

2010 Geometry: Ex. 3

due 2011/10/07

1. P.23 Ex4
2. P.26 Ex15 (\vec{b} 能決定曲線嗎?)
3. \boxtimes P.26 Ex16 (\vec{n} 能決定曲線嗎? 說明題目錯誤並找反例)
hint: $\kappa=0$
4. \boxtimes P.26 Ex17 (另一種描述 helix 的方式)
5. P.24 Ex10 (若不假設 $\kappa > 0$, 則 $\tau = 0$ 並不一定是平面曲線)
6. \boxtimes $\gamma(s)$ 長度參數。若將 $T(s)$ 寫成 $(\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$, ϕ, θ 是 s 的函數。說明 $\kappa(s) = \sqrt{\phi'^2 + \theta'^2 \sin^2 \phi}$
(如果你有興趣, 也可以算 $\tau(s)$, 但不用交, 也不鼓勵。)
7. $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, 不妨假設是長度參數。
 - (a) 若 $M^t M = I$ (i.e. M is orthogonal), $\det M = 1$, 且 $\bar{\gamma} = M\gamma + \vec{a}$, 說明 κ, τ 不變。
 - (b) \boxtimes 若 $M^t M = I, \det(M) = -1$, 且 $\bar{\gamma} = M\gamma$, 討論 κ, τ 變化。
 - (c) \boxtimes $\bar{\gamma}(s) = \gamma(-s)$, 說明 κ, τ 變化。
8. \boxtimes 說明 $\bar{\gamma}(u) = \gamma(t(u))$ 時, 在對應點

$$\frac{\det(\bar{\gamma}', \bar{\gamma}'', \bar{\gamma}''')}{|\bar{\gamma}' \times \bar{\gamma}''|^2}(u) = \frac{\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{|\gamma' \times \gamma''|^2}(t)$$

用 chain rule 直接說明。