Übung 1: Die Transportgleichung in analytischer & numerischer Lösung

Lisa Bahlmann & Robert Sämann

Inhalt

- Übersicht Übungen
- Die Transportgleichung
- Analytische Lösung

Organisatorisches: Übungen

- 1. Stationäre Transportgleichung
    - analytische Lösung
    - numerische Lösung
- 2. Instationäre Transportgleichung mit Finite Differenzen
    - Zeit und Ort
- 3. Kinematische Näherung einer Hochwasserwelle
    - Finite Differenzen und Finite Volumen
- 4. Instationäre Transportgleichung mit Slope Limitern

Organisatorisches: Bewertung der Aufgaben

- 10 Punkte / Zeitwoche
- 130 Punkte regulär + 40 Punkte aus * Aufgaben
- Endnote 4,0 mit 60 Punkten, 1,0 mit 130 Punkten
  - Zählt 20% in die Endnote
- Inhalte aus der Übung sind auch Teil der Klausur
- Rückgabe der Korrektur in der Woche nach Abgabe
- Der Programm-Code wird untereinander auf Plagiate geprüft

Organisatorisches: Ablauf der Übungen

- In der Übung werden Aufgabenblätter verteilt, die in der Übung und zu Hause bearbeitet werden.
- Bearbeitung in Teams aus 2-3 Personen
- Die Abgabe erfolgt zum angegebenen Tag 13:00 Uhr
  - Beantwortung in schriftlicher Form (z.B. auf Aufgabenblatt)
  - Programmcode als .m Dateien & Abbildungen an saemann@hydromech.uni-hannover.de

Numerische Strömungsmechanik
Lisa Bahlmann, Robert Sämann
Sommersemester 2019

Institut für Strömungsmechanik
und Umweltphysik im Bauwesen

Übung 1

Statinäre Transportgleichung - Analytische und numerische Lösung mit Finiten Differenzen in 1D

Ausgabe: 18.04.2019

Abgabe: 16.05.2019 13:00 Uhr

Mit der Abgabe und der Unterschrift auf dieser Abgabe verpflichten Sie sich zur selbständigen Anmeldung im Modul Numerische Strömungsmechanik sobald die Online-Anmeldung freigegeben ist.

Anforderungen

- Arbeit in Gruppen zu 2-3 Personen
- Inhalte der Handreichungen und Übungen sind prüfungsrelevant
- Dieses Dokument ist auszufüllen und unterschrieben einzureichen
- Aufgaben mit * sind optional und führen zu Extra-Punkten in der Bewertung
- Versehen Sie jeden Programm-Code mit Namen und Matrikelnummern
- Alle Plots sind mit aussagekräftiger Achsenbeschriftung und Legende zu versehen
- Nutzen Sie immer die vorgegebenen Variablen- und Funktionsnamen
- Alle Programm-Codes müssen bei Abgabe gesendet werden als E-Mail an saemann@hydromech.uni-hannover.de

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Übung selbständig, ohne Hilfe Dritter bearbeitet wurde. Kein Programm-Code wurde aus fremden Übungen kopiert. Mit der Prüfung auf Plagiate erkläre ich mich einverstanden.

Nachname	Vorname	Matrikelnummer	Unterschrift

Organisatorisches: Abgabe

- Programmcode als .m Dateien & Abbildungen an saemann@hydromech.uni-hannover.de

- Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder in den Dateiheader

```
function [n, x, c0] = init(var)

%% Startwerte für die Übung im Modul numer
% Robert Sämann, Hannover, den 11.05.2018

% n       : Gesamtzahl der Knoten
% x       : Knotenpositionen
% c0      : Anfangsbedingung
```

- Aussagekräftig kommentieren

```
%% 7.2 Variablenvorgaben

Iso=0.0005; %Sohlgefälle
b=20; %Breite [m]
kst=40; %Stricklerreibungsbeiwert [(m^(1/3))/s]
hn=2.7; %Normalwasserstand [m]
hwehr=3.6; % Wasserstand am Wehr [m]
```

