目　录

第一部分　高等数学

一、选择题

1、若$\lim\limits_{x\to 0}[1+ln(1+3x)]^{\frac{a}{sinx}}=\int_{-a}^{+\infty}xe^{-3x}dx$, 则$a=$(　).

（A）$-\frac{8}{3}$　　（B）$-\frac{4}{3}$　　（C）$\frac{4}{3}$　　（D）$\frac{8}{3}$

2、设$x\in[0,1]$时, $f(x)=x(1-x^2)$, 且$f(1+x)=af(x)\ (a\neq 0)$, 若$f(x)$在$x=0$处可导, 则$a=$(　).

（A）-1　　（B）-2　　（C）1　　（D）2

3、曲线$y=x^2arctan\frac{1}{x}+\frac{1}{x}arctan(x^2)$（　）.

（A）有一条渐近线　　（B）有 2 条渐近线

（C）有三条渐近线　　（D）没有渐近线

4、设有二元方程$x^2+y^2-2y+ln(1+xy)=-1$，根据隐函数存在定理，存在点$(0,1)$的一个邻域，在此邻域内该方程（　　）.

（A）既能确定一个具有连续导数的隐函数$y=y(x)$，也能确定一个具有连续导数的隐函数$x=x(y)$.

（B）既不能确定一个具有连续导数的隐函数$y=y(x)$，也不能确定一个具有连续导数的隐函数$x=x(y)$.

（C）可以确定一个具有连续导数的隐函数$x=x(y)$. 但是不能确定一个具有连续导数的隐函数$y=y(x)$.

（D）可以确定一个具有连续导数的隐函数$y=y(x)$，但是不能确定一个具有连续导数的隐函数$x=x(y)$.

5、设$\dfrac{cosx}{x}$是$f(x)$的一个原函数，若$a\neq 0$，则$\int f(ax)dx=$(　).

（A）$\dfrac{cosax}{ax}+C$　　（B）$\dfrac{cosax}{a^2x}+C$

（C）$\dfrac{cosax}{a^3x}+C$　　（D）$\dfrac{cosax}{x}+C$

6、设反常积分 $I_1=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$, $I_2=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+\sqrt{x})(1+x)}$,

$I_3=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$,则有（　　）.

（A） I_1, I_2收敛, I_3发散　　（B） I_1,I_3收敛，I_2发散

（C） I_2, I_3收敛, I_1发散　　（D） I_1,I_2,I_3都收敛

7、设 $y_1(x)=\frac{2\sin x+\cos x}{x}$, $y_2(x)=\frac{\sin x+2\cos x}{x}$ 是微分方程

$y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的两个解，则（　　）.

（A） $p(x)=\frac{2}{x}$, $q(x)=1$　　（B） $p(x)=1, q(x)=\frac{2}{x}$

（C） $p(x)=\frac{1}{x}, q(x)=2$　　（D） $p(x)=2, q(x)=\frac{1}{x}$

8、设平面区域 $D_1=\{(x,y)\,|0\leqslant x\leqslant 1, 1-x\leqslant y\leqslant 1\}$,

$D_2=\left\{(x,y)\,\middle|0\leqslant x\leqslant 1, 1-\sqrt{2x-x^2}\leqslant y\leqslant 1\right\}$,二重积分

$$I_1=\iint\limits_{D_1} ln(x+y)d\sigma,\ I_2=\iint\limits_{D_2} ln(x+y)d\sigma,\ I_3=\iint\limits_{D_2}\ln\sqrt{(x^2+y^2)}\,d\sigma,$$

则I_1,I_2,I_3的大小关系为( ).

（A） $I_1<I_2<I_3$　　（B） $I_3<I_2<I_1$

（C） $I_2<I_3<I_1$　　（D） $I_1<I_3<I_2$

9、若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则下列结论不正确的是( ).

（A） $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 必收敛

（B） $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 必收敛

（C） $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 必收敛

（D） $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 必收敛

10、函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)-2x+3y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$, 则 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,-2x)}{x}=$( ).

