第四章　不定积分

【考试要求】

1. 理解原函数的概念，理解不定积分的概念.

2. 掌握不定积分的基本公式，掌握不定积分性质，掌握换元积分法与分部积分法.

3. 会求有理函数、三角函数有理式和简单无理函数的积分.

§1.不定积分的概念和基本性质

一、原函数与不定积分的概念

1.原函数

如果在区间 I 上, 可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$, 即对任一 $x \in I$ 都有:

$$F'(x) = f(x) \quad 或 \quad \mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x$$

那么函数 $F(x)$ 就称为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

【注 1】 $F(x)$ 作为 $f(x)$ 的原函数必须要明确区间, 若不加说明一般默认 $f(x)$ 的定义域.

【注 2】 若 $f(x)$ 在区间 I 存在原函数, 则原函数不唯一.

2.原函数的存在性

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 必定存在可导函数 $F(x)$, 使对任一 $x \in I$ 都有 $F'(x) = f(x)$, 也就是说连续函数一定有原函数.

【注】初等函数的原函数不一定是初等函数，例如

$$\int \sin(x^2)\mathrm{d}x,\ \int \cos(x^2)\mathrm{d}x,\ \int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,\ \int \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x,\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x},\ \int \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$

等被积函数有原函数，但不能用初等函数表示，故这些不定积分均积不出来.

3.不定积分

在区间 I 上, 称函数 $f(x)$ 的所有原函数为其在区间上的不定积分, 记作

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

其中 $\int$ 称为积分号, x 称为积分变量, $f(x)$ 称为被积函数, $f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式, C 为积分常数.

【例 4. 1】设 $f(x)=\begin{cases} x, & x>0, \\ \sin x, & x\leqslant 0. \end{cases}$，求 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

二、不定积分的性质

（1） 设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的原函数存在，则

$$\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$$

（2） 设函数 $f(x)$ 的原函数存在，k 为非零常数，则

$$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$$

（3） $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x)$ 或 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x$.

三、基本积分公式

(1) $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\quad(\alpha\neq-1，\text{实常数})$

(2) $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$

(3) $\int a^{x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\ln a}a^{x}+C\quad(a>0,a\neq1)$

(4) $\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+C$

(5) $\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$

(6) $\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$

(7) $\int \sec^{2}x\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{\cos^{2}x}\mathrm{d}x=\tan x+C$

(8) $\int \csc^{2}x\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{\sin^{2}x}\mathrm{d}x=-\cot x+C$

(9) $\int \tan x\sec x\mathrm{d}x=\sec x+C$

(10) $\int \cot x\csc x\mathrm{d}x=-\csc x+C$

(11) $\int \tan x\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C$

(12) $\int \cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$

(13) $\int \sec x\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C$

(14) $\int \csc x\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C$

(15) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}=\arcsin\dfrac{x}{a}+C\quad(a>0)$

(16) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{a^{2}+x^{2}}=\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}+C\quad(a>0)$

(17) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$

(18) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C \quad (a > 0)$.

【例 4.2】计算下列不定积分

(1) $\int \frac{(x-1)^3}{x^2}\mathrm{d}x$；　(2) $\int\left(2\mathrm{e}^x+\frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x$；　(3) $\int \frac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x}\mathrm{d}x$；

(4) $\int \tan^2 x\mathrm{d}x$；　(5) $\int \frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$．

§2.不定积分的计算

一、第一类换元积分法(凑微分法)

设 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$，则有换元公式

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int f(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x)\overset{u=\varphi(x)}{=\!=\!=\!=}\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+\mathrm{C}=F(\varphi(x))+\mathrm{C}.$$

常见的凑微分公式

(1) $\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)$

(2) $\int \sin x f(\cos x)\mathrm{d}x=-\int f(\cos x)\mathrm{d}\cos x$

(3) $\int \cos x f(\sin x)\mathrm{d}x=\int f(\sin x)\mathrm{d}(\sin x)$

(4) $\int \frac{1}{x} f(\ln x)\mathrm{d}x=\int f(\ln x)\mathrm{d}\ln x$

(5) $\int \frac{1}{x^2} f(\frac{1}{x})\mathrm{d}x=-\int f(\frac{1}{x})\mathrm{d}\frac{1}{x}$

(6) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} f(\sqrt{x})\mathrm{d}x=2\int f(\sqrt{x})\mathrm{d}\sqrt{x}$

(7) $\int \mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}\mathrm{e}^x$

(8) $\int x^{n-1} f(x^n)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int f(x^n)\mathrm{d}x^n,\quad n\neq 0$

