

# Modeling of bending-torsion couplings in active-bending structures. Application to the design of elastic gridshell.



**École des Ponts**  
ParisTech

Thèse n. xxxxx  
présenté le 01 décembre 2017  
à l'Ecole des Ponts ParisTech  
laboratoire Navier  
Université Paris-Est

pour l'obtention du grade de Docteur ès Sciences  
par

Lionel du Peloux

acceptée sur proposition du jury:

Prof Name Surname, président du jury  
Prof Name Surname, directeur de thèse  
Prof Name Surname, rapporteur  
Prof Name Surname, rapporteur  
Prof Name Surname, rapporteur

Paris, Ecole des Ponts ParisTech, 2016



# Contents

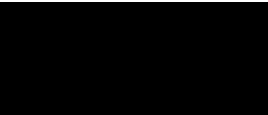
|   |            |
|---|------------|
| <b>List of figures</b>  | <b>iii</b> |
| <b>List of tables</b>   | <b>v</b>   |
| <br>  |            |
| <b>I Torsion</b>  | <b>1</b>   |
| <br>  |            |
| <b>1 Elastic rod : a novel element from Kirchhoff equations</b> | <b>3</b>   |
| 1.1 Introduction . . . . .                                      | 3          |
| 1.2 Dynamic Kirchhoff equations . . . . .                       | 3          |
| 1.3 Equations of motion . . . . .                               | 5          |
| 1.4 Geometric interpretation . . . . .                          | 6          |
| 1.5 Main hypothesis . . . . .                                   | 7          |
| 1.6 Conclusion . . . . .  | 7          |
| <br>  |            |
| <b>2 Numerical model</b>  | <b>9</b>   |
| 2.1 Introduction . . . . .                                      | 9          |
| 2.2 Discret curve-angle representation . . . . .                | 9          |
| 2.3 Interpolation rules . . . . .                               | 10         |





## List of Figures





## List of Tables





# Torsion Part I



# 1 Elastic rod : a novel element from Kirchhoff equations

## 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, après un bref rappel sur le cadre mathématique d'étude des courbes paramétrique de l'espace, on présente les notions de courbures et de torsion géométrique associées au repère de fraient. On montre ensuite le cas plus général d'un repère mobile quelconque attaché à une courbe gamma. On définit enfin la particularité d'un repère mobile adapté à un courbe, et on présente, en sus du repère de Frenet, une approche différente pour accrocher des repères le long d'une courbe (Bishop / RMF / Zéro-twisting frame)

Ici il faudrait préciser la terminologie des auteurs / équations / hypothèses : Euler-Bernoulli, Navier-Bernoulli, Kirchhoff, Love, Clebesh, Cosserat, Vlassov

On peu s'instruire dans la publi de Dill [Dil92]. Regarder en particulier le premier chapitre de l'HDR de Neukirch [Neu09]. Regarder également la chronologie des modèles proposée dans la thèse de Theetten [The07]. Pourquoi pas proposer une frise chronologique + un tableau de synthèse des hyptohèses.

[Dil92] [Neu09] [ABW99] [Hoo06] [LL09] [Spi08]

## 1.2 Dynamic Kirchhoff equations

[Neu09] : p69 - [Dil92] : p16

### 1.2.1 Balance of the linear momentum

On fait un bilan sur une tranche d'épaisseur  $ds$ , de centre de gravité  $G$  positionné en  $\mathbf{x}_G$  :

$$\mathbf{F}(s+ds) - \mathbf{F}(s) + \mathbf{f}(s)ds = \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial s}(s) + \mathbf{f}(s) \right) ds = (\rho S ds) \ddot{\mathbf{x}}_G \quad (1.1)$$

Which leads to the first equation of Kirchhoff law :

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial s} + \mathbf{f} = \rho S \ddot{\mathbf{x}}_G \quad (1.2)$$

### 1.2.2 Balance of the angular momentum

On fait un bilan sur une tranche d'épaisseur  $ds$ , de centre de gravité  $G$  positionné en  $\mathbf{x}_G$ .  
On applique le théorème du moment cinétique dans un référentiel inertiel :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(dI_G) &= \mathbf{M}(s+ds) - \mathbf{M}(s) + \mathbf{m}(s)ds + \left( \frac{1}{2}ds\mathbf{x}' \right) \times \mathbf{F}(s+ds) + \left( -\frac{1}{2}ds\mathbf{x}' \right) \times -\mathbf{F}(s) \\ &= \left( \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s}(s) + \mathbf{m}(s) + \mathbf{x}' \times \mathbf{F}(s) \right) ds \end{aligned} \quad (1.3)$$

L'évolution temporelle des vecteurs matériels est cette fois décrite par un vecteur de Darboux temporel noté  $\mathbf{\Lambda}$  tel que :

$$\dot{\mathbf{d}}_i(s) = \mathbf{\Lambda}(t) \times \mathbf{d}_i(s) \quad , \quad \mathbf{\Lambda}(t) = \begin{bmatrix} \Lambda_3(t) \\ \Lambda_1(t) \\ \Lambda_2(t) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Les lois de composition / dérivation de la mécanique nous permettent décrire :

$$\frac{d}{dt}(dI_G) = dI_G \dot{\mathbf{\Lambda}} + \mathbf{\Lambda} \times dI_G \quad (1.5)$$

Qu'est ce qu'on met dans  $dI_G$  ? Et bien tout simplement l'opérateur d'inertie de la section, qui s'exprime à l'aide des moments quadratiques des directions principales de la façon suivante, dans la base des directions principales d'inertie au premier ordre en  $ds$  :

$$dI_G = \begin{bmatrix} dI_{G3} & 0 & 0 \\ 0 & dI_{G1} & 0 \\ 0 & 0 & dI_{G2} \end{bmatrix} \simeq \rho ds \begin{bmatrix} I_1 + I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Where :

$$dI_{G3} = \int_V \rho(x_1^2 + x_2^2) dV \simeq \rho ds \int_V (x_1^2 + x_2^2) dx_1 dx_2 \simeq \rho ds(I_1 + I_2) \quad (1.7a)$$

$$dI_{G1} = \int_V \rho(x_2^2 + x_3^2) dV \simeq \rho ds \int_V x_2^2 dx_1 dx_2 \simeq \rho ds I_1 \quad (1.7b)$$

$$dI_{G2} = \int_V \rho(x_1^2 + x_3^2) dV \simeq \rho ds \int_V x_1^2 dx_1 dx_2 \simeq \rho ds I_2 \quad (1.7c)$$