（A） -2　　（B） 3　　（C） -1　　（D） -4

二、填空题

11、设 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases} x=t^2+2t \\ t^2-y-siny=0 \end{cases}$ $(t\geqslant 0)$ 确定, 则 $\left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$________.

12、已知 $f(x^2+y^2,x^2-y^2)=4-2x^4-2y^4, D: x^2+y^2\leqslant 4$, 则 $\iint\limits_D \sqrt{f(x,y)}\, d\sigma=$________.

13、设$xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$,则$dz\big|_{(1,0,-1)}=$__________.

14、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n^4}}+\frac{2}{\sqrt{4n^2+n^4}}+\frac{3}{\sqrt{9n^2+n^4}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt{n^4+n^4}}\right)=$

__________.

15、设函数$f(x,y)$连续，区域D是由曲线$(x^2+y^2)^2=2xy$在第一象限所围成的部分，则$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$在极坐标下先$\theta$后$r$的二次积分为__________.

16、由曲线$y=\frac{3}{x}(x>0)$与直线$x+y=4$所围成的平面图形 D 的形心坐标为

__________.

17、曲线$xy=1$在点$(1,1)$处的曲率圆方程为__________.

18、设$u=ln(x^2+y^2+z^2)$,则 rot（grad u）＝__________.

19、函数$f(x)=x+1(0\leqslant x\leqslant\pi)$余弦级数为__________.

20、设曲面 S 为$x^2+y^2+z^2=2z$，则曲面积分$I=\oiint(x^2+y^2+z^2)dS=$

________.

21、设$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ 2, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$，$a_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)cosnxdx,\ n=1,2,\cdots,$

$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n cosnx$，则$S(-2)=$________.

三、解答题

22、(I)证明：$x>0$时，$x-\dfrac{x^2}{2}<ln(1+x)<x$;

(II)设$x_n=\left(1+\dfrac{1}{n^2}e^{\frac{1}{n}}\right)\left(1+\dfrac{1}{n^2}e^{\frac{2}{n}}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{n^2}e^{\frac{n}{n}}\right)$，证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求它的值.

23、设常熟$a>0$，且$f(x)$为$[-a,a]$上连续的偶函数，证明：对任意实数λ，有$\int_{-a}^{a}\dfrac{f(x)}{1+e^{-\lambda x}}=\int_0^a f(x)dx$，并利用上式计算积分$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{e^x sin^2x}{1+e^x}dx$.

24、设函数$f(x)$在$[-2,2]$上二阶可导，$|f(x)|\leqslant 1$，且$f^2(0)+f'^2(0)>2$，证明：

（Ⅰ）存在不同的两个点$\xi_1,\xi_2\in(-2,2)$，使得$|f'(\xi_1)|\leqslant 1$，$|f'(\xi_2)|\leqslant 1$；

（Ⅱ）存在$\xi\in(-2,2)$，使得$f(\xi)+f''(\xi)=0$.

25、设区域$D=\left\{(r,\theta)\,|\,0\leqslant r\leqslant \pi\sec\theta\ ,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}$，计算

$$I=\iint\limits_D r^2\cos\theta\cos\left[\sqrt{2}\,r\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right]drd\theta.$$

26、设位于第一象限且原点与x轴相切的光滑曲线$y=y(x)$, $P(x,y)$为曲线上任一点, 该点与原点间的弧长为s_1, 记P点的切线与y轴交点为A, 且P,A两点的距离为s_2, 已知$x(3s_1+2)=2(x+1)s_2$,求该曲线方程.

27、设函数$z=xf(x-y,\varphi(xy^2))$, f具有二阶连续偏导数, φ具有二阶导数, 且$\varphi(x)$满足$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\varphi(x)-1}{(x-1)^2}=1$, 求$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$.

28、求函数$f(x,y)=x^2+4y^2+xy+2$在区域 D 上最大值与最小值,其中 D 为$\dfrac{x^2}{4}+y^2\leqslant 1$且$y\geqslant \dfrac{1}{2}x-1$.

29、设函数$f_n'(x)=f_n(x)+\dfrac{n}{n^2-1}e^x x^{n-1}(n=2,3,\cdots)$且$f_n(0)=0$,试求:

（I）函数$f_n(x)$的表达式;

（II）级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}f_n(x)$的和函数.

