Geometry Homework 5

B96201044 黃上恩, *B98901182* 時丕勳, *K0020100x* 劉士瑋

October 16, 2011

Problem 1 (參見 P67 Ex16). 考慮

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{X}: & \mathbb{R}^2 & \to & S^2 \setminus \{N\} \\ & (u,v) & \mapsto & \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right) \end{array} \quad , N = (0,0,1)$$

(a) 檢查這的確是 $S^2 \setminus \{N\}$ 的參數式

(b) 計算 E, F, G，$E = G$ 嗎？

(c) 計算 $\mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v$

(d) 若 W_1, W_2 是 $\mathbb{R}^2$ 兩以 a 為起點的向量，說明 W_1, W_2 的夾角 $= d\mathbb{X}(W_1)$ 與 $d\mathbb{X}(W_2)$ 的夾角

Problem 2 (旋轉面). $\mathbb{X}(\theta, s) = (a(s)\cos\theta, a(s)\sin\theta, b(s))$，其中 $(a(s), b(s))$ 為長度參數之平面曲線。計算 E, F, G 並討論其 *regular* 的條件。

Problem 3 (管面). 設空間曲線 $\gamma(s)$，s 長度參數，$\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ 為 *Frenet frame*。令 $\mathbb{X}_l(s,\theta) = \gamma(s) + l\cos\theta\vec{n}(s) + l\sin\theta\vec{b}(s), l > 0$，計算 E, F, G 並討論其 *regular* 條件。

Problem 6 (Ex6, p100). *Show that*

$$\mathbf{x}(u,v) = (u\sin\alpha\cos v, u\sin\alpha\sin v, u\cos\alpha)$$

where $0 < u < \infty, 0 < v < 2\pi, \alpha = const.$*, is a parametrization of the cone with* 2α *as the angle of the vertex. In the corresponding coordinate neighborhood, prove that the curve*

$$\mathbf{x}(c\exp(v\sin\alpha\cot\beta), v), \quad c = const., \beta = const.,$$

intersects the generators of the cone ($v = const.$) *under the constant angle* β.