第九章 无穷级数

考试内容

常数项级数的收敛与发散的概念,收敛级数和的概念,级数的基本性质与收敛的必要条件,几何级数与 p 级数及其收敛性,正项级数收敛的判别法,交错级数与莱布尼茨定理,任意项级数的绝对收敛与条件收敛,函数项级数的收敛域与和函数的概念(数学一).幂级数及其收敛半径,收敛区间和收敛域.幂级数的和函数.幂级数在其收敛区间的基本性质简单幂级数的和函数的求法.初等函数的幂级数展开式.函数的傅里叶系数与傅里叶级数狄利克雷定理(数学一).函数在$[-l,l]$上的傅里叶级数,函数在$[0,l]$上的正弦级数和余弦级数(数学一).

考试要求

1.理解常数项级数收敛、发散以及收敛级数的和的概念,掌握级数的基本性质及收敛的必要条件.

2.掌握几何级数与 p 级数的收敛与发散的条件.

3.掌握正项级数收敛性的比较判别法、比值判别法、根值判别法，会用积分判别法.

4.掌握交错级数的莱布尼茨判别法.

5.了解任意项级数绝对收敛与条件收敛的概念以及绝对收敛与收敛的关系.

6.了解函数项级数的收敛域及和函数的概念(数学一).

7.理解幂级数收敛半径的概念,并掌握幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域的求法.

8.了解幂级数在其收敛区间内的基本性质(和函数的连续性、逐项求导和逐项积分),会求一些幂级数在收敛区间内的和函数,并会由此求出某些数项级数的和.

9.了解函数展开为泰勒级数的充分必要条件(数学一).

10.掌握$\mathrm{e}^x,\sin x,\cos x,\ln(1+x),(1+x)^\alpha$的麦克劳林展开式,会用它们将一些简单函数间接展开为幂级数.

11.了解傅里叶级数的概念和狄利克雷收敛定理,会将定义在$[-l,l]$上的函数展开为傅里叶级数,会将定义在$[0,l]$上的函数展开为正弦级数与余弦级数,会写出傅里叶级数的和函数的表达式(数学一).

§1.常数项级数

一、常数项级数的定义

1.常数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

称为（常数项）无穷级数，简称（常数项）级数，其中u_n是常数.

2.前 *n* 项和

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$$

称为级数的前n项和.

3.级数收敛与发散

若$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$（极限存在），则称无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，且其和为$S$，记作$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=S$.

若$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$不存在，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是发散的，发散级数没有和的概念.

【例 9.1】判断以下级数的敛散性：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$.　　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$.

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$.　　（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$.

【答案】（1）收敛;（2）收敛;（3）发散;（4）发散.

【解析】（1）$S_n=\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=1-\dfrac{1}{n+1}$.

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$.故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$收敛.

（2）$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}$.所以，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n==\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$.故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛.

（3）$S_n=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.所以，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$.故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$发散.

（4）$S_n=-1+1-1+1-\cdots+(-1)^n$.所以，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$振荡不存在.故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$发散.

二、基本性质

1.若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

2.级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛性相同，其中$k$为任意非零常数.

3.若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$也收敛.

【注】收敛+收敛=收敛；收敛+发散=发散；发散+发散=不确定.

4.在级数中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的收敛性.

5.若级数收敛，则对该级数的项任意加括号后所成的级数仍然收敛；

若加括号后所成级数发散，则去括号后原来级数发散.

【例 9.2】判断以下命题:

（1）若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

（2）若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)$收敛，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

（3）若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum\limits_{n=2000}^{\infty}u_n$收敛.

（4）若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2n}$收敛.

（5）若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$ 收敛.

（6）若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛.

（7）若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

（8）若 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛.

（9）若 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

（10）若 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

（11）若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n+1} - u_{2n-1})$ 收敛.

【答案】（1）错;（2）对; （3）对;（4）错; （5）对;（6）对; （7）错;（8）对; （9）错;（10）对;（11）对.

【解析】（1）错.反例：$u_n = v_n = 1$.

（2）对. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n) + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

（3）对.在级数中去掉有限项，不会改变级数的收敛性.

（4）错.反例：$u_n = (-1)^n \frac{1}{n}$.

（5）对. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(u_n + u_{n+1})}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}\right)$，收敛+收敛=收敛.

（6）对.若级数收敛，则对该级数的项任意加括号后所成的级数仍然收敛.

（7）错.反例：$u_n = (-1)^n$.

（8）对.若级数收敛，则对该级数的项任意加括号后所成的级数仍然收敛.

（9）错.一般项趋于零是级数收敛的必要条件而非充分条件.

（10）对.利用比值判别法.

