

# Approche disciplinaire de l'émergence de propriétés de calcul dans les automates cellulaires déterministes

Lionel Tabourier  
sous la direction d'Anouk Barberousse

Université Paris VII - Denis Diderot  
Master 2 LOPHISS  
2009

# Remerciements

Je tiens à remercier Anouk Barberousse pour le temps et l'attention qu'elle m'a accordés au cours de la construction de ce mémoire de recherche.

Merci également à Hugues Chaté, Ivan Dornic et Christian Borghesi pour leur relecture et leurs corrections, ainsi qu'à Cyrille Imbert pour ses conseils bibliographiques.

# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| Introduction . . . . .   | 3         |
| <b>1 Caractérisations qualitatives, mesures quantitatives</b>                | <b>7</b>  |
| 1.1 Définitions et propriétés élémentaires . . . . .                         | 7         |
| 1.2 Comportement qualitatif et classification de Wolfram . . . . .           | 12        |
| 1.3 Mesures statistiques . . . . .   | 16        |
| 1.4 Les automates cellulaires en tant que systèmes dynamiques . . . . .      | 18        |
| 1.5 Automates cellulaires et propriété de calcul . . . . .                   | 21        |
| Bibliographie du chapitre 1 . . . . .  | 31        |
| <b>2 Notion de phases dans l'espace des automates cellulaires</b>            | <b>32</b> |
| 2.1 Analogie avec une transition de phase . . . . .                          | 33        |
| 2.2 Paramétrer l'espace des règles . . . . .                                 | 38        |
| 2.3 Limites à la superposition de l'universalité et de la classe 4 . . . . . | 47        |
| 2.4 D'autres classifications . . . . .                                       | 50        |
| Bibliographie du chapitre 2 . . . . .  | 60        |
| <b>3 Comprendre l'évolution du domaine</b>                                   | <b>61</b> |
| 3.1 La rencontre des traditions scientifiques . . . . .                      | 62        |
| 3.2 Quelques ouvertures ? . . . . .  | 69        |
| Conclusion . . . . .   | 76        |
| Bibliographie du chapitre 3 . . . . .  | 76        |
| <b>Lexique - Index</b>   | <b>80</b> |
| Bibliographie complémentaire . . . . .                                       | 85        |

# Introduction

L'histoire du progrès technique est assujettie au développement de l'automatisation des tâches : parallèlement à l'amélioration qualitative des connaissances théoriques, des savoir-faire ou des procédés de production, la technique est aussi le moyen de réaliser un gain quantitatif substantiel. En confiant à la machine la réalisation d'opérations simples et répétitives, il s'agit de faire exécuter le travail par un appareil développé dans ce but spécifique, et donc censé être plus efficace que ne le serait une main d'œuvre par nature polyvalente.

Cette histoire connaît au cours des années 30 une révolution qui va rendre plus prépondérant encore le rôle de la technologie dans la société. Alors que l'automatisation se rapportait essentiellement à l'accomplissement d'opérations physiques sur des objets matériels, des scientifiques tels qu'Alan Turing, Alonzo Church, Emil Post et Kurt Gödel posent les premiers jalons de sa généralisation à des tâches abstraites. C'est l'avènement de l'informatique contemporaine dont l'acte fondateur est la formalisation de la notion d'algorithme.

Ce concept repose sur l'idée qu'une opération mathématique, même très élaborée, peut être décomposée en tâches élémentaires. S'il est possible de les décrire puis d'en ordonner la réalisation à un robot, le calcul devient réalisable à une vitesse et une précision absolument inaccessibles à l'esprit humain.

Les automates cellulaires naissent avec l'informatique contemporaine : ils sont inventés par John von Neumann et Stanislaw Ulam dans l'intention de réaliser pratiquement cette succession d'opérations simples. Pour saisir exactement l'optique dans laquelle ont été développés ces modèles, il nous faut examiner les détails de leur genèse ([20]) : à la fin des années 40, von Neumann, qui est considéré comme l'un des grands mathématiciens du XX<sup>eme</sup> siècle, cherchait à savoir si une machine pouvait avoir la capacité, à l'image des êtres vivants, de se reproduire. Plus spécifiquement, est-il possible à un système artificiel d'en produire un autre de complexité au moins égale ?

Plutôt que de raisonner sur des systèmes mécaniques, ce qui aurait nécessité un niveau d'évolution technique largement hors de portée à l'époque, Ulam suggère l'utilisation d'un univers d'objets géométriques obéissant à des règles récursives - c'est-à-dire basées sur l'itération d'une procédure - et dont il soupçonnait déjà qu'ils pouvaient posséder des propriétés étonnantes. L'idée plaît à von Neumann qui raisonne sur ces systèmes artificiels pour montrer que l'autoreproduction est effectivement possible.

L'histoire des automates cellulaires peut ensuite être très grossièrement découpée en décennies : au cours des années 50, c'est un sujet de travail encore mal connu, il n'existe pas d'ouvrage de référence. L'activité est centrée sur des travaux de von Neumann, qui donne plusieurs conférences sur l'autoreproduction<sup>1</sup>. Cela reste néanmoins un moment important de l'histoire des sciences contemporaines puisque ces travaux sont regardés comme les prémices de la vie artificielle en tant que champ de recherche.

Au cours des années 60, le domaine académique des automates cellulaires commence à se constituer. Le sujet prend le statut d'objet d'étude à part entière, notamment grâce à la publication posthume de *Theory of self-reproducing cellular automata* ([24]), tiré des travaux de von Neumann et complété par l'éditeur Arthur Burks ; puis de l'ouvrage concis et formel d'Edgar Codd : *Cellular Automata* ([4]).

Dans les années 70, alors que l'usage de l'ordinateur commence à se répandre, le monde des automates cellulaires est marqué par l'invention du "Jeu de la Vie" par John Conway [11] : un automate dont la règle de fonctionnement est extrêmement simple à comprendre et qui révèle une diversité de comportements prodigieuse, au point d'être encore aujourd'hui l'objet de recherches. Ce jeu va susciter l'enthousiasme de la communauté grandissante des informaticiens, qui rivalisent d'ingéniosité pour découvrir de nouveaux comportements de cet automate. Mais les investigations menées sur le Jeu de la Vie amorcent également une nouvelle ère dans l'étude des automates.

Au début des années 80, de nouvelles perspectives sur ces systèmes sont mises à jour. C'est cette période qui constituera le point de départ de notre réflexion. Un certain nombre d'interrogations sont énoncées autour des possibilités de donner une classification structurée de l'ensemble des automates, des sous-familles de règles et de leurs propriétés. Citons par exemple : quels sont les invariants dans l'évolution des automates ? ou comment la thermodynamique peut-elle leur être appliquée [28] ?

Toutes ces questions partent de l'observation que même si les règles de fonctionnement des automates peuvent être écrites en quelques lignes, ils sont capables de générer une surprenante variété de comportements. De même, certains systèmes physiques régis par des lois "simples" (au sens où elles admettent une représentation mathématique concise, comme la loi newtonnienne de la gravité) peuvent adopter des comportements imprévisibles en pratique. Cette idée est très populaire en physique à cette époque, elle est à la base de la théorie du chaos qui connaît au cours des années 70-80 un regain d'intérêt.

Mais ce point de vue sur les automates cellulaires suppose une description assez différente de celle qui en était faite jusqu'alors. À l'image des systèmes expérimentaux

---

<sup>1</sup> *The General and Logical Theory of Automata*, Pasadena, 1951, [23].

examinés en sciences naturelles, ils sont ici des objets d'observation davantage que des modèles conçus dans le but d'accomplir une tâche précise. Cette remarque est cohérente avec la formulation des questions évoquées ci-dessus où les concepts employés pour qualifier le comportement des automates sont directement transposés des sciences physiques. Cela peut être attribué à la discipline d'origine des chercheurs qui pour la première fois mettent ces idées en avant : Stephen Wolfram, Tommaso Toffoli, Norman Packard, Edward Fredkin ou James Crutchfield ayant tous accompli des études universitaires de physique.

À partir de ce point, nous pouvons retracer l'évolution au travers de l'arbre bibliographique : consécutivement aux travaux fondateurs - nommément ceux de Wolfram - les automates cellulaires en tant que prototype de systèmes complexes se répandent dans la communauté des physiciens. Ils donnent même lieu à une véritable frénésie d'activité : on les emploie pour simuler toute une variété de systèmes réels, des écoulements fluides au développement d'organismes biologiques, mais ils intéressent également pour leurs propriétés intrinsèques, parmi lesquelles la possibilité de simuler un ordinateur. Toutes ces capacités sont regroupées dans la nébuleuse encore mal définie des propriétés émergentes. Cette période d'intérêt intense et explicite de cette communauté pour les automates cellulaires dure une quinzaine d'années. Après 95, le terme est beaucoup moins fréquent dans les publications affiliées à la physique, même si l'utilisation de la modélisation numérique - et en particulier des modèles à nombre discret d'états - s'est encore répandue depuis. Seule l'informatique s'intéresse désormais aux questions des capacités de calcul en tant que propriétés émergentes des automates cellulaires.

L'objet de cette étude est d'expliquer les causes d'un tel constat. Pour ce faire, nous nous baserons avant tout sur les sources primaires, c'est-à-dire les articles scientifiques-mêmes ; si bien qu'une large part de ce mémoire est consacrée à une description bibliographique du domaine. Mais nous cherchons également à procéder à l'analyse critique de cet état de l'art, dans le but de comprendre en quoi des concepts issus de la physique ont échoué à créer une dynamique scientifique durable dans le champ des automates cellulaires.

Des objets tels que les automates cellulaires offrent de nombreuses possibilités pour construire une réflexion autour de la question de l'interaction entre les disciplines. Nous pourrions nous intéresser à la façon dont les automates ont été employés avec plus ou moins de succès dans divers champs de recherche. Par exemple, en hydrodynamique pour leur capacité à simuler les comportements macroscopiques produits par des équations différentielles, reproduisant par exemple les caractéristiques d'écoulements fluides ([12, 10]) ou des phénomènes de diffusion ([22]) ; mais également en biologie où ils sont utilisés notamment pour modéliser la croissance d'organismes

végétaux ([21]). Excepté dans quelques situations où ces applications peuvent être mises en rapport avec l'objet de ce mémoire, elles ne seront pas discutées ici. Nous avons en effet choisi de nous focaliser sur les propriétés de calcul des automates cellulaires ; ces questions permettent de réfléchir à l'enchevêtrement complexe des différents points de vue scientifiques impliqués, et révèle à la fois les avantages et les difficultés à constituer un champ de recherche commun.

Dans la première partie, nous donnons les définitions nécessaires pour décrire les objets de l'étude : la famille d'automates examinée, les observations et les mesures qui peuvent être pratiquées et les propriétés recherchées. La seconde partie examine les tentatives d'emploi d'un vocabulaire et de méthodes propres à la physique statistique, reposant sur l'idée que les règles des automates peuvent être réparties en groupes jouant un rôle analogue aux phases d'un système matériel. Celles-ci devaient permettre de repérer efficacement des automates aux propriétés intéressantes pour le calcul ; mais nous montrons qu'une telle approche s'avère limitée par l'absence de définitions rigoureuses de la classification des règles. La méthodologie que nous utilisons dans les deux premières parties, qui se base sur les publications scientifiques, nous permet de faire au fur et à mesure un bilan des concepts et méthodes employés, d'expliquer leurs apports et leurs limites. En examinant ces éléments au travers du prisme des traditions scientifiques et en nous appuyant sur des impressions plus subjectives, nous proposons des explications à l'évolution du champ de recherche et ce vers quoi il semble s'orienter ; c'est l'objet de la dernière partie.

Le vocabulaire propre aux automates cellulaires est très spécifique à ce domaine et les termes employés ont une acception qui n'est parfois pas la même pour tous les auteurs. Un lexique des définitions - et des traductions anglaises communément rencontrées - est placé en annexe dans le but de lever toute ambiguïté sur le sens donné à chacun de ces termes dans le mémoire, et en approfondir d'autres qui ne seront que succinctement évoqués. Les renvois vers le lexique seront notés \*.

# Chapitre 1

## Caractérisations qualitatives, mesures quantitatives

Pour présenter plus précisément l'objet de l'analyse, nous allons tout d'abord décrire les comportements qualitatifs typiques des automates cellulaires et comment ceux-ci se situent dans le cadre d'une classification proposée par Wolfram. Même si celle-ci a été abondamment contestée par la suite, elle présente l'avantage de qualifier intuitivement les automates à l'aide de concepts usuels de la physique des systèmes dynamiques. Puis nous décrivons les observables qui peuvent être utilisées pour caractériser quantitativement ces comportements. Enfin la section 1.5 a pour objet spécifique les propriétés de calcul des automates, et décrit les premiers éléments qui suggèrent une corrélation de celles-ci et de la classification de Wolfram.

### 1.1 Définitions et propriétés élémentaires

#### 1.1.1 Automates cellulaires déterministes

Il convient d'abord de définir précisément la famille de modèles dont il va être question, et de préciser le vocabulaire qu'on emploiera par la suite. Pour ce faire, on peut choisir d'utiliser un registre lexical plus ou moins proche de la description très mathématisée que l'on trouve dans la littérature informatique ou au contraire un énoncé moins formel, comme celui utilisé par Wolfram. On emploie ici un compromis entre les définitions qu'en donnent Langton [14] et Mitchell [17].

#### Description

Un automate cellulaire est constitué de deux parties :

- l'**espace cellulaire** : un réseau de cellules à  $D$  dimensions sur lequel on définit



- un motif de **voisinage** identique pour chacun des sites ; chacune de ces cellules se comporte comme un automate, qui prend un état parmi un nombre fini  $k$  d'états discrets (**l'alphabet**  $\Sigma$ ), identique pour toutes les cellules du réseau ;
- la **règle locale de transition** : la fonction  $\phi$  qui indique comment l'état du voisinage d'une cellule à un certain pas de temps va déterminer au pas de temps suivant l'état de la cellule. Si  $\Theta$  désigne la taille du voisinage d'une cellule,  $\phi$  est donc une application de  $\Sigma^\Theta$  dans  $\Sigma$ .

L'espace peut-être d'extension infinie, mais il s'agit-là d'une limite théorique, dans les simulations pratiques il faut fixer les dimensions du réseau, ainsi que les conditions aux limites sur celui-ci. Très souvent, celles-ci sont choisies périodiques : pour prendre le cas simple d'un réseau 1D s'étendant des cellules numérotées de 0 à N, on considérera que les 0 et N sont en fait adjacentes.

## Restrictions

Nous allons apporter quelques limitations supplémentaires à la famille de modèles considérée ici car la définition précédente couvre une gamme immense de possibilités. La mise à jour des automates sera **synchrone** : à chaque pas de temps, tout le réseau est actualisé simultanément selon la règle locale.

De plus, la fonction  $\phi$  est **déterministe** : la connaissance du système au pas de temps  $t$  définit totalement l'état au pas  $t + 1$ . Il est courant d'employer des automates dont la règle contienne un élément stochastique (e.g. [8, 15]) ; mais si ces automates cellulaires qualifiés de probabilistes présentent des comportements très intéressants, ils élargissent à un tel point le champ de cette étude, que sauf dans quelques situations précises, on ne les traitera pas ici.

Il est également possible d'imaginer des automates dont la fonction  $\phi$  pourrait évoluer au cours de la dynamique, ici cela ne sera pas le cas : **la règle est indépendante du temps**.

## Exemple

Afin d'illustrer la définition précédente, on peut donner l'exemple de la règle 110 (d'après le système de dénomination de Wolfram\*), associée à un automate à une dimension, à deux états qu'on notera 0 et 1, dont le voisinage est constitué de la cellule et de ses deux voisins. La règle peut alors être résumée à la table de transition suivante, où chaque voisinage sera désigné par un triplet d'états de  $\Sigma$  :

| voisinage $v$ | (1,1,1) | (1,1,0) | (1,0,1) | (1,0,0) | (0,1,1) | (0,1,0) | (0,0,1) | (0,0,0) |
|---------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $\phi(v)$     | 0       | 1       | 1       | 0       | 1       | 1       | 1       | 0       |

Certains automates sont munis d'un état particulier  $q$  qu'on qualifie de **quiescent**, tel que  $\phi(q, \dots, q) = q$ . C'est par exemple le cas de l'état 0 de la règle 110 précédente. Ainsi une région de l'espace cellulaire entièrement quiescente ne peut être "contaminée" que de proche en proche par les états actifs de l'automate. Dans les études expérimentales, et en particulier celles de Wolfram, la restriction aux règles quiescentes est très fréquentes, car elle permet de s'affranchir de règles générant spontanément des inhomogénéités.

## Échantillonnages de l'espace

Nous pouvons dès maintenant remarquer que le nombre de règles envisageables augmente très rapidement avec  $\Theta$  et  $k$ . En effet si l'on veut décrire toute la gamme des règles déterministes, il faut parcourir toutes les combinaisons possibles d'images par  $\phi$  des configurations de voisinages. Chaque cellule a  $k$  états possibles, il existe donc  $k^\Theta$  configurations de voisinage. Pour chacune de ces configurations, on peut avoir  $k$  états différents en image de  $\phi$ , on en déduit qu'il existe  $k^{k^\Theta}$  règles imaginables.

Dans l'exemple précédent où  $k = 2$  et  $\Theta = 3$ , il y a 256 règles possibles. Mais imaginons ne serait-ce qu'un automate à 4 états et le même voisinage de 3 cellules, le nombre de règles est de l'ordre de  $4 \cdot 10^9$ . Pour l'espace dans lequel se situe le célèbre Jeu de la Vie de Conway\* où  $k = 2$  et  $\Theta = 9$ , il existe de l'ordre  $10^{154}$  règles. On a donc affaire à des ensembles dont le nombre d'éléments est tellement gigantesque que le parcours exhaustif de ceux-ci semble être une tâche qui restera inaccessible même numériquement. Cette observation permet de comprendre pourquoi il sera nécessaire de restreindre l'étude à des échantillons statistiques de l'espace des règles.

## Cas particulier des automates 1D

Nous utiliserons ici régulièrement à titre d'illustrations des automates cellulaires relativement simples, dont la dimension, le nombre d'états, la taille du voisinage restent petits. Parmi ceux-ci, Wolfram distingue particulièrement les **automates cellulaires élémentaires** (ACE), pour lesquels  $D = 1$ ,  $k = 2$  et le voisinage est composé de la cellule et de ses deux voisines. La règle 110 précédemment citée appartient à cette classe.

Dans le cas usuel où le voisinage est choisi symétrique autour de la cellule centrale, il est possible de définir sur ces automates un **rayon**  $r$  qui désigne la distance entre la cellule centrale et la plus éloignée de son voisinage ; donc  $\Theta = 2r + 1$  (pour un ACE,  $r = 1$ ).

Cela correspond également à l'approche suivie dans les premières campagnes d'observations qualitatives, où les scientifiques utilisent très fréquemment des automates à une dimension et deux états ([14, 25, 27]). On peut supposer que la raison

en est pratique : d’une part les moyens de calcul de l’époque limitent notablement la gamme d’observations, d’autre part les automates à une dimension permettent des modes de représentation simples et éloquents, comme on va le voir ci-dessous.

### 1.1.2 Des systèmes complexes

Par construction, les automates cellulaires n’ont pas une structure hiérarchisée, toutes les cellules sont a priori équivalentes ; sans plus de précision, on ne peut pas découper le système en sous-parties dont chacune aurait une fonction bien déterminée. Cependant, ces cellules dépendent les unes des autres de manière non-linéaire, c’est ce qui explique qu’un événement d’apparence mineure dans une région de l’espace peut avoir des répercussions spectaculaires dans un tout autre endroit et bien plus tard. Cela induit que l’absence d’un “cerveau central” n’interdit pas à ces systèmes de porter collectivement des propriétés que la simplicité de la description des règles régissant les cellules individuellement rend difficilement prévisible - ce que l’on qualifie usuellement de **comportements émergents**.

Pour toutes ces raisons, on ne peut pas comprendre un tel système en ne l’étudiant qu’à l’échelle cellulaire, il faut le considérer dans sa totalité, c’est-à-dire rechercher les caractéristiques collectives des cellules pour décrire l’étendue de son potentiel ; c’est pourquoi les automates peuvent être qualifiés de **systèmes complexes** au sens décrit dans [31]. En cela, ils diffèrent de systèmes pour lesquels on peut réduire l’étude à un petit nombre de degrés de liberté qui suffisent à décrire l’essentiel des comportements. On procède ainsi en thermodynamique : on suppose que le système peut être décrit à l’aide d’un petit nombre de variables liées entre elles par l’équation d’état qui régit le système. Ici, s’il peut exister des variables et des équations jouant un rôle analogue à celles de la thermodynamique, elles sont encore inconnues.

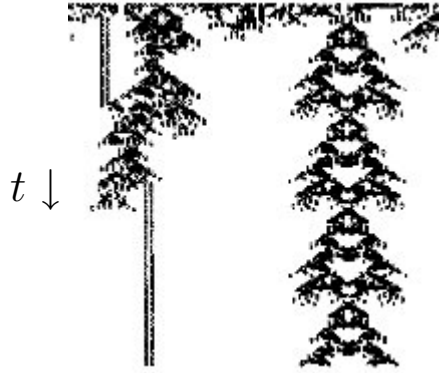
Pratiquement, cela se traduit par le rôle prépondérant joué par les expériences numériques. On ne peut pas avoir suffisamment de familiarité ou d’intuition sur les automates cellulaires pour en prévoir le comportement dynamique à partir de la règle et de l’état initial, d’où l’importance des simulations. En cela l’étude de tels systèmes partagent de nombreux traits avec une science expérimentale.

Tous les questionnements qui sont associés à cette correspondance vont soutenir une grande partie de l’étude, de manière plus ou moins directe. Pour en comprendre la portée, nous pouvons dès maintenant en mettre en lumière deux conséquences : les choix du mode de visualisation et des conditions initiales pour les simulations expérimentales.

## Visualisation

Dans le cas des automates 1D, il est possible de représenter la dynamique à l'aide de diagrammes spatio-temporels. La construction de ces diagrammes se fait en utilisant une dimension du plan pour représenter l'état des cellules selon leur position dans la chaîne et l'autre dimension pour donner l'évolution de cet état en fonction du pas de temps.

On obtient alors des figures de la forme (extrait de [14]) :



Il est encore possible d'observer des automates cellulaires à 2 dimensions en traçant leur configuration à un pas de temps précis, mais au-delà de  $D=2$ , il devient nécessaire de réaliser des projections de l'espace cellulaire pour le représenter, et l'intérêt de la visualisation s'en trouve largement amoindri.

En effet, le problème de la représentation de la dynamique des automates n'est pas seulement formel. Puisqu'une partie importante des travaux dont il est ici question relève de l'observation, les modes de description des automates jouent un rôle considérable dans l'intuition que l'observateur peut avoir de leur comportement.

En cela, ces explorations numériques évoquent l'expérimentation telle qu'elle est pratiquée en physique : on examine le comportement de l'automate comme on regarderait un écoulement fluide par exemple, certains paramètres sont fixés (vitesse du fluide, pression, température loin du dispositif expérimental ...), mais toutes les grandeurs ne sont pas contrôlées au cours de la dynamique, et on cherche à décrire le comportement du système en fonction des conditions imposées. Et comme dans n'importe quelle science expérimentale, la représentation adoptée va orienter le choix des observables de description du système - et réciproquement.

## Conditions initiales

Les conditions initiales de l'automate désignent l'état de l'espace cellulaire à l'instant  $t = 0$ . En fonction de celles-ci, la dynamique de l'automate peut être nette-

ment différente comme l'illustre les diagrammes suivants [26] (réalisés sur l'ACE 90) :



Pour l'étude des automates cellulaires sur un espace de dimension infinie, il est utile de définir le cas des **conditions initiales q-finies** (ou plus simplement finies). Pour cela on utilise des automates particuliers munis d'un état quiescent, tels qu'à l'instant initial, tout l'espace cellulaire est uniformément quiescent excepté dans une région bornée. On comprend donc que toute l'information sur la dynamique de l'automate est contenue dans cette région.

Même pour un automate cellulaire aussi simple qu'un ACE sur un espace de 128 cellules, le nombre de conditions initiales possibles est de  $128^2 = 16384$ . Sur un espace à 2D de 128x128 cellules, on atteint déjà de l'ordre de 27 millions de choix possibles. Tout comme pour l'espace des règles, l'ensemble des conditions initiales est immense, et il faut ici aussi recourir à un échantillonnage.

L'auteur des simulations doit alors faire des choix arbitraires qui mettent en question la perspective dans laquelle il travaille : comment réaliser un tel échantillonnage ? Toutes les conditions initiales, toutes les règles sont-elles d'égale importance et par rapport à quelle fonction ?

Nous étudions une famille de systèmes dont l'étude exhaustive n'est possible que sur des cas très simples (et souvent dénués d'intérêt), tant les ensembles dans lesquels on se déplace sont immenses. Cela oblige à restreindre les objets d'études, non pas aléatoirement mais en fonction de l'objectif poursuivi et des contraintes techniques - à nouveau comme dans les sciences expérimentales.

## 1.2 Comportement qualitatif et classification de Wolfram

Chronologiquement, l'apparition d'interrogations autour de ce que nous appellerons "physique des automates cellulaires" coïncide avec la classification des règles déterministes proposée par Wolfram. Cela n'a rien de surprenant puisque le principe même de cette classification consiste à transposer des concepts de la théorie des systèmes dynamiques continus à des objets discrets. Nous reviendrons plus en détails sur cette analogie par la suite. Nous consacrons cette partie à la description de ce système de classification.

### 1.2.1 Les quatre classes de Wolfram

La classification de Wolfram apparaît comme une catégorisation qualitative des règles en fonction du comportement limite moyen des automates . Il faut ici comprendre ‘moyen’ dans le sens de ‘plus probable’ , étant donné toutes les conditions initiales possibles sur un espace fini (et chacune étant équiprobable).

La classification est fondée sur le constat qu’après une transition plus ou moins longue, les dynamiques des automates peuvent être ordonnées selon quatre grandes classes. Les diagrammes spatio-temporels suivants correspondent à des évolutions typiques de chaque classe, pour des conditions initiales aléatoires (extraites de [27]).

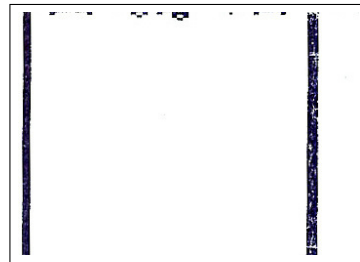
I. L’automate tend vers un état homogène : toutes les cellules sont dans le même état.

règle 4



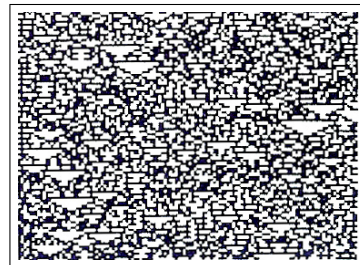
II. L’automate tend vers un ensemble de structures périodiques stables.

règle 24



III. L’évolution amène à des structures chaotiques, terme qu’il nous faudra préciser dans ce contexte. On peut pour l’instant formuler cette idée en disant qu’un examen superficiel de la dynamique ne signale pas de régularité spatiale ou temporelle.

règle 22

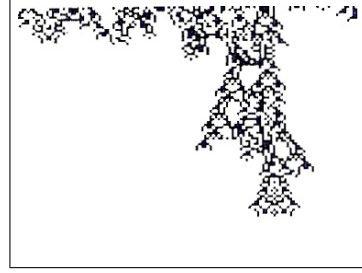


On qualifie une telle classification de “phénotypique” car c’est l’observation du comportement dynamique qui détermine la classe et non la définition mathématique de la règle - dans quel cas on parlerait de classification “génotypique”.

Remarquons que cette catégorisation ne peut-être comprise qu’en tant que classification des automates à la limite infinie. En effet, pour un automate fini, le nombre

IV. La définition est peu précise : l'évolution mène à des structures complexes localisées dont le temps de vie peut être long.

règle 20



de configurations est lui aussi nécessairement fini : il vaut  $k^N$ , si  $N$  est le nombre de cellules du réseau. Autrement dit, après un certain temps, toute évolution serait périodique (c'est le théorème de récurrence de Poincaré pour un système discret).

### 1.2.2 Le taux de croissance

Énoncé comme nous venons de le faire - cela correspond à la formulation qu'en donne Wolfram - ce système de classification est critiquable, car il ne fournit pas de méthode systématique pour classer un automate en fonction d'un ensemble d'observations précis, il ne permet donc pas de déterminer sans ambiguïté la classe d'un automate. Wolfram introduit la vitesse (limite) maximum de propagation, qui permet de préciser quantitativement le système de classification [27].

#### Définition

On définit cette vitesse  $V_\infty$  en remarquant qu'au cours de la dynamique, l'état de la cellule  $i$  à l'instant  $t$  est influencé par les cellules qui se trouvent dans un cône de l'espace-temps délimité par les indices cellulaires  $(i - V.(t' - t))$  et  $(i + V.(t' - t))$  où  $t'$  est un instant antérieur à  $t$ . Si l'on imagine un automate 1D de rayon  $r$ ,  $r \geq V$  ; on qualifie alors parfois  $r$  de vitesse de la lumière puisqu'elle majore nécessairement la vitesse de propagation de l'information.

Et Wolfram observe qu'après une phase de transition,  $V$  est souvent strictement inférieure à cette borne théorique.  $V_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} V$  désignerait donc une vitesse de propagation des motifs de la dynamique limite, on la nomme également **taux de croissance**.

#### Intérêt pour la classification

Une telle grandeur permet de classer strictement non pas un automate, mais une dynamique d'automate, c'est-à-dire un couple (automate ; conditions initiales), sous réserve d'avoir des conditions initiales q-finies.

En effet, imaginons que l'information sur l'automate cellulaire soit contenue dans une région bornée de l'espace, quatre comportements limites sont imaginables :

- cette région tend à disparaître,
- sa taille tend vers une valeur finie non-nulle,
- elle s'étend indéfiniment, et  $V_\infty$  tend vers une constante,
- elle s'étend indéfiniment, mais  $V_\infty$  ne tend pas vers une constante.

John Baldwin et Saharon Shelah [2] montrent que ces quatre comportements sont effectivement les seuls possibles. Ils se superposent à la description donnée en 1.2.1 des classes de Wolfram, mais par exemple, certains automates majoritairement de classe II peuvent connaître une croissance non-bornée pour certaines conditions initiales rares.

Ce critère n'est pas suffisant pour attribuer une classe à toute dynamique quelles que soient les conditions initiales, mais il suffit pour l'instant à discuter la légitimité de la classification de Wolfram, ce que nous allons faire dans ce qui suit.

### **De la classification des dynamiques à celle des règles**

En moyennant sur un ensemble de conditions initiales, il serait possible de donner une classification stricte aux automates eux-mêmes (ce qui sera fait en 2.4). Mais on peut concevoir les difficultés majeures que cela induit : on est confronté concrètement à la définition d'un "bon" échantillonnage de l'espace des conditions initiales. Comment espérer trouver un critère qui depuis l'échantillon permette de décider quant à la classe de l'automate ? Cela supposerait de connaître son comportement statistique sur tout l'ensemble.

Une manière de procéder qui paraît envisageable, serait d'associer à l'espace des règles une mesure, en conjecturant par exemple que cette mesure associée aux sous-ensembles des conditions initiales produisant un comportement rare soit nulle - on se place ici dans la limite de l'espace cellulaire infini. On conçoit qu'une telle propriété théorique soit très difficile à démontrer.

Ce système de classification repose donc sur l'appréciation intuitive de l'observateur des différentes simulations. Cela traduit le caractère expérimental de l'étude menée par Wolfram. Celle-ci admet le point de vue couramment employé en sciences naturelles qui consiste à chercher des régularités, des comportements génériques dont la définition précise peut rester longtemps incertaine.



## 1.3 Mesures statistiques

Une description physique des automates cellulaires passe par la définition d'observables qui nous permettent d'en décrire quantitativement l'évolution. En effet, des mesures spécifiques doivent pouvoir rendre compte des particularités d'un comportement qualitatif : ce sont elles qui nous fournissent les paramètres nécessaires à l'analyse des causes des observations, autorisant ainsi des prévisions sur les comportements d'automates voire leur mise en équations. Ainsi, la pertinence de la classification de Wolfram apparaît au travers des corrélations observées entre les différentes classes et un ensemble de grandeurs statistiques.

Les grandeurs définies en théorie de l'information sont pratiques pour décrire les séquences de cellules des automates. Certaines de ces grandeurs sont simples à décrire, comme la densité d'états  $\rho(x)$  - rapport du nombre de cellules dans l'état  $x$  au nombre total de cellules, pour une certaine région de l'espace temps. D'autres, moins intuitives, sont définies dans cette section.

### 1.3.1 Entropies de Shannon

Différentes entropies peuvent être calculées au cours d'une dynamique d'automate, on peut les définir à l'aide d'une formule générale unique. Considérons un ensemble  $E$  d'états, soit  $p_i$  la probabilité d'observer l'état  $i$  sur cet ensemble, alors

$$S(E) = - \sum_{i \in E} p_i \log(p_i)$$

désigne l'entropie calculée sur cet ensemble (le logarithme est en base 2).

L'ensemble  $E$  peut être constitué des différents états d'une même cellule au cours de son évolution (on parlera alors plutôt d'entropie temporelle, ou d'entropie par cellule). À l'inverse, il peut s'agir de l'entropie d'un bloc de cellules à un même pas de temps (entropie spatiale), ou encore d'un mélange des deux.

Il y a dans la littérature quelques variations sur ces définitions selon le contexte (par exemple, Wolfram [26] propose de raisonner en base  $k$  (le nombre d'états) et suggère d'autres formes de normalisation), mais cela ne change pas fondamentalement la signification de cette grandeur. L'entropie sert à estimer la diversité des états pris par les cellules de l'automate, ainsi l'entropie temporelle d'une cellule qui reste dans le même état au cours de son évolution sera nulle. En revanche une séquence d'états qui correspondrait au produit d'une procédure de tirages à pile-ou-face aura une entropie élevée.

Toutes ces définitions se réfèrent donc à l'idée d'aléatoire au sens de Kolmogorov : un bloc de cellules sera considéré comme hautement aléatoire (sa complexité de Kolmogorov\* est élevée) si l'examen d'une partie des cellules nous renseigne peu sur

l'état des autres. Cette définition est indépendante de la procédure qui génère la chaîne d'états observées, de la "loi physique" qui régit les automates, autrement dit de la règle.

Il est alors facile de prévoir que pour des comportements limites réguliers (i.e. de classes I et II), les mesures d'entropies spatiales ou temporelles seront faibles (voire nulles pour la classe I), alors que pour la classe III elles seront au contraire élevées. Quant à la classe IV, les valeurs devraient être intermédiaires mais surtout plus fluctuantes puisqu'il se forme des structures localisées de longue durée de vie dans l'espace cellulaires.

### 1.3.2 Information mutuelle

L'entropie permet d'évaluer la diversité des états cellulaires au cours de la dynamique, mais ne renseigne pas sur les corrélations d'états entre les cellules, or celles-ci doivent jouer un rôle s'il émerge une propriété collective dans le système, la fonction d'information mutuelle peut être utilisée pour réaliser une telle mesure. Si on considère deux cellules  $x$  et  $y$ , elle est définie par :

$$I(x; y) = S(x) + S(y) - S(x; y) = \sum_{x_i; y_j} p(x_i; y_j) \log \left( \frac{p(x_i; y_j)}{p(x_i)p(y_j)} \right)$$

$S(x; y)$  désignant l'entropie conjointe des deux cellules. Il peut s'agir d'une même cellule examinée à deux instants différents (on mesure l'autocorrélation), de cellules différentes au même pas de temps ou de cellules différentes à des pas de temps différents. De plus, on peut imaginer des variations sur cette définition (e.g. corrélations entre groupe de cellules ...).

Avec une telle définition, deux cellules dont les états sont indépendants correspondent à une mesure de  $I$  nulle - puisque  $p(x_i; y_j) = p(x_i)p(y_j)$ ; c'est ce qui est attendu pour des comportements asymptotiques de classe III.

Une autre manière d'écrire cette quantité est :

$$I(x; y) = S(x) - S(x|y)$$

$S(x|y)$  désignant l'entropie conditionnelle de  $x$  sachant  $y$ , c'est-à-dire l'entropie de la cellule  $x$  connaissant l'état  $y$  de l'autre cellule.

Pour les classes I et II où il y a convergence vers des configurations uniformes ou périodiques, l'état d'une cellule peut être déduit de ses voisines, mais l'entropie par cellule étant faible ou nulle,  $I$  devrait l'être également.

On peut donc penser que cette mesure peut être utile pour cibler des comportements de classe IV, puisque dans ce cas l'entropie est non-nulle et l'existence des structures complexes décrites précédemment implique des corrélations spatiales et temporelles non nulles.

## 1.4 Les automates cellulaires en tant que systèmes dynamiques

Dans cette partie nous présentons, après une brève description historique, des concepts généraux utiles pour l'étude des systèmes dynamiques et nous les précisons dans le cadre particulier des automates cellulaires.

### 1.4.1 Le contexte du chaos

Comme on l'a évoqué précédemment, la période analysée suit chronologiquement une recrudescence de productions scientifiques autour de la thématique du chaos. En fait, des travaux comme ceux de Wolfram s'inscrivent dans la lignée quasi-directe de cette vague.

D'abord par l'objet de l'étude : la théorie du chaos [3] examine des systèmes dynamiques déterministes non-linéaires, en général continus ; elle se pose en particulier la question de leurs comportements asymptotiques et cherche à mettre en évidence des paramètres dont l'ajustement permettrait de contrôler la limite vers laquelle la dynamique tend.

Ensuite par une idée qui en est essentielle<sup>1</sup> : ces systèmes sont régis par des lois qui peuvent être exprimées à l'aide d'un petit nombre d'équations, mais non-linéaires. Cela induit des comportements qui peuvent être surprenants car radicalement différents de ce à quoi habitue la physique, qui s'occupe très majoritairement d'objets aux comportements linéaires (ou linéarisables). Une des traductions pratiques qui est caractéristique de ces systèmes est leur grande sensibilité aux conditions initiales, sensibilité telle qu'elle rend les prédictions de trajectoires impossibles en pratique<sup>2</sup>.

Enfin par les outils : étant donné les difficultés pour traiter de tels systèmes analytiquement, il n'est pas surprenant que l'événement fondateur du renouveau dans l'étude des systèmes dynamiques soit des expériences numériques. Celles-ci ont été réalisées dans les années 60 par le météorologue Edward Lorenz [16] et mettent en évidence l'existence de comportements asymptotiques inattendus : les attracteurs étranges<sup>3</sup>. Nous ne développerons pas la nature du protocole associé à ces expériences, ni ses éventuels points communs ou divergences avec l'utilisation faite depuis du numérique en sciences physiques, mais nous retiendrons que l'apparition

---

<sup>1</sup>Ce problème n'est en revanche pas nouveau puisque Poincaré l'avait déjà identifié dans les années 1880.

<sup>2</sup>Au moins au sens au sens usuel de la mécanique, i.e. avec une équation du mouvement.

<sup>3</sup>Les trajectoires qui convergent vers de telles structures visitent préférentiellement une certaine région de l'espace, tout en conservant un comportement imprévisible au sens de la théorie du chaos.

de cette théorie concorde avec la diffusion de l'informatique car elle en fait abondamment usage.

Tous ces éléments, nous les retrouvons dans le traitement que Wolfram fait des automates cellulaires. Et sa classification peut être interprétée comme la traduction de la notion d'attracteur aux systèmes discrets que sont les automates.

### 1.4.2 Attracteurs et classification de Wolfram

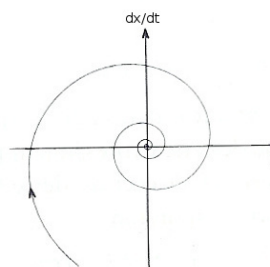
Un système dynamique physique est caractérisé à l'aide de ses degrés de liberté, la donnée de ces paramètres suffit à décrire la totalité du système ; ainsi pour un problème de mécanique à  $N$  corps ponctuels, la donnée des  $N$  positions et des  $N$  vitesses à un certain instant permet - théoriquement - de décrire intégralement la dynamique du système : on connaît l'expression des  $N$  positions et des  $N$  vitesses à tout moment.

C'est pourquoi il est courant de représenter l'espace dont les axes sont les coordonnées des degrés de liberté du système. C'est ce que l'on désigne par l'expression **espace des phases**. Les trajectoires (pour les systèmes dynamiques dissipatifs<sup>4</sup>) tendent vers des volumes finis de cet espace et peuvent converger vers des régions particulières : les **attracteurs**.

Pour des espaces cellulaires de taille finie, l'automate évolue également vers des configurations en nombre finis, il est alors tentant de comparer les états asymptotiques des automates à de grands types d'attracteurs. Une possibilité est proposée par Wolfram dans [27] en fonction de la croissance en complexité (au sens de la théorie de l'information) des motifs spatio-temporels :

Classe I : l'automate tend vers un état uniforme. Cela correspond à un attracteur ponctuel.

attracteur ponctuel

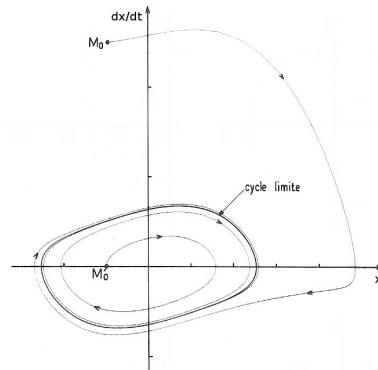


Les images sont des représentations de trajectoires de divers systèmes dans leur espace des phases - ou une projection de celui-ci - adaptées de [3]. Selon cette méthode de correspondance, Wolfram ne définit pas d'attracteur qui soit associé à la classe IV.

<sup>4</sup>C'est-à-dire dont l'énergie mécanique décroît en fonction du temps.

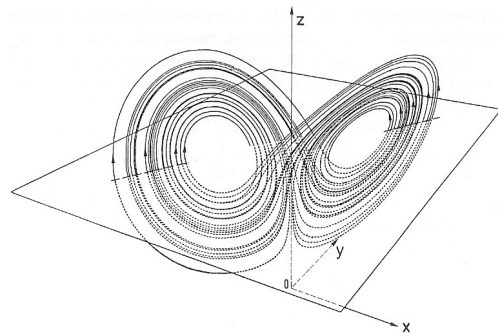
Classe II : l'automate tend vers un état homogène, une configuration spatiale stable, éventuellement périodique. Cela correspond à un cycle limite.

attracteur cyclique



Classe III : l'automate tendrait (si l'espace était infini) vers un état chaotique aperiodique. Cela correspond à un attracteur étrange.

attracteur étrange de Lorenz



### 1.4.3 Représentation graphique de l'espace des états

Il est possible de représenter l'espace des états d'un système dynamique discret et fini à l'aide d'un graphe orienté, cette construction est l'équivalent discret des portraits de phase des systèmes dynamiques continus. Dans ce graphe, les noeuds sont des configurations et les arcs représentent la transition d'une configuration vers une autre. Étant donné le nombre de configurations possibles, ce type de représentation ne peut être exhaustif que pour des cas simples, comme dans la figure 1.1.

L'allure des figures obtenues fait que les auteurs parlent parfois d'arbre de transition (*transient tree*) et que le vocabulaire employé est souvent dérivé de cette image.

### Bassins d'attraction

Le bassin d'attraction est l'ensemble des conditions initiales qui donnent naissance à une trajectoire attirée par un certain attracteur. Dans la figure 1.1, chaque bassin d'attraction correspond à une composante connexe\* du graphe et les attracteurs sont les cycles limites au centre de ces composantes.

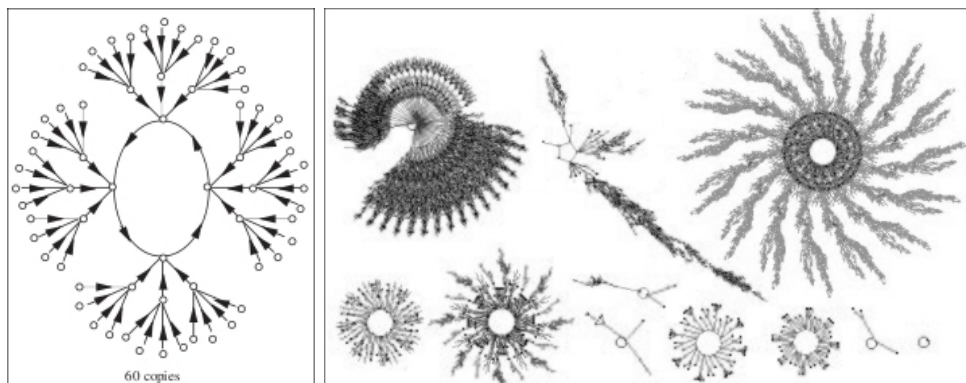


FIG. 1.1: Gauche : portrait de phase complet d'un automate 1D,  $k = 2$ ,  $\Theta = 2$  sur un espace cellulaire de taille 12 - extrait de [6]. Droite : portrait de phase complet d'un automate 1D,  $k = 2$ ,  $\Theta = 7$  sur un espace cellulaire de taille 16 - extrait de [30]. Les arcs sont dirigés vers le centre de chaque composante, on parcourt l'arbre de l'extérieur vers l'intérieur.

## Jardin d'Eden

Le Jardin d'Eden d'un système dynamique désigne les configurations qu'on ne peut atteindre depuis un autre état, autrement dit on ne peut qu'en partir, pas y revenir. Par définition une configuration du Jardin d'Eden n'a pas d'arc entrant, ce sont les feuilles de l'arbre. L'expression "densité du Jardin d'Eden", que l'on utilisera par la suite, désigne la proportion des configurations possibles qui n'ont pas d'antécédent.

## 1.5 Automates cellulaires et propriété de calcul

Depuis von Neumann, on sait que les automates cellulaires peuvent présenter des propriétés émergentes sophistiquées, notamment la capacité à simuler le comportement d'un ordinateur. Mais comment décrire toute l'étendue des potentialités d'une telle machine ? C'est la question à laquelle nous donnons quelques éléments de réponse dans cette partie.

### 1.5.1 Décidabilité et fonctions calculables

Avant toute chose, il nous faut définir ce que fait un ordinateur : il a pour fonction de réaliser des algorithmes ; c'est-à-dire d'appliquer de manière récursive une **liste finie d'instructions**, qui permet de répondre en un temps fini au problème proposé.

L'ensemble des problèmes qui peuvent systématiquement être résolus de la sorte sont qualifiés de problèmes **décidables**. Ils peuvent alors être mis sous la forme

d'une fonction (de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ ) ; dans ce cas, simuler le comportement d'un ordinateur, c'est être capable de calculer depuis la donnée de l'argument la valeur prise par la fonction. Ces fonctions sont alors dites **calculables**. Après avoir fait l'expérience de la polyvalence des tâches que peut réaliser un ordinateur, il n'est pas difficile d'imaginer que les fonctions calculables sont très répandues.

Illustrons les définitions précédentes sur des exemples (adaptés de [31]). Savoir si un entier  $n$  est premier ou non est un problème décidable, un algorithme possible à cette fin serait :

1. on initialise l'entier  $k$  à 2,
2. on teste si  $k \leq \sqrt{n}$ , si oui on effectue l'instruction suivante, si non l'algorithme stoppe et renvoie la réponse " $n$  est premier",
3. on teste si  $k$  divise  $n$ , si oui, l'algorithme stoppe et renvoie " $n$  n'est pas premier", si non, on incrémente l'entier  $k$  de 1 et on retourne à l'étape 2.

