Université de Genève — GSEM

Mathématiques I — Automne 2020

Mucyo Karemera — **Série 4**

Exercise 1:

1. Parmi les variables suivantes, lesquelles peuvent raisonnablement être représentées par des fonctions continues du temps?

   - ☐ La taille d'un enfant qui grandit.
   - ☐ La vitesse d'un avion en vol.
   - ☐ La distance parcourue par une voiture.
   - ☐ Le nombre d'habitants de Genève.
   - ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

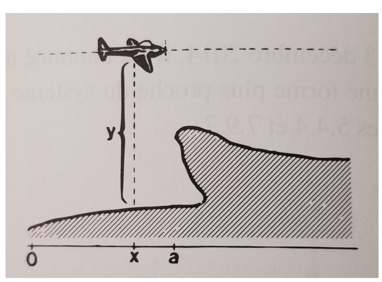
2. Quelle est l'image de 2 par la fonction $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x \leqslant 2 \\ -x^2 + 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$?

   - ☐ 3
   - ☐ 27
   - ☐ -3
   - ☐ -37
   - ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

3. On considère la fonction $f(x) = \begin{cases} x^3 - 5x, & \text{si} \quad x < 4 \\ 11x, & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$. Cocher ce qui est vrai:

   - ☐ La fonction est bien définie en 4.
   - ☐ $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 44$
   - ☐ $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = f(4) = 44$
   - ☐ La fonction n'est pas définie en 4.
   - ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

4. Un avion survole un relief. On note x la position à la verticale duquel il se trouve et y la distance de l'avion au sol en dessous de lui. La situation est illustrée dans la figure ci-dessous où le relief est représenté par la zone hachurée. Est-ce que y est une fonction continue de x?



   - ☐ Oui
   - ☐ Non

5. La fonction $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{si} \quad x<2 \\ x+6 & \text{si} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$

   ☐ est continue sur $\mathbb{R}$,

   ☐ est continue en $x = 3$,

   ☐ est continue en $x = 2$,

   ☐ est discontinue en $x = 2$.

   ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

6. La fonction $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2-1} & \text{si} \quad x<-1 \\ \frac{1}{x^2+1} & \text{si} \quad x \geqslant -1 \end{cases}$

   ☐ est continue sur $]-1,1[$

   ☐ est discontinue sur $]-2,1[$

   ☐ est discontinue sur $[-1,1]$.

   ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

7. On considère la fonction $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si} \quad x<2 \\ -x^2+1 & \text{si} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$. Peut-on calculer $\lim_{x\to 2} f(x)$ en utilisant la continuité?

   ☐ Oui

   ☐ Non

8. On considère la fonction $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si} \quad x<2 \\ -x^2+1 & \text{si} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$. Peut-on calculer $\lim_{x\to 4} f(x)$ en utilisant la continuité?

   ☐ Oui

   ☐ Non

9. Quelles valeurs faut-il attribuer à $c \in \mathbb{R}$ pour que la fonction suivante soit continue sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} c^2x+1 & \text{si} \quad x \leqslant 2 \\ 9x^2+1 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

   ☐ 3 ou -3

   ☐ $9\sqrt{2}$ ou $-9\sqrt{2}$

   ☐ $\sqrt{18}$ ou $-\sqrt{18}$

   ☐ $3\sqrt{2}$ ou $-3\sqrt{2}$

   ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

10. La fonction $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ x^2+1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$ est-elle dérivable en $x = 1$?

   ☐ Oui

   ☐ Non

11. Est-il justifié d'utiliser la règle de l'Hospital pour calculer $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{a^2 + 2ax + x^2}{x^2 - a^2}$ avec $a \neq 0$?

    ☐ Oui

    ☐ Non

12. Est-il justifié d'utiliser la règle de l'Hospital pour calculer $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{a^2 - 2ax + x^2}{x^2 - a^2}$?

    ☐ Oui

    ☐ Non

13. On considère les fonctions $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = e^x - x^3$. Déterminer $(g \circ f)'(x)$.

    ☐ $2(e^x - x^3)(e^x - 3x^2)$

    ☐ $2xe^{x^2+1} - 6x(x^2 + 1)^2$

    ☐ $e^{2x} + x^6 - 2x^3 e^x + 1$

    ☐ $e^{x^2+1} - (x^2 + 1)^3$

    ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

14. On considère les fonctions $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = e^x - x^3$. Déterminer $(g \cdot f)'(x)$.

    ☐ $(x^2 + 1)e^x - x^5 - x^3$

    ☐ $2(e^x - x^3)(e^x - 3x^2)$

    ☐ $2xe^{x^2+1} - 6x(x^2 + 1)^2$

    ☐ $(x + 1)^2 e^x - 5x^4 - 3x^2$

    ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

15. On considère les fonctions $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = e^x - x^3$. Déterminer $(\frac{g}{f})'(x)$.

    ☐ $\frac{e^x - 3x^2}{2x}$

    ☐ $\frac{-(x-1)^2 e^x - 5x^3 + x^5}{(x^2+1)^2}$

    ☐ $\frac{(x-1)^2 e^x - x^4 - 3x^2}{(x^2+1)^2}$

    ☐ $\frac{e^x - x^3}{x^2+1}$

    ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

Exercise 2:
On voudrait déterminer la dérivée de la fonction $f(x) = x^x$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Considérer la fonction $g(x) = (\ln \circ f)(x) = \ln(x^x)$ et calculer $g'(x)$ en utilisant la formule de la dérivée des fonction composée.
2. Utiliser la propriété du logarithme sur les puissances pour montrer que $g'(x) = \ln(x) + 1$.
3. Déduire des précédents points $f'(x)$.

Exercise 3:
En utilisant la formule de l'Hôpital, calculer les limites :

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x^2-1}}{e^{x^2}-e^x}$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)^2}{x}$