theta]_{\times})\mathbf{R} + O(\|\delta\theta\|^2) \tag{296}$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{R}\mathbf{a}_B + \mathbf{g}, \tag{297}$$

其中，(296) 是使用全局定义的误差的 \mathbf{R}_t 的小信号近似，而在 (297) 中，我们引入了 \mathbf{a}_B 和 $\delta\mathbf{a}_B$ 作为机体坐标系中的大信号和小信号加速度，定义如 (241) 和 (242)，就像我们为局部定义的情况所做的那样。

我们继续以两种不同的形式（左侧和右侧展开）写出 $\dot{\mathbf{v}}_t$ 的表达式 (235b)，其中忽略了 $O(\|\delta\boldsymbol{\theta}\|^2)$ 项，

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}} + \delta\dot{\mathbf{v}} &= \boxed{\dot{\mathbf{v}}_t} = (\mathbf{I} + [\delta\boldsymbol{\theta}]_{\times})\mathbf{R}(\mathbf{a}_B + \delta\mathbf{a}_B) + \mathbf{g} + \delta\mathbf{g} \\ \mathbf{R}\mathbf{a}_B + \mathbf{g} + \delta\dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{R}\mathbf{a}_B + \mathbf{R}\delta\mathbf{a}_B + [\delta\boldsymbol{\theta}]_{\times}\mathbf{R}\mathbf{a}_B + [\delta\boldsymbol{\theta}]_{\times}\mathbf{R}\delta\mathbf{a}_B + \mathbf{g} + \delta\mathbf{g}\end{aligned}$$

将左侧和右侧的 $\mathbf{R}\mathbf{a}_B + \mathbf{g}$ 移除后，得到

$$\delta\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{R}\delta\mathbf{a}_B + [\delta\boldsymbol{\theta}]_{\times}\mathbf{R}(\mathbf{a}_B + \delta\mathbf{a}_B) + \delta\mathbf{g} \quad (298)$$

消除二阶项并重新组织一些叉乘项（使用 $[\mathbf{a}]_{\times}\mathbf{b} = -[\mathbf{b}]_{\times}\mathbf{a}$ ），我们得到

$$\delta\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{R}\delta\mathbf{a}_B - [\mathbf{R}\mathbf{a}_B]_{\times}\delta\boldsymbol{\theta} + \delta\mathbf{g}, \quad (299)$$

最后，回顾 (241) 和 (242) 并重新排列，我们得到速度误差的导数表达式，

$$\boxed{\delta\dot{\mathbf{v}} = -[\mathbf{R}(\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b)]_{\times}\delta\boldsymbol{\theta} - \mathbf{R}\delta\mathbf{a}_b + \delta\mathbf{g} - \mathbf{R}\mathbf{a}_n} \quad (300)$$

方程 (295c)：方向误差。 我们首先写出四元数导数的真实和名义定义，

$$\dot{\mathbf{q}}_t = \frac{1}{2}\mathbf{q}_t \otimes \boldsymbol{\omega}_t \quad (301)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\omega}, \quad (302)$$

请注意，我们使用全局定义的角度误差，即，

$$\mathbf{q}_t = \delta\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}. \quad (303)$$

与局部定义误差的情况一样，我们也将大信号和小信号角速度 (253-254) 组合在一起。我们通过两种不同的方法（左侧和右侧展开）计算 $\dot{\mathbf{q}}_t$ ，

$$\begin{aligned}(\delta\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}) &= \boxed{\dot{\mathbf{q}}_t} = \frac{1}{2}\mathbf{q}_t \otimes \boldsymbol{\omega}_t \\ \delta\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q} + \delta\mathbf{q} \otimes \dot{\mathbf{q}} &= \frac{1}{2}\delta\mathbf{q} \otimes \mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\omega}_t \\ \delta\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q} + \frac{1}{2}\delta\mathbf{q} \otimes \mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\omega} &= \end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{\omega}_t = \boldsymbol{\omega} + \delta\boldsymbol{\omega}$ ，这可以简化为

$$\delta\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q} = \frac{1}{2}\delta\mathbf{q} \otimes \mathbf{q} \otimes \delta\boldsymbol{\omega}. \quad (304)$$

右乘左右两边的项 \mathbf{q}^* ，并回忆 $\mathbf{q} \otimes \delta\boldsymbol{\omega} \otimes \mathbf{q}^* \equiv \mathbf{R}\delta\boldsymbol{\omega}$ ，我们可以进一步得到如下，

$$\begin{aligned}\dot{\delta\mathbf{q}} &= \frac{1}{2}\delta\mathbf{q} \otimes \mathbf{q} \otimes \delta\boldsymbol{\omega} \otimes \mathbf{q}^* \\ &= \frac{1}{2}\delta\mathbf{q} \otimes (\mathbf{R}\delta\boldsymbol{\omega}) \\ &= \frac{1}{2}\delta\mathbf{q} \otimes \delta\boldsymbol{\omega}_G, \end{aligned} \quad (305)$$

其中， $\delta\boldsymbol{\omega}_G \triangleq \mathbf{R}\delta\boldsymbol{\omega}$ 是在全局坐标系中表示的小信号角速度。然后，

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\delta\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} &= \boxed{2\dot{\delta\mathbf{q}}} = \delta\mathbf{q} \otimes \delta\boldsymbol{\omega}_G \\ &= \Omega(\delta\boldsymbol{\omega}_G) \delta\mathbf{q} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\delta\boldsymbol{\omega}_G^\top \\ \delta\boldsymbol{\omega}_G & -[\delta\boldsymbol{\omega}_G]_\times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \delta\boldsymbol{\theta}/2 \end{bmatrix} + O(\|\delta\boldsymbol{\theta}\|^2), \end{aligned} \quad (306)$$

这得到了一个标量和一个矢量相等式

$$0 = \delta\boldsymbol{\omega}_G^\top \delta\boldsymbol{\theta} + O(\|\delta\boldsymbol{\theta}\|^2) \quad (307a)$$

$$\dot{\delta\boldsymbol{\theta}} = \delta\boldsymbol{\omega}_G - \frac{1}{2}[\delta\boldsymbol{\omega}_G]_\times \delta\boldsymbol{\theta} + O(\|\delta\boldsymbol{\theta}\|^2). \quad (307b)$$

第一个方程得到 $\delta\boldsymbol{\omega}_G^\top \delta\boldsymbol{\theta} = O(\|\delta\boldsymbol{\theta}\|^2)$ ，由二阶无穷小形成，不是很有用。第二个方程在忽略所有二阶项后得到，

$$\dot{\delta\boldsymbol{\theta}} = \delta\boldsymbol{\omega}_G = \mathbf{R}\delta\boldsymbol{\omega}. \quad (308)$$

最后，回顾 (254)，我们得到动态线性化的全局角度误差，

$$\boxed{\dot{\delta\boldsymbol{\theta}} = -\mathbf{R}\delta\boldsymbol{\omega}_b - \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}_n}. \quad (309)$$

7.2 离散时间中的系统运动学

7.2.1 名义状态

名义状态方程不涉及误差，因此与角度误差定义为局部时相同。

7.2.2 误差状态

使用欧拉积分，我们得到以下一组差分方程，

$$\delta\mathbf{p} \leftarrow \delta\mathbf{p} + \delta\mathbf{v} \Delta t \quad (310a)$$

$$\delta\mathbf{v} \leftarrow \delta\mathbf{v} + (-[\mathbf{R}(\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b)]_\times \delta\boldsymbol{\theta} - \mathbf{R}\delta\mathbf{a}_b + \delta\mathbf{g})\Delta t + \mathbf{v}_i \quad (310b)$$

$$\delta\boldsymbol{\theta} \leftarrow \delta\boldsymbol{\theta} - \mathbf{R}\delta\boldsymbol{\omega}_b \Delta t + \boldsymbol{\theta}_i \quad (310c)$$

$$\delta\mathbf{a}_b \leftarrow \delta\mathbf{a}_b + \mathbf{a}_i \quad (310d)$$

$$\delta\boldsymbol{\omega}_b \leftarrow \delta\boldsymbol{\omega}_b + \boldsymbol{\omega}_i \quad (310e)$$

$$\delta\mathbf{g} \leftarrow \delta\mathbf{g}. \quad (310f)$$

7.2.3 误差状态雅可比矩阵和扰动矩阵

转移矩阵通过简单检查上述方程得到，

$$\mathbf{F}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I}\Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & -[\mathbf{R}(\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b)]_\times \Delta t & -\mathbf{R}\Delta t & 0 & \mathbf{I}\Delta t \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & -\mathbf{R}\Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (311)$$

我们观察到与局部定义角度误差的情况相比，有三个变化（将上述雅可比矩阵中的框起来的项与 (270) 中的项进行比较）；这些变化总结在 Table 4 中。

考虑各向同性噪声和 App. E 的推导后，扰动雅可比矩阵和扰动矩阵保持不变，

$$\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Theta}_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{\Omega}_i \end{bmatrix}. \quad (312)$$