On peut alors construire une fonction  $f$  prenant  $n$  comme argument et renvoyant par exemple 1 pour " $n$  est premier" et 0 pour " $n$  n'est pas premier".

Considérons maintenant la question suivante : est-il possible de dire si un certain algorithme va s'arrêter ou au contraire calculer indéfiniment ? Turing a prouvé dès 1936 qu'un tel problème - nommé problème de l'arrêt - est indécidable, autrement dit : il n'existe pas d'algorithme qui puisse répondre à cette question de manière systématique.

### 1.5.2 Une description de la machine de Turing

Pour représenter son idée du fonctionnement d'un algorithme, Turing s'appuya sur une description abstraite que l'on qualifie depuis de machine de Turing (MT). D'autres modèles équivalents de calcul formel existent (le lambda-calcul de Church, les machines à registre de Minsky ...), mais la MT présente à nos yeux l'avantage de ressembler dans sa forme à un automate cellulaire, ce qui permet de concevoir des automates dans lesquels sont 'insérés' de telles machines (cf. [7] par exemple). Nous en donnons ici une description possible.

Une MT est constituée de trois parties : une bande infinie, une tête de lecture-écriture et une liste d'instructions.

- La bande est constituée de cellules et chacune peut prendre un état parmi un alphabet fini (nous les nommerons "états de bande").
- La tête se déplace le long du ruban en lisant ou inscrivant les états sur la bande. On lui associe également un état (nous le nommons "état de tête") choisi

dans un second alphabet ; de plus, il existe dans celui-ci un état particulier correspond à l'arrêt de la machine.

- La liste d'instructions indique à la tête l'action à réaliser en fonction de l'état de bande et de l'état de tête, sous une forme du type : “si état de bande = 1 et état de tête=C, alors mettre l'état de bande à 0, se déplacer vers la gauche, état de tête passe à B”. Cette liste doit être exhaustive pour que la machine puisse accomplir chaque étape sans qu'il y ait d'ambiguïté possible.

La tête est initialisée à un certain état, la bande contient ce que nous pouvons comprendre comme l'entrée du programme. La réalisation de l'algorithme va alors consister à réaliser la séquence d'opérations qu'imposent les instructions de la machine. Enfin les états sur la bande lorsque la machine s'arrête donneraient la sortie de l'algorithme.

Illustrons cette idée sur un exemple : on veut concevoir une machine qui multiplie par 2 en binaire, cela revient à ajouter un 0 au bout du nombre (e.g. :  $111 \equiv 7$ , et  $1110 \equiv 14$ ). L'alphabet de bande sera alors  $\{0, 1, \emptyset\}$ , la tête peut avoir deux états (marche M / arrêt A), les instructions qui suivent permettent de réaliser la tâche de multiplication par 2 (cf. schéma 1.2).

- M et 1 : écrire 1, déplacer vers la droite, M
- M et 0 : écrire 0, déplacer vers la droite, M
- M et  $\emptyset$  : écrire 0, déplacer vers la droite, A

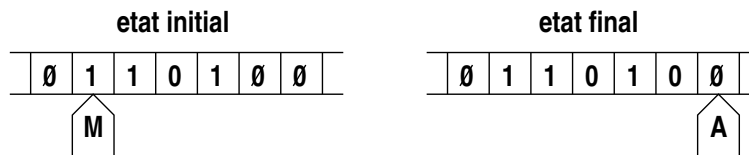


FIG. 1.2: Machine de Turing effectuant la multiplication par 2 binaire.

Mais en général avec un tel dispositif, il est long et compliqué de décrire même des algorithmes simples. La notion d'efficacité n'entre pas en ligne de compte dans cette machine abstraite, ce qui importe c'est qu'elle soit *potentiellement* capable de réaliser un calcul. Et si elle peut calculer toute fonction calculable, on dira que la MT est **universelle**. Une autre manière de formuler cette même propriété consiste à dire que la machine peut simuler le comportement de n'importe quelle autre MT (ce qui fait écho au problème de l'autoreproduction dont il sera question plus loin). Il a ainsi été montré qu'une machine de Turing à 2 états de bande et 22 de tête pouvaient être universelles (d'autres combinaisons sont possibles).

Revenons brièvement à la relation entre machine de Turing et automates cellulaires : dans l'un comme dans l'autre il existe une notion d'états en nombre finis ; la



traduction n'est pas directe puisque dans la MT il y a deux alphabets distincts, et on ne lit qu'une seule cellule à la fois (alors que l'automate met à jour simultanément toutes ses cellules), mais la ressemblance observée laisse penser qu'il est effectivement possible de construire l'un à partir de l'autre et par conséquent de réaliser du calcul avec un automate cellulaire.

### 1.5.3 Calcul à l'aide d'automates cellulaires

#### Calculateur parallèle

Nous pensons que l'intention à long terme des scientifiques qui examinent les propriétés de calcul des automates est de tirer parti de leur structure décentralisée pour construire des calculateurs puissants. Un tel système, qui peut supporter simultanément plusieurs étapes élémentaires de la fonction globale, est appelé **calculateur parallèle**.

L'exécution simultanée des tâches présente bien sûr un avantage considérable en terme d'efficacité vis-à-vis d'une exécution séquentielle (où les tâches sont réalisées les une après les autres), mais la mise en œuvre pratique de la parallélisation pose des difficultés : il faut synchroniser les différentes unités du calculateur. Toutefois, la parallélisation de l'architecture des processeurs est aujourd'hui l'une des méthodes les plus employées pour améliorer les performances des machines de calcul ([1]).

Il nous semble cependant que la parallélisation du calcul dans les automates ne se ferait pas à la même échelle : elle serait réalisée non pas au niveau d'un processeur mais sur les 'briques élémentaires' du calcul ; ce qui justifie l'utilisation fréquente du terme "parallélisme massif", autorise l'espoir d'une amélioration de performances substantielle, et explique du même coup l'importance des enjeux autour de la question de la localisation d'automates - calculateurs universels.

#### Indices de l'universalité

La propriété que nous nous proposons de chercher dans les automates cellulaires est l'universalité, autrement dit, l'aptitude du système à faire tout ce qu'est capable de faire une MT universelle.

Notons dès maintenant que la propriété d'universalité est elle-même indécidable : il n'existe donc pas de méthode systématique pour dire qu'une règle d'automate est universelle ou non. De plus, la notion de calculabilité est théorique et ne dit rien sur la mise en œuvre du calcul. Elle ne répond pas aux questions du type : quelle doit être la forme de l'entrée ? comment le système traite-t-il l'information ? comment décoder la sortie de la machine ?

Alors comment est-il possible de découvrir des règles d'automates universelles ?

Pour répondre à cette question, des auteurs ont cherché à décrire en quoi consistait le calcul. Par exemple, Melanie Mitchell résume en termes simples les propriétés dont devrait disposer un système dynamique capable de réaliser du traitement de l'information ([18]) :

- produire de l'information,
- la mettre en mémoire,
- la transmettre,
- et réaliser des opérations logiques dessus.

Dans un automate régulier, la dynamique tend vers un état uniforme, il n'est donc pas possible de générer une sortie qui soit une fonction élaborée de l'entrée. De même, un automate chaotique semble rapidement perdre la mémoire de l'information contenue dans les conditions initiales, il ne paraît pas capable de stocker des données.

C'est pourquoi les propriétés de calcul semblent nécessairement associées à des structures de longue durée de vie mais susceptibles d'être modifiées, et c'est ce type de motifs avec lesquels Wolfram caractérise sa classe IV, d'où l'incitation formulée dans [27] à y chercher la propriété d'universalité. Cette remarque joue un rôle fondamentale pour le chapitre 2 de notre étude, où nous verrons dans quelle mesure elle se vérifie.

#### 1.5.4 Exemples de propriétés de calcul

Nous présentons dans cette section quelques problèmes classiques qui illustrent ce que peut signifier la réalisation d'une tâche de calcul par un système dynamique tel qu'un automate cellulaire. Nous en décrivons trois, chacune correspondant à une certaine famille de problèmes qui peuvent être résolus par une machine :

- L'autoreproduction, c'est-à-dire l'aptitude de la machine à en produire une autre qui lui serait identique, ce problème a surtout une valeur théorique.
- La synchronisation des fusiliers est la formulation générique, dans le contexte des automates déterministes, d'une question de synchronisation, c'est donc un problème qui se pose effectivement en ingénierie.
- La question de la détermination de la densité d'état est une tâche pratique sommaire, utile pour tester les capacités de calcul d'une règle d'automate.

#### Problème historique de l'autoreproduction ([13])

Dès les travaux de von Neumann ([24]), il est question de construire des automates cellulaires pour effectuer une fonction complexe : l'autoreproduction. Il faut ici préciser autoreproduction non-triviale car par exemple l'automate qui reproduit l'espace cellulaire identique à lui-même mais translaté spatialement est autoreproductif, mais facilement prévisible.

Cela suggère donc que l'automate produit doit être caractérisable à l'aide d'une propriété peu commune, et dans le cadre du problème de von Neumann, il s'agit d'une propriété particulièrement élaborée : l'universalité définie en 1.5.2.

Il s'agit donc de concevoir une machine ayant la propriété d'universalité et qui soit de plus capable de produire son exacte copie. Ce problème n'a rien d'évident car à première vue, cela semble être une régression à l'infini. Formulé trivialement, si on construit une grue à l'aide d'une autre grue, construite elle-même à l'aide d'une grue etc... Comment construire la première grue ?

Mais cela peut être résolu en réduisant la construction à une série d'opérations élémentaires : comme on l'a déjà dit, selon la thèse de Church-Turing, tout calcul peut être réduit à un algorithme i.e. une séquence d'instructions décrites avec un nombre fini (et en pratique, petit) de symboles.

Le raisonnement de von Neumann consiste alors à découper l'automate en plusieurs unités, chacune ayant un rôle particulier, et pour lesquelles le “matériau” cellulaire peut être interprété différemment :

- Le “constructeur universel” doit être capable de construire n'importe quel automate si on lui fournit les instructions appropriées, les cellules constituent donc une sorte de programme.
- La description complète du système à copier - exceptée la description elle-même - doit être plutôt considérée comme l'information en entrée du programme.
- Le “superviseur” est une machine de Turing qui orchestre la procédure. En particulier, il envoie l'instruction au constructeur d'interpréter la description pour commencer la reproduction.

La description haut-niveau de l'automate de von Neumann est donc relativement simple, on la récapitule sur le schéma fonctionnel 1.3.

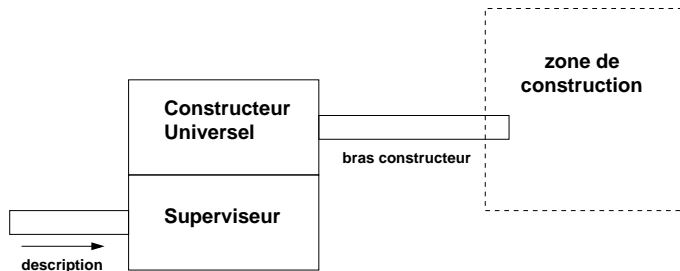


FIG. 1.3: Schéma de fonctionnement de l'automate de von Neumann.

En revanche la description à l'échelle cellulaire est bien plus complexe (cf. [24]). Finalement, pour accomplir une telle tâche, von Neumann construit un automate

à 2 dimensions, sur des voisinages constitués de la cellule centrale et des 4 cellules adjacentes<sup>5</sup> et à 27 états, l'ensemble représentant environ 200.000 cellules.

La question de l'autoreproduction met en évidence l'idée que dès leur naissance, les automates cellulaires sont choisis comme terrain de recherche pour leur capacité à réaliser des tâches mathématiques élaborées, étroitement liées aux notions de calculabilité telles qu'elles sont définies par Turing.

### Problème de synchronisation des fusiliers (*Firing Squad Synchronization*)

La synchronisation des fusiliers est un problème classique d'informatique publié dès 1964 dans [19] à partir des travaux de Myhill, McCarthy et Minsky. Nous utilisons principalement [17] pour le décrire. On souhaiterait que, partant d'un état quiescent, toutes les cellules soient simultanément dans le même état actif  $f$  à un instant postérieur, sans jamais avoir été dans cet état précédemment.

Pour comprendre une solution possible (celle de Fischer, [9]) dans le cas d'un automate à 1D, pour lequel le voisinage est constitué de la cellule centrale et ses deux voisines, nous utiliserons la figure 1.4.

- A l'instant initial, toutes les cellules (les 'soldats') sont dans l'état quiescent, sauf celle à une extrémité (le 'général'), et l'autre bordure de l'espace (état  $b$ ).
- Le général envoie deux signaux : un lent (ligne pointillée), un rapide (ligne continue) ; les états de bordure sont conçus de manière à réfléchir les signaux en les laissant inchangés.
- Lorsque les signaux se rencontrent, la cellule de collision devient général au pas de temps suivant et réémet les deux signaux, puis elle passe dans l'état  $b$ .
- Quand tout le voisinage est dans l'état  $b$ , la cellule passe dans l'état  $f$ , c'est ce qui se produit lors de la dernière étape.

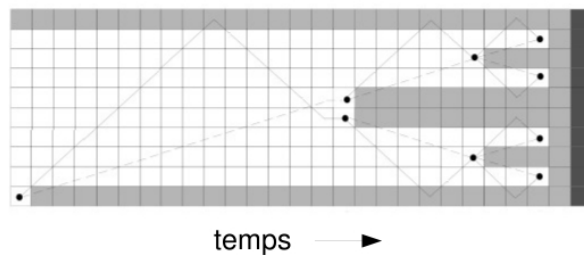


FIG. 1.4: Une solution possible au problème de synchronisation des fusiliers pour un espace de 10 cellules. Adapté de [17].

Cet exemple cherche à illustrer comment peut s'opérer pratiquement la commu-

<sup>5</sup>Ce type de voisinage sera d'ailleurs généralement qualifié de voisinage de von Neumann.

nication entre les cellules de l'automate : essentiellement par l'envoi de signaux qui peuvent se déplacer sans être altérés dans l'espace cellulaire. C'est une question sur laquelle nous reviendrons plus en détails (notamment en 3.2.1).

## Détermination de la densité d'états

Ce problème simple présente l'avantage d'être facile à exprimer dans le contexte des automates cellulaires. Considérons alors une instance particulière du problème, la tâche de classification pour la densité  $1/2$  d'un automate à deux états (*Majority classification task*) : il s'agit de déterminer l'état majoritaire à l'instant initial.

Un automate peut résoudre cette tâche s'il tend vers une configuration uniforme, constituée de l'état qui domine initialement. De cette manière, si la configuration initiale comporte 50 cellules dans l'état 0 et 49 dans l'état 1, le comportement souhaité est de transformer (si possible rapidement) les états 1 en 0, de manière à obtenir un espace uniforme de 0, et ce quelle que soit la disposition initiale des cellules. Ce n'est pas une fonction triviale, car le même automate doit être capable de converger vers un espace uniforme de 1 s'il comporte au départ 49 cellules 0 et 50 1. On mesure alors l'efficacité d'une règle en estimant sur un échantillon suffisamment large de conditions initiales la proportion de réussites dans la détermination de l'état majoritaire initialement.

Cette tâche nécessite donc un traitement global de l'information par le système de calcul, et cette caractéristique, additionnée à la simplicité de mise en œuvre, en fait un exemple typique pour tester l'émergence de propriétés de calcul [5].

Nous avons maintenant planté le décor de l'étude à venir : outre les concepts fondamentaux, nous avons délimité la famille d'automates que nous étudierons, et donner une vue d'ensemble de leurs comportements dynamiques typiques, dont rend compte la classification de Wolfram. Nous disposons également des outils de base employés pour les décrire : modes de représentations, mesures statistiques ... Enfin, nous avons présenté une première idée de ce que nous y chercherons : des propriétés qui traduiraient la capacité de ces modèles à simuler une machine de calcul.

La première partie nous a également fourni un aperçu des difficultés que nous allons être amenés à discuter : comment extraire de quelques observations des lois générales ? qu'est-ce qu'un bon échantillonnage des conditions initiales ? quelles sont les mesures pertinentes pour décrire l'espace ? Ces interrogations renferment de manière implicite une question plus fondamentale, à laquelle nous allons chercher des éléments de réponse : peut-on faire l'étude de ces systèmes artificiels comme on ferait celle d'un système physique ?

# Bibliographie

- [1] K. Asanovic, R. Bodik, B.C. Catanzaro, J.J. Gebis, P. Husbands, K. Keutzer, D.A. Patterson, W.L. Plishker, J. Shalf, S.W. Williams, et al. The landscape of parallel computing research : A view from berkeley. *Electrical Engineering and Computer Sciences, University of California at Berkeley, Technical Report No. UCB/EECS-2006-183, December*, 18(2006-183) :19, 2006.
- [2] J.T. Baldwin and S. Shelah. On the classifiability of cellular automata. *Theoretical computer science*, 230(1-2) :117–129, 2000.
- [3] P. Bergé, Y. Pomeau, C. Vidal, and D. Ruelle. *L'ordre dans le chaos : vers une approche déterministe de la turbulence*. Hermann, 1984.
- [4] E.F. Codd. *Cellular automata*. Academic Press, Inc. Orlando, FL, USA, 1968.
- [5] J.P. Crutchfield and M. Mitchell. The evolution of emergent computation. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 92(23) :10742–10746, 1995.
- [6] M. Delorme. An introduction to cellular automata. *Mathematics and its applications - Dordrecht*, 460 :5–50, 1999.
- [7] A. Dhar, P. Lakdawala, G. Mandal, and S.R. Wadia. Role of initial conditions in the classification of the rule space of cellular automata dynamics. *Physical review. E, Statistical physics, plasmas, fluids, and related interdisciplinary topics*, 51(4) :3032, 1995.
- [8] E. Domany and W. Kinzel. Equivalence of cellular automata to Ising models and directed percolation. *Physical review letters*, 53(4) :311–314, 1984.
- [9] P.C. Fischer. Generation of primes by a one-dimensional real-time iterative array. *Journal of the ACM*, 12(3) :388–394, 1965.
- [10] U. Frisch, B. Hasslacher, and Y. Pomeau. Lattice-gas automata for the Navier-Stokes equation. *Nature Phys Rev Lett*, 56 :1505, 1984.
- [11] M. Gardner. Mathematical games : The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game 'Life'. *Scientific American*, 223(4) :120–123, 1970.

- [12] J. Hardy, O. De Pazzis, and Y. Pomeau. Molecular dynamics of a classical lattice gas : Transport properties and time correlation functions. *Physical Review A*, 13(5) :1949–1961, 1976.
- [13] J.C. Heudin and J. de Rosnay. *L'évolution au bord du chaos*. Hermès, 1998.
- [14] C.G. Langton. Computation at the edge of chaos : phase transitions and emergent computation. *Physica D*, 42(1-3) :12–37, 1990.
- [15] J.L. Lebowitz, C. Maes, and E.R. Speer. Statistical mechanics of probabilistic cellular automata. *Journal of Statistical Physics*, 59(1) :117–170, 1990.
- [16] E.N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences*, 20(2) :130–141, 1963.
- [17] M. Mitchell. Computation in cellular automata : A selected review. *Nonstandard Computation*, Weinheim, 1998.
- [18] M. Mitchell, J.P. Crutchfield, and P.T. Hraber. Dynamics, computation, and the “edge of chaos” : A re-examination. *Arxiv preprint adap-org/9306003*, 1993.
- [19] E.F. Moore. The firing squad synchronization problem. *Sequential Machines, Selected Papers*, pages 213–214, 1964.
- [20] W. Poundstone and R.T. Wainwright. Chapter 1. In *The recursive universe*. Oxford Univ. Press, 1990.
- [21] P. Prusinkiewicz and A. Lindenmayer. *The algorithmic beauty of plants*. Springer-Verlag New York, Inc. New York, NY, USA, 1990.
- [22] Y.H. Qian, D. d’Humieres, and P. Lallemand. Diffusion simulation with a deterministic one-dimensional lattice-gas model. *Journal of Statistical Physics*, 68(3) :563–573, 1992.
- [23] J. Von Neumann. The general and logical theory of automata. *Artificial Intelligence : Critical Concepts*, page 416, 2000.
- [24] J. Von Neumann, A.W. Burks, et al. *Theory of self-reproducing automata*. University of Illinois Press Urbana, 1966.
- [25] S. Wolfram. Statistical mechanics of cellular automata. *Reviews of Modern Physics*, 55(3) :601–644, 1983.
- [26] S. Wolfram. Computation theory of cellular automata. *Communications in Mathematical Physics*, 96(1) :15–57, 1984.
- [27] S. Wolfram. Universality and complexity in cellular automata. *Physica D*, 10(1) :1–35, 1984.
- [28] S. Wolfram. Twenty problems in the theory of cellular automata. *Physica Scripta*, 9 :170–183, 1985.

- [29] S. Wolfram. *Cellular automata and complexity : collected papers*. Perseus Books Group, 1994.
- [30] A. Wuensche. Classifying cellular automata automatically. *Complexity*, 4(3) :47–66, 1999.
- [31] H.P. Zwirn. Chapitre 1. In *Les systèmes complexes : mathématiques et biologie*. O. Jacob, 2006.

Les articles [25, 26, 27, 28] sont regroupés dans le recueil [29].



## Chapitre 2

# Notion de phases dans l'espace des automates cellulaires

Wolfram distinguait des automates cellulaires dont la dynamique tend majoritairement (relativement aux conditions initiales) vers un comportement asymptotique ordonné et d'autres qui produisent majoritairement un comportement chaotique. Or l'observation des transitions de comportements qualitatifs d'un système est l'objet de la théorie des transitions de phase en physique statistique. Le rapprochement peut même être étendu dans le cas particulier d'une chaîne de spins car chaque site  $y$  est susceptible de prendre un nombre discret d'états, à l'image d'une cellule d'automate.

Des auteurs ont alors essayé de décrire l'espace des règles par analogie avec les transitions de phase telles qu'on les observe en physique, l'objectif étant de transposer à ce nouveau problème les connaissances accumulées. Ainsi, si l'on pouvait établir une sorte de diagramme des phases de l'espace des règles, cela signifierait qu'on peut, à l'aide d'un très petit nombre de paramètres, avoir des informations sur la dynamique de l'automate.

Dans cette partie, nous allons poser indirectement le problème consistant à identifier les capacités de calcul des automates à partir de leur règle. Les observations qualitatives associées à la classification de Wolfram amènent à déplacer cette question vers la suivante : dans quelle mesure peut-on déduire de la règle statique des automates leur comportement dynamique ?

La question paraît ambitieuse puisque, comme on l'a vu dans la partie précédente, des arguments fondamentaux s'opposent à ce qui pourrait être considéré comme la construction de frontières nettes aux classes de Wolfram. Mais même si ce problème n'a sans doute pas de solution simple, une étude selon ce point de vue peut éclaircir la question de la localisation d'automates particuliers dans l'espace des règles.

Nous allons d’abord exposer les éléments caractéristiques des transitions de phase, et étudier, au travers de diverses paramétrisations de l’espace qui ont été proposées, jusqu’où l’analogie peut être poussée. Ensuite, nous verrons comment des auteurs ont cherché à transposer des outils usuels de physique statistique, et quel est l’apport de ceux-ci pour la localisation d’automates aux propriétés remarquables, notamment concernant le calcul. Nous verrons en particulier comment la question de l’existence d’une “phase” où seraient regroupés les automates possédant la propriété d’universalité a été posée. En mettant en évidence que le défaut fondamental de ces approches, à savoir l’absence de définitions claires des classes d’automates, n’est pas résolu, nous serons amenés à exposer d’autres propositions de classifications des automates déterministes en fonction de leur comportement dynamique.