Et l'on peut alors écrire la seconde loi de Kirchhoff sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s}(s) + \mathbf{m}(s) + \mathbf{x}' \times \mathbf{F}(s) = \rho \begin{bmatrix} (I_1 + I_2)\dot{\Lambda}_3 + (I_2 - I_1)\Lambda_1\Lambda_2 \\ I_1(\dot{\Lambda}_1 + \Lambda_2\Lambda_3) \\ I_2(\dot{\Lambda}_2 - \Lambda_3\Lambda_1) \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

On montre ensuite :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{d}}_3 = \boldsymbol{\Lambda} \times \mathbf{d}_3 = \Lambda_2 \mathbf{d}_1 - \Lambda_1 \mathbf{d}_2 \\ \dot{\mathbf{d}}_1 = \boldsymbol{\Lambda} \times \mathbf{d}_1 = -\Lambda_2 \mathbf{d}_3 + \Lambda_3 \mathbf{d}_2 \\ \dot{\mathbf{d}}_2 = \boldsymbol{\Lambda} \times \mathbf{d}_2 = \Lambda_1 \mathbf{d}_3 - \Lambda_3 \mathbf{d}_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\mathbf{d}}_3 = \dot{\Lambda}_2 \mathbf{d}_1 - \dot{\Lambda}_1 \mathbf{d}_2 + \boldsymbol{\Lambda} \times \dot{\mathbf{d}}_3 \\ \ddot{\mathbf{d}}_1 = -\dot{\Lambda}_2 \mathbf{d}_3 + \dot{\Lambda}_3 \mathbf{d}_2 + \boldsymbol{\Lambda} \times \dot{\mathbf{d}}_1 \\ \ddot{\mathbf{d}}_2 = \dot{\Lambda}_1 \mathbf{d}_3 - \dot{\Lambda}_3 \mathbf{d}_1 + \boldsymbol{\Lambda} \times \dot{\mathbf{d}}_2 \end{cases} \quad (1.9)$$

On en déduit en remarquant que  $(\boldsymbol{\Lambda} \times \dot{\mathbf{d}}_i) \times \mathbf{d}_i = \Lambda_i(\boldsymbol{\Lambda} \times \dot{\mathbf{d}}_i)$  que :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{d}}_3 \times \mathbf{d}_3 = (\dot{\Lambda}_2 \mathbf{d}_1 - \dot{\Lambda}_1 \mathbf{d}_2 + \boldsymbol{\Lambda} \times \dot{\mathbf{d}}_3) \times \mathbf{d}_3 = (-\dot{\Lambda}_1 + \Lambda_2 \Lambda_3) \mathbf{d}_1 - (\dot{\Lambda}_2 + \Lambda_1 \Lambda_3) \mathbf{d}_2 \\ \ddot{\mathbf{d}}_1 \times \mathbf{d}_1 = (-\dot{\Lambda}_2 \mathbf{d}_3 + \dot{\Lambda}_3 \mathbf{d}_2 + \boldsymbol{\Lambda} \times \dot{\mathbf{d}}_1) \times \mathbf{d}_1 = -(\dot{\Lambda}_3 + \Lambda_1 \Lambda_2) \mathbf{d}_3 + (-\dot{\Lambda}_2 + \Lambda_1 \Lambda_3) \mathbf{d}_2 \\ \ddot{\mathbf{d}}_2 \times \mathbf{d}_2 = \dot{\Lambda}_1 \mathbf{d}_3 - \dot{\Lambda}_3 \mathbf{d}_1 + \boldsymbol{\Lambda} \times \dot{\mathbf{d}}_2 \times \mathbf{d}_2 = (-\dot{\Lambda}_3 + \Lambda_1 \Lambda_2) \mathbf{d}_3 - (\dot{\Lambda}_1 + \Lambda_2 \Lambda_3) \mathbf{d}_1 \end{cases} \quad (1.10)$$

On peut alors conclure sur l'expression de l'équation de kirchoff :

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s}(s) + \mathbf{m}(s) + \mathbf{d}'_3 \times \mathbf{F}(s) = I_1 \mathbf{d}_1 \times \ddot{\mathbf{d}}_1 + I_2 \mathbf{d}_2 \times \ddot{\mathbf{d}}_2 \quad (1.11)$$

## 1.3 Equations of motion

### 1.3.1 Constitutive equations

Attention, pas d'effort normal par loi constitutive en principe car on est dans un modèle inextensible. L'effort normal est calculé par la loi d'équilibre avec les moments et/ou efforts tranchants. Ici, on postulera tout de même une telle loi constitutive pour la résolution numérique. Ce qui nous amène à considérer une tige quasiment inextensible.

point à creuser. en gros je suis entrain de dire que dans le modèle classique à 3DOF type Douthe ou Barnes, il n'est pas nécessaire d'introduire la raideur axiale (mais alors où intervient la section ?). L'effort normal est déduit des équations d'équilibre.

En fait cela ne semble pas possible. Il faut alors revenir à l'équation constitutive qui donne l'effort normal, mais alors quid de l'hypothèse quasistatique ?

Dans le fond, l'hypothèse d'inextensibilité c'est dire que les déformations axiales sont négligeable devant les autres modes de déformation (flexion et/ou torsion). Mais pour caractériser l'effort normal lui même, il faut bien considérer une elongation.

Ou alors, peut-être qu'il faut comprendre que l'effort normal est déduit uniquement des conditions aux limites et/ou éventuellement des efforts extérieurs appliqués à la centerline.

Pour comprendre le traitement de l'inextensibilité, regarder [Ant05] p50. Qu'apporte

l'hypothèse d'inextensibilité. Est-elle raisonnable. Tps de calcul par rapport au cas extensible.

$$\mathbf{N} = ES(\|\mathbf{d}_3'\| - \|\bar{\mathbf{d}}_3'\|)\mathbf{d}_3 \quad (1.12a)$$

$$\mathbf{M}_1 = EI_1(\kappa_1 - \bar{\kappa}_1)\mathbf{d}_1 \quad (1.12b)$$

$$\mathbf{M}_2 = EI_2(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2)\mathbf{d}_2 \quad (1.12c)$$

$$\mathbf{Q} = [GJ(\theta' - \bar{\theta}') - EC_w(\theta''' - \bar{\theta}''')]\mathbf{d}_3 \quad (1.12d)$$

### 1.3.2 Internal forces and moments

Efforts internes de coupure :

$$\mathbf{F}_{int} = N\mathbf{d}_3 + T_1\mathbf{d}_1 + T_2\mathbf{d}_2 \quad (1.13a)$$

$$\mathbf{M}_{int} = Q\mathbf{d}_3 + M_1\mathbf{d}_1 + M_2\mathbf{d}_2 \quad (1.13b)$$

