第五章 定积分

考试内容

定积分的概念和基本性质　定积分中值定理　积分上限的函数及其导数　牛顿-莱布尼兹（Newton-Leibniz）公式　定积分的换元积分法与分部积分法　反常（广义）积分　定积分的应用

考试要求

1.理解定积分的概念，掌握定积分的性质及定积分中值定理

2.理解积分上限的函数,会求它的导数,掌握牛顿-莱布尼兹公式.

3.理解反常积分的概念,了解反常积分收敛的比较判别法,会计算反常积分.

4.掌握用定积分表达和计算一些几何量与物理量(平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、功、引力、压力、质心、形心等)及函数的平均值.

§1.定积分的概念与性质

一、定积分的概念

1.定积分的定义

设 $y = f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义且界,在 $[a,b]$ 上插入 $n-1$ 个分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间,各小区间的长度依次为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $(i = 1, 2, \cdots n)$,在每个小区间 $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ 上任取一点 ξ_i ,作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$,记 $\lambda = \max\left\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\right\}$,如果当 $\lambda \to 0$ 时,这个和的极限总存在,且与闭区间 $[a,b]$ 的分法及点 ξ_i 的取法无关,那么称这个极限值为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分(简称积分),记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中 $f(x)$ 叫做被积函数, $f(x)\mathrm{d}x$ 叫做被积表达式, x 叫做积分变量, a 叫做积分下限, b 叫做

积分上限, $[a,b]$ 叫做积分区间.

【注 1】 积分值仅与被积函数及积分区间有关,与积分变量用什么字母表示无关.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\mathrm{d}u$$

【注 2】 定义中区间的划分方法和点 ξ_i 位置的选取是任意的,故为了简单起见,将区间 $[a,b]$ n 等分处理,取 ξ_i 为第 i 个区间的右端点有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=I=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left[a+\frac{i}{n}(b-a)\right]\frac{b-a}{n}$$

若再取 $[a,b]=[0,1]$ 就有公式 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f(\frac{i}{n})$.

【注 3】 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续时,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

【注 4】 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界,且只有有限个间断点,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

【例 5.1】 将下列极限写成定积分定义的形式.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\cdots+\frac{1}{n+n})$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2})$.

【答案】(1) $\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$;(2) $\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

【解析】

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\cdots+\frac{1}{n+n})=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

2.定积分的几何意义

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 和直线 $x=a,x=b$ 以及 x 轴围成各部分面积的代数和,图在 x 轴上方面积取正值,图在 x 轴下方面积取负值 $(a<b)$.

【例 5.2】计算下列定积分(1) $\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x$；　(2) $\int_{-3}^3\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x$.

【答案】（1） $\frac{\pi}{4}$;（2） $\frac{9}{2}\pi$.

【解析】

(1) 由定积分几何意义可知 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 表示以 $(1,0)$ 点为圆心，以 1 为半径的上半圆，所以，原式 $=\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$；

(2) 由定积分几何意义可知 $y=\sqrt{9-x^2}$ 表示以 $(3,0)$ 点为圆心，以 3 为半径的上半圆，所以，原式 $=\int_{-3}^3\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x=\frac{9}{2}\pi$.

二、定积分的性质

(1) $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

(2) $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$.

(3) 如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv 1$,那么 $\int_a^b 1\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x=b-a$.

(4) 线性性质 $\int_a^b[k_1f_1(x)+k_2f_2(x)]\mathrm{d}x=k_1\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x+k_2\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x.$

(5) 积分区间的可加性 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x, c\in R$.

(6) 如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\geqslant 0$,那么 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0(a<b)$.

推论 1： $a\leqslant b, f(x)\leqslant g(x)(a\leqslant x\leqslant b)$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

推论 2：设 $a<b$,则 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

【例 5.3】 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x, J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cot x)\mathrm{d}x, K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x)\mathrm{d}x$,则 I,J,K 的大小关系是（ ）

(A) $I<J<K$.　　(B) $I<K<J$.

(C) $J<I<K$.　　(D) $K<J<I$.

【答案】 (B).