7.3 与互补传感器数据融合

当考虑全局角度误差时，涉及 ESKF 机制的融合方程略有变化。我们通过 ESKF 校正、将误差注入到名义状态以及重置步骤，修正了误差状态观测中的这些变化。

7.3.1 误差状态观测

与局部误差定义相比，唯一的区别在于观测函数的雅可比矩阵块，它将方向与角度误差联系起来。下面对这个新的块进行详细展开。

使用 (17-19) 和一阶近似 $\delta \mathbf{q} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}$ ，可以得到如下的四元数项 $\mathbf{Q}_{\delta\boldsymbol{\theta}}$ ，

$$\mathbf{Q}_{\delta\boldsymbol{\theta}} \triangleq \left. \frac{\partial(\delta \mathbf{q} \otimes \mathbf{q})}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}} \right|_{\mathbf{q}} = \left. \frac{\partial(\delta \mathbf{q} \otimes \mathbf{q})}{\partial \delta \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}} \left. \frac{\partial \delta \mathbf{q}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}} \right|_{\delta \boldsymbol{\theta}=0} \quad (313a)$$

$$= [\mathbf{q}]_R \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (313b)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_x & -q_y & -q_z \\ q_w & q_z & -q_y \\ -q_z & q_w & q_x \\ q_y & -q_x & q_w \end{bmatrix}. \quad (313c)$$

7.3.2 将观测到的误差注入到名义状态

将名义状态和误差状态的组合 $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} \oplus \hat{\delta\mathbf{x}}$ 如下所示,

$$\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p} + \delta\mathbf{p} \quad (314a)$$

$$\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v} + \delta\mathbf{v} \quad (314b)$$

$$\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{q} \{\hat{\delta\boldsymbol{\theta}}\} \otimes \mathbf{q} \quad (314c)$$

$$\mathbf{a}_b \leftarrow \mathbf{a}_b + \delta\mathbf{a}_b \quad (314d)$$

$$\boldsymbol{\omega}_b \leftarrow \boldsymbol{\omega}_b + \delta\boldsymbol{\omega}_b \quad (314e)$$

$$\mathbf{g} \leftarrow \mathbf{g} + \delta\mathbf{g} . \quad (314f)$$

其中只有四元数更新方程受到影响。这在 Table 4中总结。

7.3.3 ESKF 重置

根据以下公式, ESKF 误差均值被重置, 协方差被更新,

$$\hat{\delta\mathbf{x}} \leftarrow 0 \quad (315)$$

$$\mathbf{P} \leftarrow \mathbf{G}\mathbf{P}\mathbf{G}^\top \quad (316)$$

其中雅可比矩阵为

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_6 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} + \left[\frac{1}{2}\hat{\delta\boldsymbol{\theta}}\right]_{\times} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_9 \end{bmatrix} \quad (317)$$

其中非平凡项的展开如下。我们的目标是得到新的角度误差 $\delta\boldsymbol{\theta}^+$ 相对于旧误差 $\delta\boldsymbol{\theta}$ 的表达式。我们考虑以下事实:

- 误差重置时真实方向不会改变, 即 $\mathbf{q}_t^+ \equiv \mathbf{q}_t$ 。这得到:

$$\delta\mathbf{q}^+ \otimes \mathbf{q}^+ = \delta\mathbf{q} \otimes \mathbf{q} . \quad (318)$$

- 观测到的误差均值已经被注入到名义状态中 (参见 (283c) 和 (123)):

$$\mathbf{q}^+ = \hat{\delta\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q} . \quad (319)$$

将这两个等式组合起来, 我们得到新的方向误差相对于旧误差和观测误差 $\hat{\delta\mathbf{q}}$ 的表达式,

$$\delta\mathbf{q}^+ = \delta\mathbf{q} \otimes \hat{\delta\mathbf{q}}^* = [\hat{\delta\mathbf{q}}^*]_R \cdot \delta\mathbf{q} . \quad (320)$$

考虑到 $\hat{\delta\mathbf{q}}^* \approx \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}\hat{\delta\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix}$, 上述等式可以展开为

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\theta}^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}\hat{\delta\boldsymbol{\theta}}^\top \\ -\frac{1}{2}\hat{\delta\boldsymbol{\theta}} & \mathbf{I} + \left[\frac{1}{2}\hat{\delta\boldsymbol{\theta}}\right]_{\times} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\|\delta\boldsymbol{\theta}\|^2) \quad (321)$$

Table 4: 与方向误差定义相关的算法修改。

内容	项目	局部角度误差	全局角度误差
误差更新	\mathbf{q}_t	$\mathbf{q}_t = \mathbf{q} \otimes \delta \mathbf{q}$	$\mathbf{q}_t = \delta \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}$
欧拉积分	$\partial \delta \mathbf{v}^+ / \partial \delta \boldsymbol{\theta}$	$-\mathbf{R} [\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b]_{\times} \Delta t$	$-\mathbf{R} (\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b)_{\times} \Delta t$
	$\partial \delta \boldsymbol{\theta}^+ / \partial \delta \boldsymbol{\theta}$	$\mathbf{R}^{\top} \{(\boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_b) \Delta t\}$	\mathbf{I}
	$\partial \delta \boldsymbol{\theta}^+ / \partial \delta \boldsymbol{\omega}_b$	$-\mathbf{I} \Delta t$	$-\mathbf{R} \Delta t$
误差观测	$\mathbf{Q}_{\delta \boldsymbol{\theta}}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_x & -q_y & -q_z \\ q_w & -q_z & q_y \\ q_z & q_w & -q_x \\ -q_y & q_x & q_w \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_x & -q_y & -q_z \\ q_w & q_z & -q_y \\ -q_z & q_w & q_x \\ q_y & -q_x & q_w \end{bmatrix}$
误差注入		$\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{q} \otimes \mathbf{q} \{\hat{\delta \boldsymbol{\theta}}\}$	$\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{q} \{\hat{\delta \boldsymbol{\theta}}\} \otimes \mathbf{q}$
误差重置	$\partial \delta \boldsymbol{\theta}^+ / \partial \delta \boldsymbol{\theta}$	$\mathbf{I} - \left[\frac{1}{2} \hat{\delta \boldsymbol{\theta}} \right]_{\times}$	$\mathbf{I} + \left[\frac{1}{2} \hat{\delta \boldsymbol{\theta}} \right]_{\times}$

这给出了一个标量和一个矢量方程，

$$\frac{1}{4} \hat{\delta \boldsymbol{\theta}}^{\top} \delta \boldsymbol{\theta} = \mathcal{O}(\|\delta \boldsymbol{\theta}\|^2) \quad (322a)$$

$$\delta \boldsymbol{\theta}^+ = -\hat{\delta \boldsymbol{\theta}} + \left(\mathbf{I} + \left[\frac{1}{2} \hat{\delta \boldsymbol{\theta}} \right]_{\times} \right) \delta \boldsymbol{\theta} + \mathcal{O}(\|\delta \boldsymbol{\theta}\|^2) \quad (322b)$$

其中第一个方程并不是很有信息，因为它只是一个无穷小关系。从第二个方程可以得出 $\hat{\delta \boldsymbol{\theta}}^+ = 0$ ，这是我们从重置操作中期望的结果。雅可比矩阵通过简单观察得到，

$$\boxed{\frac{\partial \delta \boldsymbol{\theta}^+}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{I} + \left[\frac{1}{2} \hat{\delta \boldsymbol{\theta}} \right]_{\times}}. \quad (323)$$

与局部误差情况相比的差异总结在 Table 4 中。

A 龙格-库塔数值积分方法

我们的目标是对如下形式的非线性微分方程进行积分

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}) \quad (324)$$

在有限的时间间隔 Δt 内，目的是将其转化为差分方程，即

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t) + \int_t^{t+\Delta t} f(\tau, \mathbf{x}(\tau)) d\tau, \quad (325)$$

或者等效地，如果我们假设 $t_n = n\Delta t$ 且 $\mathbf{x}_n \triangleq \mathbf{x}(t_n)$,

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} f(\tau, \mathbf{x}(\tau)) d\tau. \quad (326)$$

最常用的数值积分方法之一是龙格-库塔方法（以下简称 RK）。这些方法通过多次迭代来估计时间区间内的导数，然后利用该导数进行步长 Δt 的积分。

在接下来的章节中，介绍了几种 RK 方法，从最简单的到最一般的，并按其最常见的名称命名。

注意：此处的所有内容均来源于英文维基百科中的 *Runge-Kutta method* 条目。

A.1 欧拉方法

欧拉方法假设导数 $f(\cdot)$ 在整个区间内是常数，因此

$$\boxed{\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \Delta t \cdot f(t_n, \mathbf{x}_n)}. \quad (327)$$

作为一般的 RK 方法，这对应于一个单阶段方法，可以如下表示。首先计算初始点的导数，

$$k_1 = f(t_n, \mathbf{x}_n), \quad (328)$$

然后利用该导数计算终点的积分值，

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \Delta t \cdot k_1. \quad (329)$$

A.2 中点法

中点法假设导数是在区间的中点处的值，并进行一次迭代来计算该中点处的 \mathbf{x} 值，即

$$\boxed{\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \Delta t \cdot f\left(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, \mathbf{x}_n + \frac{1}{2}\Delta t \cdot f(t_n, \mathbf{x}_n)\right)}. \quad (330)$$

中点法可以解释为一个两步法，如下所示。首先，使用欧拉方法积分直到中点，利用先前定义的 k_1 ，

$$k_1 = f(t_n, \mathbf{x}_n) \quad (331)$$

$$\mathbf{x}(t_n + \frac{1}{2}\Delta t) = \mathbf{x}_n + \frac{1}{2}\Delta t \cdot k_1. \quad (332)$$

