

Thèse de doctorat

École doctorale : Science, Ingénierie et Environnement

Spécialité : Structures et Matériaux

Présentée par

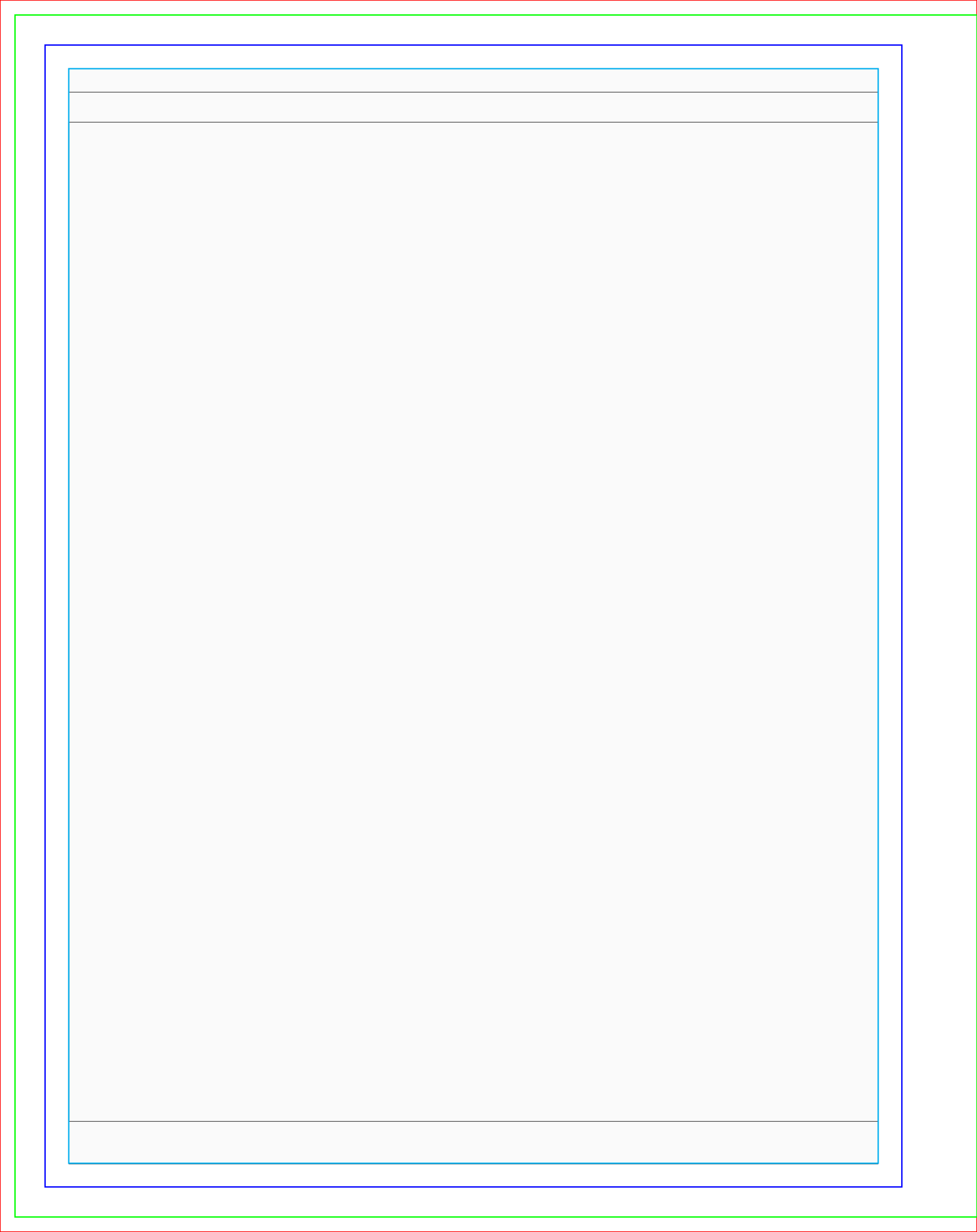
Lionel du Peloux de Saint Romain

Modeling of bending-torsion couplings in active-bending structures

Application to the design of elastic gridshells

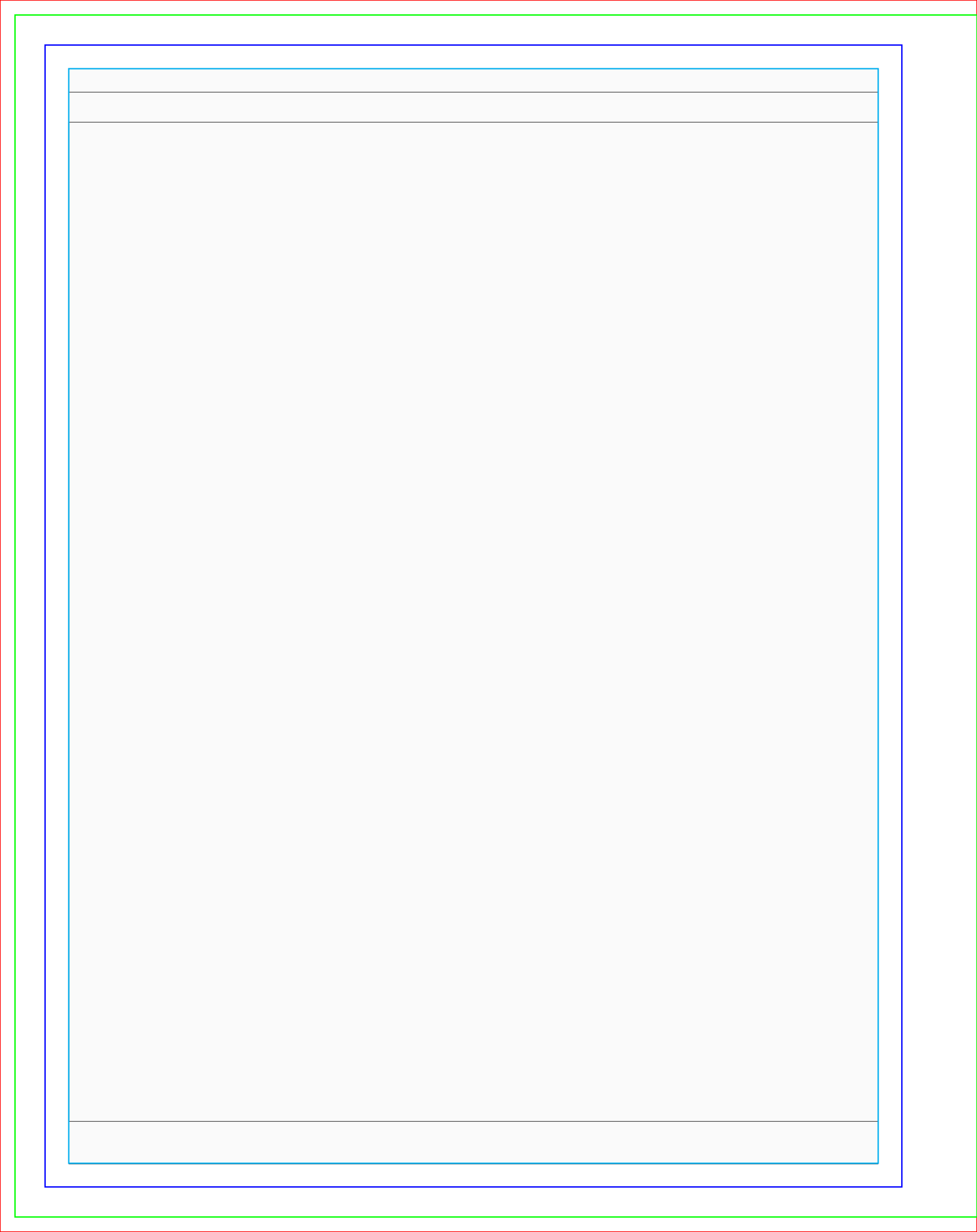
Soutenue à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées,
le 20 décembre 2017, devant le jury composé de :

Président	Bernard MAURIN	Université Montpellier 2
Rapporteurs	Sébastien NEUKIRCH	Université Pierre et Marie Curie
	Carlos LÁZARO	Universitat Politècnica de València
Examineurs	Alberto PUGNALE	University of Melbourne
	Jean-François CARON	École des Ponts ParisTech
	Cyril DOUTHE	École des Ponts ParisTech
Invité	Bernard VAUDEVILLE	T/E/S/S atelier d'ingénierie
Directeur de thèse	Olivier BAVEREL	École des Ponts ParisTech



“Quia nominor leo.”

A Jacques & Christiane, mes grands-parents bien-aimés.



Préface

Tu ne peux vivre que de cela que tu transformes,
et dont un peu chaque jour, puisque tu t'échanges
contre, tu meurs.

Antoine de Saint-Exupéry
Citadelle

Si pour une raison quelconque il ne devait subsister qu'une unique page de ce manuscrit, j'aimerais autant que ce soit celle-là. Et qu'alors, seuls vivent les quelques mots de gratitude qui suivent pour les personnes qui m'ont accompagné sur ce chemin de fortune ; chemin initié en 2010 au sortir de l'Ecole Centrale et qui m'a conduit à présenter cette thèse.

Plus que la perspective d'une éventuelle contribution scientifique, c'est avant tout un certain goût pour la liberté *d'aller et venir* qui m'a animé : liberté des pieds qui vont ; liberté des mains qui font ; liberté de penser ; cette même liberté que je quête à travers mes sorties en montagne.

L'une de mes plus grandes chances aura été de faire participer mon corps tout entier à cette entreprise, de pouvoir d'un même mouvement concevoir et bâtir des gridshells, objets de cette étude, sans quoi ma compréhension du sujet serait restée beaucoup plus superficielle. Par ailleurs, les joies simples glanées sur les chantiers de ces projets atypiques – je pense en particulier aux séminaires *Construire le Courbe* avec des étudiants, à la construction du pavillon Solidays en 2011 avec des bénévoles et plus encore à la réalisation de la cathédrale éphémère de Créteil en 2013 avec des paroissiens – furent pour moi sans égales avec celles, plus rares, reçues dans mon quotidien quelque peu taciturne de chercheur.

Chers Jean-François et Olivier, merci de m'avoir accueilli au sein de l'équipe MSA et d'avoir su me trouver une place sur mesure au fil de ces années. Merci pour la liberté que vous m'avez procurée et pour la confiance que vous m'avez accordée dans la conduite de mon travail de recherche, mais aussi dans certains projets annexes (e.g. solidays, thinkshell, booby). L'équipe s'est étoffée de nouveaux talents et la construction de cette dynamique

Préface

vous doit beaucoup : vous savez catalyser notre enthousiasme.

Cher Cyril, merci de ce compagnonnage de quelques années. Je me souviens de t'avoir (un peu) connu avant même de te rencontrer, par l'étude de ta thèse ! J'ai pris beaucoup de plaisir à travailler avec toi au cours de ces années et il en est sorti de beaux projets. Merci plus particulièrement pour les responsabilités que tu m'as confiées dans le séminaire Construire le Courbe et d'avoir accepté d'en chambouler le programme pédagogique d'année en année. Merci également pour ton écoute, tes conseils et ton précieux travail de relecture tout au long de l'élaboration de ce manuscrit. Sa qualité s'en est trouvée grandement améliorée.

Cher Bernard, nous avons partagé sans doute quelques angoisses sans nous le dire, mais cette cathédrale de Créteil restera pour moi un projet mémorable et intense. Merci de m'avoir fait confiance pour développer ce projet et d'avoir été présent dans les moments critiques de cette aventure. Plus qu'un bagage technique, j'ai appris durant ces trois années chez T/E/S/S une certaine façon de résoudre des problèmes, de chercher des solutions sans me décourager. Et cela m'a beaucoup profité dans mon travail de thèse et me restera acquis pour les années à venir. Merci donc à toi ainsi qu'à Tom et à Matt pour ce qui m'a été transmis au bureau.

