第三章 线性方程组

考试内容

线性方程组的克拉默法则　齐次线性方程组有非零解的充分必要条件　非齐次线性方程组有解的充分必要条件　线性方程组解的性质和解的结构　齐次线性方程组的基础解系和通解　解空间（仅数一）　非齐次线性方程组的通解

考试要求

1．会用克拉默法则．

2．理解齐次线性方程组有非零解的充分必要条件及非齐次线性方程组有解的充分必要条件．

3．理解齐次线性方程组的基础解系、通解及解空间（仅数一）的概念，掌握齐次线性方程组的基础解系和通解的求法．

4．理解非齐次线性方程组的结构及通解的概念．

5．掌握用初等行变换求解线性方程组的方法．

§1.线性方程组的概念

1. 线性方程组的三种形式

（1）一般形式（代数形式）：m 个方程 n 个未知量的非齐次线性方程组.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \qquad (\mathrm{I})$$

（2）矩阵形式：$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

其中：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ 称为系数矩阵；

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & \cdots & \cdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$称为增广矩阵.

（3）**向量形式：** $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}$.

其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

2. 齐次与非齐次线性方程组

线性方程组（I）中，若 $b_1=b_2=\cdots=b_m=0$，则称为齐次线性方程组，否则称为非齐次线性方程组.

3. 线性方程组的解

若 $x_1=c_1,x_2=c_2,\cdots,x_n=c_n$ 是线性方程组（I）的一组解，则 $\boldsymbol{\xi}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$ 叫做 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解向量或解. 线性方程组的所有解叫做线性方程组的通解.

齐次线性方程组：$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \qquad\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0. \end{cases}$ （II）

必有解为：$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$，这个解叫做齐次线性方程组的零解，如果一组不全为零的数是方程组（II）的解，则它叫做齐次线性方程组的非零解.

§2.齐次线性方程组解的判定与求解

1. 齐次线性方程组解的判定

n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$

（1） $r(\boldsymbol{A})=n \Leftrightarrow$ 只有零解；

（2） $r(\boldsymbol{A})<n \Leftrightarrow$ 有非零解.

【例 3. 1】齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+x_3=0.\end{cases}$ 仅有零解，则 λ 应满足的条件是________.

【答案】 $\lambda\neq 1$.

【解析】系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，齐次线性方程组仅有零解，故 $r(\boldsymbol{A})=3$，而

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&\lambda&1\\\lambda&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-\lambda r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&\lambda-1&0\\0&1-\lambda&1-\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&\lambda-1&0\\0&0&1-\lambda\end{pmatrix}$$

，故 λ 应满足 $\lambda\neq 1$.

2. 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的求解步骤

例. 求齐次线性方程组的通解.

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3-x_4=0,\\ 2x_1+3x_2-4x_3+x_4=0,\\ 3x_1+5x_2-7x_3+3x_4=0.\end{cases}$$

解：（1）写出系数矩阵，化为行最简.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&3&-4&1\\3&5&-7&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&-4\\0&1&-2&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

（2）写出同解方程组

$$\begin{cases}x_1+x_3-4x_4=0,\\ x_2-2x_3+3x_4=0.\end{cases}$$

（3）选取自由变量：自由变量的选取不唯一，通常选取台角对应变量作为主元，剩下的变量是自由变量

该题选取自由变量 x_3,x_4

（4）给自由变量赋值得**基础解系**：

若自由变量只有 1 个，不妨设自由变量为 x_3，则令 $x_3=1$；

若自由变量有 2 个，不妨设自由变量为 x_3,x_4，则令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}$ 分别为 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$；

若自由变量有 3 个，不妨设自由变量为 x_3,x_4,x_5，则令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}$ 分别为 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

该题令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}$ 分别为 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，得基础解系：$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}4\\-3\\0\\1\end{pmatrix}$；

（5）基础解系线性组合即为通解.

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}4\\-3\\0\\1\end{pmatrix}，\ c_1,c_2 \text{ 为任意实数.}$$

【例 3.2】求解线性方程组：$\begin{cases}x_1+2x_2-8x_3+10x_4=0,\\2x_1-x_2+4x_3+5x_4=0,\\3x_1-2x_2+8x_3+6x_4=0.\end{cases}$

【答案】$\boldsymbol{x}=c_1\begin{pmatrix}0\\4\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-4\\-3\\0\\1\end{pmatrix}$，$c_1,c_2$ 为任意实数.

【解析】$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-8&10\\2&-1&4&5\\3&-2&8&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&4\\0&1&-4&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

同解方程组：$\begin{cases}x_1+4x_4=0,\\x_2-4x_3+3x_4=0.\end{cases}$

选取自由变量 x_3,x_4；得基础解系：$\xi_1=\begin{pmatrix}0\\4\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-4\\-3\\0\\1\end{pmatrix}$；

通解：$\boldsymbol{x}=c_1\begin{pmatrix}0\\4\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-4\\-3\\0\\1\end{pmatrix}$，$c_1,c_2$为任意实数.