- Vorgegebene Namen benutzen

2. Erstellen Sie die Funktion `A = tridiagzyk(n, u1, h, o1)`. Diese Funktion erzeugt eine Matrix

Motivation

Bildquelle: www.hna.de

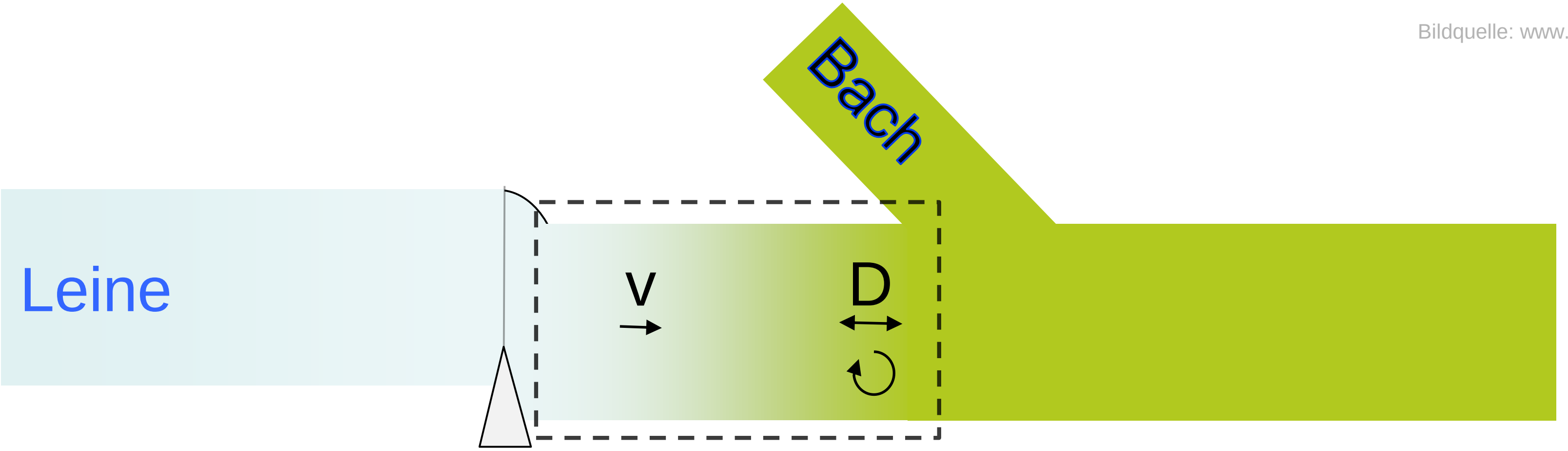
- Göttingen, 02.03.2012
- Großbrand im Chemielager
- Mit Schwermetallen und Chlorverbindungen (PCB) verseuchtes Löschwasser fließt erst in einen Bach und dann in die Leine

Motivation

- Wie verteilt sich der Schadstoff in der Leine stromaufwärts ?

- Schadstofftransport in oder aus Gebiet durch:
  - Advektion (mit der Strömung)
  - Dispersion (Mischung durch Turbulenzen)
  - Fick'sche Diffusion (Molekularbewegung)

Bildquelle: www.hna.de



Modellierung: Die Transportgleichung

Massenbilanz + Flüsse + Vereinfachungen + Mathematik

- Ergibt die Transportgleichung

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v \frac{\partial c}{\partial x}$$

- Diese Differentialgleichung modelliert die Konzentration c(x, t) im Fluss in Abhängigkeit von Ort und Zeit
- Wir suchen immer die Konzentration c(x, t)

Modellierung: Vereinfachungen…

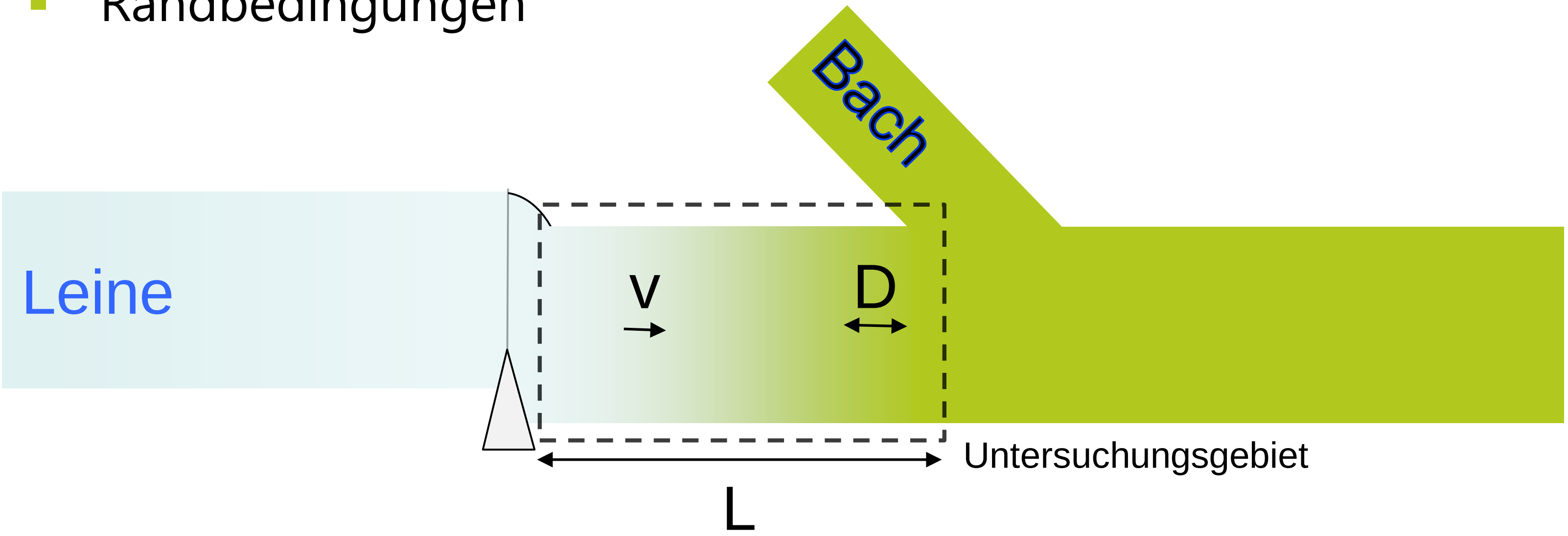
- Die Fließrichtung ist in positiver x-Richtung. Daher keine Strömung in y- und z-Richtung
- Der Fluss ist über die Breite y und die Tiefe z vollständig durchmischt
- Die Strömungsgeschwindigkeit v sowie die Diffusion bzw. Dispersion D ist räumlich konstant
- Im Gebiet sind keine Quellen und Senken
- Der Transport ist stationär

