第三章　微分中值定理及导数应用

【考试要求】

1. 理解并会用罗尔（Rolle）定理、拉格朗日（Lagrange）中值定理和泰勒（Taylor）定理，了解并会用柯西（Cauchy）中值定理.

2. 理解函数的极值概念，掌握用导数判断函数的单调性和求函数极值的方法，掌握函数最大值和最小值的求法及其应用.

3. 会用导数判断函数图形的凹凸性（注：在区间(a,b)内，设函数$f(x)$具有二阶导数. 当$f''(x)>0$时，$f(x)$的图形是凹的；当$f''(x)<0$时，$f(x)$图形是凸的），会求函数图形的拐点以及水平、铅直和斜渐近线，会描绘函数的图形.

4. 了解曲率、曲率圆与曲率半径的概念，会计算曲率和曲率半径.（数一、数二）

§1.微分中值定理

一、费马引理

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0,\delta)$ 内有定义，并且在 x_0 处可导，如果对任意 $x\in U(x_0,\delta)$ 有 $f(x)\leqslant f(x_0)$（或 $f(x)\geqslant f(x_0)$），则 $f'(x_0)=0$.

【注】本定理可理解为可导函数取得极值的必要条件.

二、罗尔中值定理

设函数 $f(x)$ 满足：在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=0.$$

【注】 当 $f(x)$ 不恒为常数时，ξ 点可理解为 $f(x)$ 的极值点.

【例 3. 1】如果函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续, 在 $(0,3)$ 内可导, $f(0)+f(1)+f(2)=3$ 且 $f(3)=1$, 证明: 存在 $\xi\in(0,3)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

【例 3.2】设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=\frac{1}{2}$，证明：存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $f'(\xi)=\xi$.

【例 3. 3】若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数, 且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$, 其中 $a<x_1<x_2<x_3<b$, 证明: 在 (x_1,x_3) 内至少存在一点 ξ, 使得 $f''(\xi)=0$.

【例 3.4】不用求出函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数，说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根，并指出它们所在的区间.

三、拉格朗日中值定理

设函数 $f(x)$ 满足：在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则在 (a,b) 内至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

【注】 拉格朗日中值定理也可写为 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x$，$(0<\theta<1)$.

【例 3.5】 请证明拉格朗日中值定理.

【例 3.6】设 $b > a > 0$，证明：$\dfrac{b-a}{b} < \ln b - \ln a < \dfrac{b-a}{a}$.

【例 3.7】已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=\mathrm{e}$，又 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+1)-f(x)]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-k}{x+k}\right)^x$，求常数 k.

四、柯西中值定理

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足：在闭区间 $[a,b]$ 上皆连续, 在开区间 (a,b) 内皆可导, 对任意 $x\in(a,b)$, $g'(x)\neq 0$, 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

【注】 当 $g(x)=x$ 时, 柯西中值定理即为拉格朗日中值定理.

【例 3. 8】 设 $0<a<b$，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}.$$

§2.泰勒公式

一、（带佩亚诺余项）泰勒中值定理

若函数 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数，那么对 $\forall x \in U(x_0)$ 有：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o[(x-x_0)^n]$$

我们称上式为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的带佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式，其中 $o[(x-x_0)^n]$ 叫佩亚诺余项.

当 $x_0 = 0$ 时，也称上式为带佩亚诺余项的麦克劳林公式，即

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

【例 3.9】 $y=2^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 的系数是____________.

【例 3.10】求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1-\ln(1+x)}{x^2}$.

【例 3.11】当 $x \to 0$ 时，$\ln(1+x)-(ax+bx^2)$ 与 x^2 等价，求 a,b.

二、（带拉格朗日余项）泰勒中值定理

若函数 $f(x)$ 在包含 x_0 的某个区间 (a,b) 内具有 $n+1$ 阶导数, 则对任意 $x\in(a,b)$, 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

我们称上式为函数在点 x_0 处的带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式, 其中

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

为拉格朗日余项.

