# Geometry Homework Bonus

*B96201044* 黃上恩, *B98901182* 時丕勳, *K0020100x* 劉士瑋

January 6, 2012

**Problem 1.** 給定一 *simple close curve* $\gamma(s)$, 考慮 $\gamma(s)$ 沿著 $N$ 方向以 $|\kappa|$ 的變化率變動的情形。*Formulation:* 令 $F(s,t) = (x(s,t), y(s,t))$
$F(s,t)$ 可想成 $\gamma_t(s)$, 是在時間 $t$ 時的曲線。其中 $\gamma_0(s) = \gamma(s)$, 此時不妨假設 $s$ 為長度參數。但當 $t \neq 0$, $s$ 並非 $\gamma_t(s)$ 之長度參數。

1. $\gamma_0(s) = (\cos s, \sin s)$ 時, 說明 $\gamma_t(s)$ 的變化
2. 令 $\Delta = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}$, 證明 $\frac{\partial\Delta}{\partial t} = -\kappa_t^2(s)\Delta$
   (其實 $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}$ 是 $\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}$)
3. 說明 $\gamma_t$ 的長度會越來越短。
4. 給出一個想法, 說明若 $\gamma_1, \gamma_2$ 一開始不相交, 則 $\gamma_{1t}, \gamma_{2t}$ 就永遠不會相交。

*Proof.* 1. 由對稱性顯然可知，$\gamma_t(s)$ 仍然會是個圓, 設 $\gamma_t(s) = (r(t)\cos s, r(t)\sin s)$.

$$\begin{aligned}
&\to r'(t) = -\frac{1}{r(t)} \\
&\to r(t) = \sqrt{2(C-t)} \\
&r(0) = 1 \to r(t) = \sqrt{1-2t} \\
&\to \gamma_t(s) = (\sqrt{1-2t}\cos s, \sqrt{1-2t}\sin s)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
F_s &= \Delta T \\
F_t &= \kappa N \\
F_{ss} &= \Delta^2 \kappa N + \Delta_s T \\
\frac{\partial \Delta}{\partial t} &= \frac{\langle F_s, F_s\rangle_t}{2\Delta} = \frac{\langle F_{st}, F_s\rangle}{\Delta} = \frac{\langle F_t, F_s\rangle_s - \langle F_t, F_{ss}\rangle}{\Delta} = -\frac{\langle F_t, F_{ss}\rangle}{\Delta} = -\kappa^2\Delta
\end{aligned}$$

3. Denote the length of $\gamma_t$ by $|\gamma_t|$ and let $|\gamma_0| = \lambda$. Then by 2.,

$$\frac{\partial|\gamma_t|}{\partial t} = \int_0^\lambda \frac{\partial\Delta}{\partial t}\Delta ds = \int_0^\lambda -\kappa_t^2(s)\Delta^2 ds \leq 0.$$

4. 顯然若 $\gamma_{1t}$ 和 $\gamma_{2t}$ 會相交的話, 則他們在某個時間點會是相切的, 不妨假設這時間點就是兩條曲線第一次相交的時間點.
若在切點處兩曲線的曲率不一樣大, 則在較裡面那條曲線的曲率會比較大, 故在 $t$ 往回一點時他會往外長得比較快, 所以兩曲線仍然是相交的.
故在切點處兩條曲線的曲率一樣大, 而因為這兩條曲線在 $t$ 往回一點時是不相交的, 故外面那條曲線在 $t$ 往回一點時會往外長得比較快，但這卻表示在 $t$ 往回一點時外面那條曲線在該切點對應到的點附近的曲率比較大, 但這樣外面曲線的曲率比較大, 當往回一點的 $\Delta t$ 很小時, 就會和裡面的那條曲線相交, 而和我們假設這兩條曲線第一次相交矛盾. 故 $\gamma_{1t}$ 和 $\gamma_{2t}$ 不會相交.

$\square$