Cher Frédéric, avec toi j'ai manié la clef dynamométrique comme jamais ! Ton travail a grandement contribué à la réussite des projets Solidays et Créteil. Tu es toujours disponible pour trouver une solution, bricoler un montage, faire fonctionner un four ou une fraise, imprimer une pièce en 3D, réparer des gouttières, partager ton analyse, donner un conseil, etc. J'ai beaucoup appris du travail que tu as initié au cours de ta thèse avec l'aide de Baptiste et dans la continuité duquel je m'inscris. Merci pour tout cela.

Je tiens à remercier Sébastien Neukirch et Carlos Lázaro, rapporteurs, qui par leurs remarques et conseils avisés ont contribué à améliorer la qualité de ce mémoire de thèse. Je remercie également les autres membres du jury – Bernard Maurin son président, Alberto Pugnale, Jean-François Caron, Cyril Douthe et Bernard Vaudeville – pour leur écoute et leurs remarques de qualité. C'est toujours une grande chance de bénéficier d'une relecture rigoureuse de son propre travail par des personnes d'expérience ; et cela permet d'en regarder avec plus de lucidité les solidités comme les faiblesses.

Merci chers Marine, Romain(s), Robert, Gilles, Arthur, Ioanis, Marie, Tristan, Pierre(s), Victor, Philippe, Vianney ... co-bureaux ou collègues de travail plus ponctuels, notamment lors des semaines *Construire le Courbe*, pour les petits mots échangés ça et là lors d'un café ou d'un repas et pour votre enthousiasme quotidien. Merci Marie-Françoise, Christophe, Anne, Gilles, Géraldine, Alain, Hocine, pour l'aide constante apportée au cours de ces années passées au laboratoire.

Enfin, je ne serais pas allé au bout de ce travail sans le soutien des nombreux parents et amis qui m'entourent quotidiennement. A vous tous, merci de votre soutien et de votre patience lors de ces derniers mois, avec une mention toute spéciale pour Blandine qui m'a gratifié de son affection indéfectible et a supporté mes horaires incongrus.

Lyon, le 4 novembre 2017
Lionel du Peloux

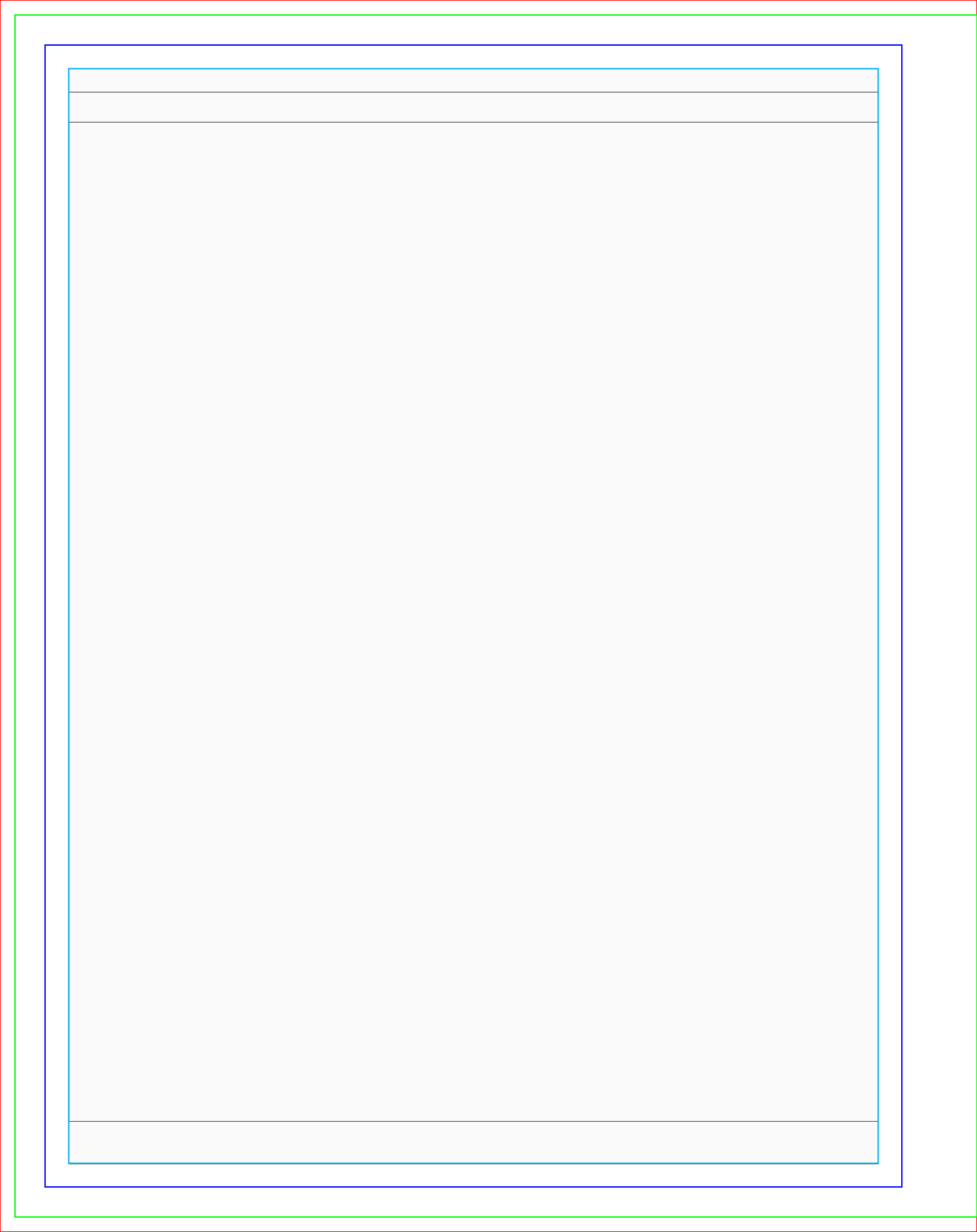
Abstract

An *elastic gridshell* is a freeform structure, generally doubly curved, but formed out through the reversible deformation of a regular and initially flat structural grid. Building curved shapes that may seem to offer the best of both worlds : shell structures are amongst the most performant mechanically speaking while planar and orthogonal constructions are much more efficient and economic to produce than curved ones. This ability to “form a form” efficiently is of peculiar importance in the current context where morphology is a predominant component of modern architecture, and envelopes appear to be the neuralgic point for building performances.

The concept was invented by Frei Otto, a German architect and structural engineer who devoted many years of research to gridshells. In 1975 he designed the Multihalle of Mannheim, a 7500 m² wooden shell which demonstrated the feasibility of this technology and made it famous to a wide audience. However, despite their potential, very few projects of this kind were built after this major realization. And for good reason, the resources committed at that time cannot guarantee the replicability of this experiment for more standard projects, especially on the economic level. Moreover, the technics and methods developed by Otto’s team in the 1960s have mostly fall into disuse or are based on disciplines that have considerably evolved. New materials, such as composite materials, have recently emerged. They go beyond the limitations of conventional materials such as timber and offer at all levels much better technical performances for this kind of application. Finally, it should be noted that the regulatory framework has also deeply changed, bringing a certain rigidity to the penetration of innovations in the building industry. Therefore, the design of gridshells arises in new terms for current architects and engineers and comes up against the inadequacy of existing tools and methods.

In this thesis, which marks an important step in a personal research adventure initiated in 2010, we try to embrace the issue of the design of elastic gridshells in all its complexity, addressing both theoretical, technical and constructive aspects. In a first part, we deliver a thorough review of this topic and we present in detail one of our main achievements, the ephemeral cathedral of Créteil, built in 2013 and still in service. In a second part, we develop an original discrete beam element with a minimal number of degrees of freedom adapted to the modeling of bending and torsion inside gridshell members with anisotropic cross-section. Enriched with a ghost node, it allows to model more accurately physical phenomena that occur at connections or at supports. Its numerical implementation is presented and validated through several test cases. Although this element has been developed specifically for the study of elastic gridshells, it can advantageously be used in any type of problem where the need for an interactive computation with elastic rods taking into account flexion-torsion couplings is required.

Keywords : gridshell, form-finding, active-bending, free-form, torsion, elastic rod, coupling, fibreglass, composite material.



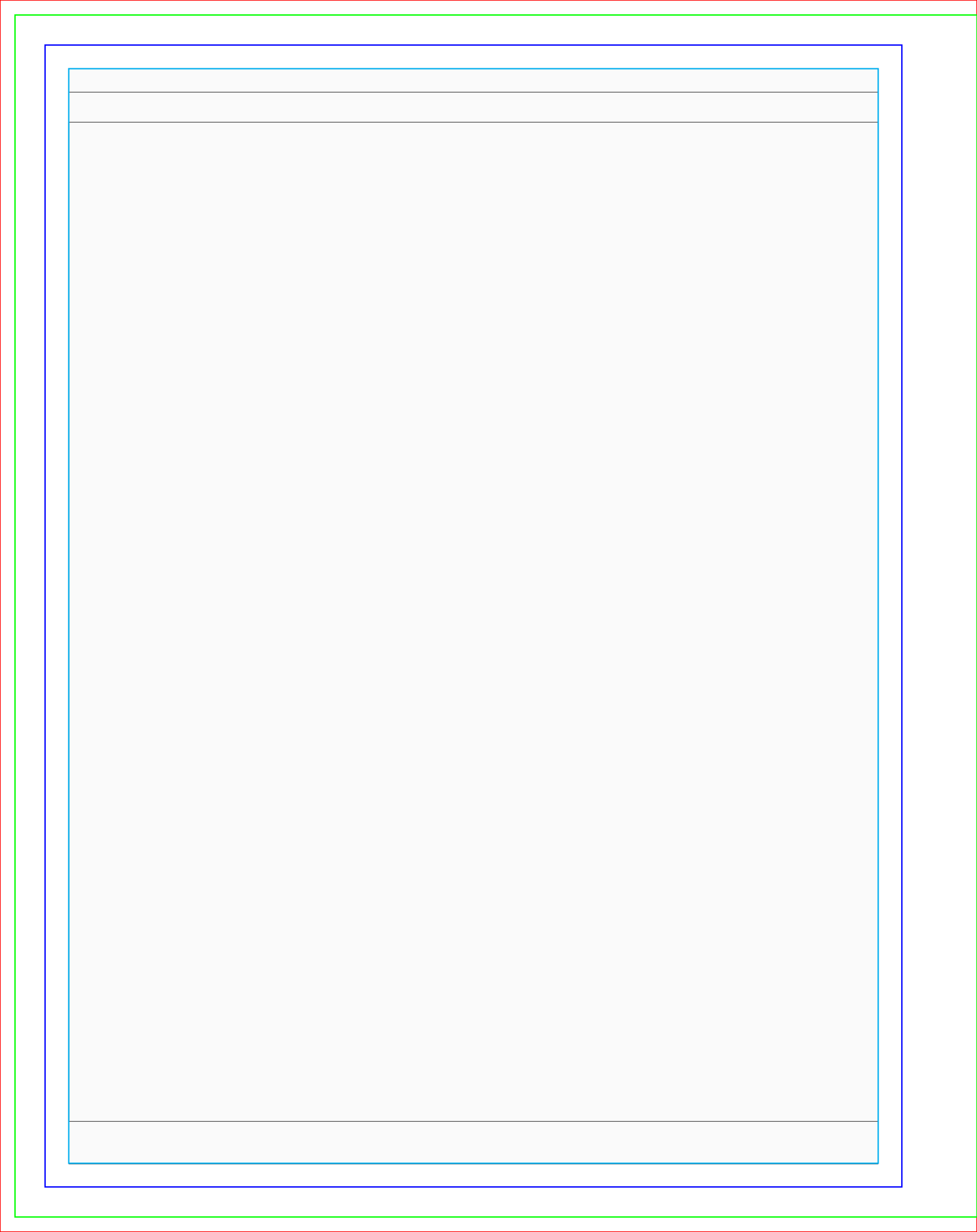
Résumé

Les structures de type *gridshell élastique* permettent de réaliser des enveloppes courbes par la déformation réversible d'une grille structurelle régulière initialement plane. Cette capacité à "former la forme" de façon efficiente prend tout son sens dans le contexte actuel où, d'une part la forme s'impose comme une composante prédominante de l'architecture moderne, et d'autre part l'enveloppe s'affirme comme le lieu névralgique de la performance des bâtiments.

