

1 Woche 01 - Kombinatorik

Zählregel

- Disjunkte Vereinigung: $|A \cup B| = |A| + |B|$
- Vereinigung: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- Paare = Produkt: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Reihenfolge / Permutation Jeder Platz im Hörsaal wird belegt:

$$\begin{aligned}
 P_n &= \underbrace{\#\{\text{Plätze für 1. Objekt}\}}_n \cdot \underbrace{\#\{\text{Plätze für 2. Objekte}\}}_{n-1} \cdot \dots \cdot \underbrace{\#\{\text{Plätze für n. Objekte}\}}_1 \\
 &= n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 = n! \\
 &= \underbrace{\#\{\text{Plätze für 1. Objekt}\}}_n \cdot \underbrace{\#\{\text{Anordnung von n-1 Objekten}\}}_{P_{n-1}} \\
 &= n \cdot P_{n-1} = n \cdot (n-1)! = n!
 \end{aligned}$$

Anzahl / Auswahl Problem Auf wie viele Arten kann man k Plätze aus n Plätzen auswählen? 16 Studenten (k) platzieren sich auf 32 Plätzen (n).

$$\begin{aligned}
 \# \text{Auswahlprozesse} &= n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \\
 &= \frac{n!}{(n-k)!} \\
 \# \text{Permutation} &= k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1 = k!
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_k^n &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1} \\
 &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}
 \end{aligned}$$

Binominal Koeffizient (funktioniert meist nicht gut, Taschenrechner können grosse $n!$ nicht rechnen) Besser so:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}$$

Variation Auch als Perlenkette bekannt

$$\# \text{Möglichkeiten} = k[\text{Farben}]^n[\text{Längen}]$$

2 Woche 02 - Ereignisse und Wahrscheinlichkeit

Begriffe

Begriff	Model
Versuchsausgang, Elementarereignis	ω
alle Versuchsausgänge	Ω
Ereignis	$A \subset \Omega$
Ereignis ist eingetreten	$\omega \in A$
sicheres Ereignis, tritt immer ein	Ω
unmögliches Ereignis, kann nicht eintreten	\emptyset
A und B treten ein	$A \cap B$
A oder B treten ein	$A \cup B$
A hat B zur Folge, wenn A dann auch B	$A \subset B$
nicht A	$\overline{A} = \Omega \setminus A$

Bedingte Wahrscheinlichkeit Wahrscheinlichkeit, dass ein Toter ein rotes Shirt trägt (Wir untersuchen nur die Toten und schauen ob er ein Rotes Shirt trägt)

$$P(R|T) = \frac{P(R \cap T)}{P(T)}$$

Wahrscheinlichkeit, dass ein Redshirt umkommt (Wir untersuchen nur die Redshirts, und schauen ob er Tot ist):

$$P(T|R) = \frac{P(R \cap T)}{P(R)}$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} P(R|T) &= \frac{P(R \cap T)}{P(T)} \Rightarrow \\ P(R|T) \cdot P(T) &= P(R \cap T) \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} P(T|R) &= \frac{P(R \cap T)}{P(R)} \Rightarrow \\ P(T|R) \cdot P(R) &= P(R \cap T) \end{aligned} \tag{2}$$

Aus 1 und 2 folgt der **Satz von Bayes**:

$$P(R|T) \cdot P(T) = P(R \cap T) = P(T|R) \cdot P(R)$$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(T \cap G) &= P(T|G) \cdot P(G) \\ +P(T \cap B) &= P(T|B) \cdot P(B) \\ +P(T \cap R) &= P(T|R) \cdot P(R) \\ =P(T) \end{aligned}$$

3 Woche 03 - bedingte Wahrscheinlichkeit

4 Woche 04 - Zufallsvariablen

Erwartungswert

$$E(X) = \sum_{i=1}^n g_i P(A_i) \quad (3)$$

$$E(\text{"Gewinn"}) = \text{"Gewinn bei Kopf"} \cdot P(\text{"Kopf"}) + \text{"Gewinn bei Zahl"} \cdot P(\text{"Zahl"})$$

