Mathématiques I

Application de la dérivée: optimisation

Dr. Mucyo Karemera (enseignant), Prof. Stéphane Guerrier

Matériel disponible en ligne: `https://mkaremera-math1.netlify.app/`

Optimisation

Les problèmes d'optimisations se traduisent souvent par **la recherche de maximums et/ou de minimums** de fonctions.

Définition (Maximum/minimum local/global).

Soit $f : A \to B$ une fonction, où $A, B \subset \mathbb{R}$ et soit $c \in A$, alors

1) *$f(c)$ est un **maximum global** de f si $f(c) \geqslant f(x)$, $\forall x \in A$*
2) *$f(c)$ est un **minimum global** de f si $f(c) \leqslant f(x)$, $\forall x \in A$*
3) *$f(c)$ est un **maximum local** de f s'il existe un voisinage de c noté $V_c \subset A$ tel que $f(c) \geqslant f(x)$, $\forall x \in V_c$*
4) *$f(c)$ est un **minimum local** de f si $f(c) \geqslant f(x)$, $\forall x \in A$*

Un maximum/minimum de f (local ou global) est nommé **extremum** de f.

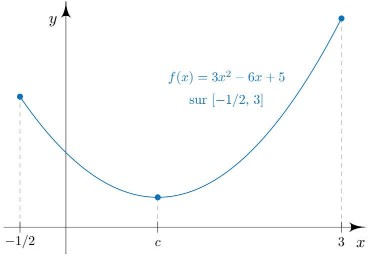
Sous certaines conditions, on peut définir des stratégies pour trouver ces valeurs.

Domaine de départ compact

Il est très important de bien considérer la nature du domaine de départ de la fonction.

On sait par exemple que si A **est compact** et que f **est continue** alors elle a au moins un **maximum global et un minimum global** par le **théorème des valeurs extrêmes**.

Par exemple pour $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$ définit sur $[-\frac{1}{2}, 3]$, **on peut voir** que f atteint son maximum en sa borne $x = 3$ et son minimum est atteint dans l'intervalle $]0, 3[$.



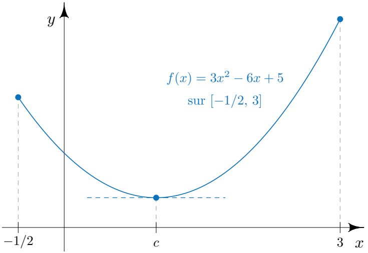
Mais comment déterminer cette valeur minimale?

Domaine de départ compact

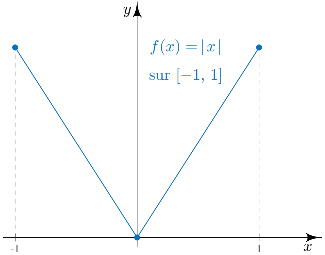
Le théorème suivant nous permet de l'identifier. En général, ce résultat nous donne des candidats dans la recherche des extrema.

Théorème.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a, b[$ et admettant un extremum en $c \in]a, b[$. Alors soit $f'(c) = 0$, soit $f'(c)$ n'existe pas



$f'(c) = 0$



$f'(c)$ n'existe pas

Domaine de départ compact

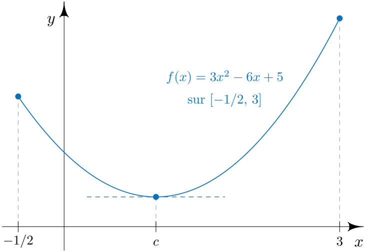
Le théorème suivant nous permet de l'identifier. En général, ce résultat nous donne des candidats dans la recherche des extrema.