Fruit des recherches de l'architecte et ingénieur allemand Frei Otto dans les années 1960, elles ont été rendues populaires par la construction de la Multihalle de Mannheim en 1975. Cependant, en dépit de leur potentiel, très peu de projets de ce type ont vu le jour suite à cette réalisation emblématique qui en a pourtant démontré la faisabilité à grande échelle. Et pour cause, les moyens engagés à l'époque ne sauraient assurer la reproductibilité de cette expérience dans un contexte plus classique de projet, notamment sur le plan économique. Par ailleurs, les techniques et les méthodes développées alors sont pour la plus part tombées en désuétude ou reposent sur des disciplines scientifiques qui ont considérablement évoluées. Des matériaux nouveaux, composites, ont vu le jour. Ils repoussent les limitations intrinsèques des matériaux usuels tel que le bois et offrent des performances techniques bien plus intéressantes pour ce type d'application. Enfin, notons que le cadre réglementaire a lui aussi profondément muté, apportant une certaine rigidité vis-à-vis de la pénétration des innovations. Ainsi la conception des gridshells se pose-t-elle en des termes nouveaux aux architectes et ingénieurs actuels et se heurte à l'inadéquation des outils et méthodes existant.

Dans cette thèse, qui marque une étape importante dans une aventure de recherche personnelle initiée en 2010, nous tentons d'embrasser la question de la conception des gridshells élastiques dans toute sa complexité, en abordant aussi bien les aspects théoriques que techniques et constructifs. Dans une première partie, nous livrons une revue approfondie de cette thématique et nous présentons de façon détaillée l'une de nos principales réalisations, la cathédrale éphémère de Créteil, construite en 2013 et toujours en service. Dans une seconde partie, nous développons un élément de poutre discret original avec un nombre minimal de degrés de liberté adapté à la modélisation de la flexion et de la torsion dans les gridshells constitués de poutres de section anisotrope. Enrichi d'un noeud fantôme, il permet de modéliser plus finement les phénomènes physiques au niveau des connexions et des appuis. Son implémentation numérique est présentée et validée sur quelques cas tests. Bien que cet élément ait été développé spécifiquement pour l'étude des gridshells élastiques, il pourra avantageusement être utilisé dans tout type de problème où la nécessité d'un calcul interactif avec des tiges élastiques prenant en compte les couplages flexion-torsion s'avère nécessaire.

Keywords : gridshell, form-finding, active-bending, free-form, torsion, elastic rod, coupling, fibreglass, composite material.

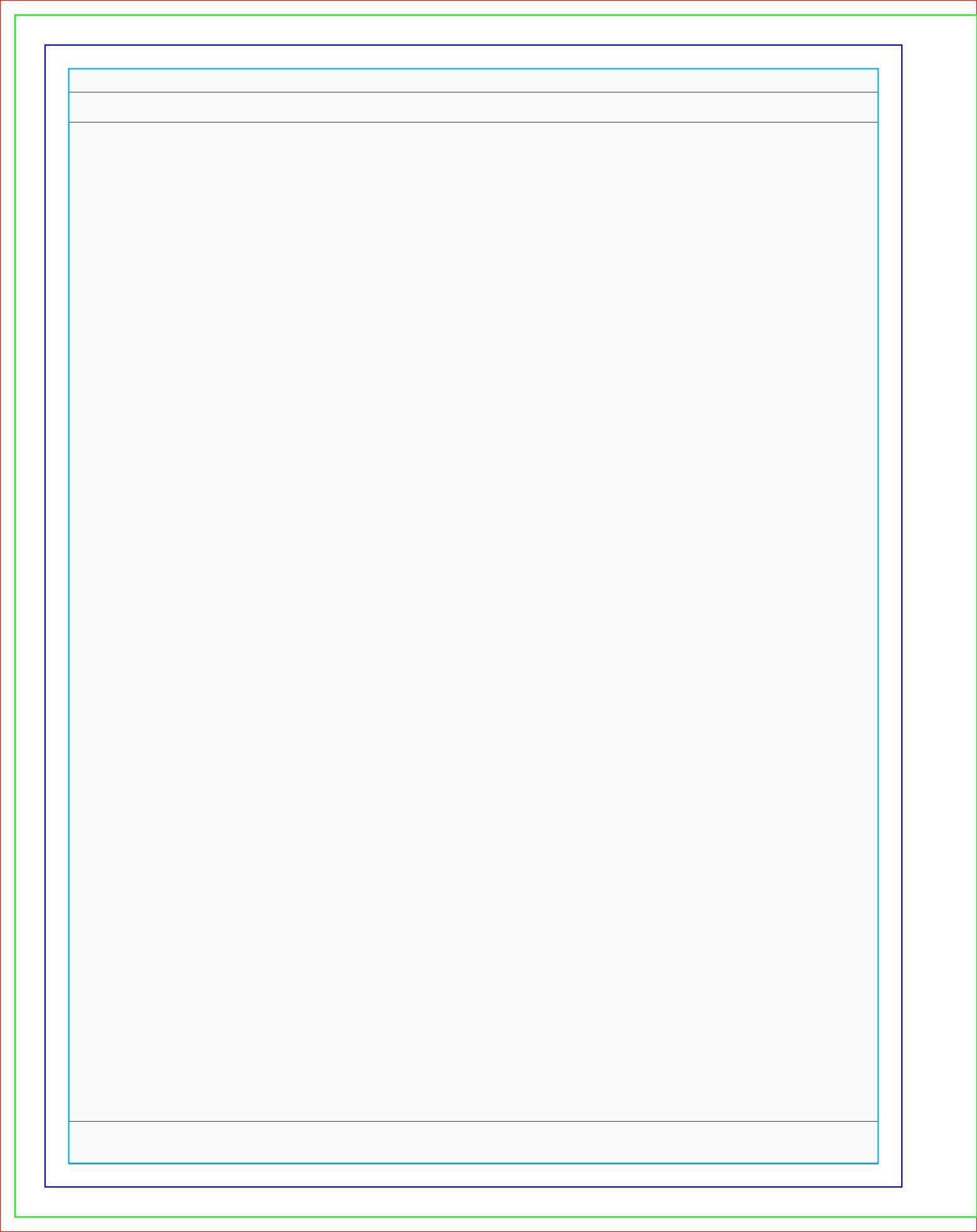


Contents

Préface	v
Abstract (English/Français)	vii
Contents	xi
List of Figures	xiii
List of Tables	xv
Introduction	1
I Elastic gridshells	5
II Rich Kirchhoff beam model	7
III Appendix	9
A Review of built elastic gridshells	11
A.1 References	14
B Calculus of variations	15
B.1 Introduction	15
B.2 Spaces	15
B.2.1 Normed space	15
B.2.2 Inner product space	15
B.2.3 Euclidean space	16
B.2.4 Banach space	16
B.2.5 Hilbert space	16
B.3 Derivative	17
B.3.1 Fréchet derivative	17

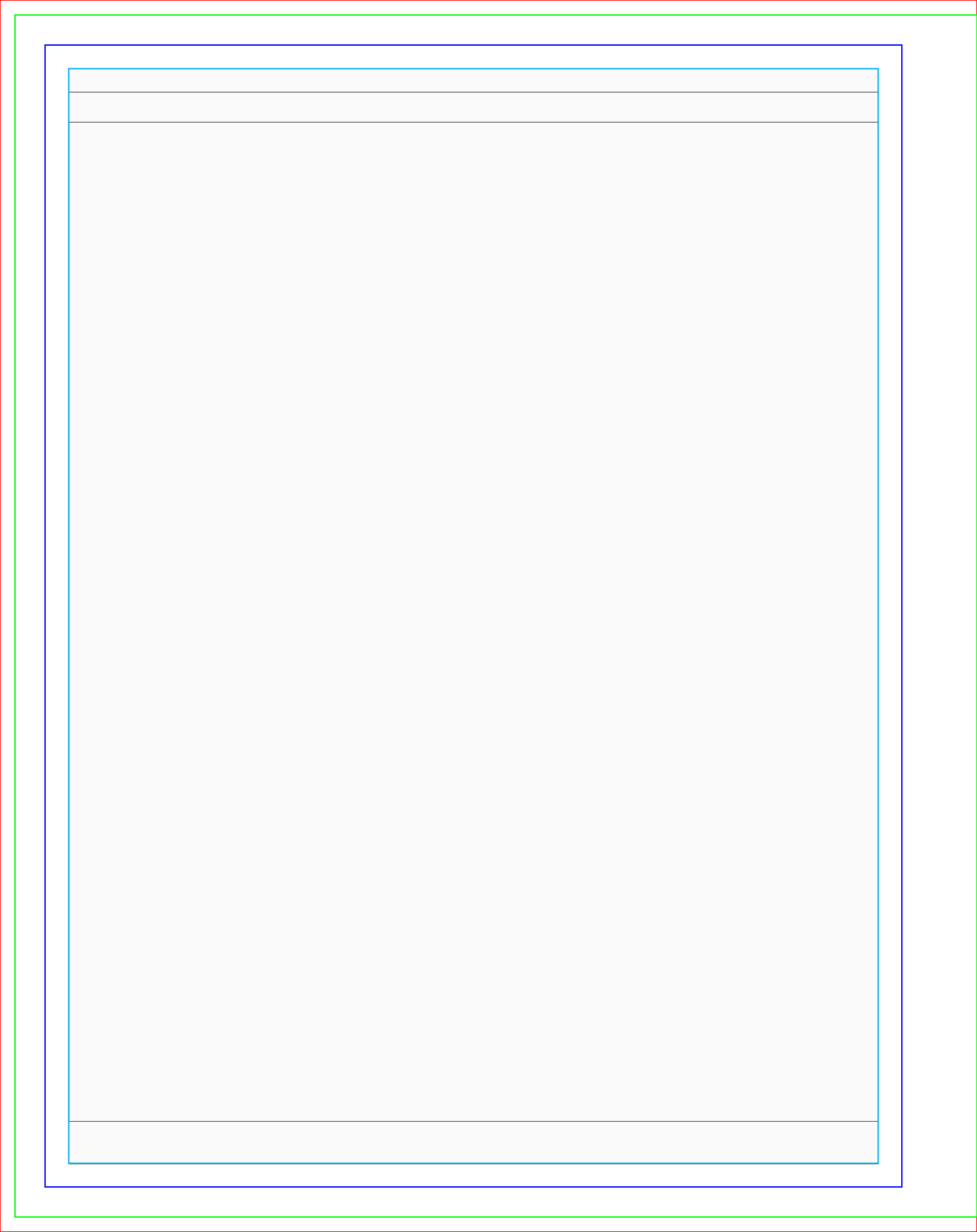
Contents	
B.3.2	Gâteaux derivative 18
B.3.3	Useful properties 19
B.3.4	Partial derivative 19
B.4	Gradient vector 20
B.5	Jacobian matrix 20
B.6	Hessian 21
B.7	Functional 21
B.8	References 22
C	Parabolic interpolation 23
C.1	Introduction 23
C.2	Lagrange interpolating polynomial 23
C.3	Reparametrization 24
C.4	Characteristic values 24
C.5	Extremum value 25
	Bibliography 27
	Publications from the author 29

List of Figures



List of Tables

A.1	Project review - general informations.	12
A.2	Project review - key numbers	13



Introduction

La paternité des structures de type *gridshell élastique* est couramment attribuée à l'architecte et ingénieur allemand Frei Otto, qui les a intensivement étudiées au XX^{ème} siècle. Fruit de son travail de recherche, il réalise en 1975, en collaboration avec l'ingénieur Edmund Happold du bureau Arup, un projet expérimental de grande ampleur : la Multihalle de Mannheim [1, 2]. Cette réalisation emblématique ancrera durablement les gridshells dans le paysage des typologies structurelles candidates à l'avènement de géométries non-standard, caractérisées par l'absence d'orthogonalité. Cette capacité à *former la forme* de façon efficiente prend tout son sens dans le contexte actuel où, d'une part la forme s'impose comme une composante prédominante de l'architecture moderne (F. Gehry, Z. Hadid, ...) et d'autre part l'enveloppe s'affirme comme le lieu névralgique de la performance des bâtiments, notamment environnementale.