然后使用此值来评估中点处的导数 k_2 ，得到积分结果

$$k_2 = f(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, \mathbf{x}(t_n + \frac{1}{2}\Delta t)) \quad (333)$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \Delta t \cdot k_2. \quad (334)$$

A.3 RK4 方法

这通常被称为简单的龙格-库塔方法。它假设在区间的起点、中点和终点处评估 $f()$ 的值。并且它使用四个阶段或迭代来计算积分，四个导数 $k_1 \dots k_4$ 是顺序获得的。这些导数或斜率然后进行加权平均，以获得该区间内的四阶导数估计值。

RK4 方法比上述的两种方法更像一个小算法，而不是一个单步公式。RK4 积分步骤为，

$$\boxed{\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)} , \quad (335)$$

即增量通过假设斜率为 k_1, k_2, k_3, k_4 的加权平均值来计算，具体为

$$k_1 = f(t_n, \mathbf{x}_n) \quad (336)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, \mathbf{x}_n + \frac{\Delta t}{2}k_1\right) \quad (337)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, \mathbf{x}_n + \frac{\Delta t}{2}k_2\right) \quad (338)$$

$$k_4 = f(t_n + \Delta t, \mathbf{x}_n + \Delta t \cdot k_3) . \quad (339)$$

不同斜率的解释如下：

- k_1 是区间开始时的斜率，使用 \mathbf{x}_n (欧拉法)；
- k_2 是区间中点的斜率，使用 $\mathbf{x}_n + \frac{1}{2}\Delta t \cdot k_1$ (中点法)；
- k_3 是中点处的斜率，但现在使用 $\mathbf{x}_n + \frac{1}{2}\Delta t \cdot k_2$ ；
- k_4 是区间结束时的斜率，使用 $\mathbf{x}_n + \Delta t \cdot k_3$ 。

A.4 一般的龙格-库塔方法

更复杂的 RK 方法是可能的。它们的目标是减少误差和/或提高稳定性。它们的通用形式为

$$\boxed{\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i k_i} , \quad (340)$$

其中

$$k_i = f\left(t_n + \Delta t \cdot c_i, \mathbf{x}_n + \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j\right) , \quad (341)$$

即迭代次数（方法的阶数）为 s ，加权平均值由 b_i 定义，评估时间点由 c_i 定义，斜率 k_i 通过使用值 a_{ij} 来确定。根据 a_{ij} 项的结构，可以得到 显式或 隐式的 RK 方法。

- 在显式方法中，所有 k_i 是顺序计算的，即仅使用先前计算的值。这意味着矩阵 $[a_{ij}]$ 是下三角矩阵，且对角线上的元素为零（即， $a_{ij} = 0$ 当 $j \geq i$ ）。欧拉法、中点法和 RK4 方法都是显式方法。
- 隐式方法具有完整的 $[a_{ij}]$ 矩阵，需要解一个线性方程组来确定所有的 k_i 。因此，它们计算开销较大，但能提高精度和稳定性，相比显式方法。

有关更详细的信息，请参考专门的文献资料。

B 封闭形式的积分方法

在许多情况下，我们可以得到一个封闭形式的积分表达式。现在我们考虑一个一阶线性微分方程的情况，

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t), \quad (342)$$

即关系在该区间内是线性且常数的。在这种情况下，对区间 $[t_n, t_n + \Delta t]$ 进行积分得到

$$\mathbf{x}_{n+1} = e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{x}_n = \Phi \mathbf{x}_n, \quad (343)$$

其中 Φ 被称为转移矩阵。该转移矩阵的泰勒展开式为

$$\Phi = e^{\mathbf{A}\Delta t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2\Delta t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3\Delta t^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k \Delta t^k. \quad (344)$$

在已知 \mathbf{A} 的具体实例时，有时可以在结果中识别出已知的级数。这使得可以将结果积分表示为封闭形式。以下是几个例子。

B.1 角度误差的积分

例如，考虑没有偏差和噪声的角度误差动力学（即 Eq.(238c) 的简化版本），

$$\dot{\delta\theta} = -[\omega]_{\times} \delta\theta \quad (345)$$

其转移矩阵可以写成泰勒级数的形式，

$$\Phi = e^{-[\omega]_{\times} \Delta t} \quad (346)$$

$$= \mathbf{I} - [\omega]_{\times} \Delta t + \frac{1}{2} [\omega]_{\times}^2 \Delta t^2 - \frac{1}{3!} [\omega]_{\times}^3 \Delta t^3 + \frac{1}{4!} [\omega]_{\times}^4 \Delta t^4 - \dots \quad (347)$$

现在定义 $\omega\Delta t \triangleq \mathbf{u}\Delta\theta$ ，即旋转轴的单位向量和旋转角度，并应用 (75)，我们可以将项合并并得到

$$\begin{aligned} \Phi &= \mathbf{I} - [\mathbf{u}]_{\times} \Delta\theta + \frac{1}{2} [\mathbf{u}]_{\times}^2 \Delta\theta^2 - \frac{1}{3!} [\mathbf{u}]_{\times}^3 \Delta\theta^3 + \frac{1}{4!} [\mathbf{u}]_{\times}^4 \Delta\theta^4 - \dots \\ &= \mathbf{I} - [\mathbf{u}]_{\times} \left(\Delta\theta - \frac{\Delta\theta^3}{3!} + \frac{\Delta\theta^5}{5!} - \dots \right) + [\mathbf{u}]_{\times}^2 \left(\frac{\Delta\theta^2}{2!} - \frac{\Delta\theta^4}{4!} + \frac{\Delta\theta^6}{6!} - \dots \right) \\ &= \mathbf{I} - [\mathbf{u}]_{\times} \sin \Delta\theta + [\mathbf{u}]_{\times}^2 (1 - \cos \Delta\theta), \end{aligned} \quad (348)$$

这是一个封闭形式的解。

该解对应于一个旋转矩阵 $\Phi = \mathbf{R} - \mathbf{u}\Delta\theta = \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}\Delta t^\top$ ，根据 Rodrigues 旋转公式 (77)，这个结果可以通过直接观察 (346) 并回忆 (69) 得到。因此，我们可以将其写成最终的封闭形式结果，

$$\Phi = \mathbf{R}\{\boldsymbol{\omega}\Delta t\}^\top. \quad (349)$$

B.2 简化的 IMU 示例

考虑一个简化的 IMU 驱动系统，其误差状态动态由以下方程描述：

$$\dot{\delta\mathbf{p}} = \delta\mathbf{v} \quad (350a)$$

$$\dot{\delta\mathbf{v}} = -\mathbf{R}[\mathbf{a}]_\times \delta\boldsymbol{\theta} \quad (350b)$$

$$\dot{\delta\boldsymbol{\theta}} = -[\boldsymbol{\omega}]_\times \delta\boldsymbol{\theta}, \quad (350c)$$

其中 $(\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega})$ 为 IMU 的读数，我们忽略了重力和传感器偏差。该系统由状态向量和动态矩阵定义，

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{p} \\ \delta\mathbf{v} \\ \delta\boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}_v & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{V}_\theta \\ 0 & 0 & \Theta_\theta \end{bmatrix}. \quad (351)$$

其中

$$\mathbf{P}_v = \mathbf{I} \quad (352)$$

$$\mathbf{V}_\theta = -\mathbf{R}[\mathbf{a}]_\times \quad (353)$$

$$\Theta_\theta = -[\boldsymbol{\omega}]_\times \quad (354)$$

其与步长时间 Δt 的积分为 $\mathbf{x}_{n+1} = e^{(\mathbf{A}\Delta t)} \cdot \mathbf{x}_n = \Phi \cdot \mathbf{x}_n$ 。转移矩阵 Φ 可以通过泰勒展开 (344) 表示，按 $\mathbf{A}\Delta t$ 的幂次递增展开。我们可以写出 \mathbf{A} 的一些幂次来展示其一般形式，

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}_v & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{V}_\theta \\ 0 & 0 & \Theta_\theta \end{bmatrix}, \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{P}_v \mathbf{V}_\theta \\ 0 & 0 & \mathbf{V}_\theta \Theta_\theta \\ 0 & 0 & \Theta_\theta^2 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{P}_v \mathbf{V}_\theta \Theta_\theta \\ 0 & 0 & \mathbf{V}_\theta \Theta_\theta^2 \\ 0 & 0 & \Theta_\theta^3 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{P}_v \mathbf{V}_\theta \Theta_\theta^2 \\ 0 & 0 & \mathbf{V}_\theta \Theta_\theta^3 \\ 0 & 0 & \Theta_\theta^4 \end{bmatrix}, \quad (355)$$

由此可以看出，对于 $k > 1$ ，有

$$\mathbf{A}^{k>1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{P}_v \mathbf{V}_\theta \Theta_\theta^{k-2} \\ 0 & 0 & \mathbf{V}_\theta \Theta_\theta^{k-1} \\ 0 & 0 & \Theta_\theta^k \end{bmatrix} \quad (356)$$

我们可以观察到， \mathbf{A} 的递增幂次中的项具有一个固定部分和 Θ_θ 的递增幂次。这些幂次可能导致封闭形式的解，如前一节所示。

我们将矩阵 Φ 分块表示为，

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \Phi_{pv} & \Phi_{p\theta} \\ 0 & \mathbf{I} & \Phi_{v\theta} \\ 0 & 0 & \Phi_{\theta\theta} \end{bmatrix}, \quad (357)$$

