第三章 微分中值定理及导数应用

考试内容

微分中值定理 函数单调性的判别 函数的极值 函数图形的凹凸性、拐点及渐近线 函数图形的描绘 函数的最大值与最小值 弧微分 曲率的概念 曲率圆与曲率半径（数一、数二）

考试要求

1. 理解并会用罗尔（Rolle）定理、拉格朗日（Lagrange）中值定理和泰勒（Taylor）定理, 了解并会用柯西（Cauchy）中值定理.

2. 理解函数的极值概念, 掌握用导数判断函数的单调性和求函数极值的方法, 掌握函数最大值和最小值的求法及其应用.

3. 会用导数判断函数图形的凹凸性（注：在区间 (a,b) 内, 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数. 当 $f''(x)>0$ 时，$f(x)$ 的图形是凹的；当 $f''(x)<0$ 时，$f(x)$ 图形是凸的），会求函数图形的拐点以及水平、铅直和斜渐近线, 会描绘函数的图形.

4. 了解曲率、曲率圆与曲率半径的概念, 会计算曲率和曲率半径.（数一、数二）

§1.微分中值定理

一、费马引理

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U\left(x_0,\delta\right)$ 内有定义, 并且在 x_0 处可导, 如果对任意 $x\in U\left(x_0,\delta\right)$ 有 $f(x)\leqslant f(x_0)$（或 $f(x)\geqslant f(x_0)$）, 则 $f'\left(x_0\right)=0$.

【注】本定理可理解为可导函数取得极值的必要条件.

二、 罗尔中值定理

设函数 $f(x)$ 满足:在闭区间 $\left[a,b\right]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内可导, 且 $f(a)=f(b)$, 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f'(\xi)=0.$$

【注】当 $f(x)$ 不恒为常数时，ξ 点可理解为 $f(x)$ 的极值点.

【例 3.1】如果函数 $f(x)$ 在 $\left[0,3\right]$ 上连续, 在 $(0,3)$ 内可导， $f(0)+f(1)+f(2)=3$ 且

$f(3)=1$, 证明:存在$\xi\in(0,3)$, 使得 $f'(\xi)=0.$

【证明】函数 $f(x)$ 在$[0,2]$上连续, 设 $f(x)$ 在$[0,2]$上的最小值为m, 最大值为M .

则$m\leqslant f(0)\leqslant M$, $m\leqslant f(1)\leqslant M$, $m\leqslant f(2)\leqslant M$,

所以$3m\leqslant f(0)+f(1)+f(2)\leqslant 3M$, 即$m\leqslant\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\leqslant M$,

所以$m\leqslant 1\leqslant M$, 由介值定理的推论知, 存在$\eta\in[0,2]$, 使得 $f(\eta)=1.$

所以, $f(\eta)=f(3)=1$, 由罗尔定理知, 存在$\xi\in(\eta,3)\subset(0,3)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

【例 3. 2】设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续, 在$(0,1)$内可导, 且 $f(0)=0$, $f(1)=\dfrac{1}{2}$, 证明:存在$\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=\xi.$

【证明】令$F(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}x^2$, 则$F(x)$在$[0,1]$上连续, 在$(0,1)$内可导. 又

$$F(0)=f(0)-0=f(0)=0,\quad F(1)=f(1)-\frac{1}{2}=0,$$

故$F(0)=F(1)$, 由罗尔定理知, 存在$\xi\in(0,1)$, 使得$F'(\xi)=0$, 即 $f'(\xi)=\xi$.

【例 3. 3】若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数, 且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$, 其中 $a<x_1<x_2<x_3<b$, 证明:在(x_1,x_3)内至少存在一点ξ, 使得 $f''(\xi)=0.$

【证明】因为 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$, 由罗尔定理知, $\exists\xi_1\in(x_1,x_2)$, 使得 $f'(\xi_1)=0$, 同理, $\exists\xi_2\in(x_2,x_3)$, 使得 $f'(\xi_2)=0$. 从而有 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$, 由罗尔定理知, 存在一点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$, 使得 $f''(\xi)=0.$

【例 3. 4】不用求出函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数, 说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根, 并指出它们所在的区间.

【答案】3个, 分别介于$(1,2),(2,3),(3,4)$内.