第二部分　线性代数

一、选择题

1、设 A 为 n 阶方阵，α,β 为 n 维列向量，a,b,c 为常数，已知 $|A|=a$，$\begin{vmatrix} b & \alpha^T \\ \beta & A \end{vmatrix}=0$，则 $\begin{vmatrix} c & \alpha^T \\ \beta & A \end{vmatrix}=$（　　）.

（A）0　　（B）$\alpha^T\beta$　　（C）$(c-b)a$　　（D）a

2、设 n 阶方阵 A,B 满足 $(AB)^2=E$，则必有（　　）.

（A）$AB=E$　　（B）$AB=-E$

（C）$A^2B^2=E$　　（D）$(BA)^2=E$

3、设 A 为 n 阶可逆矩阵，交换 A 的第一行与第二行得到矩阵 B，则下列矩阵中必为正交矩阵的是（　　）.

（A）AB　　（B）AB^{-1}　　（C）$A^{-1}B$　　（D）$B^{-1}A$

4、设 A，B 为 n 阶实对称可逆阵，则下列结论不正确的是（　　）.

（A）存在可逆阵 P,Q，使得 $PAQ=B$

（B）存在可逆阵 P，使得 $P^{-1}ABP=BA$

（C）存在可逆阵 P，使得 $P^TA^2P=B^2$

（D）存在正交阵 Q，使 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=B$

5、设$m\times n$矩阵A的秩$r(A)=n<m$，则下列结论正确的是（　　）.

（A）若$AB=AC$，则$B=C$　　（B）若$BA=CA$，则$B=C$

（C）A的任意n个行向量线性无关　　（D）A的任意n个行向量线性相关

6、设A为$m\times n$矩阵，$r(A)=m<n$，则下列说法不正确的是（　　）.

（A）A一定可以只经过一系列的初等行变换化为(E_m,O)，E_m为m阶单位矩阵

（B）对任意的m维列向量b，$Ax=b$有无穷多解

（C）如果m阶方阵B满足$BA=O$，则一定有$B=O$

（D）行列式$|A^TA|=0$

7、设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$为4阶方阵，$A$经过初等行变换化为

$B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&5&6&7\\0&0&0&8\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则下列说法不正确的是（　　）.

（A）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为$A$的列向量组的最大无关组

（B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关

（C）有一组全不为零的数k_1,k_2,k_3，使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$

（D）α_4必可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示

8、设A为$m\times n$阶矩阵，B为$n\times s$阶矩阵，且$AB=C$，则A的行向量组线性无关是C的行向量组线性无关的（　　）.

（A）充分必要条件　　（B）充分不必要条件

（C）必要不充分条件　　（D）既不成分也不必要条件

9、设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为三维非零向量，则下列命题正确的是（　　）.

（A）如果α_1,α_2线性相关，α_3,α_4线性相关，则$\alpha_1+\alpha_3$，$\alpha_2+\alpha_4$线性相关

（B）如果$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则$\alpha_1+\alpha_4$，$\alpha_2+\alpha_4$，$\alpha_3+\alpha_4$线性无关

（C）如果α_4不能用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$一定线性相关

（D）如果$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$中任意$3$个向量均线性无关，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关

10、设A与B都是n阶方阵，$Ax=0$的解都是$Bx=0$的解，ξ_1,ξ_2,ξ_3为$Ax=0$的基础解系，则在下列线性方程组中，以$\xi_1+\xi_2$，$\xi_2+\xi_3$，$\xi_1+\xi_3$为基础解系的是（　　）.

（A）$(A+B)x=0$　　（B）$(A-B)x=0$

（C）$ABx=0$　　（D）$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=0$

11、设A为$m\times n$矩阵，$m\neq n$，b为m维列向量，则下列结论

①若$r(A)=n$，则$Ax=b$必有解；　②若$r(A)=m$，则$Ax=b$必有解；

③$Ax=0$与$A^TAx=0$必同解；　④$A^TAx=A^Tb$必有解.

中正确的个数是（　　）.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）0

12、设n阶矩阵A的各列元素之和为2，且$|A|=6$，则它的伴随矩阵A^*的各列元素之和为（　　）.