$$0 = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v\frac{\partial c}{\partial x}$$

Transportgleichungen lösen

- Wir suchen die Konzentration c(x)

- Um die Transportgleichung tatsächlich lösen zu können, benötigt man noch
  - ein Gebiet
  - Randbedingungen



Transportgleichungen lösen

- $$\boxed{0 = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v\frac{\partial c}{\partial x}}$$
- Gebiet normieren $\hat{x} \in [0,1] \qquad \hat{x} = \frac{x}{L}$
- Transportgleichung umformen

$$0 = \frac{D}{L^2}\frac{\partial^2 c}{\partial \hat{x}^2} - \frac{v}{L}\frac{\partial c}{\partial \hat{x}} \quad |:D \quad |\cdot L^2$$

$$0 = \frac{\partial^2 c}{\partial \hat{x}^2} - \boxed{\frac{v \cdot L}{D}}\frac{\partial c}{\partial \hat{x}}$$

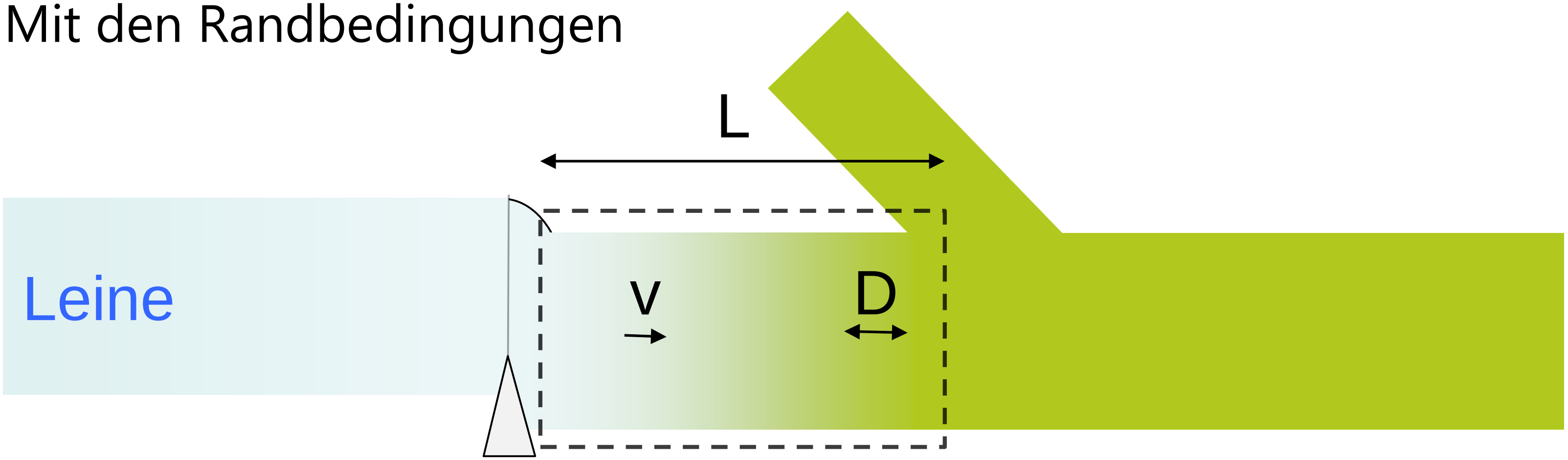
- Dimensionslose Kennzahl einsetzen: Péclet-Zahl $\boxed{Pe = \frac{vL}{D}}$
- Péclet-Zahl gibt Dominanz der Prozesse an

$$\boxed{Pe\frac{\partial c}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial^2 c}{\partial \hat{x}^2} = 0}$$