## 2.1 Analogie avec une transition de phase

Les différences qualitatives entre les états de la matière permettent de définir les phases physiques. Mais pour définir sans ambiguïté la phase d’un système, il faut recourir aux observables appropriées et à la théorie qui les relie ; ainsi la théorie des transitions de phase étudie les comportements spécifiques des variables thermodynamiques : paliers, discontinuités, divergences etc... On peut évoquer à titre d’exemple la vaporisation de l’eau, qui s’accompagne entre autre d’une discontinuité de la dérivée première de l’énergie libre du système par rapport au volume, c’est-à-dire de la pression. Nous décrivons ici les éléments que nous jugeons pertinents pour une éventuelle “exportation” de la physique des transitions de phase aux automates cellulaires ; cette partie peut être parfois un peu technique, mais cela devient nécessaire dès lors qu’il faut examiner les éléments de l’analogie plus en détails.

### 2.1.1 Caractériser une transition de phase

L’idée que l’on expose dans cette section est un résumé de considérations classiques de la physique des transitions de phase, on peut en trouver une description complète dans des ouvrages de référence comme [3].

Si la théorie des transitions de phase pouvait être appliquée dans le contexte des automates, il faudrait d’abord savoir quel type de transition est recherché. Pour cela, on peut recourir à la classification de Landau [24]. Elle s’appuie sur la notion de symétries des phases, il s’agit de distinguer les transitions :

- pour lesquelles il n’y a pas de relation d’inclusion simple entre les groupes de symétrie des deux phases,
- pour lesquelles le groupe de symétrie de la phase la moins symétrique est un sous-groupe du groupe de symétrie de la phase la plus symétrique.

Ces dernières ont la particularité de présenter un **paramètre d'ordre**, i.e. une grandeur (scalaire ou vectorielle) qui aurait la propriété d'être nulle dans la phase désordonnée et au contraire non-nulle dans la phase ordonnée. Dans ce sous-ensemble, on fait alors une nouvelle distinction entre les transitions :

- du premier ordre<sup>1</sup>, où ce paramètre subit une discontinuité à la transition de phase, c'est le cas d'une transition solide cristallin - liquide,
- du second ordre, où il n'y a pas de discontinuité du paramètre d'ordre, un exemple classique étant la transition ferromagnétique-paramagnétique.

La transition est donc associée au phénomène de brisure de symétrie du système.

Nous ajoutons ici une remarque concernant le cas des automates : dans le contexte de la physique, il s'agit en général de symétries au sens géométrique du terme (e.g. les symétries d'une maille cristallographique d'un solide), Dans l'espace cellulaire, la notion de symétrie serait moins intuitive : on devrait l'exprimer à l'aide du formalisme mathématique adéquat. Toutefois, on peut avoir l'impression que l'idée d'une phase ordonnée et d'une autre chaotique s'accorde avec la conjecture d'une transition avec paramètre d'ordre. On verra plus loin quelques observations qui étayent cette hypothèse.

On souhaiterait alors trouver les éléments caractéristiques d'une transition dans le cadre des automates, c'est-à-dire disposer d'une définition précise des phases, des observables significatives, de leur comportement à la transition, des éventuelles symétries brisées et paramètres d'ordre.

### 2.1.2 Comparaisons au modèle d'Ising des spins

À notre connaissance, il n'a pas encore été proposé de telle description thermodynamique de l'espace des règles déterministes. Mais s'il est possible d'en trouver les éléments caractéristiques, nous serions tenté de les chercher en s'appuyant sur la ressemblance entre les automates et les systèmes de type réseaux de spins. Nous décrivons ici les grandes lignes du modèle d'Ising (qui en est le prototype), puis sur la base de deux exemples, nous expliquons comment ces ressemblances ont été mises en correspondance au cours des années 80.

Certains milieux magnétiques peuvent être représentés par un réseau rigide dont chaque noeud porte un moment magnétique (son spin) dont les orientations possibles sont en nombre discret. Les propriétés magnétiques observées à l'échelle macroscopique seraient le résultat d'un comportement collectif de ces spins : par exemple, si ceux-ci sont très majoritairement orientés dans le même sens, l'échantillon génère un moment magnétique globale comme sur la figure 2.1.

---

<sup>1</sup>Au sens de Landau - par opposition à la classification d'Ehrenfest, également usuelle.

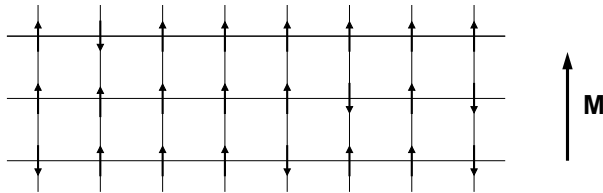


FIG. 2.1: Représentation schématique d'un réseau de spins à 2 dimensions, de moment magnétique global  $M$ .

Le modèle d'Ising sert à représenter ce type de situations lorsque deux états seulement sont accessibles (généralement appelés “up”  $\uparrow$  et “down”  $\downarrow$ )<sup>2</sup>. Dans les cas de milieux ferromagnétiques fortement anisotropes<sup>3</sup>, c'est le cas : deux orientations sont autorisées ; de plus, on considère qu'un spin n'interagit qu'avec ses proches voisins dans le réseau.

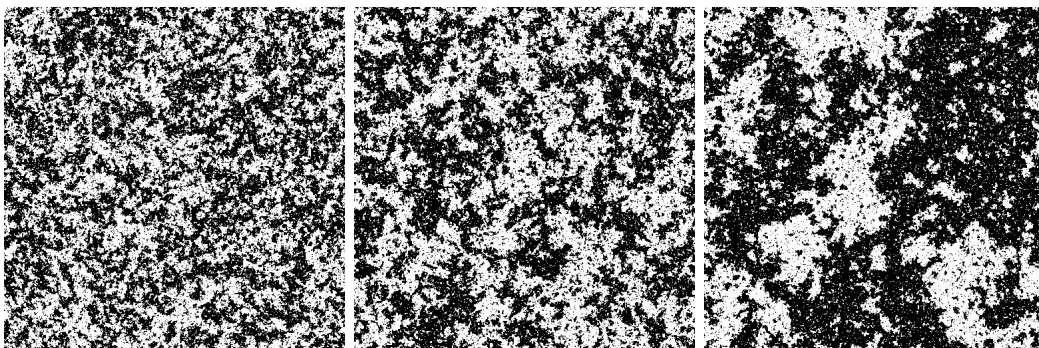


FIG. 2.2: Résultats de simulations du modèle d'Ising en 2 dimensions, de gauche à droite on s'approche (par valeurs supérieures) de la température critique de transition de phase ferro-paramagnétique. Extraits du site de Jochen Voss ([seehuhn.de](http://seehuhn.de)).

Ce modèle est décrit très largement dans la littérature en raison de sa simplicité, qui permet de le résoudre analytiquement, et dans certains cas de manière exacte. Pour des détails sur ce modèle, on peut se référer par exemple à l'article d'Ising : [22] et pour une revue historique : [6].

On ne développera pas ici la résolution du modèle en physique statistique, qui consiste à calculer la fonction de partition du système depuis son hamiltonien. Cela serait superflu car on ne dispose pas a priori de principes équivalents à ceux de la

<sup>2</sup>Le modèle d'Ising est également utilisé dans d'autres contextes : en particulier ce fut une des premières formes de modèle de gaz sur réseau (*lattice gas models*).

<sup>3</sup>Cela signifie que ces matériaux ont un comportement variable selon la direction considérée ; ici, l'orientation des spins suit préférentiellement une certaine direction.

thermodynamique qui permettrait une description analogue dans le domaine des automates. De plus, il a été démontré qu’il n’existe pas de règle déterministe synchrone telle qu’un automate simule exactement le modèle d’Ising ([33]). Il est donc exclu de réaliser une stricte transposition.

Pour contourner ce problème, il est possible de mettre en œuvre le modèle d’Ising avec d’autres familles d’automates, on évoque ici deux exemples de ce type. Dans [10, 11], Michael Creutz construit une correspondance avec des automates asynchrones ; dans [16] Eytan Domany et Wolfgang Kinzel proposent de construire une équivalence avec les automates cellulaires probabilistes. Nous ne développerons pas dans le détail les résultats de ces tentatives, mais nous allons expliquer en quoi, selon nous, elles permettent de donner une idée de quels sont les analogues que nous pourrions rechercher ; elles suggèrent même quelques éléments fondamentaux du modèle qui pourraient trouver un équivalent dans le contexte qui nous intéresse ici.

### **Paramètre d’ordre, allure des phases**

Le paramètre d’ordre dans les transitions magnétiques est l’aimantation  $\mathcal{M}$ , c’est-à-dire la somme des moments magnétiques des spins du système. Pour un automate où  $k = 2$ , le parallèle est immédiat, chaque état de l’automate pouvant être associé à  $\uparrow$  ou  $\downarrow$ . On peut imaginer l’équivalent de la phase paramagnétique comme un espace cellulaire dont les états seraient aléatoirement  $\uparrow$  ou  $\downarrow$  et l’équivalent de la phase ferromagnétique serait en revanche constitué de grandes régions où l’état serait uniforme. Nous pensons donc qu’un éventuel paramètre d’ordre serait donc à associer aux mesures statistiques que l’on peut faire sur le système - par exemple l’entropie ou l’information mutuelle.

### **Correspondance entre phases et dynamiques**

Le rôle du temps n’est pas identique dans les deux cas : dans [10, 11], l’auteur cherche une règle dont l’évolution dynamique soit une marche dans l’ensemble statistique des configurations accessibles pour le modèle d’Ising à l’équilibre. Autrement dit, à une réalisation de la dynamique d’automate, il fait correspondre un état thermodynamique du système de spins, c’est-à-dire un ensemble d’états microscopiques pris par le système.

Pour Domany et Kinzel l’approche est différente car on fait correspondre au temps une dimension spatiale du modèle d’Ising. En pratique, cela revient au même : l’état asymptotique de l’automate serait une marche dans l’ensemble des configurations probables du système magnétique.

Et dans un cas comme dans l’autre, la dynamique d’automate correspond à une phase précise du système magnétique : une évolution ordonnée “ressemble” à la

phase ferromagnétique, une chaotique à la phase paramagnétique.

### Paramètres de contrôle

Si nous nous fixons pour objectif la localisation d'une transition dans l'espace des règles, nous sommes à la recherche d'un paramètre - ou d'un ensemble de paramètres - jouant un rôle analogue à celui de la température ou du champ externe dans les systèmes magnétiques, autrement dit une variable de contrôle de la transition. Pour pouvoir se déplacer facilement dans cet espace, **on souhaiterait que ces paramètres puissent être déduits de la seule règle**. Examinons alors les procédures de fonctionnement des deux algorithmes et voyons si ce qui joue le rôle de la température est contenu dans la règle de l'automate ou dépend également de l'état des cellules.

Dans [10, 11], la procédure fait intervenir des “démons” : des variables qui peuvent stocker ou céder de l'énergie au reste du système magnétique. L'état moyen de ces démons permet d'accéder à la température du système. Bien que Creutz n'explicite pas l'automate associé, nous pouvons l'imaginer dans les grandes lignes : supposons que le démon ait deux états d'énergie haute et basse (resp. + et -), on construirait un alphabet du type  $\{(+, \uparrow), (+, \downarrow), (-, \uparrow), (-, \downarrow)\}$  et les règles de mises à jour appropriées ; par exemple, si le démon associé à un site est en mesure de lui céder de l'énergie, on pourra autoriser un renversement de spins, même si cela crée des interactions spin-spin défavorables avec certains voisins. Dans ce cas, une partie de l'information sur la température serait donnée non seulement par la règle, mais également par les configurations de l'espace cellulaire.

En revanche, dans [16], le paramètre est effectivement contenu dans la règle : il s'agit de construire la règle de probabilité directement depuis les paramètres du modèles d'Ising (énergies d'interaction entre les spins, champ externe, température) pour retrouver une loi de probabilité identique entre les configurations du modèle et celles de l'automate. Mais la possibilité de retrouver une variable de contrôle dans la règle est très étroitement liée au caractère probabiliste de celle-ci. Cette approche est en fait un exemple de modélisation numérique probabiliste de systèmes physiques, procédure qui s'est largement répandue dans les deux décennies suivantes et sur laquelle nous reviendrons dans le chapitre 3.

Par conséquent, si les deux exemples présentés ici peuvent nous donner une meilleure idée de ce que serait une correspondance précise entre les deux domaines, aucun ne nous fournit une méthodologie pour construire les paramètres de contrôle de la transition dans le cas qui nous occupe des automates déterministes.

## 2.2 Paramétrer l'espace des règles

Ce qui précède n'exclut pas qu'il soit possible de trouver des paramètres de contrôle dans l'espace des règles déterministes, et plusieurs auteurs ont mené des approches expérimentales dans ce sens, cherchant à organiser l'espace des règles en s'appuyant sur des paramétrisations intuitives.

### 2.2.1 La paramétrisation $\lambda$

Parmi ces tentatives de paramétrisation, celle de Christopher Langton est l'une des premières et l'une des plus discutées. Nous l'étudions ici au travers des principaux travaux de Langton et de ses collaborateurs autour de 1990 ([25, 27, 26, 36, 19]).

#### Le bord du chaos

La question des phases dans l'espace des règles telle que nous l'avons formulée ici est rendue par Langton au travers de l'expression : *the edge of chaos* (littéralement : le bord du chaos). C'est l'hypothèse selon laquelle des régions de l'espace des automates cellulaires (et plus généralement de l'espace de systèmes dynamiques) sont dominées par des comportements réguliers, d'autres par des comportements chaotiques, et c'est aux frontières de ces domaines que l'on pourrait trouver les comportements "intéressants".

Dans [19], les auteurs formulent explicitement l'hypothèse à leur sens (et donc les difficultés principales qui se posent) :

- **L'existence** : il existe des phases bien déterminée dans l'espace des règles, i.e. il existe des paramètres tels que leur donnée suffit à expliciter le comportement générique d'une règle. L'une de ces phases : le bord du chaos, est située entre les phases d'ordre et de désordre.
- **L'unicité** : le bord du chaos correspond à une région circonscrite de l'espace des règles : on peut en tracer les frontières, et celles-ci seraient continues.
- **La caractérisation** : il est possible d'associer aux règles de cette phase des caractéristiques et des propriétés précises.
- **La constructibilité**, qui est ici synonyme de localisation : on peut repérer les règles du bord du chaos à la seule lecture de leur table.

La démarche expérimentale de Langton peut être comprise comme une tentative de corrélation d'un paramètre à des observables statistiques et par conséquent un premier pas dans la direction de la résolution de ces quatre difficultés à la fois.

## Procédure expérimentale

Le principe de la paramétrisation est le suivant : parmi les différents états de l'automate, un est qualifié arbitrairement d'état de référence ( $\mathcal{R}$ ). Si  $\mathcal{P}(\mathcal{R})$  désigne le pourcentage de transitions vers l'état  $\mathcal{R}$  dans la table des règles, alors  $\lambda = 1 - \mathcal{P}(\mathcal{R})$ .

Via ce coefficient, Langton cherche à traduire directement les idées d'ordre et de chaos au sens défini précédemment dans l'automate. En effet, si une forte proportion des voisinages produit l'état de référence, l'automate tendrait à générer un comportement homogène.

Pour évaluer le degré d'ordre dans les dynamiques, Langton mesure les grandeurs statistiques définies précédemment (entropie, information mutuelle) et les temps de transition en fonction de  $\lambda$ . Ces mesures sont réalisées pour une large gamme de règles, construites selon différentes méthodes détaillées dans [25]. À la différence des travaux de Wolfram, l'étude n'est pas principalement visuelle et peut alors être menée sur une plus grande variété d'automates. La majorité des mesures rapportées sont effectuées pour  $k = 4$  et  $\Theta = 5$  (automates 1D).

Les résultats qualitatifs montrent effectivement des corrélations qui soutiennent l'intuition de Langton. Les dynamiques régulières correspondent en général aux  $\lambda$  de faibles valeurs et les chaotiques aux  $\lambda$  élevés. Cela se traduit quantitativement sur les mesures statistiques : un des protocoles suivis dans [25] consiste à modifier peu à peu la règle d'un automate de manière à augmenter la valeur de  $\lambda$ , on effectue pour chacune des règles des réalisations sur des conditions initiales aléatoires, on mesure alors au cours de l'évolution l'entropie cellulaire et l'information mutuelle moyenne d'une cellule par rapport à elle-même au pas de temps suivant. L'allure des courbes obtenues montre une rupture nette du comportement permettant de distinguer deux régimes clairement disjoints (fig 2.3). Au-delà d'une certaine valeur, il n'existe plus de dynamiques régulières.

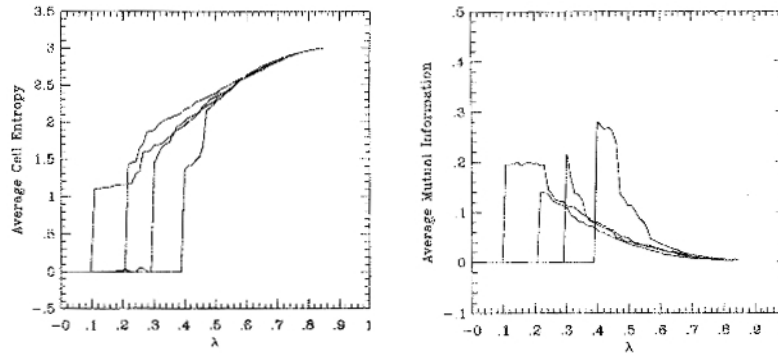


FIG. 2.3: Mesures des moyennes de l'entropie cellulaire (gauche) et l'information mutuelle temporelle (droite), pour 4 procédures de parcours de l'espace des règles - extrait de [25].



De plus, il y a divergence des temps de transition pour la valeur de  $\lambda$  associée au saut brutal d'entropie ou d'information mutuelle. Autre élément intéressant : pour chacune des valeurs de  $\lambda$  on peut placer un point dans le plan entropie moyenne<sup>4</sup> vs. information mutuelle. Les points se regroupent en deux nuages principaux qui correspondraient aux comportements majoritairement réguliers ou chaotiques.

Ces deux signes indiquent que les comportements complexes - assimilés ici à la classe IV et aux propriétés de calculabilité - pourraient se trouver dans la région intermédiaire (fig 2.4).

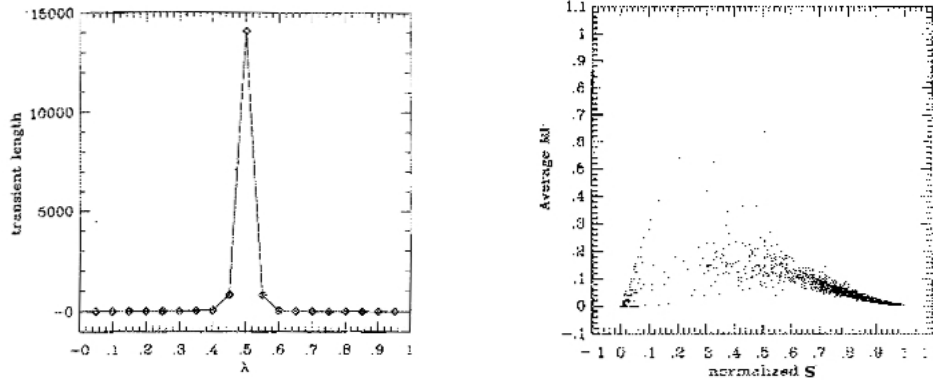


FIG. 2.4: Gauche : Mesures des temps de transition en fonction de  $\lambda$  sur une expérience de parcours de l'espace des règles. Droite : Information mutuelle temporelle en fonction de la moyenne de l'entropie cellulaire sur un grand nombre de parcours de l'espace des règles. Extraits de [25].

Néanmoins, ces résultats ne sont pas non plus entièrement satisfaisants :

- On ne retrouve un comportement suggérant une transition de phase qu'en terme d'allure. En particulier, il est impossible de donner une valeur précise de  $\lambda$  pour laquelle la transition a lieu quelle que soit la règle.
- Du point de vue de la théorie des transitions de phase, on constate d'une part une discontinuité des mesures en fonction de  $\lambda$ , et d'autre part une divergence des temps de transition. Ces deux observations ne sont pas compatibles en général car la première est caractéristique des transitions sans phénomène critique, alors que la seconde est indicative d'une divergence des échelles spatio-temporelles qui en est typique.

De plus, on peut soulever un certains nombres de complications plus ou moins explicites liées à des choix dans le protocole expérimental :

- Les conditions initiales (20 cellules actives dans un environnement quiescent).

<sup>4</sup>Cette grandeur est normalisée de manière à ce qu'elle évolue entre 0 et 1.

- Les procédures de constructions des règles, qui contiennent une part d'arbitraire.
- Le fait que les corrélations ne soient nettes que pour des valeurs de  $k$  et  $\Theta$  assez élevées. Particulièrement, on imagine que pour les automates où  $k = 2$ , puisque les deux états ont un rôle symétrique, on devrait vraisemblablement retrouver un comportement régulier près de  $\lambda = 1$ .

Ce paramètre ne permet donc pas de mettre en évidence une transition de phase au sens strict de la physique : il n'existe pas une valeur de  $\lambda$  en-dessous de laquelle on peut affirmer que le système est dans une certaine phase et au-delà de laquelle il est dans une autre.

### Tentative de validation à l'aide d'algorithmes génétiques

Packard, qui a collaboré avec Langton sur ces sujets, propose une manière de tester l'hypothèse expérimentalement ([31]). Sur une tâche de calcul précise : la détermination de la densité d'un état décrite en 1.5.4, il utilise un algorithme génétique\* pour montrer qu'il existe une corrélation entre les automates efficaces pour exécuter cette fonction et les règles proches de la transition au sens de  $\lambda$ .

Mais Mitchell et al. mettent en évidence ([30]) que l'on ne peut pas tirer de conclusion de ces travaux. Selon eux, cette tâche précise amène préférentiellement à des automates de  $\lambda = 1/2$ , ce que l'on peut comprendre à l'aide d'un argument de symétrie : comme les deux états jouent le même rôle relativement à l'objectif fixé, il est raisonnable que les règles efficaces respectent également cette symétrie<sup>5</sup>. De plus il existe un biais statistique fondamental dans cette approche : le nombre absolu de règles augmente pour des valeurs de  $\lambda$  intermédiaires. L'observation de Packard serait alors plus probablement une erreur d'interprétation d'un produit de la dérive statistique qu'une réelle corrélation entre capacité de calcul et criticalité du  $\lambda$ .

On pourrait penser que la méthodologie reste néanmoins intéressante pour valider le rapport entre une observable et les capacités de calcul. Mais [30] et [12] mettent en question ce type d'approche pour valider l'intuition de Langton : il ne s'agit pas d'une simple marche aléatoire dans l'espace des règles mais d'un déplacement dans un paysage d'adaptation complexe : le principe-même de cibler une tâche biaise la marche, et le biais prend visiblement des formes très différentes selon la nature de la tâche<sup>6</sup>.

---

<sup>5</sup>L'étude est en fait plus délicate car il faut également prendre en compte des effets qui vont au contraire dans le sens d'une diminution de l'efficacité des algorithmes très près de  $\lambda = 1/2$ .

<sup>6</sup>Le problème soulevé ici est central pour une large gamme de domaines scientifiques, en effet, il touche à une difficulté inhérente aux procédures d'optimisation : si on se déplace dans un paysage complexe à la recherche du maximum d'une certaine fonction, il est fréquent de rester piégé dans

Cette observation est fondamentale pour le problème qui nous intéresse, car elle permet de comprendre que l’optimisation réalisée n’est pas une optimisation vers *toute* propriété de calcul, mais vers *la* propriété spécifique qui sert de mesure à l’adaptation pour l’algorithme. C’est un indice qui montre l’ambiguïté que cachent les termes de “phase complexe” ou de “bord du chaos” : ils recèlent une grande diversité de propriétés ; si elle existe, il faudrait pouvoir décrire le contenu de cette phase.