Littéralement, le terme *grid-shell* désigne une résille à double courbure dont le comportement mécanique s'apparente à celui d'une coque ; c'est à dire que les efforts y transitent principalement de manière membranaire. Ces ouvrages peuvent franchir de grandes portées en utilisant un minimum de matière. Cependant, il semble plus rigoureux et plus fidèle à l'histoire de désigner par *gridshell élastique* la combinaison indissociable d'un principe structurel – le gridshell, une résille qui fonctionne telle une coque – et d'une méthode constructive astucieuse – la déformation réversible d'une grille de poutre initialement plane pour former une surface tridimensionnelle à double courbure. Le projet de Mannheim – dans lequel une grille en bois de trame régulière, initialement plane et sans rigidité de cisaillement est déformée élastiquement jusqu'à la forme désirée via un dispositif d'étalement, puis contreventée pour mobiliser la raideur d'une coque et finalement couverte d'une toile – pose les bases de ce nouveau concept et le rend populaire auprès d'un large public d'architectes et d'ingénieurs de par le monde.

Cependant, en dépit du potentiel de cette typologie, très peu de projets ont vu le jour suite à la construction de la Multihalle. Il faut en effet attendre 25 ans et le développement des méthodes de calcul numérique pour voir de nouveau éclore quelques réalisations iconiques : Shigeru Ban innove en passant du bois au carton pour la construction du Pavillon de Hanovre en 2000 [3] ; puis viennent les gridshells en bois de Downland en 2002 [4] et de Savill en 2006 [5] qui reprennent fidèlement les principes développés à Mannheim mais emploient des méthodes constructives différentes. Depuis une dizaine d'années le laboratoire Navier a investi ce champ de recherche sous le double aspect de la structure et du matériau, donnant lieu à la réalisation de quelques prototypes (en 2006 et 2007 [6, 7]) et des deux premiers bâtiments de type gridshell élastique en matériau composite construits à ce jour (Solidays 2011 [8] et Créteil 2013 [9]).¹ Plus récemment, on a pu observer un

¹Ici, le matériau employé, un composite à base de fibres de verre imprégnées dans une matrice polyester et obtenu par pultrusion, apporte

certain engouement pour la construction de pavillons en bois de petite taille, non couverts, réalisés selon des principes similaires à ceux de la Multihalle, essentiellement dans le cadre de workshops pédagogiques ou bien de projets de recherche [10, 11, 12, 13].

Il est naturel de se demander pourquoi cette innovation prometteuse peine ainsi à essaimer? S'il est vrai que la construction de la Multihalle de Mannheim a permis de prouver la faisabilité économique et technique du concept de gridshell élastique à grande échelle, il faut bien reconnaître que cette prouesse n'a été rendue possible qu'au terme d'un long processus de maturation pour développer et acquérir l'ensemble des compétences scientifiques, techniques, méthodologiques et humaines nécessaires à sa conception et à sa construction.²

En vérité, une telle dépense de moyens pour développer et rassembler ces compétences ne saurait assurer la reproductibilité de cette expérience sauf en de très rares occasions et pour des projets d'exception. Par ailleurs, les techniques développées à l'époque sont pour partie tombées en désuétude (e.g. la recherche de forme par maquette physique) ou bien ont fortement évoluées voir même mutées (e.g. le calcul numérique). Des matériaux nouveaux, composites, ont vu le jour. Ils repoussent les limitations intrinsèques des matériaux usuels tel que le bois et offrent des performances techniques bien plus intéressantes pour ce type d'application (durabilité, allongement à la rupture, légèreté, résistance mécanique, fiabilité de niveau industrielle, ...). Enfin, notons que le cadre réglementaire s'est considérablement étoffé apportant aussi son lot de rigidités vis-à-vis de la pénétration des innovations dans le secteur de la construction.

Ainsi la conception des gridshells se pose-t-elle en des termes nouveaux aux architectes et ingénieurs actuels. Elle se heurte aux deux difficultés majeures suivantes :

- La première difficulté est d'ordre technique et concerne la fonctionnalisation de la structure. En effet, bien que le principe du gridshell permette de réaliser des ossatures courbes de manière optimisée, il n'en reste pas moins complexe de constituer à partir de cette résille porteuse une véritable enveloppe de bâtiment capable de répondre à un large panel de critères performantiels (tels que l'étanchéité, l'isolation thermique, l'isolation acoustique, ...) sur un support qui ne présente aucune rationalité géométrique.³
- La seconde difficulté est d'ordre théorique et concerne la mise au point d'outils et de processus de conception adaptés à l'étude de ces structures d'un genre nouveau où Architecture et Ingénierie collaborent de manière indissociable à l'identité formelle de l'ouvrage. L'inadéquation des méthodes et des outils de design actuels, orientés davantage vers la justification des ouvrages que vers leur conception, constitue un des principaux freins à la diffusion de cette innovation.

La présent manuscrit s'articule autour de deux grandes parties qui tentent chacune de construire des éléments de réponse aux défis identifiés précédemment. La première partie, composée des chapitres 1 et 2, est destinée à présenter en profondeur le concept de gridshell élastique, son potentiel et les difficultés techniques sous-jacentes (voir [part I](#)). La seconde partie, composée des chapitres 3 à 6, est consacrée au développement d'un élément de poutre discret original prenant en compte les sollicitations de flexion et de torsion et applicable à tout type de

un gain de performance très significatif par rapport au bois et permet de rester sur une conception à simple nape là où le bois aurait nécessité une grille à double nape beaucoup plus complexe à réaliser.

²"This is not a case of a building creatively designed, but based on a support system of additive known elements. This design is the result of a symposium of creative thought in the formation, the invention of building elements with the simultaneous integration of the theoretical, scientific contributions from mathematics, geodesy, model measuring, statics as well as control loading and calculation. We are dealing with more than pure 'teamwork', we are dealing with team creation." [Georg Lewenton 1, p. 201]

³Pour contourner cette difficulté, une approche prometteuse consiste à identifier des classes de surfaces courbes (comme les maillages isoradiaux) dont certaines propriétés géométriques (e.g. facettes planes, noeuds sans torsion) s'avèrent avantageuses sur le plan constructif [14].

section dont le centre de torsion est confondu avec le centre de masse, ainsi que certains types de discontinuités liées à la présence de connexions dans les résilles de type gridshell (voir [part II](#)). Cette seconde partie constitue le coeur *académique* de ce travail de thèse.

Dans ?? nous rappelons la genèse de cette invention et nous en donnons une définition précise et actualisée. Puis nous dressons un état des lieux critique des projets réalisés sur ce principe depuis le début des années 1960 à nos jours. Cette brève histoire des gridshells dessine à elle seule le potentiel de ces structures, notamment en terme d'expression formelle et de performance structurelle. Loin de les enfermer dans un style d'architecture particulier, elle en souligne au contraire la formidable variété. Cette revue de projet est complétée par une revue approfondie de la littérature existante sur l'ensemble des domaines connexes à cette thématique (géométrie, structure, matériaux, logiciel).

Dans ?? nous présentons de manière détaillée la conception et la réalisation de la cathédrale éphémère de Créteil, un gridshell élastique en matériau composite construit en 2013 et toujours en service. Cette expérience peu commune a été une source inépuisable pour alimenter ce travail de thèse. Cette relecture expose les méthodes et les outils de conceptions développés pour faire aboutir le projet, les difficultés rencontrées, les pistes d'amélioration. Elle fournit également une analyse économique pour cerner les axes de progrès prioritaires dans l'optique d'une commercialisation future.

Dans ?? nous rappelons les notions fondamentales déjà connues, indispensables à notre étude, pour la caractérisation géométrique de courbes de l'espace et de repères mobiles attachés à des courbes. Ces notions sont présentées pour le cas continu puis pour le cas discret; ce dernier étant essentiel pour la résolution numérique de notre modèle. Cependant, nous observons que la notion clef de courbure géométrique perd son univocité dans le cas discret. Nous identifions alors plusieurs définitions de la courbure discrète. Puis nous les comparons selon des critères propres à notre application (convergence géométrique, représentativité énergétique, forme d'interpolation). A l'issue de cette analyse, la définition la plus pertinente est retenue pour le développement du nouveau modèle numérique au cours des chapitres suivants.

Dans ?? nous élaborons un premier modèle de poutre à 4-DOFs par une approche variationnelle. Ici nous reprenons et enrichissons un travail initié lors d'une précédente thèse [15] inspirée par des travaux récents sur la simulation des tiges élastiques dans le domaine des *computer graphics* [16], et à laquelle j'ai collaboré [17, 18]. En particulier, notre développement permet d'aboutir à des expressions purement locales des efforts internes et prouve l'équivalence avec le membre statique des équations de Kirchhoff. Sur le plan mathématique, le modèle est développé en continu et son implémentation numérique n'est pas traité.

Dans ?? nous développons une nouvelle approche, plus directe et plus complète, pour construire à partir des équations de Kirchhoff un élément de poutre enrichi par un noeud fantôme et possédant lui aussi un nombre de degré de liberté minimal. L'originalité de cet élément est de pouvoir localiser proprement dans l'espace certains types de discontinuités, notamment des discontinuités de courbures provoquées par des efforts ponctuels ou des sauts de propriétés matérielles. Cela permet une modélisation plus fine des phénomènes physiques au sein de la grille, aussi bien au niveau des connexions que des conditions aux appuis, ce qui était le principal objectif de ce travail de thèse.

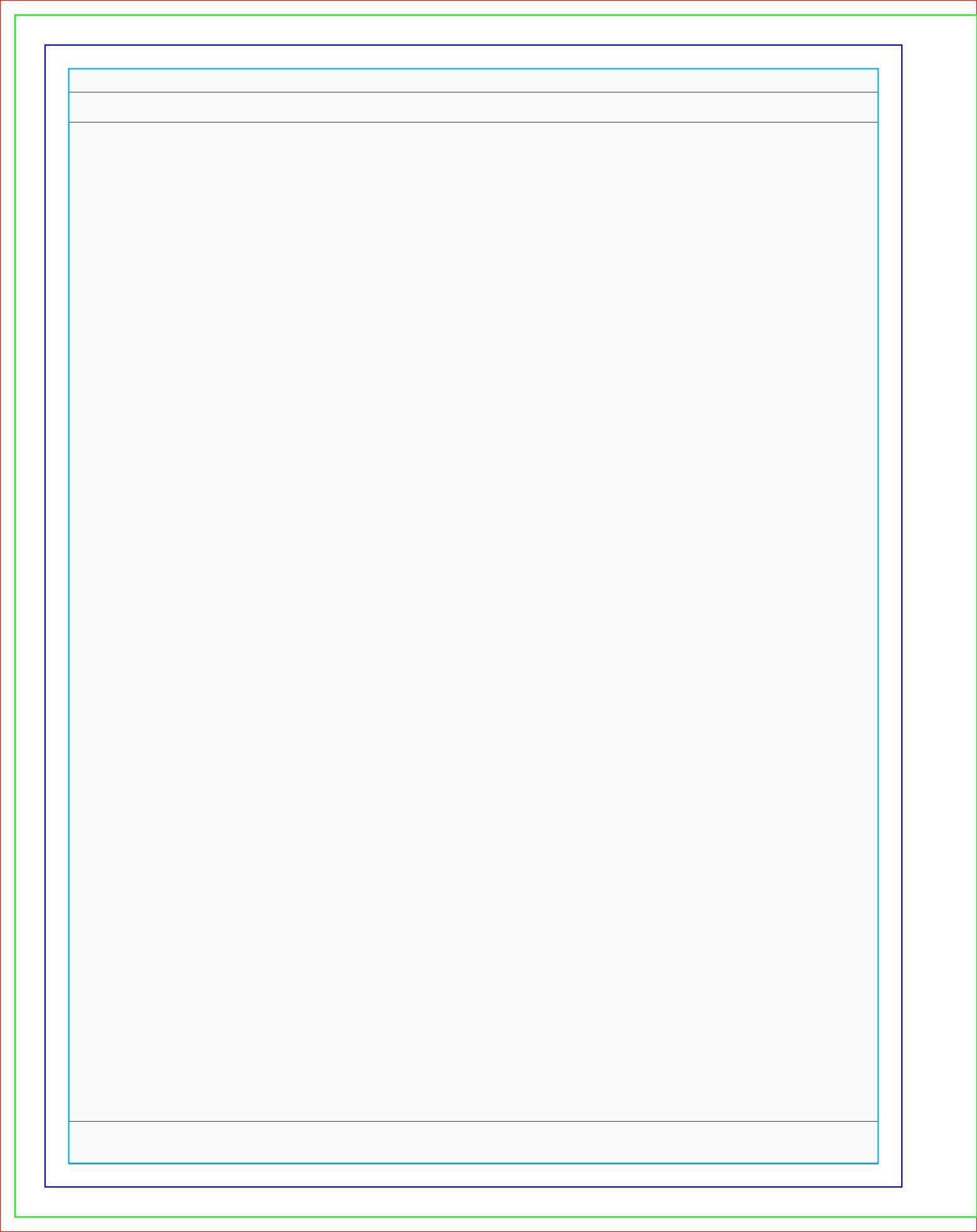
Dans ?? nous combinons les résultats des chapitres précédents pour construire un élément de poutre discret tout à fait adapté à la modélisation numérique des gridshells élastiques. Nous présentons la construction de cet élément et la méthode de résolution numérique employée pour trouver l'état d'équilibre statique du système, à savoir le relaxation dynamique. Enfin, nous donnons quelques éléments sur *Marsupilami*, le programme informa-