Théorème.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue, dérivable sur* $]a,b[$ *et admettant un extremum en* $c \in]a,b[$*. Alors soit* $f'(c) = 0$*, soit* $f'(c)$ *n'existe pas*

$f(x) = 3x^2 - 6x + 5$ définie sur $[-\frac{1}{2}, 3]$ vérifie les conditions du théorème, on peut donc déterminer le minimum par le (simple) calcul suivant:

$$f'(c) = (3c^2 - 6c + 5)' = 6c - 6 = 0 \Rightarrow c = 1.$$



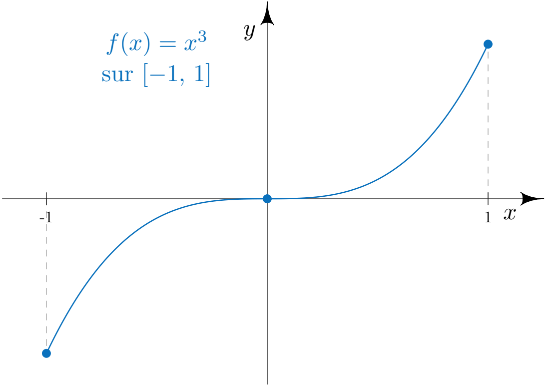
Les valeurs minimale et maximale de f sont donc

$$f(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = 14$$
$$f(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 5 = 2.$$

Domaine de départ compact : extrema et points critiques

Attention toutefois, **la réciproque du théorème est fausse**. Autrement dit, un **point critique**, i.e. un point c tel que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ n'existe pas, ne correspond pas nécessairement à un extremum.

L'exemple suivant l'illustre: soit $f(x) = x^3$ définie sur $[-1, 1]$. On a $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$, donc 0 **est un point critique mais n'est pas un extremum**.



Domaine de départ compact: stratégie

Pour une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, on peut donc définir la stratégie suivante:

Stratégie pour trouver les extrema de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

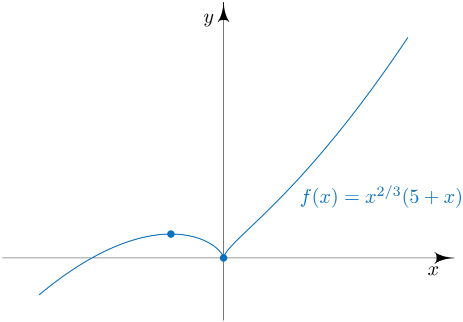
1) Repérer tous les points critiques de f dans $]a, b[$,
2) calculer f aux extrémités a et b de l'intervalle, de même qu'en tous les points critiques,
3) la plus grande valeur et la plus petite valeur de f trouvée dans 2) sont, respectivement, la valeur maximale et la valeur minimale de f sur $[a, b]$.

Domaine de départ non (nécessairement) compact

Une fonction continue $f : A \to B$, où A **n'est pas compact**, peut aussi posséder des points critiques.

La différence avec un domaine de départ compact est qu'**il n'y pas de garantie de trouver des extrema globaux**. Mais **ces points critiques** peuvent tout de même correspondre à des **extrema locaux**.

Par exemple, la fonction $f(x) = x^{2/3}(5 + x) = \sqrt[3]{x^2}(5 + x)$ définie sur $\mathbb{R}$ possède deux points critiques, qui sont des extrema locaux mais ne sont pas globaux.



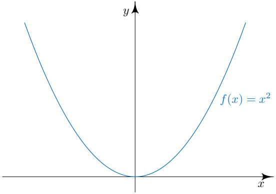
Test de la première dérivée

Le test suivant, permet de déterminer les points critiques de $f(x) = x^{2/3}(5 + x)$ et fournit même un critère pour distinguer minimums et maximums locaux.

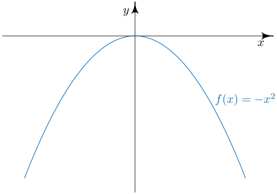
Test de la première dérivée

Soit $c \in A$ un point critique de $f : A \to B$ continue, alors

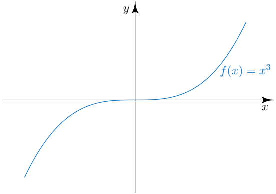
1) si $f'(x)$ **passe du positif au négatif** en c, alors $f(c)$ est un **maximum local** de f.
2) si $f'(x)$ **passe du négatif au positif** en c, alors $f(c)$ est un **minimum local** de f.
3) si $f'(x) > 0$ ou si $f'(x) < 0$, $\forall x \in V_c \setminus \{c\}$, alors $f(c)$ **n'est pas une extremum** de f.



