数学分析 III(荣誉）课程大作业

林元莘

2023 年 1 月 3 日

摘要

在一学期的数分 III 学习过程中，我们接触到了傅里叶级数。对于 Parseval 恒等式，笔者课后自行进行了拓展，了解到了更弱的条件以及衍生不等式。进一步了解到了傅里叶分析。

关键词： Parseval 恒等式;Wirstinger 不等式;Fourier 分析

目录

1 Parseval 恒等式

1.1 背景引入

我们在学习傅里叶级数的过程中，曾研究过 Parseval 恒等式的如下形式:

定理 1.1. $f(x) \in C(\mathbb{R})$，$T = 2\pi$，记 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 为 f 的傅里叶级数有：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

但事实上，Parseval 恒等式的成立不需要这么强的条件。在现学的黎曼可积的的框架下，只需要要求 f 满足可积、反常平方可积、平方可积，我们可以得到：

定理 1.2. 设 $f \in \mathbf{R}^2[-\pi,\pi]$，记 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 为 f 的傅里叶级数，则有：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

1.2 定理证明

为了证明这个定理，我们分为两步证明。

(1)f 在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积

先证明如下引理：

引理 1.3. $\forall f \in \mathbf{R}^2[-\pi,\pi]$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists g \in C([-\pi,\pi])$，$g(\pi) = g(-\pi)$ 使得：

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - g(x))^2\,dx < \varepsilon$$

证明. $f \in \mathbb{R}[-\pi,\pi]$，则对 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $[-\pi,\pi]$ 的一个分割

$$-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = \pi$$

使得：

$$\sum_{i=1}^{m}\omega_i\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{\Omega}$$

其中 $\omega_i = M_i - m_i$ 是 f 在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅，$\Omega = M - m$ 是 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上的振幅。

改变 f 使得 $f(-\pi) = f(\pi)$，不影响关于 f 的积分值。

用直线将 $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ 和 $(x_i, f(x_i))$ 连接起来，得到 $[-\pi, \pi]$ 上的一条折线，记为 $g(x)$。则 $g(x)$ 满足 $g(x) \in C([-\pi, \pi])$，$g(\pi) = g(-\pi)$。

则考虑当 $x \in [x_{i-1}, x_i]$ 时，得到：

$$|f(x) - g(x)| \le \omega_i \le \Omega$$

则有：

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - g(x))^2\,dx = \sum_{i=1}^{m}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x) - g(x))^2\,dx \le \sum_{i=1}^{m}\Omega\omega_i\Delta x_i < \varepsilon$$

□

则由**引理 1.3** 知，$\forall\varepsilon > 0$，$\exists g \in C([-\pi, \pi])$，$g(\pi) = g(-\pi)$ 使得：

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - g(x))^2\,dx < \frac{\varepsilon}{4}$$

由 Weierstrass 逼近定理，存在三角多项式 T_N，满足：

$$\int_{-\pi}^{\pi}(g(x) - T_N(x))^2\,dx < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\begin{aligned}\|f - T_N\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - T_N(x))^2\,dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - g(x) + g(x) - T_N(x))^2\,dx \\ &\le 2\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - g(x))^2\,dx + 2\int_{-\pi}^{\pi}(g(x) - T_N(x))^2\,dx \\ &\le \varepsilon\end{aligned}$$

根据傅里叶级数部分和 S_n 的极值性质，以及和函数距离递减的性质，则取 $\forall n > N$:

$$\|f - S_n\|^2 \le \|f - S_N\|^2 \le \|f - T_N\|^2 < \varepsilon$$

则有

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n\|^2 = 0$$

由

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right]$$

则 Parseval 恒等式成立：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

(2) 设 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上反常平方可积。不妨设 π 是 f 的瑕点。

$\forall \varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，满足：

$$\int_{\pi-\delta}^{\pi} f^2(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{4}$$

构造函数：

$$f_1 = \begin{cases} f(x) & -\pi \le x \le \pi - \delta \\ 0 & \pi - \delta < x \le \pi \end{cases}$$

$$f_2 = \begin{cases} 0 & -\pi \le x \le \pi - \delta \\ f(x) & \pi - \delta < x \le \pi \end{cases}$$

