

# Mathématiques I

## Application de la dérivée: approximation de fonctions

Dr. Mucyo Karemera (enseignant), Prof. Stéphane Guerrier

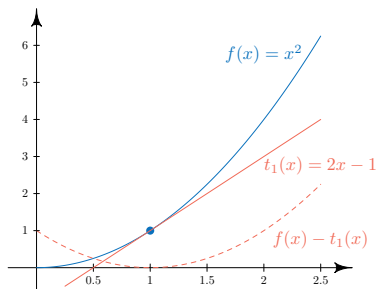
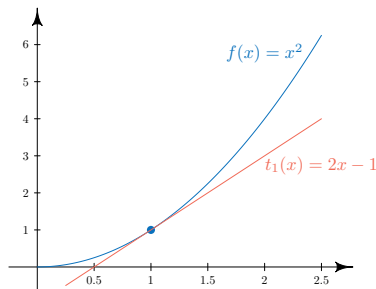
Matériel disponible en ligne: <https://mkaremera-math1.netlify.app/>

Licence: CC BY-NC-SA 4.0



# L'idée de base !

Soit  $f : A \rightarrow B$  une fonction, où  $A, B \subset \mathbb{R}$ , dérivable en  $x_0 \in A$ .



On remarque que la droite  $t_{x_0}$  est une bonne approximation de  $f$  au (ou dans un petit) voisinage de  $x_0$ . En d'autres termes, on a

$$\begin{aligned} t_{x_0}(x_0 + h) &\approx f(x_0 + h), \text{ pour } h \text{ petit,} \\ t_{x_0}(x) &\approx f(x), \text{ pour } x \text{ proche de } x_0. \end{aligned}$$

Rappelons que la fonction  $t_{x_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par

$$t_{x_0}(x) = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{pente}} \cdot x + \underbrace{(f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0)}_{\text{ordonnée à l'origine}} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

# Approximation linéaire de $f$

## Définition (Approximation linéaire de $f$ ).

Soit  $f$  est une fonction dérivable en  $x_0 \in \mathbb{R}$  et soit  $h \in \mathbb{R}$  une valeur proche de 0. Alors

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &\approx t_{x_0}(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h \\ &\Leftrightarrow \\ f(x) &\approx t_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \end{aligned}$$

On déduit facilement de la définition que

- 1)  $t_{x_0}(x_0) = f(x_0)$ , puisque  $t_{x_0}(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0) = f(x_0)$ .
- 2)  $t'_{x_0}(x_0) = f'(x_0)$ , car  $\forall x \in \mathbb{R}$  on a

$$\begin{aligned} t'_{x_0}(x) &= (f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0)' \\ &= f'(x_0) \cdot 1 + 0 - 0 = f'(x_0). \end{aligned}$$

# Approximation linéaire: exemples

Déterminer l'approximation linéaire de  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  au voisinage de  $x_0 = 27$ .

D'une part, on a  $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$  et  $f(x_0) = f(27) = 27^{1/3} = 3$ . D'autre part,  $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$  et donc

$$f'(27) = \frac{1}{3}27^{-2/3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{27^{2/3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^2} = \frac{1}{27}$$

On obtient donc, pour  $x$  proche de 27

$$\sqrt[3]{x} \approx t_{27}(x) = f(27) + f'(27)(x - 27) = 3 + \frac{x - 27}{27}.$$

Par exemple,  $\sqrt[3]{30} \approx t_{27}(30) = 3 + \frac{30-27}{27} = 3.111... = 3.\bar{1}$ . La valeur correcte à trois décimales est 3.107.

Plus  $x$  est proche de  $x_0$ , meilleur est l'approximation linéaire. Par exemple on a  $t_{27}(28) = 3.\overline{037}$  et  $\sqrt[3]{28} = 3.036...$

Faites le lien entre l'approximation linéaire et la formule de la vidéo [ici](#).

# Approximation linéaire: exemples

Déterminer l'approximation linéaire de  $f(x) = \ln(1+x)$  au voisinage de  $x_0 = 0$ .

