

Modeling of bending-torsion couplings in active-bending structures. Application to the design of elastic gridshell.



École des Ponts
ParisTech

Thèse n. xxxxx
présenté le 01 décembre 2017
à l'Ecole des Ponts ParisTech
laboratoire Navier
Université Paris-Est

pour l'obtention du grade de Docteur ès Sciences
par

Lionel du Peloux

acceptée sur proposition du jury:

Prof Name Surname, président du jury
Prof Name Surname, directeur de thèse
Prof Name Surname, rapporteur
Prof Name Surname, rapporteur
Prof Name Surname, rapporteur

Paris, Ecole des Ponts ParisTech, 2016

Contents

6	Numerical model	1
6.1	Introduction	1
6.1.1	Goals and contribution	1
6.1.2	Related work	1
6.1.3	Overview	2
6.2	Dynamic relaxation	2
6.2.1	Overview	2
6.2.2	Finite difference integration	2
6.2.3	Kinetic damping	2
6.3	Discret curve-angle representation	2
6.3.1	Discrete centerline	2
6.3.2	Discrete bishop frame	2
6.3.3	Discrete material frame	2
6.4	Interpolation rules	2
6.4.1	Geometric and material properties	3
6.4.2	Axial force and strain	3
6.4.3	Moment of torsion and rate of twist	4
6.4.4	Bending moment and curvature	5
6.4.5	Discretization	7
6.4.6	Force	8

6 Numerical model

6.1 Introduction

[Introduction du chapitre](#)

6.1.1 Goals and contribution

[Ici on rappelle les objectifs du chapitre ; on identifie clairement mes contributions.](#) Dans ce chapitre on s'attache à la résolution de l'équilibre statique par relaxation dynamique. Peut-être qu'il faudra faire un chapitre "Marsupilami" plus détaillé qui regroupe les différents éléments formulés et les connexions / liaisons On formule l'élément en torsion à partir des équations de Kirchhoff et non du modèle énergétique (un terme est manquant). On effectue une validation numérique. Penser à tracer la contribution de chaque terme pour vérifier les approximations effectuées.

6.1.2 Related work

[Ici on fait l'analyse bibliographique pour le chapitre concerné.](#) [\[Day65\]](#) [\[Ott65\]](#) [\[Pap81\]](#) [\[MAIK14\]](#) [\[Ala12\]](#) [\[RPKAZ11\]](#)

Idée pour l'article avec sigrid [\[Ala12\]](#)

6.1.3 Overview

6.2 Dynamic relaxation

6.2.1 Overview

Ici, repartir de l'explication donnée par Alister Days en 65. Proposer une illustration avec un pendule. Pourquoi pas le système masse-ressort proposé par Days, à savoir une masse au bout d'une poutre encastrée.

6.2.2 Finite difference integration

6.2.3 Kinetic damping

6.3 Discret curve-angle representation

6.3.1 Discrete centerline

On discrétise la centerline de la façon suivante :

$$s_i = \sum_0^i |e_{i-1}| \quad , \quad i = 0..n \quad (6.1a)$$

$$\mathbf{x}_i \quad , \quad i = 0..n \quad (6.1b)$$

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i \quad , \quad i = 0..n-1 \quad (6.1c)$$

6.3.2 Discrete bishop frame

Discrete parallel transport at edges

Discrete parallel at vertices

On définit ici le transport parrallele discret entre edges et entre vertices. A chaque vertex, on associe un repère de bishop et un repère matériel

$$\theta_i \quad , \quad i = 0..n \quad (6.2a)$$

$$\{\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i\} \quad , \quad i = 0..n \quad (6.2b)$$

$$\{\mathbf{d}_i^1, \mathbf{d}_i^2\} \quad , \quad i = 0..n \quad (6.2c)$$

6.3.3 Discrete material frame

6.4 Interpolation rules

On fait des hypothèses sur la forme des efforts pour pouvoir effectuer une interpolation entre les noeuds. Thus, we define edge quantities and vertex quantities.

6.4.1 Geometric and material properties

We suppose that the sections are defined at verticies and that section properties remain uniform over $]s_{i-1/2}, s_{i+1/2}[$. Thus, the material and geometric properties (P) of the beam ($E_i, G_i, S_i, I_i^1, I_i^2, J_i, m_i$) are supposed to be piecewise constant functions of s on $[0, L]$:

$$P(s) = P_i \quad , \quad s \in [s_{i-1/2}, s_{i+1/2}] \quad (6.3)$$

Note that this functions may be discontinuous at edges midspan ($s_{i+1/2}$).

