第四章 向量

考试内容

向量的概念　向量的线性组合和线性表示　向量组的线性相关与线性无关　向量组的极大线性无关组　等价向量组　向量组的秩　向量组的秩与矩阵的秩之间的关系　向量的内积　线性无关向量组的正交规范化方法　正交矩阵及其性质

（以下内容仅限数一）

向量空间及其相关概念　n 维向量空间的基变换和坐标变换　过渡矩阵　规范正交基

考试要求

1. 理解 n 维向量、向量的线性组合与线性表示的概念.
2. 理解向量组线性相关、线性无关的概念，掌握向量组线性相关、线性无关的有关性质及判别法.
3. 理解向量组的极大线性无关组和向量组的秩的概念，会求向量组的极大线性无关组及秩.
4. 理解向量组等价的概念，理解矩阵的秩与其行（列）向量组的秩之间的关系.
5. 了解内积的概念，掌握线性无关向量组正交规范化的施密特方法.
6. 了解正交矩阵的概念以及它们的性质.

（以下内容仅限数一）

7. 了解规范正交基.
8. 了解 n 维向量空间、子空间、基底、维数、坐标等概念.
9. 了解基变换和坐标变换公式，会求过渡矩阵.

§1.向量的基本概念

1. 向量与向量组

（1）向量定义：

n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 构成的有序数组，称为一个 n 维向量，其中 a_i 称为向量的分量.

（2）行（列）向量：

n 维行向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$；

n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ 或记作 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$.

（3）零向量：每个元素都是零的向量，可表示为 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

（4）向量组：若干个同维数的列向量（或行向量）所组成的集合，叫做向量组.

（5）向量组与矩阵的关系：

向量组可看作一个矩阵，反之，矩阵按照列（行）来划分，可看作列（行）向量组.

例：$\boldsymbol{A}_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，按列划分，则 $\boldsymbol{A}_{m\times n}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right)$，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}=\left(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj}\right)^{\mathrm{T}},\ j=1,2,\cdots,n.$$

按行划分，则 $\boldsymbol{A}_{m\times n}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_i=\left(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}\right),i=1,2,\cdots,m$.

2. 向量的运算

$\boldsymbol{\alpha}=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=\left(b_1,b_2,\cdots,b_n\right)^{\mathrm{T}}$ 则

（1）加法：$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\left(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n\right)^{\mathrm{T}}$.

（2）数乘：$k\boldsymbol{\alpha}=\left(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n\right)^{\mathrm{T}}$.

§2.向量的线性表示

1. 向量由向量组线性表示

（1）线性组合：给定向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，对任何一组实数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，表达式

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$$

称为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的一个线性组合，$k_1,k_2,\cdots,k_s$称为这个线性组合的系数.

（2）向量的线性表示：给定向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$和向量$\boldsymbol{\beta}$，如存在一组数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s,$$

则称向量$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示（或线性表出）.

（3）向量$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示

$\Leftrightarrow$ 非齐次线性方程组$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\beta}$有解.

$\Leftrightarrow r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\right)=r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}\right)$.

【例 4.1】判断向量$\boldsymbol{\beta}$能否由向量组$\boldsymbol{A}$线性表示，如果可以，求出表达式.

（1）$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$；

（2）$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$；

（3）$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

【答案】（1）$\boldsymbol{\beta}$不能由向量组$\boldsymbol{A}$线性表示；（2）$\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$；

（3） $\boldsymbol{\beta}=(1-3c)\boldsymbol{\alpha}_1+(1+c)\boldsymbol{\alpha}_2+c\boldsymbol{\alpha}_3$， c 为任意常数.

【解析】（1） $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

解非齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$.

$$\begin{cases}x_1+x_3=1,\\x_1+x_2+2x_3=1,\\3x_2+3x_3=1.\end{cases}$$

写出增广矩阵，化为行最简.

$$\left(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}\right)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&1&1\\1&1&2&1\\0&3&3&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right),$$

$r(\boldsymbol{A})<r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})\Leftrightarrow$ 方程组无解，因此 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表示.

（2） $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

解非齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$.

