

例 7.26.

$$\begin{cases} 2x + 2x\lambda_1 + \lambda_2 = 0 & (1) \\ 2y + 2y\lambda_1 + \lambda_2 = 0 & (2) \\ 2z - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 & (3) \\ x^2 + y^2 - z = 0 & (4) \\ x + y + z - 4 = 0 & (5) \end{cases}$$

由 (1) - (2) 得:  $2(x-y)(1+\lambda_1) = 0$

$$\Rightarrow x=y \text{ 或 } \lambda_1 = -1$$

当  $\lambda_1 = -1$  时, 代入 (1) 得:  $\lambda_2 = 0$

当  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$  时, 代入 (3) 得:  $z = -\frac{1}{2}$

将  $z = -\frac{1}{2}$  代入 (4) 的左端得:  $x^2 + y^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \neq 0$

此时, 方程 (4) 不满足.

$$\therefore \lambda_1 \neq -1$$

$\therefore$  只有  $x=y$ .

$$\text{由 (4) + (5) 得: } x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \quad (6)$$

将  $x=y$  代入 (6) 得:  $x = -2$  或  $1$

当  $x = -2$  时,  $z = 8$ .

当  $x = 1$  时,  $z = 2$ .

∴ 方程组的解为  $\begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \\ z = 8 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ .