第二章 导数与微分

考试内容

导数和微分的概念 导数的几何意义和物理意义 函数的可导性与连续性之间的关系 平面曲线的切线和法线 导数和微分的四则运算 基本初等函数的导数 复合函数、反函数、隐函数以及参数方程所确定的函数（数一、数二）的微分法 高阶导数 一阶微分形式的不变性

考试要求

1. 理解导数和微分的概念, 理解导数与微分的关系, 理解导数的几何意义, 会求平面曲线的切线方程和法线方程, 了解导数的物理意义, 会用导数描述一些物理量（数一、数二）, 经济问题包含边际与弹性的概念（数三）, 理解函数的可导性与连续性之间的关系.

2. 掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则, 掌握基本初等函数的导数公式. 了解微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性, 会求函数的微分.

3. 了解高阶导数的概念, 会求简单函数的高阶导数.

4. 会求分段函数的导数, 会求隐函数和由参数方程所确定的函数（数一、数二）以及反函数的导数.

§1. 导数概念

一、导数的定义

1. 函数在一点处的导数

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义, 自变量 x 在 x_0 处有增量 Δx, 相应地函数增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在, 则称函数在 x_0 处可导, 同时称上述极限值为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数, 记作 $f'(x_0)$, 或 $y'\Big|_{x=x_0}$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$ 等. 如果上述极限不存在, 则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导, 同时称 x_0 为函数的不可导点.

【注】导数定义的两点式, 令 $x=x_0+\Delta x$, 则 $\Delta x=x-x_0$, 于是 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

【例 2. 1】 设函数 $f(x)=\left(\mathrm{e}^x-1\right)\left(\mathrm{e}^{2x}-2\right)\cdots\left(\mathrm{e}^{nx}-n\right)$, 其中 n 为正整数, 则 $f'(0)=$（ ）

（A）$(-1)^{n-1}(n-1)!$.　　（B）$(-1)^n(n-1)!$.

（C）$(-1)^{n-1}n!$.　　（D）$(-1)^n n!$.

【答案】（A）.

【解析】 显然 $f(0)=0$,

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)}{x}=\lim_{x\to 0}(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)$$

$=(-1)(-2)\cdots\left[-(n-1)\right]=(-1)^{n-1}(n-1)!$，故选（A）.

【例 2. 2】 已知 $f(0)=0,\ f'(0)=f'(1)=1$，求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-f(1)}{x}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+3x)-f(1)}{x}$；

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-f(1-x)}{x}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)}{1-\cos x}$.

【答案】（1）1；（2）1；（3）3；（4）2；（5）2.

【解析】（1）原式 $=f'(1)=1$；

（2）原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$；

（3）原式 $=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+3x)-f(1)}{3x}=3f'(1)=3$；

（4）原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-f(1)}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-x)-f(1)}{-x}=2f'(1)=2$；

（5）原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)-f(0)}{x^2}\dfrac{x^2}{1-\cos x}=2f'(0)=2$.

【例 2. 3】 已知 $f(x)$ 连续，且 $f(x)$ 分别满足以下条件，判断 $f'(0)$ 是否存在：

（1）已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在；

（2）已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$ 存在；

（3）已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt[3]{x}}$ 存在.

【答案】（1）存在；（2）存在；（3）不确定.

【解析】（1）由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在, 得 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, 又 $f(x)$ 连续, 得 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$,

$\therefore\ f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在;

（2）同（1）, 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$ 存在，得 $f(0)=0$,

$\therefore\ f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}\cdot x=0$ 存在;

（3）同上, 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt[3]{x}}$ 存在，得 $f(0)=0$,

$\therefore\ f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt[3]{x}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, 但该极限是否存在不确定.

2. 单侧导数

左导数：$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

右导数：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

【注】 $f(x)$ 在点 x_0 处可导 $f(x)$ 在点 x_0 处左、右导数皆存在且相等.

【例 2. 4】 已知 $f(x)$ 连续，且 $f(x)$ 分别满足以下条件，判断 $f'(0)$ 是否存在:

（1）已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)}{x^2}$ 存在;

（2）已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^3)}{x^3}$ 存在;

（3）已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{x^2}$ 存在.

【答案】（1）不确定;（2）存在;（3）不确定.

