第五章　定积分

【考试要求】

1.理解定积分的概念，掌握定积分的性质及定积分中值定理.

2.理解积分上限的函数,会求它的导数,掌握牛顿-莱布尼兹公式.

3.理解反常积分的概念,了解反常积分收敛的比较判别法,会计算反常积分.

4.掌握用定积分表达和计算一些几何量与物理量(平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、功、引力、压力、质心、形心等)及函数的平均值.

§1.定积分的概念与性质

一、定积分的概念

1.定积分的定义

设 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义且界, 在 $[a,b]$ 上插入 $n-1$ 个分点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$$

把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间, 各小区间的长度依次为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $(i=1,2,\cdots n)$, 在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i, 作和 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$, 记 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$, 如果当 $\lambda\to 0$ 时, 这个和的极限总存在, 且与闭区间 $[a,b]$ 的分法及点 ξ_i 的取法无关, 那么称这个极限值为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分(简称积分), 记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=I=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中 $f(x)$ 叫做被积函数, $f(x)\mathrm{d}x$ 叫做被积表达式, x 叫做积分变量, a 叫做积分下限, b 叫做积分上限, $[a,b]$ 叫做积分区间.

【注 1】积分值仅与被积函数及积分区间有关，与积分变量用什么字母表示无关.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$$

【注 2】定义中区间的划分方法和点 ξ_i 位置的选取是任意的，故为了简单起见，将区间 $[a,b]$ n 等分处理，取 ξ_i 为第 i 个区间的右端点有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f\left[a+\frac{i}{n}(b-a)\right]\frac{b-a}{n}$$

若再取 $[a,b]=[0,1]$ 就有公式 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f(\frac{i}{n})$.

【注 3】 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续时, 则$f(x)$在$[a,b]$上可积.

【注 4】 $f(x)$在区间$[a,b]$上有界, 且只有有限个间断点, 则$f(x)$在$[a,b]$上可积.

【例 5. 1】将下列极限写成定积分定义的形式.

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\cdots+\frac{1}{n+n})$；　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2})$.

2.定积分的几何意义

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 和直线 $x=a,x=b$ 以及 x 轴围成各部分面积的代数和, 图在 x 轴上方面积取正值, 图在 x 轴下方面积取负值 $(a<b)$.

【例 5.2】 计算下列定积分：（1）$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x$；　　（2）$\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$.

二、定积分的性质

（1） $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

（2） $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

（3） 如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x) \equiv 1$，那么 $\int_a^b 1\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b-a$.

（4）线性性质 $\int_a^b [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]\mathrm{d}x = k_1\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x + k_2\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x.$

（5）积分区间的可加性 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x, c \in R$.

（6）如果在区间$[a,b]$上$f(x)\geqslant 0$，那么$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0(a<b)$.

推论 1：$a\leqslant b,\ f(x)\leqslant g(x)(a\leqslant x\leqslant b)$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

推论 2：设$a<b$，则$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

【例 5.3】设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x, J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cot x)\mathrm{d}x, K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x)\mathrm{d}x$，则 I,J,K 的大小关系是（　　）

(A) $I<J<K$. (B) $I<K<J$.

(C) $J<I<K$. (D) $K<J<I$.

（7）定积分估值不等式

设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最大值及最小值，则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)(a<b).$$

（8）定积分中值定理

如果函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a,b]$ 上连续，那么在 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ，使下式成立：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)(a\leqslant\xi\leqslant b).$$

同时称 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值.

【例 5. 4】函数 $f(x)=\sin x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的平均值为__________.

(9) $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 是以 T 为周期的连续函数，则对任意常数 a 有：

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x,\int_a^{a+nT} f(x)\mathrm{d}x=n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

【例 5.5】计算 $\int_{0}^{n\pi}\sqrt{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x$.

（10）奇偶函数的积分性质：

若 $f(x)$ 为奇函数，$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$；

若 $f(x)$ 为偶函数，$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

【例 5.6】计算:

（1） $\int_{-1}^{1}(\sin x+1)\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$；

（2） $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\mathrm{d}x$.

§2.微积分基本公式

一、积分上限函数及其导数

1.定义

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b]$, 称为变上限积分函数.

2.可导性

定理：如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 那么变上限积分函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上可导,

并且它的导数 $\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)\left(a\leqslant x\leqslant b\right)$.

【注】 $\left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]'=f\left[v(x)\right]v'(x)-f\left[u(x)\right]u'(x)$

3.连续性

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b]$ 必连续.