然后我们逐步推进，依次探索 Φ 的所有非零块。

平凡的对角项 从对角线上的两个上部项开始，它们是单位矩阵，如展示的那样。

旋转对角项 接下来是旋转对角项 $\Phi_{\theta\theta}$ ，它将新的角度误差与旧的角度误差联系起来。写出这一项的完整泰勒级数得到

$$\Phi_{\theta\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Theta_{\theta}^k \Delta t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [-\omega]_{\times}^k \Delta t^k, \quad (358)$$

正如我们在前一节中看到的，这对应于我们熟知的旋转矩阵，

$$\Phi_{\theta\theta} = \mathbf{R}\{\omega\Delta t\}^{\top}. \quad (359)$$

位置与速度项 最简单的非对角项是 $\Phi_{\mathbf{p}\mathbf{v}}$ ，它是

$$\Phi_{\mathbf{p}\mathbf{v}} = \mathbf{P}_{\mathbf{v}}\Delta t = \mathbf{I}\Delta t. \quad (360)$$

速度与角度项 现在我们来看项 $\Phi_{\mathbf{v},\theta}$ ，写出它的级数，

$$\Phi_{\mathbf{v}\theta} = \mathbf{V}_{\theta}\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{V}_{\theta}\Theta_{\theta}\Delta t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{V}_{\theta}\Theta_{\theta}^2\Delta t^3 + \dots \quad (361)$$

$$\Phi_{\mathbf{v}\theta} = \Delta t\mathbf{V}_{\theta}(\mathbf{I} + \frac{1}{2}\Theta_{\theta}\Delta t + \frac{1}{3!}\Theta_{\theta}^2\Delta t^2 + \dots) \quad (362)$$

这可以简化为

$$\Phi_{\mathbf{v}\theta} = \Delta t\mathbf{V}_{\theta} \left(\mathbf{I} + \sum_{k \geq 1} \frac{(\Theta_{\theta}\Delta t)^k}{(k+1)!} \right) \quad (363)$$

此时我们有两种选择。我们可以在第一个显著项处截断级数，得到 $\Phi_{\mathbf{v}\theta} = \mathbf{V}_{\theta}\Delta t$ ，但这不是一个封闭形式。参考下一节，使用这种简化方法得到的结果。或者，我们将 \mathbf{V}_{θ} 提取出来，写成

$$\Phi_{\mathbf{v}\theta} = \mathbf{V}_{\theta}\Sigma_1 \quad (364)$$

其中

$$\Sigma_1 = \mathbf{I}\Delta t + \frac{1}{2}\Theta_{\theta}\Delta t^2 + \frac{1}{3!}\Theta_{\theta}^2\Delta t^3 + \dots \quad (365)$$

Σ_1 级数类似于我们为 $\Phi_{\theta\theta}$ ，(358)，写的级数，但有两个例外：

- Σ_1 中的 Θ_{θ} 的幂次与有理系数 $\frac{1}{k!}$ 和 Δt 的幂次不匹配。实际上，我们在这里指出， Σ_1 中的下标“1”表示每个成员中缺少一个 Θ_{θ} 的幂次。
- 级数的开始处缺少一些项。同样，下标“1”表示缺少一个这样的项。

第一个问题可以通过将 (75) 应用于 (354) 来解决, 得到

$$\Theta_{\theta} = \frac{[\omega]_{\times}^3}{\|\omega\|^2} = \frac{-\Theta_{\theta}^3}{\|\omega\|^2} . \quad (366)$$

这个表达式允许我们将级数中 Θ_{θ} 的指数增加两个, 如果 $\omega \neq 0$, 我们可以写成

$$\Sigma_1 = \mathbf{I}\Delta t - \frac{\Theta_{\theta}}{\|\omega\|^2} \left(\frac{1}{2}\Theta_{\theta}^2\Delta t^2 + \frac{1}{3!}\Theta_{\theta}^3\Delta t^3 + \dots \right) , \quad (367)$$

并且在其他情况下 $\Sigma_1 = \mathbf{I}\Delta t$. 新级数中的所有指数都与正确的系数匹配。当然, 正如之前所指出的, 有些项是缺失的。第二个问题可以通过加上和减去缺失的项, 并将完整的级数替换为其闭式形式来解决。我们得到

$$\Sigma_1 = \mathbf{I}\Delta t - \frac{\Theta_{\theta}}{\|\omega\|^2} (\mathbf{R}\{\omega\Delta t\}^{\top} - \mathbf{I} - \Theta_{\theta}\Delta t) , \quad (368)$$

这是一个封闭形式解, 如果 $\omega \neq 0$, 则有效。因此, 我们最终可以写成

$$\Phi_{\mathbf{v}\theta} = \begin{cases} -\mathbf{R}[\mathbf{a}]_{\times} \Delta t & \omega \rightarrow 0 \\ -\mathbf{R}[\mathbf{a}]_{\times} \left(\mathbf{I}\Delta t + \frac{[\omega]_{\times}}{\|\omega\|^2} (\mathbf{R}\{\omega\Delta t\}^{\top} - \mathbf{I} + [\omega]_{\times} \Delta t) \right) & \omega \neq 0 \end{cases} \quad (369a)$$

$$(369b)$$

位置与角度项 让我们最后来看一下项 $\Phi_{\mathbf{p}\theta}$. 其泰勒级数为,

$$\Phi_{\mathbf{p}\theta} = \frac{1}{2}\mathbf{P}_{\mathbf{v}}\mathbf{V}_{\theta}\Delta t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{P}_{\mathbf{v}}\mathbf{V}_{\theta}\Theta_{\theta}\Delta t^3 + \frac{1}{4!}\mathbf{P}_{\mathbf{v}}\mathbf{V}_{\theta}\Theta_{\theta}^2\Delta t^4 + \dots \quad (370)$$

我们提取出常数项, 得到

$$\Phi_{\mathbf{p}\theta} = \mathbf{P}_{\mathbf{v}}\mathbf{V}_{\theta} \Sigma_2 , \quad (371)$$

其中

$$\Sigma_2 = \frac{1}{2}\mathbf{I}\Delta t^2 + \frac{1}{3!}\Theta_{\theta}\Delta t^3 + \frac{1}{4!}\Theta_{\theta}^2\Delta t^4 + \dots . \quad (372)$$

其中我们注意到 Σ_2 中的下标 “2” 有以下解释:

- 级数中每个项中缺少两个 Θ_{θ} 的幂次,
- 级数的前两项缺失。

再次使用 (366) 来增加 Θ_{θ} 的指数, 得到

$$\Sigma_2 = \frac{1}{2}\mathbf{I}\Delta t^2 - \frac{1}{\|\omega\|^2} \left(\frac{1}{3!}\Theta_{\theta}^3\Delta t^3 + \frac{1}{4!}\Theta_{\theta}^4\Delta t^4 + \dots \right) . \quad (373)$$

我们用其闭式形式替换不完整的级数，

$$\Sigma_2 = \frac{1}{2} \mathbf{I} \Delta t^2 - \frac{1}{\|\boldsymbol{\omega}\|^2} \left(\mathbf{R}\{\boldsymbol{\omega} \Delta t\}^\top - \mathbf{I} - \Theta_\theta \Delta t - \frac{1}{2} \Theta_\theta^2 \Delta t^2 \right), \quad (374)$$

这导致最终结果

$$\Phi_{\mathbf{p}\theta} = \begin{cases} -\mathbf{R}[\mathbf{a}]_\times \frac{\Delta t^2}{2} & \boldsymbol{\omega} \rightarrow 0 \\ -\mathbf{R}[\mathbf{a}]_\times \left(\frac{1}{2} \mathbf{I} \Delta t^2 - \frac{1}{\|\boldsymbol{\omega}\|^2} \left(\mathbf{R}\{\boldsymbol{\omega} \Delta t\}^\top - \sum_{k=0}^2 \frac{(-[\boldsymbol{\omega}]_\times \Delta t)^k}{k!} \right) \right) & \boldsymbol{\omega} \neq 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (375a) \\ (375b) \end{matrix}$$

B.3 完整的 IMU 示例

为了提供一般化简化 IMU 示例中的方法，我们需要更仔细地研究完整的 IMU 情况。

考虑完整的 IMU 系统 (238)，可以表示为

$$\dot{\delta \mathbf{x}} = \mathbf{A} \delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{w}, \quad (376)$$

其离散时间积分需要转移矩阵

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k \Delta t^k = \mathbf{I} + \mathbf{A} \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{A}^2 \Delta t^2 + \dots, \quad (377)$$

这是我们希望计算的。动态矩阵 \mathbf{A} 是块稀疏 (block-sparse) 的，可以通过检查原始方程 (238) 来轻松确定其块，

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}_v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{V}_\theta & \mathbf{V}_a & 0 & \mathbf{V}_g \\ 0 & 0 & \Theta_\theta & 0 & \Theta_\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (378)$$