6.4.2 Axial force and strain

Axial force

N is supposed to be piecewise constant between verticies on $[0, L]$:

$$N(s) = N_i t_i \quad , \quad s \in]s_i, s_{i+1}[\quad (6.4)$$

Note that this functions may be discontinuous at edges midspan ($s_{i+1/2}$).

Axial strain

Nous avons défini les propriétés géométriques et matérielles aux noeuds et nous avons fait l'hypothèse qu'elles restaient uniformes sur l'intervalle $]s_{i-1/2}, s_{i+1/2}[$. Par ailleurs, nous avons supposé l'effort normal (N) uniforme sur l'intervalle $]s_i, s_{i+1}[$. De fait, la déformation axiale (ϵ) est une fonction constante par morceaux sur les intervalles $]s_i, s_{i+1/2}[$.

Connaissant l'élongation totale du segment e_i , et puisque nous avons supposé l'effort normal uniforme sur le segment, il est possible de calculer les déformations axiales ϵ_i^+ et ϵ_{i+1}^- respectivement pour les intervalles $]s_i, s_{i+1/2}[$ et $]s_{i+1/2}, s_{i+1}[$:

$$N_i = [ES]_i \epsilon_i^+ = [ES]_{i+1} \epsilon_{i+1}^- = \alpha_i \epsilon_i \quad (6.5)$$

Avec α_i la raideur axiale équivalente sur le segment e_i qui permet de calculer l'effort normal sur le segment en fonction de l'élongation totale du segment e_i bien que, comme énoncé précédemment, la déformation axiale puisse être différente entre $]s_i, s_{i+1/2}[$ et $]s_{i+1/2}, s_{i+1}[$ si l'on a un changement de raideur axiale ES entre les noeuds x_i et x_{i+1} .

Les élongations des demis segments et du segment entier sont données par les équations suivantes, où l'on a considéré l_i^+ et l_{i+1}^- les longueurs respectives des demi segments $]s_i, s_{i+1/2}[$ et $]s_{i+1/2}, s_{i+1}[$:

$$\epsilon_i^+ = \frac{l_i^+ - \bar{l}_i/2}{\bar{l}_i/2} \quad , \quad \epsilon_{i+1}^- = \frac{l_{i+1}^- - \bar{l}_i/2}{\bar{l}_i/2} \quad , \quad \epsilon_i = \frac{l_i}{\bar{l}_i} = \frac{\epsilon_i^+}{2} + \frac{\epsilon_{i+1}^-}{2} \quad (6.6)$$

Ces équations de continuité permettent de déduire la raideur axiale équivalente α_i à considérer sur le segment e_i pour obtenir l'effort normal à partir de la déformation globale

du segment sur $s \in]s_i, s_{i+1}[$:

$$N(s) = N_i = \alpha_i \epsilon_i \quad , \quad \alpha_i = \frac{2[ES]_i[ES]_{i+1}}{[ES]_i + [ES]_{i+1}} \quad , \quad \epsilon_i = \frac{|l_i| - |\bar{l}_i|}{|\bar{l}_i|} \quad (6.7)$$

On obtient également les déformations axiales sur chacun des intervalles :

$$\epsilon(s) = \epsilon_i^+ = \frac{\alpha_i}{[ES]_i} \epsilon_i \quad , \quad s \in]s_i, s_{i+1/2}[\quad (6.8a)$$

$$\epsilon(s) = \epsilon_{i+1}^- = \frac{\alpha_i}{[ES]_{i+1}} \epsilon_i \quad , \quad s \in]s_{i+1/2}, s_{i+1}[\quad (6.8b)$$

On remarque que pour une poutre aux propriétés uniformes, les déformations sont continues (il n'y a plus de saut) et $\alpha_i = [ES]_i = [ES]_{i+1}$.

6.4.3 Moment of torsion and rate of twist

Moment of torsion

Q is supposed to be piecewise constant between verticies on $[0, L]$:

$$Q(s) = Q_i t_i, \quad s \in]s_i, s_{i+1}[\quad (6.9)$$

Note that this function may be discontinuous at edges midspan ($s_{i+1/2}$).

Rate of twist

Nous avons défini les propriétés géométriques et matérielles aux noeuds et nous avons fait l'hypothèse qu'elles restaient uniformes sur l'intervalle $]s_{i-1/2}, s_{i+1/2}[$. Par ailleurs, nous avons supposé le moment de torsion (Q) uniforme sur l'intervalle $]s_i, s_{i+1}[$. De fait, the rate of twist ($\tau = \theta'$) est une fonction constante par morceaux sur les intervalles $]s_i, s_{i+1/2}[$.