$f(x) = x^2$ et $f'(x) = 2x$



$f(x) = -x^2$ et $f'(x) = -2x$



$f(x) = x^3$ et $f'(x) = 3x^2$

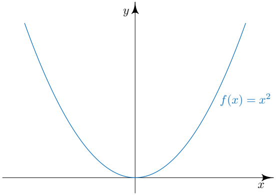
Test de la première dérivée

Le test de dérivée première se justifie par le théorème suivant,

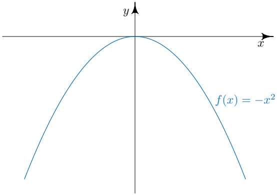
Théorème.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a, b[$. Alors

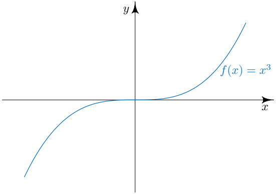
1) *f est décroissante sur $]a, b[$ si et seulement si $f'(x) \leq 0$, pour tout $x \in]a, b[$*
2) *f est croissante sur $]a, b[$ si et seulement si $f'(x) \geq 0$, pour tout $\forall x \in]a, b[$.*



$f(x) = x^2$ et $f'(x) = 2x$



$f(x) = -x^2$ et $f'(x) = -2x$



$f(x) = x^3$ et $f'(x) = 3x^2$

Test de la dérivée seconde

Si la fonction $f : A \to B$ est dérivable deux fois, le test suivant peut être utilisé

Test de la dérivée seconde

Soit $c \in]a, b[$ un point critique de $f : A \to B$ deux fois dérivable sur $]a, b[\subset A$ (ce qui implique que $f'(c) = 0$), alors

1) si $f^{''}(c) > 0$, alors c est un minimum local,
2) si $f^{''}(c) < 0$, alors c est un maximum local.
3) si $f^{''}(c) = 0$, alors on ne peut rien conclure. (c peut être un extremum ou pas)[a]

[a] pour $f(x) = x^4$, on a $f''(0) = 0$ et 0 est un minimum global et pour $f(x) = x^3$, on a $f''(0) = 0$ et 0 n'est pas un extrmum.

Ce test permet de déterminer la nature d'un point critique en connaissant les deux premières dérivées de f, mais uniquement au point critique lui-même.

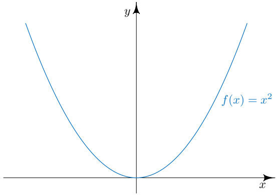
Test de la dérivée seconde

Le test de la dérivée seconde se justifie par le théorème suivant,

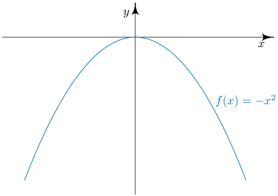
Théorème.

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle $]a, b[$. Alors

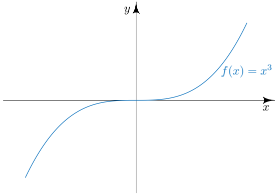
1) $f''(x) > 0$, *pour tout* $x \in]a, b[\Rightarrow f$ *est convexe sur* $]a, b[$
2) $f''(x) < 0$, *pour tout* $x \in]a, b[\Rightarrow f$ *est concave sur* $]a, b[$



fonction convexe



fonction concave



ni l'un ni l'autre

Les points où f'' s'annule se nomment les **points d'inflexions de f**. Ils correspondent aux points où f passe de localement convexe à localement concave et inversement.

Marche à suivre pour déterminer les extrema

En résumé, voici les étapes pour déterminer les extrema d'une fonction continue $f : A \to B$, ou A est soit un intervalle (ouvert ou fermé), soit $A = \mathbb{R}$.

Marche à suivre

1) Les candidats sont
   - les points critiques de f
   - les extrémités de A, si elles appartiennent à A.
2) Pour les points critiques où la première **et** la seconde dérivée existe, faire le test de la seconde dérivée.

   Si f'' s'annulent en un de ces points, étudier le signe de la première dérivée au voisinage de ce point (comme dans le test de la dérivée première).
3) Pour les points autres points critiques, faire le test de la dérivée première.
4) Calculer les valeurs de f aux extrémités (si elles sont dans A), puis comparer avec les valeurs obtenus en évaluant f aux points critiques.