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=1,\\2x_1+x_2=2,\\x_3=3.\end{cases}$$

写出增广矩阵，化为行最简.

$$\left(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}\right)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&-1&1\\2&1&0&2\\0&0&1&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&0\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{array}\right),$$

$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=3\Leftrightarrow$ 方程组有唯一解，因此 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表示，且表达式唯一.

方程组的解为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，因此$\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$.

（3）$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

法一（若题目要求所有的表示方法）：

解非齐次线性方程组$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$.

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=2, \\ x_1+2x_2+x_3=3. \end{cases}$$

写出增广矩阵，化为行最简.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right),$$

$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})<3\Leftrightarrow$方程组有无穷多解，因此$\boldsymbol{\beta}$可以由向量组$\boldsymbol{A}$线性表示，且表达式不唯一.

选取自由变量x_3，给自由变量赋值为0，得到非齐次特解$\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

令$x_3=1$，得基础解系$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$；

方程组的解为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$c$为任意常数．因此$\boldsymbol{\beta}=(1-3c)\boldsymbol{\alpha}_1+(1+c)\boldsymbol{\alpha}_2+c\boldsymbol{\alpha}_3$，$c$为任意常数.

法二（若题目只求一种表示方法即可）：

观察法，可得$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$.

或在法一最后的表达式中对 c 任意赋值即可，如令 $c=0$，则 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$；令 $c=1$，则 $\boldsymbol{\beta}=-2\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 等等，均为正确结果.

2. 向量组由向量组线性表示

（1）定义：已知向量组 (I)：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 和向量组 (II)：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$，若向量组 (II) 中每个向量均可由向量组 (I) 中向量线性表示，则称向量组 (II) 可由向量组 (I) 线性表示.

（2）向量组 (II) 可由向量组 (I) 线性表示 $\Leftrightarrow r(\mathrm{I})=r(\mathrm{I}，\mathrm{II})$.

（3）向量组 (II) 可由向量组 (I) 线性表示 $\Rightarrow r(\mathrm{II})\leqslant r(\mathrm{I})$.

【例 4.2】 判断向量组 $\boldsymbol{B}$ 能否由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表示，如果可以，求出表达式.

（1）$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$；

（2）$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$；

（3）$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$.

【答案】（1）$\boldsymbol{B}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表示；（2）$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{4}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=3\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2$；（3）$\boldsymbol{\beta}_1=(1-c_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+c_1\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=(3-c_2)\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+c_2\boldsymbol{\alpha}_3$，$c_1,c_2$ 为任意常数.

【解析】（1）$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$，

解非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$.

写出增广矩阵，化为行最简.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&1&1&2\\0&2&0&2&4\\1&1&1&1&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&1&1&2\\0&1&0&1&2\\0&0&0&1&1\end{array}\right),$$

$r(\boldsymbol{A})<r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\Leftrightarrow$ 方程组无解，因此 $\boldsymbol{B}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表示.

（2）$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$，

解非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$.

写出增广矩阵，化为行最简.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{cc:cc}1&2&2&-1\\2&1&3&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&\frac{4}{3}&3\\0&1&\frac{1}{3}&-2\end{array}\right),$$

$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=2\Leftrightarrow$ 方程组有唯一解，因此 $\boldsymbol{B}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表示，且表达式唯一.

方程组的解为$\begin{pmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{3}&3\\\frac{1}{3}&-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{4}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=3\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2$.

（3）$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$，

解非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$.

写出增广矩阵，化为行最简.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&1&1&3\\0&2&0&2&4\\1&1&1&2&5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&1&1&3\\0&1&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})<3\Leftrightarrow$ 方程组有无穷多解，因此 $\boldsymbol{B}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表示，且表达式不唯一.

选取自由变量 x_3，给自由变量赋值为 0，得到非齐次特解 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ ，$\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$,

令 $x_3=1$，得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$；

方程组的解为 $\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\\x_3 & y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-c_1 & 3-c_2\\1 & 2\\c_1 & c_2\end{pmatrix}$，$c_1,c_2$ 为任意常数. 因此

$\boldsymbol{\beta}_1=(1-c_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+c_1\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=(3-c_2)\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+c_2\boldsymbol{\alpha}_3$，$c_1,c_2$ 为任意常数.