Efforts externes appliqués linéiques :

$$\mathbf{f}_{ext} = f_3\mathbf{d}_3 + f_1\mathbf{d}_1 + f_2\mathbf{d}_2 \quad (1.14a)$$

$$\mathbf{m}_{ext} = m_3\mathbf{d}_3 + m_1\mathbf{d}_1 + m_2\mathbf{d}_2 \quad (1.14b)$$

### 1.3.3 Rod dynamic

First Kirchhoff law projecting on the material frame basis :

$$N' + \kappa_1 T_2 - \kappa_2 T_1 + f_3 = \rho S \ddot{x}_3 \quad (1.15a)$$

$$T_1' + \kappa_2 N - \tau T_2 + f_1 = \rho S \ddot{x}_1 \quad (1.15b)$$

$$T_2' - \kappa_1 N + \tau T_1 + f_2 = \rho S \ddot{x}_2 \quad (1.15c)$$

Second Kirchhoff law projecting on the material frame basis :

$$Q' + \kappa_1 M_2 - \kappa_2 M_1 + m_3 = (I_1 + I_2)\dot{\Lambda}_3 + (I_2 - I_1)\Lambda_1\Lambda_2 \quad (1.16a)$$

$$M_1' + \kappa_2 Q - \tau M_2 - T_2 + m_1 = I_1(\dot{\Lambda}_1 + \Lambda_2\Lambda_3) \quad (1.16b)$$

$$M_2' - \kappa_1 Q + \tau M_1 + T_1 + m_2 = I_2(\dot{\Lambda}_2 - \Lambda_3\Lambda_1) \quad (1.16c)$$

## 1.4 Geometric interpretation

Ici, on peut mettre l'interprétation géométrique (cf pdf LDP notes). Cela consiste essentiellement à 2/3 schémas bien pensés à produire + à écrire les projections au 1er ordre.

## 1.5 Main hypothesis

On néglige les forces d'inertie liées à la rotation de l'élément (devant quoi ?? traitement quasi-statique par rapport à la rotation). Cette hypothèse est faite explicitement chez Florence Bertail :

[CBd13] “neglecting inertial momentum due to the vanishing cross- section lead to the following dynamic equations for a Kirchhoff rod”

Cette hypothèse est faite mais passée sous silence chez Douthe, Adriaenssen, D'Amico lorsqu'ils déduisent l'effort tranchant du moment de flexion.

Principe :

- les équations constitutives permettent le calcul de  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $Q$  à partir de la géométrie  $\{\mathbf{x}, \theta\}$ .
- La seconde loi de kirchhoff projetée sur les axes matériels 1 et 2 de la section me donnent accès aux efforts tranchants  $T_1$  et  $T_2$ .
- La seconde loi de kirchhoff projetée sur les axes matériel 3 (tangente à la centerline) de la section me donnent l'hypothèse quasi-statique de Audoly.

## 1.6 Conclusion

Remind that the beam is subject to a distributed external force  $\mathbf{f}_{ext}$  and a distributed external moment  $\mathbf{m}_{ext}$ .

We neglect rotational inertial effects on  $\mathbf{d}_1$  et  $\mathbf{d}_2$  in (1.16b) and (1.16c) which leads to the following shear force :

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{d}_3 \times (\mathbf{M}' + \mathbf{m}_{ext}) + Q\kappa\mathbf{b} - \tau\mathbf{M} \quad (1.17)$$

We may neglect as well the last term ( $\tau\mathbf{M}$ ) and get back to the shear force obtained by the variational approach. The total internal force acting on the beam is hence given by :

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{N}(s) + \mathbf{T}(s) \quad (1.18)$$

Sections are subject to the following rotational moment around the centerline :

$$\mathbf{\Gamma}(s) = Q' + \mathbf{d}_3 \cdot (\kappa\mathbf{b} \times \mathbf{M} + \mathbf{m}_{ext}) \quad (1.19)$$

## Bibliography

[ABW99] Sigrid Adriaenssens, Michael Barnes, and Christopher Williams. A new analytic and numerical basis for the form-finding and analysis of spline and gridshell

## Bibliography

---

- structures. In B Kumar and B H V Topping, editors, *Computing Developments in Civil and Structural Engineering*, pages 83–91. Civil-Comp Press, Edinburgh, 1999.
- [Ant05] Stuart Antman. *Nonlinear problems of elasticity*. Applied mathematical sciences. Springer, New York, 2005.
- [CBd13] Romain Casati and Florence Bertails-descoubes. Super space clothoids. In *SIGGRAPH*, 2013.
- [Dil92] Ellis Harold Dill. Kirchhoff’s theory of rods. *Archive for History of Exact Sciences*, 1992.
- [Hoo06] P C J Hoogenboom. 7 Vlasov torsion theory. (October):1–12, 2006.
- [LL09] Holger Lang and Joachim Linn. Lagrangian field theory in space-time for geometrically exact Cosserat rods. 150:21, 2009.
- [Neu09] S. Neukirch. *Enroulement , contact et vibrations de tiges élastiques*. PhD thesis, 2009.
- [Spi08] Jonas Spillmann. *CORDE : Cosserat rod elements for the animation of interacting elastic rods*. PhD thesis, 2008.
- [The07] Adrien Theetten. *Splines dynamiques géométriquement exactes : simulation haute performance et interaction*. PhD thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille, 2007.



## 2 Numerical model

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'attache à la résolution de l'équilibre statique par relaxation dynamique. Peut-être qu'il faudra faire un chapitre "Marsupilami" plus détaillé qui regroupe les différents éléments formulés et les connexions / liaisons On formule l'élément en torsion à partir des équations de Kirchhoff et non du modèle énergétique (un terme est manquant). On effectue une validation numérique. Penser à tracer la contribution de chaque terme pour vérifier les approximations effectuées.

[Di192]

### 2.2 Discret curve-angle representation

#### 2.2.1 Discrete centerline

On discrétise la centerline de la façon suivante :

$$s_i = \sum_0^i |\mathbf{e}_{i-1}| \quad , \quad i = 0..n \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{x}_i \quad , \quad i = 0..n \quad (2.1b)$$

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i \quad , \quad i = 0..n-1 \quad (2.1c)$$

## 2.2.2 Discrete Bishop frame

### Discrete parallel transport at edges

### Discrete parallel at vertices

On définit ici le transport parallèle discret entre edges et entre vertices. A chaque vertex, on associe un repère de bishop et un repère matériel

$$\theta_i \quad , \quad i = 0..n \quad (2.2a)$$

$$\{\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i\} \quad , \quad i = 0..n \quad (2.2b)$$

$$\{\mathbf{d}_i^1, \mathbf{d}_i^2\} \quad , \quad i = 0..n \quad (2.2c)$$

## 2.2.3 Discrete material frame

## 2.3 Interpolation rules

On fait des hypothèses sur la forme des efforts pour pouvoir effectuer une interpolation entre les noeuds. Thus, we define edge quantities and vertex quantities.

