第一章　行列式

【考试要求】

1．了解行列式的概念，掌握行列式的性质.

2．会应用行列式的性质和行列式按行（列）展开定理计算行列式.

§1.行列式定义

1. 二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

2. 三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

3.全排列及其逆序数

（1）全排列： 自然数$1,2,\cdots,n$排成一行，称为这n个数的一个排列.

（2）逆序： 在一个排列中，如果大数排在小数前面，就构成一个逆序.

（3）逆序数： 一个排列的逆序总数叫做这个排列的逆序数，逆序数为奇数的排列叫做奇排列，逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

(4) 对换： 在一个排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，称为对该排列做了一次对换，并且对换奇数次改变排列的奇偶性，而对换偶数次不改变排列的奇偶性.

4. n 阶行列式的定义

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的任意一个排列，有 $n!$ 种情况，τ 为排列 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的逆序数．n 阶行列式 D_n 是所有 $n!$ 项的代数和．

【注 1】 a_{ij} 叫做行列式 $\det(a_{ij})$ 的 (i, j) 元， i 叫做行标， j 叫做列标.

【注 2】 行列式是一个数，一阶行列式 $|a| = a$.

【例 1.1】写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

5. 特殊的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

【例 1.2】求下列行列式

（1） $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 2 & 5\\0 & 0 & 3\end{vmatrix}$　（2） $D=\begin{vmatrix} & & 1\\ & 2 & \\3 & & \end{vmatrix}$　（3） $D=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 2 & 1\\0 & 3 & 2 & 3\\4 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$

§2.行列式性质

1. 转置

行列式与它的转置行列式相等.

例. $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，则 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$ 称为 D 的转置行列式，且 $D^{\mathrm{T}}=D$.

2. 数乘

若行列式某行（列）有公因子 k，则可以把公因子 k 提到行列式外面.

例
$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k^3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3. 互换

互换行列式的两行（列），行列式变号. $(r_i \leftrightarrow r_j / c_i \leftrightarrow c_j)$

例. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{=} -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{c_2 \leftrightarrow c_3}{=} -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$$

推论：如果行列式中有两行（列）元素相同或成比例，则此行列式等于 0.

4. 拆分

可以把一个行列式拆成两个行列式相加，只在某一行（列）拆分，其它行（列）保持不变.

例. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_1 & a_{22}+b_2 & a_{23}+b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

5. 倍加

把行列式第 j 行（列）的 k 倍加到第 i 行（列），行列式不变. $(r_i + kr_j \,/\, c_i + kc_j)$

例. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{r_1+2r_2}{=} \begin{vmatrix} a_{11}+2a_{21} & a_{12}+2a_{22} & a_{13}+2a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

【例 1.3】利用行（列）变换把下列行列式化成上（下）三角行列式，并求其值.

（1）$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}$

（2）$D=\begin{vmatrix}-3&4&6\\-2&0&1\\4&5&7\end{vmatrix}$

（3）$\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$

【例 1.4】计算
$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}.$$

§3. 行列式展开定理

1. 余子式与代数余子式

（1）**余子式：**n 阶行列式中 a_{ij} 所在行与列划去后留下的元素按原顺序排成的 $n-1$ 阶行列式，叫做 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij} .

例．已知 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，则 $M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

（2）代数余子式：a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

例．已知 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，则 $A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

【注】M_{ij}，A_{ij} 与 a_{ij} 的位置有关，与 a_{ij} 的值无关.

【例 1.5】已知 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

（1）求第一行元素对应的三个余子式；

（2）求第一行元素对应的三个代数余子式.

2. 行列式展开定理

行列式等于它的某一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和.

例. $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}.$$

【例 1.6】计算下列行列式

（1） $$D=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda+3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix};$$

（2） $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$；

（3）$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 & -7 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ -4 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

推论一： 行列式某一行（列）的元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积之和等于 0.

例．已知 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，则 $a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0$.

推论二： 行列式 D 中某一行（列）的代数余子式的线性组合等于一个新的行列式 D'，D' 是将 D 在该行（列）的元素用代数余子式前面的系数替换后的新行列式.

例. 已知 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，则 $xA_{11}+yA_{12}+zA_{13}=\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，

已知 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，则 $xA_{12}+yA_{22}+zA_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & x & a_{13} \\ a_{21} & y & a_{23} \\ a_{31} & z & a_{33} \end{vmatrix}$.

【例 1.7】已知 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$，

（1）$A_{12}+2A_{22}+3A_{32}$； （2）求第 2 行各元素代数余子式之和.

§4.典型行列式的计算

1. 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^{\ 2} & a_2^{\ 2} & a_3^{\ 2} & \cdots & a_n^{\ 2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{\ n-1} & a_2^{\ n-1} & a_3^{\ n-1} & \cdots & a_n^{\ n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i)$$

【例 1.8】求行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$.

【例 1.9】计算 $D_4=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2\\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3\\ 9 & 8 & 7 & 6\end{vmatrix}$.

2. 累加型行列式（各行（列）元素之和相等的行列式）

【例 1.10】求行列式 $D=\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4+a \end{vmatrix}$.

3. 爪形行列式

【例 1. 11】求行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&0&0\\1&0&3&0\\1&0&0&4\end{vmatrix}$.

4. 点斜式行列式

【例 1.12】计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$.

5. 三对角线行列式

【例 1.13】求行列式 $D_5=\begin{vmatrix} 4 & 3 & & & \\ 1 & 4 & 3 & & \\ & 1 & 4 & 3 & \\ & & 1 & 4 & 3 \\ & & & 1 & 4 \end{vmatrix}$.