与之前一样，我们写出 \mathbf{A} 的一些幂次，

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{P}_v \mathbf{V}_\theta & \mathbf{P}_v \mathbf{V}_a & 0 & \mathbf{P}_v \mathbf{V}_g \\ 0 & 0 & \mathbf{V}_\theta \Theta_\theta & 0 & \mathbf{V}_\theta \Theta_\omega & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_\theta^2 & 0 & \Theta_\theta \Theta_\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}^3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{P}_v \mathbf{V}_\theta \Theta_\theta & 0 & \mathbf{P}_v \mathbf{V}_\theta \Theta_\omega & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{V}_\theta \Theta_\theta^2 & 0 & \mathbf{V}_\theta \Theta_\theta \Theta_\omega & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_\theta^3 & 0 & \Theta_\theta^2 \Theta_\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}^4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{P}_v \mathbf{V}_\theta \Theta_\theta^2 & 0 & \mathbf{P}_v \mathbf{V}_\theta \Theta_\theta \Theta_\omega & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{V}_\theta \Theta_\theta^3 & 0 & \mathbf{V}_\theta \Theta_\theta^2 \Theta_\omega & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_\theta^4 & 0 & \Theta_\theta^3 \Theta_\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

基本上，我们观察到以下几点，

- \mathbf{A} 的对角线上的唯一项，即旋转项 Θ_θ ，在幂次序列 \mathbf{A}^k 中向右和向上传播。所有不受此传播影响的项都会消失。这种传播影响了序列 \mathbf{A}^k 结构的三个方面：
- 左上 3×3 块，对应于前一个示例中的简化 IMU 模型，其结构与示例中的相同。因此，其闭式解仍然有效。
- 左上 3×3 块，对应于前一个示例中的简化 IMU 模型，其结构与示例中的相同。因此，其闭式解仍然有效。
- 与陀螺仪偏差误差相关的项（即第五列的项）引入了一个类似的 Θ_θ 的幂次序列，可以用我们在简化示例中使用的相同方法来求解。

我们现在感兴趣的是找到一个通用的方法来构建转移矩阵 Φ 的闭式元素。让我们回顾一下我们在 Σ_1 和 Σ_2 序列中提出的备注，

- 下标与每个序列成员中缺失的 Θ_θ 的幂次一致。
- 下标与序列开始时缺失的项数一致。

考虑到这些特性，让我们引入序列 $\Sigma_n(\mathbf{X}, y)$ ，其定义为²⁶

C 使用截断级数的近似方法

在上一节中，我们为复杂的 IMU 驱动动态系统在其线性化的误差状态形式 $\dot{\delta \mathbf{x}} = \mathbf{A} \delta \mathbf{x}$ 下推导了过渡矩阵的闭式表达式。闭式表达式始终是有价值的，但我们不确定应该担心高阶误差及其对实际算法性能的影响到什么程度。这个问题在 IMU 积分误差较高的系统中尤为重要（因此需要进行补偿），例如视觉惯性或 GPS 惯性融合方案。

在本节中，我们设计了几种近似过渡矩阵的方法。这些方法从过渡矩阵可以表示为泰勒级数的假设出发，然后将这些级数截断到最重要的项。这种截断可以按照系统整体进行，也可以按照每个区块进行。

C.1 系统级截断

C.1.1 一阶截断：有限差分法

一个典型的、广泛使用的积分方法是对于类型为

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x})$$

的系统，基于有限差分法来计算导数，即

$$\dot{\mathbf{x}} \triangleq \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t + \delta t) - \mathbf{x}(t)}{\delta t} \approx \frac{\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n}{\Delta t}. \quad (379)$$

这直接导致

$$\mathbf{x}_{n+1} \approx \mathbf{x}_n + \Delta t f(t_n, \mathbf{x}_n), \quad (380)$$

这正是欧拉方法。在积分区间开始时对函数 $f()$ 进行线性化，得到

$$\mathbf{x}_{n+1} \approx \mathbf{x}_n + \Delta t \mathbf{A} \mathbf{x}_n, \quad (381a)$$

其中 $\mathbf{A} \triangleq \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(t_n, \mathbf{x}_n)$ 是雅可比矩阵。这严格等同于写出线性化微分方程的指数解，并将级数截断到线性项（即，下面的关系与前一个完全相同），

$$\mathbf{x}_{n+1} = e^{\mathbf{A} \Delta t} \mathbf{x}_n \approx (\mathbf{I} + \Delta t \mathbf{A}) \mathbf{x}_n. \quad (381b)$$

这意味着，欧拉方法（App. A.1）、有限差分法和一阶系统级泰勒截断法是相同的。我们得到近似的过渡矩阵，

$$\boxed{\Phi \approx \mathbf{I} + \Delta t \mathbf{A}}. \quad (382)$$

对于 Section B.2 中的简化 IMU 示例，有限差分法导致的近似过渡矩阵为

$$\Phi \approx \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \Delta t & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & -\mathbf{R}[\mathbf{a}]_{\times} \Delta t \\ 0 & 0 & \mathbf{I} - [\boldsymbol{\omega} \Delta t]_{\times} \end{bmatrix}. \quad (383)$$

然而，正如我们在 Section B.1 中所知道的，旋转项有一个紧凑的闭式解， $\Phi_{\theta\theta} = \mathbf{R}(\boldsymbol{\omega} \Delta t)^{\top}$ 。因此，我们方便地根据这个结果重写过渡矩阵为，

$$\Phi \approx \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \Delta t & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & -\mathbf{R}[\mathbf{a}]_{\times} \Delta t \\ 0 & 0 & \mathbf{R}\{\boldsymbol{\omega} \Delta t\}^{\top} \end{bmatrix}. \quad (384)$$

C.1.2 N 阶截断

对更高阶的截断将提高近似过渡矩阵的精度。一个特别有趣的截断阶数是利用结果的稀疏性达到最大化的阶数。换句话说，截断的阶数是当新的非零项不再出现时的阶数。

对于 Section B.2 中的简化 IMU 示例，这个阶数是 2，导致的结果是

$$\approx \mathbf{I} + \mathbf{A}\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2\Delta t^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I}\Delta t & -\frac{1}{2}\mathbf{R}[\mathbf{a}]_{\times}\Delta t^2 \\ 0 & \mathbf{I} & -\mathbf{R}[\mathbf{a}]_{\times}(\mathbf{I} - \frac{1}{2}[\boldsymbol{\omega}]_{\times}\Delta t)\Delta t \\ 0 & 0 & \mathbf{R}\{\boldsymbol{\omega}\Delta t\}^{\top} \end{bmatrix}. \quad (385)$$

在 Section B.3 中的完整 IMU 示例中，阶数为 3，结果为

$$\approx \mathbf{I} + \mathbf{A}\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2\Delta t^2 + \frac{1}{6}\mathbf{A}^3\Delta t^3, \quad (386)$$

由于篇幅问题，此处不给出完整形式。读者可以参考 Section B.3 中的 \mathbf{A} 、 \mathbf{A}^2 和 \mathbf{A}^3 的表达式。

C.2 区块级截断

一种比较好的近似方法是将每个区块的泰勒级数在第一个重要项处进行截断，而不是像前面所做的那样，截断整个 \mathbf{A} 的幂级数。即，我们把每个区块分别处理。因此，截断需要逐个区块进行分析。我们通过两个例子来探讨这种方法。

对于 Section B.2 中的简化 IMU 示例，我们有系列 Σ_1 和 Σ_2 ，可以如下截断

$$\Sigma_1 = \mathbf{I}\Delta t + \frac{1}{2}\Theta_{\theta}\Delta t^2 + \dots \approx \mathbf{I}\Delta t \quad (387)$$

$$\Sigma_2 = \frac{1}{2}\mathbf{I}\Delta t^2 + \frac{1}{3!}\Theta_{\theta}\Delta t^3 + \dots \approx \frac{1}{2}\mathbf{I}\Delta t^2. \quad (388)$$

这导致了近似的过渡矩阵

$$\Phi \approx \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I}\Delta t & -\frac{1}{2}\mathbf{R}[\mathbf{a}]_{\times}\Delta t^2 \\ 0 & \mathbf{I} & -\mathbf{R}[\mathbf{a}]_{\times}\Delta t \\ 0 & 0 & \mathbf{R}(\boldsymbol{\omega}\Delta t)^{\top} \end{bmatrix}, \quad (389)$$

这个近似比系统级一阶截断的结果更准确（因为右上方的项现在出现了），但它仍然容易获得和计算，尤其是与 Section B 中开发的闭式方法相比。同样，注意到我们取了最低项的闭式解，即 $\Phi_{\theta\theta} = \mathbf{R}(\boldsymbol{\omega}\Delta t)^{\top}$ 。

在一般情况下，足以将每个 Σ_n （除了 Σ_0 ）用其级数的第一项来近似，即

$$\Sigma_0 = \mathbf{R}\{\boldsymbol{\omega}\Delta t\}^{\top}, \quad \Sigma_{n>0} \approx \frac{1}{n!}\mathbf{I}\Delta t^n. \quad (390)$$

对于完整的 IMU 示例，代入前面的 Σ_n 到 (??) 中，得到近似的过渡矩阵，

$$\Phi \approx \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I}\Delta t & -\frac{1}{2}\mathbf{R}[\mathbf{a}]_{\times}\Delta t^2 & -\frac{1}{2}\mathbf{R}\Delta t^2 & \frac{1}{3!}\mathbf{R}[\mathbf{a}]_{\times}\Delta t^3 & \frac{1}{2}\mathbf{I}\Delta t^2 \\ 0 & \mathbf{I} & -\mathbf{R}[\mathbf{a}]_{\times}\Delta t & -\mathbf{R}\Delta t & \frac{1}{2}\mathbf{R}[\mathbf{a}]_{\times}\Delta t^2 & \mathbf{I}\Delta t \\ 0 & 0 & \mathbf{R}\{\boldsymbol{\omega}\Delta t\}^{\top} & 0 & -\mathbf{I}\Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (391)$$