3. 向量组等价

（1）定义：若向量组(I)与(II)可以相互线性表示，则称这两个向量组等价.

（2）向量组(I)与(II)等价 $\Leftrightarrow r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})=r(\mathrm{I}，\mathrm{II})$.

【例 4.3】已知向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$，判断向量组 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是否等价.

【答案】等价.

【解析】$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=r\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 1\end{pmatrix}=2$，$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=r\begin{pmatrix}2 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}=2$，

$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=r\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 3\\-1 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix}=2$，

$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$，因此向量组 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价.

【例 4.4】判断下列命题

（1）若矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价，则矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价；

（2）若矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价，则矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价.

【答案】（1）错误；（2）错误.

【解析】

（1）错误.

如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$，易看出 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价，但矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 显然不同型，因此不等价.

综上，此题如果改成：若同型矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的列（行）向量组等价，则矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价，结论是正确的.

（2）错误.

如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}$，易看出矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 同型，且 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=2$，则矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价，但 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=2,r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=3$，因此 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的列向量组不等价.

§3.向量组的线性相关性

1.线性相关与线性无关的定义

（1）给定 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，如果存在一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0},$$

成立，则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

（2）给定 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，如果只有 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 全为 0 时，

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0},$$

才成立，则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

【例 4.5】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots\boldsymbol{\alpha}_m$ 均为 n 维列向量，那么下列结论正确的是(　　).

（A）若 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

（B）若对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\neq\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

（C）若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，则对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$.

（D）若 $0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

【答案】（B）.

【解析】 根据线性相关的定义：若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，说明存在不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$ 成立，根据上述定义一一排除，答案为（B）.

【例 4.6】 任意两个 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots\boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$，若存在两组不全为 0 的数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$

和 $k_1,\cdots,k_m$，使得 $(\lambda_1+k_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(\lambda_m+k_m)\boldsymbol{\alpha}_m+(\lambda_1-k_1)\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+(\lambda_m-k_m)\boldsymbol{\beta}_m=\mathbf{0}$，

则（　　）.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots\boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 都线性相关.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots\boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 都线性无关.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关.

【答案】(D).

【解析】$(\lambda_1+k_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(\lambda_m+k_m)\boldsymbol{\alpha}_m+(\lambda_1-k_1)\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+(\lambda_m-k_m)\boldsymbol{\beta}_m=\mathbf{0}$ 可变形为 $\lambda_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1)+\cdots+\lambda_m(\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m)+k_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1)+\cdots+k_m(\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m)=\mathbf{0}$，因为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 和 $k_1,\cdots,k_m$ 都不全为 0，故 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关，正确答案为(D).

2. 相关性判断

（1）n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中至少有一个向量可由其余 $s-1$ 个向量线性表示.

$\Leftrightarrow$ $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$ 有非零解.

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)<s$.

$\Leftrightarrow |\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s|=0$（当 $s=n$ 时）.

（2）n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任一向量均不能由其余向量线性表示.

$\Leftrightarrow x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$只有零解.

$\Leftrightarrow r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\right)=s$.

$\Leftrightarrow \left|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\right|\neq 0$（当$s=n$时）.

【例 4.7】判断下列向量组线性相关性

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$；

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$；

（3）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix}$；

（4）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\a\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

【答案】（1）线性无关；（2）线性相关；

（3）当$a=-1$或$a=2$时，$r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)<3$，向量组线性相关，

当$a\neq-1$且$a\neq 2$时，$r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)=3$，向量组线性无关.

【解析】（1）$r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\right)=r\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}=2$, 向量组线性无关.

（2）$r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)=r\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&1\end{pmatrix}=2$, 向量组线性相关.

（3）

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & a+1 & -a-1 \\ 0 & a+1 & 1-a^2 \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & a+1 & -a-1 \\ 0 & 0 & -(a+1)(a-2) \end{pmatrix},$$

$a=-1$ 或 $a=2$ 时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)<3$，向量组线性相关；

$a\neq -1$ 且 $a\neq 2$ 时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，向量组线性无关.