Considérons une poutre droite sans twist au repos. Connaissant le twist dans l'état déformé, c'est à dire la variation de θ , sur le segment e_i , et puisque nous avons supposé le moment de torsion uniforme sur le segment, il est possible de calculer les rate of twist τ_i^+ et τ_{i+1}^- respectivement pour les intervalles $]s_i, s_{i+1/2}[$ et $]s_{i+1/2}, s_{i+1}[$:

$$Q_i = [GJ]_i \tau_i^+ = [GJ]_{i+1} \tau_{i+1}^- = \beta_i \tau_i \quad (6.10)$$

Avec β_i la raideur en torsion équivalente sur le segment e_i qui permet de calculer le moment de torsion sur le segment en fonction de l'élongation totale du segment e_i bien que, comme énoncé précédemment, le rate of twist puisse être différente entre $]s_i, s_{i+1/2}[$ et $]s_{i+1/2}, s_{i+1}[$ si l'on a un changement de raideur en torsion GJ entre les noeuds x_i et x_{i+1} .

Les twists des demis segments et du segment entier sont données par les équations suivantes,

où l'on a considéré θ_i^{mid} l'angle de rotation de la section en $s_{i+1/2}$:

$$\tau_i^+ = \frac{\theta_i^{mid} - \theta_i}{l_i/2} \quad , \quad \tau_{i+1}^- = \frac{\theta_{i+1} - \theta_i^{mid}}{l_i/2} \quad , \quad \tau_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{l_i} = \frac{\tau_i^+}{2} + \frac{\tau_{i+1}^-}{2} \quad (6.11)$$

Ces équations de continuité permettent de déduire la raideur en torsion équivalente β_i à considérer sur le segment e_i pour obtenir le moment de torsion à partir du twist global le long du segment sur $s \in]s_i, s_{i+1}[$:

$$Q(s) = Q_i = \beta_i(\tau_i - \bar{\tau}_i) \quad , \quad \beta_i = \frac{2[GJ]_i[GJ]_{i+1}}{[GJ]_i + [GJ]_{i+1}} \quad , \quad \tau_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{l_i} \quad (6.12)$$

On obtient également les rate of twist sur chacun des intervalles dans la configuration au repos ($\bar{\tau}$) comme déformée (τ) :

$$\tau(s) = \tau_i^+ = \frac{\beta_i}{[GJ]_i} \tau_i \quad , \quad s \in]s_i, s_{i+1/2}[\quad (6.13a)$$

$$\tau(s) = \tau_{i+1}^- = \frac{\beta_i}{[GJ]_{i+1}} \tau_i \quad , \quad s \in]s_{i+1/2}, s_{i+1}[\quad (6.13b)$$

On remarque que pour une poutre aux propriétés uniformes, les déformations sont continues (il n'y a plus de saut) et $\beta_i = [GJ]_i = [GJ]_{i+1}$.

6.4.4 Bending moment and curvature

Bending moment

M is supposed to be continuous and piecewise linear on $[0, L]$. This assumption is quite reasonable because the bending moment is effectively continuous for a beam subject to punctual forces and moments. Thus, M is interpolated from the moment computed at vertices :

$$M(s) = M_{i+1/2} + (s - \frac{l_i}{2})M'_{i+1/2} \quad , \quad s \in [s_i, s_{i+1}] \quad (6.14)$$

With

$$M_{i+1/2} = \frac{M_i + M_{i+1}}{2} \quad (6.15a)$$

$$M'_{i+1/2} = \frac{M_{i+1} - M_i}{l_i} \quad (6.15b)$$

Curvature

Il y a une sorte de dualité entre le moment et la courbure. Parfois c'est la mesure de la courbure qui donne accès au moment de flexion. Parfois la courbure c'est la connaissance du moment de flexion qui donne la courbure. Si le moment est continu et linéaire par morceaux, la courbure elle est seulement linéaire par morceau. En effet, il peut y avoir un saut de courbure entre deux éléments de EI distinct.

Chapter 6. Numerical model

On interpole la courbure à partir des courbures discrètes aux noeuds et des EI (également définis aux noeuds) de part et d'autre des noeuds. On revient à la continuité du moment. Puis on déduit la courbure du moment.