Transportgleichungen lösen

- Finde c(x) ← stationäres Problem
- Für verschiedene $Pe = \frac{vL}{D}$
- Auf dem Gebiet $\hat{x} \in [0, 1]$
- Mit den Randbedingungen

$$Pe \frac{\partial c}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial^2 c}{\partial \hat{x}^2} = 0$$

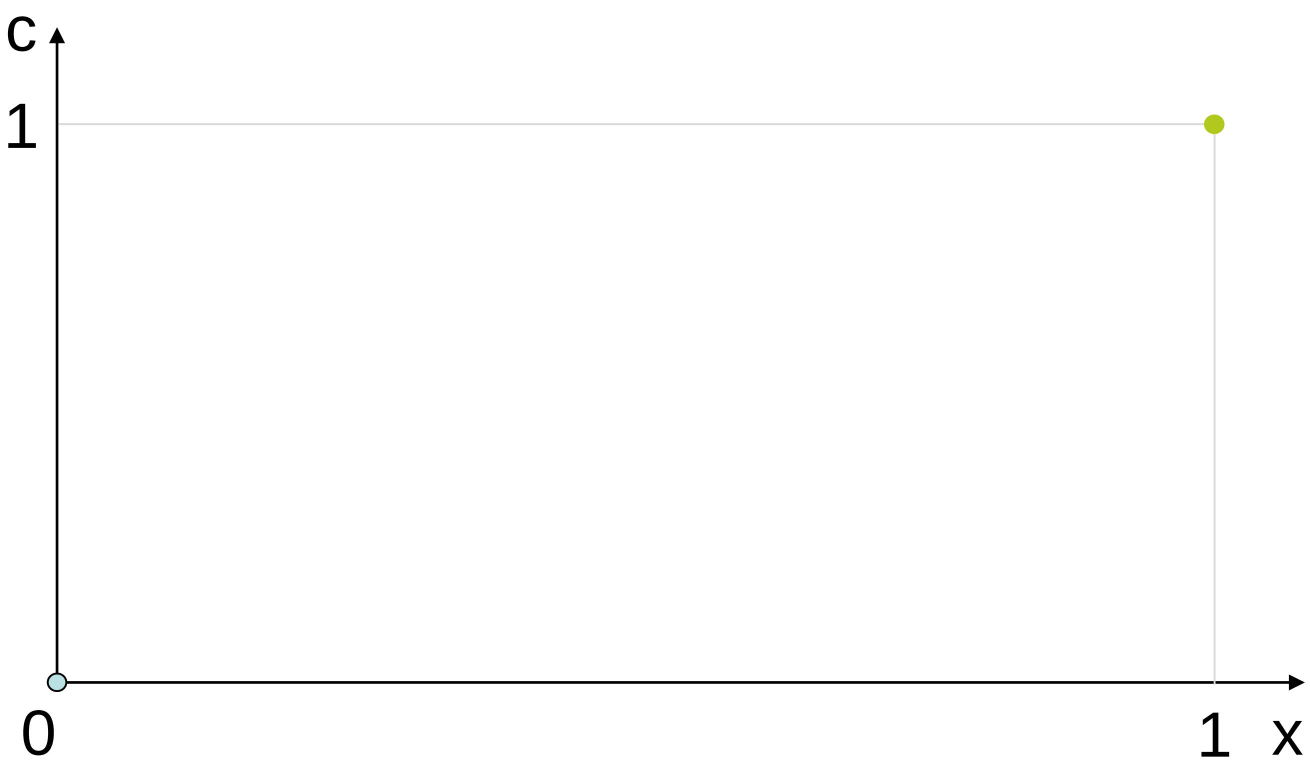


$$c\left(\hat{x} = 0\right) = 0$$

$$c\left(\hat{x} = 1\right) = 1$$

Transportgleichungen lösen

- Vorüberlegung: Wie muss die Verlaufskurve aussehen?



Transportgleichungen lösen

- Mathematik -> Analytische Lösung

$$c\left(\hat{x}\right) = \frac{\exp\left(Pe \cdot \hat{x}\right) - 1}{\exp\left(Pe\right) - 1}$$

- Analytische Lösungen können verwendet werden, um numerische Methoden zu überprüfen.
  - Numerische Lösung im zweiten Teil der Übung 1