

UNIVERSITÉ —
— PARIS-EST

Thèse de doctorat

École doctorale : Science, Ingénierie et Environnement

Spécialité : Structures et Matériaux

Présentée par

Lionel du Peloux de Saint Romain

Modeling of bending-torsion couplings in active-bending structures

Application to the design of elastic gridshells

Soutenue à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées,
le 20 décembre 2017, devant le jury composé de :

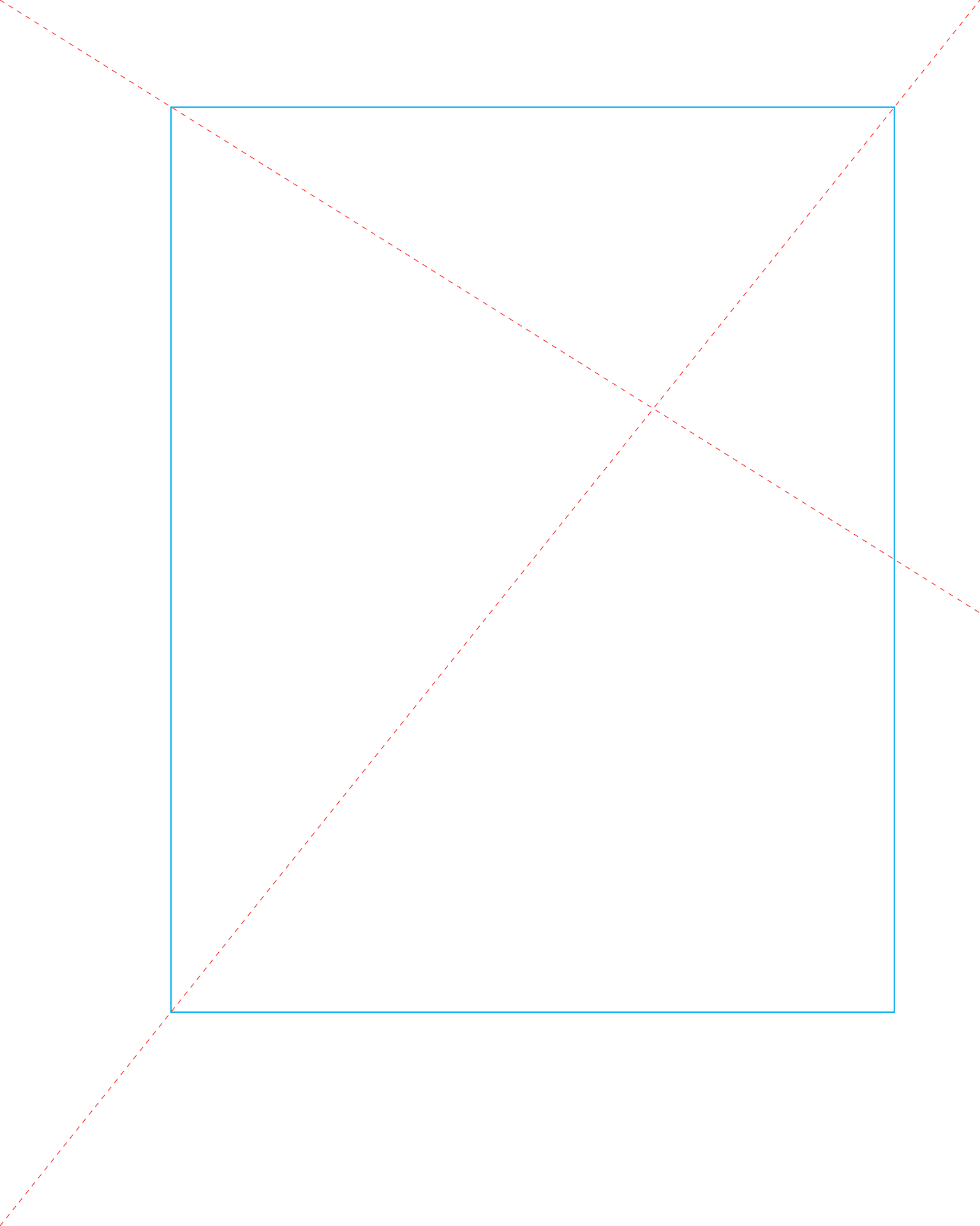
Président	Bernard MAURIN	Université Montpellier 2
Rapporteurs	Sébastien NEUKIRCH	Université Pierre et Marie Curie
	Carlos LÁZARO	Universitat Politècnica de València
Examineurs	Alberto PUGNALE	University of Melbourne
	Jean-François CARON	École des Ponts ParisTech
	Cyril DOUTHE	École des Ponts ParisTech
Invité	Bernard VAUDEVILLE	T/E/S/S atelier d'ingénierie
Directeur de thèse	Olivier BAVEREL	École des Ponts ParisTech

“Quia nominor leo.”

A Jacques & Christiane, mes grands-parents bien-aimés.







Chapter

PRÉFACE

Tu ne peux vivre que de cela que tu transformes, et dont un peu chaque jour, puisque tu t'échanges contre, tu meurs.

Antoine de Saint-Exupéry
Citadelle

Si pour une raison quelconque il ne devait subsister qu'une unique page de ce manuscrit, j'aimerais autant que ce soit celle-là. Et qu'alors, seuls vivent les quelques mots de gratitude qui suivent pour les personnes qui m'ont accompagné sur ce chemin de fortune ; chemin initié en 2010 au sortir de l'Ecole Centrale et qui m'a conduit à présenter cette thèse.

Plus que la perspective d'une éventuelle contribution scientifique, c'est avant tout un certain goût pour la liberté *d'aller et venir* qui m'a animé : liberté des pieds qui vont ; liberté des mains qui font ; liberté de penser ; cette même liberté que je quête à travers mes sorties en montagne.

L'une de mes plus grandes chances aura été de faire participer mon corps tout entier à cette entreprise, de pouvoir d'un même mouvement concevoir et bâtir des gridshells, objets de cette étude, sans quoi ma compréhension du sujet serait restée beaucoup plus superficielle. Par ailleurs, les joies simples glanées sur les chantiers de ces projets atypiques – je pense en particulier aux séminaires *Construire le Courbe* avec des étudiants, à la construction du pavillon Solidays en 2011 avec des bénévoles et plus encore à la réalisation de la cathédrale éphémère de Créteil en 2013 avec des paroissiens – furent pour moi sans égales avec celles, plus rares, reçues dans mon quotidien quelque peu taciturne de chercheur.

Chers Jean-François et Olivier, merci de m'avoir accueilli au sein de l'équipe MSA et d'avoir su me trouver une place sur mesure au fil de ces années. Merci pour la liberté que vous m'avez procurée et pour la confiance que vous m'avez accordée dans la conduite de mon travail de recherche, mais aussi dans certains projets annexes (e.g. solidays, thinkshell, booby). L'équipe s'est étoffée de nouveaux talents et la construction de cette dynamique vous doit beaucoup : vous savez catalyser notre enthousiasme.

Cher Cyril, merci de ce compagnonnage de quelques années. Je me souviens de t'avoir (un peu) connu avant même de te rencontrer, par l'étude de ta thèse ! J'ai pris beaucoup de plaisir à travailler avec toi au cours de ces années et il en est sorti de beaux projets. Merci plus particulièrement pour les responsabilités que tu m'as confiées dans le séminaire *Construire le Courbe* et d'avoir accepté d'en chambouler le programme pédagogique d'année en année. Merci également pour ton écoute, tes conseils et ton précieux travail de relecture tout au long de l'élaboration de ce manuscrit. Sa qualité s'en est trouvée grandement améliorée.