（4）$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & a & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 6+3a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$a=-2$ 时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)<3$，向量组线性相关；

$a\neq -2$ 时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，向量组线性无关.

3. 相关性的性质

（1）零向量与任何向量线性相关；反之，线性无关的向量组都不含零向量.

（2）两个非零向量线性相关的充分必要条件是对应分量成比例，两个非零向量线性无关的充分必要条件是对应分量不成比例.

（3）若部分组相关，则整体组相关；若整体组无关，则部分组无关；

例:若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 相关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 相关；若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 无关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 无关.

（4）若缩短组无关，则延伸组无关；若延伸组相关，则缩短组相关.

【注】已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的缩短组，$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{pmatrix}$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的延伸组.

（5）n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，如果 $s>n$，则向量组一定线性相关；如果 $s\leqslant n$，则向量组线性相关性不定.

（6）如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，且表达式唯一；如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

（7）如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示，且 $s>t$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关（即如果多数向量能用少数向量线性表示，那么多数向量线性相关）；如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $s\leqslant t$.

【例 4.8】向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\ (s\geqslant 2)$ 线性相关的充分必要条件是（　　）

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中至少有一个是零向量.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中至少有两个向量成比例.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中至少有一个向量可由其余 $s-1$ 个向量线性表示.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任一部分组线性相关.

【答案】(C).

【解析】 (A)、(B)、(D)都是充分不必要条件. 如 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 可作为(A)、(B)、(D)的反例.

【例 4.9】已知 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\ (m>2)$ 线性无关，则（　　）

（A）对任意一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=0$.

（B） $m<n$.

（C） $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中少于 m 个向量构成的向量组均线性相关.

（D） $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中任意两个向量均线性无关.

【答案】(D).

【解析】选(D).选项A，线性无关定义表述错误；选项B，m 可等于 n，若大于 n，则向量组必线性相关；选项C，整体线性无关部分向量组必无关，表述错误.

【例 4.10】设向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ 线性相关，则（　　）

（A） $\boldsymbol{\alpha}$ 必可由 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性表示.　　（B） $\boldsymbol{\beta}$ 必不可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性表示.

（C） $\boldsymbol{\delta}$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示.　　（D） $\boldsymbol{\delta}$ 必不可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示.

【答案】(C).

【解析】选(C). 因为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关，又因为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ 线性相关，所以 $\boldsymbol{\delta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性表示，从而 $\boldsymbol{\delta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示.

【例 4.11】下列向量组中，线性无关的是(　　)

（A） $(1,2,3,4)^T,(2,3,4,5)^T,(0,0,0,0)^T$.

（B） $(1,2,-1)^T,(3,5,6)^T,(0,7,9)^T,(1,0,2)^T$.

（C） $(a,1,2,3)^T,(b,1,2,3)^T,(c,3,4,5)^T,(d,0,0,0)^T$.

（D） $(a,1,b,0,0)^T,(c,0,d,6,0)^T,(a,0,c,5,6)^T$.

【答案】（D）.

【解析】（A）中有零向量必线性相关，

（B）是 4 个三维向量必线性相关，

（C）是 4 个四维向量可用行列式，由于$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}=0$，从而线性相关，

（D）中，因为$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}\neq 0$，知 $(1,0,0)^T,(0,6,0)^T,(0,5,6)^T$ 线性无关，那么其延长组 $(a,1,b,0,0)^T,(c,0,d,6,0)^T,(a,0,c,5,6)^T$ 仍线性无关.

【例 4.12】设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，则下列向量组中，线性无关的是(　　)

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$.

（B）$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

（C）$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$，$3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.

（D）$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+22\boldsymbol{\alpha}_3$，$3\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2-5\boldsymbol{\alpha}_3$.

【答案】（C）.

【解析】 $(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$,

矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$可逆，则 $r(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)=3$，故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$，$3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$线性无关.