【例 3.12】求函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ 在 $x=0$ 处带有拉格朗日余项的 n 阶泰勒展开式.

§3.导数的微分学应用

一、函数的单调性

定理： 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导.

（1）如果在 (a,b) 内 $f'(x)\geqslant 0$ 且等号仅在有限多个点处成立, 那么函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加;

（2）如果在 (a,b) 内 $f'(x)\leqslant 0$ 且等号仅在有限多个点处成立, 那么函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少;

（3）如果在 (a,b) 内 $f'(x)\equiv 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是一个常数.

【例 3.13】证明：$\arctan x + \operatorname{arccot} x \equiv \dfrac{\pi}{2}$.

【例 3. 14】证明下列不等式：（1）$\ln(1+x)\leqslant x\ (x>-1)$；（2）$\mathrm{e}^x-1\geqslant x$.

二、函数的极值与最值

1. 极值的定义

设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义, 若对于去心邻域 $\overset{o}{U}(x_0)$ 内的任一 x , 有

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)),$$

那么就称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的一个极大值（或极小值）, 称 $x = x_0$ 为一个极大值点（或极小值点）.

2. 极值存在的必要条件（可导情形）

设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的一个极值点, 则 $f'(x_0) = 0$.

【注】我们称满足 $f'(x_0) = 0$ 的点 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的驻点.

3.极值存在的充分条件

第一充分条件： 设 $f(x)$ 在 x_0 处连续，且在 x_0 的去心邻域 $\overset{o}{U}(x_0)$（即 $\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$）内可导，

（1）如果 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时 $f'(x)>0$，而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

（2）如果 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时 $f'(x)<0$，而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值；

（3）如果 $f'(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 和 $(x_0,x_0+\delta)$ 内的符号相同，则 $f(x)$ 在 x_0 处没有极值.

【例 3. 15】当 $x=$________时, 函数 $y=x\cdot 2^{x}$ 取得极小值.

【例 3.16】求 $f(x)=\frac{2}{3}x-(x-1)^{\frac{2}{3}}$ 的单调区间和极值.

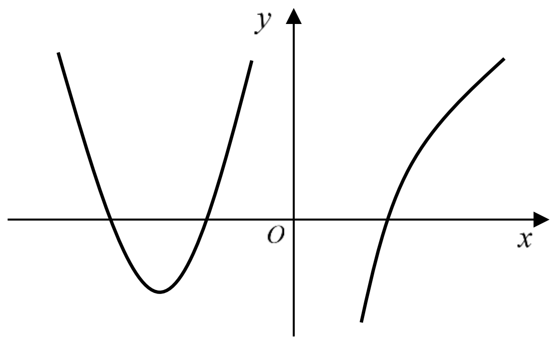
【例 3.17】 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则 $f(x)$ 有（　　）

（A）一个极小值点和两个极大值点.

（B）两个极小值点和一个极大值点.

（C）两个极小值点和两个极大值点.

（D）三个极小值点和一个极大值点.



第二充分条件： 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处有二阶导数, 且 $f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$, 则

（1）当 $f''(x_0)<0$ 时， $f(x_0)$ 为极大值， $x=x_0$ 为极大值点；

（2）当 $f''(x_0)>0$ 时， $f(x_0)$ 为极小值， $x=x_0$ 为极小值点.

【例 3. 18】函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^2-xy+x^2-3=0$ 确定, 求 $f(x)$ 的驻点, 并判断其是否为极值点.

【例 3.19】函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=-1$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）

（A）不可导.　　（B）可导且导数不为零.

（C）取极大值.　　（D）取极小值.

4. 闭区间上连续函数的最大值和最小值

a. 求出 $f(x)$ 在 (a,b) 内的驻点及不可导点;

b. 计算 $f(x)$ 在上述驻点、不可导点处的函数值及 $f(a), f(b)$;

c. 比较（b）中诸值的大小, 其中最大的便是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值, 最小的便是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值.