（11）对.$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n+1}-u_{2n-1})=\lim_{n\to\infty}(u_{2n+1}-u_1)=-u_1$..

【例 9.3】判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-2n+4}{(2n-1)(2n+1)(2n+2)}$的敛散性.

【答案】发散.

【解析】$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-2n+4}{(2n-1)(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{8}$,故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-2n+4}{(2n-1)(2n+1)(2n+2)}$发散.

三、两类重要的级数

1.几何级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}aq^n \text{（其中常数 } a\neq 0\text{）}$$

当$|q|<1$时级数收敛，当$|q|\geqslant 1$时级数发散.

2. p 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} \text{（其中常数 } p>0\text{）}$$

当 $p>1$时级数收敛，当 $p\leqslant 1$时级数发散.

【例 9.4】判断以下级数收敛性

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$；（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$；

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$；（4）$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}-\frac{1}{n^3})$.

【答案】（1）发散;（2）收敛;（3）发散;（4）发散.

【解析】（1） $p=1$的 p 级数，发散.

（2） $p=2$ 的 p 级数，收敛.

（3） $p=\frac{1}{2}$ 的 p 级数，发散.

（4） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ 是 $p=\frac{1}{3}$ 的 p 级数，发散； $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 是的 $q=\frac{1}{3}$ 几何级数，收敛.

发散+收敛=发散.

四、正项级数判断敛散性

定义：对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，若 $u_n\geqslant 0$，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数.

1.比较判别法

设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都是正项级数，且 $u_n\leqslant v_n$，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛;反之，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

2.比较判别法的极限形式

两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$，

a.当 $0<l<\infty$ 时,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 同敛散；

b.当 $l=0$ 时,如果 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必收敛；

c.当 $l=+\infty$,如果 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必发散.

【例 9.5】判定以下级数的收敛性

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)}$

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$

【答案】（1）发散;（2）收敛;（3）收敛.

【解析】（1）$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$ $\because\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散 $\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 发散.

（2）$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)(n+4)}}{\frac{1}{n^2}}=1$ $\because\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛 $\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)}$ 收敛.

（3）$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}=\pi$，$\because\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$ 收敛.

3.比值判别法（达朗贝尔判别法）

设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，若 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，则

当 $\rho<1$ 时级数收敛；

当 $\rho>1$（或 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$）时级数发散；

当 $\rho=1$ 时不确定.

【例 9.6】判定以下级数的收敛性

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$.　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$.　　（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$.

【答案】（1）发散;（2）收敛;（3）收敛.

【解析】（1）发散. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\dfrac{3^n}{n\cdot 2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{2(n+1)}=\dfrac{3}{2}>1$，故发散.

（2）收敛. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\dfrac{n^2}{3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{3n^2}=\dfrac{1}{3}<1$，故收敛.

（3）收敛. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{2^n n!}{n^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^n}{(n+1)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}2(\dfrac{n}{n+1})^n=2e^{-1}<1$，故收敛.

4.根值判别法（柯西判别法）

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数，若$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，则

当$\rho<1$时级数收敛；

当$\rho>1$（或$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\infty$）时级数发散；

当$\rho=1$时不确定.

【例 9.7】判定下列级数的收敛性

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$；　　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$.

【答案】（1）收敛;（2）收敛.

【解析】（1）收敛. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2}<1$，故收敛.

（2）收敛. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n}{3n-1})^{\frac{2n-1}{n}}=\dfrac{1}{9}<1$，故收敛.

5.积分判别法

设函数 $f(x)$ 为 $[i,+\infty)$ 上的非负的减函数，那么正项级数 $\sum_{n=i}^{\infty} f(n)$ 与反常积分 $\int_{i}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性相同.

【例 9.8】用积分判别法判断下列级数的敛散性:

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$；　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$；　（3）$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

【答案】（1）收敛;（2）发散;（3）收敛.

【解析】（1）$\frac{1}{x^2+1}$ 非负且单调递减，$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_1^{+\infty}=\frac{\pi}{4}$,反常积分收敛，因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ 也收敛.

（2）$\frac{x}{x^2+1}$ 非负且单调递减，$\int_{1}^{+\infty}\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_1^{+\infty}=\infty$,反常积分发散，因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$ 也发散.

（3）收敛. $\frac{1}{x\ln^2 x}$ 非负且单调递减，$\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{\ln x}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{\ln 2}$，所以 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ 收敛.

五、交错级数判断敛散性

1.交错级数的概念：级数各项正负交替出现，记作 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n$ ，其中 $u_n\geqslant 0$.

2.莱布尼兹判别法：

若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足条件：（1）$u_n\geqslant u_{n+1}$，（2）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛.