（A）2　　（B）$\dfrac{1}{3}$　　（C）3　　（D）6

13、设A为三阶实对称矩阵，二次型$f=x^TAx$的规范形为$y_1^2-y_2^2+y_3^2$，则下列结论中正确的个数为（　　）.

①A的特征值必为$1,-1,1$；　　②A的秩为2；

③A的行列式小于0；　　④A必相似于对角阵$\begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$；

⑤A合同于对角阵$\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{pmatrix}$；　　⑥$A$合同于对角阵$\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}$.

（A）1个　　（B）2个　　（C）3个　　（D）4个

14、设向量$\alpha=(a_1,a_2,a_3)^T$，$\beta=(b_1,b_2,b_3)^T$线性无关,

$x=(x_1,x_2,x_3)^T$，二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)$，则下列结论中不正确的是（　　）.

（A）f的秩为1　　（B）f的规范形为$f=z_1^2-z_2^2$

（C）f必不正定　　（D）$|\alpha\beta^T+\beta\alpha^T|=0$

15、设$A=(a_{ij})_{3\times 3}$为正定矩阵，则必有（　　）.

（A）$a_{11}+a_{22}>2a_{12}$　　（B）$a_{11}+a_{22}<2a_{12}$

（C）$a_{11}+a_{22}\leqslant 2a_{12}$　　（D）$a_{11}+a_{22}\geqslant 2a_{12}$

二、填空题

16、设A为三阶方阵，$|\lambda E-A|=\lambda^3+3\lambda+2$，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$为$A$的特征值，则

$$\begin{vmatrix}\lambda_1&\lambda_2&\lambda_3\\\lambda_3&\lambda_1&\lambda_2\\\lambda_2&\lambda_3&\lambda_1\end{vmatrix}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

17、设$\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$，对任意的正整数$n$，矩阵$(E+\alpha\beta^T)^n=$ _________.

18、若$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则$E+A+A^2+A^3+A^4=$_________.

三、解答题

19、设A为三阶方阵，λ_1，λ_2，λ_3是A的互不相等的特征值，α_1，α_2，α_3分别是其对应的特征向量，令$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.

（Ⅰ）证明β, $A\beta$, $A^2\beta$线性无关；

（Ⅱ）若$A^3\beta=2A\beta$，$P=(\beta,\ A\beta,\ A^2\beta)$，求$P^{-1}AP$，并证明$(A^2-2E)x=0$的通解为$x=c_1A\beta+c_2A^2\beta$，其中$c_1$，$c_2$为任意常数.

20、设三阶实对称矩阵A的秩为2，α_1,α_2是A的两个线性无关的特征向量，且$A(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_2$.

（Ⅰ）证明$\alpha_1^T\alpha_2=0$；（Ⅱ）求线性方程组$Ax=\alpha_2$的通解.

21、设A为三阶方阵，并有可逆阵$P=(p_1,p_2,p_3)$，p_i $(i=1,2,3)$为三维列向量，使得$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）证明：p_1，p_2为$(E-A)x=0$的解，p_3为$(E-A)x=-p_2$的解，且A不可相似对角化；

（Ⅱ）当$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-1&-2\\-1&1&2\end{pmatrix}$时，求可逆阵$P$，使得$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

22、设 A 为三阶实对称矩阵，$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 为三阶正交阵，且 $P^TAP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）证明$\alpha_i^TA\alpha_i>0$，$\alpha_i^TA\alpha_j=0\ (i,j=1,2,3,i\neq j)$；

（Ⅱ）若$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，计算$Q^{-1}AQ$，$Q^TAQ$，并证明$Q^{-1}AQ$与$Q^TAQ$合同但不相似.

23、设已知二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2\ (n>1)$.

（Ⅰ）证明二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵 $A=nE-\alpha\alpha^T$，其中 $\alpha=(1,1,\cdots,1)^T$，E 为n阶单位阵；

（Ⅱ）求A^k（k为自然数）；

（Ⅲ）求二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在正交变换下的标准形及规范形.