【解析】 当 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ 时,有 $0<\sin x<\cos x<1<\cot x$,所以 $\ln\sin x<\ln\cos x<\ln\cot x$,应选(B).

(7) 定积分估值不等式

设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最大值及最小值,则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)(a<b).$$

(8) 定积分中值定理

如果函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a,b]$ 上连续,那么在 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ ,使下式成立：

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)(a\leqslant\xi\leqslant b)$.同时称 $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值.

【例 5.4】 函数 $f(x)=\sin x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的平均值为

【答案】 $\dfrac{2}{\pi}$.

【解析】 所求平均值为 $\dfrac{1}{\pi-0}\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{\pi}\cos x\Big|_0^\pi=\dfrac{2}{\pi}$.

(9) $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 是以 T 为周期的连续函数，则对任意常数 a 有：

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x, \int_a^{a+nT} f(x)\mathrm{d}x=n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

【例 5.5】 计算 $\int_0^{n\pi}\sqrt{1+\sin 2x}\mathrm{d}x$.

【答案】$2\sqrt{2}n$.

【解析】利用周期函数的定积分性质:

$$\text{原式}=\int_0^{n\pi}|\sin x+\cos x|\mathrm{d}x=\sqrt{2}n\int_0^{\pi}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\mathrm{d}x\overset{t=x+\frac{\pi}{4}}{=\!=\!=\!=}\sqrt{2}n\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}|\sin t|\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{2}n\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t=2\sqrt{2}n.$$

(10) 奇偶函数的积分性质：

若 $f(x)$ 为奇函数, $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0$;若 $f(x)$ 为偶函数, $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^{a}f(x)\mathrm{d}x$.

【例 5.6】计算:

(1) $\int_{-1}^{1}(\sin x+1)\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$;

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\mathrm{d}x$.

【答案】(1) $\frac{\pi}{2}$; (2) $\frac{4}{3}$.

【解析】

(1) $\int_{-1}^{1}(\sin x+1)\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\sin x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$;

(2) 原式 $=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\sin x\mathrm{d}x=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\mathrm{d}\cos x$.

$$=-2\cdot\frac{2}{3}\cos^{\frac{3}{2}}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}.$$

§2.微积分基本公式

一、积分上限函数及其导数

1.定义

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,则 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b]$,称为变上限积分函数.

2.可导性

定理：如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,那么变上限积分函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上可导,并且它的导数 $\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$.

【注】 $\left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]'=f[v(x)]v'(x)-f[u(x)]u'(x)$

3.连续性

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,则 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b]$ 必连续.

【例 5.7】 (1) 设 $f(x)$ 连续且 $\int_0^{x^3-1} f(t)\mathrm{d}t=x$,则 $f(7)=$________;

(2) 设 $f(x)$ 连续且 $F(x)=\int_x^{\mathrm{e}^{-x}} f(t)\mathrm{d}t$,则 $F'(x)=$__________.

【答案】（1） $\frac{1}{12}$;（2） $-\mathrm{e}^{-x}f\left(\mathrm{e}^{-x}\right)-f(x)$.

【解析】 (1)在 $\int_0^{x^3-1} f(t)\mathrm{d}t=x$ 的左右两端同时对 x 求导, 有 $3x^2 f\left(x^3-1\right)=1$,再令 $x=2$ 有 $12f(7)=1$,故 $f(7)=\frac{1}{12}$.

(2) $F'(x)=\left(\int_x^{\mathrm{e}^{-x}} f(t)\mathrm{d}t\right)'=-\mathrm{e}^{-x}f\left(\mathrm{e}^{-x}\right)-f(x)$.

【例 5.8】 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^1 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2}$.

【答案】 $\frac{1}{2\mathrm{e}}$.

【解析】原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\int_1^{\cos x}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\cdot\mathrm{e}^{-(\cos x)^2}}{2x}=\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

二、牛顿莱布尼茨公式

定理(微积分基本定理)： 如果函数$F(x)$是连续函数$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数,那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

【例 5.9】计算$\int_{-1}^{\sqrt{3}}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

【答案】$\dfrac{7}{12}\pi$.