其中 (见 (238))

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b, \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_b, \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}\{\mathbf{q}\},$$

其中我们用它们的适当值替换了矩阵块 (也见 (238)),

$$\mathbf{P}_v = \mathbf{I}, \quad \mathbf{V}_{\theta} = -\mathbf{R}[\mathbf{a}]_{\times}, \quad \mathbf{V}_a = -\mathbf{R}, \quad \mathbf{V}_g = \mathbf{I}, \quad \Theta_{\theta} = -[\boldsymbol{\omega}]_{\times}, \quad \Theta_{\omega} = -\mathbf{I}$$

这个方法的一个小简化是将矩阵中的每个区块限制到一个最大阶数 n 。对于 $n = 1$ ，我们有

$$\Phi \approx \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I}\Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & -\mathbf{R}[\mathbf{a}]_{\times}\Delta t & -\mathbf{R}\Delta t & 0 & \mathbf{I}\Delta t \\ 0 & 0 & \mathbf{R}\{\boldsymbol{\omega}\Delta t\}^{\top} & 0 & -\mathbf{I}\Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (392)$$

这是欧拉方法，而对于 $n = 2$ ，

$$\Phi \approx \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I}\Delta t & -\frac{1}{2}\mathbf{R}[\mathbf{a}]_{\times}\Delta t^2 & -\frac{1}{2}\mathbf{R}\Delta t^2 & 0 & \frac{1}{2}\mathbf{I}\Delta t^2 \\ 0 & \mathbf{I} & -\mathbf{R}[\mathbf{a}]_{\times}\Delta t & -\mathbf{R}\Delta t & \frac{1}{2}\mathbf{R}[\mathbf{a}]_{\times}\Delta t^2 & \mathbf{I}\Delta t \\ 0 & 0 & \mathbf{R}\{\boldsymbol{\omega}\Delta t\}^{\top} & 0 & -\mathbf{I}\Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (393)$$

对于 $n \geq 3$ ，我们有完整形式 (391)。

D 通过 Runge-Kutta 积分得到的转移矩阵

另一种近似转移矩阵的方法是使用 Runge-Kutta 积分。当动态矩阵 \mathbf{A} 在积分区间内不能被视为常数时，可能需要这种方法，即

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t). \quad (394)$$

让我们重写以下两个关系，它们定义了同一系统的连续时间和离散时间形式。它们涉及动态矩阵 \mathbf{A} 和转移矩阵 Φ ，

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}(t) \quad (395)$$

$$\mathbf{x}(t_n + \tau) = \Phi(t_n + \tau | t_n) \cdot \mathbf{x}(t_n). \quad (396)$$

这些方程允许我们以两种方式发展 $\dot{\mathbf{x}}(t_n + \tau)$ ，如下所示（左右发展，请注意小点表示时间导数），

$$\begin{aligned} (\Phi(t_n + \tau|t_n)\dot{\mathbf{x}}(t_n)) &= \boxed{\dot{\mathbf{x}}(t_n + \tau)} = \mathbf{A}(t_n + \tau)\mathbf{x}(t_n + \tau) \\ \dot{\Phi}(t_n + \tau|t_n)\mathbf{x}(t_n) + \Phi(t_n + \tau|t_n)\dot{\mathbf{x}}(t_n) &= \mathbf{A}(t_n + \tau)\Phi(t_n + \tau|t_n)\mathbf{x}(t_n) \\ \dot{\Phi}(t_n + \tau|t_n)\mathbf{x}(t_n) &= \end{aligned} \quad (397)$$

这里，(397) 来源于注意到 $\dot{\mathbf{x}}(t_n) = \dot{\mathbf{x}}_n = 0$ ，因为它是一个采样值。然后，

$$\dot{\Phi}(t_n + \tau|t_n) = \mathbf{A}(t_n + \tau)\Phi(t_n + \tau|t_n) \quad (398)$$

这是与 (395) 相同的常微分方程（ODE），现在应用于转移矩阵而非状态向量。请注意，由于恒等式 $\mathbf{x}(t_n) = \Phi_{t_n|t_n}\mathbf{x}(t_n)$ ，区间开始时，即 $t = t_n$ 时的转移矩阵总是单位矩阵，

$$\Phi_{t_n|t_n} = \mathbf{I} . \quad (399)$$

使用 RK4 并设 $f(t, \Phi(t)) = \mathbf{A}(t)\Phi(t)$ ，我们有

$$\Phi \triangleq \Phi(t_n + \Delta t|t_n) = \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{6}(\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4) \quad (400)$$

其中

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{A}(t_n) \quad (401)$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{A}\left(t_n + \frac{1}{2}\Delta t\right)\left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{K}_1\right) \quad (402)$$

$$\mathbf{K}_3 = \mathbf{A}\left(t_n + \frac{1}{2}\Delta t\right)\left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{K}_2\right) \quad (403)$$

$$\mathbf{K}_4 = \mathbf{A}\left(t_n + \Delta t\right)\left(\mathbf{I} + \Delta t \cdot \mathbf{K}_3\right) . \quad (404)$$

D.1 误差状态示例

让我们考虑用于非线性、时变系统的误差状态卡尔曼滤波器

$$\dot{\mathbf{x}}_t(t) = f(t, \mathbf{x}_t(t), \mathbf{u}(t)) \quad (405)$$

其中 \mathbf{x}_t 表示真实状态， \mathbf{u} 是控制输入。这个真实状态是一个组合，记作 \oplus ，由名义状态 \mathbf{x} 和误差状态 $\delta\mathbf{x}$ 组成，

$$\mathbf{x}_t(t) = \mathbf{x}(t) \oplus \delta\mathbf{x}(t) \quad (406)$$

其中误差状态的动态具有线性形式，这取决于名义状态 \mathbf{x} 和控制输入 \mathbf{u} ，即

$$\dot{\delta\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \cdot \delta\mathbf{x} \quad (407)$$

即，误差状态动态矩阵在 (394) 中的形式为 $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ 。误差状态转移矩阵的动态可以写为，

$$\dot{\Phi}(t_n + \tau | t_n) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \cdot \Phi(t_n + \tau | t_n) . \quad (408)$$

为了对这个方程进行 RK 积分，我们需要在 RK 评估点上获得 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{u}(t)$ 的值，对于 RK4，它们是 $t_n, t_n + \Delta t/2, t_n + \Delta t$ 。首先是简单的部分，评估点上的控制输入 $\mathbf{u}(t)$ 可以通过当前和上一次测量值的线性插值获得，

$$\mathbf{u}(t_n) = \mathbf{u}_n \quad (409)$$

$$\mathbf{u}(t_n + \Delta t/2) = \frac{\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n+1}}{2} \quad (410)$$

$$\mathbf{u}(t_n + \Delta t) = \mathbf{u}_{n+1} \quad (411)$$

名义状态的动态应该使用最佳的积分方法进行积分。例如，使用 RK4 积分，我们有，

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= f(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}_n) \\ \mathbf{k}_2 &= f\left(\mathbf{x}_n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{k}_1, \frac{\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n+1}}{2}\right) \\ \mathbf{k}_3 &= f\left(\mathbf{x}_n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{k}_2, \frac{\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n+1}}{2}\right) \\ \mathbf{k}_4 &= f(\mathbf{x}_n + \Delta t \mathbf{k}_3, \mathbf{u}_{n+1}) \\ \mathbf{k} &= (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)/6 , \end{aligned}$$

这给我们在评估点的估计值，

$$\mathbf{x}(t_n) = \mathbf{x}_n \quad (412)$$

$$\mathbf{x}(t_n + \Delta t/2) = \mathbf{x}_n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{k} \quad (413)$$

$$\mathbf{x}(t_n + \Delta t) = \mathbf{x}_n + \Delta t \mathbf{k} . \quad (414)$$

我们注意到， $\mathbf{x}(t_n + \Delta t/2) = \frac{\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n+1}}{2}$ ，这与我们对控制量使用的线性插值相同。由于 RK 更新的线性性质，这并不令人惊讶。

无论我们通过什么方式获得名义状态值，我们现在可以计算 RK4 矩阵来进行转移矩阵的积分，

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \mathbf{A}(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}_n) \\ \mathbf{K}_2 &= \mathbf{A}\left(\mathbf{x}_n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{k}, \frac{\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n+1}}{2}\right) \left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{K}_1\right) \\ \mathbf{K}_3 &= \mathbf{A}\left(\mathbf{x}_n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{k}, \frac{\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n+1}}{2}\right) \left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{K}_2\right) \\ \mathbf{K}_4 &= \mathbf{A}\left(\mathbf{x}_n + \Delta t \mathbf{k}, \mathbf{u}_{n+1}\right) \left(\mathbf{I} + \Delta t \mathbf{K}_3\right) \\ \mathbf{K} &= (\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4)/6 \end{aligned}$$

最终得到，

$\Phi \triangleq \Phi_{t_n + \Delta t | t_n} = \mathbf{I} + \Delta t \mathbf{K}$

(415)