24、二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$，A为实对称矩阵，且$f(1,1,1)=3$，且 $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. 求：

（Ⅰ）二次型$f(x_1,x_2,x_3)$；

（Ⅱ）可逆变换$x=Cy$，化二次型$f(x_1,x_2,x_3)$为标准形.

第三部分　概率论与数理统计

一、选择题

1、设事件A,B,C是一个完备事件组，即它们两两互不相容且其和为Ω，则下列结论中一定成立的是（　　）.

（A）$\overline{A},\overline{B},\overline{C}$是一个完备事件组　　（B）$A,B,C$两两独立

（C）$A\cup B$与$\overline{A}\cup\overline{B}$独立　　（D）$\overline{A},\overline{B},\overline{C}$是两两对立事件

2、设X,Y为随机变量，$P\{XY\leqslant 0\}=\dfrac{3}{5}$，$P\{\max(X,Y)>0\}=\dfrac{4}{5}$，则$P\{\min(X,Y)\leqslant 0\}=$（　　）.

（A）$\dfrac{1}{5}$　　（B）$\dfrac{2}{5}$　　（C）$\dfrac{3}{5}$　　（D）$\dfrac{4}{5}$

3、商店出售10台洗衣机，其中恰有3台次品．现已售出一台洗衣机，在余下的洗衣机中任取两台发现均为正品，则原先售出的一台是次品的概率为（　　）.

（A）$\dfrac{3}{10}$　　（B）$\dfrac{3}{8}$　　（C）$\dfrac{1}{3}$　　（D）$\dfrac{2}{3}$

4、设A,B为两个随机事件，$P(AB)>P(A)P(B)$，若存在$C\subset AB$，使得$A-C$与B相互独立，则$P(C)=$（　　）.

（A）$P(A)-P\left(A\middle|\overline{B}\right)$　　（B）$P(A)-P(A|B)$

（C）$P(B)-P\left(B\middle|\overline{A}\right)$　　（D）$P(B)-P(B|A)$

5、下列函数中，为某随机变量X的分布函数的是（　　）.

（A）$F(x)=\dfrac{1+\operatorname{sgn}(x)}{2}$　　（B）$F(x)=\dfrac{x}{x+e^{-x}}$

（C）$F(x)=\dfrac{1}{1+e^{x}}$　　（D）$F(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$

6、设随机变量X的取值非负，其分布函数为$F(x)$，且EX存在，则$EX=$（　　）.

（A）$\int_0^{+\infty}xF(x)dx$　　（B）$\int_0^{+\infty}x[1-F(x)]dx$

（C）$\int_0^{+\infty}F(x)dx$　　（D）$\int_0^{+\infty}[1-F(x)]dx$

7、设随机变量X_1,X_2相互独立且均服从于$N(0,\sigma^2)$，且$P\left(\left|\dfrac{X_2}{X_1}\right|<k\right)=\alpha$，则$k=$（　　）.

（A）$t_{\frac{1-\alpha}{2}}(1)$　　（B）$t_{1-\alpha}(1)$

（C）$F_{\frac{1-\alpha}{2}}(1,1)$　　（D）$F_{1-\alpha}(1,1)$

8、设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自正态总体$N(0,1)$的简单随机样本，$\bar{X},S^2$是样本均值与样本方差，则下列不服从$\chi^2(n-1)$分布的随机变量是（　　）.

（A）$\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2$　　（B）$\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}^2$

（C）$(n-1)S^2$　　（D）$\sum_{i=1}^{n-1}X_i^2$

9、设随机变量$X_i \sim B(i,\ 0.1)$，$i=1,2,\cdots,15$，且$X_1,X_2,\cdots,X_{15}$相互独立，根据切比雪夫不等式，则$P\left\{8<\sum_{i=1}^{15}X_i<16\right\}$的值（　　）.

（A）$\geqslant 0.325$　　（B）$\leqslant 0.325$

（C）$\geqslant 0.675$　　（D）$\leqslant 0.675$

10、设总体X的方差存在，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是取自总体X的简单随机样本，其样本均值和样本方差分别为$\bar{X},S^2$，则EX^2的矩估计量是（　　）.

