

# GEOMETRY HOMEWORK BONUS

B96201044 黃上恩, B98901182 時丕勳, K0020100x 劉士璋

January 5, 2012

**Problem 1.** 給定一 *simple close curve*  $\gamma(s)$ , 考慮  $\gamma(s)$  沿著  $N$  方向以  $|\kappa|$  的變化率變動的情形。Formulation: 令  $F(s, t) = (x(s, t), y(s, t))$   $F(s, t)$  可想成  $\gamma_t(s)$ , 是在時間  $t$  時的曲線。其中  $\gamma_0(s) = \gamma(s)$ , 此時不妨假設  $s$  為長度參數。但當  $t \neq 0$ ,  $s$  並非  $\gamma_t(s)$  之長度參數。

1.  $\gamma_0(s) = (\cos s, \sin s)$  時, 說明  $\gamma_t(s)$  的變化
2. 令  $\Delta = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}$ , 證明  $\frac{\partial \Delta}{\partial t} = -\kappa_t^2(s)\Delta$   
(其實  $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}$  是  $\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}$ )
3. 說明  $\gamma_t$  的長度會越來越短。
4. 給出一個想法, 說明若  $\gamma_1, \gamma_2$  一開始不相交, 則  $\gamma_{1t}, \gamma_{2t}$  就永遠不會相交。

Proof. 1.

$$F = (\sin s, \cos s)$$

$$F_s = \Delta T$$

$$F_t = \kappa N$$

2.

$$F_s = \Delta T$$

$$F_t = \kappa N$$

$$F_{ss} = \Delta^2 \kappa N + \Delta_s T$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = \frac{\langle F_s, F_s \rangle_t}{2\Delta} = \frac{\langle F_{st}, F_s \rangle}{\Delta} = \frac{\langle F_t, F_s \rangle_s - \langle F_t, F_{ss} \rangle}{\Delta} = -\frac{\langle F_t, F_{ss} \rangle}{\Delta} = -\kappa^2 \Delta$$

3. Denote the length of  $\gamma_t$  by  $|\gamma_t|$  and let  $|\gamma_0| = \lambda$ . Then by 2.,

$$\frac{\partial |\gamma_t|}{\partial t} = \int_0^\lambda \frac{\partial \Delta}{\partial t} \Delta ds = \int_0^\lambda -\kappa_t^2(s) \Delta^2 ds \leq 0.$$

□