Donc au repos, on considère que $B\kappa b$ est continu et linéaire par morceaux, qui donne l'interpolation de la courbure suivante :

$$B\kappa b(s) = \frac{B_i \kappa b_i + B_{i+1} \kappa b_{i+1}}{2} + \left(s - \frac{l_i}{2}\right) \frac{B_{i+1} \kappa b_{i+1} - B_i \kappa b_i}{l_i}, \quad s \in [s_i, s_{i+1}] \quad (6.16)$$

On définit alors les courbures binormales à gauche ($\kappa b_{i+1/2}^-$) et à droite ($\kappa b_{i+1/2}^+$) du point $x_{i+1/2}$ tel que :

$$\kappa b_{i+1/2}^- = \frac{\kappa b_i + A_i \kappa b_{i+1}}{2} \quad (6.17a)$$

$$\kappa b_{i+1/2}^+ = \frac{A_i^{-1} \kappa b_i + \kappa b_{i+1}}{2} \quad (6.17b)$$

Où l'on a posé $A_i = B_i^{-1} B_{i+1}$, la matrice qui représente le saut des propriétés matérielles de flexion entre les noeuds i et $i+1$. Comme attendu, A_i vaut l'identité lorsque $B_i = B_{i+1}$.

De même, on définit la dérivée de la courbure binormale à gauche ($\kappa b'_{i+1/2}^-$) et à droite ($\kappa b'_{i+1/2}^+$) du point $x_{i+1/2}$ tel que :

$$\kappa b'_{i+1/2}^- = \frac{A_i \kappa b_{i+1} - \kappa b_i}{l_i} \quad (6.18a)$$

$$\kappa b'_{i+1/2}^+ = \frac{\kappa b_{i+1} - A_i^{-1} \kappa b_i}{l_i} \quad (6.18b)$$

Ainsi, on peut donner les lois d'interpolation des courbures en tout point de la centerline, dans n'importe quelle configuration (repos ou déformée) :

$$\kappa b(s) = \kappa b_{i+1/2}^- + \left(s - \frac{l_i}{2}\right) \kappa b'_{i+1/2}^- \quad s \in [s_i, s_{i+1/2}[\quad (6.19a)$$

$$\kappa b(s) = \kappa b_{i+1/2}^+ + \left(s - \frac{l_i}{2}\right) \kappa b'_{i+1/2}^+ \quad s \in]s_{i+1/2}, s_{i+1}] \quad (6.19b)$$

Dans le cas où les propriétés de la poutre sont conservées ($A_i = I$), on écrira :

$$\kappa b(s) = \kappa b_{i+1/2} + \left(s - \frac{l_i}{2}\right) \kappa b'_{i+1/2}, \quad s \in [s_i, s_{i+1}] \quad (6.20)$$

With

$$\kappa b_{i+1/2} = \kappa b_{i+1/2}^- = \kappa b_{i+1/2}^+ = \frac{\kappa b_i + \kappa b_{i+1}}{2} \quad (6.21a)$$

$$\kappa b'_{i+1/2} = \kappa b'_{i+1/2}^- = \kappa b'_{i+1/2}^+ = \frac{\kappa b_{i+1} - \kappa b_i}{l_i} \quad (6.21b)$$

En pratique, si la correction apportée n'est pas pertinente, on négligera le saut de courbure dans les calculs discrets.

6.4.5 Discretization

Constitutive Equations

$$\tau = \theta' \quad (6.22a)$$

$$Q = ES\epsilon \quad (6.22b)$$

$$Q = GJ(\tau - \bar{\tau}) \quad (6.22c)$$

$$M_1 = EI_1(\kappa_1 - \bar{\kappa}_1) \quad (6.22d)$$

$$M_2 = EI_2(\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) \quad (6.22e)$$

$$\mathbf{M} = M_1 \mathbf{d}_1 + M_2 \mathbf{d}_2 \quad (6.22f)$$

$$\mathbf{Q} = Q \mathbf{d}_3 \quad (6.22g)$$

Notes :

$$\mathbf{d}_3 \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{d}_3) = \kappa_1 M_1 + \kappa_2 M_2 \quad (6.23a)$$

$$\mathbf{d}_3 \cdot (\kappa \mathbf{b} \times \mathbf{M}) = \kappa_1 M_2 - \kappa_2 M_1 \quad (6.23b)$$

$$(\boldsymbol{\omega} - \bar{\boldsymbol{\omega}})^T \mathbf{B} \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} = -\kappa \mathbf{b} \cdot (\mathbf{d}_3 \times \mathbf{M}) = \kappa_1 M_2 - \kappa_2 M_1 \quad (6.23c)$$

Axial Force

$$\mathbf{N} = (ES\epsilon) \mathbf{d}_3 \quad (6.24)$$

Shear Force

$$\mathbf{T} = \mathbf{d}_3 \times \mathbf{M}' + Q \kappa \mathbf{b} - \tau \mathbf{M} \quad (6.25)$$