Introduction

tique que nous avons mis au point et qui implémente l'élément de poutre discret élaboré au cours de cette thèse. Nous exposons aussi quelques résultats de comparaison avec des logiciels du commerce qui ont permis de valider notre travail. Plus généralement, l'élément développé convient bien pour modéliser des problèmes de couplage flexion-torsion dans des poutres élancées, comme par exemple les phénomènes de repositionnement des câbles et des gaines accrochées aux bras robots, un matériel industriel qui se démocratise à grande vitesse.

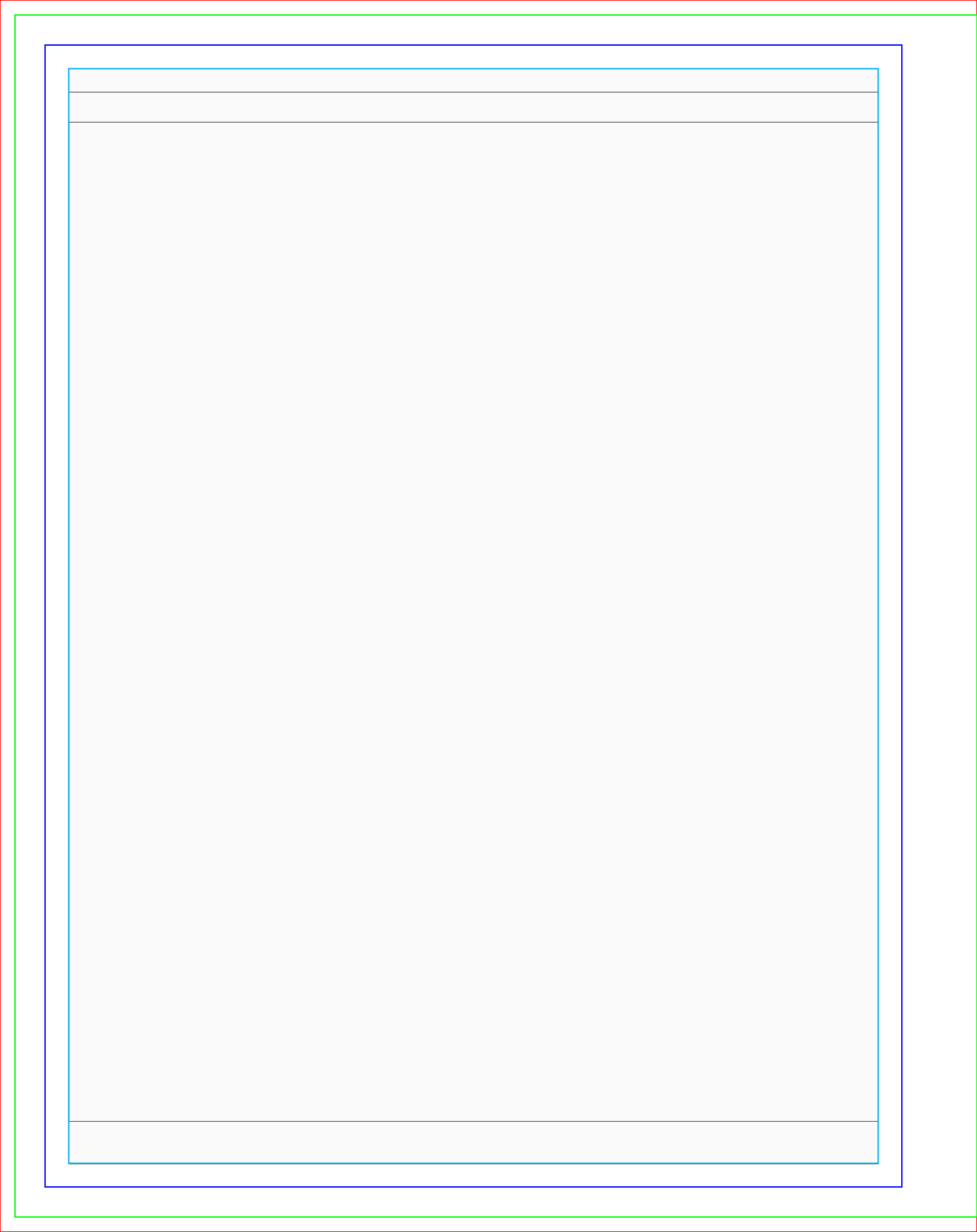
Elastic gridshells

Part I

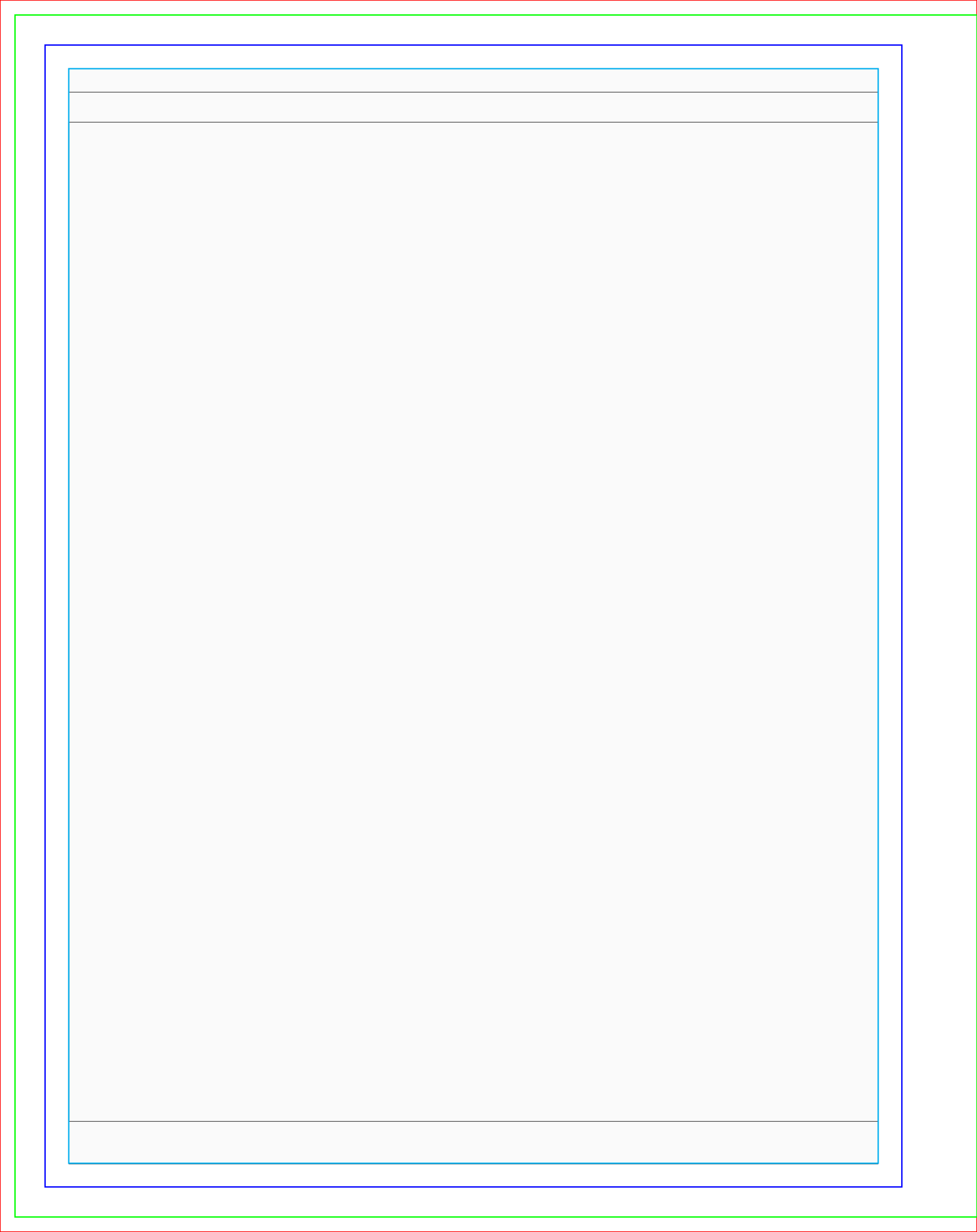


Rich Kirchhoff beam model

Part II



Appendix Part III



A Review of built elastic gridshells

Appendix A. Review of built elastic gridshells

N	Year	Nickname	Type	City	Country	Ref.
1	1962	Experimental structure	Workshop	Berkeley	USA	[19]
2	1962	Exhibition pavilion	Pavilion	Essen	Germany	[19]
3	1967	German Pavilion	Pavilion	Montreal	Canada	[19]
4	1973	Seibu	Experiment	Tokyo	Japan	[1]
5	1974	Basket shell	Experiment	Amehabad	India	[19]
6	1974	Experimental structure	Experiment	London	England	[19]
7	1975	Mannheim Multihalle	Building	Mannheim	Germany	[19]
8	1973	Ferrocement gridshell	Building	Ahmedabad	India	[1]
9	1976	AA Bamboo Latice Shell	Workshop	London	England	[1]
10	1976	Test structure of a gridshell	Experiment	Stuttgart	Germany	[19]
11	1977	Small Pavilion	Workshop	Mexico City	Mexico	[1]
12	1977	Small Greenhouse	Workshop	Zitacuaro	Mexico	[1]
13	1977	Experimental structure	Workshop	Mexico City	Mexico	[1]
14	1977	Experimental structure	Workshop	Mexico City	Mexico	[1]
15	1995	Westminster Lodge	Building	Dorset	England	[20]
16	1998	Earth Center	Building	Doncaster	England	
17	2000	Japan Pavilion	Pavilion	Hannover	Germany	[3]
18	2002	Downland	Building	Downland	England	[21]
19	2002	Life Science Centre Trust	Building	Pishwanton	England	
20	2003	Woodland Center	Building	Filmwell	England	
21	2006	Savill	Building	Savill	England	[5]
22	2007	Chiddingstone Orangery	Roofing	Kent	England	
23	2007	ENPC	Experiment	Noisy-Champs	France	[6]
24	2011	Solidays	Pavilion	Paris	France	[8]
25	2012	Toledo	Workshop	Naples	Italy	[10]
26	2013	Créteil	Building	Créteil	France	[9]
27	2013	ZA	Workshop	Cluj	Romania	
28	2014	F2	Workshop	San Antonio	USA	
29	2014	Toledo 2.0	Workshop	Naples	Italy	[12]
30	2015	Booby	Experiment	Noisy-Champs	France	[22]
31	2016	JPO	Pavilion	Toulouse	France	
32	2016	FAV	Pavilion	Montpellier	France	
33	2016	CLC	Workshop	Noisy-Champs	France	
34	2016	Trondheim	Workshop	Trondheim	Norway	[13]

Table A.1 – Project review - general informations.

