Geometry Homework 7

B96201044 黃上恩, *B98901182* 時丕勳, *K0020100x* 劉士瑋

November 1, 2011

Problem 2. 若 $F(x,y,z)=0$ 定義一 *surface*，證明 $\nabla f \neq 0$ 的地方 *Gauss curvature* $K = \frac{\nabla F^t A \nabla f}{\|\nabla f\|^4}$。其中 A 為 $\partial^2 F = \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{pmatrix}$ 的 *adjoint Matrix, i.e.* $A = \det(\partial^2 F)(\partial^2 F)^{-1}$

Proof. □

Problem 3 (Ex P168 4). *Determine the asymptotic curves and the lines of curvature of* $z = xy$.

Proof. □

Problem 4. 已知 $\mathbb{X}(u,v)$ 為一 *surface* $\subset \mathbb{R}^3$ 且 $E = G = (1+u^2+v^2)^2, F = 0$ 而且 $e = 1, f = \sqrt{3}, g = -1$

(a) 求在 $\mathbb{X}(1,1)$ 的 K 與 H

(b) 如何決定過 $\mathbb{X}(1,1)$ 的 *line of curvature* 與 *asymptotic curve*（如果有的話）

Proof. (a) at $(1,1)$, $E = G = 9, F = 0$.

$$\begin{aligned}[-dN] &= \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

So $K = \det([-dN]) = -\frac{4}{81}$, $H = \operatorname{tr}([-dN]) = 0$.

□

Problem 5. $\mathbb{X}(u,v) = (v\cos u, v\sin u, u)$，令 $\gamma(t) = \mathbb{X}(t,1)$

(a) 求 $\gamma(t)$ 的 $\kappa_n, \kappa_g, \tau_g$

(b) 與 $\gamma(t)$ 的 κ, τ 有何關係

Proof. $\square$

Problem 6. 令 $(x(t), y(t)) = (t - \tanh\ t, \operatorname{sech}\ t)$ 這基本就是 *p7(4)* 的 *tratrix*

(a) 將此曲線化作長度參數

(b) 利用上小題，求此曲線繞 x 軸旋轉的旋轉體的 K

Proof. $\square$