Rotational Moment

$$\Gamma(s) = (Q' + \kappa_1 M_2 - \kappa_2 M_1) \mathbf{d}_3 = Q' \mathbf{d}_3 + \kappa \mathbf{b} \times \mathbf{M} \quad (6.26)$$

Quasistatic hypothesis

$$Q' + \kappa_1 M_2 - \kappa_2 M_1 \simeq 0 \quad (6.27)$$

Inextensibility hypothesis

$$\|\mathbf{x}'\| = \|(\mathbf{x} + \boldsymbol{\epsilon})'\| = 1 \quad (6.28a)$$

$$\|\mathbf{e}_i\| = \|\bar{\mathbf{e}}_i\| \quad (6.28b)$$

En fait il faut faire quelques hypothèses sur la nature des efforts pour pouvoir les interpoler convenablement le long de la courbe. On va faire qqch qui ressemble à la super-clothoïde de Bertails, et qui semble une hypothèse naturelle pour une poutre continue sur plusieurs appuis soumise à des forces et moments ponctuels :

- le moment est continu et linéaire par morceaux. Il est évalué ponctuellement aux noeuds et interpolé linéairement entre les noeuds.
- la courbure est donc continue par morceaux et linéaire par morceaux. Elle est obtenue à partir du moment et de \mathbf{B}
- N et Q sont constants par morceaux

$$\mathbf{N}(s) = \mathbf{N}_i \quad , \quad s \in]0, |e_i|[\quad (6.29a)$$

$$\mathbf{M}(s) = \mathbf{M}_i + s\mathbf{M}'_i \quad s \in [0, |e_i|] \quad , \quad \mathbf{M}'_i = \frac{\mathbf{M}_{i+1} - \mathbf{M}_i}{|e_i|} \quad (6.29b)$$

$$\mathbf{Q}(s) = \mathbf{Q}_i \quad , \quad s \in]0, |e_i|[\quad (6.29c)$$

Faire un tableau vertex / edge quantities :

- les propriétés mécaniques sont définies aux noeuds
- les repères matériels sont définis aux noeuds
- les courbures sont définies aux noeuds
- les moments sont définis aux noeuds et sont interpolés linéairement entre les noeuds
- l'effort normal et le moment de torsion sont supposés uniformes sur les segments (ils sont donc définis aux segments)
- α et β sont des propriétés équivalentes définies sur les segments (égales à celles de noeuds s'il n'y a pas de saut de propriété).

6.4.6 Force

Axial Force

Axial Force exercée par la poutre sur le point courant \mathbf{x}_i :

$$\mathbf{F}_i^{\parallel} = [\mathbf{N}]_{i-1/2}^{i+1/2} = \mathbf{N}_i - \mathbf{N}_{i-1} \quad (6.30)$$

Axial Force exercée par la poutre sur le premier point \mathbf{x}_0 :

$$\mathbf{F}_i^{\parallel} = [\mathbf{N}]_0 = \mathbf{N}_0 \quad (6.31)$$

Axial Force exercée par la poutre sur le dernier point \mathbf{x}_n :

$$\mathbf{F}_i^{\parallel} = -[\mathbf{N}]_0 = -\mathbf{N}_n \quad (6.32)$$

Shear Force

Shear Force exercée par la poutre sur le point courant \mathbf{x}_i :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i^{\perp} &= [\mathbf{d}_3 \times \mathbf{M}' + Q\kappa\mathbf{b}]_{i-1/2}^{i+1/2} \\ &= \frac{\mathbf{e}_i}{|\mathbf{e}_i|} \times \frac{\mathbf{M}_{i+1} - \mathbf{M}_i}{|\mathbf{e}_i|} - \frac{\mathbf{e}_{i-1}}{|\mathbf{e}_{i-1}|} \times \frac{\mathbf{M}_i - \mathbf{M}_{i-1}}{|\mathbf{e}_{i-1}|} + Q_i\kappa\mathbf{b}_{i+1/2}^- - Q_{i-1}\kappa\mathbf{b}_{i-1/2}^+ \\ &= (\mathbf{F}_i^1 + \mathbf{F}_i^2 + \mathbf{H}_i^-) - (\mathbf{F}_{i-1}^1 + \mathbf{F}_{i-1}^2 + \mathbf{H}_{i-1}^+) \end{aligned} \quad (6.33)$$