N	Material	Layer	Pitch m	Surface m^2	Span m	Section mm
1	steel	single	0.82	52	7.8	double Ø21.7
2	hemelock pine	single	0.48	198	16.8	60x40
3	hemelock pine	single	0.50	365	17.5	42x35 - 42x28
4	aluminium	single	0.50	72	8.5	20x20x2
5	bamboo	single	0.48	225	15.0	Ø25.4
6	yellow pine	single	0.45	82	6.0	14x19
7	hemelock pine	double	0.50	7400	60.0	50x50
8	steel	single	0.50	80	8.0	Ø19x1.2
9	bamboo	single	0.7	63	7.0	Ø25.4
10	hemelock pine	single	0.50	38	6.7	15x15
11	pine	single	0.50	62	6.0	16x24
12	wood	double	0.4	81	9.0	20x22
13	aluminium	single	0.50	58	7.3	double Ø8.0
14	steel	single		17	4.0	double Ø5.0
15	roundwood thinnings	double				Ø100.0
16	oak	single	0.4	36	6.0	32x15
17	cardboard	single	1.0	2500	35.0	Ø120x22
18	oak	double	1.0 - 0.5	710	16.0	50x35
19	larch	single	0.6	80	10.0	35x25
20	chestnut	single	0.6	300	12.0	75x25
21	larch	double	1.0	2000	24.0	80x50
22	sweet chestnut	double	1.0	50	5.0	40x30
23	GFRP	single	1.0	170	13.0	Ø41.7x3.5
24	GFRP	single	1.0	280	15.0	Ø41.7x3.5
25	fir	double	0.50	75	6.5	
26	GFRP	single	1.0	350	17.5	Ø41.7x3.5
27	larch	double	0.7	234	13.0	70x20
28	wood	double		144	12.0	
29	larch	double	0.50	100	10.0	50x20
30	GFRP	single	0.25	10	3.4	Ø10
31	pine	double	0.6	50	7.0	48x12
32	pine	double	0.6	50	7.0	48x12
33	pine	double	0.6	50	7.0	48x12
34	spruce	double	0.50	100	10.0	48x23

Table A.2 – Project review - key numbers.

A.1 References

- [1] F. Otto, *IL13 Multihalle Mannheim*, B. Burkhardt, M. Chaitos, J. Langner, W. Langner and G. Lubberger, Eds., ser. Institut für leichte Flächentragwerke (IL). Stuttgart, 1978. [↗](#)
- [3] M. McQuaid, F. Otto and S. Ban, “Engineering and Architecture: building the Japan pavilion”, in *Shigeru Ban*, Phaidon Press, 2006, pp. 8–11. [↗](#)
- [5] R. Harris, S. Haskins and J. Roynon, “The Savill Garden gridshell: design and construction”, *The Structural Engineer*, vol. 86, no. 17, pp. 27–34, 2008. [↗](#)
- [6] C. Douthe, O. Baverel and J.-F. Caron, “Form-finding of a grid shell in composite materials”, *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, vol. 47, no. 1, pp. 53–62, 2006. [↗](#)
- [8] O. Baverel, J.-F. Caron, F. Tayeb and L. du Peloux, “Gridshells in composite materials: construction of a 300m² forum for the Solidays’ festival in Paris”, *Structural Engineering International*, vol. 22, no. 3, pp. 408–414, 2012. [↗](#)
- [9] L. du Peloux, F. Tayeb, O. Baverel and J.-F. Caron, “Construction of a large composite gridshell tructure: a lightweight structure made with pultruded glass fibre reinforced polymer tubes”, *Structural Engineering International*, vol. 26, no. 2, pp. 160–167, 2016. [↗](#)
- [10] B. D’Amico, A. Kermani and H. Zhang, “Form finding and structural analysis of actively bent timber grid shells”, *Engineering Structures*, vol. 81, pp. 195–207, 2014. [↗](#)
- [12] B. D’Amico, A. Kermani, H. Zhang, A. Pugnale, S. Colabella and S. Pone, “Timber gridshells: numerical simulation, design and construction of a full scale structure”, *Structures*, vol. 3, pp. 227–235, 2015. [↗](#)
- [13] J. Haddal Mork, S. Dyvik Hillersøy, B. Manum, A. Rønnquist and N. Labonnote, “Introducing the segment lath - A simplified modular timber gridshell built in Trondheim Norway”, in *World Conference on Timber Engineering*, Vienna, Austria, 2016.
- [19] F. Otto, *IL10 Grid Shells*, B. Burkhardt, J. Hennicke and E. Schauer, Eds., ser. Institut für leichte Flächentragwerke (IL). Stuttgart, 1974. [↗](#)
- [20] R. Burton, M. Dickson and R. Harris, “The use of roundwood thinnings in buildings: a case study”, *Building Research and Information*, vol. 26, no. 2, pp. 76–93, 1998. [↗](#)
- [21] R. Harris, J. Romer, O. Kelly and S. Johnson, “Design and construction of the Downland gridshell”, *Building Research and Information*, vol. 31, no. 6, pp. 427–454, 2003. [↗](#)
- [22] P. Cuvilliers, C. Douthe, L. du Peloux and R. Le Roy, “Hybrid structural skin: prototype of a GFRP elastic gridshell braced by a fibre-reinforced concrete envelope”, *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, vol. 58, no. 1, pp. 65–78, 2017. [↗](#)

B Calculus of variations

B.1 Introduction

In this appendix we drawback essential mathematical concepts for the calculus of variations Marsden *et al.* 2002 [23]. Recall how the notion of energy, gradients are extended to function spaces.

B.2 Spaces

B.2.1 Normed space

A *normed space* $V(\mathbf{K})$ is a vector space V over the scalar field \mathbf{K} with a norm $\|\cdot\|$.

A *norm* is a map $\|\cdot\| : V \times V \mapsto \mathbf{K}$ which satisfies :

$$\forall x \in V, \quad \|x\| = 0_{\mathbf{K}} \Rightarrow x = 0_V \quad (\text{B.1a})$$

$$\forall x \in V, \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad (\text{B.1b})$$

$$\forall (x, y) \in V^2, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{B.1c})$$

B.2.2 Inner product space

A *inner product space* or *pre-hilbert space* $E(\mathbf{K})$ is a vector space E over the scalar field \mathbf{K} with an inner product.

Appendix B. Calculus of variations

An *inner product* is a map $\langle ; \rangle : E \times E \mapsto \mathbf{K}$ which is bilinear, symmetric and positive-definite :

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, \quad \langle \lambda x + \mu y ; z \rangle = \lambda \langle x ; z \rangle + \mu \langle y ; z \rangle \quad (\text{B.2a})$$

$$\langle x ; \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x ; y \rangle + \mu \langle x ; z \rangle$$

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle x ; y \rangle = \langle y ; x \rangle \quad (\text{B.2b})$$

$$\forall x \in E, \quad \langle x ; x \rangle \geq 0_{\mathbf{K}} \quad (\text{B.2c})$$

$$\forall x \in E, \quad \langle x ; x \rangle = 0_{\mathbf{K}} \Rightarrow x = 0_E \quad (\text{B.2d})$$

Moreover, an inner product naturally induces a norm on E defined by :

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x ; x \rangle} \quad (\text{B.3})$$

Thus, an inner product vector space is also naturally a normed vector space.

B.2.3 Euclidean space

An *Euclidean space* $\mathcal{E}(\mathbf{R})$ is a finite-dimensional real vector space with an inner product. Thus, distances and angles between vectors could be defined and measured regarding to the norm associated with the chosen inner product.

An Euclidean space is nothing but a finite-dimensional real pre-hilbert space.

B.2.4 Banach space

A *Banach space* $\mathcal{B}(\mathbf{K})$ is a complete normed vector space, which means that it is a normed vector space in which every Cauchy sequence of \mathcal{B} converges in \mathcal{B} for the given norm.

Thus, a Banach space is a vector space with a metric that allows the computation of vector length and distance between vectors and is complete in the sense that a Cauchy sequence of vectors always converges to a well defined limit in that space.

B.2.5 Hilbert space

A *Hilbert space* is an inner product vector space $\mathcal{H}(\mathbf{K})$ such that the natural norm induced by the inner product turns \mathcal{H} into a complete metric space (i.e. every Cauchy sequence of \mathcal{H} converges in \mathcal{H}).

The Hilbert space concept is a generalization of the Euclidean space concept. In physics it's common to encounter Hilbert spaces as infinite-dimensional function spaces.

Hilbert spaces are Banach spaces, but the converse does not hold generally.

For example, $\mathcal{L}^2([a, b])$ is an infinite-dimensional Hilbert space with the canonical inner product $\langle f ; g \rangle = \int_a^b f g$.

Note that \mathcal{L}^2 is the only Hilbert space among the \mathcal{L}^p spaces.

B.3 Derivative

The well known notion of function derivative in \mathbf{R}^R can be extended to maps between Banach spaces. This is useful in physics when formulating problems as variational problems, usually in terms of energy minimization. Indeed, energy is generally defined over a functional vector space and not simply over the real line.

In this case, the research of minimal values of a potential energy rests on the calculus of variations of the energy function compared to variations to other functions defining the problem (geometry, materials, boundary conditions, ...).

Mathematical concepts extended well-known notions of derivative, jacobian and hessian in Euclidean spaces (typically \mathbf{R}^2 or \mathbf{R}^3) for Banach functional spaces.

B.3.1 Fréchet derivative

Differentiability

Let \mathcal{B}_V and \mathcal{B}_W be two Banach spaces and $U \subset \mathcal{B}_V$ an open subset of \mathcal{B}_V . Let $f : u \mapsto f(u)$ be a function of $U^{\mathcal{B}_W}$. f is said to be *Fréchet differentiable* at $u_0 \in U$ if there exists a continuous linear operator $Df(u_0) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$ such that :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u_0 + h) - f(u_0) - Df(u_0) \cdot h}{\|h\|} = 0 \quad (\text{B.4a})$$

Or, equivalently :

$$f(u_0 + h) = f(u_0) + Df(u_0) \cdot h + o(h) \quad , \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{\|h\|} = 0 \quad (\text{B.4b})$$

In the literature, it is common to found the following notations : $df = Df(u_0) \cdot h = Df_{u_0}(h) = Df(u_0, h)$ for the differential of f , which means nothing but $Df(u_0)$ is linear regarding h . The dot denotes the evaluation of $Df(u_0)$ at h . This notation can be ambiguous as far as the linearity of $Df(u_0)$ in h is denoted as a product which is not explicitly defined.

Derivative

If f is Fréchet differentiable at $u_0 \in U$, the continuous linear operator $Df(u_0) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$ is called the *Fréchet derivative* of f at u_0 and is also denoted :

$$f'(u_0) = Df(u_0) \quad (\text{B.5})$$

f is said to be \mathcal{C}^1 in the sens of Fréchet if f is Fréchet differentiable for all $u \in U$ and the function $Df : u \mapsto f'(u)$ of $U^{\mathcal{L}(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)}$ is continuous.

Differential or total derivative

$df = Df(u_0) \cdot h$ is sometimes called the *differential* or *total derivative* of f and represents the change in the function f for a perturbation h from u_0 .

Higer derivatives

Because the differential of f is a linear map from \mathcal{B}_V to $\mathcal{L}(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$ it is possible to look for the differentiability of Df . If it exists, it is denoted D^2f and maps \mathcal{B}_V to $\mathcal{L}(\mathcal{B}_V, \mathcal{L}(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W))$.