### **Tentative de développement vers la description de l’espace des règles**

Ces travaux ont été prolongés par des collaborateurs de Langton ; nous faisons ici l’étude critique de ces développements, particulièrement intéressants à nos yeux notamment parce qu’on y trouve formulées de manières plus explicites les positions épistémologiques qui sous-tendent l’hypothèse de bord du chaos.

L’examen mené dans [27] confirme que dans la majorité des cas, lorsque l’on se déplace dans l’espace des règles en augmentant progressivement  $\lambda$ , l’entropie du système subit une discontinuité relativement nette, conformément aux simulations de Langton cités précédemment. Toutefois, pour certains chemins, la discontinuité est moins évidente et la transition presque lisse.

Pour justifier cette observation, Li et al. proposent alors que la situation soit analogue à celle du changement d’état liquide-gaz en thermodynamique : en général, la transition est du premier ordre, elle est alors accompagnée d’une discontinuité de certaines observables (l’entropie thermodynamique, l’enthalpie ...). C’est le même type de discontinuité qu’on observerait sur l’entropie (de Shannon) des automates. Cependant, la transition vaporisation-liquéfaction possède un point critique, c’est-à-dire que pour certaines valeurs des variables thermodynamiques, elle devient du second ordre. De même, pour un certain choix de  $\lambda$  et d’autres variables encore indéterminées, la transition ordre-chaos des automates deviendrait critique, ce qui expliquerait l’observation de chemins sans discontinuité. D’autres éléments sont présentés dans [27] pour corroborer l’analogie avec le comportement qualitatif des observables thermodynamiques : par exemple la divergence de l’information mutuelle spatiale pourrait être rapprochée de la divergence de la capacité calorifique de la transition liquide-gaz.

Les auteurs suggèrent alors que  $\lambda$  est un paramètre approprié pour décrire la transition, mais pas suffisant. De même que la localisation de la vaporisation peut se faire à l’aide de la température et de la pression, et pour une certaine valeur du couple de variables, la transition est critique ; ici, il existerait un (ou des) paramètre(s)

---

un maximum local qui peut être très différent et éloigné du maximum global (sur cette question : [38]).

encore inconnu(s) qui pourrai(en)t composer avec  $\lambda$  un crible de l'espace des règles et qui permette de localiser précisément la frontière entre les phases, et c'est cette frontière qui est le siège des comportements complexes intéressants, ce que résume le schéma 2.5.

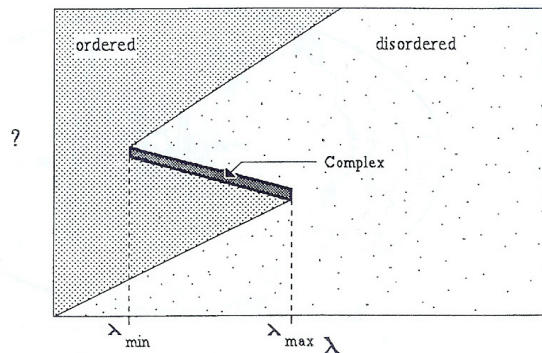


FIG. 2.5: Représentation schématisée de l'espace des règles selon Li et al [27]. Le paramètre en ordonnée '?' restant inconnu. La zone sombre correspond aux automates cellulaires complexes, dont les comportements seraient dans la classe IV de Wolfram.

Nous comprenons d'après ce schéma que la conjecture du bord du chaos est ici interprétée dans un sens fort : les 4 hypothèses précédentes (existence, unicité, caractérisation, constructibilité) sont acceptées. En effet, les auteurs assimilent les comportements complexes à une zone clairement délimitée de l'espace des règles et située entre deux phases bien identifiées (ordre-désordre). Et de la même façon qu'on peut donner une équation à la courbe de vaporisation dans l'espace (P,T) en thermodynamique, ils suggèrent que cette région puisse être décrite "simplement" - par exemple comme un volume connexe - si l'espace est bien paramétré.

L'objectif de l'étude de Li et al. reste la localisation d'automates capables de calculs ; reprenant une idée énoncée précédemment ([34, 25, 31]), les auteurs cherchent cette propriété par l'aptitude à créer des structures étendues dans l'espace cellulaire. Ils soutiennent qu'un bon indicateur statistique de cet attribut serait un haut niveau d'information mutuelle spatiale, c'est l'argument qui leur permet d'associer la zone de transition à la phase 'complexe'.

Mais nous pensons que cette procédure illustre une faiblesse non-résolue des approches dans la lignée de celles de Langton ; un indice tel que l'information mutuelle spatiale nous semble insuffisant : quelles sont les possibilités de définition du bord du chaos à partir de cette seule mesure ? Ce que nous pouvons imaginer, à défaut de mieux, serait de fixer un seuil d'information mutuelle au-delà duquel on peut considérer l'automate complexe. Cela serait très arbitraire, d'autant qu'on ne sait

pas si l'échantillon de réalisations choisi est représentatif ou non. Nous en concluons que, comme dans les travaux de Wolfram, le défaut du raisonnement est le flou autour de la définition de la propriété de complexité, censée caractériser la classe IV.

### 2.2.2 La paramétrisation $Z$

Les observations sur  $\lambda$  peuvent suggérer que des méthodes telles que celles employées par Langton sont très incertaines. Elles s'appuient sur l'intuition d'une correspondance conceptuelle entre deux domaines (en l'occurrence les concepts communs sont l'ordre et le chaos) et non sur une correspondance rigoureuse entre les éléments mathématiques intervenant dans l'un et l'autre domaines (qu'est-ce que la température pour l'automate ? etc...).

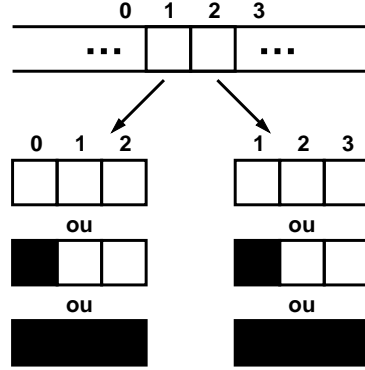
Nous dirons que l'organisation de l'espace des règles se fait ici "par l'extérieur" : c'est un raisonnement sur l'interprétation du système qui guide les choix. L'approche proposée par Andrew Wuensche ([37]) est au contraire une construction "par l'intérieur" : la paramétrisation choisie est en fait un sous-produit d'un algorithme étroitement lié au comportement dynamique du système.

### Procédure expérimentale

La procédure de Wuensche vise en premier lieu à reconstruire le portrait de phase complet. Même si des généralisations sont imaginables, l'algorithme principal est plus simple à décrire dans un espace à une dimension et deux états. Considérant une configuration de l'espace cellulaire à un instant  $t$  et connaissant la règle de l'automate, on cherche à retrouver la configuration à l'instant précédent. On balaye alors l'espace soit de gauche à droite soit de droite à gauche et pour chaque cellule on construit toutes les possibilités de configurations qui pourraient être antécédents. On fait de même pour la cellule suivante, en ne retenant que les configurations compatibles et ainsi de suite.

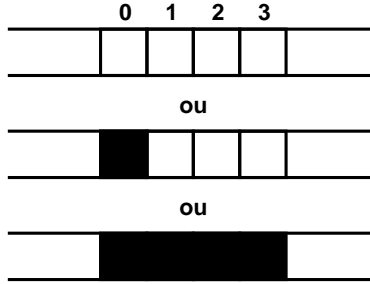
Donnons une illustration du fonctionnement de cet algorithme pour l'automate 110 :

- à  $t$ , on suppose que les cellules 1 et 2 sont dans l'état 0 (représenté par une cellule blanche).



- l'état de la cellule 1 à  $t$  impose à  $(t-1)$  d'avoir le triplet de cellules (0,1,2) parmi 000, 100 et 111. De même, l'état de la cellule 2 impose les mêmes possibilités pour le triplet antécédent (1,2,3).

Les seuls quadruplets de cellules (0,1,2,3) à  $(t-1)$  compatibles avec ce qui précède sont alors :



Une fois que tout l'espace cellulaire est parcouru, on aura donc enregistré les configurations complètes de l'espace qui peuvent avoir créé la configuration à l'instant  $t$ . En procédant ainsi pour toutes les configurations possibles, on peut construire le portrait de phase dans sa totalité. Mais comme on l'a dit précédemment, sauf dans des cas extrêmement simples, il n'est pas possible de le faire. Ainsi le portrait de phase complet construit par Wuensche (fig 1.1) concernait les automates à deux états sur un espace cellulaire de seulement 16 cellules (et donc  $2^{16} = 65536$  configurations).

Par définition,  $Z$  est la probabilité pour qu'au cours du balayage la cellule suivante soit déterminée sans incertitude. Il ne s'agit pas là d'une mesure expérimentale, mais de la probabilité théorique sur toutes les chaînes d'états possibles pour que l'algorithme donne la valeur de la cellule suivante sans ambiguïté. En fait une telle définition correspond à deux valeurs :  $Z_{\rightarrow}$  et  $Z_{\leftarrow}$ , selon qu'on parcourt l'espace vers la droite ou la gauche, Wuensche définit  $Z$  comme le maximum de  $\{Z_{\rightarrow}, Z_{\leftarrow}\}$ . Et  $Z$  est alors calculable depuis la seule table des règles, son expression n'est pas reproduite ici, mais elle peut être trouvée dans [37].

Un  $Z$  proche de 0 correspond alors à une situation de convergence rapide de la dynamique : beaucoup d'états sont susceptibles de produire la chaîne de cellules

examinée, l'arbre de transition associé serait "touffu". À l'inverse un  $Z$  proche de 1 signifie que la structure du graphe de transition est très linéaire, les dynamiques convergent nécessairement puisque cette approche pratique n'a de sens que sur des espaces finis, mais dans cette limite la convergence ne tient qu'à ce caractère fini, les comportements associés sont chaotiques.

L'interprétation du paramètre  $Z$  est moins intuitive que celle du  $\lambda$  de Langton, en revanche, il semble que  $Z$  puisse être plus performant pour contrôler la transition, puisqu'il est par définition étroitement lié à la dynamique. Cependant l'étude menée par Wuensche ne suit pas une méthode analogue à celle de Langton, ce qui limite les possibilités de comparaison. En particulier, il n'y a pas de marches dans l'espace des règles paramétrées par  $Z$  pour les corrélérer aux mesures statistiques. On trouve néanmoins une comparaison des deux coefficients<sup>7</sup>, sur la mesure de la densité du Jardin d'Eden, qui semble indiquer que  $Z$  permet de cibler un comportement dynamique avec une précision supérieure à  $\lambda$  (cf. fig 2.6).

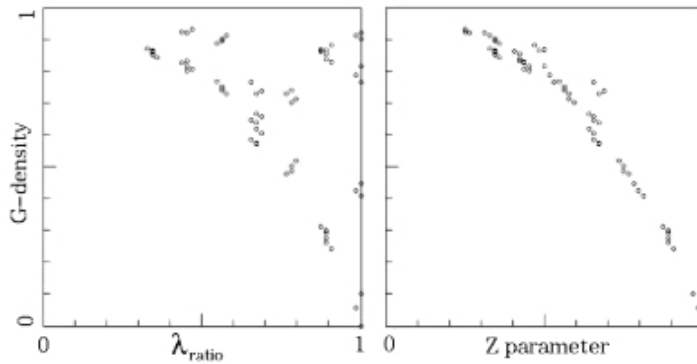


FIG. 2.6: Densité du Jardin d'Eden en fonction du paramètre  $\lambda$  normalisé (gauche) et  $Z$  (droite) - extrait de [37].

## Évolution du point de vue

Dans ces travaux, l'auteur ne défend pas d'hypothèse particulière (comme le bord du chaos), la question de découpages de l'espace en phases n'est pas évoquée, la réalisation de calcul à l'aide d'automates n'est pas explicite, même s'il est question de la génération de glisseurs (cf. lexique à Jeu de la Vie) dont on va voir qu'elle n'y est pas étrangère.

<sup>7</sup> $\lambda_{ratio}$  est une version normalisée pour  $k = 2$  de  $\lambda$ , de manière à ce que le comportement de l'automate varie de l'ordre ( $\lambda_{ratio}=0$ ) au chaos ( $\lambda_{ratio}=1$ ); alors que pour  $\lambda$  variant de 0 à 1, l'évolution se fait selon 'ordre-chaos-ordre', ce qui est un artefact consécutif à la symétrie des états 0 et 1.

Autre élément qui les distingue assez nettement des approches précédemment citées, on ne se focalise pas ici sur l'attracteur de la dynamique, c'est le régime transitoire lui-même qui importe, plutôt que le comportement asymptotique. Néanmoins - comme l'indique le titre de l'étude [37] - il est toujours question de classer les règles et pas seulement les dynamiques. Et sur ce point, les méthodes restent du même type : tracer des mesures statistiques (en l'occurrence l'entropie et la dispersion de l'entropie en fonction du temps), en suggérant que certaines valeurs de ces observables devraient correspondre à des comportements majoritairement de tel ou tel type, mais selon les termes de l'auteur, c'est une identification subjective (voir figure 2.7).

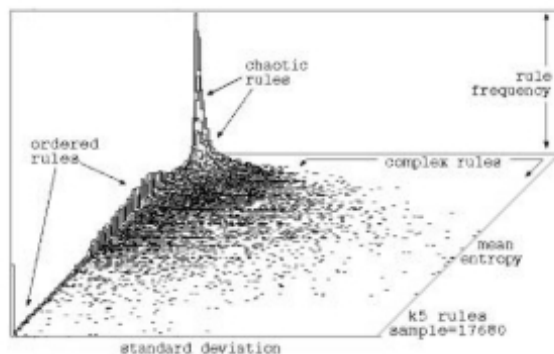


FIG. 2.7: Fréquences des règles selon la moyenne et l'écart quadratique de l'entropie ( $k = 2$ ,  $\Theta = 5$ ) et classification - extrait de [37].

Ces études sont postérieures à celles de Langton et al. : elles datent de la fin des années 90. Par comparaison, elles donnent une bonne indication de l'évolution des problématiques dans le domaine : il s'opère un retour à des questions plus concrètes comme construire l'espace des phases, étudier les régimes transitoires, et pratiquement cela se traduit par une réorientation vers l'aspect algorithmique du problème.

## 2.3 Limites à la superposition de l'universalité et de la classe 4

Précisons d'abord en quelques mots une interprétation possible que nous pensons abusive de l'hypothèse de la classe IV. Nous ne croyons pas que tous ces auteurs soient à la recherche d'une "phase de l'universalité", au sens où toute règle y serait universelle et toute règle universelle y serait située : cette hypothèse est en effet trop forte et nécessairement fausse. Cela serait en contradiction avec le caractère



indécidable de la propriété de calculabilité, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'algorithme capable de répondre systématiquement à la question "est-ce que telle règle définit un automate cellulaire Turing-universel?" ; en effet s'il existait un petit nombre de paramètres dont la donnée suffit à dire si l'automate est universel ou non, un tel algorithme serait immédiat. En revanche, cela n'exclue pas la possibilité que ces automates soient présents avec une probabilité élevée dans une certaine région réduite de l'espace des règles, ce qui faciliterait leur localisation.

Dans cette partie, nous donnons des références qui fournissent de nouvelles contraintes à prendre compte si l'on cherche à cibler les propriétés de calcul au moyen de classes décrites par Wolfram ; en particulier nous examinons les questions soulevées par l'idée d'une frontière nette entre des comportements chaotiques et l'apparition de propriétés émergentes.

### 2.3.1 Calculabilité dans la classe III

#### Conditions initiales et coexistence de phases

Nous avons évoqué le fait que les critères proposés par Wolfram prennent en considération l'état asymptotique d'une dynamique, et qu'il n'est pas trivial de déduire une classification des règles d'automates depuis un échantillon de comportements dynamiques.

Dans [1], on trouve un exemple frappant des difficultés associées à cette observation. Les auteurs montrent que pour tout couple de rationnels  $p$  et  $q$  tels que  $0 \leq p, q \leq 1$  et  $p + q = 1$ , il existe un automate  $A_{p,q}$  tel que selon la condition initiale (finie), il ait une probabilité  $p$  d'être de classe III et  $q$  de classe IV, selon le critère du taux de croissance présenté en 1.2.2. Ces automates ne sont sans doute pas fréquents, mais comment les classer ? On comprend qu'il n'existe sans doute pas de frontière naturelle<sup>8</sup> nette entre les deux classes.

Remarquons qu'il n'est pas exclu a priori que le passage à la limite d'un espace cellulaire infini fasse disparaître cette difficulté. Mais nous reviendrons en détails sur ce problème qui motive la construction de classifications plus solides (cf. 2.4).

#### Des machines de Turing universelles dans le chaos

Dans le même ordre d'idée, plusieurs études suggèrent que c'est au sein même d'évolutions chaotiques que peuvent émerger les propriétés de calcul.

Des observations d'automates au comportement majoritairement de classe III indiquent qu'ils peuvent être capables de réaliser des calculs voire d'être Turing-universel. En effet l'apparence chaotique de certaines dynamiques peut masquer

---

<sup>8</sup>Au sens où l'on aurait une idée intuitive de la classe dans laquelle il faut placer l'automate.

l'existence de motifs complexes que certains auteurs ont tenté d'étudier sur des cas particuliers. Boccara et al. avaient remarqué l'émergence d'une dynamique complexe, sous la formes de particules se propageant, entrant en collision et générant de nouvelles structures cellulaires ([4]) ; ces objets étaient alors observés dans des automates cellulaires à une dimension que Wolfram rangeait dans sa classe III. Nous reviendrons plus précisément à ce type de description des automates en 3.2.1, en décrivant la mécanique computationnelle. Cela soutient le point de vue de certains auteurs selon lequel le regroupement des classes III et IV serait légitime ([5, 1]).

Un autre exemple, de nature plus théorique, mais à nos yeux plus explicite encore : Dhar et al. ([15]) insèrent une machine de Turing universelle dans des automates de diverses formes et notamment de classe III<sup>9</sup>.

Nous l'interprétons comme une preuve que s'il est possible de regrouper dans une classe les automates universels, la seule observation expérimentale des comportements dynamiques n'est pas suffisante pour le faire. Et c'est l'occasion de revenir à une remarque que nous faisons en 1.1.2 sur le caractère subjectif des études d'allures, l'apparence de l'évolution dynamique peut être trompeuse : ce que l'observateur se serait tenté d'interpréter comme un comportement chaotique peut s'avérer riche en information avec des outils d'analyse appropriés.

### 2.3.2 Discussion autour de l'hypothèse de bord du chaos

L'étude que nous venons de mener conduit à l'idée que peu d'éléments soutiennent l'hypothèse de bord du chaos, dans le sens d'une phase de l'espace des règles. Mais un autre point de vue consiste à considérer le bord du chaos comme une frontière ; c'est dans cette perspective que se situent Hugues Chaté et Paul Manneville dans [8], et nous la décrivons brièvement dans ce paragraphe.

En effet, si l'on fixe la valeur de  $k$ , le nombre de règles de l'espace est toujours fini, celui-ci a une certaine granularité ; si maintenant on s'autorise à faire varier le nombre d'états des automates, on étudie alors un espace plus général contenant toutes les règles pour toutes les valeurs possibles de  $k$ .

En utilisant une fonction continue comme guide à la construction systématique d'automates cellulaires déterministes (dont on peut faire varier le nombre d'état), les auteurs peuvent se placer à une distance arbitrairement proche du seuil où doit apparaître la transition<sup>10</sup>. Ils montrent alors qu'on peut effectivement passer de régimes réguliers à des régimes chaotiques en traversant une surface qu'ils qualifient de critique, car le comportement des automates lorsqu'on s'en approche satisfait les

---

<sup>9</sup>D'ailleurs, des auteurs montrent de manière plus générale que les systèmes dynamiques - éventuellement chaotiques - peuvent être associés à des classes de calculateurs ([32]).

<sup>10</sup>Le seuil est ici imposé par la fonction continue sur laquelle est construite l'automate.

critères de criticalité au sens de la physique statistique (comme la divergence des temps caractéristiques de transition, la distribution en loi de puissance de tailles des motifs ...).

Dès lors que l'idée de phase est remplacée par celle de frontière, les questions d'unicité ou de caractérisation ne se posent plus ; en revanche cela ne résout pas le problème de la localisation de la propriété d'universalité par rapport à cette surface critique.

Dans ce qui précède, on a pu se rendre compte à quel point l'absence de définitions strictes sur les domaines de l'espace des règles empêchait toute construction d'un cadre précis à une analogie avancée. Il devient alors nécessaire de traduire rigoureusement les dynamiques décrites qualitativement par Wolfram pour clarifier l'objectif poursuivi.

## 2.4 D'autres classifications

Nous exposons dans cette partie des systèmes de classifications plus précis que celui de Wolfram, mais construits dans le but d'en conserver l'idée essentielle : l'opposition entre des comportements réguliers et chaotiques. Pour chacune, nous en expliquons le principe, puis nous discuterons brièvement l'intérêt et les limites de ces propositions. Précisons que la revue ci-dessous ne suit pas l'ordre chronologique, et qu'elle n'est pas exhaustive, d'autant que le sujet fait l'objet d'une recherche contemporaine active.

### 2.4.1 Classification de Braga et al.

La classification de Braga et al. ([5]) a inspiré la remarque de Baldwin citée en 1.2.2 : les dynamiques d'automates partant d'états q-finis ne peuvent évoluer que selon quatre possibilités. Les trois classes de ce système (noté B) sont construites selon la version primitive de cette idée :

1. Toutes les configurations tendent vers l'état uniformément quiescent.
2. Toutes les configurations tendent vers l'état uniformément quiescent, excepté pour une région bornée de l'espace.
3. Il existe au moins une configuration qui s'étend indéfiniment.

Cette classification présente l'avantage d'être décidable - les auteurs proposent une méthode qui permet de déterminer la classe à partir de la seule règle, pour les ACE. On perçoit en revanche aussi son défaut majeur : elle repose sur une idée que nous pourrions qualifier de "tout ou rien" : si une seule configuration s'étend

indéfiniment, l'automate est 3-B, or la propriété d'universalité peut émerger d'une règle de classe III (qui contient 3-B), en conséquence des règles que nous cherchons sont localisées dans une classe très vaste comprenant aussi des règles totalement chaotique. Cela explique que Braga et ses collaborateurs eux-mêmes estiment que cela ne peut être qu'un point de départ à une analyse plus poussée<sup>11</sup>.

### 2.4.2 Classification de Culik et Yu

La classification de Karel Culik II et Sheng Yu ([13]) - qu'on notera CY - est construite pour les configurations q-finies. Elle est présentée par commodité sous forme hiérarchique, chaque classe  $i$  étant incluse dans la classe  $i + 1$  :

1. Toutes les configurations (q-finies) vont à l'état quiescent.
2. Toutes les configurations sont finalement périodiques.
3. Connaissant une configuration  $a$  et une configuration  $b$ , la question de savoir si on peut atteindre la configuration  $b$  en partant de  $a$  est décidable.
4. La dernière classe contient tous les automates.

Cette hiérarchie est une des plus commentées, peut-être parce qu'elle cherche à donner des contours bien déterminés à la classification de Wolfram. En effet la classe I pourrait correspondre à la 1-CY, la classe II à 2 privée de 1. En ce qui concerne la classe 3-CY, les auteurs affirment qu'un automate y appartenant ne peut pas être universel, et nous pensons en fait que la définition de la classe 3-CY a pour but d'exclure les automates qui ne sont pas des calculateurs universels, de manière à ce que ceux-ci soient tous en 4-CY. Mais cette démonstration est mise à défaut dans [1] ; [28] explique même pourquoi l'ACE 110, dont on sait qu'il est universel ([35, 9]), est 3-CY.

