Mathématiques I

Fonctions de deux variables: optimisation

Dr. Mucyo Karemera (enseignant), Prof. Stéphane Guerrier

Matériel disponible en ligne: https://mkaremera-math1.netlify.app/

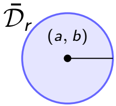
Éléments de topologie de $\mathbb{R}^2$: disque

Si la définition d'extremum global se généralise aisément aux fonctions de deux variables, pour parler de celle d'extremum local il est nécessaire de d'abord définir la notion de **voisinage dans $\mathbb{R}^2$**.

On commence par définir la notion de **disques** (ouverts et fermés) dans $\mathbb{R}^2$ qui sont les analogues des intervalles dans $\mathbb{R}$.

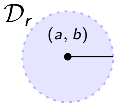
1) Un **disque fermé** de rayon $r \in \mathbb{R}_+^*$ centré en $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\bar{\mathcal{D}}_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x-a)^2 + (y-b)^2 \leqslant r^2\}$$



2) Un **disque ouvert** de rayon $r \in \mathbb{R}_+^*$ centré en $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{D}_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\}$$

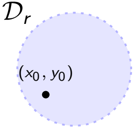


Éléments de topologie de $\mathbb{R}^2$: voisinage, intérieur & bord

On peut maintenant définir la notion de **voisinage** d'un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Définition (Voisinage dans $\mathbb{R}^2$).

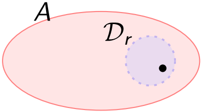
Un ***voisinage*** *de* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *est un disque ouvert* $\mathcal{D}_r$ *tel que* $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_r$.



Grâce à la notion de voisinage, on peut définir celle **d'intérieur d'un ensemble**.

Définition (Intérieur d'un ensemble).

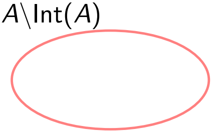
Soit $A \in \mathbb{R}^2$. *Un point* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *est* ***à l'intérieur de*** A *s'il existe un voisinage* $\mathcal{D}_r$ *de* (x_0, y_0) *tel que* $\mathcal{D}_r \subset A$. *On note* $Int(A)$ *l'ensemble des points intérieurs de* A.



Enfin, cette dernière définition nous amène à celle du **bord d'un ensemble**.

Définition (Bord d'un ensemble).

Soit $A \in \mathbb{R}^2$. *Le* ***bord de*** A *est l'ensemble de tous les points de* A *qui ne sont pas dans* $Int(A)$. *En d'autres termes, c'est l'ensemble* $A \setminus Int(A)$.



Extrema

Définition (Extrema locaux/globaux).

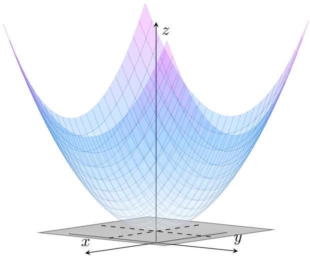
Soit $f : A \to B$ *une fonction, où* $A \subset \mathbb{R}^2$ *et* $B \subset \mathbb{R}$ *et soit* $(x_0, y_0) \in A$*. On dit que* f *admet un*

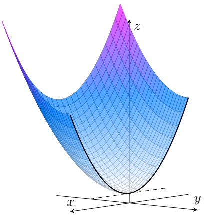
1) ***maximum global*** *en* (x_0, y_0) *si* $f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y)$, $\forall (x, y) \in A$,
2) ***minimum global*** *en* (x_0, y_0) *si* $f(x_0, y_0) \leqslant f(x, y)$, $\forall (x, y) \in A$,
3) ***maximum local*** *en* (x_0, y_0) *s'il existe un voisinage* $\mathcal{D}_r$ *de* (x_0, y_0) *tel que* $f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathcal{D}_r$,
4) ***minimum local*** *en* (x_0, y_0) *s'il existe un voisinage* $\mathcal{D}_r$ *de* (x_0, y_0) *tel que* $f(x_0, y_0) \leqslant f(x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathcal{D}_r$.

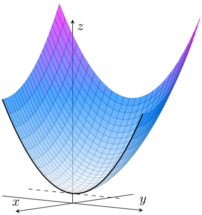
Domaine de départ: $A = \mathbb{R}^2$ ou $A = \mathcal{D}_r$

Dans la suite, toutes les fonctions considérées seront continues et dérivables deux fois et leurs ensembles de départ sont soit $\mathbb{R}^2$ ou un disque $\mathcal{D}_r$. Le cas où $A = \bar{\mathcal{D}}_r$ sera abordé la semaine prochaine (optimisation sous contrainte).

Intuitivement, pour une fonction $f(x, y)$ admettant un extremum, local ou global, en $(x_0, y_0) \in A$, le plan tangent $t_{(x_0,y_0)}(x, y)$ doit être horizontale. En d'autres termes, $t_{(x_0,y_0)}(x, y) = \textit{constante}$, ce qui implique que les dérivées partielles sont nulles en (x_0, y_0).