【例 4.3】求下列各不定积分

(1) $\int x\sin x^2 \mathrm{d}x$；　(2) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；　(3) $\int \frac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x$；　(4) $\int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$；

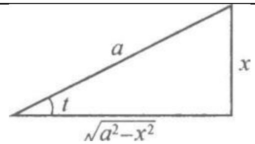
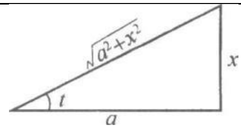
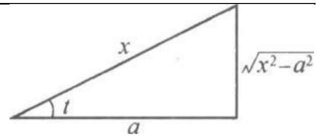
(5) $\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$；　(6) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；　(7) $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}\mathrm{d}x$；　(8) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\mathrm{d}x$；

二、第二类换元积分法

设 $x=\psi(t)$ 是单调的可导函数, 并且 $\psi'(t)\neq 0$. 又设 $f\left[\psi(x)\right]\psi'(x)$ 具有原函数, 则有换元公式

$$\int f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{t=\psi^{-1}(x)} \int f\left[\psi(t)\right]\psi'(t)\mathrm{d}t$$

其中 $t=\psi^{-1}(x)$ 为 $x=\psi(x)$ 的反函数.

<table>
<tr><th>被积函数所含根号的形式</th><th>所作替换</th><th>示意图(回代过程中用)</th></tr>
<tr><td>$\sqrt{a^2-x^2}$</td><td>令 $x=a\sin t$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\sqrt{a^2+x^2}$</td><td>令 $x=a\tan t$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\sqrt{x^2-a^2}(x>0)$</td><td>令 $x=a\sec t$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\sqrt[n]{ax+b}$</td><td>令 $\sqrt[n]{ax+b}=t$</td><td>$x=\dfrac{t^n-b}{a}$</td></tr>
</table>

【例 4. 4】 求不定积分 $\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$ （$a>0$）.

【例 4.5】求不定积分$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}(a>0)$；

【例 4.6】计算$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}$

【例 4.7】求下列不定积分

（1） $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；　　（2） $\int \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$；

三、分部积分法

设 $u(x),v(x)$ 均有连续的导数，则 $\int u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)-\int v(x)\mathrm{d}u(x)$.

【例 4.8】求下列不定积分

(1) $\int x\cos x\mathrm{d}x$；　(2) $\int x\arctan x\mathrm{d}x$；　(3) $\int x^3\ln x\mathrm{d}x$；

(4) $\int \ln x\mathrm{d}x$；　(5) $\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$；　(6) $\int \sec^3 x\mathrm{d}x$.

【例 4. 9】求不定积分$\int \ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$.

【例 4.10】设连续函数 $f(x)$ 的原函数为 $\dfrac{\sin x}{x}$，试求不定积分 $\int x f'(x)\mathrm{d}x$.

四、有理函数的积分

1.有理函数的相关定义：

有理函数是指两个多项式的商表示的函数 $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$，其中 $a_0,a_1,\cdots a_n$ 及 $b_0,b_1,\cdots b_m$ 为常数，且 $a_0\neq 0,b_0\neq 0$。如果分子多项式 $P(x)$ 的次数 n 小于分母多项式 $Q(x)$ 的次数 m，称分式为真分式；如果分子多项式 $P(x)$ 的次数 n 大于或等于分母多项式 $Q(x)$ 的次数 m，称分式为假分式.

2.定理：若上面定义中的真分式的分母 $Q(x)$ 可以被因式分解成

$$Q(x)=b_0(x-a)^k(x-b)^l(x^2+px+q)^s \ (p^2-4q<0)$$

则，

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}&=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots\frac{A_k}{(x-a)^k}\\&+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\cdots\frac{B_l}{(x-b)^l}\\&+\frac{P_1x+Q_1}{x^2+px+q}+\frac{P_2x+Q_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{P_sx+Q_s}{(x^2+px+q)^s}\end{aligned}$$

其中，$A_i,B_i,P_i,Q_i\ (i=1,2,\ldots)$ 均为常数.

【例 4.11】求下列各不定积分

（1）$\int \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x$；　（2）$\int \frac{x-1}{x^2-2x-3}\mathrm{d}x$；　（3）$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+1}$；　（4）$\int \frac{x-1}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$；

【例 4.12】求下列不定积分

（1）$\int \frac{2x^4+x^2+3}{x^2+1}\mathrm{d}x$；　　（2）$\int \frac{2x+3}{(x-1)(x^2-1)}\mathrm{d}x$；