【例 5. 7】 （1）设 $f(x)$ 连续且 $\int_0^{x^3-1} f(t)\mathrm{d}t = x$，则 $f(7) =$________；

（2）设 $f(x)$ 连续且 $F(x) = \int_x^{\mathrm{e}^{-x}} f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x) =$__________.

【例 5. 8】 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_{\cos x}^{1} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t}{x^2}$.

二、牛顿莱布尼茨公式

定理(微积分基本定理)： 如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

【例 5.9】 计算 $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

【例 5. 10】计算 $\int_0^{2\pi}|\sin x|\mathrm{d}x$.

§3.定积分的换元法和分部积分法

一、定积分的换元法

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 若变量替换 $x=\varphi(t)$ 满足

（1） $\varphi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）上连续；

（2） $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$, 且当 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta, a\leqslant\varphi(t)\leqslant b$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

【例 5.11】计算下列积分

（1） $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x \mathrm{d}x$.　（2） $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \mathrm{d}x (a > 0)$ ；　（3） $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} \mathrm{d}x$.

【例 5. 12】已知函数 $f(x)$ 连续，利用换元积分法，求函数 $F(x)=\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t$ 及 $G(x)=x\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$ 的导函数.

【例 5.13】计算下列定积分的值

（1） $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \mathrm{d}x$；

（2） $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x + \sqrt{a^2 - x^2}}$.

二、定积分的分部积分法

设 $u'(x), v'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x$.

【例 5. 14】计算$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\mathrm{d}x$.

三、重要公式

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}, n\text{ 为大于1的正奇数,}\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, n\text{为正偶数.}\end{cases}$

2. $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}a^2$

3. $\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$

4. $\int_0^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$

【例 5.15】计算定积分

（1） $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}x$； （2） $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\mathrm{d}x$； （3） $\int_0^{\pi}\sin^3 x\mathrm{d}x$； （4） $\int_0^{\pi}x\sin^5 x\mathrm{d}x$.

§4.反常积分

一、无穷限的反常积分

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 存在, 则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 是收敛的, 且收敛于上述极限值, 即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t .$$

若极限不存在, 则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 是发散的;

同理可定义, $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$, 若该极限存在, 则称 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 且收敛于上述极限值, 否则称 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散;

类似的也有
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)\mathrm{d}t+\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

若这两个极限同时存在, 则称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 且收敛于上述极限值, 否则发散.

【例 5.16】证明反常积分$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}(a>0)$当 $p>1$时收敛, 当 $p\leqslant 1$时发散.

【例 5. 17】 计算下列反常积分

（1）$\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$；　　（2）$\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x$.

二、无界函数的反常积分

设 $f(x)$ 在点 a 的任何一个邻域内都无界，则称 a 为 $f(x)$ 的瑕点，包含瑕点的积分就是瑕积分.

(1) 当 a 为瑕点时，若 $\lim\limits_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ 存在，则称瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是收敛的，且收敛于上述极限值，否则发散，即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$.

(2) 当 b 为瑕点时，若 $\lim\limits_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 存在，则称瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是收敛的，且收敛于上述极限值，否则发散，即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

(3) 若 $c\in(a,b)$，c 为瑕点时，若 $\lim\limits_{x\to c^-}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 和 $\lim\limits_{x\to c^+}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ 同时存在时，则称 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是收敛的，且收敛于上述极限值，否则发散，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{x\to c^-}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\lim_{x\to c^+}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t.$$

【例 5.18】 证明反常积分 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}$ 当 $q<1$ 时收敛，当 $q \geqslant 1$ 时发散，其中 $a<b$.

三、反常积分敛散性的比较判别法

1. 无穷限反常积分的比较判别法

一般形式：当 $x \geqslant a$ 时，若 $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，有：

1）当 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

2）当 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^{+\infty} \mathrm{g}(x)\mathrm{d}x$ 发散.

极限形式：设 $g(x) > 0$，且 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$，若 $0 < l < +\infty$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 敛散性相同.

2. 无界函数反常积分的比较判别法（设 b 是瑕点）

一般形式：当 $x\in(a,b)$ 时，若 $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，有:

1）当 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

2）当 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散.

极限形式：设 $g(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=l$，若 $0<l<+\infty$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 敛散性相同.

【例 5.19】下列反常积分收敛的是（　　）.

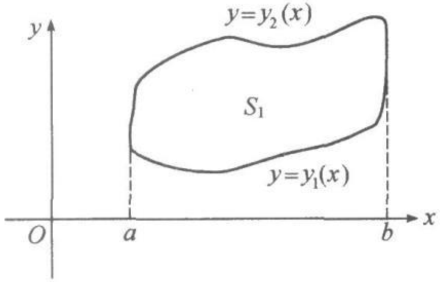
(A) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x}}$.　　(B) $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\ln(1+x)}$.