Ici, on a un problème de définition de $\kappa\mathbf{b}$ en milieu de segment. En effet, bien que le moment soit continu, la courbure ne l'est pas nécessairement. Lorsqu'il y a un saut de EI il y a nécessairement un saut de $\kappa\mathbf{b}$. On pourrait plutôt interpoler le moment à mi-travée et remonter à la courbure - soit à gauche, soit à droite - en fonction des propriétés géométriques locales :

$$\mathbf{M}_{i+1/2} = \frac{\mathbf{M}_i + \mathbf{M}_{i+1}}{2} \quad (6.34a)$$

$$\kappa\mathbf{b}_{i+1/2}^- = \mathbf{B}_i^{-1}\mathbf{M}_{i+1/2} + \overline{\kappa\mathbf{b}}_{i+1/2}^- \quad (6.34b)$$

$$\kappa\mathbf{b}_{i+1/2}^+ = \mathbf{B}_{i+1}^{-1}\mathbf{M}_{i+1/2} + \overline{\kappa\mathbf{b}}_{i+1/2}^+ \quad (6.34c)$$

$$\mathbf{H}_i^- = Q_i\kappa\mathbf{b}_{i+1/2}^- = Q_i(\mathbf{B}_i^{-1}\mathbf{M}_{i+1/2} + \overline{\kappa\mathbf{b}}_{i+1/2}^-) \quad (6.34d)$$

$$\mathbf{H}_i^+ = Q_i\kappa\mathbf{b}_{i+1/2}^+ = Q_i(\mathbf{B}_{i+1}^{-1}\mathbf{M}_{i+1/2} + \overline{\kappa\mathbf{b}}_{i+1/2}^+) \quad (6.34e)$$

L'autre approche consiste à ignorer la discontinuité et à simplement prendre la moyenne :

$$\kappa\mathbf{b}_{i+1/2} = \kappa\mathbf{b}_{i+1/2}^- = \kappa\mathbf{b}_{i+1/2}^+ = \frac{\kappa\mathbf{b}_i + \kappa\mathbf{b}_{i+1}}{2} \quad (6.35a)$$

$$\mathbf{H}_i^- = Q_i\kappa\mathbf{b}_{i+1/2}^- \quad (6.35b)$$

$$\mathbf{H}_i^+ = Q_i\kappa\mathbf{b}_{i+1/2}^+ \quad (6.35c)$$

$$\mathbf{H}_i^- = \mathbf{H}_i^+ = \frac{\kappa\mathbf{b}_i + \kappa\mathbf{b}_{i+1}}{2} \quad (6.35d)$$

Cette idée reste intéressante et élégante. Elle n'a de sens que pour une poutre à propriétés variables (sinon on a la continuité de la courbure également).

Shear Force exercée par la poutre sur le premier point \mathbf{x}_0 :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0^{\perp} &= [\mathbf{d}_3 \times \mathbf{M}' + Q\kappa\mathbf{b}]_0 \\ &= \frac{\mathbf{e}_0}{|\mathbf{e}_0|} \times \frac{\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_0}{|\mathbf{e}_0|} + Q_0 \frac{\kappa\mathbf{b}_0}{2} \\ &= \mathbf{F}_0^1 + \mathbf{F}_0^2 + \mathbf{H}_0^- \end{aligned} \quad (6.36)$$

Shear Force exercée par la poutre sur le dernier point \mathbf{x}_n :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_n^\perp &= -[\mathbf{d}_3 \times \mathbf{M}' + Q\kappa\mathbf{b}]_n \\ &= -\frac{\mathbf{e}_{n-1}}{|\mathbf{e}_{n-1}|} \times \frac{\mathbf{M}_n - \mathbf{M}_{n-1}}{|\mathbf{e}_{n-1}|} - Q_n \frac{\kappa\mathbf{b}_n}{2} \\ &= -(\mathbf{F}_n^1 + \mathbf{F}_n^2 + \mathbf{H}_n^+)\end{aligned}\tag{6.37}$$

Moment of Torsion

$$\Gamma_i = \int_{i-1/2}^{i+1/2} m(s) = Q_i - Q_{i-1} + \int_{i-1/2}^{i+1/2} \kappa_1 M_2 - \kappa_2 M_1 \tag{6.38}$$

Note que le terme dans l'intégrale est nul pour une section isotrope. On retrouve les résultats bien connus sur les poutres axisymétriques à courbure au repos nulle. Ici, 2 possibilités :