§3.非齐次线性方程组解的判定与求解

1. 非齐次线性方程组解的判定

n 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$

（1）$r(\boldsymbol{A})<r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ $\Leftrightarrow$ 无解；

（2）$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=n$ $\Leftrightarrow$ 有唯一解；

（3）$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<n$ $\Leftrightarrow$ 有无穷多解.

【例 3. 3】线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2=-a_1, \\ x_2+x_3=a_2, \\ x_3+x_4=-a_3, \\ x_4+x_1=a_4. \end{cases}$ 有解，则常数 a_1,a_2,a_3,a_4 应满足条件__________.

【答案】$a_1+a_2+a_3+a_4=0$.

【解析】4 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$：

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4-r_1+r_2-r_3} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1+a_2+a_3+a_4 \end{array}\right)$$

因此：$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3$，则 $a_1+a_2+a_3+a_4=0$.

【例 3. 4】当 λ 取何值时，非齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda, \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2. \end{cases}$

（1）无解；（2）有唯一解；（3）有无穷解.

【答案】（1）$\lambda=-2$ 时，$r(\boldsymbol{A})<r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解；

（2）$\lambda\neq-2$ 且 $\lambda\neq1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3$，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解；

（3）$\lambda=1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<3$，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷解.

【解析】$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[r_3-\lambda r_1]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & (1-\lambda)(1+\lambda)^2 \end{array}\right),$$

（1）$\lambda=-2$ 时，$r(\boldsymbol{A})<r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解；

（2）$\lambda \neq -2$ 且 $\lambda \neq 1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3$， $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解；

（3）$\lambda=1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<3$， $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷解.

【例 3.5】 设 A 为 $m\times n$ 型矩阵， $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 所对应的齐次线性方程组，则下列结论正确的是（　　）

（A） $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解.

（B） $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解.

（C） $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解.

（D） $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

【答案】（D）.

【解析】（D），$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解，则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<n \Rightarrow r(\boldsymbol{A})<n$，即 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

2. 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的求解步骤

例．求非齐次线性方程组的通解.

$$\begin{cases} x_1-x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2+x_3-3x_4=2, \\ x_1-x_2-2x_3+3x_4=-1. \end{cases}$$

解：（1）写出增广矩阵，化为行最简

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

（2）写出同解方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2-x_4=1, \\ x_3-2x_4=1. \end{cases}$$

（3）选取自由变量：与齐次选取方法相同

该题选取自由变量 x_2,x_4，

（4）给自由变量赋值为 0，得到非齐次特解

令 $x_2=x_4=0$，则非齐次特解 $\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$；

（5）写出对应齐次线性方程组，再给自由变量赋值得到基础解系

对应齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1-x_2-x_4=0, \\ x_3-2x_4=0. \end{cases}$

令$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$分别为$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得基础解系：$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$；

（6）基础解系线性组合为齐次通解，再加上非齐次特解，即为非齐次通解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}，\quad c_1, c_2 \text{为任意实数.}$$

【例 3.6】求解线性方程组：$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 8x_3 + 10x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 6x_4 = 7. \end{cases}$

【答案】$\boldsymbol{x} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$c_1, c_2$为任意实数.

【解析】$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & -8 & 10 & -3 \\ 2 & -1 & 4 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 8 & 6 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

同解方程组：$\begin{cases} x_1 + 4x_4 = 1, \\ x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -2. \end{cases}$

选取自由变量x_3, x_4；非齐次特解$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，基础解系：$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$；

通解：$\boldsymbol{x} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$c_1, c_2$为任意实数.

【例 3.7】已知线性方程组：$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + px_3 + 7x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = t. \end{cases}$讨论参数$p, t$取何值时，此方程组无解，有解；当有解时，求该线性方程组的通解？

【答案】(1) $t\neq -2$时，$r(\boldsymbol{A})<r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解；

(2) $t=-2$且$p\neq -8$时，有无穷多解，通解：$\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$c$为任意实数，

$t=-2$且$p=-8$时，有无穷多解，通解：$\boldsymbol{x}=c_1\begin{pmatrix}4\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$c_1,c_2$为任意实数.

【解析】$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&-2&3&0\\2&1&-6&4&-1\\3&2&p&7&-1\\1&-1&-6&-1&t\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&-2&3&0\\0&-1&-2&-2&-1\\0&0&p+8&0&0\\0&0&0&0&t+2\end{array}\right)$

(1) $t\neq -2$时，$r(\boldsymbol{A})<r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解；

(2) $t=-2$且$p\neq -8$时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3<4$，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，

$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&-2&3&0\\0&-1&-2&-2&-1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&1&-1\\0&1&0&2&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$

通解：$\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$c$为任意实数，

$t=-2$且$p=-8$时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2<4$，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，

$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&-2&3&0\\0&-1&-2&-2&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&-4&1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$

通解：$\boldsymbol{x}=c_1\begin{pmatrix}4\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$c_1,c_2$为任意实数.

3. 解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$

（1）若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，或用初等变换法求 $\boldsymbol{X}$：$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\xrightarrow{\text{行}}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$

（2）若 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，则对 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 作初等行变换，化成行最简形，对 $\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{B}$ 进行按列分块：令 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)$，分别求解线性方程组 $\boldsymbol{Ax}_i=\boldsymbol{b}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的通解，得到未知矩阵 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)$.