【解析】（1）同【例 2. 3】, 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)}{x^2}$ 存在, 得 $f(0)=0$, 所以 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$,

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)}{x^2}\overset{t=x^2}{=}\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(t)}{t}=f_+'(0)$ 存在, 但 $f_-'(0)$ 不一定存在;

（2）同上，由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^3)}{x^3}$ 存在，得 $f(0)=0$，所以 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x^3)}{x^3}\overset{t=x^3}{=}\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=f'(0)\text{ 存在；}$$

（3）同上，由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{x^2}$ 存在，得 $f(0)=0$，所以 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\overset{t=1-\cos x}{=}\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}f_+'(0)$$ 存在，即 $f_+'(0)$ 存在，但 $f_-'(0)$ 不一定存在.

3. 导函数

如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 I 内的每点处都可导，那么就称函数 $f(x)$ 在开区间 I 内可导，这时对于任意的 $x\in I$，都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数值，这样就构成了一个新的函数，这个函数叫做原来函数 $y=f(x)$ 的导函数，记作 y'，$f'(x)$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，导函数简称导数.

【例 2. 5】用导数定义证明下列求导公式：

（1）$\left(\mathrm{e}^x\right)'=\mathrm{e}^x$；（2）$\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$.

【答案】见解析.

【解析】（1）$\left(\mathrm{e}^x\right)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x+\Delta x}-\mathrm{e}^x}{\Delta x}=\mathrm{e}^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\mathrm{e}^x$；

（2）$\left(\ln x\right)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\dfrac{1}{x}$.

二、导数的常用结论

1. 奇偶性

如果 $f(x)$ 是奇函数且可导，则 $f'(x)$ 是偶函数；

如果 $f(x)$ 是偶函数且可导，则 $f'(x)$ 是奇函数.

2. 周期性

如果 $f(x)$ 可导且以 T 为周期，则 $f'(x)$ 也以 T 为周期.

3. 函数的可导性与连续性之间的关系

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在点 x_0 处一定连续；反之不然.

【例 2.6】 讨论函数 $f\left(x\right)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性.

【答案】 连续不可导.

【解析】 因为 $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0=f\left(0\right)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$f'\left(0\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

【例 2.7】 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0, \\ x^2 g(x), & x\leqslant 0, \end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　）

（A）极限不存在.　　　　（B）极限存在，但不连续.

（C）连续，但不可导.　　（D）可导.

【答案】（D）.

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\sqrt{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x^2 g(x)=0$（无穷小乘有界量仍为无穷小），故有 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；又

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\sqrt{x}}=0,$$

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2 g(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-} xg(x)=0,$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，综上知正确选项为（D）.

三、导数的几何意义与物理意义

1. 导数的几何意义

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处导数存在，则在几何上 $f'(x_0)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率，从而有

切线方程：$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

法线方程：$y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$，$f'(x_0)\neq 0$

【例 2. 8】过原点作曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的切线，求切线方程.

【答案】 $y=\mathrm{e}x$.

【解析】设切点坐标 $\left(x_0,\mathrm{e}^{x_0}\right)$，则切线方程为 $y-\mathrm{e}^{x_0}=\mathrm{e}^{x_0}\left(x-x_0\right)$，代入 $(0,0)$，得 $-\mathrm{e}^{x_0}=\mathrm{e}^{x_0}\left(-x_0\right)\Rightarrow x_0=1$，所以切线方程为 $y-\mathrm{e}=\mathrm{e}\left(x-1\right)$，即 $y=\mathrm{e}x$.

2. 导数的物理意义（数一、数二）

设物体作直线运动时，路程 s 与时间 t 的函数关系为 $s=f(t)$，如果 $f'(t_0)$ 存在，则 $f'(t_0)$ 表示物体在时刻 t_0 时的瞬时速度.

§2. 导数计算

一、常用导数公式

$(C)'=0$（C 为常数）

$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$ （α 为实常数）

$(\sin x)'=\cos x$

$(\cos x)'=-\sin x$

$(\tan x)'=\sec^2 x$

$(\cot x)'=-\csc^2 x$

$(\sec x)'=\sec x\tan x$

$(\csc x)'=-\csc x\cot x$

$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}\quad(a>0且a\neq 1)$

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

$(a^x)'=a^x\ln a\ (a>0且a\neq 1)$

$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$

$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

二、四则运算求导法则

$$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$$

$$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}\quad(g(x)\neq 0)$$

三、复合函数求导法则

设 $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, 如果 $\varphi(x)$ 在 x 处可导, $f(u)$ 在对应点 u 处可导, 则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x 处可导, 且有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'[\varphi(x)]\varphi'(x)$.

【例 2. 9】求下列函数的导数:

（1） $y=\ln\cos \mathrm{e}^x$；（2） $y=\cos x^2\sin^2\dfrac{1}{x}$；（3） $y=x^{2x}$.