B.3.2 Gâteaux derivative

Directional derivative

Let \mathcal{B}_V and \mathcal{B}_W be two Banach spaces and $U \subset \mathcal{B}_V$ an open subset of \mathcal{B}_V . Let $f : u \mapsto f(u)$ be a function of $U^{\mathcal{B}_W}$. f is said to have a *derivative in the direction* $h \in \mathcal{B}_V$ at $u_0 \in U$ if :

$$\left. \frac{d}{d\lambda} f(u_0 + \lambda h) \right|_{\lambda=0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(u_0 + \lambda h) - f(u_0)}{\lambda} \quad (\text{B.6})$$

exists. This element of \mathcal{B}_W is called the *directional derivative* of f in the direction h at u_0 .

Differentiability

Let \mathcal{B}_V and \mathcal{B}_W be two Banach spaces and $U \subset \mathcal{B}_V$ an open subset of \mathcal{B}_V . Let $f : u \mapsto f(u)$ be a function of $U^{\mathcal{B}_W}$. f is said to be *Gâteaux differentiable* at $u_0 \in U$ if there exists a continous linear operator $Df(u_0) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$ such that :

$$\forall h \in \mathcal{B}_V, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(u_0 + \lambda h) - f(u_0)}{\lambda} = \left. \frac{d}{d\lambda} f(u_0 + \lambda h) \right|_{\lambda=0} = Df(u_0) \cdot h \quad (\text{B.7a})$$

Or, equivalently :

$$\forall h \in \mathcal{B}_V, \quad f(u_0 + \lambda h) = f(u_0) + \lambda Df(u_0) \cdot h + o(\lambda) \quad , \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{o(\lambda)}{\lambda} = 0 \quad (\text{B.7b})$$

In other words, it means that all the directional derivatives of f exist at u_0 .

Derivative

If f is Gâteaux differentiable at $u_0 \in U$, the continous linear operator $Df(u_0) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$ is called the *Gâteaux derivative* of f at u_0 and is also denoted :

$$f'(u_0) = Df(u_0) \quad (\text{B.8})$$

f is said to be \mathcal{C}^1 in the sens of Gâteaux if f is Gâteaux differentiable for all $u \in U$ and the function $Df : u \mapsto f'(u)$ of $U^{\mathcal{L}(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)}$ is continuous.

The Gâteaux derivative is a weaker form of derivative than the Fréchet derivative. If f is Fréchet differentiable, then it is also Gâteaux differentiable and its Fréchet and Gâteaux derivatives agree, but the converse does not hold generally.

B.3.3 Useful properties

Let \mathcal{B}_V , \mathcal{B}_W and \mathcal{B}_Z be three Banach spaces. Let $f, g : \mathcal{B}_V \mapsto \mathcal{B}_W$ and $h : \mathcal{B}_W \mapsto \mathcal{B}_Z$ be three Gâteaux differentiable functions. Then, the following useful properties holds :

$$D(f + g)(u) = Df(u) + Dg(u) \quad (\text{B.9})$$

$$D(f \circ h)(u) = Dh(f(u)) \circ Df(u) = Dh(f(u)) \cdot Df(u) \quad (\text{B.10})$$

Recall that the composition of $Dh(f(u))$ with $Df(u)$ means “ $Dh(f(u))$ applied to $Df(u)$ ” and is also denoted by \cdot as explained previously.

B.3.4 Partial derivative

Following [23] the main results on partial derivatives of two-variables functions are presented here. They are generalizable to n-variables functions.

Definition

Let \mathcal{B}_{V_1} , \mathcal{B}_{V_2} and \mathcal{B}_W be three Banach spaces and $U \subset \mathcal{B}_{V_1} \oplus \mathcal{B}_{V_2}$ an open subset of $\mathcal{B}_{V_1} \oplus \mathcal{B}_{V_2}$. Let $f : u \mapsto f(u)$ be a function of $U^{\mathcal{B}_W}$. Let $u_0 = (u_{01}, u_{02}) \in U$. If the derivatives of the following functions exist :

$$\begin{aligned} f_1 : \mathcal{B}_{V_1} &\longrightarrow \mathcal{B}_W & f_2 : \mathcal{B}_{V_2} &\longrightarrow \mathcal{B}_W \\ u_1 &\longmapsto f(u_1, u_{02}) & u_2 &\longmapsto f(u_{01}, u_2) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

they are called *partial derivatives* of f at u_0 and are denoted $D_1 f(u_0) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_{V_1}, \mathcal{B}_W)$ and $D_2 f(u_0) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_{V_2}, \mathcal{B}_W)$.

Differentiability

Let \mathcal{B}_{V_1} , \mathcal{B}_{V_2} and \mathcal{B}_W be three Banach spaces and $U \subset \mathcal{B}_{V_1} \oplus \mathcal{B}_{V_2}$ an open subset of $\mathcal{B}_{V_1} \oplus \mathcal{B}_{V_2}$. Let $f : u \mapsto f(u)$ be a function of $U^{\mathcal{B}_W}$. If f is differentiable, then the partial derivatives exist and satisfy for all $h = (h_1, h_2) \in \mathcal{B}_{V_1} \oplus \mathcal{B}_{V_2}$:

$$D_1 f(u) \cdot h_1 = Df(u) \cdot (h_1, 0) \quad (\text{B.12})$$

$$D_2 f(u) \cdot h_2 = Df(u) \cdot (0, h_2) \quad (\text{B.13})$$

$$Df(u) \cdot (h_1, h_2) = D_1 f(u) \cdot h_1 + D_2 f(u) \cdot h_2 \quad (\text{B.14})$$

B.4 Gradient vector

Let \mathcal{H} be a Hilbert space with the inner product denoted $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Let $U \subset \mathcal{H}$ an open subset of \mathcal{H} . Let $F : u \mapsto F(u)$ be a scalar function of $U^{\mathbf{R}}$. The *gradient* of F is the map $\text{grad } F : x \mapsto (\text{grad } F)(x)$ of $U^{\mathcal{H}}$ such that :

$$\forall h \in \mathcal{H}, \quad \langle (\text{grad } F)(x), h \rangle = DF(x) \cdot h \quad (\text{B.15})$$

Note that the gradient vector depends on the chosen inner product. For $\mathcal{H} = \mathbf{R}^n$ with the canonical inner product, one can recall the usual definition of the gradient vector and the corresponding linear approximation of F :

$$\mathbf{F}_{x+h} = \mathbf{F}_x + (\text{grad } F)_x^T H + o(H) \quad , \quad \text{grad } F_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^n \quad (\text{B.16})$$

Recall that the canonical inner product on \mathbf{R}^n is such that $\langle x, y \rangle = X^T Y$ in a column vector representation. In this case it is common to denote $\text{grad } F = \nabla F$.

For function spaces the usual definition of the gradient can be extended. For instance if F is a scalar function on \mathcal{L}^2 , the gradient of F is the unique function (if it exists) from \mathcal{L}^2 which satisfies :

$$\forall h \in \mathcal{L}^2, \quad DF(x) \cdot h = \langle (\text{grad } F)(x), h \rangle = \int (\text{grad } F) h \quad (\text{B.17})$$

In this case it is common to denote $\text{grad } F = \frac{\delta F}{\delta x}$. The gradient is also known as the *functional derivative*. The existence and unicity of $\text{grad } F$ is ensured by the *Riesz representation theorem*.

B.5 Jacobian matrix

Let f be a differentiable function from \mathbf{R}^n to \mathbf{R}^m . The *differential* or *total derivative* of such a fonction is a linear application from \mathbf{R}^n to \mathbf{R}^m which could be represented with the following matrix called the *jacobian matrix* :

$$Df(x) = \mathbf{J}_x = \frac{df}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R}) \quad (\text{B.18})$$

Thus, with the matrix notation, the Taylor expansion takes the following form :

$$\mathbf{F}_{x+h} = \mathbf{F}_x + \mathbf{J}_x H + o(H) \quad (\text{B.19})$$

In the cas $m = 1$, the jacobian matrix of the functional F is nothing but the gradient vector transpose itself :

$$DF(x) = \mathbf{J}_x = \frac{dF}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \nabla F^T \quad (\text{B.20})$$

B.6 Hessian

Let F be a differentiable scalar function from \mathbf{R}^n to \mathbf{R} . The second order differential of such a function is a linear application from \mathbf{R}^n to \mathbf{R}^n which could be represented with the following matrix called the *hessian matrix* :

$$D^2 F(x) = \mathbf{H}_x = \frac{d^2 F}{dx}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R}) \quad (\text{B.21})$$

Thus, with the matrix notation, the Taylor expansion takes the following form :

$$\mathbf{F}_{x+h} = \mathbf{F}_x + \mathbf{J}_x H + \frac{1}{2} H^T \mathbf{H}_x H + o(H) \quad (\text{B.22})$$

B.7 Functional

A *functional* is a map from a vector space $E(\mathbf{K})$ into its underlying scalar field \mathbf{K} . Here $\mathcal{E}_p[x, \theta]$ is a functional depending over x and θ .

B.8 References

- [23] J. E. Marsden, T. Ratiu and R. Abraham, *Manifolds, tensor analysis, and applications*, 3rd ed. Springer Verlag, 2002. [↗](#)

C Parabolic interpolation

C.1 Introduction

In this appendix, we give the required formulas to conduct a parabolic interpolation of a scalar or vector-valued function over an interval.

We look for a polynomial interpolation of order 2 of a continuous scalar or vector-valued function $\mathbf{V}: t \mapsto \mathbf{V}(t)$ over the interval $[t_0, t_2]$; supposing that the value of the function is known for three distinct parameters $t_0 < t_1 < t_2$:

$$\mathbf{V}(t_0) = \mathbf{V}_0 \tag{C.1a}$$

$$\mathbf{V}(t_1) = \mathbf{V}_1 \tag{C.1b}$$

$$\mathbf{V}(t_2) = \mathbf{V}_2 \tag{C.1c}$$

This interpolation method is employed several times in this thesis, for instance to evaluate the position of a kinetic energy peak during the dynamic relaxation process. It is also employed for evaluating the bending moment and the curvature of a discrete rod at mid-edge, knowing its values at vertices.

Note that this interpolation method is valid if the basis in which \mathbf{V} is decomposed does not depend on the parameter t . Otherwise, the classical transportation term should be considered ($\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}$).

C.2 Lagrange interpolating polynomial

The Lagrange interpolation of order two is given by the following polynomial :

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}_0 \frac{(t - t_1)(t - t_2)}{(t_0 - t_1)(t_0 - t_2)} + \mathbf{V}_1 \frac{(t - t_0)(t - t_2)}{(t_1 - t_0)(t_1 - t_2)} + \mathbf{V}_2 \frac{(t - t_0)(t - t_1)}{(t_2 - t_0)(t_2 - t_1)} \tag{C.2}$$

C.3 Reparametrization

Lets introduce the distances l_0 and l_1 in the parametric space :

$$l_0 = t_1 - t_0 \quad (C.3a)$$

$$l_1 = t_2 - t_1 \quad (C.3b)$$

Lets introduce the change of variable $u = t - t_1$. The polynomial in [equation \(C.2\)](#) can be rewritten in the form :

$$\mathbf{V}(u) = \mathbf{V}_0 \frac{u(u - l_1)}{l_0(l_0 + l_1)} - \mathbf{V}_1 \frac{(u + l_0)(u - l_1)}{l_0 l_1} + \mathbf{V}_2 \frac{u(u + l_0)}{l_1(l_0 + l_1)} \quad (C.4)$$

where :

$$u_0 = -l_0 \quad (C.5a)$$

$$u_1 = 0 \quad (C.5b)$$

$$u_2 = l_1 \quad (C.5c)$$

The derivative of this polynomial is also required to determine the extremum value of \mathbf{V} . Differentiating [equation \(C.4\)](#) gives :

$$\mathbf{V}'(u) = \mathbf{V}_0 \frac{2u - l_1}{l_0(l_0 + l_1)} - \mathbf{V}_1 \frac{2u + (l_0 - l_1)}{l_0 l_1} + \mathbf{V}_2 \frac{2u + l_0}{l_1(l_0 + l_1)} \quad (C.6)$$

This expression can be factorized to give the more compact form :

$$\mathbf{V}'(u) = \left(\frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0}{l_0} \right) \frac{l_1 - 2u}{l_0 + l_1} + \left(\frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{l_1} \right) \frac{l_0 + 2u}{l_0 + l_1} \quad (C.7)$$

C.4 Characteristic values

Using [equation \(C.4\)](#) the interpolated values of \mathbf{V} at mid distance between t_0 and t_1 ($u = -l_0/2$), and at mid distance between t_1 and t_2 ($u = +l_1/2$) are given by :

$$\mathbf{V}_{01} = \mathbf{V}_0 \frac{l_0 + 2l_1}{4(l_0 + l_1)} + \mathbf{V}_1 \frac{l_0 + 2l_1}{4l_1} - \mathbf{V}_2 \frac{l_0^2}{4l_1(l_0 + l_1)} \quad (C.8a)$$

$$\mathbf{V}_{12} = -\mathbf{V}_0 \frac{l_1^2}{4l_0(l_0 + l_1)} + \mathbf{V}_1 \frac{2l_0 + l_1}{4l_0} + \mathbf{V}_2 \frac{2l_0 + l_1}{4(l_0 + l_1)} \quad (C.8b)$$

Using [equation \(C.7\)](#) the interpolated values of V' at mid distance between t_0 and t_1 ($u = -l_0/2$), and at mid distance between t_1 and t_2 ($u = +l_1/2$) are given by :

$$V'_{01} = \frac{V_1 - V_0}{l_0} \quad (\text{C.9a})$$

$$V'_{12} = \frac{V_2 - V_1}{l_1} \quad (\text{C.9b})$$

Remark that this is an interesting result as at these parameters the evaluation of V' boils down to a finite difference scheme.