De plus, même si cette preuve était correcte, Culik et Yu démontrent que la question de savoir à laquelle de ces classes appartient un automate est elle-même indécidable : on ne peut pas espérer disposer d'un algorithme (et encore moins d'une formule simple) qui permette de déduire d'une simple règle sa classe CY. L'étude [13] est donc un argument en faveur d'une limite essentielle à l'objectif de classification des automates que Wolfram propose de poursuivre : le caractère indécidable des propriétés dynamiques recherchées suggère qu'aucune classification ne puisse apporter une entière satisfaction - hypothèse également défendue dans [1].

---

<sup>11</sup> “[The classification] could be refined to better suit Wolfram’s observations about pattern behavior. However, we take it as a good starting point for the analysis of pattern growth in CAs.”

### 2.4.3 Classification d'Ishii

La classification de Shin'ichirou Ishii [21] porte sur des automates partant de configurations infinies quelconques. Pour ce faire, et selon le principe évoqué en 1.2.2, l'auteur donne un sens précis à la formulation de trajectoires 'presque toutes' régulières. Cela est rendu possible en utilisant l'idée de mesure de probabilité  $\mu$  sur l'ensemble des configurations ; on ne développera pas ici la définition d'une mesure sur un espace de ce type, mais on peut en comprendre les grandes lignes en disant que  $\mu \in [0; 1]$ , que  $\mu(E) = 0$  pour un ensemble  $E$  dont les éléments sont rares dans l'ensemble - ça sera par exemple le cas d'un ensemble de taille finie, et que  $\mu(E) = 1$  signifie que les éléments de  $E$  sont au contraire fréquents dans l'ensemble complet, i.e. que les éléments qui ne sont pas dans  $E$  forment un ensemble de mesure nulle.

La classification (I) est alors définie selon :

1. Pour presque toutes les configurations initiales, les trajectoires évoluent vers une configuration homogène en un temps fini.
2. Pour presque toutes les configurations initiales, les trajectoires évoluent vers un attracteur cyclique en un temps fini.
3. Pour presque toutes les configurations initiales, les trajectoires évoluent vers un attracteur cyclique.
4. Pour presque toutes les configurations initiales, les trajectoires n'évoluent pas vers un attracteur simple.

De notre point de vue, la simplicité de cette classification n'en compense pas le défaut principal : la classe 4-I est très large, elle regroupe tous les automates dont le comportement n'est pas très majoritairement régulier, - qui sont de toutes façons assez facile à identifier par une simple observation. Nous comprenons que lever l'ambiguïté sur le 'presque partout' suffit à construire une partition de l'espace des règles, mais pas à ce que celle-ci nous soit directement utile.

Par ailleurs, comme expliqué dans [28] sur des exemples d'ACE ou d'automates relativement simples, chacune des classifications qui précèdent n'est pas satisfaisante car elles présentent des défauts vis-à-vis de l'intuition que l'on peut avoir de la notion de complexité. Un exemple simple et souvent évoqué est celui du décalage (*shift*), i.e. une simple translation de la configuration : cette règle qu'intuitivement on associerait à un comportement régulier - puisqu'aucune information n'est créée - est rangée dans 3-CY. La classification d'Ishii classe le décalage dans 2-I, mais s'avère défailante pour d'autres automates : 210, qu'on peut voir comme une règle périodique composée avec un décalage, devrait être considérée comme régulière hors elle est classée 4-I.

#### 2.4.4 Classifications issues de la théorie ergodique

Enfin d'autres systèmes de classification sur un espace infini font l'objet de recherches contemporaines, ils sont associées à la théorie ergodique : ils s'appuient sur la définition d'une distance dans l'espace des configurations, ce qui permet d'introduire une description de comportements dynamiques plus élaborée. Leur présentation nécessite alors la définition d'un certain nombre de notions mathématiques non-triviales.

Nous expliciterons d'abord la notion d'attracteurs de l'espace des configurations, puis nous exposerons la classification de Hurley, qui en fait usage. Après avoir défini des moyens pour caractériser les effets des perturbations sur le système, nous les utiliserons pour décrire la classification de Gilman. Enfin nous ferons un court commentaire de ces systèmes, bien que notre description dans cette partie reste assez superficielle, car ces classifications exigent des connaissances poussées en topologie.

Les définitions utiles peuvent être trouvées dans de nombreux ouvrages, nous utilisons surtout [17] et [23] ; de plus pour éviter d'avoir à préciser des détails qui ne nous semblent pas essentiels pour comprendre l'idée directrice des classifications, il y a dans cette partie des renvois vers le lexique.

##### Distance

De même qu'en physique, on utilisera la notion de distance (euclidienne) afin de caractériser les trajectoires d'un système dynamique les unes par rapport aux autres ; les définitions qui suivent nécessitent l'introduction d'une distance, notée  $d$ , dans l'espace  $\mathcal{X}$  des configurations de l'automate ;  $d(x, y)$  désignera alors la distance entre les trajectoires  $x$  et  $y$ . Formellement, une **distance** est une fonction qui sert à mathématiser l'idée d'éloignement entre deux éléments d'un ensemble, à cette fin elle doit satisfaire trois propriétés :

- $\forall x, y \in \mathcal{X}, d(x, y) = d(y, x)$
- $\forall x, y \in \mathcal{X}, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $\forall x, y, z \in \mathcal{X}, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

##### Attracteurs, quasi-attracteurs

Nous avons déjà décrit dans des termes assez intuitifs ce que peut être un attracteur : une partie de l'espace des phases vers laquelle évolue le système dynamique. Plus précisément, l'ensemble  $\mathcal{Y}$  sera un **attracteur** s'il existe un ensemble  $\mathcal{U}$  tel

que  $\mathcal{Y}$  soit l'ensemble limite des configurations de l'adhérence\* de  $\mathcal{U} : \overline{\mathcal{U}}$ . Un ensemble (non-vide) sera un **quasi-attracteur** si c'est une intersection dénombrable d'attracteurs, mais pas un attracteur. Enfin l'ensemble sera un attracteur (ou quasi-attracteur) **minimal** si on n'y trouve pas de sous-ensemble qui soit un attracteur (ou quasi-attracteur).

### Classification de Hurley

Avec ces définitions, Mike Hurley démontre ([20]) qu'il est possible de construire une partition (H) de l'espace des règles selon :

1. L'automate admet un unique attracteur minimal.
2. L'automate admet un unique quasi-attracteur minimal.
3. L'automate admet un couple d'attracteurs disjoints et dans ce cas admet une quantité indénombrable d'attracteurs minimaux.

Un tel système de classification pourrait être approprié dans le but d'affiner la description que donne Wolfram, puisque celle-ci était avant tout construite pour préciser l'état asymptotique du système. Nous voyons ainsi que cette classification distingue les automates qui ont des comportements variés en fonction des conditions initiales, de ceux qui produisent des comportements toujours du même type (1-H) et dont nous n'attendons pas qu'ils puissent produire des comportements complexes. Mais le cadre proposé par ce type de classification est là encore trop large : autant que nous puissions en juger, nous ne voyons pas apparaître de parallèle clair avec l'universalité recherchée<sup>12</sup>.

### Stabilité de Lyapunov et expansivité

La notion de **stabilité** au sens de Lyapunov - ou équicontinuité - revient à se demander si les points situés au voisinage d'un point particulier d'un système dynamique restent proches au cours de l'évolution. Formulé mathématiquement, la configuration  $x$  sera qualifiée de stable si et seulement si à tout  $\epsilon > 0$ , on peut associer  $\delta$  tel que :

$$\forall y \in \mathcal{X}, \{d(x, y) < \delta \Rightarrow \forall t \in \mathbb{N}, d(\gamma_x(t), \gamma_y(t)) < \epsilon\}$$

Où  $\gamma_x(t)$  désigne la trajectoire associée à la configuration  $x$  à un instant  $t$ . En pratique, cela revient à dire que l'on peut toujours trouver une configuration  $y$  suffisamment proche de  $x$  pour que les trajectoires restent arbitrairement proches l'une de l'autre. Le système dynamique lui-même sera stable si toutes ses orbites

---

<sup>12</sup>Petr Kurka propose une première amélioration de ce système de classification dans [23].

sont stables ; et la contraposée logique de cette formulation définit l’instabilité d’un point. Un système dynamique dont toutes les orbites sont instables est lui-même instable.

Un système dynamique est **expansif** si et seulement si :

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in \mathcal{X}, x \neq y, \exists t \in \mathbb{N} \text{ tel que } d(\gamma_x(t), \gamma_y(t)) \geq \epsilon$$

Dans ce cas, toutes les configurations ont des trajectoires qui se sépareront d’au moins  $\epsilon$  au cours de l’évolution.

### Classification de Gilman

La classification proposée par Robert Gilman ([18]), et notée G, répartit les automates en trois ensembles disjoints, associés aux idées que nous venons de définir :

- L’automate est équicontinu en certains points.
- L’automate est équicontinu presque partout mais n’est pas dans A.
- L’automate est expansif presque partout.

La notion de ‘presque partout’ est à comprendre dans un sens analogue à celui que nous évoquions pour la classification d’Ishii.

Nous pouvons alors faire la même observation que pour la classification de Hurley qui précède : il existe un parallèle avec les problèmes de calcul : par exemple, la classe 1-G est associée aux automates qui produisent des “murs”<sup>13</sup>, ce n’est donc pas là qu’on cherchera d’éventuelles propriétés de calcul où le transport d’information est nécessaire. Mais la correspondance entre la question de la classification et celle de l’universalité est encore trop sommaire pour que nous puissions l’utiliser. Elle donne d’ailleurs lieu à des systèmes de classification plus récents comme celui de Cattaneo et al. ([7]), ou un de ceux que Kurka compare ([23]) que nous ne développerons pas, mais qui s’inscrivent dans la même perspective.

Par ailleurs, nous imaginons qu’une classification de cet ordre qui pourrait être plus riche en information pour les problèmes de calcul ferait intervenir l’idée de sensibilité aux conditions initiales\*, car celle-ci nous semble cohérente avec la génération de motifs complexes, à longue durée de vie.

### Distance dans l’espace des configurations

Nous n’avons pas précisé jusqu’à présent quelle distance utiliser, les classifications proposées étant utilisables quelle que soit  $d$ . Pourtant le choix de celle-ci n’est pas indifférent, comme nous l’expliquons ici.

---

<sup>13</sup>des parois qui empêchent la propagation d’information d’une partie à une autre de l’espace cellulaire



Pour un espace cellulaire fini, la distance de Hamming, i.e. le nombre de cellules dans un état différent entre les deux configurations, est de très loin la plus usitée. Sur un espace infini, il devient nécessaire de construire des métriques moins intuitives, celle de Cantor  $d_C$  semble d'usage assez courant :

$$d_C(x, y) = 2^{-n}, \quad n = \inf \{|i| \text{ tel que } x(i) \neq y(i)\}$$

$x(i)$  désignant la  $i^{\text{eme}}$  cellule de la configuration  $x$  qui est donc numérotée sur  $\mathbb{Z}$ .

Mais cette distance n'accorde pas le même rôle à toutes les cellules : elle dépend de la cellule choisie comme origine. Outre le fait qu'une telle métrique varie avec une translation de l'espace cellulaire - ce qui entraîne une mauvaise classification du décalage auquel nous avons fait référence en 2.4.3 - ce point de vue entre en conflit avec la question spécifique qui nous occupe : nous souhaiterions utiliser l'automate comme calculateur parallèle, et donc ne pas privilégier certaines cellules de l'espace. En apparence au moins, l'objectif poursuivi dissuade d'employer la métrique de Cantor et donc les systèmes de classification qui l'utilisent.

Signalons que d'autres auteurs proposent des pseudo-métriques\* alternatives [2, 7], qui accordent le même poids à chaque cellule, mais semblent soulever d'autres problèmes théoriques que nous n'approfondissons pas ici.

### 2.4.5 Discussion critique

Ces classifications présentent l'avantage de reposer sur un formalisme rigoureux, mais ne fournissent pour l'instant que peu d'indices pour l'usage pratique qui nous occupe : où rechercher les automates qui pourraient présenter des comportements émergents utilisables pour le calcul ?

Nous pensons que ces approches, et en particulier les plus récentes qui touchent à la théorie ergodique, pensent le problème à une échelle différente de celle de Wolfram : nous constatons par exemple dans [28] que la préoccupation première de l'auteur est l'accord entre les classes mathématiques définies et la compréhension intuitive des concepts. Ainsi, il attend d'une 'bonne' classification qu'elle ne range pas la translation avec des automates au comportement complexe. Notre impression est qu'il s'agit de construire un cadre théorique général, et l'ampleur de ce travail est telle qu'il s'est détaché des questions qui lui ont donné naissance (parmi celles-ci, la recherche de propriétés de calcul). Nous serions donc en train d'assister à un phénomène de spécialisation d'une thématique scientifique.

Au regard de la distance qui semble séparer ces classifications de ce à quoi nous voulons les employer ici, la question de la construction d'une classification rigoureuse inspirée de celle que proposait Wolfram il y a vingt-cinq ans ne nous paraît plus être le meilleur chemin pour localiser les propriétés de calcul dans l'espace des règles.

D'autres auteurs trouvent plus pertinent de s'attacher à définir et localiser les objets émergents responsables du calcul ; à notre sens, cette position peut être plus fructueuse et explique a posteriori l'évolution disciplinaire que nous discutons, ce que nous allons développer à l'occasion du chapitre suivant.

# Bibliographie

- [1] J.T. Baldwin and S. Shelah. On the classifiability of cellular automata. *Theoretical computer science*, 230(1-2) :117–129, 2000.
- [2] F. Blanchard, E. Formenti, and P. Kurka. Cellular automata in the Cantor, Besicovitch, and Weyl topological spaces. *Complex Systems*, 11(2) :107–124, 1997.
- [3] N. Boccara. *Symétries brisées : théorie des transitions avec paramètre d'ordre*. Hermann Paris, 1976.
- [4] N. Boccara, J. Nasser, and M. Roger. Particlelike structures and their interactions in spatiotemporal patterns generated by one-dimensional deterministic cellular-automaton rules. *Physical Review A*, 44(2) :866–875, 1991.
- [5] G. Braga, G. Cattaneo, P. Flocchini, and C. Quaranta Vogliotti. Pattern growth in elementary cellular automata. *Theoretical computer science*, 145(1-2) :1–26, 1995.
- [6] S.G. Brush. History of the Lenz-Ising Model. *Rev. Mod. Phys.*, 39(4) :883–893, Oct 1967.
- [7] G. Cattaneo, E. Formenti, L. Margara, and G. Mauri. On the dynamical behavior of chaotic cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 217(1) :31–51, 1999.
- [8] H. Chaté and P. Manneville. Criticality in cellular automata. *Physica D*, 45(1-3) :122–135, 1990.
- [9] M. Cook. Universality in elementary cellular automata. *Complex Systems*, 15(1) :1–40, 2004.
- [10] M. Creutz. Microcanonical Monte-Carlo simulation. *Physical Review Letters*, 50(19) :1411–1414, 1983.
- [11] M. Creutz. Deterministic Ising dynamics. *Ann. Phys*, 167(1) :62–72, 1986.
- [12] J.P. Crutchfield and M. Mitchell. The evolution of emergent computation. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 92(23) :10742–10746, 1995.

- [13] K. Culik II and S. Yu. Undecidability of CA classification schemes. *Complex Systems*, 2(2) :177–190, 1988.
- [14] M. Delorme, J. Mazoyer, and G. Theyssier. Hiérarchies algébriques de classes d’automates cellulaires. 2005.
- [15] A. Dhar, P. Lakdawala, G. Mandal, and S.R. Wadia. Role of initial conditions in the classification of the rule space of cellular automata dynamics. *Physical review. E, Statistical physics, plasmas, fluids, and related interdisciplinary topics*, 51(4) :3032, 1995.
- [16] E. Domany and W. Kinzel. Equivalence of cellular automata to Ising models and directed percolation. *Physical review letters*, 53(4) :311–314, 1984.
- [17] E. Formenti. *Cellular automata and chaos : from topology to algorithmic complexity*. PhD thesis, Ph. D. Thesis, Laboratoire de l’Informatique du Parallélisme, ENS Lyon, 1998.
- [18] R.H. Gilman. Classes of linear automata. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 7(01) :105–118, 1988.
- [19] H. Gutowitz and C. Langton. Mean field theory of the edge of chaos. *Lecture Notes in Computer Science*, pages 52–64, 1995.
- [20] M. Hurley. Attractors in cellular automata. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 10(01) :131–140, 1988.
- [21] S. Ishii. Measure theoretic approach to the classification of cellular automata. *Discrete applied mathematics*, 39(2) :125–136, 1992.
- [22] E. Ising. A contribution to the theory of ferromagnetism. *Z. Phys*, 31 :253, 1925.
- [23] P. Kurka. Languages, equicontinuity and attractors in cellular automata. *Ergodic theory and dynamical systems*, 17(02) :417–433, 2001.
- [24] L. Landau and E. Lifshitz. Chapitre 14. In *Physique Statistique*. Mir, 1968.
- [25] C.G. Langton. Computation at the edge of chaos : phase transitions and emergent computation. *Physica D*, 42(1-3) :12–37, 1990.
- [26] W. Li and N.H. Packard. The structure of the elementary cellular automata rule space. *Complex Systems*, 4(3) :281–297, 1990.
- [27] W. Li, N.H. Packard, and C.G. Langton. Transition phenomena in cellular automata rule space. *Physica D*, 45(1-3) :77–94, 1990.
- [28] B. Martin. *Automates cellulaires, information et chaos*. PhD thesis.
- [29] J. Mazoyer and I. Rapaport. Inducing an order on cellular automata by a grouping operation. *Discrete Applied Mathematics*, 91(1-3) :177–196, 1999.

- [30] M. Mitchell, J.P. Crutchfield, and P.T. Hraber. Dynamics, computation, and the “edge of chaos” : A re-examination. *Arxiv preprint adap-org/9306003*, 1993.
- [31] N.H. Packard. *Adaptation Toward the Edge of Chaos*. University of Illinois at Urbana-Champaign, Center for Complex Systems Research, 1988.
- [32] H.T. Siegelmann and S. Fishman. Analog computation with dynamical systems. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 120(1-2) :214–235, 1998.
- [33] G.Y. Vichniac. Simulating physics with cellular automata. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 10 :96–116, 1984.
- [34] S. Wolfram. Universality and complexity in cellular automata. *Physica D*, 10(1) :1–35, 1984.
- [35] S. Wolfram. *A New Kind of Science*. Wolfram Media, 2002.
- [36] W.K. Wootters and C.G. Langton. Is there a sharp phase transition for deterministic cellular automata. In *NATO conference on cellular automata*, volume 6, 1990.
- [37] A. Wuensche. Classifying cellular automata automatically. *Complexity*, 4(3) :47–66, 1999.
- [38] H.P. Zwirn. Chapitre 3. In *Les systèmes complexes : mathématiques et biologie*. O. Jacob, 2006.

## Chapitre 3

# Comprendre l'évolution du domaine

Nous proposons dans cette partie de répondre à l'interrogation initiale qui motivait cette étude : comment expliquer que la problématique des propriétés émergents d'automates cellulaires ait presque disparu de la physique sur une si courte période ?

L'analyse que nous avons menée dans les chapitres précédents se concentrait sur l'évolution d'analogies (e.g. en 2.1), d'hypothèses (comme les différentes déclinaisons du bord du chaos), ou encore de concepts (la complexité), et ce en nous basant sur les articles scientifiques. Nous pensons en effet qu'il est nécessaire de fonder notre réflexion sur le discours scientifique lui-même : les idées, leur mise à l'épreuve des expériences, leur analyse. Les conventions établies en sciences cherchent à en exclure toute considération d'ordre idéologique - au moins en apparence.

Mais notre approche supposerait alors qu'on peut expliquer l'évolution du domaine par ces seuls arguments, or il nous semble que ce n'est pas suffisant : la pratique scientifique contient également une part sociologique qui ne nous paraît pas négligeable dans ce contexte.

Nous nous proposons donc dans cette partie d'explicitier conjointement les arguments d'ordre strictement scientifique, qui imposent des frontières au développement d'une thématique ; et ceux qui concernent davantage le fonctionnement de la communauté qui construit cette connaissance. Ces derniers sont difficiles à quantifier ou à mettre en balance avec les précédents, ils sont également souvent plus subjectifs donc discutables. C'est pourquoi ce chapitre est de par son contenu plus spéculatif que les précédents, et nous l'envisageons plutôt comme un préambule à un travail à venir plus approfondi.

## 3.1 La rencontre des traditions scientifiques

Nous tentons d'abord d'analyser la mécanique de confrontation entre traditions scientifiques différentes. Nous avons montré précédemment que l'apport des connaissances issues de la physique statistique et de la théorie du chaos avait ouvert de nouvelles perspectives, en particulier une approche plus expérimentale des automates cellulaires, même si celle-ci ne s'est pas avérée aussi fructueuse que ce que certains l'espéraient. Nous montrons ici que la coexistence des disciplines au sein du domaine ne signifie pas pour autant qu'elles fusionnent : chacune conserve ses motivations et ses pratiques, ce qui nous permet d'expliquer que la thématique ait pu disparaître en physique et rester active en informatique.

Il faut toutefois être attentif à ne pas faire une lecture trop disciplinaire du problème ; d'abord parce que cela pourrait masquer d'autres possibilités d'analyses, nous pourrions par exemple étudier l'organisation du savoir scientifique à une autre échelle : dans quelles équipes ces questions ont été développées ? Était-ce le résultat d'initiatives individuelles, ou de projets de grande ampleur ? etc... De plus, il est abusif d'attribuer une affiliation disciplinaire aux différents acteurs intervenant dans ce débat. Nous ne croyons pas que les recherches soient déterminées par la formation de ceux qui les conduisent. La grille d'analyse opposant la tradition orientée sciences naturelles de la physique à une tradition d'ingénierie en informatique est donc simplificatrice.

Mais le choix d'observer le débat selon cette logique nous semble légitime tant on peut constater de nettes différences de style en fonction de l'orientation disciplinaire des articles. Nous en ressentons les influences au travers du lexique, des arguments, des méthodologies de travail, ou encore de la mise en forme des articles de recherche ; ce dont nous faisons état ci-dessous.

### 3.1.1 Les indices

#### Oppositions formelles

Si l'affiliation disciplinaire des auteurs est rarement évidente, celle des publications scientifiques apparaît explicitement au travers d'une opposition de forme, dont nous donnons les caractéristiques qui nous paraissent les plus remarquables.

Les articles que nous classons comme mathématiques (e.g. [15, 19, 20]) sont construits selon le schéma "définition - théorème - démonstration", et ne s'écarte que rarement de cette convention typique de la discipline. Toutes les notions y sont définies de manière rigoureuse, donc à l'aide de formalismes conventionnels dont la description occupe souvent la majeure partie de l'article ; et ce au détriment des passages consacrés aux motivations ou aux commentaires d'interprétation, qui sont

rare et généralement courts. Ces caractéristiques que nous pensons bien connues rendent ces publications facilement identifiables.

Le style adopté dans les sciences expérimentales nous semble moins normalisé, qu’il s’agisse de physique ou d’informatique. Toutefois, un examen plus attentif permet de détecter des éléments qui apparaissent plus ou moins fréquemment en fonction de la discipline. [29] ou plus tard [17] furent publiés dans des revues de physique ; même si ces articles contiennent une composante importante d’éléments relevant de l’ingénierie des automates cellulaires, l’accent est mis sur la description expérimentale des évolutions dynamiques. Cette observation fait écho à ce que nous annonçons en 1.2.2 : cette discipline approche les automates comme elle le fait pour un système physique, par exemple en repérant des régularités (e.g. les “domaines”, les “particules” dont nous parlerons plus loin). Nous pourrions résumer le schéma généralement suivi par “observation - interprétation”, on y trouve bien sûr des spécifications du dispositif expérimental mais nous n’y voyons que rarement le cœur de l’étude. Par contraste, les publications en informatique (expérimentale) mettent d’abord en avant la procédure algorithmique, la phase d’observation et d’interprétation venant plutôt dans un second temps ; c’est ainsi qu’est construit [31] par exemple : l’auteur y fait de multiples références au logiciel DDLab qui est l’outil principal de son étude.