§4.极大线性无关组与向量组的秩

1. 定义

在向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中，若存在$r$个向量线性无关，且任意$r+1$个向量线性相关，则称这$r$个向量为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的一个极大线性无关组，简称极大无关组；$r$称为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的秩，记作$r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\right)$.

【注 1】只含零向量的向量组没有极大无关组，该向量组秩为 0；

【注 2】若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，即$r=s$时，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的极大线性无关组就是它本身，且$r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\right)=s$.

2. 性质

（1）向量组中任何向量均可由其极大线性无关组线性表示，且表达式唯一；

（2）向量组与它的极大线性无关组等价；

（3）向量组的极大线性无关组一般不唯一，但任意两个极大无关组都等价，并且极大无关组中所含的向量个数（秩）是唯一确定的；

（4）矩阵$\boldsymbol{A}$的秩=$\boldsymbol{A}$的行向量组的秩=$\boldsymbol{A}$的列向量组的秩.

（5）对矩阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$施行初等**行**变换得到矩阵$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$，则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$任何对应的列向量有相同的线性关系. 例如：如果$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$是$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$的极大无关组，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$的极大无关组；如果$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_3-4\boldsymbol{\beta}_4$，则$\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3-4\boldsymbol{\alpha}_4$.

【例 4.13】向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}5\\1\\8\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$的一个极大线性无关

关组是_________.

【答案】 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5$.

【解析】 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 做初等行变换化为行阶梯形矩阵，在每个台阶上取一列（一般取台角处元素所在的列），得极大线性无关组.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5$ 可以作为一个极大线性无关组.

【例 4.14】 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大线性无关组，并用极大线性无关组表示其它列向量.

【答案】 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 可以作为一个极大线性无关组，$\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_5=4\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_4$.

【解析】 列向量组做初等行变换化为行最简矩阵，在每个台阶上取一列，得极大线性无关组.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 可以作为一个极大线性无关组，$\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_5=4\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_4$.

§5.线性方程组解的结构

性质 1：若$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，则$\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2$也是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解.

性质 2：若$\boldsymbol{\xi}$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，$k$为实数，则$k\boldsymbol{\xi}$也是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解.

定义：齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$所有解向量的集合称为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解集，记作$\mathbf{S}$；当齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解时，解集$\mathbf{S}$的极大线性无关组称为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系.

性质 3：基础解系不唯一，但基础解系中解向量的个数（即$r(\mathbf{S})$）是确定的，等于$n-r(\boldsymbol{A})$，其中n是$\boldsymbol{A}$的列数.

性质 4：在齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解时，通解为基础解系的线性组合，形如

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{\xi}_{n-r(\boldsymbol{A})}.$$

【例 4.15】设 4 阶矩阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{0}$，若$\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的互不相等的解，则齐次线性方程组$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系（　　）

（A）不存在.　　（B）仅含一个非零解向量.

（C）含有两个线性无关的解向量.　　（D）含有三个线性无关的解向量.

【答案】（D）.

【解析】$\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{0}$，$r(\boldsymbol{A}^*)\geqslant 1$，$r(\boldsymbol{A})\geqslant 3$，$\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的互不相等的解，故非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有无穷多解，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<4$，故$r(\boldsymbol{A})=3$，$r(\boldsymbol{A}^*)=1$，$4-r(\boldsymbol{A}^*)=3$，齐次线性方程组$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系含有三个线性无关的解向量.

【例 4.16】已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&a&4\\3&0&b\end{pmatrix}$，且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系，求$a,b$.

【答案】$a=0,b=6$.

【解析】$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系，$\therefore r(\boldsymbol{A})=1$

$\therefore a=0,b=6$.

【例 4.17】已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&0&4\\1&1&b\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}2\\1\\a\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系，求 a,b.

【答案】$\begin{cases}a=-1\\b=3\end{cases}$.

【解析】$\because \boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}2\\1\\a\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系，

$\therefore \boldsymbol{A\alpha}=\mathbf{0}$.

$\therefore \begin{pmatrix}1&0&2\\2&0&4\\1&1&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+2a\\4+4a\\3+ab\end{pmatrix}=\mathbf{0}$，$\therefore \begin{cases}a=-1\\b=3\end{cases}$.