【答案】见解析.

【解析】（1） $y'=\dfrac{-e^x\sin e^x}{\cos e^x}=-e^x\tan e^x$；

（2） $y'=-2x\sin x^2\sin^2\dfrac{1}{x}-2\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}\cos x^2=-2x\sin x^2\sin^2\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{2}{x}\cos x^2$；

（3） $y'=\left(e^{2x\ln x}\right)'=e^{2x\ln x}\left(2\ln x+2x\cdot\dfrac{1}{x}\right)=x^{2x}(2\ln x+2)$.

【例 2. 10】设 $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$，则 $y''\big|_{x=0}=$______.

【答案】$-\dfrac{3}{2}$.

【解析】$y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x^2}=\dfrac{1}{2}\left[\ln(1-x)-\ln(1+x^2)\right]$,

$y'=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2x}{1+x^2})$，$y''=\dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}\right]$，$y''\big|_{x=0}=-\dfrac{3}{2}$.

四、分段函数求导

给定分段函数, 其求导方法如下：

非分段点处按对应的解析式及法则求导；分段点处严格按照定义求导.

【例 2. 11】设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0,\end{cases}$ 其中 $\varphi(x)$ 具有二阶导数，且 $\varphi(0)=1$，$\varphi'(0)=0$.

（1）确定 a 的值, 使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

（2）求 $f'(x)$.

【答案】（1） $a=0$；（2） $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\left[\varphi'(x)+\sin x\right]x-\varphi(x)+\cos x}{x^2}, & x\neq 0,\\ \dfrac{1}{2}\varphi''(0)+\dfrac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$

【解析】（1）因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\varphi'(x)+\sin x\right]=0$，故 $a=0$；

（2） $x\neq 0$ 时， $f'(x)=\left[\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}\right]'=\dfrac{[\varphi'(x)+\sin x]x-\varphi(x)+\cos x}{x^2}$，

$x=0$ 时， $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi'(x)+\sin x}{2x}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi'(x)}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi'(x)-\varphi'(0)}{x}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\varphi''(0)+\dfrac{1}{2}$，所以

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{[\varphi'(x)+\sin x]x-\varphi(x)+\cos x}{x^2}, & x\neq 0,\\[2ex] \dfrac{1}{2}\varphi''(0)+\dfrac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$$

五、 隐函数求导

设 $F(x,y)=0$ 确定了函数关系 $y=f(x)$，则其导数计算如下:在方程 $F(x,y)=0$ 两侧同时对 x 求导（注意 y 是 x 的函数），得 $G(x,y,y')=0$，从中解出 y' 即可.

【例 2. 12】 方程 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$ 确定了 $y=f(x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}$.

【答案】 1.

【解析】 在方程 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$ 两端同时对 x 求导有

$$\frac{2x+y'}{x^2+y}=3x^2y+x^3y'+\cos x,$$

令 $x=0, y=1$，可得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=1$.

【例 2. 13】 已知 $\mathrm{e}^y+6xy+x^2-1=0$ 确定了隐函数 $y(x)$，求 $y''(0)$.

【答案】 -2.

【解析】 在 $\mathrm{e}^y+6xy+x^2-1=0$ 两边连续两次对 x 求导有

$$\mathrm{e}^y y'+6y+6xy'+2x=0,$$

$$\mathrm{e}^y(y')^2+\mathrm{e}^y y''+12y'+6xy''+2=0,$$

又 $x=0$ 时， $y(0)=0, y'(0)=0$，故 $y''(0)=-2$.

六、反函数求导

设 $y=f(x)$ 与 $x=g(y)$ 互为可导的反函数，且 $g'(y)\neq 0$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{g'(y)}$.

【例 2.14】 设 $y(x)=x^3+\mathrm{e}^x$，其反函数为 $x=\varphi(y)$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=1}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right|_{y=1}$.

【答案】 $\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=1}=1$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right|_{y=1}=-1$.

【解析】 $y=1$ 时 $x=0$，$y'=3x^2+\mathrm{e}^x$，$y'(0)=1$，所以 $\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=1}=\dfrac{1}{y'(0)}=1$；

$y''=6x+\mathrm{e}^x$，$y''(0)=1$，

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}\frac{1}{y'}}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{y''}{(y')^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3},\quad \left.\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right|_{y=1}=-\frac{y''(0)}{[y'(0)]^3}=-1.$$

七、参数方程所确定的函数求导（数一、数二）

若 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$ 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\dfrac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$.

