

GEOMETRY HOMEWORK BONUS

B96201044 黃上恩, B98901182 時丕勳, K0020100x 劉士璋

January 5, 2012

Problem 1. 給定一 *simple close curve* $\gamma(s)$, 考慮 $\gamma(s)$ 沿著 N 方向以 $|\kappa|$ 的變化率變動的情形。Formulation: 令 $F(s, t) = (x(s, t), y(s, t))$ $F(s, t)$ 可想成 $\gamma_t(s)$, 是在時間 t 時的曲線。其中 $\gamma_0(s) = \gamma(s)$, 此時不妨假設 s 為長度參數。但當 $t \neq 0$, s 並非 $\gamma_t(s)$ 之長度參數。

1. $\gamma_0(s) = (\cos s, \sin s)$ 時, 說明 $\gamma_t(s)$ 的變化
2. 令 $\Delta = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}$, 證明 $\frac{\partial \Delta}{\partial t} = -\kappa_t^2(s)\Delta$
(其實 $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}$ 是 $\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}$)
3. 說明 γ_t 的長度會越來越短。
4. 給出一個想法, 說明若 γ_1, γ_2 一開始不相交, 則 γ_{1t}, γ_{2t} 就永遠不會相交。

Proof. 1. 由對稱性顯然可知, $\gamma_t(s)$ 仍然會是個圓, 設 $\gamma_t(s) = (r(t) \cos s, r(t) \sin s)$.

$$\begin{aligned} \rightarrow r'(t) &= -\frac{1}{r(t)} \\ \rightarrow r(t) &= \sqrt{2(C-t)} \\ r(0) &= 1 \rightarrow r(t) = \sqrt{1-2t} \\ \rightarrow \gamma_t(s) &= (\sqrt{1-2t} \cos s, \sqrt{1-2t} \sin s) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} F_s &= \Delta T \\ F_t &= \kappa N \\ F_{ss} &= \Delta^2 \kappa N + \Delta_s T \\ \frac{\partial \Delta}{\partial t} &= \frac{\langle F_s, F_s \rangle_t}{2\Delta} = \frac{\langle F_{st}, F_s \rangle}{\Delta} = \frac{\langle F_t, F_s \rangle_s - \langle F_t, F_{ss} \rangle}{\Delta} = -\frac{\langle F_t, F_{ss} \rangle}{\Delta} = -\kappa^2 \Delta \end{aligned}$$

3. Denote the length of γ_t by $|\gamma_t|$ and let $|\gamma_0| = \lambda$. Then by 2.,

$$\frac{\partial |\gamma_t|}{\partial t} = \int_0^\lambda \frac{\partial \Delta}{\partial t} \Delta ds = \int_0^\lambda -\kappa_t^2(s) \Delta^2 ds \leq 0.$$

4.