性质 5：若 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，则 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解.

【注】若 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，则当 $k_1+k_2=1$ 时， $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2$ 仍为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，当 $k_1+k_2=0$ 时， $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解.

性质 6:若 $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解，$\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，则 $\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解.

性质 7：非齐次通解=齐次通解+非齐次特解．即若 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r(\boldsymbol{A})}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系，$\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{\xi}_{n-r(\boldsymbol{A})}+\boldsymbol{\eta}$.

【例 4.18】已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix}$ 是线性方程组

$\begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3=d \\ x_1-x_2+2x_3=-1 \\ 3x_1+x_2+4x_3=1 \end{cases}$ 的两个解，那么此方程组的通解是____________.

【答案】 $x=c\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,$c$为任意常数.

【解析】系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b&c\\1&-1&2\\3&1&4\end{pmatrix}$，由 $\begin{vmatrix}1&-1\\3&1\end{vmatrix}\neq 0$，可知 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$.

由方程组有解且不唯一，可知 $r(\boldsymbol{A})<3$.

得 $r(\boldsymbol{A})=2$，可知基础解系所含向量个数为 1.

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是两个非齐次特解，则 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$ 是齐次特解，即为基础解系，则 $c\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$ 是齐次通解.

非齐次通解=齐次通解+非齐次特解.

所以非齐次线性方程组的通解为 $x=c\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,$c$为任意常数.

【例 4. 19】已知3阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为3维列向量，$r(\boldsymbol{A})=2$，$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$. 如果 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

【答案】 $x=c\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$,$c$为任意常数.

【解析】$r(\boldsymbol{A})=2$，可知基础解系所含向量个数为 1，由 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$ 可得

$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\mathbf{0}$，$\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$是齐次特解，即为基础解系，则$c\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$是齐次通解，由

$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$可得$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}$，$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$特解，

非齐次通解=齐次通解+非齐次特解.

所以非齐次线性方程组的通解为$x=c\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$,$c$为任意常数.

§6.向量的内积、长度及正交性

1. 向量的内积、长度及正交性

（1）**内积**：已知 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 及 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，则

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积，记作 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.

（2）**正交**：当 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$ 时，称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交.

【注】零向量与任何向量正交.

（3）**向量长度**：$\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}=\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+\cdots+a_n^{\ 2}}$，也叫向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的模.

（4）**单位向量**：长度为 1 的向量，可表示为 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$.

（5）**向量单位化**：向量除以自身长度.

（6）**正交向量组**：若非零向量组中的向量两两正交，则称该向量组为正交向量组.

【注】正交向量组一定线性无关.

（7）**规范正交向量组**：若正交向量组中的每一个向量都是单位向量，则称该向量组为规范正交向量组.

（8）**施密特正交化**：

已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2,$$

从$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的这一过程称为施密特正交化，

此时β_1,β_2,β_3两两正交，若再将其单位化，有

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|},\ \gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|},\ \gamma_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|},$$

此时$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$为规范正交向量组.

【例 4.20】分别求下列两个向量的内积，并判断是否正交，若没有正交，请利用施密特正交化过程将其化成规范正交向量组.

（1）$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$　　（2）$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

【答案】（1）正交；（2）不正交.

【解析】（1）$\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2=1\cdot1+0\cdot1+1\cdot(-1)=0$，正交；

（2）$\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2=2\cdot0+1\cdot1+0\cdot0=1$，不正交，下面利用施密特正交化过程将其化成规范正交向量组，先正交化：$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{2}{5}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$，

再单位化：$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\ \gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$，此时$\gamma_1,\gamma_2$为规范正交向量组.

【例 4.21】设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$，利用施密特正交化过程将其化成规范正交向量组.

【解析】令$\beta_1=\alpha_1$，

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}-\frac{2}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\gamma_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

2. 正交矩阵

（1）**定义**：若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ （即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$），则称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

（2）**性质**：

$\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的列（行）向量组是规范正交向量组.

$\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵 $\Rightarrow |\boldsymbol{A}|=\pm1$.