【解析】$\int_{-1}^{\sqrt{3}}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x\Big|_{-1}^{\sqrt{3}}=\dfrac{7}{12}\pi$.

【例 5.10】计算$\int_0^{2\pi}|\sin x|\mathrm{d}x$.

【答案】4.

【解析】$\int_0^{2\pi}|\sin x|\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=4$.

§3.定积分的换元法和分部积分法

一、定积分的换元法

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,若变量替换 $x=\varphi(t)$ 满足

(1) $\varphi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$(或 $[\beta,\alpha]$)上连续;

(2) $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$,且当 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta, a\leqslant\varphi(t)\leqslant b$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

【例 5.11】计算下列积分

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin x\mathrm{d}x$. (2) $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x(a>0)$; (3) $\int_0^4\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$.

【答案】(1) $\frac{1}{6}$; (2) $\frac{\pi}{4}a^2$; (3) $\frac{22}{3}$.

【解析】(1) 令 $t=\cos x$,则 $\mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x$,且

当 $x=0$ 时,$t=1$; 当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时,$t=0$.于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin x\mathrm{d}x=-\int_1^0 t^5\mathrm{d}t=\int_0^1 t^5\mathrm{d}t=\left(\frac{t^6}{6}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{6}.$$

(2) 设 $x=a\sin t$,则 $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$,当 $x=0$ 时,取 $t=0$; 当 $x=a$ 时,取 $t=\frac{\pi}{2}$.

于是 $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}a^2$.

(3) 设 $\sqrt{2x+1}=t$,则 $x=\frac{t^2-1}{2}$,$\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$,且当 $x=0$ 时,$t=1$; 当 $x=4$ 时,$t=3$.

于是 $\int_0^4\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^3(t^2+3)\mathrm{d}t=\frac{22}{3}$.

【例 5.12】已知函数 $f(x)$ 连续,利用换元积分法,求函数 $F(x)=\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t$ 及

$G(x)=x\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$ 的导函数.

【答案】.

【解析】令 $x-t=u$，则 $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$，所以

$$F(x)=-\int_x^0 f(u)\mathrm{d}u=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\,,$$

则 $F'(x)=f(x)$；

$$G(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}xt\overset{xt=u}{=\!=\!=}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\text{，则,}G'(x)=f(x)\,.$$

【例 5.13】计算下列定积分的值

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^a\dfrac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$.

【答案】（1） $\dfrac{\pi}{4}$ ；（2） $\dfrac{\pi}{4}$.

【解析】方法一: 因为

$$\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{(\sin x+\cos x)-(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}\int\left[1-\frac{(\sin x+\cos x)'}{\sin x+\cos x}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}(x-\ln|\sin x+\cos x|)+C$$

因此, $I=\dfrac{1}{2}(x-\ln|\sin x+\cos x|)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{4}$.

方法二：令 $x=\dfrac{\pi}{2}-t,\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$,当 $x=0,t=\dfrac{\pi}{2}$ 当 $x=\dfrac{\pi}{2},t=0$,则原式

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x,\ I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

(2) 用第二类换元积分法，令 $x=a\sin t$，则 $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$， $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$，则

原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{a\sin x}{a\sin x+a\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}$.

二、定积分的分部积分法

设$u'(x),v'(x)$在$[a,b]$上连续,则$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x$

【例 5.14】计算$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\mathrm{d}x$.

【答案】$\frac{1}{3}\ln 2$.

【解析】$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}\frac{1}{2-x}=\frac{\ln(1+x)}{2-x}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{2-x}\cdot\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$

$$=\ln 2-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{1+x}{2-x}\right|\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}\ln 2$$

三、重要公式

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{2}{3},n\text{ 为大于1的正奇数},\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},n\text{为正偶数}.\end{cases}$

2. $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}a^2$

3. $\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x$

4. $\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x$

【例 5.15】计算定积分

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}x$; (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\mathrm{d}x$; (3) $\int_0^{\pi}\sin^3 x\mathrm{d}x$; (4) $\int_0^{\pi}x\sin^5 x\mathrm{d}x$.