Par ailleurs, nous remarquons dans les publications d’informatique théorique (comme [5]), des passages entiers de définitions formelles, qui rappellent les articles mathématiques. Nous ne voyons pas seulement au travers de cette survivance la perpétuation d’une pratique<sup>1</sup>, mais la manifestation du fait que l’informatique - et sans doute plus encore l’informatique théorique - a besoin de la structure rigoureuse que permet la formalisation symbolique.

Il existe bien sûr une gradation entre les différents modèles, essentiellement en fonction du public auquel est destiné la revue, ainsi [10] est paru dans une revue considérée comme généraliste, et n’affiche pas de traits spécifiques à une communauté. À l’opposé, un article comme [2], qui s’adresse à une audience spécialisée d’informaticiens théoriciens, est très proche par sa forme des publications mathématiques.

## Des questionnements différents

À ces distinctions d’ordre formel sont associées des différences sur ce que nous devinons des intentions des auteurs. Nous décrivons ici comment transparaissent les centres d’intérêt des scientifiques en fonction des questions qu’ils mettent en exergue ou des points sur lesquels ils choisissent d’insister.

---

<sup>1</sup>Puisque historiquement, l’informatique est née des mathématiques.



Nous avons souligné qu’au travers de la structure des articles, nous percevons ce que chaque discipline considère comme primordial. Examinons d’abord les articles de mathématiques (et d’informatique théorique) : tous les objets dont il va être question y sont définis rigoureusement et font l’objet de théorèmes systématiquement prouvés ; une telle procédure permet qu’aucune information ne soit exprimée de manière ambiguë. En contrepartie, chaque cas, quel que soit son degré de pertinence concernant les applications pratiques, doit être traité avec la même rigueur. Par exemple, si nous nous fixons comme objectif d’appliquer les automates au calcul, on peut douter de la nécessité de construire une classification de *toutes* les configurations : en effet, il nous semble légitime de penser que le calcul sera toujours mené en pratique sur un espace cellulaire q-fini. Mais ce type de considérations n’entre pas en ligne de compte dans cette famille d’articles, dont l’objet est de créer un cadre général de réflexion aux problèmes de classifications des systèmes dynamiques discrets.

Pour décrire la distinction que nous voyons entre les approches expérimentales des automates que proposent l’informatique et la physique, nous allons reprendre les termes de points de vue ‘interne’ et ‘externe’, que nous introduisons en 2.2.2. En effet, alors que la physique tend à placer le scientifique dans le rôle d’observateur extérieur, l’informatique le place à l’intérieur, il y est constructeur. Selon le premier point de vue, les lois de l’espace existent de manière autonomes et il s’agit de les découvrir, les instruments sont des appareils de mesure ; selon le second, plutôt que de proposer une description d’ensemble, il s’agit davantage de se fixer un objectif puis de trouver le moyen de se déplacer dans l’espace pour l’atteindre, les instruments servent à s’y orienter. Il s’agit bien sûr d’une image schématique de l’approche disciplinaire, en pratique, chacun serait amené à osciller entre l’un et l’autre point de vue. Mais cela justifie la place que chaque communauté accorde à l’outil de programmation : pour les uns, c’est un moyen d’accéder à la connaissance du système, ici l’espace des règles ; pour les autres, l’espace n’est que le cadre dans lequel on se situe, la finalité c’est l’algorithme lui-même.

### 3.1.2 Bilan chronologique

Le mouvement des intérêts de la communauté que nous avons décrit en introduction est posé comme hypothèse de départ à la discussion qui suit.

Nous considérons donc comme établi qu’une part de la communauté des physiciens s’est vivement intéressé au problème de la classification des automates cellulaires entre 1980 et 1995 environ, notamment dans le but de localiser des propriétés émergentes de ceux-ci. Puis les physiciens ont délaissé le problème, et depuis ce moment l’essentiel des questions fait l’objet de recherches quasi-exclusivement dans des

communautés d’informaticiens.

Bien sûr, cette description est réductrice, ainsi certaines recherches menées par des scientifiques qui sont liées aux deux communautés restent connectées à ces problématiques (e.g. C. Moore sur la question des transitions de phase en lien avec la complexité algorithmique, D. Feldman ou C. Shalizi sur la théorie de l’information et la mesure de la complexité ...). Il faudrait en fait mener une étude poussée par exemple de la bibliométrie, ou d’enquêtes sur la perception qu’en ont les protagonistes pour confirmer l’impression générale.

Pour appuyer notre constat de départ, nous donnerons tout de même un argument bibliométrique : la base de données *ISI Web of Knowledge*<sup>2</sup> permet de recenser l’ordre de grandeurs des publications et les domaines dans lesquelles elles se situent. De cette manière avec le mot-clef “*cellular automata*”, nous pouvons relever la proportion des articles étiquetés dans chaque discipline (possiblement plusieurs étiquetages, et nous avons fait des regroupements), voir table 3.1.

| Discipline              | 85 à 89 | 90 à 94 | 95 à 99 | 00 à 04 | 05 à 09 |
|-------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Mathématiques           | 18 %    | 17 %    | 16 %    | 12 %    | 18 %    |
| Physique mathématique   | 28 %    | 33 %    | 25 %    | 15 %    | 13 %    |
| Physique appliquée      | 47 %    | 48 %    | 38 %    | 26 %    | 26 %    |
| Informatique théorique  | 11 %    | 8 %     | 12 %    | 23 %    | 19 %    |
| Informatique appliquée  | 15 %    | 24 %    | 32 %    | 22 %    | 23 %    |
| Nombre total d’articles | 142     | 624     | 1044    | 1538    | 1927    |

TAB. 3.1: Évaluation bibliométrique de la proportion d’articles en fonction du domaine.

Des précautions doivent être mentionnées quant à l’interprétation de ces statistiques : la base de données n’est pas exhaustive, les habitudes de publications sont différentes dans chaque discipline (il est courant de publier dans des revues en physique, alors que l’informatique privilégie les conférences), dans toutes les disciplines les nombres bruts de publications sont en constante inflation (d’où le choix de donner des proportions), les étiquetages disciplinaires sont faits selon des critères arbitraires, qui évoluent dans le temps. Nous ne pouvons donc détecter qu’une tendance avec de telles mesures.

---

<sup>2</sup>[http ://apps.isiknowledge.com/](http://apps.isiknowledge.com/)

### 3.1.3 Proposition d'interprétation

#### Cause structurelle

Nous proposons tout d'abord une cause que nous qualifions de structurelle car elle tient à la nature des disciplines, plutôt qu'à celle du problème particulier que nous étudions. En effet, l'expansion soutenue de l'informatique en tant que domaine académique soulève des interrogations sur l'organisation disciplinaire de la recherche. À la différence des autres secteurs majoritairement construits autour d'objets d'étude spécifiques, celui-ci s'édifie autour d'outils et de méthodes; il contient alors par construction une composante transdisciplinaire, qui peut expliquer une tendance certaine à phagocyter les thématiques de recherche qu'on ne peut ranger dans un compartiment disciplinaire établi.

Ainsi, des éléments laissent croire que la part des mathématiques des systèmes dynamiques a également diminué au bénéfice d'études numériques expérimentales - que nous rapprochons de l'informatique<sup>3</sup>. Un exemple : alors que les premiers articles concernant les classifications d'automates en tant que systèmes dynamiques étaient publiées dans des revues de mathématiques (e.g. *Ergodic Theory & Dynamical Systems* pour [15, 19, 21]), les plus récentes sont davantage destinées à un public d'informaticiens (*Theoretical Computer Science* pour [5, 6, 2]). Cela pourrait être une manifestation de cette même tendance qui ne paraît donc pas spécifique aux automates cellulaires.

#### Attentes et déception

Nous pensons qu'une autre cause non pas essentielle mais ayant certainement accéléré le désintérêt subit de la communauté des physiciens pour ces questions, tient aux ambitions des pionniers du domaine.

Le champ des possibilités ouvert par les automates cellulaires semblait immense : non seulement ils permettent de modéliser des systèmes d'une grande variété, mais ils portaient aussi l'espoir d'une révolution scientifique de grande ampleur. Les tenants de cette idée défendent qu'une grande partie de la physique décrit l'univers comme continu par commodité, parce que les équations différentielles que produit cette représentation est un outil mathématique bien maîtrisé; mais ce ne serait pas nécessairement la plus adquate à très petite échelle; et si une description discrète du monde devait être plus appropriée, les automates cellulaires pourraient fournir une alternative intéressante à cette fin. Poussant cette thèse à sa limite, Fredkin puis Wolfram suggéraient que l'univers entier pourrait être mis sous la forme d'un automate

---

<sup>3</sup>Cet effet n'est pas visible sur les mesures bibliométriques, qui ne sont pas suffisamment précises concernant les thèmes.

dont les règles tiendrait sur une feuille de papier. Si bien que la thématique a finalement pris une coloration idéologique, les positions scientifiques étant influencées par une conception philosophique de l'univers. Cela a sans doute exacerbé les passions autant dans le camp des partisans que dans celui des opposants.

De tels propos suscitent dans la communauté à la fois espoirs et scepticisme. L'exemple emblématique de cette situation est l'ouvrage-somme de Stephen Wolfram *A New Kind of Science* ([30]) qui a divisé la communauté des physiciens<sup>4</sup>. On peut mesurer la polémique qu'il a suscité (et suscite encore) à la lecture des critiques<sup>5</sup> formulées notamment par des scientifiques reconnus internationalement dans leur discipline.

Parmi celles-ci, certaines concernent des inexactitudes scientifiques. Citons par exemple l'erreur (p. 981, relevée par L. Kadanoff) consistant à dire que les transitions de phases impliquent une discontinuité de la fonction de partition du système. Ailleurs, Wolfram affirme que des systèmes dynamiques continus chaotiques ne peuvent pas générer de l'aléatoire depuis des conditions initiales très régulières, alors que c'est le cas du système d'équation de Lorenz (M. Mitchell).

D'autres sont davantage liées à la fragilité de la démarche argumentative, par exemple Wolfram lance l'idée que les automates cellulaires pourraient servir de base à une théorie d'unification de la gravité et de la mécanique quantique, mais reste très évasif sur la réalisation pratique d'une telle entreprise (notamment dans la critique d'Y. Pomeau).

Mais la majorité touche plutôt la tonalité de l'ouvrage ; les reproches sont quasi-unanimes concernant le non-respect de conventions relevant de l'éthique scientifique : pas de citation des sources, exagération des mérites personnels, manque d'humilité vis-à-vis de la portée de ses travaux ...

Sans discuter précisément de la validité de ces critiques, relevons simplement qu'elles mettent en évidence la dimension affective qui entre en jeu dans ce débat, et la perméabilité entre les arguments sur le fond scientifique et ceux qui relèvent de la science en tant que pratique : les uns et les autres s'entrelacent parfois à un tel point qu'on ne peut plus les faire entrer dans l'une ou l'autre catégorie. Dans cet ordre d'idée, la critique de C. Shalizi (intitulée : "A rare blend of monster raving egomania and utter batshit insanity"<sup>6</sup>) en est un exemple significatif.

---

<sup>4</sup>Remarquons que sa publication est postérieure à la période au centre de notre étude.

<sup>5</sup>Accessibles en ligne : [http://shell.cas.usf.edu/~eclark/ANKOS\\_reviews.html](http://shell.cas.usf.edu/~eclark/ANKOS_reviews.html)

<sup>6</sup>Que nous pourrions traduire par : "Un rare mélange d'égotisme délirant et d'un ramassis de foutaises."

## Un phénomène de mode

Parmi les effets difficiles à mesurer, mais dont l'impact nous semble indiscutable en sciences physiques comme probablement dans tous les domaines de la connaissance, la 'mode' paraît avoir joué un rôle considérable d'accélérateur au cours de cette courte période, et ce aussi bien dans l'engouement d'abord suscité que dans le rejet qui a suivi.

Cet effet serait en fait corrélé au précédent car il est démultiplié par l'aspect passionnel qui vient se greffer aux questions scientifiques : la perspective d'une révolution a attiré bien sûr l'intérêt de la communauté, mais il nous semble que l'hostilité qu'ont pu susciter les travaux de Wolfram a amené certains à rejeter sans examen attentif les problématiques qui y étaient associées. Un autre élément peut jouer un rôle dans la logique de notre argument : les effectifs des communautés de spécialistes sont faibles, alors les sources d'informations sur la valeur scientifique d'autres travaux sont rares et reposent pour beaucoup sur l'avis que peut en avoir le reste de la communauté ; en conséquence nous pensons que l'influence mutuelle entre les membres serait plus forte que dans des sociétés plus vastes.

Nous n'avons, ici encore, que peu d'éléments objectifs pour appuyer cette hypothèse, mais nous observons qu'après la reprise en main du problème par la communauté des informaticiens, les problématiques et les méthodologies ont certes changé, mais elles partagent tout de même des intérêts communs avec celles des physiciens. Ainsi les études de Langton et al. et celles de Wuensche (décrites respectivement en 2.2.1 et 2.2.2) se ressemblent non seulement par l'intention (paramétrer l'espace des règles), mais également les moyens : des mesures d'information pour localiser les comportements complexes.

Ces indices laissent penser que nous ne pouvons pas résumer l'abandon des physiciens comme la seule conséquence d'une réorientation des problématiques qui ne laisserait pas de perspective intéressante dans cette discipline.

## Réorientation, spécialisation

Toutefois, nous constatons qu'il existe un inflexionnement de la thématique : de nouvelles interrogations pertinentes émergent, celles-ci allant de paire avec une réorientation des problématiques, que nous cherchons à décrire dans cette partie.

Comme nous l'avons vu en 2.2.1, l'hypothèse du bord du chaos n'a pas démontré son efficacité, notamment dans le but de localiser des automates universels. Or, dans son intention, celle-ci nous paraît tout à fait représentative du point de vue externe, propre à la physique, que nous définissions en 3.1.1 : elle recherche un ordre naturel dans l'espace complexe et veut découvrir des phases qui peuvent être décrites à

l'aide de quelques variables seulement. Nous en concluons que la confrontation des traditions disciplinaires ne concerne pas seulement les méthodes ou les outils, mais aussi la finalité.

Cette observation nous amène à exposer ce que nous tenons pour la cause principale de l'abandon du domaine par les physiciens : l'approche du bord du chaos en tant que phase de la complexité a échoué, la communauté a donc évidemment émis des doutes quant à l'intérêt des descriptions physiques de tels espaces complexes construits à partir d'objets synthétiques. C'est pourquoi les questions soulevées à partir des années 90 vont refocaliser majoritairement l'attention sur des problèmes techniques plus concrets.

La réorientation thématique qui se produit alors est dominée par des mouvements de spécialisations. Nous avons fait état d'un tel phénomène en 2.4 sur le cas des systèmes de classification, nous l'observons également au travers de l'apparition de questions liées à la possibilité d'utilisation pratique de l'automate. Parmi ces problématiques, l'emploi et l'amélioration d'algorithmes génétiques\* dans le but de sélectionner des automates capables de remplir diverses tâches : déterminer la densité d'états, générer des nombres aléatoires, faire de la synchronisation ([10, 1]). Ou encore dans des domaines plus technologiques : les automates seraient utilisables pour la cryptographie ([23, 27]), ou la correction de code ([7]) ...

Ces tâches relèvent soit de l'informatique théorique soit de l'ingénierie des automates cellulaires (voire des deux), mais les compétences requises sont différentes de celles utiles à la paramétrisation de l'espace des règles, pour laquelle les physiciens avaient une certaine familiarité avec des problèmes voisins.

## 3.2 Quelques ouvertures ?

Au point où s'achève ce travail, quelques pistes de réflexion apparaissent, soit qu'elles font l'objet de travaux actuels, soit qu'elles aient été mises en attente ou ignorées bien qu'encore pertinentes à nos yeux. Nous essayons dans cette partie d'en mettre quelques unes en lumière.

Mais nous souhaitons d'abord tempérer la portée de ces propositions : il est très probable que certaines ne soient pas justifiées, ou que des travaux cherchant à les résoudre aient déjà été entrepris. La tâche de reconstitution d'une bibliographie sur un domaine aussi récent et aussi spécialisé est délicate, et certaines études qui se révéleront importantes ont certainement échappées à notre analyse.

D'autre part, une telle démarche prospective s'appuie essentiellement sur nos appréciations subjectives. Par exemple, les productions informatiques dominent quantitativement le domaine, cela nous pousse à ne chercher de réponses qu'au travers de

cette discipline. Par ailleurs, notre formation (en physique statistique) nous conduit également à regarder certaines problématiques (en particulier la paramétrisation de l'espace des règles) plus favorablement que d'autres. Nous nous bornons ici à constater l'existence de ces biais qui relativisent la pertinence des suggestions ci-dessous.

### **3.2.1 Vers une dynamique particulière du calcul ?**

Les propriétés de calcul des automates telles que nous les avons décrites étaient vues le plus souvent sous un angle théorique : qu'il s'agisse d'insérer une machine de Turing dans l'automate, ou encore d'examiner la trace dans les mesures statistiques de comportements variés, nous sommes peu renseignés sur les procédures pratiques de calcul telles que résoudre une équation mathématique ou même synchroniser des états cellulaires.

Dans cette partie, nous allons nous intéresser aux moyens possibles de mises en œuvre du traitement de l'information par les automates cellulaires, d'abord au travers d'un exemple classique, puis en étudiant une approche plus générique développée à partir du milieu des années 90 sous le nom de mécanique computationnelle.

#### **La calculabilité en pratique**

Nous disposons d'un exemple pratique d'automate - calculateur universel sur lequel il est possible de résoudre des problèmes mathématiques concrets : le Jeu de la Vie\*. Ainsi celui-ci permet de construire un générateur de nombres pseudo-aléatoires ou encore un calculateur des nombres premiers ([12]). Mais est-ce que cela signifie pour autant qu'un tel système est suffisamment flexible pour pouvoir exécuter efficacement une grande variété d'opérations ? Autrement dit, comment développer concrètement un calculateur pratique dans l'automate ? La démonstration de l'universalité du Jeu de la Vie par Berlekamp et al. ([3]) nous donne une réponse possible à cette question - en termes relativement simples. Nous en reprenons ici les grandes lignes, que nous commentons ensuite.

L'idée de départ de la démonstration consiste à simuler chacun des éléments physiques qui constitue les ordinateurs traditionnels. L'unité de base du signal est le glisseur\* : une structure constituée de quelques cellules ayant la propriété de se translater dans l'espace cellulaire. Il est possible de générer ou détruire un flux de glisseurs, mais également de le copier, de le dévier, d'en amoindrir la densité ... Toutes ces opérations rendent possibles la création de constituants qui par leur comportement sont assimilables aux diverses parties d'une machine : l'horloge qui génère le signal rythmant son fonctionnement, les portes logiques qui forment le circuit traitant l'information, la mémoire qui la stocke etc...

Nous donnerons un exemple afin de préciser la pensée de ces auteurs, celui de la porte logique NON : l'information en entrée est représentée par un flux de glisseurs, la présence d'un glisseur correspond à un bit 1, l'absence à un bit 0. À la perpendiculaire de ce flux est placé un générateur de glisseurs qui les crée à un rythme régulier. Lorsque ces glisseurs entrent en collision, ils s'annihilent, le flux obtenu dans la direction du générateur est donc le complémentaire du flux entrant, c'est exactement l'opération logique NON. On représente ce fonctionnement sur la figure 3.1.

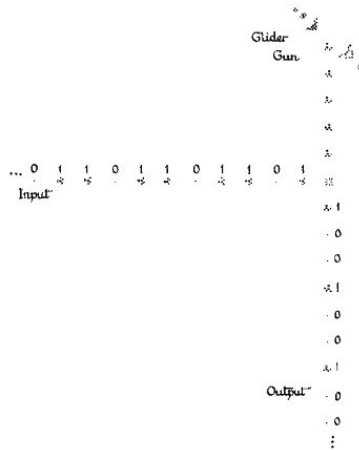


FIG. 3.1: La porte logique NON construite par Berlekamp et al. dans [3].

À la lecture de [3], nous imaginons que quel que soit le protocole de construction de la machine dans l'automate, il sera nécessaire de développer une “machinerie” d'intermédiaires entre le comportement local et la fonction globale de l'automate. Ici le premier étage est constitué de structures comme les glisseurs, lance-glisseurs, mangeurs\* ..., le second serait les portes logiques etc... Et sans doute est-il possible d'imaginer une grande variété de hiérarchies de ce genre.

Nous pensons qu'un nouvel objectif qui se dessinerait alors serait la détection rapide d'automates capables de réaliser ces fonctions intermédiaires. Ce travail peut d'ailleurs être regardé comme une procédure de localisation dans l'espace des règles, mais cette fois de propriétés qui seraient précisément définies.

## Domaines et particules, mécanique computationnelle

Le mécanisme élémentaire des calculs menés dans le Jeu de la Vie est donc la collision entre glisseurs. Supposons que l'on veuille généraliser ce processus à d'autres automates, ceux-ci devraient alors montrer des structures capables de se déplacer à l'identique dans l'espace cellulaire, et ces motifs pourraient interagir pour générer de nouvelles formes également capables de se propager.



En accord avec ce raisonnement, James Hanson et James Crutchfield proposent au cours des années 90 de définir et rechercher ces structures de manière systématique ([16, 9, 17]), donnant naissance à ce qu'ils appellent la mécanique computationnelle, que nous décrivons dans cette partie.

Afin de détecter les objets mobiles qui transportent l'information dans l'espace, il faut d'abord définir le décor, ce qui ne peut pas contenir d'information. En effet, il n'est pas nécessaire que le fond sur lesquels ces objets se déplacent soit uniforme : il pourrait aussi bien être constitué d'une alternance d'états 1 et 0, ou encore de motifs plus complexes. Pour définir ce 'zéro' d'information, Hanson et Crutchfield emploient la notion de **domaine régulier** : c'est une séquence de cellules invariante par translation dans l'espace et périodique. Ainsi, si l'espace cellulaire est entièrement constitué d'un de ces domaines, il y reste indéfiniment. Nous en donnons un exemple dans la figure 3.2.

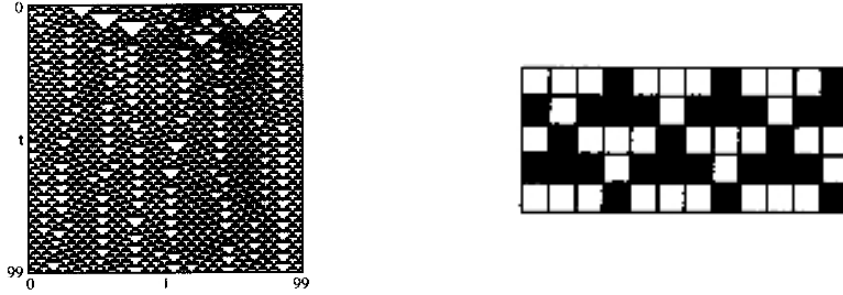


FIG. 3.2: Gauche : diagramme spatio-temporel de l'ACE 54. Droite : domaine régulier de cet ACE. Extraits de [17].

