1 Kombinatorik

Zählregel

- Disjunkte Vereinigung: $|A \cup B| = |A| + |B|$
- Vereinigung: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- Paare = Produkt: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Reihenfolge / Permutation Jeder Platz im Hörsaal wird belegt:

$$\begin{aligned} P_n &= \underbrace{\#\{\text{Plätze für 1. Objekt}\}}_{n} \cdot \underbrace{\#\{\text{Plätze für 2. Objekte}\}}_{n-1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\#\{\text{Plätze für n. Objekte}\}}_{1} \\ &= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n! \\ &= \underbrace{\#\text{Plätze für 1. Objekt}}_{n} \cdot \underbrace{\#\text{Anordnung von n-1 Objekten}}_{P_{n-1}} \\ &= n \cdot P_{n-1} = n \cdot (n-1)! = n! \end{aligned}$$

Anzahl / Auswahl Problem Auf wie viele Arten kann man k Plätze aus n Plätzen auswählen? 16 Studenten (k) platzieren sich auf 32 Plätzen (n).

$$\begin{aligned} \#\text{Auswahlprozesse} &= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \\ &= \binom{n}{k} \end{aligned}$$

Binominal Koeffizient (funktioniert meist nicht gut, Taschenrechner können grosse $n!$ nicht rechnen) Besser so:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$$

Variation Auch als Perlenkette bekannt

$$\#\text{Möglichkeiten} = k[\text{Farben}]^{n[\text{Längen}]}$$

2 Ereignisse und Wahrscheinlichkeit

Begriffe

Begriff	Model
Versuchausgang, Elementarereignis	ω
alle Versuchsausgänge	Ω
Ereignis	$A \subset \Omega$
Ereignis ist eingetreten	$\omega \in A$
sicheres Ereignis, tritt immer ein	Ω
unmögliches Ereignis, kann nicht eintreten	$\emptyset$
A und B tretten ein	$A \cap B$
A oder B tretten ein	$A \cup B$
A hat B zur Folge, wenn A dann auch B	$A \subset B$
nicht A	$\overline{A} = \Omega \setminus A$

Bedingte Wahrscheinlichkeit Wahrscheinlichkeit, dass ein Toter ein rotes Shirt trägt (Wir untersuchen nur die Toten und schauen ob er ein Rotes Shirt trägt)

$$P(R|T) = \frac{P(R \cap T)}{P(T)}$$

Satz von Bayes:

$$P(R|T) \cdot P(T) = P(R \cap T) = P(T|R) \cdot P(R)$$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} & P(T \cap G) && = P(T|G) \cdot P(G) \\ + & P(T \cap B) && = P(T|B) \cdot P(B) \\ + & P(T \cap R) && = P(T|R) \cdot P(R) \\ = & P(T) \end{aligned}$$

3 Zufallsvariabeln

Erwartungswert

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} g_i P(A_i) \tag{1}$$

Varianz

$$var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

4 Verteilungsfunktion und Wahrscheinlichkeitsdichte

Die Verteilungsfunktion beschreibt die Wahrscheinlichkeiten der Werte einer Zufallsvariable:

$$F(X) = P(X \leq x)$$

$\phi(x)$ ist die Ableitung von $F(x)$ und entspricht der Verteilungsdichte Funktion.

$$\phi(x) = \frac{d}{dx} F(x) = F'(x)$$

- Wahrscheinlichkeit: $P(X = x) \to \phi(x)dx$
- Summe: $\sum_x \to \int_\infty^\infty$
- $E(X) = \sum_x x \cdot P(X = x) \to E(X) = \int_\infty^\infty x \cdot \phi(x)dx$

Wichtig: Erkennen, was ist der Wert, was ist der Erwartungswert

5 Exponential- / Erlang- / Poisson-Verteilung

Exponentialverteilung
Dichtefunktion $ae^{-ax}, a > 0$
Verteilungsfunktion $1 - e^{-ax}$
Erwartungswert $\frac{1}{a}$
Varianz $\frac{1}{a^2}$
Median $\frac{1}{a} \log 2$

Possonverteilung
Wahrscheinlichkeit $P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
Erwartungswert λ
Varianz λ

6 Normalverteilung

Normalverteilung
Dichtefunktion $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
Verteilungsfunktion keine elementare Funktion (Tabelle nutzen)
Erwartungswert μ
Varianz σ
Median μ

7 Binominalverteilung

Binominalverteilung
Wahrscheinlichkeit $P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
Verteilungsfunktion $F(k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$
Erwartungswert np
Varianz $np(1-p)$

8 Schätzen

Schätzen Mittelwert ist häufig ein guter Schätzer

t-Verteilung t-Verteilung sollte dann verwendet werden, wenn man wenig Daten hat, aber es normall Verteilt ist (kleine n).

9 Hypothesentest

Vorgehen Hypothesentest

1. Nullhypothese H_0 und Alternativhypothese H_1
2. Testgrösse und Verteilung unter der Annahme der Nullhypothese
3. Wahl des Signifikanzniveaus α
4. Kritischer Wert für Testgrösse, die nur mit Wahrscheinlichkeit α erreicht wird
5. Kritischer Wert erreicht $\Rightarrow$ Nullhypothese H_0 verwerfen

t-Test Ist der neue Dünger besser? Die Stichproben $X_1, \ldots, X_n$ und $Y_1, \ldots, Y_m$ mit gleicher Varianz haben den gleichen Erwartungswert.

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$$

$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}} \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$$

t_{krit} kann aus der t-Verteilung abgelesen werden. k erhält man durch $n+m-2$. Wenn t_{krit} überschritten wird, muss H_0 verworfen werden.

10 Test einer Verteilung

X^2-Test

$$D = \sum_{i=1}^{d} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

D > D_+ ⇒ Daten passen nicht (H_0 verwerfen)

D < D_− ⇒ Daten passen zu gut, ist ein Hinweis auf Betrug

Kolmogorov-Smirnov-Test