E 随机噪声和扰动的积分

我们现在旨在给出在动态系统中积分随机变量的适当方法。当然，我们不能积分未知的随机值，但我们可以为了不确定性传播的需要，积分它们的方差和协方差。这是为了在估计器中建立协方差矩阵，适用于那些连续性质的系统（并且在连续时间中给定），但在离散方式下进行估计。

考虑连续时间动态系统，

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}), \quad (416)$$

其中 \mathbf{x} 是状态向量， \mathbf{u} 是包含噪声 $\tilde{\mathbf{u}}$ 的控制信号向量，因此控制测量值为 $\mathbf{u}_m = \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{u}}$ ，而 \mathbf{w} 是随机扰动向量。假设噪声和扰动都是白噪声高斯过程，定义为，

$$\tilde{\mathbf{u}} \sim \mathcal{N}\{0, \mathbf{U}^c\}, \quad \mathbf{w}^c \sim \mathcal{N}\{0, \mathbf{W}^c\}, \quad (417)$$

其中上标 \bullet^c 表示连续时间的不确定性规范，这是我们希望积分的部分。

控制信号中的噪声水平 $\tilde{\mathbf{u}}$ 和随机扰动 \mathbf{w} 的性质之间存在一个重要的区别：

- 在离散化时，控制信号在时间瞬间 $n\Delta t$ 被采样，得到 $\mathbf{u}_{m,n} \triangleq \mathbf{u}_m(n\Delta t) = \mathbf{u}(n\Delta t) + \tilde{\mathbf{u}}(n\Delta t)$ 。显然，测量部分在积分区间内被视为常数，即 $\mathbf{u}_m(t) = \mathbf{u}_{m,n}$ ，因此在采样时间 $n\Delta t$ 时，噪声水平也保持不变，

$$\tilde{\mathbf{u}}(t) = \tilde{\mathbf{u}}(n\Delta t) = \tilde{\mathbf{u}}_n, \quad n\Delta t < t < (n+1)\Delta t. \quad (418)$$

- 扰动 \mathbf{w} 从不被采样。

因此，这两种随机过程在 Δt 上的积分方式不同。我们来分析一下。

连续时间误差状态动力学 (416) 可以线性化为

$$\dot{\delta\mathbf{x}} = \mathbf{A}\delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\mathbf{w}, \quad (419)$$

其中

$$\mathbf{A} \triangleq \left. \frac{\partial f}{\partial \delta\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}, \mathbf{u}_m}, \quad \mathbf{B} \triangleq \left. \frac{\partial f}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \right|_{\mathbf{x}, \mathbf{u}_m}, \quad \mathbf{C} \triangleq \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\mathbf{x}, \mathbf{u}_m}, \quad (420)$$

并在采样周期 Δt 上积分，得到，

$$\delta\mathbf{x}_{n+1} = \delta\mathbf{x}_n + \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} (\mathbf{A}\delta\mathbf{x}(\tau) + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}(\tau) + \mathbf{C}\mathbf{w}^c(\tau)) d\tau \quad (421)$$

$$= \delta\mathbf{x}_n + \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \mathbf{A}\delta\mathbf{x}(\tau) d\tau + \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}(\tau) d\tau + \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \mathbf{C}\mathbf{w}^c(\tau) d\tau \quad (422)$$

这包含了三项性质截然不同的内容。它们可以如下积分：

1. 从 App. B 中我们知道，动态部分可以通过过渡矩阵积分，

$$\delta\mathbf{x}_n + \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \mathbf{A}\delta\mathbf{x}(\tau) d\tau = \Phi \cdot \delta\mathbf{x}_n \quad (423)$$

其中 $\Phi = e^{\mathbf{A}\Delta t}$ 可以通过闭式计算或不同精度水平下近似计算。

Table 5: 积分对系统和协方差矩阵的影响。

描述	连续时间 t	离散时间 $n\Delta t$
状态	$\dot{\mathbf{x}} = f^c(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})$	$\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{w}_n)$
误差状态	$\dot{\delta \mathbf{x}} = \mathbf{A}\delta \mathbf{x} + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\mathbf{w}$	$\delta \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}_x \delta \mathbf{x}_n + \mathbf{F}_u \tilde{\mathbf{u}}_n + \mathbf{F}_w \mathbf{w}_n$
系统矩阵	\mathbf{A}	$\mathbf{F}_x = \Phi = e^{\mathbf{A}\Delta t}$
控制矩阵	\mathbf{B}	$\mathbf{F}_u = \mathbf{B}\Delta t$
扰动矩阵	\mathbf{C}	$\mathbf{F}_w = \mathbf{C}$
控制协方差	\mathbf{U}^c	$\mathbf{U} = \mathbf{U}^c$
扰动协方差	\mathbf{W}^c	$\mathbf{W} = \mathbf{W}^c \Delta t$

2. 从 (418) 我们可以得到

$$\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}(\tau) d\tau = \mathbf{B}\Delta t \tilde{\mathbf{u}}_n \quad (424)$$

这意味着一旦测量噪声被采样，它就以确定性方式进行积分，因为在积分区间内它的行为是已知的。

从概率论中我们知道，连续白噪声高斯过程在时间区间 Δt 上的积分产生一个离散白噪声高斯冲击 \mathbf{w}_n ，由下式描述

$$\mathbf{w}_n \triangleq \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \mathbf{w}(\tau) d\tau, \quad \mathbf{w}_n \sim \mathcal{N}\{0, \mathbf{W}\}, \quad \text{with } \mathbf{W} = \mathbf{W}^c \Delta t \quad (425)$$

我们观察到，与前述的测量噪声不同，扰动在积分区间内并没有确定性行为，因此它必须以随机方式进行积分。

因此，离散时间误差状态动态系统可以写为

$$\delta \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}_x \delta \mathbf{x}_n + \mathbf{F}_u \tilde{\mathbf{u}}_n + \mathbf{F}_w \mathbf{w}_n \quad (426)$$

其中过渡、控制和扰动矩阵分别为

$$\mathbf{F}_x = \Phi = e^{\mathbf{A}\Delta t}, \quad \mathbf{F}_u = \mathbf{B}\Delta t, \quad \mathbf{F}_w = \mathbf{C}, \quad (427)$$

噪声和扰动水平由以下定义为

$$\tilde{\mathbf{u}}_n \sim \mathcal{N}\{0, \mathbf{U}\}, \quad \mathbf{w}_n \sim \mathcal{N}\{0, \mathbf{W}\} \quad (428)$$

其中

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^c, \quad \mathbf{W} = \mathbf{W}^c \Delta t. \quad (429)$$

这些结果总结在 Table 5 中。EKF 的预测阶段将根据以下公式传播误差状态的均值和协方差矩阵

$$\hat{\delta \mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{F}_x \hat{\delta \mathbf{x}}_n \quad (430)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{n+1} &= \mathbf{F}_x \mathbf{P}_n \mathbf{F}_x^\top + \mathbf{F}_u \mathbf{U} \mathbf{F}_u^\top + \mathbf{F}_w \mathbf{W} \mathbf{F}_w^\top \\ &= e^{\mathbf{A} \Delta t} \mathbf{P}_n (e^{\mathbf{A} \Delta t})^\top + \Delta t^2 \mathbf{B} \mathbf{U}^c \mathbf{B}^\top + \Delta t \mathbf{C} \mathbf{W}^c \mathbf{C}^\top \end{aligned} \quad (431)$$

It is important and illustrative here to observe the different effects of the integration interval, Δt , on the three terms of the covariance update (431): the dynamic error term is exponential, the measurement error term is quadratic, and the perturbation error term is linear. 在这里，观察积分时间间隔 Δt 对协方差更新公式 (431) 中三个项的不同影响很重要且具有说明性的：动态误差项是指数型的，测量误差项是二次型的，而扰动误差项是线性型的。

E.1 噪声和扰动脉冲

我们经常会遇到（例如在重用现有代码或解读其他作者的文档时）比我们这里使用的更简单的 EKF 预测方程，即

$$\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{F}_x \mathbf{P}_n \mathbf{F}_x^\top + \mathbf{Q} . \quad (432)$$

这对应于一般的离散时间动态系统，

$$\delta \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}_x \delta \mathbf{x}_n + \mathbf{i} \quad (433)$$

其中

$$\mathbf{i} \sim \mathcal{N}\{0, \mathbf{Q}\} \quad (434)$$

是一个随机（白噪声，高斯）脉冲向量，直接加到状态向量在时间 t_{n+1} 的值上。矩阵 \mathbf{Q} 被简单地视为脉冲的协方差矩阵。根据我们所看到的，我们应该按如下方式计算该协方差矩阵

$$\mathbf{Q} = \Delta t^2 \mathbf{B} \mathbf{U}^c \mathbf{B}^\top + \Delta t \mathbf{C} \mathbf{W}^c \mathbf{C}^\top . \quad (435)$$

如果脉冲不影响整个状态向量，正如通常的情况一样，矩阵 \mathbf{Q} 就不是完全对角的，可能包含大量的零。此时，可以写成等效的形式

$$\delta \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}_x \delta \mathbf{x}_n + \mathbf{F}_i \mathbf{i} \quad (436)$$

