第一章 行列式

考试内容

行列式的概念和基本性质 行列式按行（列）展开定理

考试要求

1．了解行列式的概念，掌握行列式的性质．
2．会应用行列式的性质和行列式按行（列）展开定理计算行列式．

§1.行列式定义

1. 二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

2. 三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

3. 全排列及其逆序数

（1）全排列：自然数$1,2,\cdots,n$排成一行，称为这n个数的一个排列.

（2）逆序：在一个排列中，如果大数排在小数前面，就构成一个逆序.

（3）逆序数： 一个排列的逆序总数叫做这个排列的逆序数，逆序数为奇数的排列叫做奇排列，逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

（4）对换：在一个排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，称为对该排列做了一次对换，并且对换奇数次改变排列的奇偶性，而对换偶数次不改变排列的奇偶性.

4. n阶行列式的定义

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

其中 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是自然数$1,2,\cdots,n$的任意一个排列，有$n!$种情况，τ 为排列 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的逆序数．n阶行列式D_n是所有$n!$项的代数和.

【注 1】a_{ij} 叫做行列式 $\det(a_{ij})$ 的 (i,j) 元，i 叫做行标，j 叫做列标.

【注 2】行列式是一个数，一阶行列式 $|a|=a$.

【例 1.1】写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

【答案】$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 与 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.

【解析】由行列式定义知这项必还含有分别位于第 3 行和第 4 行的某两元素，而它们又分别位于第 2 列和第 4 列，即 a_{32} 和 a_{44} 或 a_{34} 和 a_{42}，注意到排列 1324 与 1342 的逆序数分别为 1 与 2，故此行列式中含有 $a_{11}a_{23}$ 的项为 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 与 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.

5. 特殊的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

【例 1.2】求下列行列式

（1）$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$　（2）$D=\begin{vmatrix} & & 1 \\ & 2 & \\ 3 & & \end{vmatrix}$　（3）$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

【答案】（1）6；（2）-6；（3）24.

【解析】（1）$D=1\times2\times3=6$；

（2）$D=-1\times2\times3=-6$；

（3）$D=(-1)^{\frac{4\times3}{2}}\times1\times2\times3\times4=24$.

§2.行列式性质

1. 转置

行列式与它的转置行列式相等.

例. $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，则 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$ 称为 D 的转置行列式，且 $D^{\mathrm{T}}=D$.

2. 数乘

若行列式某行（列）有公因子 k，则可以把公因子 k 提到行列式外面.

例. $\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix}=k^3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

3. 互换

互换行列式的两行（列），行列式变号.（$r_i \leftrightarrow r_j / c_i \leftrightarrow c_j$）

例. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{=} -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{c_2 \leftrightarrow c_3}{=} -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$

推论：如果行列式中有两行（列）元素相同或成比例，则此行列式等于 0.

4. 拆分

可以把一个行列式拆成两个行列式相加，只在某一行（列）拆分，其它行（列）保持不变.

例. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_1 & a_{22}+b_2 & a_{23}+b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

5. 倍加

把行列式第 j 行（列）的 k 倍加到第 i 行（列），行列式不变．$(r_i+kr_j\,/\,c_i+kc_j)$

例．$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{r_1+2r_2}{=} \begin{vmatrix} a_{11}+2a_{21} & a_{12}+2a_{22} & a_{13}+2a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

【例 1.3】 利用行（列）变换把下列行列式化成上（下）三角行列式，并求其值.

（1）$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$　　（2）$D=\begin{vmatrix} -3 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix}$　　（3）$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

【答案】（1）2；（2）27；（3）48.

【解析】（1）$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} \overset{r_3-r_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} \overset{r_2-r_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} \overset{r_3-3r_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2$；

（2）$D=\begin{vmatrix} -3 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} \overset{r_1-r_2}{=} \begin{vmatrix} -1 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3+4r_1}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 0 & -8 & -9 \\ 0 & 21 & 27 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 0 & -8 & -9 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix}$

$\overset{r_3+\frac{7}{8}r_2}{=} 3\begin{vmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 0 & -8 & -9 \\ 0 & 0 & \frac{9}{8} \end{vmatrix}=27$；

（3）$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{r_1+r_2+r_3+r_4}{=} \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1 \\ r_4-r_1}}{=} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=48$.