六、绝对收敛与条件收敛

1.绝对收敛：若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛.

2.条件收敛：若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛.

3.绝对收敛与收敛的关系：若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$必定收敛.

【例 9.9】判定下列级数是否收敛？如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$；　　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{3^{n-1}}$.

【答案】（1）条件收敛;（2）绝对收敛.

【解析】（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$发散. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$且$\dfrac{1}{\sqrt{n}}$单减.

$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$条件收敛.

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{n}{3^{n-1}}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^{n-1}}$，根据正项级数的比值判别法，

$\because\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n+1}{3^n}}{\frac{n}{3^{n-1}}}=\dfrac{1}{3}<1$，$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^{n-1}}$收敛.所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{3^{n-1}}$绝对收敛.

【例 9.10】下列级数中发散的是

(A) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sqrt{\ln n}}{n^3}$.　(B) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^2}$.　(C) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}$.　(D) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$.

【答案】(D).

【解析】对于 A 选项，当n充分大时，$\dfrac{\sqrt{\ln n}}{n^3}<\dfrac{\sqrt{n}}{n^3}=\dfrac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$，由于$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$收敛，根据正项级数的比较判别法，可得选项 A 收敛.

对于 B 选项，设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$，则 $f'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$，当 $x\geqslant 2$ 时，$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 非负且单调递减，且 $\int_2^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=\int_2^{+\infty}\ln x\mathrm{d}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{\ln x}{x}\Big|_2^{+\infty}+\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ $=\dfrac{\ln 2+1}{2}$.由正项级数的积分判别法，可得选项 B 收敛.

对于 C 选项，设 $u_n=\dfrac{1}{n-\ln n}$，设 $f(x)=x-\ln x$，则 $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}$，当 $x\geqslant 2$ 时，$f'(x)>0$，即 $f(x)$ 单调递增，所以 u_n 单调递减，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n-\ln n}=0$.根据交错级数的莱布尼兹判别法，可得选项 C 收敛.

对于 D 选项，$f(x)=\dfrac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}$ 在 $[3,+\infty)$ 非负且单调递减，$\int_3^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}\mathrm{d}x$ $=\ln(\ln(\ln x))\Big|_3^{+\infty}=\infty$，反常积分发散，根据正项级数的积分判别法，因此级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$ 也发散.

§2.幂级数

一、幂级数的定义

1.幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$ 称为 x 的幂级数.

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 称为 $(x-x_0)$ 的幂级数.

2.幂级数的收敛域

当 $x=x_0$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^{\ n}$ 为常数项级数，若 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^{\ n}$ 收敛，则称 x_0 是 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的一个收敛点.所有收敛点构成的集合称为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域.

3.阿贝尔定理

若级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 当 $x=x_0(x_0\neq 0)$ 时收敛，则满足不等式 $|x|<|x_0|$ 的一切 x 使该幂级数绝对收敛;反之，若级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 当 $x=x_0$ 时发散，则满足不等式 $|x|>|x_0|$ 的一切 x 使该幂级数发散.

推论：若级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 当 $x=x_0(x_0\neq 0)$ 时条件收敛，则 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛半径为 $R=|x_0|$.

4.幂级数的收敛半径、收敛区间与收敛域

在不考虑端点的情况下，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域是以 0 为中心，以 R 为半径的区间，其中 R 称为收敛半径，开区间 $(-R,R)$ 称为收敛区间.

【例 9.11】若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-2$ 处收敛，在 $x=2$ 处发散，求收敛域.

【答案】$[-2,2)$.

【解析】$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在 $x=-2$ 处收敛：

（1）当 $|x|<2$ 时，收敛；

（2）当 $|x|>2$ 时，不确定；

（3）当 $x=-2$ 时，收敛；

（4）当 $x=2$ 时，不确定.

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在 $x=2$ 处发散：

（1）当 $|x|<2$ 时，不确定；

（2）当 $|x|>2$ 时，发散；

（3）当 $x=-2$ 时，不确定；

（4）当 $x=2$ 时，发散.

综上，收敛域为 $[-2,2)$.

或利用阿贝尔定理的推论，$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在 $x=\pm 2$ 时，一个收敛，一个发散，这种情况只可能出现在收敛区间的端点，因此 $R=2$，收敛区间为 $(-2,2)$，再结合两端点的敛散性可得收敛域为 $[-2,2)$.

【例 9.12】若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，在 $x=-4$ 处发散，求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域.

【答案】收敛域为 $(1,5]$.

【解析】将 $x+2$ 看成 t，依题意，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(2)^n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(-2)^n$ 发散,得 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n t^n$ 的收敛半径为 2，收敛区间为 $(-2,2)$，考虑区间端点的敛散性,收敛域为 $(-2,2]$.因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 收敛域 $-2<x-3\leqslant 2$，即收敛域为 $(1,5]$.

二、求收敛半径、收敛区间与收敛域

1.比值判别法求收敛区间

对于级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，令 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right|<1$，得 x 的取值范围即为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间.

2.收敛半径公式

对于级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，如果 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，则该幂级数的收敛半径为

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}, & \rho\neq 0,\\ +\infty, & \rho=0,\\ 0, & \rho+\infty,\end{cases}$$

收敛区间为 $(-R,R)$.

【注 1】要求幂级数的收敛域，先求收敛区间，然后再判断在收敛区间两个端点的收敛性.

【注 2】如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 是缺项级数（即有无穷多项 a_n 为 0 ），则不能用公式求收敛半径.

【例 9.13】求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 的收敛半径与收敛域.

【答案】收敛半径为 $R=+\infty$,收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

【解析】令 $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right|<1$，得 $-\infty<x<+\infty$，所以收敛半径为 $R=+\infty$,收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

【例 9.14】求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 的收敛半径与收敛域.

【答案】收敛半径为$R=1$,收敛域为$(-1,1]$.

【解析】令$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}}{(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}}\right|<1$，得$-1<x<1$.收敛半径$R=1$.

当$x=1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$收敛；当$x=-1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{-1}{n}$发散.

故收敛域为$(-1,1]$.

【例 9.15】求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{2^n\cdot n}$的收敛半径与收敛域.

【答案】收敛半径$R=2$，收敛域为$[-1,3)$.

【解析】令$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{(x-1)^{n+1}}{2^{n+1}\cdot(n+1)}}{\dfrac{(x-1)^n}{2^n\cdot n}}\right|<1$，得收敛区间$-1<x<3$.收敛半径$R=2$.

当$x=-1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$收敛；当$x=3$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散.

故收敛域为$[-1,3)$.

三、和函数

1.和函数的定义

在收敛域内求$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和，得到一个与$x$相关的函数，记作$S(x)$，称为和函数，它的定义域就是级数的收敛域.

2.和函数的性质

（1）幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数$S(x)$在其收敛域$I$上连续.

（2）幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上可积，并有逐项积分公式

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right]\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^x a_n x^n \mathrm{d}x\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad x \in I.$$

逐项积分后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

（3）幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间 $(-R,R)$ 内可导，并有逐项求导公式

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad x \in (-R,R).$$

逐项求导后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

3.常用的麦克劳林展开式

（1）$\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots + x^n + \cdots, (-1 < x < 1)$.

（2） $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} x^n = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots, (-\infty < x < +\infty)$.

（3）$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots, (-1 < x \leqslant 1).$$

（4）$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, (-\infty < x < +\infty)$.

（5）$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$， $(-\infty < x < +\infty)$.

（6）$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$

$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots, \quad (-1 < x < 1).$$

【例 9.16】求下列幂级数的收敛域及和函数:

（1）$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n}$；　　　　（2）$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n+1}$.

【答案】（1）收敛域为$(-1,1)$.和函数$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x^2)^n=\dfrac{1}{1-x^2}$，$-1<x<1$.

（2）收敛域为$(-1,1)$.和函数$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n+1}=\dfrac{x}{1-x}$，$-1<x<1$.

【解析】略.

【例 9.17】求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-2)^n x^{2n+1}$的收敛域及和函数.

【答案】收敛域为$(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$,和函数$S(x)=\dfrac{-2x^3}{1+2x^2}$

【解析】收敛域为$(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$.

和函数$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-2)^n x^{2n+1}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-2x^2)^n=\dfrac{-2x^3}{1+2x^2}$，$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

【例 9.18】求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$.

【答案】$\mathrm{e}-1$.

【解析】$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}=1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\cdots$,

因为$\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{x^2}{2\,!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n\,!}+\cdots$，令$x=1$可得$\mathrm{e}=1+1+\dfrac{1}{2\,!}+\cdots+\dfrac{1}{n\,!}+\cdots$,

因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}=1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\cdots=\mathrm{e}-1$.

【例 9.19】 求 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.

【答案】 $\ln 2$.

【解析】 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$,

因为 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$,

令 $x=1$ 可得 $\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$,

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots=\ln 2$.

【例 9.20】 将函数 $f(x)=\frac{1}{2+x}$ 展开成 x 的幂级数，并写出收敛域.

【答案】 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$，收敛域为 $(-2,2)$.

【解析】 $f(x)=\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{x}{2})}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x}{2})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$，$-1<-\frac{x}{2}<1$.

收敛域为 $(-2,2)$.