（A）$S^2+\bar{X}^2$　　（B）$\dfrac{n-1}{n}S^2+\bar{X}^2$

（C）$\dfrac{n}{n-1}S^2+\bar{X}^2$　　（D）$\dfrac{n}{n-1}S^2+n\bar{X}^2$

二、填空题

11、设试验的成功率$p=20\%$，现在将试验独立地重复进行100次，则试验成功的次数介于16次和32次之间的概率$\alpha=$ ________.（$\Phi(1)=0.8413$，$\Phi(3)=0.9987$）

12、掷一枚不均匀的硬币，设正面出现的概率为p，反面出现的概率为$q=1-p$，随机变量X为一直掷到正面和反面都出现为止所需要的次数，则X的概率分布为________.

13、设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，均服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，$X=\min\{\max\{X_1,X_2\},\ X_3\}$，则 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，X 的密度函数为 $f_X(x)=$ _________.

14、设随机变量 X,Y 独立且同服从于 $N(\mu,\sigma^2)$，其联合概率密度 $f(x,y)$ 在 $(2,2)$ 处有驻点，且 $f(0,0)=\dfrac{1}{4\pi e^2}$，则 (X,Y) 服从的分布是_________.

15、在一次晚会上，有 $n\ (n\geqslant 3)$ 对夫妻做一游戏，将男士与女士随机配对，则夫妻配成对的期望值为_________.

16、设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，则 $E[\min(X,Y)]=$ _________.

17、设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一个简单随机样本，其中 σ^2 已知. 如果 μ 的置信度为 90% 的置信区间为 $(9.765,\ 10.235)$，且 $\Phi(1.645)=0.95$，$\Phi(1.96)=0.975$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数，则 μ 的置信度为 95% 的置信区间为_________.

三、解答题

18、设随机变量$X \sim U[0,2]$，$Y=[X]+X$，$[\cdot]$表示取整函数，求：

（Ⅰ）随机变量Y的概率密度函数$f_Y(y)$；　（Ⅱ）$Cov(X,Y)$.

19、设随机变量$X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$，且X,Y相互独立．令$U=X+2Y$，$V=X+aY$，

（Ⅰ）问常数a取何值时，U和V相互独立？

（Ⅱ）当U和V相互独立时，求概率$P\{X>0|X+2Y=2\}$.

20、在区间$[0,3]$上随机地取一个实数X．若$0 \leqslant X \leqslant 1$，则随机变量$Y$在$[0,X]$上服从均匀分布，若$1<X \leqslant 3$，则$Y$在$[X,3]$上服从均匀分布，

（Ⅰ）求(X,Y)的概率密度函数$f(x,y)$；

（Ⅱ）求Y的概率密度函数$f_Y(y)$.

21、设随机变量X, Y, Z相互独立，且X和Y均服从$N(0,1)$，Z的分布律为

$$P\{Z=0\}=P\{Z=1\}=\frac{1}{2}, \quad T=(X^2+Y^2)Z.$$

（Ⅰ）求T的分布函数$F_T(t)$；　（Ⅱ）求ET.

22 、 设 随 机 变 量 (X,Y) 在 区 域 D ： $|x|+|y|\le 1$ 上 服 从 均 匀 分 布 ，

$U=X+Y,V=Y-X$.

（Ⅰ）求 (U,V) 的分布函数 $F(u,v)$；

（Ⅱ）问 U 与 V 是否独立同分布？

23、设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$，方差 $DX=4$，而随机变量 Y 的密度函数为 $2f(-2y)$，且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=-\dfrac{1}{2}$，记 $Z=X+2Y$.

（Ⅰ）求 EZ，DZ；

（Ⅱ）用切比雪夫不等式估计概率 $P\{|Z|\geqslant 4\}$.

24、设随机变量 $\chi^2\sim\chi^2(1)$，$F\sim F(1,1)$，$T\sim t(1)$．求：

（Ⅰ）$P\{\chi^2\leqslant 1\}$；　　（Ⅱ）$P\{F\leqslant 1\}$；

（Ⅲ）$P\{-1<T<1\}$，其中 $\Phi(1)=0.8413$.