Il est maintenant théoriquement possible de détecter tout motif extraordinaire se déplaçant sur ces domaines. Mais il n'est pas trivial de repérer à l'oeil nu les écarts à la régularité de la dynamique, c'est pourquoi pour chaque automate, il est nécessaire de mettre au point des machines (les **filtres**) dont la fonction est de repérer les domaines et de les transformer en régions homogènes. De cette manière il est beaucoup plus simple d'observer les dynamiques filtrées pour découvrir de nouveaux objets (c.f. image 3.3)

Nous nous intéressons désormais à ces structures mobiles dont la mécanique de collisions pourrait être à l'origine de propriétés de calcul. Il est possible de les caractériser par leur taille, leur vitesse de déplacement, les lois régissant leurs interactions (comme sur l'image 3.4). Nous pouvons alors imaginer qu'il est possible de donner un ensemble de lois sur ces particules, suffisantes à démontrer l'universalité d'automates, même si à notre connaissance, il n'existe pas de telles études actuel-

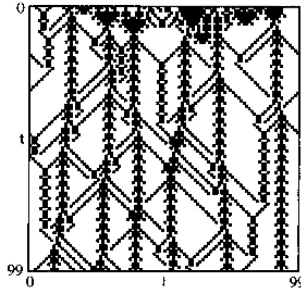


FIG. 3.3: Diagramme spatio-temporel de l'ACE 54 après filtrage. Extraits de [17].

lement<sup>7</sup>. D'ailleurs, nous avons fait mention de l'observation antérieure ([4]) d'une "physique des particules" dans les automates en 2.3.1.

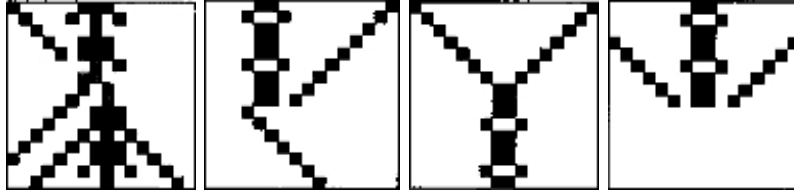


FIG. 3.4: Exemples d'interactions entre particules de l'ACE 54. Extraits de [17].

La dynamique computationnelle confirme d'ailleurs que l'apparence chaotique peut être très trompeuse. Ainsi, sans outil de filtrage, il n'est pas évident d'avoir l'intuition qu'il y a transport d'information dans l'ACE 54. Il faut également prendre acte de cette observation pour choisir des grandeurs statistiques appropriées. Par exemple, l'entropie cellulaire sera non-nulle pour un domaine régulier un peu compliqué, en conséquence cette mesure ne donne pas une bonne idée de l'information transportée par le système. La partie suivante passe en revue de nouvelles propositions de mesures plus adéquates.

### Des mesures plus spécifiques

Maintenant que des structures capables de supporter le calcul sont identifiées, la question de la localisation des propriétés de calcul dans l'espace des règles revient au premier plan si il est possible d'élaborer des procédures systématiques de détection des particules d'automates.

---

<sup>7</sup>Cette idée ne semble pas en contradiction avec l'indécidabilité de la propriété d'universalité, puisqu'il s'agirait d'une méthode pour trouver *des* automates universels, et non pas *tout* automate universel.

De nouvelles mesures pourraient être pertinentes dans ce but précis : dans [22], Lizier et al. adaptent un certain nombre de mesures proposées par divers auteurs dans des articles antérieurs ([8, 26, 28]). Ces grandeurs sont dérivées des mesures usuelles de théorie de l'information décrites précédemment :

- L'activité locale de stockage d'information (*local active information storage*) permet ainsi d'évaluer si l'état d'une cellule est en accord avec la valeur statistiquement attendue. On la définit pratiquement comme l'information mutuelle entre l'état d'une cellule à  $t$  et la chaîne de ses états antérieurs. On peut alors la comprendre comme la **mémoire** effectivement utilisée par la cellule au pas de temps considéré, elle est élevée lorsque le comportement passé renseigne sur l'état de la cellule.
- L'entropie de transfert (*transfer entropy*) mesure la déviation du comportement d'une cellule, connaissant son passé, en fonction du comportement d'une autre cellule source - ce qui peut se mettre sous la forme d'une mesure d'information mutuelle conditionnelle. C'est donc une estimation du **transfert d'information** dans le système, elle est élevée lorsque c'est l'état de la source qui renseigne sur l'état de la cellule.
- L'information locale séparable (*local separable information*) est construite à partir des précédentes de manière à être négative et élevée en valeur absolue lorsque l'état de la cellule n'est renseigné ni par le passé, ni par l'environnement. C'est une estimation de la **modification de l'information**.



FIG. 3.5: Gauche : diagramme spatio-temporel de l'automate. Centre : en niveaux de gris, valeurs positives de l'entropie de transfert correspondant au diagramme spatio-temporel. Droite : en niveaux de gris, valeurs négatives de l'information locale séparable. Extraits de [22].

Ces nouvelles grandeurs permettent par exemple de repérer les glisseurs dans l'évolution de la configuration (figure centrale de 3.5), et jouent ainsi le rôle des filtres tout en restant plus génériques que ceux-ci. De plus, elles confirment que

les particules seraient les agents essentiels du transport de l'information dans les automates.

### 3.2.2 De la modélisation numérique aux automates cellulaires

Nous avons observé en 2.1.2 que le modèle d'Ising pouvait être rendu équivalent à des automates cellulaires stochastiques. En fait, la modélisation numérique de systèmes prenant un nombre discret d'états est une activité très répandue en physique. Une autre piste de réflexion serait de tirer profit du développement de ces recherches pour poser la question de la paramétrisation de l'espace des règles des automates probabilistes.

Nous avons déjà cité le modèle de Domany et Kinzel ([13]) pour représenter les systèmes de spins à l'équilibre, d'autres travaux ont été menés dans la continuité (par exemple : [14]). Ce modèle s'applique également à la percolation dirigée\* ; une transition de phase qui est l'exemple le plus classique de transitions hors-équilibres avec une phase absorbante. C'est pourquoi il sera ensuite abondamment repris et commenté (e.g. [18]). Et plus généralement, les transitions de phase de systèmes hors-équilibres sur réseau emploient des modèles numériques équivalents en pratique à des automates cellulaires stochastiques (pour une revue de ces questions : [24]). Dans ce domaine les progrès sont tels qu'il s'est établi un champ de recherche autonome qui ne fait maintenant plus nécessairement référence à la notion d'automate ; ce que nous pouvons d'ailleurs interpréter comme une forme de spécialisation.

Si nous examinons tous ces modèles de transitions de phase comme des instances d'automates cellulaires probabilistes, nous disposons de trajets dans l'espace des règles stochastiques, et de paramètres de contrôles qui permettent de se déplacer arbitrairement près de la frontière de transition. Autrement dit, la paramétrisation qui n'était pas possible avec des automates déterministes (au moins dans un espace des règles à  $k$  fixé) est concevable pour des automates probabilistes.

L'essentiel de cette étude se concentrait sur les automates déterministes, dont le nombre d'états et la taille des voisinages étaient le plus souvent réduits. Il est tentant de vouloir élargir le champ de notre étude à une famille plus générale de machines à états finis. Le choix est alors vaste : automates asynchrones, règles adaptatives ... Cependant la remarque précédente suggère que parmi l'étendue de ces possibilités, les automates stochastiques soient une piste privilégiée, en tous cas du point de vue de la paramétrisation de l'espace des règles ; du point de vue des propriétés de calcul, cela suppose sans doute des formalisations différentes de celles qui ont été évoquées ici.

# Conclusion

Le retrait partiel de la physique des problématiques d'automates cellulaires, commencé dans les années 90, a touché de manière hétérogène la discipline : l'utilisation des automates en tant qu'outils n'a pas cessé, comme l'ensemble de la modélisation numérique en physique, qui est en constante expansion.

Les approches descriptives de l'espace des règles ont en revanche fortement pâti de la réorientation thématique du domaine. Nous avons montré qu'à la base de ce mouvement se trouvait une véritable déception scientifique des fruits portés par ce point de vue. La recherche d'une phase de la complexité paraissait initialement légitime tant l'analogie avec des systèmes physiques semblait pertinente ; mais elle s'est finalement avérée être une description trop simpliste d'un espace dont on n'évaluait pas alors l'exact degré de complexité.

Elle n'a pas résisté aux arguments affirmant que toute propriété émergente vraiment intéressante serait indécidable, et qu'il ne serait donc pas possible de les rechercher dans l'espace aussi simplement qu'on le fait en thermodynamique : avec quelques variables appropriées.

Des éléments extrascientifiques se sont greffés à ce débat, leur poids est difficilement évaluable mais ils tendent de toutes façons à grossir les effets, que ce soit en vitesse ou en ampleur. Ainsi, l'enthousiasme des débuts a certainement créé un excès de confiance, les doutes de la fin un rejet plus rapide encore.

D'ailleurs l'échec de l'hypothèse du bord du chaos en tant que volume de l'espace a masqué d'autres approches possibles de description globale de l'espace des règles. Nous suggérons qu'à la suite, ou plus exactement en réaction à la désillusion que nous signalons, il y eut un mouvement implicite ou explicite de déconsidération des approches descriptives globales, au profit de questions pratiques. La conséquence directe de ce processus est la fragmentation en petites communautés qui se constituent autour de problèmes précis.

Nous voyons-là de la matière à réflexion sur le fonctionnement des communautés scientifiques, et plus spécifiquement sur ce qui influence les choix thématiques.

# Bibliographie

- [1] D. Andre, F.H. Bennett III, and J.R. Koza. Discovery by genetic programming of a cellular automata rule that is better than any known rule for the majority classification problem. *Genetic programming*, 96, 1996.
- [2] J.T. Baldwin and S. Shelah. On the classifiability of cellular automata. *Theoretical computer science*, 230(1-2) :117–129, 2000.
- [3] E.R. Berlekamp, J.H. Conway, and R.K. Guy. Winning Ways for your Mathematical Plays, Vol. 4. *A.K. Peters, M.A. Wellesley*, 2001.
- [4] N. Boccara, J. Nasser, and M. Roger. Particlelike structures and their interactions in spatiotemporal patterns generated by one-dimensional deterministic cellular-automaton rules. *Physical Review A*, 44(2) :866–875, 1991.
- [5] G. Braga, G. Cattaneo, P. Flocchini, and C. Quaranta Vogliotti. Pattern growth in elementary cellular automata. *Theoretical computer science*, 145(1-2) :1–26, 1995.
- [6] G. Cattaneo, E. Formenti, L. Margara, and G. Mauri. On the dynamical behavior of chaotic cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 217(1) :31–51, 1999.
- [7] DR Chowdhury, S. Basu, IS Gupta, and PP Chaudhuri. Design of CAECC-cellular automata based error correcting code. *IEEE Transactions on Computers*, 43(6) :759–764, 1994.
- [8] J.P. Crutchfield and D.P. Feldman. Regularities unseen, randomness observed : Levels of entropy convergence. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 13 :25, 2003.
- [9] J.P. Crutchfield and J.E. Hanson. Turbulent pattern bases for cellular automata. *Physica D*, 69(3) :279–301, 1993.
- [10] J.P. Crutchfield and M. Mitchell. The evolution of emergent computation. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 92(23) :10742–10746, 1995.
- [11] K. Culik II and S. Yu. Undecidability of CA classification schemes. *Complex Systems*, 2(2) :177–190, 1988.

- [12] J.P. Delahaye. Le Royaume du Jeu de la Vie. *Pour la Science*, 378, April 2009.
- [13] E. Domany and W. Kinzel. Equivalence of cellular automata to Ising models and directed percolation. *Physical review letters*, 53(4) :311–314, 1984.
- [14] A. Georges and P. Le Doussal. From equilibrium spin models to probabilistic cellular automata. *Journal of Statistical Physics*, 54(3) :1011–1064, 1989.
- [15] R.H. Gilman. Classes of linear automata. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 7(01) :105–118, 1988.
- [16] J.E. Hanson and J.P. Crutchfield. The attractor—basin portrait of a cellular automaton. *Journal of Statistical Physics*, 66(5) :1415–1462, 1992.
- [17] J.E. Hanson and J.P. Crutchfield. Computational mechanics of cellular automata : An example. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 103(1-4) :169–189, 1997.
- [18] H. Hinrichsen. Non-equilibrium critical phenomena and phase transitions into absorbing states. *Advances in Physics*, 49(7) :815–958, 2000.
- [19] M. Hurley. Attractors in cellular automata. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 10(01) :131–140, 1988.
- [20] S. Ishii. Measure theoretic approach to the classification of cellular automata. *Discrete applied mathematics*, 39(2) :125–136, 1992.
- [21] P. Kurka. Languages, equicontinuity and attractors in cellular automata. *Ergodic theory and dynamical systems*, 17(02) :417–433, 2001.
- [22] J.T. Lizier, M. Prokopenko, and A.Y. Zomaya. Detecting non-trivial computation in complex dynamics. *Lecture Notes in Computer Science*, 4648 :895, 2007.
- [23] S. Nandi, BK Kar, and P.P. Chaudhuri. Theory and applications of cellular automata in cryptography. *IEEE Transactions on Computers*, 43 :12, 1994.
- [24] G. Ódor. Universality classes in nonequilibrium lattice systems. *Reviews of Modern Physics*, 76(3) :663–724, 2004.
- [25] D.J.S. Price. *Little science, big science*. Columbia Univ. Press New York, 1969.
- [26] T. Schreiber. Measuring information transfer. *Physical review letters*, 85(2) :461–464, 2000.
- [27] F. Seredynski, P. Bouvry, and A.Y. Zomaya. Cellular automata computations and secret key cryptography. *Parallel Computing*, 30(5-6) :753–766, 2004.
- [28] C.R. Shalizi. Causal architecture, complexity and self-organization in time series and cellular automata. *Unpublished PhD thesis, University of Wisconsin at Madison, Wisconsin*, 2001.

- [29] S. Wolfram. Universality and complexity in cellular automata. *Physica D*, 10(1) :1–35, 1984.
- [30] S. Wolfram. *A New Kind of Science*. Wolfram Media, 2002.
- [31] A. Wuensche. Classifying cellular automata automatically. *Complexity*, 4(3) :47–66, 1999.



# Lexique - Index

## Chapitre 1

### • Convention de notation de Wolfram (*Wolfram naming convention*) :

La convention de notation de Wolfram est conçue d'abord pour désigner les automates cellulaires élémentaires (2 états, voisinage de taille 3). La procédure est la suivante :

- Les états de l'automate sont désignés par 0 et 1.
- On ordonne les différentes configurations de la table de mise à jour par ordre décroissant selon la valeur du nombre binaire qui peut être associé à la configuration (e.g. 101 > 011).
- Les produits dans la table de mise à jour de chacune de ces configurations forment donc une séquence de valeurs, chacune prise dans l'ensemble  $\{0; 1\}$  formant un nombre binaire à 8 chiffres.
- On désigne la règle par la conversion décimale du nombre binaire obtenu.

Ainsi la règle de table de mise à jour :

| voisinage $v$ | (1,1,1) | (1,1,0) | (1,0,1) | (1,0,0) | (0,1,1) | (0,1,0) | (0,0,1) | (0,0,0) |
|---------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $\phi(v)$     | 0       | 1       | 1       | 0       | 1       | 1       | 1       | 0       |

est associée à la valeur binaire 01101110, c'est à dire  $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^5 + 2^6 = 110$ .

nb : il est facile d'imaginer une généralisation à de plus larges voisinages (on aurait plus de chiffres binaires) et même éventuellement plus d'états (on compterait alors en base  $k$  et non 2).

- **État quiescent** (*Quiescent state*) ..... p09
- **Comportements émergents** (*Emergent behaviours*) ..... p10
- **Systèmes complexes** (*Complex systems*) ..... p10
- **Conditions initiales q-finies** (*q-finite initial conditions*) ..... p12
- **Jeu de la Vie** (*Game of Life*) :

Le Jeu de la Vie est un automate cellulaire à 2 dimensions et 2 états (vivant et mort), pour lequel le voisinage d'une cellule est constitué de la cellule elle-même,

des 4 cellules adjacentes et des 4 cellules situées en diagonales (voisinage de Moore).  
Sa règle peut être décrite ainsi :

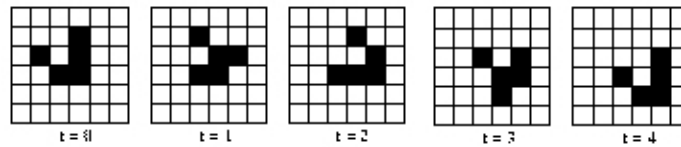
- une cellule survit seulement si elle a 2 ou 3 voisins vivants
- si le nombre de voisins vaut 3, une cellule peut apparaître

Il est créé par John Conway à la fin des années 60, le premier article à en faire état est [4]. Dans [1], les auteurs détaillent de nombreux comportements et démontrent son caractère Turing universel. On peut trouver dans [3] une étude sur les progrès récents réalisés dans la programmation du Jeu.

Le Jeu de la Vie a fait (et fait encore) l'objet d'une énorme activité de création de nouveaux comportements. Parmi les formes complexes remarquables émergeant dans le jeu de la vie, on peut citer :

- le glisseur (ou planeur) - *glider*

C'est le plus rapide membre de la famille des "vaisseaux" identifié. Un vaisseau est un objet qui se reproduit à l'identique après un certain nombre de pas de temps, en se translatant dans l'espace cellulaire.

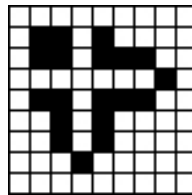


- les fusils à glisseur - *glider guns*

Ces objets sont capables de générer périodiquement des glisseurs.

- le mangeur - *eater*

Ces objets sont capables de détruire des glisseurs sans être modifiés.



- **Classification génotypique/phénotypique** (*Genotypic/phenotypic classification*) ..... p13
- **Entropie de Shannon** (*Shannon entropy*) ..... p16
- **Information mutuelle** (*Mutual information*) ..... p17
- **Complexité de Kolmogorov** (*Kolmogorov Complexity*) :

Aussi nommée complexité de Kolmogorov-Chaitin ou complexité stochastique ; on considère une chaîne de caractères  $s$ , la complexité de Kolmogorov est la longueur

du plus petit programme binaire qui permette de reconstituer  $s$ . Cette grandeur cherche à évaluer la richesse en information incompressible de la chaîne  $s$ .

Elle est utilisable car toutes les machines de calcul universels produiront la même complexité de Kolmogorov à une constante additive près (sur cette notion : [2]).

- **Espace des phases** (*Phase space*) ..... p19
- **Algorithme génétique** (*Genetic algorithm*) :

Un algorithme génétique utilise une procédure à base d'un mélange de hasard et de sélection pour rechercher un élément particulier d'un ensemble statistique qui soit particulièrement "adapté" vis-à-vis de la procédure de sélection. Sur ce sujet : [5] ou [6].

Un exemple de mise en œuvre d'un algorithme génétique : on souhaite créer des automates cellulaires adaptés pour déterminer la densité d'états vue en 1.5.4. On dispose d'un ensemble de 100 règles quelconques (par exemple générées de manière aléatoire), on teste leur efficacité sur cette tâche. On fabrique alors 100 nouvelles règles à partir des anciennes, la probabilité d'utiliser une règle étant proportionnelle à son efficacité (sélection), une procédure possible de construction des nouvelles règles est un simple mélange des produits de la table des règles (hasard). Puis, on itère cette procédure, après un certain nombre de générations, l'algorithme génétique doit produire une population d'automates très adaptés à la tâche.

- **Portrait de phase** (*Phase portrait*) ..... p19
- **Attracteurs** (*Attractors*) ..... p19,53
- **Bassin d'attraction** (*Basin of attraction*) ..... p20
- **Arbre de transition** (*Transient tree*) ..... p20
- **Jardin d'Eden** (*Garden of Eden*) ..... p21
- **Composante connexe** (*Connected component*) :

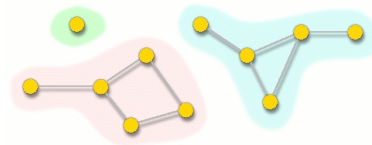


FIG. 3.6: Graphe composé de trois composantes connexes.

En théorie des graphes, une composante connexe désigne une sous-partie d'un

graphe telle qu'il existe un chemin entre tout couple de noeuds de la composante, et telle que l'ajout de tout autre noeud du graphe ferait perdre cette propriété.

- **Décidabilité** (*Decidability*) ..... p21
- **Calculabilité** (*Computability*) ..... p22
- **Calculateur Universel** (*Universal Computer*) ..... p22
- **Machine de Turing** (*Turing Machine*) ..... p22
- **Calculateur parallèle** (*Parallel computer*) ..... p24

## Chapitre 2

- **Paramètre d'ordre** (*Order parameter*) ..... p34
- **Paramètre de contrôle** (*Control parameter*) ..... p37
- **Décalage** (*Shift*) ..... p52
- **Métrique - distance** (*Metric - distance*) ..... p53
- **Stabilité de Lyapunov** (*Lyapunov stability*) ..... p54
- **Adhérence** (*Closure*) :

L'adhérence de  $\mathcal{U}$  désigne le plus petit ensemble fermé contenant  $\mathcal{U}$ .

- **Limite d'un ensemble de configurations** (*Limit of a configuration set*) :

Si  $f$  est l'application globale du système dynamique, la limite  $\omega(\mathcal{Y})$  d'un ensemble  $\mathcal{Y}$  de configurations est définie par :  $\omega(\mathcal{Y}) = \bigcap_{n>0} \overline{\bigcup_{m>n} f^m(\mathcal{Y})}$ .

- **Sensibilité conditions initiales** (*Sensitivity to initial conditions*) :

Un système dynamique est **sensible aux conditions initiales** si et seulement si  $\exists \epsilon_0 > 0$ , une constante indépendante de la configuration telle que :

$$\forall x \in \mathcal{X}, \{ \forall \delta > 0, \exists y \in \mathcal{X}, \exists t \in \mathbb{N} \text{ tels que } [d(x, y) < \delta \text{ et } d(\gamma_x(t), \gamma_y(t)) \geq \epsilon_0] \}$$

Cela traduit que pour toute configuration  $x$ , on trouvera une configuration  $y$  arbitrairement proche dont la trajectoire s'éloignera de celle de  $x$  de plus de  $\epsilon_0$  après un certain temps.

- **Pseudo-métrique** (*Pseudo-metric*) :

Un espace pseudo-métrique est une généralisation d'un espace métrique (muni d'une distance), où l'ensemble est muni d'une fonction pseudo-métrique vérifiant les propriétés suivantes :

- $\forall x, y \in \mathcal{X}, d(x, y) = d(y, x)$
- $\forall x \in \mathcal{X}, d(x, x) = 0$
- $\forall x, y, z \in \mathcal{X}, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Et donc, contrairement aux distances usuelles,  $d(x, y) = 0$  n'implique pas  $x = y$ .

### Chapitre 3

- **Domaine** (*Domain*) ..... p72
- **Particule** (*Particle*) ..... p72
- **Percolation dirigée** (*Directed percolation*) :

Le terme de percolation dirigée renvoie à un modèle de transition de phase qui peut représenter la propagation de fluides au travers de matériaux poreux, ayant une direction préférentielle de déplacement (simulant par exemple la gravité).

Cette transition est en fait représentative d'une grande famille de transitions de phases (la classe d'universalité de la percolation dirigée), dont tous les éléments montrent le même comportement critique à la transition.

# Bibliographie

- [1] E.R. Berlekamp, J.H. Conway, and R.K. Guy. Winning Ways for your Mathematical Plays, Vol. 4. *AK Peters, Wellesley, MA*, 4, 2001.
- [2] J.P. Delahaye. Information, complexité et hasard. 1999.
- [3] J.P. Delahaye. Le Royaume du Jeu de la Vie. *Pour la Science*, 378, April 2009.
- [4] M. Gardner. Mathematical games : The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game 'Life'. *Scientific American*, 223(4) :120–123, 1970.
- [5] H. John. Holland, Adaptation in natural and artificial systems, 1992.
- [6] M. Mitchell. *An introduction to genetic algorithms*. The MIT press, 1998.