Cher Bernard, nous avons partagé sans doute quelques angoisses sans nous le dire, mais cette cathédrale de Créteil restera pour moi un projet mémorable et intense. Merci de m'avoir fait confiance pour développer ce projet et d'avoir été présent dans les moments critiques de cette aventure. Plus qu'un bagage technique, j'ai appris durant ces trois années chez T/E/S/S une certaine façon de résoudre des problèmes, de chercher des solutions sans me décourager. Et cela m'a beaucoup profité dans mon travail de thèse et me restera acquis

pour les années à venir. Merci donc à toi ainsi qu'à Tom et à Matt pour ce qui m'a été transmis au bureau.

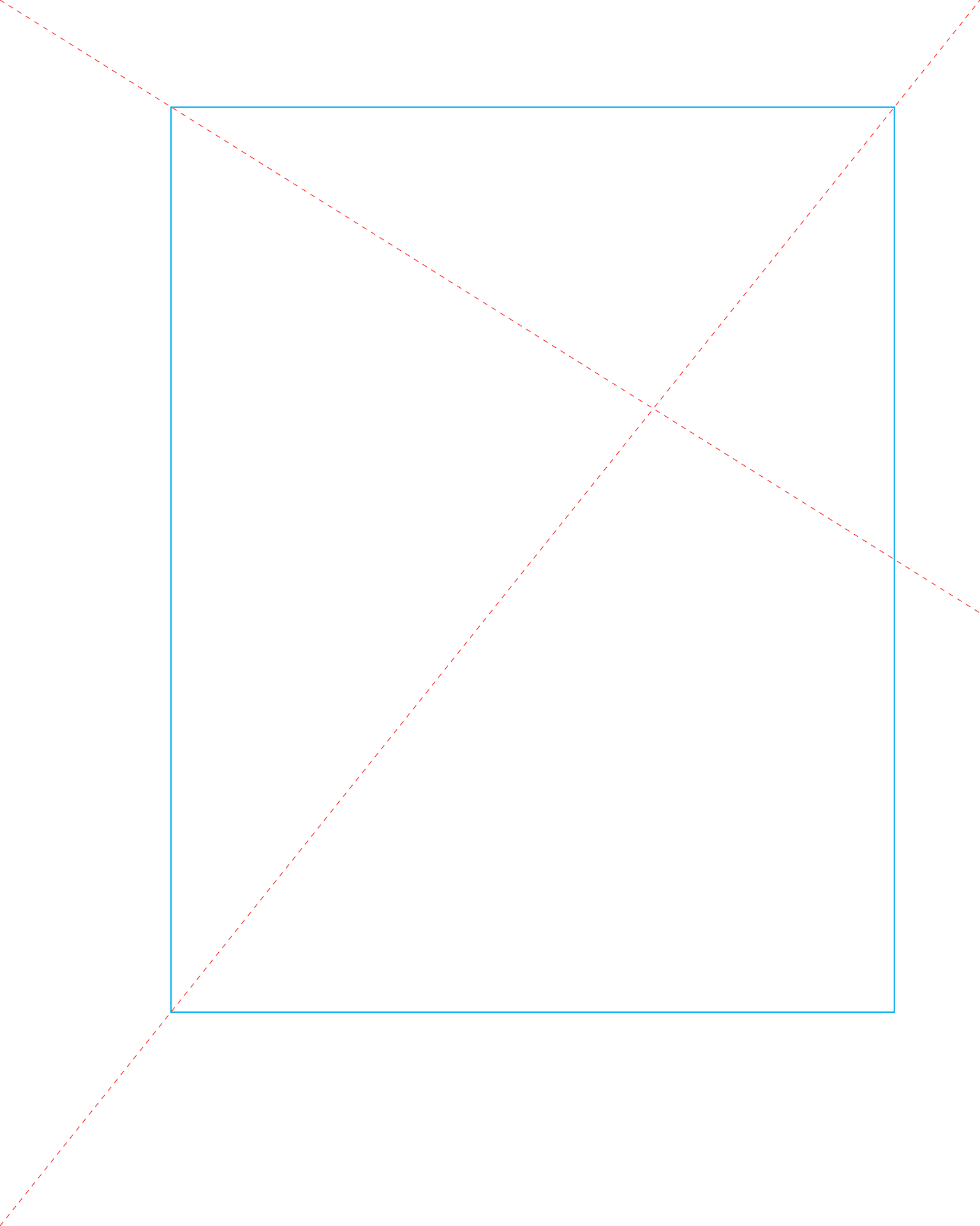
Cher Frédéric, avec toi j'ai manié la clef dynamométrique comme jamais ! Ton travail a grandement contribué à la réussite des projets Solidays et Créteil. Tu es toujours disponible pour trouver une solution, bricoler un montage, faire fonctionner un four ou une fraise, imprimer une pièce en 3D, réparer des gouttières, partager ton analyse, donner un conseil, etc. J'ai beaucoup appris du travail que tu as initié au cours de ta thèse avec l'aide de Baptiste et dans la continuité duquel je m'inscris. Merci pour tout cela.

Je tiens à remercier Sébastien Neukirch et Carlos Lázaro, rapporteurs, qui par leurs remarques et conseils avisés ont contribué à améliorer la qualité de ce mémoire de thèse. Je remercie également les autres membres du jury – Bernard Maurin son président, Alberto Pugnale, Jean-François Caron, Cyril Douthe et Bernard Vaudeville – pour leur écoute et leurs remarques de qualité. C'est toujours une grande chance de bénéficier d'une relecture rigoureuse de son propre travail par des personnes d'expérience ; et cela permet d'en regarder avec plus de lucidité les solidités comme les faiblesses.

Merci chers Marine, Romain(s), Robert, Gilles, Arthur, Ioanis, Marie, Tristan, Pierre(s), Victor, Philippe, Vianney ... co-bureaux ou collègues de travail plus ponctuels, notamment lors des semaines *Construire le Courbe*, pour les petits mots échangés ça et là lors d'un café ou d'un repas et pour votre enthousiasme quotidien. Merci Marie-Françoise, Christophe, Anne, Gilles, Géraldine, Alain, Hocine, pour l'aide constante apportée au cours de ces années passées au laboratoire.

Enfin, je ne serais pas allé au bout de ce travail sans le soutien des nombreux parents et amis qui m'entourent quotidiennement. A vous tous, merci de votre soutien et de votre patience lors de ces derniers mois, avec une mention toute spéciale pour Blandine qui m'a gratifié de son affection indéfectible et a supporté mes horaires incongrus.

Lyon, le 4 novembre 2017
Lionel du Peloux



Chapter

ABSTRACT

An *elastic gridshell* is a freeform structure, generally doubly curved, but formed out through the reversible deformation of a regular and initially flat structural grid. Building curved shapes that may seems to offer the best of both worlds : shell structures are amongst the most performant mechanically speaking while planar and orthogonal constructions are much more efficient and economic to produce than curved ones. This ability to “form a form” efficiently is of peculiar importance in the current context where morphology is a predominant component of modern architecture, and envelopes appear to be the neuralgic point for building performances.