### 2.3.1 Geometric and material properties

We suppose that the sections are defined at vertices and that section properties remain uniform over  $]s_{i-1/2}, s_{i+1/2}[$ . Thus, the material and geometric properties ( $P$ ) of the beam ( $E_i, G_i, S_i, I_i^1, I_i^2, J_i, m_i$ ) are supposed to be piecewise constant functions of  $s$  on  $[0, L]$  :

$$P(s) = P_i \quad , \quad s \in [s_{i-1/2}, s_{i+1/2}] \quad (2.3)$$

Note that this functions may be discontinuous at edges midspan ( $s_{i+1/2}$ ).

### 2.3.2 Axial force and strain

#### Axial force

$N$  is supposed to be piecewise constant between vertices on  $[0, L]$  :

$$N(s) = N_i \mathbf{t}_i \quad , \quad s \in ]s_i, s_{i+1}[ \quad (2.4)$$

Note that this functions may be discontinuous at edges midspan ( $s_{i+1/2}$ ).

#### Axial strain

Nous avons défini les propriétés géométriques et matérielles aux noeuds et nous avons fait l'hypothèse qu'elles restaient uniformes sur l'intervalle  $]s_{i-1/2}, s_{i+1/2}[$ . Par ailleurs, nous avons supposé l'effort normal ( $N$ ) uniforme sur l'intervalle  $]s_i, s_{i+1}[$ . De fait, la déformation

axiale ( $\epsilon$ ) est une fonction constante par morceaux sur les intervalles  $]s_i, s_{i+1/2}[$ .

Connaissant l'élongation totale du segment  $e_i$ , et puisque nous avons supposé l'effort normal uniforme sur le segment, il est possible de calculer les déformations axiales  $\epsilon_i^+$  et  $\epsilon_{i+1}^-$  respectivement pour les intervalles  $]s_i, s_{i+1/2}[$  et  $]s_{i+1/2}, s_{i+1}[$  :

$$N_i = [ES]_i \epsilon_i^+ = [ES]_{i+1} \epsilon_{i+1}^- = \alpha_i \epsilon_i \quad (2.5)$$

Avec  $\alpha_i$  la raideur axiale équivalente sur le segment  $e_i$  qui permet de calculer l'effort normal sur le segment en fonction de l'élongation totale du segment  $e_i$  bien que, comme énoncé précédemment, la déformation axiale puisse être différente entre  $]s_i, s_{i+1/2}[$  et  $]s_{i+1/2}, s_{i+1}[$  si l'on a un changement de raideur axiale  $ES$  entre les noeuds  $x_i$  et  $x_{i+1}$ .

Les élongations des demis segments et du segment entier sont données par les équations suivantes, où l'on a considéré  $l_i^+$  et  $l_{i+1}^-$  les longueurs respectives des demi segments  $]s_i, s_{i+1/2}[$  et  $]s_{i+1/2}, s_{i+1}[$  :

$$\epsilon_i^+ = \frac{l_i^+ - \bar{l}_i/2}{\bar{l}_i/2}, \quad \epsilon_{i+1}^- = \frac{l_{i+1}^- - \bar{l}_i/2}{\bar{l}_i/2}, \quad \epsilon_i = \frac{l_i}{\bar{l}_i} = \frac{\epsilon_i^+}{2} + \frac{\epsilon_{i+1}^-}{2} \quad (2.6)$$

Ces équations de continuité permettent de déduire la raideur axiale équivalente  $\alpha_i$  à considérer sur le segment  $e_i$  pour obtenir l'effort normal à partir de la déformation globale du segment :

$$N(s) = N_i = \alpha_i \epsilon_i, \quad s \in ]s_i, s_{i+1}[ \quad \text{with} \quad \alpha_i = \frac{2[ES]_i[ES]_{i+1}}{[ES]_i + [ES]_{i+1}} \quad (2.7)$$

On obtient également les déformations axiales sur chacun des intervalles :

$$\epsilon(s) = \epsilon_i^+ = \frac{\alpha_i}{[ES]_i} \epsilon_i, \quad s \in ]s_i, s_{i+1/2}[ \quad (2.8a)$$

$$\epsilon(s) = \epsilon_{i+1}^- = \frac{\alpha_i}{[ES]_{i+1}} \epsilon_i, \quad s \in ]s_{i+1/2}, s_{i+1}[ \quad (2.8b)$$

On remarque que pour une poutre aux propriétés uniformes, les déformations sont continues (il n'y a plus de saut) et  $\alpha_i = [ES]_i = [ES]_{i+1}$ .

### 2.3.3 Moment of torsion and rate of twist

#### Moment of torsion

$Q$  is supposed to be piecewise constant between verticies on  $[0, L]$  :

$$Q(s) = Q_i t_i, \quad s \in ]s_i, s_{i+1}[ \quad (2.9)$$

Note that this function may be discontinuous at edges midspan ( $s_{i+1/2}$ ).

### Rate of twist

Nous avons défini les propriétés géométriques et matérielles aux noeuds et nous avons fait l'hypothèse qu'elles restaient uniformes sur l'intervalle  $]s_{i-1/2}, s_{i+1/2}[$ . Par ailleurs, nous avons supposé le moment de torsion ( $Q$ ) uniforme sur l'intervalle  $]s_i, s_{i+1}[$ . De fait, the rate of twist ( $\tau = \theta'$ ) est une fonction constante par morceaux sur les intervalles  $]s_i, s_{i+1/2}[$ .

Connaissant le twist, c'est à dire la variation de  $\theta$ , sur le segment  $e_i$ , et puisque nous avons supposé le moment de torsion uniforme sur le segment, il est possible de calculer les rate of twist  $\tau_i^+$  et  $\tau_{i+1}^-$  respectivement pour les intervalles  $]s_i, s_{i+1/2}[$  et  $]s_{i+1/2}, s_{i+1}[$  :

$$Q_i = [GJ]_i \tau_i^+ = [GJ]_{i+1} \tau_{i+1}^- = \beta_i \tau_i \quad (2.10)$$

Avec  $\beta_i$  la raideur en torsion équivalente sur le segment  $e_i$  qui permet de calculer le moment de torsion sur le segment en fonction de l'élongation totale du segment  $e_i$  bien que, comme énoncé précédemment, le rate of twist puisse être différente entre  $]s_i, s_{i+1/2}[$  et  $]s_{i+1/2}, s_{i+1}[$  si l'on a un changement de raideur en torsion  $GJ$  entre les noeuds  $x_i$  et  $x_{i+1}$ .