【解析】 因为 $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)$，由罗尔定理知，$\exists\xi_1\in(1,2),\exists\xi_2\in(2,3),\exists\xi_3\in(3,4)$, 使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$，又 $f(x)$ 是关于 x 的四次多项式, 则 $f'(x)$ 是关于 x 的三次多项式，$f'(x)=0$ 最多有 3 个实根. 综上，$f'(x)=0$ 只有 3 个实根, 分别介于 $(1,2),(2,3),(3,4)$ 内.

三、拉格朗日中值定理

设函数 $f\left(x\right)$ 满足:在闭区间 $\left[a,b\right]$ 上连续, 在开区间 $\left(a,b\right)$ 内可导, 则在 $\left(a,b\right)$ 内至少存在一点 $\xi\in\left(a,b\right)$, 使得

$$\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}=f'\left(\xi\right).$$

【注】 拉格朗日中值定理也可写为 $f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0+\theta\Delta x\right)\cdot\Delta x$, $(0<\theta<1)$.

【例 3. 5】 请证明拉格朗日中值定理.

【证明】 令 $F\left(x\right)=f\left(x\right)-\dfrac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}x$, 经验证，$F(a)=F(b)$, 由罗尔定理知, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $F'(\xi)=0$, 即 $f'\left(\xi\right)=\dfrac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}$.

【例 3. 6】 设 $b>a>0$, 证明：$\dfrac{b-a}{b}<\ln b-\ln a<\dfrac{b-a}{a}$.

【证明】 令 $f(x)=\ln x\ (x>0)$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导, 由拉格朗日中值定理得，$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\xi\in(a,b)$, 即 $\ln b-\ln a=\dfrac{1}{\xi}(b-a)$, 又 $\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{a}$, 所以 $\dfrac{b-a}{b}<\ln b-\ln a<\dfrac{b-a}{a}$.

【例 3. 7】 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\mathrm{e}$, 又

$\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-k}{x+k}\right)^x$, 求常数 k.

【答案】$k=-\dfrac{1}{2}$.

【解析】由拉格朗日中值定理可知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}f'(\xi)=\lim\limits_{\xi\to\infty}f'(\xi)=\mathrm{e}$，其中 $x<\xi<x+1$. 又 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-k}{x+k}\right)^x=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\frac{x-k}{x+k}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\frac{x-k}{x+k}-1\right)}=\mathrm{e}^{-2k}$，故 $-2k=1$，即 $k=-\dfrac{1}{2}$.

四、 柯西中值定理

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足：在闭区间 $[a,b]$ 上皆连续，在开区间 (a,b) 内皆可导，对任意 $x\in(a,b)$，$g'(x)\neq 0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

【注】当 $g(x)=x$ 时，柯西中值定理即为拉格朗日中值定理.

【例 3. 8】设 $0<a<b$，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\dfrac{b}{a}$.

【证明】构造函数 $g(x)=\ln x$，依题意，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，由柯西中值定理得，存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$，即

$\dfrac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}=\dfrac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}$，整理可得 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\dfrac{b}{a}$.，证毕.

§2.泰勒公式

一、（带佩亚诺余项）泰勒中值定理

若函数 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数, 那么对 $\forall x \in U(x_0)$ 有：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n]$$

我们称上式为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的带佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式, 其中 $o[(x-x_0)^n]$ 叫佩亚诺余项.

当 $x_0=0$ 时, 也称上式为带佩亚诺余项的麦克劳林公式, 即

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n).$$

【例 3. 9】 $y=2^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 的系数是__________.

【答案】 $\dfrac{\ln^n 2}{n!}$.

【解析】 $y^{(n)}=2^x\ln^n 2$, $y^{(n)}(0)=\ln^n 2$, x^n 的系数 $a_n=\dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{\ln^n 2}{n!}$.

【注】 几个常用函数的带有佩亚诺余项的麦克劳林公式：

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

或 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1})$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

$$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

【例 3. 10】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1-\ln(1+x)}{x^2}$.

【答案】1.

【解析】原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1-\left[x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2+o(x^2)}{x^2}=1$.

【例 3. 11】当 $x\to0$ 时，$\ln(1+x)-(ax+bx^2)$ 与 x^2 等价，求 a,b.

【答案】$a=1,b=-\frac{3}{2}$.

【解析】$\ln(1+x)-(ax+bx^2)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-(ax+bx^2)$

$=(1-a)x-(b+\frac{1}{2})x^2+o(x^2)$, 故 $1-a=0,-(b+\frac{1}{2})=1$, 所以 $a=1,b=-\frac{3}{2}$.