【答案】(1) $\frac{\pi}{4}$; (2) $\frac{3\pi}{16}$; (3) $\frac{4}{3}$; (4) $\frac{8\pi}{15}$.

【解析】(1)原式$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$;

(2)原式$=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{16}$;

(3) 原式$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$;

(4) 原式$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^5 x\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\mathrm{d}x=\pi\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8\pi}{15}$.

§4.反常积分

一、无穷限的反常积分

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 存在,则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 是收敛的,且收敛于上述极限值,即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t .$$

若极限不存在,则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 是发散的;

同理可定义,$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$,若该极限存在,则称 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,且收敛于上述极限值,否则称 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散;

类似的也有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)\mathrm{d}t+\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

若这两个极限同时存在,则称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,且收敛于上述极限值,否则发散.

【例 5.16】证明反常积分 $\int_a^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^p}(a>0)$ 当 $p>1$ 时收敛,当 $p\leqslant 1$ 时发散.

【证明】当 $p=1$ 时,$\int_a^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\ln x\Big|_a^{+\infty}=+\infty$,

当 $p\neq 1$ 时,$\int_a^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^p}=\dfrac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_a^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & p<1,\\ \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1.\end{cases}$

因此,当 $p>1$ 时收敛,其值为 $\dfrac{a^{1-p}}{p-1}$; 当 $p\leqslant 1$ 时,该反常积分发散.

【例 5.17】计算下列反常积分

(1) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$; (2) $\int_{-\infty}^1\dfrac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x$.

【答案】(1) $\ln 2$;(2) $\dfrac{3}{8}\pi$.

【解析】

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=-\int_1^{+\infty}\ln x\mathrm{d}(\frac{1}{x+1})=-\left[\frac{\ln x}{x+1}\bigg|_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}x\right]$

$$=\ln\frac{x}{x+1}\bigg|_1^{+\infty}=\ln 2;$$

(2) $\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{(x+1)^2+4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}\bigg|_{-\infty}^{1}=\frac{3}{8}\pi$.

二、无界函数的反常积分

设 $f(x)$ 在点 a 的任何一个邻域内都无界,则称 a 为 $f(x)$ 的瑕点,包含瑕点的积分就是瑕积分.

(1) 当 a 为瑕点时,若 $\lim\limits_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ 存在,则称瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是收敛的,且收敛于上述极限值,否则发散,即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$.

(2) 当 b 为瑕点时,若 $\lim\limits_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 存在,则称瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是收敛的,且收敛于上述极限值,否则发散,即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

(3) 若 $c\in(a,b)$, c 为瑕点时,若 $\lim\limits_{x\to c^-}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 和 $\lim\limits_{x\to c^+}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ 同时存在时,则称 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是收敛的,且收敛于上述极限值,否则发散,即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{x\to c^-}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\lim_{x\to c^+}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t.$$

【例 5.18】证明反常积分 $\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}$ 当 $q<1$ 时收敛,当 $q\geqslant 1$ 时发散,其中 $a<b$.

【证明】当 $q=1$ 时, $\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x-a}=\ln\left(x-a\right)\Big|_a^b=+\infty$;

当 $q\neq 1$ 时,

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q} = \left[\frac{(x-a)^{1-q}}{1-q}\right]\Bigg|_a^b = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q<1, \\ +\infty, & q>1. \end{cases}$$

因此,当 $q<1$ 时,这反常积分收敛,其值为 $\dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q}$；当 $q\geqslant 1$ 时,这反常积分发散.

三、反常积分敛散性的比较判别法

1. 无穷限反常积分的比较判别法

一般形式：当 $x\geqslant a$ 时，若 $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，有:

1) 当 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

2) 当 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散.

极限形式：设 $g(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$，若 $0<l<+\infty$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 敛散性相同.

2. 无界函数反常积分的比较判别法（设 b 是瑕点）

一般形式：当 $x\in(a,b)$ 时，若 $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，有:

1) 当 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

2) 当 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散.

极限形式：设 $g(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=l$，若 $0<l<+\infty$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 敛散性相同.

【例 5.19】下列反常积分收敛的是（　）.

(A) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x}}$.　　　(B) $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\ln(1+x)}$.