【例 2.15】 设 $\begin{cases}x=1+t^2,\\ y=\cos t,\end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

【答案】 $-\dfrac{1}{4}\dfrac{t\cos t-\sin t}{t^3}$.

【解析】 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\dfrac{-\sin t}{2t}$，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{-\sin t}{2t}\right)}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{2}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\sin t}{t}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=-\frac{1}{4}\frac{t\cos t-\sin t}{t^3}.$$

【例 2.16】 设 $\begin{cases}x=\arctan t,\\ 2y-ty^2+\mathrm{e}^t=5,\end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

【答案】 $\dfrac{(y^2-\mathrm{e}^t)(1+t^2)}{2-2ty}$.

【解析】 因为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}$, 其中 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{1+t^2}$. 又 $y=y(t)$ 可认为由方程 $2y-ty^2+\mathrm{e}^t=5$ 确定, 故根据隐函数的求导法则, 在 $2y-ty^2+\mathrm{e}^t=5$ 两边关于 t 求导有:

$$2y'-y^2-2yty'+\mathrm{e}^t=0,$$

从而 $y'(t)=\dfrac{y^2-\mathrm{e}^t}{2-2ty}$, 故 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{(y^2-\mathrm{e}^t)(1+t^2)}{2-2ty}$.

八、高阶导数

1. 高阶导数的定义

如果函数 $y=f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 仍是可导的, 则把 $f'(x)$ 的导数称为 $f(x)$ 的二阶导数, 记作 y'', $f''(x)$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 等, 也称 $f(x)$ 二阶可导.

类似地, 把 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数, 称为 $f(x)$ 的 n 阶导数记作 $y^{(n)}$、$f^{(n)}(x)$ 等, 这时也称 $f(x)$ 是 n 阶可导的.

习惯上, 称二阶及二阶以上的导数为高阶导数.

【例 2.17】 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数, 且 $f'(x)=[f(x)]^2$, 则当 n 为大于 2 的正整数时 $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是（ ）

（A）$n![f(x)]^{n+1}$. （B）$n[f(x)]^{n+1}$. （C）$[f(x)]^{2n}$. （D）$n![f(x)]^{2n}$.

【答案】（A）.

【解析】 由于 $f'(x)=[f(x)]^2$, 所以 $f''(x)=2f(x)f'(x)=2f^3(x)$,

$f'''(x)=2\cdot 3f^4(x)$, 依次类推可知 $f^{(n)}(x)=n!f^{n+1}(x)$, 即正确选项为（A）.

2. 常用的高阶导数公式

（1）$\left(\mathrm{e}^{ax+b}\right)^{(n)}=a^n\cdot\mathrm{e}^{ax+b}$;

（2）$\sin^{(n)}(ax+b)=a^n\cdot\sin(ax+b+n\cdot\frac{\pi}{2})$；

（3）$\cos^{(n)}(ax+b)=a^n\cdot\cos(ax+b+n\cdot\frac{\pi}{2})$；

（4）$\ln^{(n)}(ax+b)=a^n\cdot\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(ax+b)^n}$；

（5）$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=a^n\cdot\frac{(-1)^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$.

【例 2. 18】 求下列函数的 n 阶导（$n\geqslant 1$）：

（1）$y=\cos^2 x$；

（2）$y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$.

【答案】（1）$y^{(n)}=2^{n-1}\cos(2x+n\cdot\frac{\pi}{2})$；（2）$y^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}-(-1)^n\frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$.

【解析】（1）$y=\frac{1+\cos 2x}{2}$，$y^{(n)}=\frac{1}{2}\cos(2x+n\cdot\frac{\pi}{2})\cdot 2^n=2^{n-1}\cos(2x+n\cdot\frac{\pi}{2})$；

（2）$y=1+\frac{2}{x^2-1}=1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$，$y^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}-(-1)^n\frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$.

3. 莱布尼茨公式

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}=C_n^0u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''+\cdots+C_n^n uv^{(n)}$$

【例 2. 19】 已知 $y=x^2e^x$，求 $y^{(n)}(x)$.

【答案】 $\left[x^2+2nx+n(n-1)\right]e^x$.

