

2010 Geometry: Ex.10

due 2011/12/09

1. Ex p237 6.
2. \boxtimes 若 $E = 1, F = 0, G = 1, f = 0$, 假設再加入函數 e, g 後是某 surface 的 1st&2nd fundamental form。
 - (a) 說明 e, g 中至少有一為 0
 - (b) 說明若 $e = g = 0$ 則此平面為平面
 - (c) 說明若 $e \neq 0$, 則此曲面為特別的 ruled surface, 並討論 e 的意義。
3. Ex p237 7.
4. \boxtimes Ex p237 8.
5. Ex p237 9.
6. \boxtimes 有一 surface $\mathbb{X}(u, v)$, 令 $\hat{\mathbb{X}}(u, v) = \lambda \mathbb{X}(u, v), \lambda > 0$
 - (a) 討論 $\hat{\Gamma}_{ij}^k$ 和 Γ_{ij}^k 的關係
 - (b) 從 Gauss equation(GTE) 討論 \hat{K} 和 K 的關係
7. 閱讀課本 p226&p227 Prop.2, 理解 conformal map 的意義。
8. 第 6 題中令 $F: \mathbb{X}(u, v) \rightarrow \hat{\mathbb{X}}(u, v)$ 是 conformal map 嗎?
9. \boxtimes 舉一個例子說明有可能 $F: M \rightarrow N$ 是 conformal map, 且相應點 $K_M > 0, K_N = 0$ (想想曾經討論的例子)
10. 若 $(x^1, x^2), (y^1, y^2)$ 為某曲面之兩個座標
 - (a) 他們各自的 Christoffel symbol 為 Γ_{ij}^k 與 $\hat{\Gamma}_{ij}^k$, 說明下列關係式

$$\hat{\Gamma}_{ij}^k = \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^i \partial y^j} \frac{\partial y^k}{\partial x^l} + \Gamma_{lm}^n \frac{\partial x^l}{\partial y^i} \frac{\partial x^m}{\partial y^j} \frac{\partial y^k}{\partial x^n}$$

即 Γ_{ij}^k 不是 tensor

(b) 令 $R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{km}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l$, 說明 $\hat{R}_{jik}^l = R_{mns}^t \frac{\partial x^m}{\partial y^i} \frac{\partial x^n}{\partial y^j} \frac{\partial x^s}{\partial y^k} \frac{\partial y^l}{\partial x^t}$