三、曲线的凹凸性与拐点

1. 凹凸性的定义: 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 若对任意不同的两点 x_1, x_2 , 恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凸的. 若恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凹的.

在几何上, 曲线 $y=f(x)$ 上任意两点的割线在曲线下（上）面, 则 $y=f(x)$ 的图形是凸（凹）的. 如果曲线 $y=f(x)$ 有切线的话, 每一点的切线都在曲线之上（下）, 则 $y=f(x)$ 的图形是凸（凹）的.

2.凹凸性的判定

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内具有二阶导数, 那么

（1）如果在 (a,b) 内 $f''(x)<0$, 则曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸的；

（2）如果在 (a,b) 内 $f''(x)>0$, 则曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹的.

【注】 凹凸性与区间有关.

3.拐点的定义: 连续曲线上凹弧与凸弧的分界点, 称为曲线的拐点.

4.拐点的必要条件（二阶可导情形）

设函数 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导, 且 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的一个拐点, 则 $f''(x_0) = 0$.

5.拐点的充分条件

第一充分条件： 设 $f(x)$ 在 x_0 处连续，且在 x_0 的去心邻域 $\overset{o}{U}(x_0)$（即 $\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$）内二阶可导，

（1）如果 $f''(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0)$ 与 $(x_0, x_0+\delta)$ 内的符号不一致，则 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一个拐点；

（2）如果 $f''(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0)$ 与 $(x_0, x_0+\delta)$ 内的符号一致，则 $(x_0, f(x_0))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

第二充分条件： 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处有二阶导数，且 $f''(x_0)=0, f'''(x_0)\neq 0$，则 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一个拐点.

【例 3.20】 求曲线 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ 的凹凸区间及拐点.

【例 3.21】 设函数 $f(x)=\left|x(1-x)\right|$，则（　　）

（A）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（B）$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（C）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（D）$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

四、渐近线

1.铅直渐近线

若 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\infty$，则 $x=a$ 为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线.

2.水平渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$，则 $y=b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

3.斜渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\ (a\neq 0)$ ， $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$

或 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\ (a\neq 0)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=b$, 则 $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

【注】在自变量的同一变化过程中，水平渐近线与斜渐近线不会同时存在.

【例 3.22】求曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 的渐近线.

【例 3.23】当 $x>0$ 时，曲线 $y=x\sin\frac{1}{x}$（　　）

（A）有且仅有水平渐近线.　　（B）有且仅有铅直渐近线.

（C）既有水平渐近线，又有铅直渐近线.　　（D）既无水平渐近线，又无铅直渐近线.

【例 3.24】 曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$（　　）

（A）没有渐近线.　　（B）仅有水平渐近线.

（C）仅有铅直渐近线.　　（D）既有水平渐近线又有铅直渐近线.

【例 3. 25】曲线 $y=(2x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程为 ____________.

五、弧微分和曲率（数一、数二）

1.弧微分： 弧微分公式 $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$

2.曲率： 设曲线的方程为 $y=f(x)$，且 $f(x)$ 具有二阶导数，则曲线在点 $M(x,y)$ 处的曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$ （曲率越大，曲线越弯曲），

$\rho=\dfrac{1}{K}$ 叫做曲线在点 $M(x,y)$ 处的曲率半径.

【例 3.26】曲线 $\begin{cases} x = t^2 + 7, \\ y = t^2 + 4t + 1 \end{cases}$ 上对应于 $t = 1$ 的点处的曲率半径是（　　）

（A）$\dfrac{10}{\sqrt{50}}$.　　（B）$\dfrac{\sqrt{10}}{100}$.　　（C）$10\sqrt{10}$.　　（D）$5\sqrt{10}$.

3.曲率圆： 在曲线 $y = f(x)$ 上点 M 处的法线上，在凹的一侧取一点 D，使 $|DM| = \frac{1}{K} = \rho$，以 D 为圆心、ρ 为半径作圆，这个圆叫做曲线在点 M 处的曲率圆．曲率圆与曲线 $y = f(x)$ 在点 M 处有相同的切线和曲率.