The concept was invented by Frei Otto, a German architect and structural engineer who devoted many years of research to gridshells. In 1975 he designed the Multihalle of Mannheim, a 7500 m² wooden shell which demonstrated the feasibility of this technology and made it famous to a wide audience. However, despite their potential, very few

projects of this kind were built after this major realization. And for good reason, the resources committed at that time cannot guarantee the replicability of this experiment for more standard projects, especially on the economic level. Moreover, the techniques and methods developed by Otto's team in the 1960s have mostly fall into disuse or are based on disciplines that have considerably evolved. New materials, such as composite materials, have recently emerged. They go beyond the limitations of conventional materials such as timber and offer at all levels much better technical performances for this kind of application. Finally, it should be noted that the regulatory framework has also deeply changed, bringing a certain rigidity to the penetration of innovations in the building industry. Therefore, the design of gridshells arises in new terms for current architects and engineers and comes up against the inadequacy of existing tools and methods.

In this thesis, which marks an important step in a personal research adventure initiated in 2010, we try to embrace the issue of the design of elastic gridshells in all its complexity, addressing both theoretical, technical and constructive aspects. In a first part, we deliver a thorough review of this topic and we present in detail one of our main achievements, the ephemeral cathedral of Créteil, built in 2013 and still in service. In a second part, we develop an original discrete beam element with a minimal number of degrees of freedom adapted to the modeling of bending and torsion inside gridshell members with anisotropic cross-section. Enriched with a ghost node, it allows to model more accurately physical phenomena that occur at connections or at supports. Its numerical implementation is presented and validated through several test cases. Although this element has been developed specifically for the study of elastic gridshells, it can advantageously be used in any type of problem where the need for an interactive computation with elastic rods taking into account flexion-torsion couplings is required.

Keywords : gridshell, form-finding, active-bending, free-form, torsion, elastic rod, coupling, fibreglass, composite material.

Chapitre

RÉSUMÉ

Les structures de type *gridshell élastique* permettent de réaliser des enveloppes courbes par la déformation réversible d'une grille structurelle régulière initialement plane. Cette capacité à "former la forme" de façon efficiente prend tout son sens dans le contexte actuel où, d'une part la forme s'impose comme une composante prédominante de l'architecture moderne, et d'autre part l'enveloppe s'affirme comme le lieu névralgique de la performance des bâtiments.

Fruit des recherches de l'architecte et ingénieur allemand Frei Otto dans les années 1960, elles ont été rendues populaires par la construction de la Multihalle de Mannheim en 1975. Cependant, en dépit de leur potentiel, très peu de projets de ce type ont vu le jour suite à cette réalisation emblématique qui en a pourtant démontré la faisabilité à grande échelle. Et pour cause, les moyens engagés à l'époque ne sauraient assurer la reproductibilité de cette expérience dans un contexte plus classique de projet, notamment sur le plan éco-

nomique. Par ailleurs, les techniques et les méthodes développées alors sont pour la plus part tombées en désuétude ou reposent sur des disciplines scientifiques qui ont considérablement évoluées. Des matériaux nouveaux, composites, ont vu le jour. Ils repoussent les limitations intrinsèques des matériaux usuels tel que le bois et offrent des performances techniques bien plus intéressantes pour ce type d'application. Enfin, notons que le cadre réglementaire a lui aussi profondément muté, apportant une certaine rigidité vis-à-vis de la pénétration des innovations. Ainsi la conception des gridshells se pose-t-elle en des termes nouveaux aux architectes et ingénieurs actuels et se heurte à l'inadéquation des outils et méthodes existant.

Dans cette thèse, qui marque une étape importante dans une aventure de recherche personnelle initiée en 2010, nous tentons d'embrasser la question de la conception des gridshells élastiques dans toute sa complexité, en abordant aussi bien les aspects théoriques que techniques et constructifs. Dans une première partie, nous livrons une revue approfondie de cette thématique et nous présentons de façon détaillée l'une de nos principales réalisations, la cathédrale éphémère de Créteil, construite en 2013 et toujours en service. Dans une seconde partie, nous développons un élément de poutre discret original avec un nombre minimal de degrés de liberté adapté à la modélisation de la flexion et de la torsion dans les gridshells constitués de poutres de section anisotrope. Enrichi d'un noeud fantôme, il permet de modéliser plus finement les phénomènes physiques au niveau des connexions et des appuis. Son implémentation numérique est présentée et validée sur quelques cas tests. Bien que cet élément ait été développé spécifiquement pour l'étude des gridshells élastiques, il pourra avantageusement être utilisé dans tout type de problème où la nécessité d'un calcul interactif avec des tiges élastiques prenant en compte les couplages flexion-torsion s'avère nécessaire.

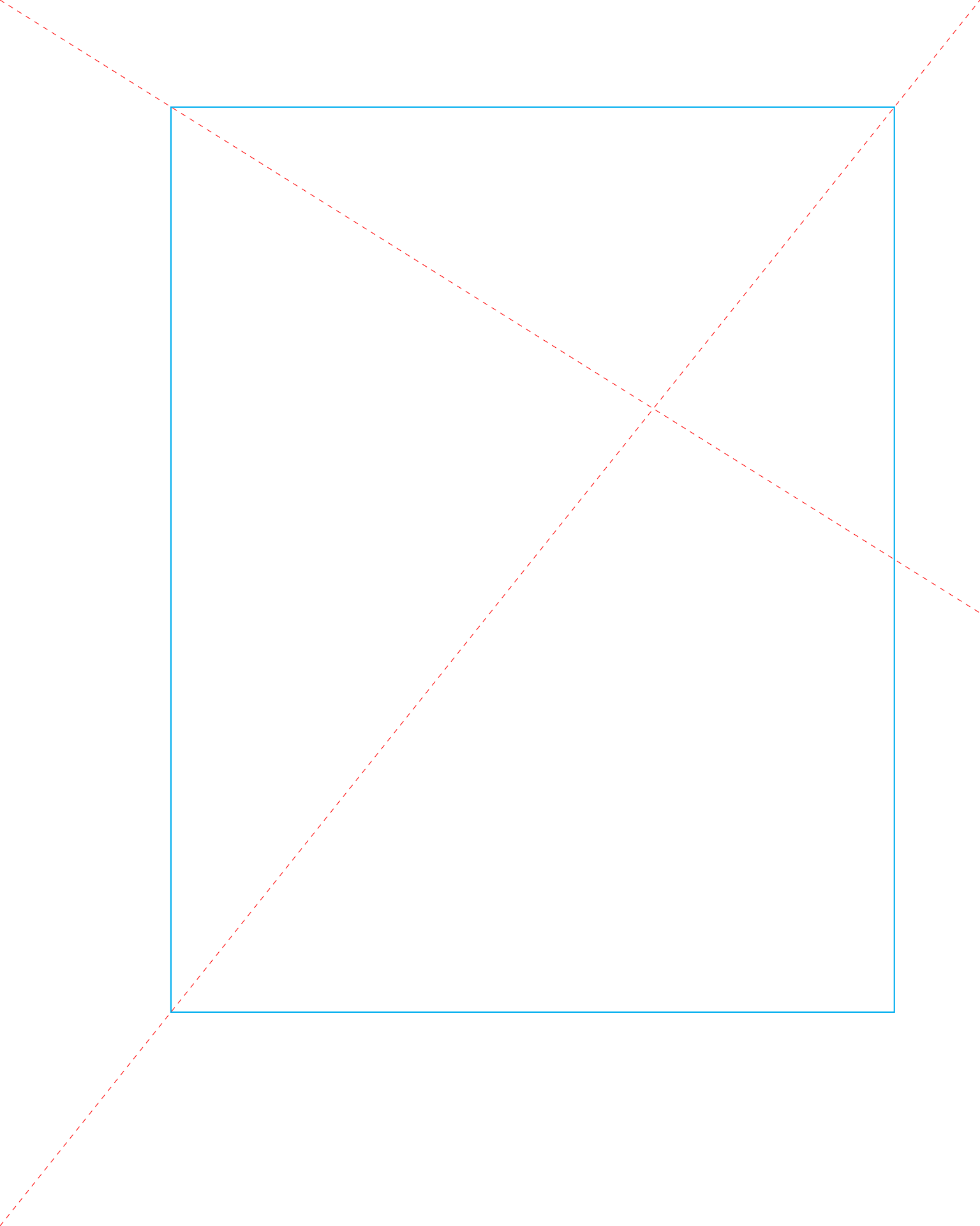
Keywords : gridshell, form-finding, active-bending, free-form, torsion, elastic rod, coupling, fibreglass, composite material.



Chapter

CONTENTS

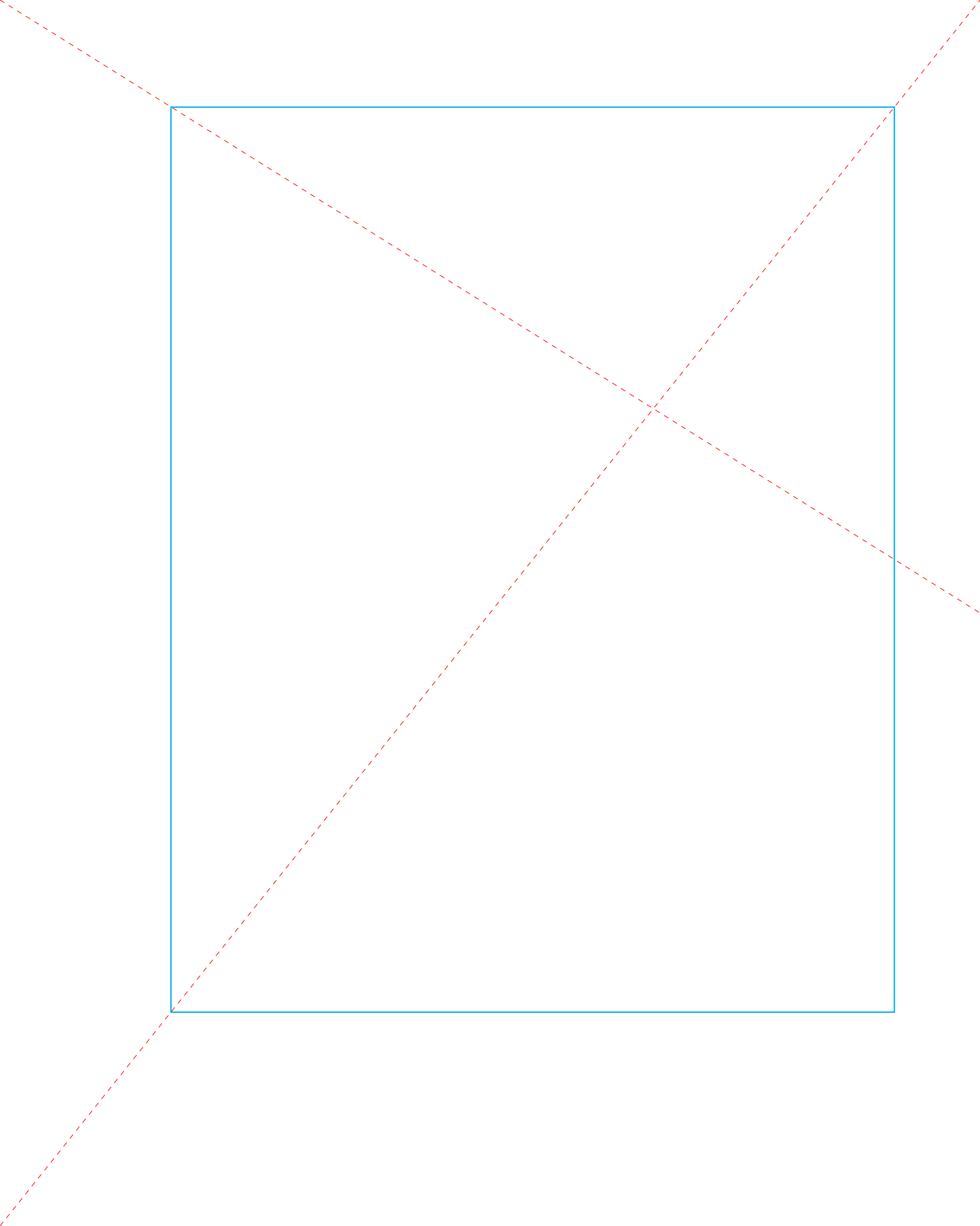
Préface	vii
Abstract (English/Français)	xi
Introduction	1
Index of notation	7
Bibliography	11
Publications from the author	13





Chapter

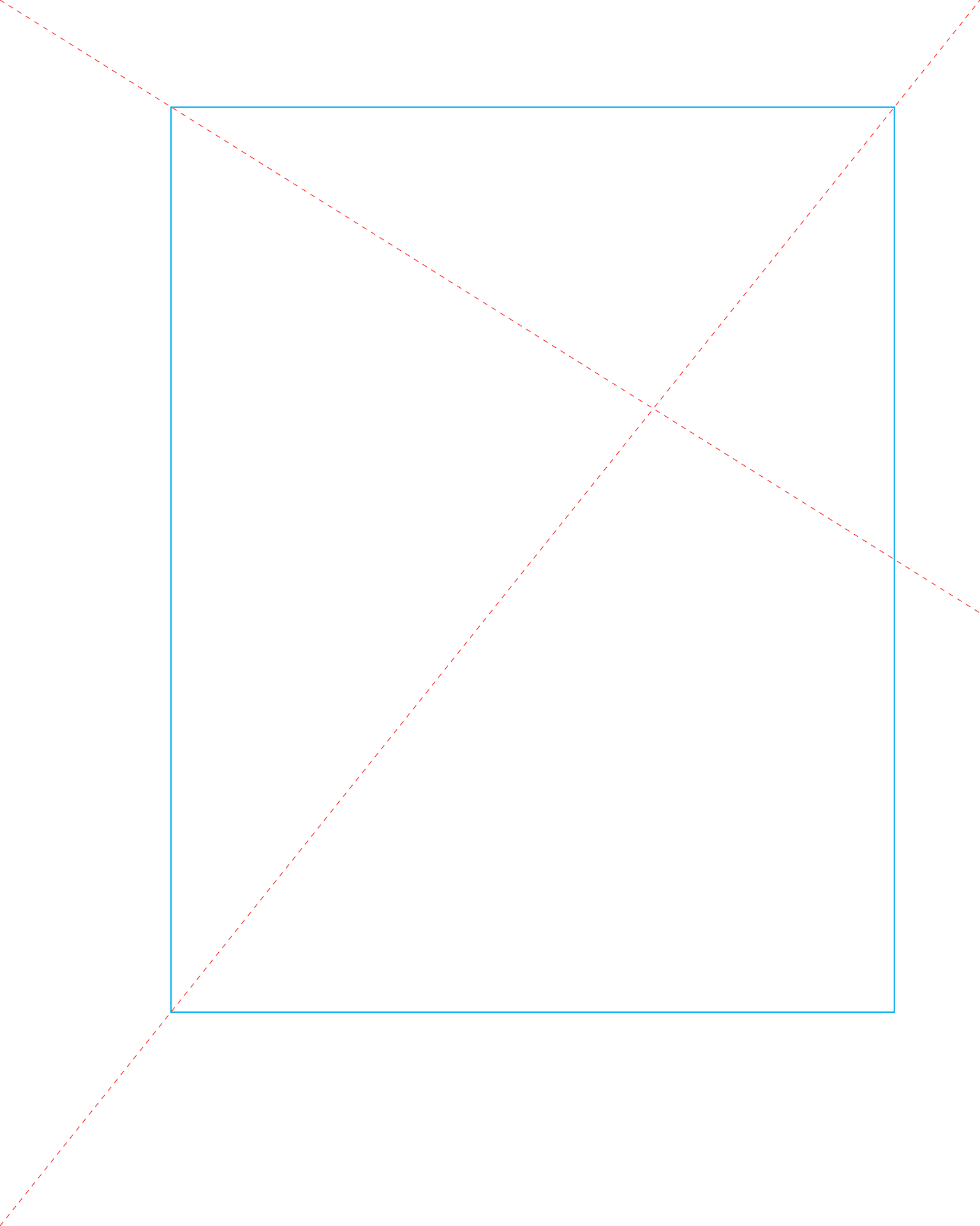
LIST OF FIGURES





Chapter

LIST OF TABLES



Chapter

INTRODUCTION

La paternité des structures de type *gridshell élastique* est couramment attribuée à l'architecte et ingénieur allemand Frei Otto, qui les a intensivement étudiées au XX^{ème} siècle. Fruit de son travail de recherche, il réalise en 1975, en collaboration avec l'ingénieur Edmund Happold du bureau Arup, un projet expérimental de grande ampleur : la Multihalle de Mannheim [1, 2]. Cette réalisation emblématique ancrera durablement les gridshells dans le paysage des typologies structurelles candidates à l'avènement de géométries non-standard, caractérisées par l'absence d'orthogonalité. Cette capacité à *former la forme* de façon efficiente prend tout son sens dans le contexte actuel où, d'une part la forme s'impose comme une composante prédominante de l'architecture moderne (F. Gehry, Z. Hadid, ...) et d'autre part l'enveloppe s'affirme comme le lieu névralgique de la performance des bâtiments, notamment environnementale.

Littéralement, le terme *grid-shell* désigne une résille à double courbure dont le comportement mécanique s'apparente à celui d'une coque ; c'est à dire que les efforts y transitent principalement de manière membranaire. Ces ouvrages peuvent franchir de grandes por-

tées en utilisant un minimum de matière. Cependant, il semble plus rigoureux et plus fidèle à l'histoire de désigner par *gridshell élastique* la combinaison indissociable d'un principe structurel – le gridshell, une résille qui fonctionne telle une coque – et d'une méthode constructive astucieuse – la déformation réversible d'une grille de poutre initialement plane pour former une surface tridimensionnelle à double courbure. Le projet de Mannheim – dans lequel une grille en bois de trame régulière, initialement plane et sans rigidité de cisaillement est déformée élastiquement jusqu'à la forme désirée via un dispositif d'étalement, puis contreventée pour mobiliser la raideur d'une coque et finalement couverte d'une toile – pose les bases de ce nouveau concept et le rend populaire auprès d'un large public d'architectes et d'ingénieurs de par le monde.

Cependant, en dépit du potentiel de cette typologie, très peu de projets ont vu le jour suite à la construction de la Multihalle. Il faut en effet attendre 25 ans et le développement des méthodes de calcul numérique pour voir de nouveau éclore quelques réalisations iconiques : Shigeru Ban innove en passant du bois au carton pour la construction du Pavillon de Hanovre en 2000 [3] ; puis viennent les gridshells en bois de Downland en 2002 [4] et de Savill en 2006 [5] qui reprennent fidèlement les principes développés à Mannheim mais emploient des méthodes constructives différentes. Depuis une dizaine d'années le laboratoire Navier a investi ce champ de recherche sous le double aspect de la structure et du matériau, donnant lieu à la réalisation de quelques prototypes (en 2006 et 2007 [6, 7]) et des deux premiers bâtiments de type gridshell élastique en matériau composite construits à ce jour (Solidays 2011 [8] et Créteil 2013 [9]).¹ Plus récemment, on a pu observer un certain engouement pour la construction de pavillons en bois de petite taille, non couverts, réalisés selon des principes similaires à ceux de la Multihalle, essentiellement dans le cadre de workshops pédagogiques ou bien de projets de recherche [10, 11, 12, 13].

Il est naturel de se demander pourquoi cette innovation prometteuse peine ainsi à essaimer ? S'il est vrai que la construction de la Multihalle de Mannheim a permis de prouver la faisabilité économique et technique du concept de gridshell élastique à grande échelle, il faut bien reconnaître que cette prouesse n'a été rendue possible qu'au terme d'un long processus de maturation pour développer et acquérir l'ensemble des compétences scientifiques, techniques, méthodologiques et humaines nécessaires à sa conception et à sa construction.²

1. Ici, le matériau employé, un composite à base de fibres de verre imprégnées dans une matrice polyester et obtenu par pultrusion, apporte un gain de performance très significatif par rapport au bois et permet de rester sur une conception à simple nape là où le bois aurait nécessité une grille à double nape beaucoup plus complexe à réaliser.

2. "This is not a case of a building creatively designed, but based on a support system of additive known elements. This design is the result of a symposium of creative thought in the formation, the invention of building elements with the

En vérité, une telle dépense de moyens pour développer et rassembler ces compétences ne saurait assurer la reproductibilité de cette expérience sauf en de très rares occasions et pour des projets d'exception. Par ailleurs, les techniques développées à l'époque sont pour partie tombées en désuétude (e.g. la recherche de forme par maquette physique) ou bien ont fortement évoluées voir même mutées (e.g. le calcul numérique). Des matériaux nouveaux, composites, ont vu le jour. Ils repoussent les limitations intrinsèques des matériaux usuels tel que le bois et offrent des performances techniques bien plus intéressantes pour ce type d'application (durabilité, allongement à la rupture, légèreté, résistance mécanique, fiabilité de niveau industrielle, ...). Enfin, notons que le cadre réglementaire s'est considérablement étoffé apportant aussi son lot de rigidités vis-à-vis de la pénétration des innovations dans le secteur de la construction.

Ainsi la conception des gridshells se pose-t-elle en des termes nouveaux aux architectes et ingénieurs actuels. Elle se heurte aux deux difficultés majeures suivantes :

- La première difficulté est d'ordre technique et concerne la fonctionnalisation de la structure. En effet, bien que le principe du gridshell permette de réaliser des ossatures courbes de manière optimisée, il n'en reste pas moins complexe de constituer à partir de cette résille porteuse une véritable enveloppe de bâtiment capable de répondre à un large panel de critères performantiels (tels que l'étanchéité, l'isolation thermique, l'isolation acoustique, ...) sur un support qui ne présente aucune rationalité géométrique.³
- La seconde difficulté est d'ordre théorique et concerne la mise au point d'outils et de processus de conception adaptés à l'étude de ces structures d'un genre nouveau où Architecture et Ingénierie collaborent de manière indissociable à l'identité formelle de l'ouvrage. L'inadéquation des méthodes et des outils de design actuels, orientés davantage vers la justification des ouvrages que vers leur conception, constitue un des principaux freins à la diffusion de cette innovation.

Le présent manuscrit s'articule autour de deux grandes parties qui tentent chacune de construire des éléments de réponse aux défis identifiés précédemment. La première partie, composée des chapitres 1 et 2, est destinée à présenter en profondeur le concept de gridshell

simultaneous integration of the theoretical, scientific contributions from mathematics, geodesy, model measuring, statics as well as control loading and calculation. We are dealing with more than pure 'teamwork', we are dealing with team creation." [Georg Lewenton 1, p. 201]

3. Pour contourner cette difficulté, une approche prometteuse consiste à identifier des classes de surfaces courbes (comme les maillages isoradiaux) dont certaines propriétés géométriques (e.g. facettes planes, noeuds sans torsion) s'avèrent avantageuses sur le plan constructif [14].

élastique, son potentiel et les difficultés techniques sous-jacentes (voir ??). La seconde partie, composée des chapitres 3 à 6, est consacrée au développement d'un élément de poutre discret original prenant en compte les sollicitations de flexion et de torsion et applicable à tout type de section dont le centre de torsion est confondu avec le centre de masse, ainsi que certains types de discontinuités liées à la présence de connexions dans les résilles de type gridshell (voir ??). Cette seconde partie constitue le coeur académique de ce travail de thèse.

Dans le ?? nous rappelons la genèse de cette invention et nous en donnons une définition précise et actualisée. Puis nous dressons un état des lieux critique des projets réalisés sur ce principe depuis le début des années 1960 à nos jours. Cette brève histoire des gridshells dessine à elle seule le potentiel de ces structures, notamment en terme d'expression formelle et de performance structurelle. Loin de les enfermer dans un style d'architecture particulier, elle en souligne au contraire la formidable variété. Cette revue de projet est complétée par une revue approfondie de la littérature existante sur l'ensemble des domaines connexes à cette thématique (géométrie, structure, matériaux, logiciel).

Dans le ?? nous présentons de manière détaillée la conception et la réalisation de la cathédrale éphémère de Créteil, un gridshell élastique en matériau composite construit en 2013 et toujours en service. Cette expérience peu commune a été une source inépuisable pour alimenter ce travail de thèse. Cette relecture expose les méthodes et les outils de conceptions développés pour faire aboutir le projet, les difficultés rencontrées, les pistes d'amélioration. Elle fournit également une analyse économique pour cerner les axes de progrès prioritaires dans l'optique d'une commercialisation future.

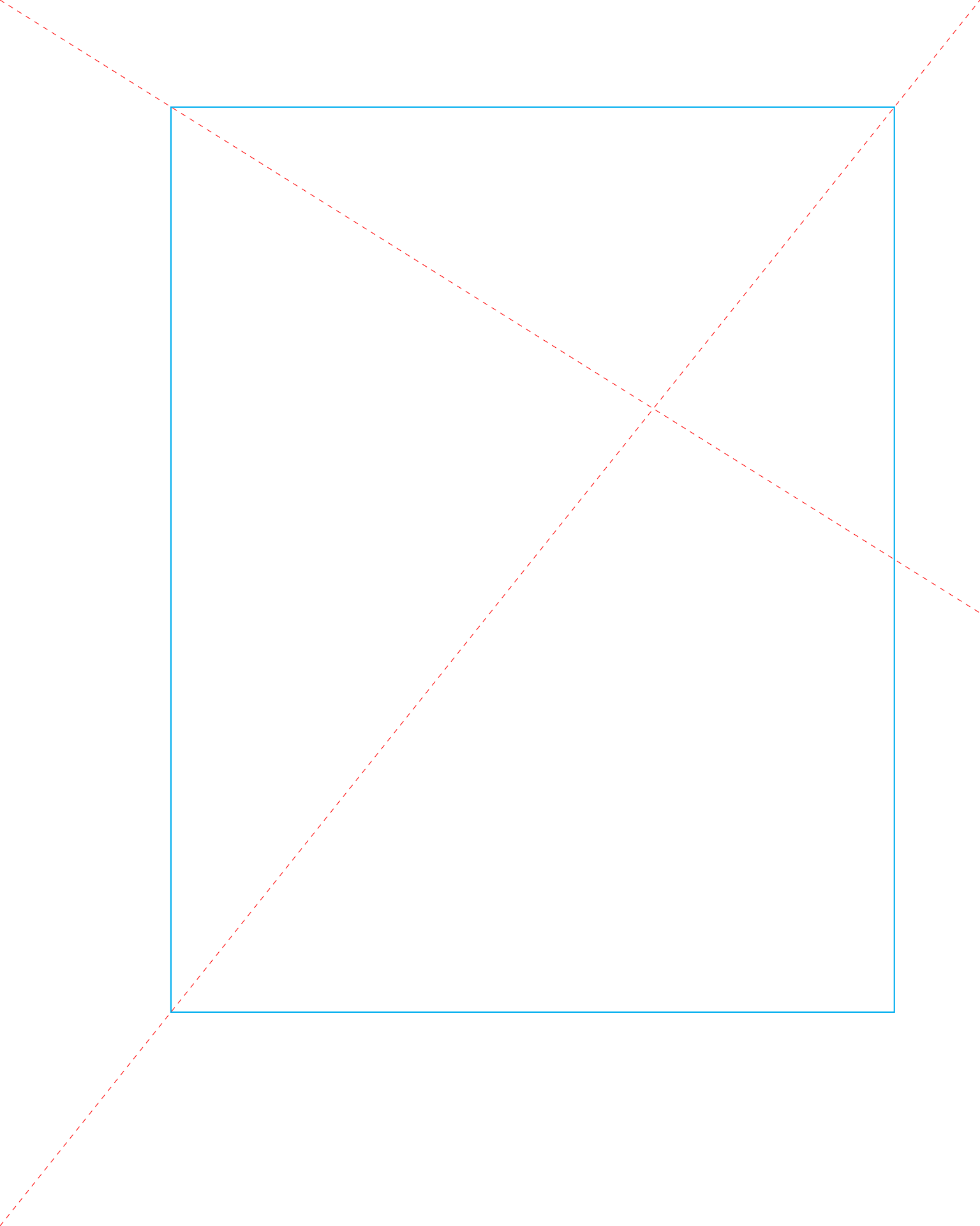
Dans le ?? nous rappelons les notions fondamentales déjà connues, indispensables à notre étude, pour la caractérisation géométrique de courbes de l'espace et de repères mobiles attachés à des courbes. Ces notions sont présentées pour le cas continu puis pour le cas discret ; ce dernier étant essentiel pour la résolution numérique de notre modèle. Cependant, nous observons que la notion clef de courbure géométrique perd son univocité dans le cas discret. Nous identifions alors plusieurs définitions de la courbure discrète. Puis nous les comparons selon des critères propres à notre application (convergence géométrique, représentativité énergétique, forme d'interpolation). A l'issue de cette analyse, la définition la plus pertinente est retenue pour le développement du nouveau modèle numérique au cours des chapitres suivants.

Dans le ?? nous élaborons un premier modèle de poutre à 4-DOFs par une approche variationnelle. Ici nous reprenons et enrichissons un travail initié lors d'une précédente thèse [15] inspirée par des travaux récents sur la simulation des tiges élastiques dans le

domaine des *computer graphics* [16], et à laquelle j'ai collaboré [17, 18]. En particulier, notre développement permet d'aboutir à des expressions purement locales des efforts internes et prouve l'équivalence avec le membre statique des équations de Kirchhoff. Sur le plan mathématique, le modèle est développé en continu et son implémentation numérique n'est pas traité.

Dans le ?? nous développons une nouvelle approche, plus directe et plus complète, pour construire à partir des équations de Kirchhoff un élément de poutre enrichi par un noeud fantôme et possédant lui aussi un nombre de degré de liberté minimal. L'originalité de cet élément est de pouvoir localiser proprement dans l'espace certains types de discontinuités, notamment des discontinuités de courbures provoquées par des efforts ponctuels ou des sauts de propriétés matérielles. Cela permet une modélisation plus fine des phénomènes physiques au sein de la grille, aussi bien au niveau des connexions que des conditions aux appuis, ce qui était le principal objectif de ce travail de thèse.

Dans le ?? nous combinons les résultats des chapitres précédents pour construire un élément de poutre discret tout à fait adapté à la modélisation numérique des gridshells élastiques. Nous présentons la construction de cet élément et la méthode de résolution numérique employée pour trouver l'état d'équilibre statique du système, à savoir le relaxation dynamique. Enfin, nous donnons quelques éléments sur *Marsupilami*, le programme informatique que nous avons mis au point et qui implémente l'élément de poutre discret élaboré au cours de cette thèse. Nous exposons aussi quelques résultats de comparaison avec des logiciels du commerce qui ont permis de valider notre travail. Plus généralement, l'élément développé convient bien pour modéliser des problèmes de couplage flexion-torsion dans des poutres élancées, comme par exemple les phénomènes de repositionnement des câbles et des gâines accrochées aux bras robots, un matériel industriel qui se démocratise à grande vitesse.



Chapter

INDEX OF NOTATION

GEOMETRY OF SMOOTH CURVES

I	An interval of \mathbb{R} .
γ	A parametric curve.
t	Any curve parameter.
s	The arc length parameter of a curve.
L	The length of a curve.
\mathbf{t}	The unit tangent vector.
\mathbf{n}	The unit normal vector.
\mathbf{b}	The unit binormal vector.
κ	The curvature.
τ_f	The torsion of Frenet.
$\kappa\mathbf{b}$	The curvature binormal vector.

CURVE FRAMING

e_3, e_1, e_2	Any moving frame.
t, n, b	The Frenet frame.
t, u, v	The Bishop frame.
Ω	The Darboux (or angular velocity) vector of a moving frame.
τ, k_1, k_2	The components of the Darboux vector – moving frame basis.

GEOMETRY OF DISCRETE CURVES

Γ	A discrete curve.
x_i	A vertex of a discrete curve.
e_i	An edge of a discrete curve.
l_i	The length of edge e_i .

MOTION OF RODS

s	The arc length of the centerline – reference configuration.
s_t	The arc length of the centerline – actual configuration.
\bar{x}	The centerline position vector – reference configuration.
x	The centerline position vector – actual configuration.
$\bar{d}_3, \bar{d}_1, \bar{d}_2$	The material frame – reference configuration.
d_3, d_1, d_2	The material frame – actual configuration.
\dot{x}	The velocity of the centerline.
ω	The angular velocity of the material frame.
ϵ	The axial extension.
$\bar{\nu}$	The force strain vector – reference configuration.
ν	The force strain vector – actual configuration.
$\bar{\kappa}$	The material curvature (or moment strain) vector – reference configuration.
κ	The material curvature (or moment strain) vector – actual configuration.

PROPERTIES OF RODS

E	The elastic modulus.
G	The shear modulus.

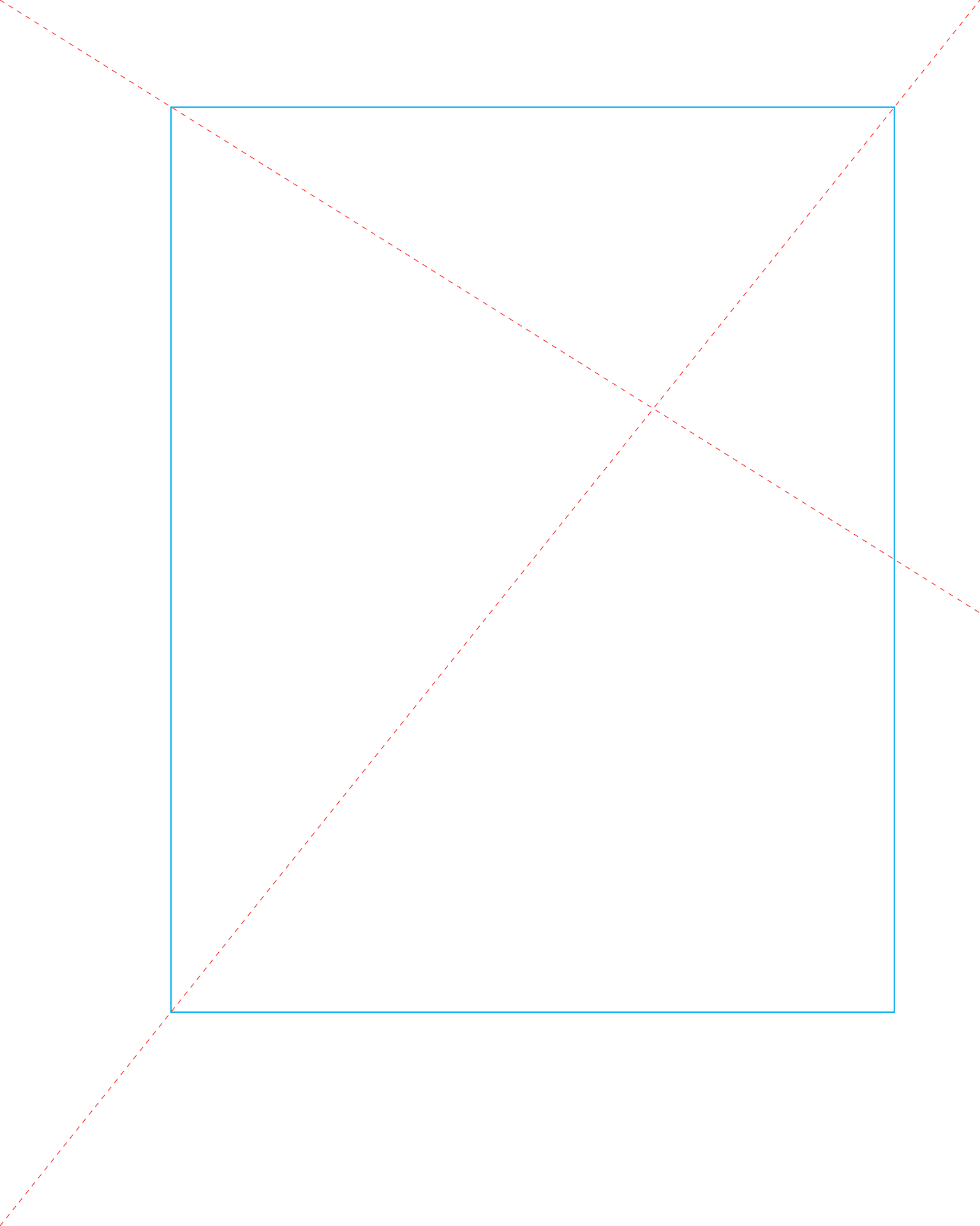
S	The area of the cross-section.
I_1	The first principal axis of inertia of the cross-section.
I_2	The second principal axis of inertia of the cross-section.
J	The torsion constant of the cross-section.
φ	The warping function of the cross-section.

