定理 0.0.1 Hilbert 空间闭凸集投影：变分不等式与非扩张性（优化最基础算子）
令 H 是 Hilbert 空间，$\langle , \rangle$ 为 H 上的内积，$C \subset H$ 为闭凸集，H 上关于 C 的投影算子为 $proj_C : H \to C, x \mapsto proj_C x$，任意取定 $x \in H$，有 $\langle x - proj_C x, y - proj_C x \rangle \leq 0, (\forall u \in C)$，则有 $\|proj_C x - proj_C y\| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in H$。

证明. 首先得说明映射 $proj_C$ 的存在唯一性，这样才是良定义的，

对于任意 $x, y \in H$，有

$$\langle x - Px, Py - Px \rangle \leq 0$$

$$\langle y - Py, Px - Py \rangle \leq 0$$

两式相加得

$$\langle y - x + Px - Py, Px - Py \rangle \leq 0$$

等价于

$$\langle (y - x) - (Py - Px), Px - Py \rangle \leq 0$$

等价于

$$\langle x - y, Px - Py \rangle \geq \|Px - Py\|$$

又 $\langle x - y, Px - Py \rangle \geq \|x - y\| \|Px - Py\|$

故 $\|Px - Py\| \leq \|x - y\|$ □