【例 1.4】计算 $D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$.

【答案】a^4.

【解析】从第 4 行开始，后行减前行，

$$D\overset{\substack{r_4-r_3\\r_3-r_2\\r_2-r_1}}{=}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&a+b&a+b+c\\0&a&2a+b&3a+2b+c\\0&a&3a+b&6a+3b+c\end{vmatrix}\overset{\substack{r_4-r_3\\r_3-r_2}}{=}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&a+b&a+b+c\\0&0&a&2a+b\\0&0&a&3a+b\end{vmatrix}$$

$$\overset{r_4-r_3}{=}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&a+b&a+b+c\\0&0&a&2a+b\\0&0&0&a\end{vmatrix}=a^4.$$

§3.行列式展开定理

1. 余子式与代数余子式

(1) **余子式**：n 阶行列式中 a_{ij} 所在行与列划去后留下的元素按原顺序排成的 $n-1$ 阶行列式，叫做 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}.

例．已知 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，则 $M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

(2) **代数余子式**：a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

例．已知 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，则 $A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

【注】M_{ij}，A_{ij} 与 a_{ij} 的位置有关，与 a_{ij} 的值无关.

【例 1.5】已知 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

(1) 求第一行元素对应的三个余子式;

(2) 求第一行元素对应的三个代数余子式.

【答案】(1) $0,-4,-2$；(2) $0,4,-2$.

【解析】(1) $M_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=0$，$M_{12}=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-4$，$M_{13}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-2$；

(2) $A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=0$，$A_{12}=-\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=4$，$A_{13}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-2$.

2. 行列式展开定理

行列式等于它的某一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和.

例．$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}.$$

【例 1.6】计算下列行列式

（1）$D=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda+3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}$；

【答案】$(\lambda+1)^3$.

【解析】行列式按第三行展开，得

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda+3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ \lambda+3 & -3 \end{vmatrix}+(-1)^{3+3}(\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -5 & \lambda+3 \end{vmatrix}=(\lambda+1)^3.$$

（2）$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$；

【答案】40.

【解析】$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}\overset{c_1-2c_3}{\underset{c_4+c_3}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

$$\overset{r_2+r_1}{=\!=}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}=40.$$

（3）$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 & -7 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ -4 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

【答案】-358.

【解析】 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 & -7 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ -4 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3-3c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -8 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -9 & 3 \\ -4 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -8 & -7 \\ 1 & -9 & 3 \\ -4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

$\xlongequal[r_3+4r_2]{r_1-3r_2} -\begin{vmatrix} 0 & 19 & -16 \\ 1 & -9 & 3 \\ 0 & -39 & 14 \end{vmatrix} = -(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 19 & -16 \\ -39 & 14 \end{vmatrix} = -358$.

推论一： 行列式某一行（列）的元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积之和等于0.

例．已知 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，则 $a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0$.

推论二： 行列式 D 中某一行（列）的代数余子式的线性组合等于一个新的行列式 D'，D' 是将 D 在该行（列）的元素用代数余子式前面的系数替换后的新行列式.

例．已知 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，则 $xA_{11}+yA_{12}+zA_{13}=\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，

已知 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，则 $xA_{12}+yA_{22}+zA_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & x & a_{13} \\ a_{21} & y & a_{23} \\ a_{31} & z & a_{33} \end{vmatrix}$.

【例 1.7】 已知 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$，

（1）$A_{12}+2A_{22}+3A_{32}$；（2）求第 2 行各元素代数余子式之和.

【答案】（1）-10；（2）-2.

【解析】（1）$A_{12}+2A_{22}+3A_{32}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -10$；

（2）$A_{21}+A_{22}+A_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -2$.