Les twists des demis segments et du segment entier sont données par les équations suivantes, où l'on a considéré  $\theta_i^{mid}$  l'angle de rotation de la section en  $s_{i+1/2}$  :

$$\tau_i^+ = \frac{\theta_i^{mid} - \theta_i}{l_i/2} \quad , \quad \tau_{i+1}^- = \frac{\theta_{i+1} - \theta_i^{mid}}{l_i/2} \quad , \quad \tau_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{\bar{l}_i} = \frac{\tau_i^+}{2} + \frac{\tau_{i+1}^-}{2} \quad (2.11)$$

Ces équations de continuité permettent de déduire la raideur en torsion équivalente  $\beta_i$  à considérer sur le segment  $e_i$  pour obtenir le moment de torsion à partir du twist global le long du segment :

$$Q(s) = Q_i = \beta_i (\tau_i - \bar{\tau}_i) \quad , \quad s \in ]s_i, s_{i+1}[ \quad \text{with} \quad \beta_i = \frac{2[GJ]_i [GJ]_{i+1}}{[GJ]_i + [GJ]_{i+1}} \quad (2.12)$$

On obtient également les rate of twist sur chacun des intervalles dans la configuration au repos ( $\bar{\tau}$ ) comme déformée ( $\tau$ ) :

$$\tau(s) = \tau_i^+ = \frac{\beta_i}{[GJ]_i} \tau_i \quad , \quad s \in ]s_i, s_{i+1/2}[ \quad (2.13a)$$

$$\tau(s) = \tau_{i+1}^- = \frac{\beta_i}{[GJ]_{i+1}} \tau_i \quad , \quad s \in ]s_{i+1/2}, s_{i+1}[ \quad (2.13b)$$

On remarque que pour une poutre aux propriétés uniformes, les déformations sont continues (il n'y a plus de saut) et  $\beta_i = [GJ]_i = [GJ]_{i+1}$ .

### 2.3.4 Bending moment and curvature

#### Bending moment

$M$  is supposed to be continuous and piecewise linear on  $[0, L]$ . This assumption is quite reasonable because the bending moment is effectively continuous for a beam subject to

punctual forces and moments. Thus,  $\mathbf{M}$  is interpolated from the moment computed at vertices :

$$\mathbf{M}(s) = \mathbf{M}_{i+1/2} + (s - \frac{l_i}{2})\mathbf{M}'_{i+1/2} \quad , \quad s \in [s_i, s_{i+1}] \quad (2.14)$$

With

$$\mathbf{M}_{i+1/2} = \frac{\mathbf{M}_i + \mathbf{M}_{i+1}}{2} \quad (2.15a)$$

$$\mathbf{M}'_{i+1/2} = \frac{\mathbf{M}_{i+1} - \mathbf{M}_i}{l_i} \quad (2.15b)$$

### Curvature

Il y a une sorte de dualité entre le moment et la courbure. Parfois c'est la mesure de la courbure qui donne accès au moment de flexion. Parfois la courbure c'est la connaissance du moment de flexion qui donne la courbure. Si le moment est continu et linéaire par morceaux, la courbure elle est seulement linéaire par morceau. En effet, il peut y a voir un saut de courbure entre deux éléments de  $EI$  distinct.

On interpole la courbure à partir des courbures discrètes aux noeuds et des  $EI$  (également définis aux noeuds) de part et d'autre des noeuds. On revient à la continuité du moment. Puis on déduit la courbure du moment.

Donc au repos, on considère que  $\mathbf{B}\kappa\mathbf{b}$  est continu et linéaire par morceaux, qui donne l'interpolation de la courbure suivante :

$$\mathbf{B}\kappa\mathbf{b}(s) = \frac{\mathbf{B}_i\kappa\mathbf{b}_i + \mathbf{B}_{i+1}\kappa\mathbf{b}_{i+1}}{2} + (s - \frac{l_i}{2})\frac{\mathbf{B}_{i+1}\kappa\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{B}_i\kappa\mathbf{b}_i}{l_i} \quad , \quad s \in [s_i, s_{i+1}] \quad (2.16)$$

On définit alors les courbures binormales à gauche ( $\kappa\mathbf{b}_{i+1/2}^-$ ) et à droite ( $\kappa\mathbf{b}_{i+1/2}^+$ ) du point  $\mathbf{x}_{i+1/2}$  tel que :

$$\kappa\mathbf{b}_{i+1/2}^- = \frac{\kappa\mathbf{b}_i + \mathbf{A}_i\kappa\mathbf{b}_{i+1}}{2} \quad (2.17a)$$

$$\kappa\mathbf{b}_{i+1/2}^+ = \frac{\mathbf{A}_i^{-1}\kappa\mathbf{b}_i + \kappa\mathbf{b}_{i+1}}{2} \quad (2.17b)$$

Où l'on a posé  $\mathbf{A}_i = \mathbf{B}_i^{-1}\mathbf{B}_{i+1}$ , la matrice qui représente le saut des propriétés matérielles de flexion entre les noeuds  $i$  et  $i+1$ . Comme attendu,  $\mathbf{A}_i$  vaut l'identité lorsque  $\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_{i+1}$ .

De même, on définit la dérivée de la courbure binormale à gauche ( $\kappa\mathbf{b}'_{i+1/2}^-$ ) et à droite ( $\kappa\mathbf{b}'_{i+1/2}^+$ ) du point  $\mathbf{x}_{i+1/2}$  tel que :

$$\kappa\mathbf{b}'_{i+1/2}^- = \frac{\mathbf{A}_i\kappa\mathbf{b}_{i+1} - \kappa\mathbf{b}_i}{l_i} \quad (2.18a)$$

$$\kappa\mathbf{b}'_{i+1/2}^+ = \frac{\kappa\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{A}_i^{-1}\kappa\mathbf{b}_i}{l_i} \quad (2.18b)$$

Ainsi, on peut donner les lois d'interpolation des courbures en tout point de la centerline, dans n'importe quelle configuration (repos ou déformée) :

$$\kappa \mathbf{b}(s) = \kappa \mathbf{b}_{i+1/2}^- + (s - \frac{l_i}{2}) \kappa \mathbf{b}_{i+1/2}'^- \quad s \in [s_i, s_{i+1/2}[ \quad (2.19a)$$

$$\kappa \mathbf{b}(s) = \kappa \mathbf{b}_{i+1/2}^+ + (s - \frac{l_i}{2}) \kappa \mathbf{b}_{i+1/2}'^+ \quad s \in ]s_{i+1/2}, s_{i+1}] \quad (2.19b)$$

Dans le cas où les propriétés de la poutre sont conservées ( $\mathbf{A}_i = \mathbf{I}$ ), on écrira plus simplement:

$$\kappa \mathbf{b}(s) = \kappa \mathbf{b}_{i+1/2} + (s - \frac{l_i}{2}) \kappa \mathbf{b}_{i+1/2}' \quad , \quad s \in [s_i, s_{i+1}] \quad (2.20)$$

With

$$\kappa \mathbf{b}_{i+1/2} = \kappa \mathbf{b}_{i+1/2}^- = \kappa \mathbf{b}_{i+1/2}^+ = \frac{\kappa \mathbf{b}_i + \kappa \mathbf{b}_{i+1}}{2} \quad (2.21a)$$

$$\kappa \mathbf{b}_{i+1/2}' = \kappa \mathbf{b}_{i+1/2}'^- = \kappa \mathbf{b}_{i+1/2}'^+ = \frac{\kappa \mathbf{b}_{i+1} - \kappa \mathbf{b}_i}{l_i} \quad (2.21b)$$

En pratique, si la correction apportée n'est pas pertinente, on négligera le saut de courbure dans les calculs discrets.

### 2.3.5 Discretization

#### Constitutive Equations

$$\tau = \theta' \quad (2.22a)$$

$$Q = ES\epsilon \quad (2.22b)$$

$$Q = GJ(\tau - \bar{\tau}) \quad (2.22c)$$

$$M1 = EI_1(\kappa_1 - \bar{\kappa}_1) \quad (2.22d)$$

$$M1 = EI_2(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) \quad (2.22e)$$

$$\mathbf{M} = M_1 \mathbf{d}_1 + M_2 \mathbf{d}_2 \quad (2.22f)$$

$$\mathbf{Q} = Q \mathbf{d}_3 \quad (2.22g)$$

Notes :

$$\mathbf{d}_3 \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{d}_3) = \kappa_1 M_1 + \kappa_2 M_1 \quad (2.23a)$$

$$\mathbf{d}_3 \cdot (\kappa \mathbf{b} \times \mathbf{M}) = \kappa_1 M_2 - \kappa_2 M_1 \quad (2.23b)$$

$$(\boldsymbol{\omega} - \bar{\boldsymbol{\omega}})^T \mathbf{B} \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} = -\kappa \mathbf{b} \cdot (\mathbf{d}_3 \times \mathbf{M}) = \kappa_1 M_2 - \kappa_2 M_1 \quad (2.23c)$$

#### Axial Force

$$\mathbf{N} = (ES\epsilon) \mathbf{d}_3 \quad (2.24)$$

### Shear Force

$$\mathbf{T} = \mathbf{d}_3 \times \mathbf{M}' + Q\kappa\mathbf{b} - \tau\mathbf{M} \quad (2.25)$$

### Rotational Moment

$$\mathbf{\Gamma}(s) = (Q' + \kappa_1 M_2 - \kappa_2 M_1)\mathbf{d}_3 = Q'\mathbf{d}_3 + \kappa\mathbf{b} \times \mathbf{M} \quad (2.26)$$

### Quasistatic hypothesis

$$Q' + \kappa_1 M_2 - \kappa_2 M_1 \simeq 0 \quad (2.27)$$

### Inextensibility hypothesis

$$\|\mathbf{x}'\| = \|(\mathbf{x} + \boldsymbol{\epsilon})'\| = 1 \quad (2.28a)$$

$$\|\mathbf{e}_i\| = \|\bar{\mathbf{e}}_i\| \quad (2.28b)$$

En fait il faut faire quelques hypothèses sur la nature des efforts pour pouvoir les interpoler convenablement le long de la courbe. On va faire qqch qui ressemble à la super-clothoïde de Bertails, et qui semble une hypothèse naturelle pour une poutre continue sur plusieurs appuis soumise à des forces et moments ponctuels :

- le moment est continu et linéaire par morceaux. Il est évalué ponctuellement aux noeuds et interpolé linéairement entre les noeuds.
- la courbure est donc continue par morceaux et linéaire par morceaux. Elle est obtenue à partir du moment et de  $\mathbf{B}$
- N et Q sont constants par morceaux

$$\mathbf{N}(s) = \mathbf{N}_i \quad , \quad s \in ]0, |\mathbf{e}_i|[ \quad (2.29a)$$

$$\mathbf{M}(s) = \mathbf{M}_i + s\mathbf{M}'_i \quad s \in [0, |\mathbf{e}_i|[ \quad , \quad \mathbf{M}'_i = \frac{\mathbf{M}_{i+1} - \mathbf{M}_i}{|\mathbf{e}_i|} \quad (2.29b)$$

$$\mathbf{Q}(s) = \mathbf{Q}_i \quad , \quad s \in ]0, |\mathbf{e}_i|[ \quad (2.29c)$$

Faire un tableau vertex / edge quantities :

- les propriétés mécaniques sont définies aux noeuds
- les repères matériels sont définis aux noeuds
- les courbures sont définies aux noeuds

- les moments sont définis aux noeuds et sont interpolés linéairement entre les noeuds
- l'effort normal et le moment de torsion sont supposés uniformes sur les segments (ils sont donc définis aux segments)
- $\alpha$  et  $\beta$  sont des propriétés équivalentes définies sur les segments (égales à celles de noeuds s'il n'y a pas de saut de propriété).

### 2.3.6 Force

#### Axial Force

Axial Force exercée par la poutre sur le point courant  $\mathbf{x}_i$  :

$$\mathbf{F}_i^{\parallel} = [\mathbf{N}]_{i-1/2}^{i+1/2} = \mathbf{N}_{i+1} - \mathbf{N}_i \quad (2.30)$$

Axial Force exercée par la poutre sur le premier point  $\mathbf{x}_0$  :

$$\mathbf{F}_i^{\parallel} = [\mathbf{N}]_0 = \mathbf{N}_0 \quad (2.31)$$

Axial Force exercée par la poutre sur le dernier point  $\mathbf{x}_n$  :

$$\mathbf{F}_i^{\parallel} = -[\mathbf{N}]_0 = -\mathbf{N}_n \quad (2.32)$$

#### Shear Force

Shear Force exercée par la poutre sur le point courant  $\mathbf{x}_i$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i^{\perp} &= [\mathbf{d}_3 \times \mathbf{M}' + Q\kappa\mathbf{b}]_{i-1/2}^{i+1/2} \\ &= \frac{\mathbf{e}_i}{|\mathbf{e}_i|} \times \frac{\mathbf{M}_{i+1} - \mathbf{M}_i}{|\mathbf{e}_i|} - \frac{\mathbf{e}_{i-1}}{|\mathbf{e}_{i-1}|} \times \frac{\mathbf{M}_i - \mathbf{M}_{i-1}}{|\mathbf{e}_{i-1}|} + Q_i\kappa\mathbf{b}_{i+1/2}^- - Q_{i-1}\kappa\mathbf{b}_{i-1/2}^+ \\ &= (\mathbf{F}_i^1 + \mathbf{F}_i^2 + \mathbf{H}_i^-) - (\mathbf{F}_{i-1}^1 + \mathbf{F}_{i-1}^2 + \mathbf{H}_{i-1}^+) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Ici, on a un problème de définition de  $\kappa\mathbf{b}$  en milieu de segment. En effet, bien que le moment soit continu, la courbure ne l'est pas nécessairement. Lorsqu'il y a un saut de  $EI$  il y a nécessairement un saut de  $\kappa\mathbf{b}$ . On pourrait plutôt interpoler le moment à mi-travée et remonter à la courbure - soit à gauche, soit à droite - en fonction des propriétés géométriques



locales :

$$\mathbf{M}_{i+1/2} = \frac{\mathbf{M}_i + \mathbf{M}_{i+1}}{2} \quad (2.34a)$$

$$\kappa \mathbf{b}_{i+1/2}^- = \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{M}_{i+1/2} + \overline{\kappa \mathbf{b}}_{i+1/2}^- \quad (2.34b)$$

$$\kappa \mathbf{b}_{i+1/2}^+ = \mathbf{B}_{i+1}^{-1} \mathbf{M}_{i+1/2} + \overline{\kappa \mathbf{b}}_{i+1/2}^+ \quad (2.34c)$$

$$\mathbf{H}_i^- = Q_i \kappa \mathbf{b}_{i+1/2}^- = Q_i (\mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{M}_{i+1/2} + \overline{\kappa \mathbf{b}}_{i+1/2}^-) \quad (2.34d)$$

$$\mathbf{H}_i^+ = Q_i \kappa \mathbf{b}_{i+1/2}^+ = Q_i (\mathbf{B}_{i+1}^{-1} \mathbf{M}_{i+1/2} + \overline{\kappa \mathbf{b}}_{i+1/2}^+) \quad (2.34e)$$

L'autre approche consiste à ignorer la discontinuité et à simplement prendre la moyenne :

$$\kappa \mathbf{b}_{i+1/2} = \kappa \mathbf{b}_{i+1/2}^- = \kappa \mathbf{b}_{i+1/2}^+ = \frac{\kappa \mathbf{b}_i + \kappa \mathbf{b}_{i+1}}{2} \quad (2.35a)$$

$$\mathbf{H}_i^- = Q_i \kappa \mathbf{b}_{i+1/2}^- \quad (2.35b)$$

$$\mathbf{H}_i^+ = Q_i \kappa \mathbf{b}_{i+1/2}^+ \quad (2.35c)$$

$$\mathbf{H}_i^- = \mathbf{H}_i^+ = \frac{\kappa \mathbf{b}_i + \kappa \mathbf{b}_{i+1}}{2} \quad (2.35d)$$

Cette idée reste intéressante et élégante. Elle n'a de sens que pour une poutre à propriétés variables (sinon on a la continuité de la courbure également).

Shear Force exercée par la poutre sur le premier point  $\mathbf{x}_0$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0^\perp &= [\mathbf{d}_3 \times \mathbf{M}' + Q \kappa \mathbf{b}]_0 \\ &= \frac{\mathbf{e}_0}{|\mathbf{e}_0|} \times \frac{\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_0}{|\mathbf{e}_0|} + Q_0 \frac{\kappa \mathbf{b}_0}{2} \\ &= \mathbf{F}_0^1 + \mathbf{F}_0^2 + \mathbf{H}_0^- \end{aligned} \quad (2.36)$$

Shear Force exercée par la poutre sur le dernier point  $\mathbf{x}_n$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_n^\perp &= -[\mathbf{d}_3 \times \mathbf{M}' + Q \kappa \mathbf{b}]_n \\ &= -\frac{\mathbf{e}_{n-1}}{|\mathbf{e}_{n-1}|} \times \frac{\mathbf{M}_n - \mathbf{M}_{n-1}}{|\mathbf{e}_{n-1}|} - Q_n \frac{\kappa \mathbf{b}_n}{2} \\ &= -(\mathbf{F}_n^1 + \mathbf{F}_n^2 + \mathbf{H}_n^+) \end{aligned} \quad (2.37)$$

### Moment of Torsion

$$\Gamma_i = \int_{i-1/2}^{i+1/2} m(s) = Q_i - Q_{i-1} + \int_{i-1/2}^{i+1/2} \kappa_1 M_2 - \kappa_2 M_1 \quad (2.38)$$

Note que le terme dans l'intégrale est nul pour une section isotrope. On retrouve les résultats bien connus sur les poutres axisymétriques à courbure au repos nulle. Ici, 2 possibilités :

- soit on considère que le moment varie lentement sur l'intervalle  $]i - 1/2, i + 1/2[$  et on considère donc le terme  $\kappa \mathbf{b}_i \times \mathbf{M}_i$  constant dans l'intégrale, ce qui donne en découpant l'intervalle en  $[i - 1/2, i]$  et  $[i, i + 1/2]$  :

$$\begin{aligned}\Gamma_i &= Q_i - Q_{i-1} + \frac{\mathbf{e}_{i-1}}{|\mathbf{e}_{i-1}|} \cdot (\kappa \mathbf{b}_i \times \mathbf{M}_i) \frac{|\mathbf{e}_{i-1}|}{2} + \frac{\mathbf{e}_i}{|\mathbf{e}_i|} \cdot (\kappa \mathbf{b}_i \times \mathbf{M}_i) \frac{|\mathbf{e}_i|}{2} \\ &= Q_i - Q_{i-1} + \frac{\mathbf{e}_{i-1} + \mathbf{e}_i}{2} \cdot (\kappa \mathbf{b}_i \times \mathbf{M}_i)\end{aligned}\quad (2.39)$$

- soit on revient à l'hypothèse de continuité et de linéarité par morceaux sur le moment:

$$\mathbf{M}(s) = \mathbf{M}_i + s \mathbf{M}'_i \quad \forall s \in [0, |\mathbf{e}_i|] \quad , \quad \mathbf{M}'_i = \frac{\mathbf{M}_{i+1} - \mathbf{M}_i}{|\mathbf{e}_i|} \quad (2.40a)$$

$$\kappa \mathbf{b}(s) = \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{M}(s) + \overline{\kappa \mathbf{b}}(s) \quad (2.40b)$$

$$(2.40c)$$

d'où :

$$\begin{aligned}&= \int_{i-1/2}^i \kappa_1 M_2 - \kappa_2 M_1 \\ &= \int_{i-1/2}^i \left( \frac{1}{[EI]_{1,i}} - \frac{1}{[EI]_{2,i}} \right) M_1 M_2\end{aligned}\quad (2.41)$$