Une condition nécessaire sur les dérivées partielles

Cette intuition est confirmée par le théorème suivant. En général, ce résultat nous donne des candidats dans la recherche des extrema.

Théorème.

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur A et admettant un extremum en $(x_0, y_0) \in A$. Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0). \tag{1}$$

Il s'en suit la définition de point critique d'une fonction de deux variables.

Définition (Point critique).

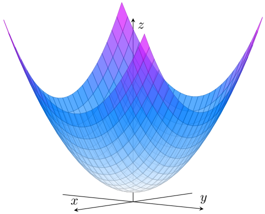
Un point dans $\mathrm{Int}(A)$ est un ***point critique*** *de f s'il satisfait (1).*

Remarque.

Un point critique ne correspond toutefois pas nécessairement un extremum.

Exemples

1) On considère la fonction $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$, définie sur $\mathbb{R}^2$. Il est facile de deviner que f admet un minimum global en $(x_0, y_0) = (0, 0)$.



Vérifions toutefois le théorème en montrant que ce point est un point critique de f. On calcule donc les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(1 + x^2 + y^2) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(1 + x^2 + y^2) = 2y,$$

puis leur évaluations en $(x_0, y_0) = (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 2 \cdot 0 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 2 \cdot 0 = 0,$$

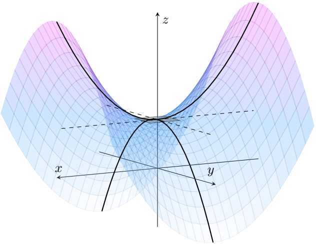
qui confirme le théorème.

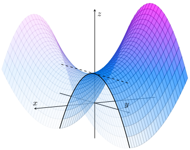
Exemples: point-selle

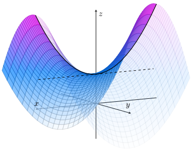
2) L'exemple suivant démontre qu'un point critique n'est pas toujours un extremum. Soit $f(x, y) = 1 + x^2 - y^2$, définie sur $\mathbb{R}^2$. On parvient à montrer que $(x_0, y_0) = (0, 0)$ est un point critique de f puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2 \cdot 0 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -2 \cdot 0 = 0.$$

Cependant, on voit (relativement) clairement que ce point ne correspond pas un extremum de f.







On dit que $(0, 0)$ est un **point-selle** de f.

Une condition suffisante sur les dérivées partielles

Pour les fonctions d'une variable, la dérivée seconde permet de déterminer la nature d'un point critique par une évaluation directe. Il en va de même pour les fonctions de deux variables, à la différence qu'il faut faire intervenir les dérivées croisées.

Pour simplifier l'écriture, on définit la quantité suivante, nommée **discriminant**,

$$D(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)^2 .$$

Théorème.

Soient $f(x, y)$ une fonction deux fois continuement dérivable sur A et $(x_0, y_0) \in A$ un point critique. Alors

1) *Si $D(x_0, y_0) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0, y_0) < 0$, f admet en (x_0, y_0) un maximum local,*
2) *Si $D(x_0, y_0) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0, y_0) > 0$, f admet en (x_0, y_0) un minimum local,*
3) *Si $D(x_0, y_0) < 0$, alors admet un point-selle en (x_0, y_0),*
4) *Si $D(x_0, y_0) = 0$, alors en (x_0, y_0) peut se produire un maximum local, un minimum local, ou un point-selle.*

Exemples

Vérifions algébriquement que $(0,0)$ est bel et bien un point-selle de $f(x,y) = 1 + x^2 - y^2$.

1) Cette fonction est bien deux fois continuement dérivable. D'après le théorème, il suffit de montrer que $D(0,0) < 0$. On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0$$

On calcule ainsi,

$$\begin{aligned} D(0,0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(0,0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(0,0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \right)^2 \\ &= 2 \cdot (-2) - (0)^2 = -4 < 0. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $(0,0)$ est un point-selle de f.

Exemples

Quels sont les extrema de $f(x,y) = -2x^2 - 2xy - 2y^2 + 36x + 42y - 158$ sur $\mathbb{R}^2$.

2) On cherche d'abord les points critiques de la fonction, i.e. on résout le système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2(2x+y-18) = 0 \\ -2(x+2y-21) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x+18 \\ 2y = -x+21 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -2x+18 \\ 2(-2x+18) = -x+21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x+18 \\ -3x = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2\cdot 5+18 \\ x = 5 \end{cases}$$

Ainsi, $(x_0, y_0) = (5, 8)$ est le seul point critique de f sur $\mathbb{R}^2$. Déterminons sa nature grâce au discriminant. On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) = -4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) = -4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2$$

donc $D(5,8) = (-4)\cdot(-4) - (-2)^2 = 16 - 4 = 12 \geqslant 0$. Ceci implique que f admet un maximum local en $(5,8)$.

Exemples

Quels sont les extrema de $f(x,y) = -2x^2 - 2xy - 2y^2 + 36x + 42y - 158$ sur $\mathbb{R}^2$.

2) On remarque sur le graphe qu'il s'agit d'un maximum global de f