MECHANICS OF RODS

\mathcal{E}_s	The stretching energy.
\mathcal{E}_b	The bending energy.
\mathcal{E}_t	The twisting energy.
\mathbf{F}	The vector of internal forces.
F_3, N	The axial force – material frame basis.
F_1	The first component of the shear force – material frame basis.
F_2	The second component of the shear force – material frame basis.
\mathbf{M}	The vector of internal moments.
M_3, Q	The twisting moment – material frame basis.
M_1	The first component of the bending moment – material frame basis.
M_2	The second component of the bending moment – material frame basis.
\mathbf{f}	The vector of applied distributed forces.
\mathbf{m}	The vector of applied distributed moments.

PARTICLE SPRING SYSTEM

m^x	The translational lumped mass.
m^θ	The rotational lumped mass.
\mathbf{R}^x	The translational resultant force.
\mathbf{R}^θ	The resultant twisting moment.
λ^x	The translational viscous damping factor.
λ^θ	The rotational viscous damping factor.
h	The time step.
\mathcal{E}_k	The kinetic energy.



Chapter

BIBLIOGRAPHY

- 1 F. Otto, *IL13 Multihalle Mannheim*, B. Burkhardt, M. Chaitos, J. Langner, W. Langner and G. Lubberger, Eds., ser. Institut für leichte Flächentragwerke (IL). Stuttgart, 1978. ■
- 2 E. Happold and I. Liddell, “Timber lattice roof for the Mannheim bundesgartenschau,” *The Structural Engineer*, vol. 53, no. 3, pp. 99–135, 1975. ■
- 3 M. McQuaid, F. Otto and S. Ban, “Engineering and Architecture: building the Japan pavilion,” in *Shigeru Ban*, Phaidon Press, 2006, pp. 8–11. ■
- 4 R. Harris and O. Kelly, “The structural engineering of the Downland gridshell,” in *Space Structures* 5, vol. 1, 2002, pp. 161–172. ■
- 5 R. Harris, S. Haskins and J. Roynon, “The Savill Garden gridshell: design and construction,” *The Structural Engineer*, vol. 86, no. 17, pp. 27–34, 2008. ■
- 6 C. Douthe, O. Baverel and J.-F. Caron, “Form-finding of a grid shell in composite materials,” *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, vol. 47, no. 1, pp. 53–62, 2006. ■

- 7 C. Douthe, J.-F. Caron and O. Baverel, "Gridshell structures in glass fibre reinforced polymers," *Construction and Building Materials*, vol. 24, no. 9, pp. 1580–1589, 2010. ■
- 8 O. Baverel, J.-F. Caron, F. Tayeb and L. du Peloux, "Gridshells in composite materials: construction of a 300m² forum for the Solidays' festival in Paris," *Structural Engineering International*, vol. 22, no. 3, pp. 408–414, 2012. ■
- 9 L. du Peloux, F. Tayeb, O. Baverel and J.-F. Caron, "Construction of a large composite grid-shell structure: a lightweight structure made with pultruded glass fibre reinforced polymer tubes," *Structural Engineering International*, vol. 26, no. 2, pp. 160–167, 2016. ■
- 10 B. D'Amico, A. Kermani and H. Zhang, "Form finding and structural analysis of actively bent timber grid shells," *Engineering Structures*, vol. 81, pp. 195–207, 2014. ■
- 11 D. Naicu, R. Harris and C. Williams, "Timber gridshells: design methods and their application to a temporary pavilion," in *World Conference on Timber Engineering*, Quebec City, Canada, 2014. ■
- 12 B. D'Amico, A. Kermani, H. Zhang, A. Pugnale, S. Colabella and S. Pone, "Timber gridshells: numerical simulation, design and construction of a full scale structure," *Structures*, vol. 3, pp. 227–235, 2015. ■
- 13 J. Haddad Mork, S. Dyvik Hillersøy, B. Manum, A. Rønnquist and N. Labonnote, "Introducing the segment lath - A simplified modular timber gridshell built in Trondheim Norway," in *World Conference on Timber Engineering*, Vienna, Austria, 2016.
- 14 R. Mesnil, "Structural explorations of fabrication-aware design spaces for non-standard architecture," PhD thesis, Université Paris-Est, 2017. ■
- 15 F. Tayeb, B. Lefevre, O. Baverel, J.-F. Caron and L. du Peloux, "Design and realisation of composite gridshell structures," *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, vol. 56, no. 1, pp. 49–59, 2015. ■
- 16 M. Bergou, M. Wardetzky, S. Robinson, B. Audoly and E. Grinspun, "Discrete elastic rods," *ACM Transactions on Graphics*, vol. 27, no. 3, 63:1–63:12, 2008. ■
- 17 L. du Peloux, F. Tayeb, B. Lefevre, O. Baverel and J.-F. Caron, "Formulation of a 4-DoF torsion/bending element for the formfinding of elastic gridshells," in *Proceedings of the IASS Annual Symposium*, Amsterdam, Netherlands, 2015. ■
- 18 B. Lefevre, F. Tayeb, L. du Peloux and J.-F. Caron, "A 4-degree-of-freedom Kirchhoff beam model for the modeling of bending–torsion couplings in active-bending structures," *International Journal of Space Structures*, vol. 32, no. 2, pp. 69–83, 2017. ■

Chapter

PUBLICATIONS FROM THE AUTHOR

- 2017** P. Cuvilliers, C. Douthe, L. du Peloux and R. Le Roy, “Hybrid structural skin: prototype of a GFRP elastic gridshell braced by a fibre-reinforced concrete envelope,” *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, vol. 58, no. 1, pp. 65–78, 2017. ■
- B. Lefevre, F. Tayeb, L. du Peloux and J.-F. Caron, “A 4-degree-of-freedom Kirchhoff beam model for the modeling of bending–torsion couplings in active-bending structures,” *International Journal of Space Structures*, vol. 32, no. 2, pp. 69–83, 2017. ■
- 2016** L. du Peloux, F. Tayeb, O. Baverel and J.-F. Caron, “Construction of a large composite gridshell structure: a lightweight structure made with pultruded glass fibre reinforced polymer tubes,” *Structural Engineering International*, vol. 26, no. 2, pp. 160–167, 2016. ■
- 2015** L. du Peloux, F. Tayeb, B. Lefevre, O. Baverel and J.-F. Caron, “Formulation of a 4-DoF torsion/bending element for the formfinding of elastic gridshells,” in *Proceedings of the IASS Annual Symposium*, Amsterdam, Netherlands, 2015. ■

- F. Tayeb, B. Lefevre, O. Baverel, J.-F. Caron and L. du Peloux, “Design and realisation of composite gridshell structures,” *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, vol. 56, no. 1, pp. 49–59, 2015. ■
- 2013** L. du Peloux, F. Tayeb, O. Baverel and J.-F. Caron, “Faith can also move composite gridshells,” in *Proceedings of the IASS Annual Symposium*, Worclaw, Poland, 2013, pp. 1–7.
- F. Tayeb, J.-F. Caron, O. Baverel and L. du Peloux, “Stability and robustness of a 300m² composite gridshell structure,” *Construction and Building Materials*, vol. 49, pp. 926–938, 2013. ■
- 2012** O. Baverel, J.-F. Caron, F. Tayeb and L. du Peloux, “Gridshells in composite materials: construction of a 300m² forum for the Solidays’ festival in Paris,” *Structural Engineering International*, vol. 22, no. 3, pp. 408–414, 2012. ■
- 2011** L. du Peloux, O. Baverel, J.-F. Caron and F. Tayeb, “From shape to shell: a design tool to materialize freeform shapes using gridshell structures,” in *Design Modeling Symposium*, Berlin, Deutschland, 2011. ■

