高代选讲课程报告

林元莘

2022 年 7 月 17 日

摘要

在暑期的高等代数选讲中，李吉有老师介绍了对称多项式相关的理论以及有理标准型相关理论，受益匪浅，感受到了代数之美。课后在回顾以前做过的题目时，利用相关的工具，更有融汇贯通之感。后在查阅书籍以及互联网相关资料的过程中，深化、加强了这方面的知识。

关键词： Newton 恒等式;Jordan 标准型; 有理标准型; 可交换矩阵; 循环子空间

目录

1 牛顿恒等式与特征值

1.1 背景引入

在《高等代数》选讲的课堂上, 我们学习到了有关**牛顿恒等式**的相关知识。自然地, 将其应用到**特征值与特征多项式**问题上。

定理 1.1. *设 n 阶矩阵 A, 其特征值为 $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$, 其特征多项式为*

$$P(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)...(x-\lambda_n) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

记 $P_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + ... + \lambda_n^k, k = 0, 1, ..., n$, 则有如下公式:

$$\sum_{i=0}^{k-1} a_{n-i} P_{k-i} + a_{n-k} k = 0, k \leq n$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} P_{k-i} = 0, k > n$$

由 $\mathrm{tr}(A^k) = \lambda_1^k + \lambda_2^k + ... + \lambda_n^k$, 可以代入其中, 得到如下推论:

推论 1.2.

$$\sum_{i=0}^{k-1} a_{n-i} \mathrm{tr}(A^{k-i}) + a_{n-k} k = 0, k \leq n$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} \mathrm{tr}(A^{k-i}) = 0, k > n$$

1.2 例题应用

学到这里的时候, 我想起了当时做的一道较为困难的题目, 但是以牛顿恒等式的观点去看, 却是较为简单的。另一种观点的方法将在下一章节给出。

例 1.3. *A, B, C 均为 n 阶复方阵, 且*

$$C = AB - BA, AC = CA, BC = CB$$

求证：C 为幂零矩阵

证明.

$$\mathrm{tr}(C)=\mathrm{tr}(AB)-\mathrm{tr}(BA)=0$$

$$\mathrm{tr}(C^k)=\mathrm{tr}(C^{k-1}AB)-\mathrm{tr}(C^{k-1}BA)=\mathrm{tr}((C^{k-1}A)B)-\mathrm{tr}(B(C^{k-1}A))=0$$

即 C 任意次数的所有特征值之和均为 0

由**推论 1.2** 的公式知, $a_i=0 \quad i=0,1,...,n-1$,

则特征多项式为 $p(x)=x^n$, 特征值均为 0, C 为幂零矩阵。 □

本题的做法其实也可以再进行一个推广来考虑。

推论 1.4. *若 R 是包含 $\mathbb{Q}$ 的交换环, A 为环 R 上的 n 阶矩阵, 对每个正整数 i, $\mathrm{tr}(A^i)=0$, 则 $A^n=0$。*

这个推论将在下面的定理证明中起到关键作用。

1.3 有趣的定理

定理 1.5. *(Amitsur-Levitski 恒等式) 设 $A_1,A_2,...,A_{2n}$ 为 n 阶复矩阵, 那么有:*

$$\sum_{\sigma\in S_{2n}}\mathrm{sgn}(\sigma)A_{\sigma(1)}A_{\sigma(2)}...A_{\sigma(2n)}=0$$

证明. 对于 n 阶矩阵 $B_1,B_2,...,B_n$, 定义:

$$H_r=H_r(B_1,...,B_r)=\sum_{\sigma\in S_r}\mathrm{sgn}(\sigma)B_{\sigma(1)}B_{\sigma(2)}...B_{\sigma(r)}$$

首先有一个引理。

引理 1.6. *若 r 为偶数, 则 $\mathrm{tr}H_r=0$。*

这是显然的, 因为例如

$$\mathrm{tr}(B_1B_2...B_r)=\mathrm{tr}(B_2...B_rB_1)$$

并且有 $\mathrm{sgn}(1, 2, ..., r) = -\mathrm{sgn}(2, ..., r, 1)$。考虑一个 $2n$ 维向量空间 T, 令 E 为其**外代数**。
令 $e_1, e_2, ..., e_{2n}$ 为 T 的一组基,
最后令:

$$A = e_1A_1 + e_2A_2 + ... + e_{2n}A_{2n} \in M_n(E)$$

此时, $e_1, e_2, ..., e_{2n}$ 可以视为 E 中的元素, 而 $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ 可以视作 E 上的 n 阶矩阵。
对于 $k \geq 1$,

$$A^k = \sum_{i_1<...<i_k} e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_k} H_k(A_{i_1}, ..., A_{i_k})$$

特别地,

$$A^{2n} = e_1 \wedge ... \wedge e_{2n} H_{2n}(A_1, ..., A_{2n})$$

由**引理 1.6**, 任意正整数 k, $\mathrm{tr}(A^{2k}) = 0$。即任意正整数 k, $\mathrm{tr}((A^2)^k) = 0$。
由**推论 1.4**, $A^{2n} = 0$, 即 $H_{2n}(A_1, ..., A_{2n}) = 0$, 即原命题成立。[1] □

2 Jordan 标准型与有理标准型

2.1 例题应用

例 2.1. 设 A, B, C 为 n 阶复方阵, 满足:

$$C = AB - BA, \quad AC = CA, \quad BC = CB$$

求证: C 为幂零矩阵

证明. 依题意，它们可以同时相似化
令 $P^{-1}CP = J = \mathrm{diag}(J_1, ..., J_k)$
则不妨令 J_i 特征值都各不相同,

$$J = AB - BA, \quad AJ = JA, \quad BJ = JB$$

令 A, B 按照 J 写为分块阵 $(A_{ij}), (B_{ij})$
由 $AJ = JA, JB = BJ$, 即 $J_i A_{ij} = A_{ij} J_j$
由于 J_i 与 J_j 没有相同特征值, 易证 $A_{ij} = O, i \neq j$
即:

$$A = \mathrm{diag}(A_{11}, A_{22}, ..., A_{kk}), \quad B = \mathrm{diag}(B_{11}, B_{22}, ..., B_{kk})$$