【解析】 设 $u=e^x,v=x^2$，则 $u^{(k)}=e^x,v'=2x,v''=2,v'''=0$，故根据莱布尼茨公式可得

$$y^{(n)}=e^xx^2+n\cdot e^x\cdot 2x+\frac{n(n-1)}{2}\cdot e^x\cdot 2=\left[x^2+2nx+n(n-1)\right]e^x.$$

§3. 微分

一、微分的定义

设函数 $f(x)$ 在某区间内有定义，x_0 及 $x_0+\Delta x$ 在这区间内，如果函数的增量

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

可表示为：

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \quad （\Delta x \to 0）$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数，$o(\Delta x)$ 是 $\Delta x \to 0$ 时比 Δx 高阶的无穷小，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处是可微的，而 $A\Delta x$ 叫做 Δy 的线性主部，也叫函数在该点处的微分，记作 $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}$，即

$$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0} = A\Delta x .$$

二、可微与可导的关系

$f(x)$ 在 x_0 处可微 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0} = A\Delta x = f'(x_0)\Delta x$，即 $A = f'(x_0)$. 一般地，若 $y=f(x)$ 可导，则 $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$. 所以导数 $f'(x)=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 也称为微商，就是微分之商的含义.

三、微分的运算法则

1. 四则运算微分法则

$\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm \mathrm{d}v$；

$\mathrm{d}(Cu)=C\mathrm{d}u$；

$\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$；

$\mathrm{d}(\dfrac{u}{v})=\dfrac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}\ (v\neq 0)$；

2. 复合函数微分法则

已知 $y=f[g(x)]$，则 $\mathrm{d}y=f'[g(x)]g'(x)\mathrm{d}x$. 也可以表示如下：设 $u=g(x)$，$y=f(u)$，则 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$. 变量 u 不管是作为自变量还是作为中间变量，微分形式 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$ 保持不变，这一性质称为微分形式的不变性.

【例 2. 20】 设 $f(x)$ 可导且 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$，则 $\Delta x\to 0$ 时 $f(x)$ 在 x_0 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是（　）

（A）与 Δx 等价的无穷小.　　（B）与 Δx 同阶的无穷小.

（C）比 Δx 低阶的无穷小.　　（D）比 Δx 高阶的无穷小.

【答案】（B）.

【解析】 根据微分定义可知，$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\mathrm{d}x=f'(x_0)\Delta x=\dfrac{1}{2}\Delta x$，故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}}{\Delta x}=\dfrac{1}{2}$，即正确选项为（B）.

【例 2. 21】 设函数 $f(u)$ 可导，且 $y=f(x^2)$ 当自变量 x 在 $x_0=-1$ 的基础上产生增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数值增量 Δy 的线性主部为 0.1，求 $f'(1)$.

【答案】 0.5.

【解析】 根据可微的概念可知，Δy 的线性主部即为函数的微分，即

$$2xf'(x^2)\cdot\Delta x\Big|_{\substack{x=-1\\ \Delta x=-0.1}}=0.1,\quad f'(1)=0.5.$$

【例 2. 22】 填空：

（1）$\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}$__________.　（2）$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}$__________.

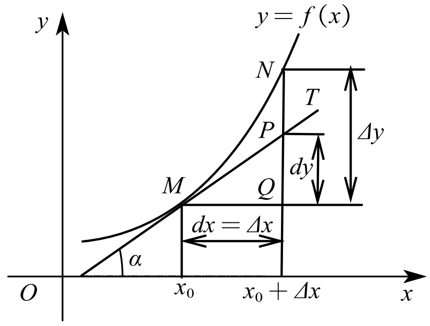
（3）$\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}$__________.　（4）$\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}$__________.

【答案】（1）$(\sin x+C)$；（2）$(\arcsin x+C)$；（3）$(2\sqrt{x}+C)$；（4）$\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C\right)$.

【解析】 略.

四、微分的几何意义

在直角坐标系中，函数 $y=f(x)$ 的图形是一条曲线，对于某一固定的 x_0 值，曲线上有一个确定点 $M(x_0,y_0)$，当自变量 x 有微小增量 Δx 时，得到曲线上的另一点 $N(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$，如下图：



$$MQ = \Delta x,$$

$$QN = \Delta y,$$

过点 M 做曲线的切线 MT，它的倾角是 α，则

$$QP = MQ \cdot \tan\alpha = \Delta x \cdot f'\left(x_0\right),$$

即

$$\mathrm{d}y = QP,$$

从而可得微分的几何意义是切线在 $(x_0, f(x_0))$ 处纵坐标的增量.

【例 2.23】 设 $f(x)$ 满足 $f'(x)>0, f''(x)>0$, 当自变量在 x_0 的基础上产生增量为 Δx（$\Delta x>0$）时, 试确定 $\Delta y, \mathrm{d}y, 0$ 三者间的大小关系.

【答案】 $\Delta y > \mathrm{d}y > 0$.

【解析】 由上图“微分的几何意义”可知 $\Delta y > \mathrm{d}y > 0$.