Mathématiques I

Opérations sur les fonctions

Dr. Mucyo Karemera

Ce document a été préparé avec l'aide du Prof. Stéphane Guerrier

Assistants: G. Blanc, B. Poilane & H. Voegeli

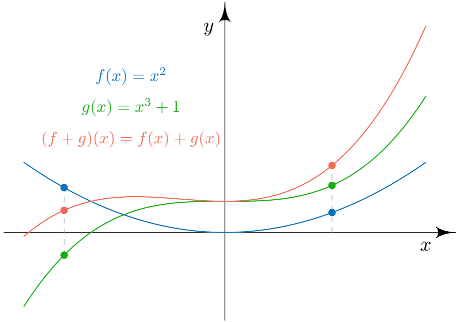
Opérations élémentaires sur les fonctions

Etant donné deux fonctions f, g de même domaine de définition, on peut aisément en créer de nouvelles avec les opérations élémentaires $+, -, \cdot, \div$.

Définition (Addition de fonctions)

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $f, g : A \to \mathbb{R}$. On définit la fonction somme, notée $(f+g)$, ainsi:

$$\begin{array}{rcl} (f+g) : A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (f+g)(x) = f(x) + g(x) \end{array}$$

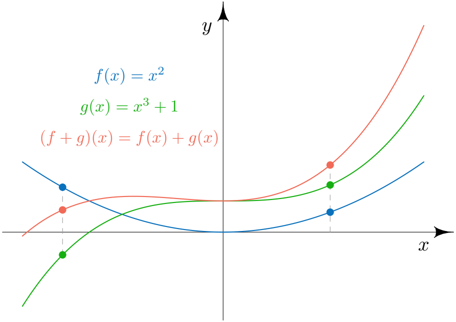


Opérations élémentaires sur les fonctions

Remarque

Si $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : B \to \mathbb{R}$ n'ont pas le même domaine de définition, la fonction somme peut être définie sur l'intersection de deux domaine, i.e.

$$(f+g) : A \cap B \to \mathbb{R}.$$



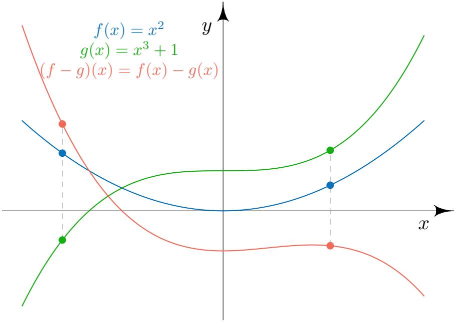
Opérations élémentaires sur les fonctions

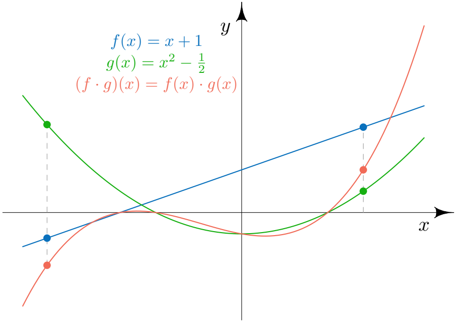
La définition est similaire pour la soustraction $(f - g)$, et la multiplication $(f \cdot g)$.

Définition (Soustraction et produit de fonctions)

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $f, g : A \to \mathbb{R}$. On définit $(f - g)$ et $(f \cdot g)$ ainsi:

$$\begin{array}{rcl} (f-g) : A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - g(x) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} (f \cdot g) : A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \cdot g(x) \end{array}$$





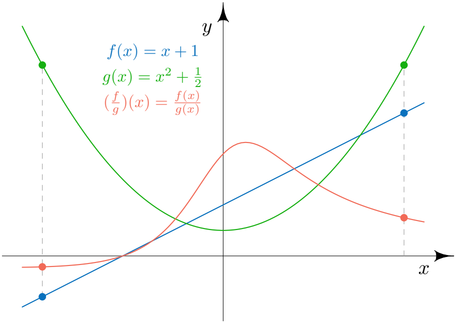
Opérations élémentaires sur les fonctions

Pour la division de fonction, il faut prendre une précaution supplémentaire.

Définition (Division de fonctions)

Soient $A \subset \mathbb{R}$ *et* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *tel que* $g(x) \neq 0$, $\forall x \in A$. *On définit* $\left(\frac{f}{g}\right)$, *ainsi:*

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right) : A &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$



Composition de fonctions

Une opération courante sur les fonctions est **la composition**.

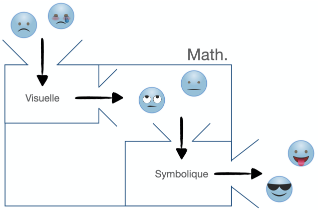
Définition (Composition de fonctions)

Soient $A, B \subset \mathbb{R}$, $f : A \to B$ et $g : B \to \mathbb{R}$. On définit la composition de f et de g, notée $(g \circ f)$, ainsi:

$$\begin{array}{rcl} (g \circ f) : A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{array}$$

L'écriture ci-dessus peut aussi se comprendre de la façon suivante

$$\begin{array}{rcccc} (g \circ f) : A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$



Composition de fonctions

Attention

Il faut veiller à ne pas confondre $(g \circ f)$ et $(f \circ g)$. Par exemple, pour

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$$

$(g \circ f)$ **est bien définie alors que** $(f \circ g)$ **n'est l'est pas!!**
En particulier, on a dans ce cas $\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$$(g \circ f)(x) = g(\sqrt{x}) = g(x^{\frac{1}{2}}) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3 = x^{\frac{3}{2}}.$$

Par contre,

$$(f \circ g)(-1) = f\left((-1)^3\right) = f(-1) = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}.$$

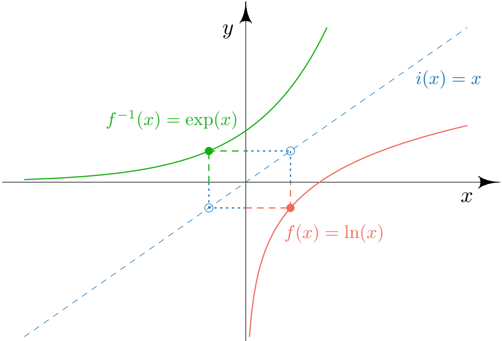
Réciproque d'une fonction

Pour une fonction **bijective** $f : A \to B$, où $A, B \subset \mathbb{R}$, on peut caractériser la **réciproque**, notée $f^{-1} : B \to A$ par l'équivalence suivante

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Cette équivalence peut aussi s'écrire avec le signe de composition ainsi: $\forall x \in A$ et $\forall y \in B$

$$x = (f^{-1} \circ f)(x) \text{ et } y = (f \circ f^{-1})(y).$$



Réciproque d'une fonction

Attention

Il faut veiller à ne pas confondre f^{-1} et $\frac{1}{f}$. La première est définie ci-dessus et la deuxième est donnée par

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$$

$\forall x \in A$ tel que $f(x) \neq 0$.

Ceci explique pourquoi la notation f^r est parfois préférée pour désigner la fonction réciproque.