其中

$$\mathbf{i} \sim \mathcal{N}\{0, \mathbf{Q}_i\} , \quad (437)$$

矩阵 \mathbf{F}_i 简单地将每个独立的脉冲映射到它所影响的状态向量部分。相关的协方差 \mathbf{Q}_i 则较小且完全对角化。有关示例，请参见下一节。在这种情况下，ESKF 的时间更新变为

$$\hat{\delta \mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{F}_x \hat{\delta \mathbf{x}}_n \quad (438)$$

$$\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{F}_x \mathbf{P}_n \mathbf{F}_x^\top + \mathbf{F}_i \mathbf{Q}_i \mathbf{F}_i^\top . \quad (439)$$

显然，所有这些形式是等价的，正如我们在以下关于一般扰动 \mathbf{Q} 的双重恒等式中所看到的，

$$\mathbf{F}_i \mathbf{Q}_i \mathbf{F}_i^\top = \boxed{\mathbf{Q}} = \Delta t^2 \mathbf{B} \mathbf{U}^c \mathbf{B}^\top + \Delta t \mathbf{C} \mathbf{W}^c \mathbf{C}^\top . \quad (440)$$

E.2 完整的 IMU 示例

我们研究了 IMU 的误差状态卡尔曼滤波器的构建误差状态系统在 (238) 中定义，涉及一个名义状态 \mathbf{x} 、一个误差状态 $\delta\mathbf{x}$ 、一个含噪控制信号

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{q} \\ \mathbf{a}_b \\ \boldsymbol{\omega}_b \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}, \quad \delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{p} \\ \delta\mathbf{v} \\ \delta\boldsymbol{\theta} \\ \delta\mathbf{a}_b \\ \delta\boldsymbol{\omega}_b \\ \delta\mathbf{g} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_m \\ \boldsymbol{\omega}_m \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_w \\ \boldsymbol{\omega}_w \end{bmatrix} \quad (441)$$

在我们考虑的 IMU 模型中，控制噪声对应于 IMU 测量中的加性噪声。扰动影响偏差，从而产生它们的随机游走行为。动态、控制和扰动矩阵分别为（参见 (419)、(378) 和 (238)）

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}_v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{V}_\theta & \mathbf{V}_a & 0 & \mathbf{V}_g \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\Theta}_\theta & 0 & \boldsymbol{\Theta}_\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\mathbf{R} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (442)$$

在加速度计和陀螺仪三轴相同类型的常规 IMU 中，噪声和扰动是各向同性的。它们的标准偏差指定为标量，如下所示

$$\sigma_{\tilde{\mathbf{a}}} [m/s^2], \quad \sigma_{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} [rad/s], \quad \sigma_{\mathbf{a}_w} [m/s^2\sqrt{s}], \quad \sigma_{\boldsymbol{\omega}_w} [rad/s\sqrt{s}] \quad (443)$$

协方差矩阵为纯对角形式，得到

$$\mathbf{U}^c = \begin{bmatrix} \sigma_{\tilde{\mathbf{a}}}^2 \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \sigma_{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}^2 \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}^c = \begin{bmatrix} \sigma_{\mathbf{a}_w}^2 \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \sigma_{\boldsymbol{\omega}_w}^2 \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (444)$$

该系统以间隔 Δt 进行采样，按照 (426–429) 演化，其中过渡矩阵 $\mathbf{F}_x = \Phi$ 可以通过多种方式计算——请参阅前面的附录。

E.2.1 噪声和扰动脉冲

在扰动指定为脉冲 \mathbf{i} 的情况下，我们可以重新定义我们的系统如下，

$$\delta\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}_x(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}_m) \cdot \delta\mathbf{x}_n + \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{i} \quad (445)$$

其中名义状态、误差状态、控制和脉冲向量定义为

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{q} \\ \mathbf{a}_b \\ \boldsymbol{\omega}_b \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}, \quad \delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{p} \\ \delta\mathbf{v} \\ \delta\boldsymbol{\theta} \\ \delta\mathbf{a}_b \\ \delta\boldsymbol{\omega}_b \\ \delta\mathbf{g} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_m \\ \boldsymbol{\omega}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \boldsymbol{\theta}_i \\ \mathbf{a}_i \\ \boldsymbol{\omega}_i \end{bmatrix}, \quad (446)$$

扰动矩阵定义为

$$\mathbf{F}_x = \Phi = e^{\mathbf{A}\Delta t} \quad , \quad \mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad (447)$$

脉冲的方差指定为

$$\mathbf{i} \sim \mathcal{N}\{0, \mathbf{Q}_i\} \quad , \quad \mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 \Delta t^2 \mathbf{I} & & & 0 \\ & \sigma_\omega^2 \Delta t^2 \mathbf{I} & & \\ & & \sigma_{a_w}^2 \Delta t \mathbf{I} & \\ & 0 & & \sigma_{\omega_w}^2 \Delta t \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad . \quad (448)$$

\mathbf{F}_i 的这种简单指定可能会让人感到惊讶，特别是与 (442) 中的 \mathbf{B} 相比。实际的情况是，误差在 \mathbf{Q}_i 中是各向同性的，因此 $-\mathbf{R}\sigma^2\mathbf{I}(-\mathbf{R})^\top = \sigma^2\mathbf{I}$ 和 $-\mathbf{I}\sigma^2\mathbf{I}(-\mathbf{I})^\top = \sigma^2\mathbf{I}$ ，导致了 \mathbf{F}_i 中给出的表达式。当考虑非各向同性 IMU 时，就无法这样做，应使用适当的雅可比矩阵 $\mathbf{F}_i = [\mathbf{B} \ \mathbf{C}]$ ，并且需要对 \mathbf{Q}_i 进行适当的指定。

当然，我们也可以使用全状态扰动脉冲，

$$\delta \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}_x(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}_m) \cdot \delta \mathbf{x}_n + \mathbf{i} \quad (449)$$

其中

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_i \\ \boldsymbol{\theta}_i \\ \mathbf{a}_i \\ \boldsymbol{\omega}_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{i} \sim \mathcal{N}\{0, \mathbf{Q}\} \quad , \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & \sigma_a^2 \Delta t^2 \mathbf{I} & & & & 0 \\ & & \sigma_\omega^2 \Delta t^2 \mathbf{I} & & & \\ & & & \sigma_{a_w}^2 \Delta t \mathbf{I} & & \\ & 0 & & & \sigma_{\omega_w}^2 \Delta t \mathbf{I} & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (450)$$

Bye bye.

References

References

Chirikjian, G. S. (2012). *Stochastic Models, Information Theory, and Lie Groups*, volume 2: Analytic Methods and Modern Applications of *Applied and Numerical Harmonic Analysis*. Birkhäuser,, Basel.

- Chou, J. (1992). Quaternion kinematic and dynamic differential equations. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 8(1):53–64.
- Dam, E. B., Koch, M., and Lillholm, M. (1998). Quaternions, interpolation and animation. Technical report, Department of Computer Science, University of Copenhagen, Denmark.
- Eberly, D. (2010). Quaternion algebra and calculus. Technical report, Geometric Tools, LLC.
- Kuipers, J. B. (1999). *Quaternions and rotation sequences: a primer with applications to orbits, aerospace, and virtual reality*. Princeton University Press., Princeton, N.J.
- Li, M. and Mourikis, A. (2012). Improving the accuracy of EKF-based visual-inertial odometry. In *Robotics and Automation (ICRA), 2012 IEEE International Conference on*, pages 828–835.
- Li, M., Yu, H., Zheng, X., and Mourikis, A. (2014). High-fidelity sensor modeling and self-calibration in vision-aided inertial navigation. In *Robotics and Automation (ICRA), 2014 IEEE International Conference on*, pages 409–416.
- Lupton, T. and Sukkarieh, S. (2009). Efficient integration of inertial observations into visual slam without initialization. In *IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*.
- Madyastha, V., Ravindra, V., Mallikarjunan, S., and Goyal, A. (2011). Extended Kalman Filter vs. Error State Kalman Filter for Aircraft Attitude Estimation. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Portland, Oregon. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- Martinelli, A. (2012). Vision and imu data fusion: Closed-form solutions for attitude, speed, absolute scale, and bias determination. *IEEE Transactions on Robotics*, 28(1):44–60.
- Piniés, P., Lupton, T., Sukkarieh, S., and Tardós, J. D. (2007). Inertial aiding of inverse depth SLAM using a monocular camera. In *Int. Conf. on Robotics and Automation*.
- Roussillon, C., Gonzalez, A., Solà, J., Codol, J. M., Mansard, N., Lacroix, S., and Devy, M. (2011). RT-SLAM: A generic and real-time visual SLAM implementation. In Crowley, J., Draper, B., and Thonnat, M., editors, *Computer Vision Systems*, volume 6962 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 31–40. Springer Berlin Heidelberg.
- Shoemake, K. (1985). Animating rotation with quaternion curves. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, 19(3):245–254.
- Shuster, M. D. (1993). Survey of attitude representations. *Journal of the Astronautical Sciences*, 41:439–517.

- Trawny, N. and Roumeliotis, S. I. (2005). Indirect Kalman filter for 3D attitude estimation. Technical Report 2005-002, University of Minnesota, Dept. of Comp. Sci. & Eng.
- Yazell, D. (2009). Origins of the unusual space shuttle quaternion definition. In *Aerospace Sciences Meetings*, pages –. American Institute of Aeronautics and Astronautics.