【例 3. 8】 已知 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，其中矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3&3\\2&6&9\\-1&-3&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\7&4&-1\\4&13&-7\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

【答案】 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-3k_1-1&-3k_2-7&-3k_3+4\\k_1&k_2&k_3\\1&2&-1\end{pmatrix}$，$k_1,k_2,k_3$ 为任意实数.

【解析】 $$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&3&3&2&-1&1\\2&6&9&7&4&-1\\-1&-3&3&4&13&-7\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&3&3&2&-1&1\\0&0&3&3&6&-3\\0&0&6&6&12&-6\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{3}r_2]{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&3&3&2&-1&1\\0&0&1&1&2&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-3r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&3&0&-1&-7&4\\0&0&1&1&2&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

选取自由变量 x_2；基础解系：$\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}$，齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的通解为 $k\boldsymbol{\xi}=k\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}$，

令 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)$，则

非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}_1=\boldsymbol{b}_1$ 的特解为 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，通解为

$$\boldsymbol{x}_1=k_1\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3k_1-1\\k_1\\1\end{pmatrix}，k_1 \text{ 为任意常数.}$$

非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}_2=\boldsymbol{b}_2$ 的特解为 $\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}-7\\0\\2\end{pmatrix}$，通解为

$$\boldsymbol{x}_2 = k_2\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3k_2-7\\k_2\\2\end{pmatrix}$$，k_2 为任意常数.

非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{b}_3$ 的特解为 $\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$，通解为

$$\boldsymbol{x}_3 = k_3\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3k_3+4\\k_3\\-1\end{pmatrix}$$，k_3 为任意常数.

通解：$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=\begin{pmatrix}-3k_1-1 & -3k_2-7 & -3k_3+4\\k_1 & k_2 & k_3\\1 & 2 & -1\end{pmatrix}$，$k_1,k_2,k_3$ 为任意实数.

§4.克拉默法则

1. 齐次线性方程组解的判定

n 元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0. \end{cases} \qquad (\mathrm{I})$$

当系数行列式 $D\neq 0$，方程组（I）只有零解：$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$；

当 $D=0$，方程组（I）有非零解.

【例 3.9】 已知齐次线性方程组 $\begin{cases} (1+a)x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ 2x_1+(2+a)x_2+2x_3+2x_4=0, \\ 3x_1+3x_2+(3+a)x_3+3x_4=0, \\ 4x_1+4x_2+4x_3+(4+a)x_4=0. \end{cases}$ 有非零解，求 a.

【答案】 $a=0$ 或 -10.

【解析】 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4+a \end{vmatrix} \overset{r_1+r_2+r_3+r_4}{=} (a+10)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4+a \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-3r_1 \\ r_4-4r_1}}{=} (a+10)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=(a+10)a^3$$，齐次线性方程组有非零解，故 $D=0$，则 $a=0$ 或 -10.

2. 非齐次线性方程组解的判定和求解

n 元非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \qquad (\mathrm{II})$$

当系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$，方程组（II）有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}, \cdots, x_n=\frac{D_n}{D}$$

（其中 $D_j\ (j=1,2,\cdots,n)$ 是用常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 替换 D 中第 j 列所得的行列式）；

当 $D=0$，方程组（II）无解或有无穷多解.

【例 3.10】设线性方程组 $\begin{cases} x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=1, \\ x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=1, \\ x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=1. \end{cases}$，其中 $a_i \neq a_j$（$i \neq j$，$i,j=1,2,3$），则方程组的解是____________.

【答案】 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

【解析】 $D=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}=(a_3-a_2)(a_3-a_1)(a_2-a_1)$，

其中 $a_i \neq a_j$（$i \neq j$，$i,j=1,2,3$），则 $D \neq 0$，方程组有唯一解，

$D_1=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix}=D$，则：$x_1=\dfrac{D_1}{D}=1$，

$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a_1^2 \\ 1 & 1 & a_2^2 \\ 1 & 1 & a_3^2 \end{vmatrix}=0$，则：$x_2=\dfrac{D_2}{D}=0$，

$D_3=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 1 \\ 1 & a_2 & 1 \\ 1 & a_3 & 1 \end{vmatrix}=0$，则：$x_3=\dfrac{D_3}{D}=0$，

则方程组的解是：$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

【例 3.11】已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad + x_3 = 1, \\ (a+2)x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3, \\ -2x_1 + ax_2 \quad + x_3 = 0. \end{cases}$$

无解，则参数a应满足__________.

【答案】$a = -1$.

【解析】系数行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a+2 & 3 & 2 \\ -2 & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1-2a & -a \\ 0 & a+4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-2a & -a \\ a+4 & 3 \end{vmatrix} = a^2 - 2a - 3$，

线性方程组无解，则系数行列式 $D = a^2 - 2a - 3 = (a+1)(a-3) = 0$，故 $a = -1$ 或 3，当 $a = -1$ 时，$r(\boldsymbol{A}) = 2 < r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 3$，方程组无解，当 $a = 3$ 时，$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 2 < 3$，方程组有无穷多解，故 $a = -1$.