§4.典型行列式的计算

1. 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^{\ 2} & a_2^{\ 2} & a_3^{\ 2} & \cdots & a_n^{\ 2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{\ n-1} & a_2^{\ n-1} & a_3^{\ n-1} & \cdots & a_n^{\ n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)$$

【例 1.8】求行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$.

【答案】24.

【解析】$D=2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}=2(2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3)=24$.

【例 1.9】计算 $D_4=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \end{vmatrix}$.

【答案】-120.

【解析】$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+r_1} 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3\leftrightarrow r_2 \\ r_2\leftrightarrow r_1}]{r_4\leftrightarrow r_3} -10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix}$

$=-10(2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3)=-120$.

2. 累加型行列式（各行（列）元素之和相等的行列式）

【例 1.10】求行列式 $D=\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4+a \end{vmatrix}$.

【答案】$(10+a)a^3$.

【解析】

$$D \overset{r_1+r_2+r_3+r_4}{=} (10+a)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&2+a&2&2\\3&3&3+a&3\\4&4&4&4+a\end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-2r_1\\r_3-3r_1\\r_4-4r_1}}{=} (10+a)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&a&0&0\\0&0&a&0\\0&0&0&a\end{vmatrix} = (10+a)a^3.$$

3. 爪形行列式

【例 1. 11】求行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&0&0\\1&0&3&0\\1&0&0&4\end{vmatrix}$.

【答案】-2.

【解析】 $D=2\cdot3\cdot4\begin{vmatrix}1&1&1&1\\\frac{1}{2}&1&0&0\\\frac{1}{3}&0&1&0\\\frac{1}{4}&0&0&1\end{vmatrix} \overset{r_1-r_2-r_3-r_4}{=} 24\begin{vmatrix}-\frac{1}{12}&0&0&0\\\frac{1}{2}&1&0&0\\\frac{1}{3}&0&1&0\\\frac{1}{4}&0&0&1\end{vmatrix}=-2$.

4. 点斜式行列式

【例 1.12】计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a&b&0&\cdots&0&0\\0&a&b&\cdots&0&0\\0&0&a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a&b\\b&0&0&\cdots&0&a\end{vmatrix}$.

【答案】$a^n+(-1)^{n+1}b^n$.

【解析】将 D_n 按照第一列或者第 n 行展开即可，下面将 D_n 按照第一列展开进行解析，

$$D_n = a\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} + b\cdot(-1)^{n+1}\cdot\begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix} = a^n + (-1)^{n+1}b^n .$$

5. 三对角线行列式

【例 1.13】求行列式 $D_5=\begin{vmatrix} 4 & 3 & & & \\ 1 & 4 & 3 & & \\ & 1 & 4 & 3 & \\ & & 1 & 4 & 3 \\ & & & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

【答案】364.

【解析】将 D_5 按照第一行展开，得 $D_5 = 4D_4 - 3D_3$，

法一： $D_5 - D_4 = 3(D_4 - D_3) = 3^2(D_3 - D_2) = 3^3(D_2 - D_1) = 3^3\left(\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 4\right) = 3^5$，所以

$D_5 - D_4 = 3^5, D_4 - D_3 = 3^4, D_3 - D_2 = 3^3, D_2 - D_1 = 3^2$，对上面式子求和，得

$D_5 - D_1 = 3^5 + 3^4 + 3^3 + 3^2$， 故

$$D_5 = 3^5 + 3^4 + 3^3 + 3^2 + 4 = 3^5 + 3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 1 = \frac{1-3^6}{1-3} = 364.$$

法二:由 $D_5 = 4D_4 - 3D_3$ 可得：

$$D_5 - D_4 = 3(D_4 - D_3) = 3^2(D_3 - D_2) = 3^3(D_2 - D_1) = 3^3\left(\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 4\right) = 3^5,$$

$D_5 - 3D_4 = D_4 - 3D_3 = D_3 - 3D_2 = D_2 - 3D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 3\times 4 = 1$，联立方程组

$\begin{cases} D_5 - D_4 = 3^5 \\ D_5 - 3D_4 = 1 \end{cases}$ 解得 $D_5 = \dfrac{3^6 - 1}{2} = 364$.