On a d'une part,  $f(0) = \ln(1+0) = 0$  et  $f'(x) = 1/(1+x)$ , d'où  $f'(0) = 1$ .  
Ainsi, pour  $x$  proche de 0, on obtient

$$\ln(1+x) \approx t_0(x) = f(0) + f'(0)(x-0) = x.$$

## Application: la règle des 70 ou 72

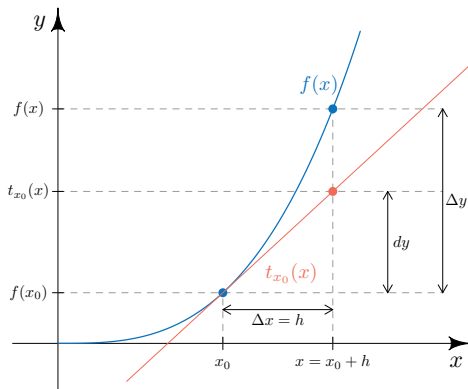
Supposons que l'on dépose un capital  $C_0 = 200\text{CHF}$  dans un compte au taux  $t = 4\%$  (intérêts composés). Combien d'années environ faut-il attendre pour voir le capital initial doublé?

Ce problème revient à trouver l'année  $n$  telle que  $C_n = 2C_0$ . En calculant on a

$$\begin{aligned} C_n &= C_0(1+t)^n = 2C_0 \Leftrightarrow 2 = (1+t)^n \Leftrightarrow \ln(2) = \ln((1+t)^n) \\ \Leftrightarrow \ln(2) &= n \ln(1+t) \Leftrightarrow n = \frac{\ln(2)}{\ln(1+t)} \approx \frac{0.7}{t} \Leftrightarrow n \approx \frac{0.7}{4/100} = \frac{7}{10} \cdot \frac{100}{4} = \frac{70}{4} \end{aligned}$$

Le capital double donc environ à  $\frac{70}{4} = 17.5$  années. La période exacte à une décimale est 17.6.

# Accroissements et différentielle



Grâce à  $t_{x_0}(x)$  on peut aussi estimer l'écart  $\Delta y = f(x) - f(x_0)$  par la quantité notée  $dy$  et donnée par  $dy = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ . En effet, on a

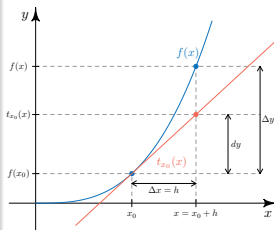
$$dy = f'(x_0) \cdot (x - x_0) = t_{x_0}(x) - f(x_0) \approx f(x) - f(x_0)$$

# Accroissements et différentielle

## Définition (Accroissements et différentielle de $f$ ).

- $\Delta x = h = x - x_0$  est *l'accroissement de  $x$*
- $\Delta y = f(x) - f(x_0)$  est *l'accroissement de  $y$  ou  $f$*
- $dy = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$  est appelée **différentielle**

Si  $x$  est proche de  $x_0$ , alors  $dy \approx \Delta y$ .



## Remarque sur différentes notations

L'accroissement de  $x$  peut aussi s'écrire  $dx$  au lieu de  $\Delta x$  et la différentielle de  $f$  peut s'écrire  $df$  au lieu de  $dy$ . Avec ces notations, on obtient l'égalité suivante

$$df = f'(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{df}{dx} = f'(x)$$

# Accroissements et différentielle: exemple

On considère  $f(x) = \sqrt{x}$ . Estimer la différence entre  $\sqrt{256} = 16$  et  $\sqrt{254}$ .

D'une part on a  $f(x) = x^{1/2}$  et  $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ . On pose alors  $x_0 = 256$  et  $h = -2$  et on estime l'accroissement

$$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0) = \sqrt{254} - \sqrt{256}$$

avec la différentielle

$$dy = f'(x_0)h = \frac{1}{2} \cdot 256^{-1/2} \cdot (-2) = -\frac{1}{\sqrt{256}} = -\frac{1}{16} = -0.0625.$$

La valeur de  $\Delta y$  à quatre décimales est  $-0.0626$ .



# Peut-on faire mieux que l'approximation linéaire?

Oui, grâce, entres autres, au théorème des accroissements finis.