即:

$$J_i = A_{ii}B_{ii} - B_{ii}A_{ii}$$

得到:

$$tr(J_i) = 0, \forall i = 1, 2, ..., k$$

即 J 所有特征值为 0。
那么 C 必为幂零矩阵。[2] □

2.2 类比拓展

设 W 是域 F 上的 m 维线性空间, A 是 W 上的线性变换, 并且其最小多项式为 $m(\lambda)$。

若 $m(\lambda)$ 可以分解为一次因式乘积, $W_j = \mathrm{Ker}(A-\lambda_j I)^{l_j}$ 对于标准型可以直接考虑:$A|W_j = B_j + \lambda_j I$。只要研究 B_j 即可。
若 $m(\lambda)$ 无法分解成一次因式乘积, $W_j = \mathrm{Ker}p_j^{l_j}(A)$, 则直接研究 $A|W_j$, 将其记作 C_j, 其最小多项式是 $p_j^{i_j}(\lambda)$, 它在 F 上不可约。则研究 C_j 即可。
若 B 是 W 上的幂零变换, 则 W 可以分解成 $\mathrm{dim}W_0$ 个 B-强循环子空间的直和, W_0 是 B 特征值为 0 的特征子空间。
推广至有理标准型的情况的话

定理 2.2. *设 C 是 W 上的线性变换, C 的最小多项式 $m(\lambda) = p^l(\lambda)$, 其中 $p^l(\lambda)$ 在域 F 上不可约, 则 W 能分解成 $\frac{1}{r}\mathrm{dim}W_0$ 个 C-循环子空间的直和, 其中 $r = \mathrm{deg}p(\lambda)$, W_0 是 $p(C)$ 的属于特征值 0 的特征子空间。*

进而可以推出有理标准型的具体内容, 就不在此展开了。

2.3 漂亮的定理

定理 2.3. *设 A 是域 F 上线性空间 V 上的线性变换,*

$$C(A) = \{B \in \mathrm{Hom}(V,V) | AB = BA\}$$

$$C^2(A) = \{H \in \mathrm{Hom}(V,V) | HB = BH, \forall B \in C(A)\}$$

设 A 的最小多项式 $m(\lambda) = p^l(\lambda)$, 其中 $p(\lambda)$ 在域 F 上不可约。
则有:

$$C^2(A) = F[A]$$

这个定理看着美妙, 实则证明是十分困难的, 充满了构造性思想的巧思。以下仅记录整个证明的思维过程。

证明. 首先, 任取 $f(A) \in F[A], \forall B \in C(A)$, 由于 $BA = AB$ 必然 $Bf(A) = f(A)B$。从而 $f(A) \in C^2(A)$, 于是 $F[A] \subseteq C^2(A)$

则任取 $H \in C^2(A)$, 要存在 $g(A) \subseteq F[A]$, 使得 $H = g(A)$。
由此, 要和 A 的多项式挂钩, 则考虑 A-循环子空间。即将 V 分解成 A-循环子空间的直和: $V = U_1 \bigoplus ... \bigoplus U_s$。
考虑 P_j 表示平行于 $\bigoplus\limits_{i \neq j} U_i$ 在 U_j 上的投影。
易有 $P_j \in C(A)$, 则必有 $HP_j = P_jH$。得到 U_j 是 H 的不变子空间。
令 ξ_i 是 U_i 的生成元, 可以有 $H\xi_i = g_i(A)\xi_i$。
进而得到 $H_i = g_i(A)$。
不妨令 $m_1(\lambda) = m(\lambda)$,$m(\lambda) = h_i(\lambda)m_i(\lambda), i = 1, 2, ..., s$ 进而猜测 $H = g_1(A)$
要使 $H = g_1(A)$ 成立, 当且仅当 $Hh_i(A)\xi_1 = g_i(A)h_i(A)\xi_1$。
为证明此公式, 我们去构造线性变换 G_i:
对于 $i \in 1, 2, ..., s$, 定义 V 上的一个变换 G_i, 满足如下条件:

$$G_i(\alpha_j) = \alpha_j, \quad \alpha_j \in U_j, \quad j \neq i;$$

$$G_i(q(A)\xi_i) = q(A)h_i(A)\xi_1, \quad \forall q(\lambda) \in F[\lambda];$$
$$G_i(\sum_{k=1}^{s} b_k\alpha_k) = \sum_{k=1}^{s} b_kG_i(\alpha_k).$$

可以发现的是 $AG_i = G_iA$, 从而得到 $HG_i = G_iH$。于是就有

$$HG_i\xi_i = G_iH\xi_i = g_i(A)h_i(A)\xi_1$$

就有:

$$Hh_i(A)\xi_1 = g_i(A)h_i(A)\xi_1$$

那么就有了 $H = g_1(A)$。因此, $C^2(A) \subseteq F[A]$。
则 $C^2(A) = F[A]$ 成立。[3] □

参考文献

[1] Shmuel Rosset. *A NEW PROOF OF THE AMITSUR-LEVITSKI IDENTITY*[J], ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS,1976,VOL.23,NO.2.

[2] 谢启鸿. 复旦大学谢启鸿高等代数习题课 [Z/OL].: 哔哩哔哩视频网,2021.05.10

[3] 丘维生. 高等代数（下册）———大学高等代数课程创新教材 [M]. 北京: 清华大学出版社,2010