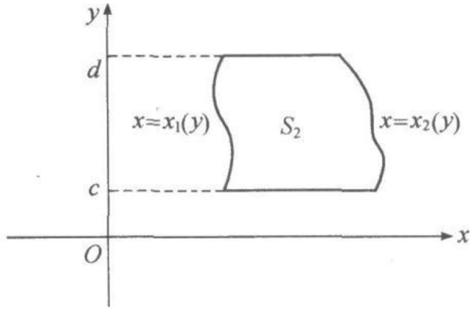
(C) $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$.　　(D) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

§5.定积分应用

一、平面图形面积

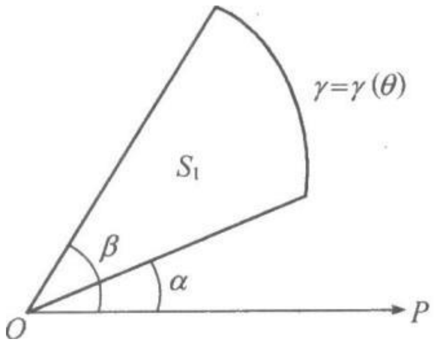
1.直角坐标系



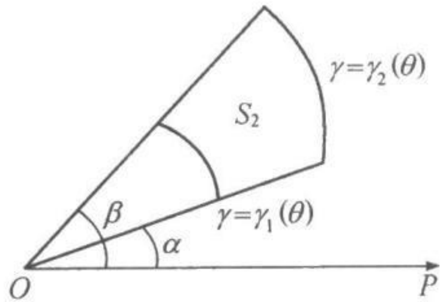


$$S_1=\int_a^b[y_2(x)-y_1(x)]\mathrm{d}x \qquad S_1=\int_c^d[x_2(y)-x_1(y)]\mathrm{d}y$$

2.极坐标系



$$S_1=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$$



$$S_1=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[r_2^2(\theta)-r_1^2(\theta)]\mathrm{d}\theta$$

【例 5.20】计算抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围成的图形的面积.

【例 5. 21】求椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$所围成图形的面积.

【例 5.22】过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线, 该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D, 求 D 的面积 A.

【例 5.23】计算心形线 $\rho = a(1+\cos\theta)(a>0)$ 所围成的图形的面积.

二、旋转体体积

1.平面图形由曲线 $y=f(x)(\geqslant 0)$ 与直线 $x=a,x=b$ 和 x 轴围成，绕 x 轴旋转一周的体积

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

绕 y 轴旋转一周的体积

$$V_y=2\pi\int_a^b |x|f(x)\mathrm{d}x.$$

2. 平面图形由曲线 $x = g(y)(\geqslant 0)$ 与直线 $y = c, y = d$ 和 y 轴围成, 绕 y 轴旋转一周的体积

$$V_y = \pi \int_c^d g^2(y)\mathrm{d}y.$$

绕 x 轴旋转一周的体积

$$V_x = 2\pi \int_c^d |y| g(y)\mathrm{d}y.$$

【例 5. 24】由 $y=x^{3},x=2,y=0$ 所围成的图形分别绕 x 轴和 y 轴旋转，计算所得两个旋转体的体积.

【例 5. 25】计算由椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$所围成的图形绕$x$轴旋转一周而成的旋转体的体积.

三、平面曲线弧长(数一、数二)

1.参数方程

设光滑曲线$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}(a \leqslant t \leqslant b)$，弧长$s = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t$.

2.直角坐标方程

设光滑曲线$y = y(x)(a \leqslant x \leqslant b)$，弧长$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

3.极坐标系

设光滑曲线$r = r(\theta)(a \leqslant \theta \leqslant b)$，弧长$s = \int_a^b \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$.

【例 5. 26】曲线 $y=\int_0^x \tan t\mathrm{d}t(0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{4})$ 的弧长 $S=$______.

【例 5. 27】 当 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 时, 对数螺线 $r=\mathrm{e}^{\theta}$ 的弧长为______.

四、旋转曲面面积(数一、数二)

设曲线 $y = f(x)(f(x)\geqslant 0, a\leqslant x\leqslant b)$，则曲线 $y = f(x)$ 绕 x 轴旋转一周而成的面积为

$$S = 2\pi\int_a^b y\mathrm{d}s = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x.$$

【例 5.28】 设 D 是由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}\,(0\leqslant x\leqslant 1)$ 与坐标轴在第一象限围成的平面区域, 求 D 绕 x 轴旋转一周所得的侧面积.