2010 Geometry: Ex. 4

due 2011/10/14

1. p29 Ex1
2. p30 Ex3
3. ✠
   (a) 假設 $\kappa(s) \neq 0, \tau(s) \neq 0$，由四點決定一球，討論空間曲線 $\gamma(s)$ 的密切球，並決定球心與半徑。
   (b) 討論螺線 $(a\cos t, a\sin t, bt)$ 的密切球，$a > 0$
4. ✠$\kappa \neq 0, \tau \neq 0$ 為兩常數，請決定 $\kappa(s) = \kappa, \tau(s) = \tau$ 的曲線方程式。(長度參數 s)
5. ✠(Darboux vector)
   $\gamma(s)$ arc length
   (a) 說明 $\exists$ vector $\omega(s)$(called Darboux vector)
   s.t. $\begin{cases} T' &= \omega \times T \\ N' &= \omega \times N \\ B' &= \omega \times B \end{cases}$
   (b) $V(s)$ is a vector along $\gamma(s)$
   且 w.r.t$(T, N, B), V(s) = (v_1(s), v_2(s), v_3(s))$
   $\Rightarrow V' = (v_1', v_2', v_3') + \omega \times V$
   (c) 說明 $\omega = \frac{1}{2}(T \times T' + N \times N' + B \times B')$

   Rmk:(從物理觀點，這說明 κ measure (T, N, B) frame 對 B 的旋轉，τ measure (T, N, B) 對 T 的旋轉)
6. p26 Ex18
7. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1$
   (a) 說明 $(\mathrm{d}f)_a(v_a) = \frac{\partial f}{\partial v}(a)$　f 在 a 對 v 方向的方向導數。
   (b) $a \in f(x_1, \cdots, x_n) = c,\ v_a$ 切於 $f(x_1, \cdots, x_n) = c$，說明 $\mathrm{d}f_a(v_a) = 0$
8. ✠
   (a) 令函數
   $$\begin{array}{rccc} x_i : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, \cdots, x_n) & \mapsto & x_i \end{array}$$
   計算 $[\mathrm{d}x_i]$，在不同的 $a \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}x_i$ 如何隨 a 變化。
   (b) 由上題將微分式 $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$ 與映射 $\mathrm{d}f$ 結合起來。
   (c) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，怎麼利用上題幫你計算 $\mathrm{d}f$

9. (給學複變的同學)$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphic 可以想成 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 的函數。
請證明 $\|f'(z)\|^2 = \det(dF)$。