## Théorème (Théorème des accroissements finis).

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $]a, b[$  et  $x, x_0 \in ]a, b[$ , alors il existe  $c \in \mathbb{R}$  entre  $x$  et  $x_0$  (i.e.  $c \in ]x_0, x[$  si  $x_0 < x$  et  $c \in ]x, x_0[$  si  $x < x_0$ ) vérifiant :

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$$

En supposant que  $f$  est deux fois différentiable en  $x_0$ , on a

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(c)(x - x_0) \\ &= \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{t_{x_0}(x)} + \underbrace{[f'(c) - f'(x_0)](x - x_0)}_{\approx df' = f''(x_0)(x - x_0)} \\ &\approx t_{x_0}(x) + f''(x_0)(x - x_0)^2 \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)(x - x_0)^2. \end{aligned}$$

# Peut-on faire mieux que l'approximation linéaire?

En apportant une petite correction au deuxième terme on obtient l'approximation de  $f$  d'ordre 2, aussi nommé le développement limité d'ordre 2 de  $f$ , notée  $p_{x_0}(x)$  et donnée par

$$\begin{aligned} p_{x_0}(x) &= t_{x_0}(x) + \frac{1}{2} f''(x_0) (x - x_0)^2 \\ &= f(x_0) + f'(x_0) (x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) (x - x_0)^2 \end{aligned}$$

Ce facteur  $\frac{1}{2}$  assure que l'on a les égalités suivantes

$$p_{x_0}(x_0) = f(x_0), \quad p'_{x_0}(x_0) = f'(x_0), \quad p''_{x_0}(x_0) = f''(x_0).$$

# Peut-on faire mieux ?

Oui, grâce à la formule de Taylor.

## **Théorème (Approx. de Taylor de $f$ d'ordre $n$ au vge de $x_0$ ).**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $f$  une fonction  $n$  fois dérivable sur un intervalle ouvert  $]a, b[$  et  $x, x_0 \in ]a, b[$ . Alors, si  $x$  est (suffisamment) proche de  $x_0$  on a

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

On calcule les approximations d'ordre 1, 2 et 5 de la fonction  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$  au voisinage de  $x_0 = 0$ . On calcule d'abord les termes suivants jusqu'à l'ordre 5

$$f(x_0) = \frac{1}{(1+x_0)^{1/2}} = 1$$

$$\frac{f'(x_0)}{1!} = -\frac{1}{2(1+x_0)^{3/2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{f''(x_0)}{2!} = \frac{3}{8(1+x_0)^{5/2}} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{f^{(3)}(x_0)}{3!} = -\frac{5}{16(1+x_0)^{7/2}} = -\frac{5}{16}$$

$$f^{(4)}(x_0) = \frac{35}{128(1+x_0)^{9/2}} = \frac{35}{128}$$

$$f^{(5)}(x_0) = -\frac{63}{256(1+x_0)^{11/2}} = -\frac{63}{256}$$

Oui, grâce à la formule de Taylor.

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $f$  une fonction  $n$  fois dérivable sur un intervalle ouvert  $]a, b[$  et  $x, x_0 \in ]a, b[$ . Alors, si  $x$  est (suffisamment) proche de  $x_0$  on a

On calcule les approximations d'ordre 1, 2 et 5 de la fonction  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$  au voisinage de 0. On obtient donc les approximations d'ordre 1, 2 et 5 suivantes au voisinage de  $x_0 = 0$ :

$$f(x) \approx 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8}$$

$$f(x) \approx 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \frac{35x^4}{128} - \frac{63x^5}{256}$$

Dr. Mucyo Karemera

# Séries de Taylor et Maclaurin

Lorsque  $f$  est infiniment différentiable (en un point  $x_0$ ), comme la fonction  $f(x) = e^x$ , on peut définir sa **série de Taylor** développée en  $x_0$  qui est

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Lorsque  $x_0 = 0$ , on nomme cette expression **série de Maclaurin**.

La convergence de ces séries dépend de  $f$  et de la distance entre  $x$  et  $x_0$ .

Par exemple, pour  $x_0 = 0$ , on a les égalités suivantes

$$1) \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, |x| < 1 \quad 2) e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$3) \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \forall x \in \mathbb{R} \quad 4) \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \forall x \in \mathbb{R}$$