(C) $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$.　　　　(D) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

【答案】（A）.

【解析】(A):利用比较判别法． 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{5}{2}}\frac{1}{x^2\sqrt{1+x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=1$ ， 由于

$p=\frac{5}{2}>1,0<l=1<+\infty$ ，故积分收敛.

(B): $x=0$ 是 $\frac{1}{\ln(1+x)}$ 的瑕点．由 $\lim\limits_{x\to0^+}(x-0)\frac{1}{\ln(1+x)}=1$ $(q=1,0<l=1<+\infty)$ 知积分发散.

(C)： $x=0$ 是 $\frac{1}{\sin x}$ 的瑕点．由 $\lim\limits_{x\to0^+}(x-0)\frac{1}{\sin x}=1$ $(q=1,0<l=1<+\infty)$ 知积分发散.

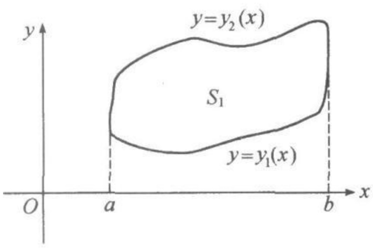
(D): $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x+\int_{1}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$，利用比较判别法，

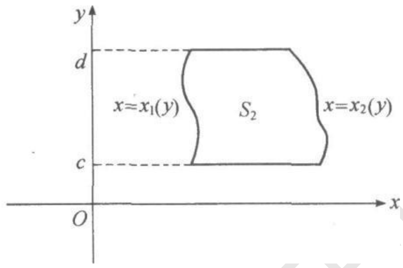
$\lim\limits_{x\to\infty}x\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}=1$，由于 $p=1,0<l=1<+\infty$ ，所以积分发散.

§5.定积分应用

一、平面图形面积

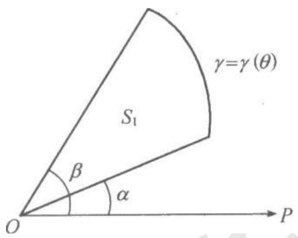
1.直角坐标系

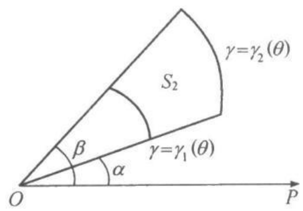




$$S_1=\int_a^b[y_2(x)-y_1(x)]\mathrm{d}x \qquad S_1=\int_c^d[x_2(y)-x_1(y)]\mathrm{d}y$$

2.极坐标系





$$S_1=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta \qquad S_1=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[r_2^2(\theta)-r_1^2(\theta)]\mathrm{d}\theta$$

【例 5.20】计算抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围成的图形的面积.

【答案】18.

【解析】$A=\int_{-2}^4(y+4-\frac{1}{2}y^2)\mathrm{d}y=18$.

【例 5.21】求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成图形的面积.

【答案】πab.

【解析】$A=4A_1$,其中 A_1 为该椭圆在第一象限部分与两坐标轴所围成的面积.

因此 $A=4A_1=4\int_0^a y\mathrm{d}x$.

利用椭圆的参数方程

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases} (0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2})$$

令 $x = a\cos t$,则 $y = b\sin t, \mathrm{d}x = -a\sin t\mathrm{d}t$.

$$A = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)\mathrm{d}t = 4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\mathrm{d}t = \pi ab .$$

【例 5.22】过坐标原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线,该切线与曲线 $y = \ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D ,求 D 的面积 A .

【答案】 $\frac{\mathrm{e}}{2} - 1$.

【解析】设切点坐标为 $(x_0, \ln x_0)$,由导数的几何意义知, $\frac{\ln x_0}{x_0} = \frac{1}{x_0}$,得 $x_0 = \mathrm{e}$.

故 $A = \int_0^1 (\mathrm{e}^y - \mathrm{e}y)\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{e}}{2} - 1$.

【例 5.23】计算心形线 $\rho = a(1 + \cos\theta)(a > 0)$ 所围成的图形的面积.

【答案】 $\frac{3}{2}\pi a^2$.