Varianz

$$\text{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Table

Ereignis	X	P(X = g)	P(X = g) * g	P(X = g) * g ²
0	2	1/16	0.125	0.25
1	3	4/16	0.75	2.25
2	5	6/16	1.875	9.375
3	7	4/16	1.75	12.25
4	11	1/16	0.6875	7.5625
			E(X)	E(X ²)
			5.1875	31.6875
				var(X)
				4.7773438

5 Woche 05 - Anwendungen der Varianz

Table Lineare Regression

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1					
2					
3					
4					
5					
<hr/>					
E					

$$\text{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$\text{var}(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$$

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$a = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\text{var}(X)}$$

$$b = E(Y) - aE(X)$$

$$r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)}}$$

6 Woche 06 - Verteilungsfunktion und Wahrscheinlichkeitsdichte

Die Verteilungsfunktion beschreibt die Wahrscheinlichkeiten der Werte einer Zufallsvariable:

$$F(X) = P(X \leq x)$$

$\phi(x)$ ist die Ableitung von $F(x)$ und entspricht der Verteilungsdichte Funktion.

$$\phi(x) = \frac{d}{dx}F(x) = F'(x)$$

- Wahrscheinlichkeit: $P(X = x) \rightarrow \phi(x)dx$
- Summe: $\sum_x \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}$
- $E(X) = \sum_x x \cdot P(X = x) \rightarrow E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \phi(x)dx$

Wichtig: Erkennen, was ist der Wert, was ist der Erwartungswert

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 \phi(x) dx = \int_0^1 x^2 1 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \quad (4)$$

$$\text{var}(x) = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12} \quad (5)$$

$$\sqrt{\text{var}(X)} = \sqrt{\frac{1}{12}} = 0.288 \quad (6)$$

7 Woche 07 - Exponential- / Erlang- / Poisson-Verteilung

Exponentialverteilung

Dichtefunktion $ae^{-ax}, a > 0$

Verteilungsfunktion $1 - e^{-ax}$

Erwartungswert $\frac{1}{a}$

Varianz $\frac{1}{a^2}$

Median $\frac{1}{a} \log 2$

Poissonverteilung

Wahrscheinlichkeit $P_{\lambda}(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Erwartungswert λ

Varianz λ

8 Woche 08 - Normalverteilung

Normalverteilung

Dichtefunktion $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Verteilungsfunktion keine elementare Funktion (Tabelle nutzen)

Erwartungswert μ

Varianz σ^2

Median μ

9 Woche 09 - Binominalverteilung

Binominalverteilung

Wahrscheinlichkeit $P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Verteilungsfunktion $F(k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$

Erwartungswert np

Varianz $np(1-p)$

10 Woche 10 - Schätzen

Schätzen Mittelwert ist häufig ein guter Schätzer

t-Verteilung t-Verteilung sollte dann verwendet werden, wenn man wenig Daten hat, aber es normal Verteilt ist (kleine n).

11 Woche 11 - Hypothesentest

Vorgehen Hypothesentest

1. Nullhypothese H_0 und Alternativhypothese H_1
2. Testgrösse und Verteilung unter der Annahme der Nullhypothese
3. Wahl des Signifikanzniveaus α
4. Kritischer Wert für Testgrösse, die nur mit Wahrscheinlichkeit α erreicht wird
5. Kritischer Wert erreicht \Rightarrow Nullhypothese H_0 verwerfen

t-Test Ist der neue Dünger besser? Die Stichproben X_1, \dots, X_n und Y_1, \dots, Y_m mit gleicher Varianz haben den gleichen Erwartungswert.

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}} \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$$

t_{krit} kann aus der t-Verteilung abgelesen werden. k erhält man durch $n+m-2$. Wenn t_{krit} überschritten wird, muss H_0 verworfen werden.

12 Woche 12 - Test einer Verteilung

X²-Test

Table

$$D = \sum_{i=1}^d \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

Kolmogorov-Smirnov-Test

13 Woche 13 - Das Filter-Problem