Using [equation \(C.7\)](#) and introducing $\alpha = \frac{l_0}{l_0+l_1}$ the interpolated values of V' at t_0 , t_1 and t_2 are given by :

$$V'_0 = (1 + \alpha)V'_{01} - \alpha V'_{12} \quad (\text{C.10a})$$

$$V'_1 = (1 - \alpha)V'_{01} + \alpha V'_{12} \quad (\text{C.10b})$$

$$V'_2 = (\alpha - 1)V'_{01} + (2 - \alpha)V'_{12} \quad (\text{C.10c})$$

Lets rewrite [equations \(C.8a\)](#) and [\(C.8b\)](#) with the help of α :

$$V_{01} = \frac{1}{4} \left((2 - \alpha)V_0 + \frac{2 - \alpha}{1 - \alpha}V_1 - \frac{\alpha^2}{1 - \alpha}V_2 \right) \quad (\text{C.11a})$$

$$V_{01} = \frac{1}{4} \left(-\frac{(1 - \alpha)^2}{\alpha}V_0 + \frac{1 + \alpha}{\alpha}V_1 + (1 + \alpha)V_2 \right) \quad (\text{C.11b})$$

C.5 Extremum value

The extremum value of the parabola is obtained for $V'(u^*) = 0$. It's a minimum if $V'_{12} > V'_{01}$ and it's a maximum if $V'_{12} < V'_{01}$:

$$u^* = \frac{l_1 V'_{01} + l_0 V'_{12}}{2(V'_{01} - V'_{12})} \quad (\text{C.12})$$

Remark that if $V'_{12} = V'_{01}$ it does not make sens to compute u^* as in this case the parabola degenerates into a line. The value of the function at this parameter is given by :

$$V(u^*) = V_1 + \frac{(l_1 V'_{01} + l_0 V'_{12})^2}{4(l_0 + l_1)(V'_{01} - V'_{12})} \quad (\text{C.13})$$

The parabola in [equation \(C.4\)](#) now writes :

$$V(u) = -\frac{V'_{01} - V'_{12}}{l_0 + l_1}(u - u^*)^2 + V(u^*) \quad (\text{C.14})$$

The extremum is located in $[t_0, t_2]$ if the sign of V' changes on this interval. This condition is satisfied whenever $V'_{01} \cdot V'_{12} < 0$.

Appendix C. Parabolic interpolation

Finally, in the special case of a uniform discretization where $l_0 = l_1 = l$, [equations \(C.12\)](#) and [\(C.13\)](#) become :

$$u^* = \frac{l}{2} \left(\frac{\mathbf{V}_0 - \mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_0 - 2\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2} \right) \quad (\text{C.15a})$$

$$\mathbf{V}(u^*) = \mathbf{V}_1 - \frac{u^*}{4l} (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0) \quad (\text{C.15b})$$

Bibliography

- [1] F. Otto, *IL13 Multihalle Mannheim*, B. Burkhardt, M. Chaitos, J. Langner, W. Langner and G. Lubberger, Eds., ser. Institut für leichte Flächentragwerke (IL). Stuttgart, 1978. [↗](#)
- [2] E. Happold and I. Liddell, "Timber lattice roof for the Mannheim bundesgartenschau", *The Structural Engineer*, vol. 53, no. 3, pp. 99–135, 1975. [↗](#)
- [3] M. McQuaid, F. Otto and S. Ban, "Engineering and Architecture: building the Japan pavilion", in *Shigeru Ban*, Phaidon Press, 2006, pp. 8–11. [↗](#)
- [4] R. Harris and O. Kelly, "The structural engineering of the Downland gridshell", in *Space Structures* 5, vol. 1, 2002, pp. 161–172. [↗](#)
- [5] R. Harris, S. Haskins and J. Roynon, "The Savill Garden gridshell: design and construction", *The Structural Engineer*, vol. 86, no. 17, pp. 27–34, 2008. [↗](#)
- [6] C. Douthe, O. Baverel and J.-F. Caron, "Form-finding of a grid shell in composite materials", *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, vol. 47, no. 1, pp. 53–62, 2006. [↗](#)
- [7] C. Douthe, J.-F. Caron and O. Baverel, "Gridshell structures in glass fibre reinforced polymers", *Construction and Building Materials*, vol. 24, no. 9, pp. 1580–1589, 2010. [↗](#)
- [8] O. Baverel, J.-F. Caron, F. Tayeb and L. du Peloux, "Gridshells in composite materials: construction of a 300m² forum for the Solidays' festival in Paris", *Structural Engineering International*, vol. 22, no. 3, pp. 408–414, 2012. [↗](#)
- [9] L. du Peloux, F. Tayeb, O. Baverel and J.-F. Caron, "Construction of a large composite gridshell tructure: a lightweight structure made with pultruded glass fibre reinforced polymer tubes", *Structural Engineering International*, vol. 26, no. 2, pp. 160–167, 2016. [↗](#)
- [10] B. D'Amico, A. Kermani and H. Zhang, "Form finding and structural analysis of actively bent timber grid shells", *Engineering Structures*, vol. 81, pp. 195–207, 2014. [↗](#)
- [11] D. Naicu, R. Harris and C. Williams, "Timber gridshells: design methods and their application to a temporary pavilion", in *World Conference on Timber Engineering*, Quebec City, Canada, 2014. [↗](#)
- [12] B. D'Amico, A. Kermani, H. Zhang, A. Pugnale, S. Colabella and S. Pone, "Timber gridshells: numerical simulation, design and construction of a full scale structure", *Structures*, vol. 3, pp. 227–235, 2015. [↗](#)

Bibliography

- [13] J. Haddal Mork, S. Dyvik Hillersøy, B. Manum, A. Rønnequit and N. Labonnote, "Introducing the segment lath - A simplified modular timber gridshell built in Trondheim Norway", in *World Conference on Timber Engineering*, Vienna, Austria, 2016.
- [14] R. Mesnil, "Structural explorations of fabrication-aware design spaces for non-standard architecture", PhD thesis, Université Paris-Est, 2017. [↗](#)
- [15] F. Tayeb, B. Lefevre, O. Baverel, J.-F. Caron and L. du Peloux, "Design and realisation of composite grid-shell structures", *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, vol. 56, no. 1, pp. 49–59, 2015. [↗](#)
- [16] M. Bergou, M. Wardetzky, S. Robinson, B. Audoly and E. Grinspun, "Discrete elastic rods", *ACM Transactions on Graphics*, vol. 27, no. 3, 63:1–63:12, 2008. [↗](#)
- [17] L. du Peloux, F. Tayeb, B. Lefevre, O. Baverel and J.-F. Caron, "Formulation of a 4-DoF torsion/bending element for the formfinding of elastic gridshells", in *Proceedings of the IASS Annual Symposium*, Amsterdam, Netherlands, 2015. [↗](#)
- [18] B. Lefevre, F. Tayeb, L. du Peloux and J.-F. Caron, "A 4-degree-of-freedom Kirchhoff beam model for the modeling of bending–torsion couplings in active-bending structures", *International Journal of Space Structures*, vol. 32, no. 2, pp. 69–83, 2017. [↗](#)
- [19] F. Otto, *IL10 Grid Shells*, B. Burkhardt, J. Hennicke and E. Schauer, Eds., ser. Institut für leichte Flächentragwerke (IL). Stuttgart, 1974. [↗](#)
- [20] R. Burton, M. Dickson and R. Harris, "The use of roundwood thinnings in buildings: a case study", *Building Research and Information*, vol. 26, no. 2, pp. 76–93, 1998. [↗](#)
- [21] R. Harris, J. Romer, O. Kelly and S. Johnson, "Design and construction of the Downland gridshell", *Building Research and Information*, vol. 31, no. 6, pp. 427–454, 2003. [↗](#)
- [22] P. Cuvilliers, C. Douthe, L. du Peloux and R. Le Roy, "Hybrid structural skin: prototype of a GFRP elastic gridshell braced by a fibre-reinforced concrete envelope", *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, vol. 58, no. 1, pp. 65–78, 2017. [↗](#)
- [23] J. E. Marsden, T. Ratiu and R. Abraham, *Manifolds, tensor analysis, and applications*, 3rd ed. Springer Verlag, 2002. [↗](#)

Publications from the author

- 2017 P. Cuvilliers, C. Douthe, L. du Peloux and R. Le Roy, "Hybrid structural skin: prototype of a GFRP elastic gridshell braced by a fibre-reinforced concrete envelope", *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, vol. 58, no. 1, pp. 65–78, 2017. [↗](#)
- B. Lefevre, F. Tayeb, L. du Peloux and J.-F. Caron, "A 4-degree-of-freedom Kirchhoff beam model for the modeling of bending-torsion couplings in active-bending structures", *International Journal of Space Structures*, vol. 32, no. 2, pp. 69–83, 2017. [↗](#)
- 2016 L. du Peloux, F. Tayeb, O. Baverel and J.-F. Caron, "Construction of a large composite gridshell tructure: a lightweight structure made with pultruded glass fibre reinforced polymer tubes", *Structural Engineering International*, vol. 26, no. 2, pp. 160–167, 2016. [↗](#)
- 2015 L. du Peloux, F. Tayeb, B. Lefevre, O. Baverel and J.-F. Caron, "Formulation of a 4-DoF torsion/bending element for the formfinding of elastic gridshells", in *Proceedings of the IASS Annual Symposium*, Amsterdam, Netherlands, 2015. [↗](#)
- F. Tayeb, B. Lefevre, O. Baverel, J.-F. Caron and L. du Peloux, "Design and realisation of composite grid-shell structures", *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, vol. 56, no. 1, pp. 49–59, 2015. [↗](#)
- 2013 L. du Peloux, F. Tayeb, O. Baverel and J.-F. Caron, "Faith can also move composite gridshells", in *Proceedings of the IASS Annual Symposium*, Worclaw, Poland, 2013, pp. 1–7.
- F. Tayeb, J.-F. Caron, O. Baverel and L. du Peloux, "Stability and robustness of a 300m² composite gridshell structure", *Construction and Building Materials*, vol. 49, pp. 926–938, 2013. [↗](#)
- 2012 O. Baverel, J.-F. Caron, F. Tayeb and L. du Peloux, "Gridshells in composite materials: construction of a 300m² forum for the Solidays' festival in Paris", *Structural Engineering International*, vol. 22, no. 3, pp. 408–414, 2012. [↗](#)
- 2011 L. du Peloux, O. Baverel, J.-F. Caron and F. Tayeb, "From shape to shell: a design tool to materialize freeform shapes using gridshell structures", in *Design Modeling Symposium*, Berlin, Deutschland, 2011. [↗](#)

