2010 Geometry: Ex.7

due 2011/11/04

1. $$\begin{tikzcd} & & \mathbb{R}^3 \\ (s,t) \arrow[urr, "\hat{\mathbf{x}}"] \arrow[rr, "F"'] & & (u,v) \arrow[u, "\mathbf{x}"'] \end{tikzcd}$$

   (a) 利用矩陣$\mathrm{d}F = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix}$ 寫出 $\begin{pmatrix} \widehat{E} & \widehat{F} \\ \widehat{F} & \widehat{G} \end{pmatrix}$ 與 $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ 的關係，

   以及 $\begin{pmatrix} \widehat{e} & \widehat{f} \\ \widehat{f} & \widehat{g} \end{pmatrix}$ 與 $\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$ 的關係

   (b) $\widehat{K}$ 與 K 相等嗎？$\widehat{H}$ 與 H 呢？

2. ✠ 若 $F(x,y,z)=0$ 定義一 surface ，證明 $\nabla f \neq 0$ 的地方 Gauss curvature $K = \frac{\nabla F^t A \nabla f}{\|\nabla f\|^4}$。
   其中 A 為$\partial^2 F = \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{pmatrix}$ 的 adjoint Matrix , i.e. $A = \det(\partial^2 F)(\partial^2 F)^{-1}$

3. ✠Ex p168 4

4. ✠ 已知 $\mathbb{X}(u,v)$ 為一 surface $\subset \mathbb{R}^3$ 且
   $E = G = (1+u^2+v^2)^2$, $F = 0$ 而且 $e = 1,\ f = \sqrt{3},\ g = -1$

   (a) 求在 $\mathbb{X}(1,1)$ 的 K 與 H

   (b) 如何決定過 $\mathbb{X}(1,1)$ 的 line of curvature 與 asymptotic curve (如果有的話)

5. ✠$\mathbb{X}(u,v) = (v\cos u, v\sin u, u)$，令 $\gamma(t) = \mathbb{X}(t,1)$

   (a) 求 $\gamma(t)$ 的 $\kappa_n,\ \kappa_g,\ \tau_g$

   (b) 與 $\gamma(t)$ 的 κ 與 τ 有何關係

6. ✠ 令 $(x(t), y(t)) = (t - \tanh t, \mathrm{sech} t)$(這基本就是 p7(4) 的 tractrix)

   (a) 將此曲線化作長度參數

   (b) 利用上小題，求此曲線繞 x 軸旋轉的旋轉體的 K

7. Ex p169 7. a,b,e