

# Hilbert 空间闭凸集投影算子的性质

## 变分不等式与非扩张性——优化中的基础算子

### 第六组

成员：王夫执、赖骏哲、郭彧申、翟泽、罗稔然

2026 年 2 月 4 日

# 研究背景

- 投影算子是优化算法中的基础工具
- 广泛出现在：
  - 投影梯度下降 (Projected Gradient Descent)
  - POCS (交替投影法)
  - 变分不等式与单调算子理论
- 本课题研究：

## 核心问题

Hilbert 空间中闭凸集投影算子的最优性刻画与算子性质

# 基本定义

设  $\mathcal{H}$  是实 Hilbert 空间， $C \subseteq \mathcal{H}$  为非空闭凸集。

$$P_C(x) = \arg \min_{y \in C} \|x - y\|$$

## 几何意义

从点  $x$  到集合  $C$  的最近点

## 优化意义

这是一个带凸约束的最小化问题

$$\min_{y \in C} \frac{1}{2} \|x - y\|^2$$

# 定理 1：变分不等式刻画

## 定理

$\bar{x} = P_C(x)$  当且仅当

$$\langle x - \bar{x}, y - \bar{x} \rangle \leq 0, \quad \forall y \in C$$

## 意义

投影点满足一阶最优性条件（变分不等式）

# 定理 1 证明思路

关键思想：利用凸性 + 最小化性质

- 构造  $y_t = \bar{x} + t(y - \bar{x}) \in C$
- 使用

$$\|x - \bar{x}\|^2 \leq \|x - y_t\|^2$$

- 展开平方并令  $t \rightarrow 0^+$

## 本质

这是“约束最优化”的一阶必要充分条件

# 定理 2：牢固非扩张性

## 定理

$$\langle P_C(x_1) - P_C(x_2), x_1 - x_2 \rangle \geq \|P_C(x_1) - P_C(x_2)\|^2$$

## 推论

投影算子是 1-Lipschitz：

$$\|P_C(x_1) - P_C(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$$

# 定理 2 证明核心

由定理 1 得到：

$$\langle x_1 - \bar{x}_1, \bar{x}_2 - \bar{x}_1 \rangle \leq 0, \quad \langle x_2 - \bar{x}_2, \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \rangle \leq 0$$

相加整理得到牢固非扩张性。

## 优化意义

保证投影不会放大误差——收敛性分析的基础

# 课题目标

- 封装投影最优化条件为优化友好 lemma
- 为：
  - Projected Gradient Descent
  - POCS
- 提供一步收敛界
- 在 Mathlib 中定位相关模块：InnerProductSpace / Projection

# 小组任务分工 (Chapter7 校对任务)

- P281–287: 王夫执
- P288–294: 赖骏哲
- P295–301: 郭彧申
- P302–308: 翟泽
- P309–314: 罗稔然

# 课题任务分工

- 王夫执：主写课题理论与证明
- 其余成员：辅助整理、查文献、校对、Lean 相关支持

# 个人工作——王夫执

(填写)

# 个人工作——赖骏哲

(填写)

# 个人工作——郭彧申

(填写)

# 个人工作——翟泽

(填写)

# 个人工作——罗稔然

- 课题理论辅助撰写
- 教材校对工作
- 汇报 PPT 制作

# 课题研究时间线

```
[ timeline/.style=thick, event/.style=circle, draw=blue!60,  
fill=blue!40, minimum size=9pt textnode/.style=align=center, font=  
]  
[timeline] (0,0) – (10,0);  
[event] (a) at (1,0) ; [event] (b) at (5,0) ; [event] (c) at (9,0) ;  
[textnode, below=8pt of a] 建立 GitHub 仓库共享  
资料查找; [textnode, below=8pt of b] lean 优化理论学习  
证明推导; [textnode, below=8pt of c] 整理报告  
PPT 制作;
```

# 谢谢老师！