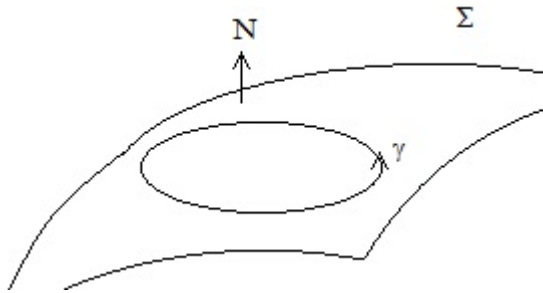


# 2010 Geometry: Ex.13

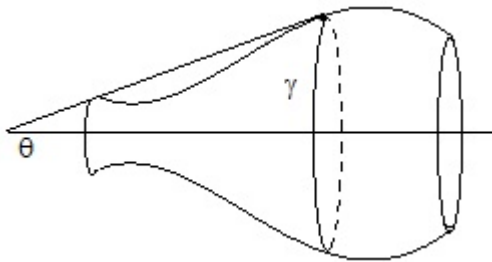
due 2011/01/06

1. Ex p261 9
2. Ex p262 15
3. Ex p 261 13(可以用課本的提示，也可以用 baby Gauss Bonnet)
4.  $\boxtimes$  Helicoid  $\mathbb{X}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u)$ ,  $\gamma(t) = \mathbb{X}(t, 1)$ ,  $p = \mathbb{X}(0, 1) = (1, 0, 0)$ ,  $V(0) = \gamma'(0)$   
求解平行向量場  $V(t)$  along  $\gamma(t)$
5. 若  $(u, v)$  為某 surface 的 isothermal coordinate i.e.  $E = G = \lambda^2(u, v)$ ,  $F = 0$ ,  $\lambda > 0$  令  $\tilde{\mathbb{X}}_u = \frac{\mathbb{X}_u}{\lambda}$ ，證明

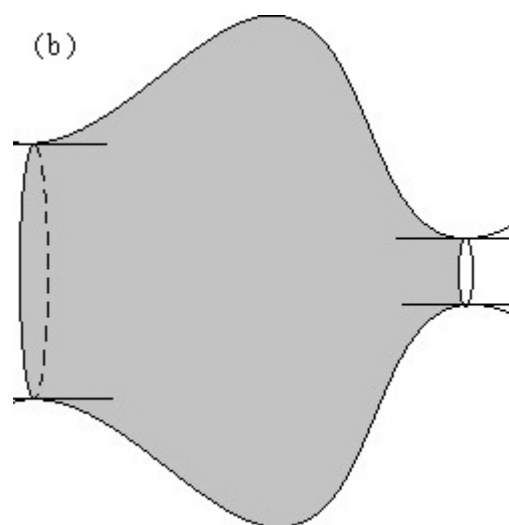
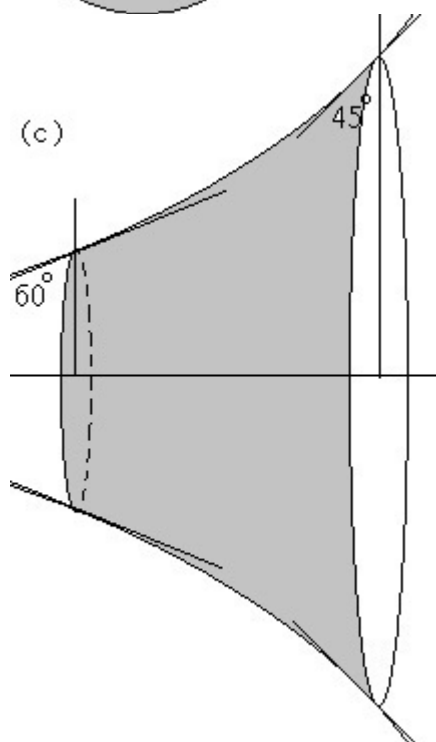
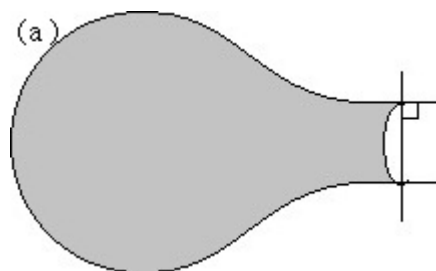
$$\int_{\gamma} - \left[ \frac{D\tilde{\mathbb{X}}_u}{ds} \right] ds = \iint_D K dA$$



6.  $\boxtimes$  如圖考慮一旋轉體上的緯圈  $\gamma$ ，已知其 generating curve(經線) 切線與中心軸夾角為  $\theta$



- (a) 求一向量沿  $\gamma$  平行移動，繞一圈後與原向量的夾角 (不妨假設起始向量與緯圈同向)
- (b) 將該 surface 放大或縮小，相對應問題的夾角有何變化
- (c) 計算此緯圈之  $\oint_{\gamma} \kappa_g ds$ ，值與 surface 的縮放有關嗎？



7. 求以上各題旋轉體灰色區域的  $|\int_D K dA|$

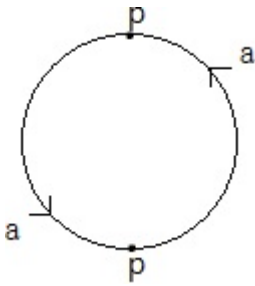
8. Ex P282 1.

9. Ex P292 3.

10.  $\boxtimes$

(a) Ex P282 4.

(b) 如圖，將一圓盤的邊界如圖「黏」起來（也可以想成將對稱點「黏」起來），找一個三角分割，計算此 projective space 的 Euler characteristic。



11. Ex P283 5.

12.  $\boxtimes$  Ex P283 6.

13. Ex P283 8.

14. Ex P283 9.

15. (a) 若  $\gamma(t) \subset \Sigma$ ，證明  $\kappa_g = \frac{\det(N, \gamma', \gamma'')}{|\gamma'|^3}$

(b) 由上題，證明 ( $\kappa_g$  是 intrinsic)

$$\kappa_g = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{|\gamma'|^3} \begin{vmatrix} u'' + u'^2\Gamma_{11}^1 + 2u'v'\Gamma_{12}^1 + v'^2\Gamma_{22}^1 & v'' + u'^2\Gamma_{11}^2 + 2u'v'\Gamma_{12}^2 + v'^2\Gamma_{22}^2 \end{vmatrix}$$

(c) 計算 coordinate curve (即  $\mathbb{X}(u, v_0)$  或  $\mathbb{X}(u_0, v)$ ) 的  $\kappa_g$ 。

(d) 用下列三種情況驗證上面的計算

i. Plane curve 的  $\kappa$  公式

ii. surface 上的 geodesic 的  $\kappa_g$

iii. 單位球上 (或旋轉面上) 緯圈的  $\kappa_g$ 。