With

$$[EI]_i \quad (2.42a)$$

$$[GJ]_i \quad (2.42b)$$

$$\kappa \mathbf{b}_i = \frac{2 \mathbf{e}_{i-1} \times \mathbf{e}_i}{|\mathbf{e}_{i-1}| |\mathbf{e}_i| |\mathbf{e}_{i-1} + \mathbf{e}_i|} \quad (2.42c)$$

$$\tau_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{|\mathbf{e}_i|} \quad (2.42d)$$

$$\mathbf{N}_i = N_i \mathbf{d}_3 \quad \text{where} \quad N_i = \alpha_i \epsilon_i \quad \alpha_i = \frac{2[ES]_i [ES]_{i+1}}{[ES]_i + [ES]_{i+1}} \quad (2.42e)$$

$$\mathbf{M}_i = [EI]_{1,i} (\kappa_{1,i} - \bar{\kappa}_{1,i}) \mathbf{d}_{1,i} + [EI]_{2,i} (\kappa_{2,i} - \bar{\kappa}_{2,i}) \mathbf{d}_{2,i} \quad (2.42f)$$

$$\mathbf{Q}_i = Q_i \mathbf{d}_3 \quad \text{where} \quad Q_i = \beta_i (\tau_i - \bar{\tau}_i) \quad \beta_i = \frac{2[GJ]_i [GJ]_{i+1}}{[GJ]_i + [GJ]_{i+1}} \quad (2.42g)$$

$$\mathbf{F}_i^1 = - \frac{\mathbf{e}_i \times \mathbf{M}_i}{|\mathbf{e}_i|^2} \quad (2.42h)$$

$$\mathbf{F}_i^2 = + \frac{\mathbf{e}_i \times \mathbf{M}_{i+1}}{|\mathbf{e}_i|^2} \quad (2.42i)$$

$$\mathbf{H}_i^- = Q_i \kappa \mathbf{b}_{i+1/2}^- \quad (2.42j)$$

$$\mathbf{H}_i^+ = Q_i \kappa \mathbf{b}_{i+1/2}^+ \quad (2.42k)$$

$$(2.42l)$$

Ici il y a une ambigüité sur  $M_i$  en fonction d'un éventuel changement de propriété méca

$EI_1$  ou  $EI_2$ . En fait il faudrait préciser un moment à droite et un moment à gauche (ce qui correspond à la réalité). Le moment étant la courbure au noeud  $i$  pondérée par  $2EI$  à droite ou à gauche

Toutes les discrétisations ne se valent pas ....

En fait, ça n'a pas vraiment de sens de définir  $EI$  sur le segment. Le moment est continu. Donc il est uniquement défini par la donnée de la courbure en un noeud et du  $EI$  associé à ce noeuds. Introduire un moment à gauche et un moment à droite est problématique. Ce qui se passe, pour une poutre isostatique simple qui change de  $EI$  à mi-travée, c'est une discontinuité de courbure  $y''$  alors que  $y$  et  $y'$  restent continues. Donc il semble plus pertinent de définir  $EI$  aux noeuds car notre modèle ne peut pas représenter des discontinuités de courbure (ou alors il faut connecter des poutres entre-elles.

Pour la torsion, on peut s'en sortir également en définissant  $\beta$  aux noeuds et en supposant  $GJ$  constant entre  $[i - 1/2, i + 1/2]$ . Il y a donc (éventuellement) un saut de  $\beta$  au milieu de chaque  $e_i$ .

On ne peut pas faire autrement que supposer la torsion uniforme entre 2 noeuds, c'est à dire une variation linéaire (par morceaux) de  $\theta$ . Et il y a donc une discontinuité potentielle aux noeuds.

On écrit la continuité du champs de torsion entre les noeuds 1 et 2 malgré le saut de  $\beta$  :

A mi travée

$$Q_{12} = Q_{mid} = Q_1^+ = Q_2^- = [GJ]_1 \frac{\theta_{mid} - \theta_1}{|e|/2} = [GJ]_2 \frac{\theta_2 - \theta_{mid}}{|e|/2} \quad (2.43)$$

D'où :

$$\theta_{mid} = \frac{[GJ]_1}{[GJ]_1 + [GJ]_2} \theta_1 + \frac{[GJ]_2}{[GJ]_1 + [GJ]_2} \theta_2 \quad (2.44)$$

On en déduit :

$$Q_{12} = Q_{mid} = Q_1^+ = Q_2^- = \frac{2[GJ]_1[GJ]_2}{[GJ]_1 + [GJ]_2} \left( \frac{\theta_2 - \theta_1}{|e|} \right) \quad (2.45)$$

Donc il faut plutôt définir  $Q_i$  la torsion uniforme sur le segment  $e_i$  comme :

$$Q_i = \beta_i(\tau_i - \bar{\tau}_i) \quad \text{where} \quad \beta_i = \frac{2[GJ]_i[GJ]_{i+1}}{[GJ]_i + [GJ]_{i+1}} \quad (2.46)$$

On retrouve bien le cas d'une poutre de propriété constante lorsque  $[GJ]_i = [GJ]_{i+1} = GJ$  alors  $\beta_i = GJ$ .

De manière identique, on résonne pour l'effort axial entre deux noeuds 1 et 2 auxquels sont associés des raideurs axiales  $[ES]_1$  et  $[ES]_2$ . On cherche la raideur équivalente connaissant

## Bibliography

---

uniquement l'allongement de l'ensemble du segment :

$$N_1 = [ES]_1 \cdot \epsilon_1 \quad (2.47a)$$

$$N_2 = [ES]_2 \cdot \epsilon_2 \quad (2.47b)$$

$$N = [ES]_2 \cdot \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \quad (2.47c)$$

Avec :

$$\epsilon_1 = \frac{l_1 - l_0/2}{l_0/2} \quad (2.48a)$$

$$\epsilon_2 = \frac{l_2 - l_0/2}{l_0/2} \quad (2.48b)$$

$$\epsilon = \frac{l}{l_0} = \frac{\epsilon_1}{2} + \frac{\epsilon_2}{2} \quad (2.48c)$$

$$(2.48d)$$

Thus,

$$N_i = N_1 = N_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = \frac{2[ES]_i[ES]_{i+1}}{[ES]_i + [ES]_{i+1}} \quad (2.49)$$

## Bibliography

- [Dil92] Ellis Harold Dill. Kirchhoff's theory of rods. *Archive for History of Exact Sciences*, 1992.