【解析】心形线的图形关于极轴对称,因此所求图形的面积 A 是极轴以上部分图形面积 A_1 的两倍.

$$A_1 = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} a^2 (1 + \cos\theta)^2 \mathrm{d}\theta = \frac{3}{4}\pi a^2 ;$$

因此所求的面积为

$$A = 2A_1 = \frac{3}{2}\pi a^2 .$$

二、旋转体体积

1.平面图形由曲线 $y=f(x)(\geqslant 0)$ 与直线 $x=a, x=b$ 和 x 轴围成,绕 x 轴旋转一周的体积

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

绕 y 轴旋转一周的体积

$$V_y=2\pi\int_a^b |x|f(x)\mathrm{d}x.$$

2. 平面图形由曲线 $x=g(y)(\geqslant 0)$ 与直线 $y=c, y=d$ 和 y 轴围成,绕 y 轴旋转一周的体积

$$V_y=\pi\int_c^d g^2(y)\mathrm{d}y.$$

绕 x 轴旋转一周的体积

$$V_x=2\pi\int_c^d |y|g(y)\mathrm{d}y.$$

【例 5.24 】由 $y=x^3, x=2, y=0$ 所围成的图形分别绕 x 轴和 y 轴旋转, 计算所得两个旋转体的体积.

【答案】$V_x=\dfrac{128}{7}\pi; V_y=\dfrac{64}{5}\pi$.

【解析】(1) 图形绕 x 轴旋转,该体积为

$$V_x=\int_0^2 \pi\left(x^3\right)^2\mathrm{d}x=\frac{128}{7}\pi;$$

(2) 图形绕 y 轴旋转, 该体积为

$$V_y=2\pi\int_0^2 x\cdot x^3\mathrm{d}y=\frac{64}{5}\pi.$$

【例 5.25】计算由椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积.

【答案】$\dfrac{4}{3}\pi a^3$.

【解析】这个旋转体可以看作是由半个椭圆 $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 及 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转一周而成的立体.

$$V=\int_{-a}^{a}\pi\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

当 $a=b$ 时,旋转椭球体就成为半径为 a 的球,它的体积为 $\frac{4}{3}\pi a^3$.

三、平面曲线弧长(数一、数二)

1.参数方程

设光滑曲线 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}(a\leqslant t\leqslant b)$,弧长 $s=\int_a^b\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$.

2.直角坐标方程

设光滑曲线 $y=y(x)(a\leqslant x\leqslant b)$,弧长 $s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x$.

3.极坐标系

设光滑曲线 $r=r(\theta)(a\leqslant\theta\leqslant b)$,弧长 $s=\int_a^b\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$.

【例 5.26】 曲线 $y=\int_0^x\tan t\mathrm{d}t(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4})$ 的弧长 $s=$______.

【答案】 $\ln(1+\sqrt{2})$.

【解析】 $s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x\mathrm{d}x=\ln\left|\sec x+\tan x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln(1+\sqrt{2})$.

【例 5.27】 当 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 时,对数螺线 $r=\mathrm{e}^{\theta}$ 的弧长为______.

【答案】 $\sqrt{2}(\mathrm{e}^{\pi}-1)$.

【解析】 $S=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+r'^2}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}\sqrt{(\mathrm{e}^{\theta})^2+(\mathrm{e}^{\theta})^2}\mathrm{d}\theta=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\theta}\mathrm{d}\theta=\sqrt{2}(\mathrm{e}^{\pi}-1)$.

四、旋转曲面面积(数一、数二)

设曲线 $y=f(x)(f(x)\geqslant 0,a\leqslant x\leqslant b)$,则曲线 $y=f(x)$ 绕 x 轴旋转一周而成的面积为

$$S=2\pi\int_a^b y\mathrm{d}s=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x.$$

【例 5.28】 设 D 是由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}\,(0\leqslant x\leqslant 1)$ 与坐标轴在第一象限围成的平面区域,求 D 绕 x 轴旋转一周所得的侧面积.

【答案】 2π.

【解析】 $S=\int_0^1 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\int_0^1 2\pi\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=2\pi$.