那么有 $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$。由于 f_1 在 $[-\pi, \pi]$ 上 Riemann 可积，故由（1）中证明结论知，存在三角多项式 $T(x)$，使得

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f_1(x) - T(x))^2\,dx < \frac{\varepsilon}{4}$$

则可得：

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T(x))^2\,dx &\le 2\int_{-\pi}^{\pi}(f_1(x)-T(x))^2\,dx+2\int_{-\pi}^{\pi}(f_2(x))^2\,dx\\ &<\frac{\varepsilon}{2}+2\int_{\pi-\delta}^{\pi}f^2(x)\,dx\\ &<\varepsilon\end{aligned}$$

剩下部分同上理，也能得 Parseval 恒等式。

在学习完实分析后，可以得到 Parseval 恒等式更弱的条件。即 $f\in L^2[-\pi,\pi]$ 时，Parseval 等式仍然成立。

1.3 恒等式的妙用

例 1.4. 证明：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\ln(\cos x))^2\,dx=\frac{\pi^3}{24}+\frac{\pi\ln^2 2}{2}$$

证明. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\ln(\cos x))^2\,dx=\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}(\ln(\cos\frac{x}{2}))^2\,dx$,则考虑函数 $f(x)=\ln(\cos\frac{x}{2})$，易证明为反常平方可积。考虑其傅里叶级数：

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\cos}nx=\ln(2\cos\frac{x}{2})(-\pi<x<\pi)$$

则有：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\ln(\cos\frac{x}{2}))^2\,dx=2\ln^2 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=2\ln^2 2+\frac{\pi^2}{6}$$

则可得：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\ln(\cos x))^2\,dx=\frac{\pi^3}{24}+\frac{\pi\ln^2 2}{2}$$

□

2 衍生不等式

2.1 Wirtinger 不等式

定理 2.1. f 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续可微，$f(-\pi)=f(\pi)$，$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=0$，则有：

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \le \int_{-\pi}^{\pi} [f'(x)]^2\,dx$$

等号成立当且仅当 $f(x)=a\cos x+b\sin x$.

证明. f 可以写成傅里叶级数形式

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx)$$

由 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=0$，有 $a_0=0$ 由 Parseval 恒等式可以得到：

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx=\pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\le\pi\sum_{n=1}^{\infty}(n^2a_n^2+n^2b_n^2)=\int_{-\pi}^{\pi}[f'(x)]^2\,dx$$

当且仅当 $n\ge 2$，$a_n=0,b_n=0$ 时等号成立。即 $f(x)=a\cos x+b\sin x$ 时等号成立。 □

2.2 Poincare 不等式

定理 2.2. f 在 $[0,\pi]$ 上连续可微，$f(0)=f(\pi)$，则有：

$$\int_{0}^{\pi} f^2(x)\,dx \le \int_{0}^{\pi} [f'(x)]^2\,dx$$

等号成立当且仅当 $f(x)=b\sin x$.

证明. 对 f 进行奇延拓后，如 Wirtinger 不等式操作即可。 □

2.3 等周不等式

定理 2.3. 设平面区域 Ω 的边界 Γ 是长度为 L 的连续可微简单闭曲线，则 Ω 的面积满足不等式：

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}$$

当且仅当 Ω 为半径 $\frac{L}{2\pi}$ 的圆。

证明. 设 Ω 的边界 Γ 的参数方程为 $\gamma(t) = (x(t), y(t)), t \in [0, 2\pi]$ 不妨令 $L = 2\pi$, 则有：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x'(t)^2 + y'(t)^2)\,dx = 1$$

记:

$$x(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$y(t) \sim \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \cos nx + d_n \sin nx)$$

则有：

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) = 2$$

则考虑面积：

$$A = \iint_{\Omega} dxdy = \left|\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\,dx\right| = \frac{\pi}{2}\left|\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n d_n - b_n c_n)\right|$$

由

$$|a_n d_n - b_n c_n| \leq a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2$$

则就有

$$A \leq \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) = \pi$$

当取任意 L 时，只需 $\gamma(t) = (\frac{L}{2\pi}x(t), \frac{L}{2\pi}y(t)), t \in [0, 2\pi]$ 即可得到

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}$$

□

3 Fourier 分析

3.1 定义

用复数形式来表示 f 的 Fourier 级数

$$f(x) \sim \sum a_n e^{2\pi nx}$$

在这里面，n 是离散的指标，在傅里叶变换下，我们考虑把离散指标转变为连续指标，则可以有

$$f(x) \sim \int_{(-\infty,\infty)} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i\xi x}\, d\xi$$

其中

$$\hat{f}(\xi) = \int_{(-\infty,\infty)} f(x) e^{-2\pi i\xi x}\, dx$$

由此演变形式，我们可以定义

定义 3.1. *函数*

$$F[f](\xi) = \int_{(-\infty,\infty)} f(x) e^{-2\pi i\xi x}\, dx$$

称为函数 f 的 Fourier 变换，有时记 $F[f](\xi) = \hat{f}(\xi)$。

定义 3.2. *函数*

$$F^{-1}[g](x) = \int_{(-\infty,\infty)} g(\xi) e^{2\pi i\xi x}\, d\xi$$

称为 g 的 Fourier 积分。

3.2 性质

$S(R)$ 为 Schwartz 空间。

命题 3.3. *若 $f \in S(R)$，则有：*

$$F[f(x+h)](\xi) = \hat{f}(\xi) e^{2\pi ih\xi} \ \ \forall h \in R$$

$$F[f(x)e^{-2\pi ixh}](\xi) = \hat{f}(\xi + h) \ \ \forall h \in R$$

$$F[f(\delta x)](\xi) = \delta^{-1}\hat{(}f)(\delta^{-1}\xi) \ \ \delta > 0$$

$$F[f'(x)](\xi) = 2\pi i\xi \hat{f}(\xi)$$

$$F[-2\pi ixf(x)](\xi) = \frac{d}{dx}\hat{f}(\xi)$$

命题 3.4. 若 $f(x) = e^{-\pi x^2}$，则 $\hat{f}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$

证明. 记

$$g(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{(-\infty,\infty)} f(x)e^{-2\pi i\xi x}\,dx$$

有 g(0) = 1，我们还有

$$\begin{aligned} g'(\xi) &= \int_{(-\infty,\infty)} -2\pi ixf(x)e^{-2\pi i\xi x}\,dx \\ &= i\int_{(-\infty,\infty)} f'(x)e^{-2\pi i\xi x}\,dx \\ &= -2\pi\xi\int_{(-\infty,\infty)} f(x)e^{-2\pi i\xi x}\,dx \\ &= -2\pi\xi g(\xi) \end{aligned}$$

则有 $g(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$ □

推论 3.5. $\delta > 0$ 并且 $K_\delta(x) = \delta^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi x^2}{\delta}}$，则有 $\hat{K}_\delta(\xi) = e^{-\pi\delta\xi^2}$。

命题 3.6. $f \in S(R)$ 则有以下一致收敛：

$$\lim_{\delta\to 0}(f * K_\delta)(x) = f(x)$$

定理 3.7. 若 $f, g \in S(R)$，则有：

$$\int_{(-\infty,\infty)} f(x)\hat{g}(x)\,dx = \int_{(-\infty,\infty)} \hat{f}(x)g(x)\,dx$$

证明. 由 Fubini 定理易证。 □

定理 3.8 (Fourrier inversion)**.** *若* $f \in S(R)$*，则有：*

$$f(x) = \int_{(-\infty,\infty)} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} \, d\xi$$

证明. 首先，我们去证明

$$f(0) = \int_{(-\infty,\infty)} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} \, d\xi$$

然后令 $G_\delta(x) = e^{-\pi\delta x^2}$，那么有 $\hat{G}_\delta = K_\delta$，由乘法公式有

$$\int_{(-\infty,\infty)} f(x)\hat{G}_\delta(x) \, dx = \int_{(-\infty,\infty)} f(x)K_\delta(x) \, dx = \int_{(-\infty,\infty)} \hat{f}(x)G_\delta(x) \, dx$$

令 $\delta \to 0$，则左侧收敛于 $f(0)$，而右侧收敛于 $\int_{(-\infty,\infty)} \hat{f}(x) \, dx$ 那么证明了前面的引理。下面只需要令 $F(y) = f(x+y)$ 则有：

$$f(x) = F(0) = \int_{(-\infty,\infty)} \hat{F}(\xi) \, d\xi = \int_{(-\infty,\infty)} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} \, d\xi$$

$\square$