- soit on considère que le moment varie lentement sur l'intervalle $]i - 1/2, i + 1/2[$ et on considère donc le terme $\kappa\mathbf{b}_i \times \mathbf{M}_i$ constant dans l'intégrale, ce qui donne en découpant l'intervalle en $[i - 1/2, i]$ et $[i, i + 1/2]$:

$$\begin{aligned}\Gamma_i &= Q_i - Q_{i-1} + \frac{\mathbf{e}_{i-1}}{|\mathbf{e}_{i-1}|} \cdot (\kappa\mathbf{b}_i \times \mathbf{M}_i) \frac{|\mathbf{e}_{i-1}|}{2} + \frac{\mathbf{e}_i}{|\mathbf{e}_i|} \cdot (\kappa\mathbf{b}_i \times \mathbf{M}_i) \frac{|\mathbf{e}_i|}{2} \\ &= Q_i - Q_{i-1} + \frac{\mathbf{e}_{i-1} + \mathbf{e}_i}{2} \cdot (\kappa\mathbf{b}_i \times \mathbf{M}_i)\end{aligned}\tag{6.39}$$

- soit on revient à l'hypothèse de continuité et de linéarité par morceaux sur le moment:

$$\mathbf{M}(s) = \mathbf{M}_i + s\mathbf{M}'_i \quad \forall s \in [0, |\mathbf{e}_i|] \quad , \quad \mathbf{M}'_i = \frac{\mathbf{M}_{i+1} - \mathbf{M}_i}{|\mathbf{e}_i|} \tag{6.40a}$$

$$\kappa\mathbf{b}(s) = \mathbf{B}_i^{-1}\mathbf{M}(s) + \overline{\kappa\mathbf{b}}(s) \tag{6.40b}$$

$$\tag{6.40c}$$

d'où :

$$\begin{aligned}&= \int_{i-1/2}^i \kappa_1 M_2 - \kappa_2 M_1 \\ &= \int_{i-1/2}^i \left(\frac{1}{[ET]_{1,i}} - \frac{1}{[ET]_{2,i}} \right) M_1 M_2\end{aligned}\tag{6.41}$$

With

$$[EI]_i \quad (6.42a)$$

$$[GJ]_i \quad (6.42b)$$

$$\kappa \mathbf{b}_i = \frac{2\mathbf{e}_{i-1} \times \mathbf{e}_i}{|\mathbf{e}_{i-1}||\mathbf{e}_i||\mathbf{e}_{i-1} + \mathbf{e}_i|} \quad (6.42c)$$

$$\tau_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{|\mathbf{e}_i|} \quad (6.42d)$$

$$\mathbf{N}_i = N_i \mathbf{d}_3 \quad \text{where} \quad N_i = \alpha_i \epsilon_i \quad \alpha_i = \frac{2[ES]_i[ES]_{i+1}}{[ES]_i + [ES]_{i+1}} \quad (6.42e)$$

$$\mathbf{M}_i = [EI]_{1,i}(\kappa_{1,i} - \bar{\kappa}_{1,i})\mathbf{d}_{1,i} + [EI]_{2,i}(\kappa_{2,i} - \bar{\kappa}_{2,i})\mathbf{d}_{2,i} \quad (6.42f)$$

$$\mathbf{Q}_i = Q_i \mathbf{d}_3 \quad \text{where} \quad Q_i = \beta_i(\tau_i - \bar{\tau}_i) \quad \beta_i = \frac{2[GJ]_i[GJ]_{i+1}}{[GJ]_i + [GJ]_{i+1}} \quad (6.42g)$$

$$\mathbf{F}_i^1 = -\frac{\mathbf{e}_i \times \mathbf{M}_i}{|\mathbf{e}_i|^2} \quad (6.42h)$$

$$\mathbf{F}_i^2 = +\frac{\mathbf{e}_i \times \mathbf{M}_{i+1}}{|\mathbf{e}_i|^2} \quad (6.42i)$$

$$\mathbf{H}_i^- = Q_i \kappa \mathbf{b}_{i+1/2}^- \quad (6.42j)$$

$$\mathbf{H}_i^+ = Q_i \kappa \mathbf{b}_{i+1/2}^+ \quad (6.42k)$$

$$(6.42l)$$

Ici il y a une ambiguïté sur M_i en fonction d'un éventuel changement de propriété méca EI_1 ou EI_2 . En fait il faudrait préciser un moment à droite et un moment à gauche (ce qui correspond à la réalité). Le moment étant la courbure au noeud i pondérée par $2EI$ à droite ou à gauche

Toutes les discrétisations ne se valent pas

En fait, ça n'a pas vraiment de sens de définir EI sur le segment. Le moment est continu. Donc il est uniquement défini par la donnée de la courbure en un noeud et du EI associé à ce noeuds. Introduire un moment à gauche et un moment à droite est problématique. Ce qui se passe, pour une poutre isostatique simple qui change de EI à mi-travée, c'est une discontinuité de courbure y'' alors que y et y' restent continues. Donc il semble plus pertinent de définir EI aux noeuds car notre modèle ne peut pas représenter des discontinuités de courbure (ou alors il faut connecter des poutres entre-elles.

Pour la torsion, on peut s'en sortir également en définissant β aux noeuds et en supposant GJ constant entre $[i - 1/2, i + 1/2]$. Il y a donc (éventuellement) un saut de β au milieu de chaque \mathbf{e}_i .

On ne peut pas faire autrement que supposer la torsion uniforme entre 2 noeuds, c'est à dire une variation linéaire (par morceaux) de θ . Et il y a donc une discontinuité potentielle aux noeuds.

On écrit la continuité du champs de torsion entre les noeuds 1 et 2 malgré le saut de β :

A mi travée

$$Q_{12} = Q_{mid} = Q_1^+ = Q_2^- = [GJ]_1 \frac{\theta_{mid} - \theta_1}{|e|/2} = [GJ]_2 \frac{\theta_2 - \theta_{mid}}{|e|/2} \quad (6.43)$$

D'où :

$$\theta_{mid} = \frac{[GJ]_1}{[GJ]_1 + [GJ]_2} \theta_1 + \frac{[GJ]_2}{[GJ]_1 + [GJ]_2} \theta_2 \quad (6.44)$$

On en déduit :

$$Q_{12} = Q_{mid} = Q_1^+ = Q_2^- = \frac{2[GJ]_1[GJ]_2}{[GJ]_1 + [GJ]_2} \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{|e|} \right) \quad (6.45)$$

Donc il faut plutôt définir Q_i la torsion uniforme sur le segment e_i comme :

$$Q_i = \beta_i(\tau_i - \bar{\tau}_i) \quad \text{where} \quad \beta_i = \frac{2[GJ]_i[GJ]_{i+1}}{[GJ]_i + [GJ]_{i+1}} \quad (6.46)$$

On retrouve bien le cas d'une poutre de propriété constante lorsque $[GJ]_i = [GJ]_{i+1} = GJ$ alors $\beta_i = GJ$.

De manière identique, on résonne pour l'effort axial entre deux noeuds 1 et 2 auxquels sont associés des raideurs axiales $[ES]_1$ et $[ES]_2$. On cherche la raideur équivalente connaissant uniquement l'allongement de l'ensemble du segment :

$$N_1 = [ES]_1 \cdot \epsilon_1 \quad (6.47a)$$

$$N_2 = [ES]_2 \cdot \epsilon_2 \quad (6.47b)$$

$$N = [ES]_2 \cdot \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \quad (6.47c)$$

Avec :

$$\epsilon_1 = \frac{l_1 - l_0/2}{l_0/2} \quad (6.48a)$$

$$\epsilon_2 = \frac{l_2 - l_0/2}{l_0/2} \quad (6.48b)$$

$$\epsilon = \frac{l}{l_0} = \frac{\epsilon_1}{2} + \frac{\epsilon_2}{2} \quad (6.48c)$$

$$(6.48d)$$

Thus,

$$N_i = N_1 = N_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = \frac{2[ES]_i[ES]_{i+1}}{[ES]_i + [ES]_{i+1}} \quad (6.49)$$

Bibliography

- [Ala12] Javad Alamatian. A new formulation for fictitious mass of the Dynamic Relaxation method with kinetic damping. *Computers and Structures*, 90-91:42–54, 2012.
- [Day65] Alister Day. An Introduction to dynamic relaxation. *The Engineer*, 1965.
- [MAIK14] Masaaki Miki, Sigrid Adriaenssens, Takeo Igarashi, and Ken’ichi Kawaguchi. The geodesic dynamic relaxation method for problems of equilibrium with equality constraint conditions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 99(9):682–710, 2014.
- [Ott65] J.R.H. Otter. Computations for prestressed concrete reactor pressure vessels using dynamic relaxation. *Nuclear Structural Engineering*, 1(1):61–75, jan 1965.
- [Pap81] M Papadrakakis. A method for the automatic evaluation of the dynamic relaxation parameters. 1981.
- [RPKAZ11] M Rezaiee-Pajand, M Kadkhodayan, Javad Alamatian, and L C Zhang. A new method of fictitious viscous damping determination for the dynamic relaxation method. *Computers and Structures*, 89(9-10):783–794, 2011.

