2010 幾何學 Geometry: Ex. 9

due 2011/12/2

1.
$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \widehat{f} \nearrow & \uparrow^{f} \\ \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \end{array}$$

有一函數 $y = f(x)$，現考慮一新「座標」$x = x(t),\ x'(t) \neq 0$，與相對應的函數 $\widehat{f}(t) = f\left(x(t)\right)$。下列哪些性質會保持：單調性、極值、凹性？

2.
$$\begin{array}{ccc} & & \Sigma \\ & \mathbb{X} \nearrow & \uparrow \mathbb{Y} \\ (x^1, x^2) & \underset{\phi}{\to} & (y^1, y^2) \end{array}$$

在 Σ 上有一 vector field，若用不同座標可表示為

$$a^i \mathbb{X}_i = b^j \mathbb{Y}_j$$

說明 $b^j = a^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}$，其中 $\phi(x^1, x^2) = \left(y^1(x^1, x^2), y^2(x^1, x^2)\right),\ \mathrm{d}\phi = \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)$

3. $\star$ 有一曲面 $\mathbb{X}(x^1, x^2)$，及對應的 E, F, G，現想找一新座標 $(y^1.y^2)$ 使得對應的 1st fundamental form 為 $1, 0, 1$，說明這相當於要解下述 PDE 方程組

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y^2}{\partial x^1}\right)^2 = E \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^1}\frac{\partial y^1}{\partial x^2} + \frac{\partial y^2}{\partial x^1}\frac{\partial y^2}{\partial x^2} = F \\ \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right)^2 = G \end{cases}$$

4. ✠
   (a) Ex p101 14 a (什麼是 surface 上的 gradient)
   (b) 為什麼不直接將 gradient f 定義成 $f_u \mathbb{X}_u + f_v \mathbb{X}_v$，這有什麼缺點 (例如座標變換)

5. Ex p173 22

6. 證明 $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = < \mathbb{X}_{ik}, \mathbb{X}_j > + < \mathbb{X}_{kj}, \mathbb{X}_i >$

7. 計算下列 surface 的 Γ_{ij}^k(共有六項)
   (a) $(u, v, f(u, v))$(函數曲面)
   (b) ✠$(x(t), y(t)\cos\theta, y(t)\sin\theta)$(旋轉面)
   (c) ✠$E = G = \lambda^2,\ F = 0$

8. Ex p237 1✠, 2✠, 4

9. $\star$

(a) 想一想同一曲面同一點的 Gauss 曲率 $K(p)$ 在不同座標下為何相等

(b) 如果純粹從 intrinsic 即 (E, F, G) 的眼光來想，不同的座標有不同的 1st fundamental form，它們用 Gauss Theorma Egregium 決定的 K 為什麼會一樣呢？

10. 若 $(x^1, x^2), (y^1, y^2)$ 為某曲面之兩個座標

(a) 他們各自的 Christoffel sympol 為 Γ_{ij}^k 與 $\widehat{\Gamma}_{ij}^k$，說明下列關係式

$$\widehat{\Gamma}_{ij}^k = \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^i \partial y^j}\frac{\partial y^k}{\partial x^l} + \Gamma_{lm}^n \frac{\partial x^l}{\partial y^i}\frac{\partial x^m}{\partial y^j}\frac{\partial y^k}{\partial x^n}$$

即 Γ_{ij}^k 不是 tensor

(b) 令 $R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{km}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l$，說明 $\widehat{R}_{jik}^l = R_{mns}^t \frac{\partial x^m}{\partial y^i}\frac{\partial x^n}{\partial y^j}\frac{\partial x^s}{\partial y^k}\frac{\partial y^l}{\partial x^t}$