二、（带拉格朗日余项）泰勒中值定理

若函数 $f(x)$ 在包含 x_0 的某个区间 (a,b) 内具有 $n+1$ 阶导数, 则对任意 $x\in(a,b)$, 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

我们称上式为函数在点 x_0 处的带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式, 其中

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

为拉格朗日余项.

【例 3. 12】求函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ 在 $x=0$ 处带有拉格朗日余项的 n 阶泰勒展开式.

【答案】 $f(x)=1-2x+2x^2+\cdots+2(-1)^n x^n+\dfrac{2(-1)^{n+1}}{(1+\xi)^{n+2}}x^{n+1}$.

【解析】 $f(x)=\dfrac{2}{1+x}-1$，$f(0)=1$, 当 $n\geqslant 1$ 时，$f^{(n)}(x)=\dfrac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$,

$f^{(n)}(0)=2(-1)^n n!$，x^n 的系数 $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=2(-1)^n$, 所以

$$f(x)=1-2x+2x^2+\cdots+2(-1)^n x^n+\frac{2(-1)^{n+1}}{(1+\xi)^{n+2}}x^{n+1}.$$

§3.导数的微分学应用

一、函数的单调性

定理： 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导.

（1）如果在 (a,b) 内 $f'(x) \geqslant 0$ 且等号仅在有限多个点处成立, 那么函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加;

（2）如果在 (a,b) 内 $f'(x) \leqslant 0$ 且等号仅在有限多个点处成立, 那么函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少;

（3）如果在 (a,b) 内 $f'(x) \equiv 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是一个常数.

【例 3. 13】 证明: $\arctan x + \operatorname{arccot} x \equiv \dfrac{\pi}{2}$.

【证明】 设 $f(x) = \arctan x + \operatorname{arccot} x$, 则它在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 可导, 且 $f'(x) \equiv 0$,

故 $f(x) \equiv C = f(0) = \arctan 0 + \operatorname{arccot} 0 = \dfrac{\pi}{2}$, 即 $\arctan x + \operatorname{arccot} x \equiv \dfrac{\pi}{2}$.

【例 3. 14】 证明下列不等式:（1）$\ln(1+x) \leqslant x \ (x>-1)$;（2）$e^x - 1 \geqslant x$.

【证明】（1）设 $f(x) = \ln(1+x) - x \ (x>-1)$, 则 $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = -\dfrac{x}{1+x}$, 于是在 $(-1,0)$ 上 $f'(x)>0$, $f(x)$ 单增, 在 $(0,+\infty)$ 上 $f'(x)<0$, $f(x)$ 单减, $f(x) \leqslant f(x)_{\max} = f(0) = 0$, 即 $\ln(1+x) \leqslant x$, 且仅当 $x=0$ 时取等;

（2）设 $f(x) = e^x - x - 1$, 则 $f'(x) = e^x - 1$, 于是在 $(-\infty,0)$ 上 $f'(x)<0$, $f(x)$ 单减, 在 $(0,+\infty)$ 上 $f'(x)>0$, $f(x)$ 单增, $f(x) \geqslant f(x)_{\min} = f(0) = 0$, 即 $e^x - 1 \geqslant x$, 当且仅当 $x=0$ 时取等.

二、函数的极值与最值

1. 极值的定义

设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义, 若对于去心邻域 $\overset{o}{U}(x_0)$ 内的任一 x, 有

$$f(x)<f(x_0)\ \left(f(x)>f(x_0)\right),$$

那么就称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的一个极大值（或极小值），称 $x=x_0$ 为一个极大值点（或极小值点）.

2. 极值存在的必要条件（可导情形）

设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的一个极值点, 则 $f'(x_0)=0$.

【注】 我们称满足 $f'(x_0)=0$ 的点 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的驻点.

3. 极值存在的充分条件

第一充分条件： 设 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 且在 x_0 的去心邻域 $\overset{o}{U}(x_0)$（即 $\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}$）内可导,

（1）如果 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时 $f'(x)>0$, 而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时 $f'(x)<0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值;

（2）如果 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时 $f'(x)<0$, 而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时 $f'(x)>0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值;

（3）如果 $f'(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 和 $(x_0,x_0+\delta)$ 内的符号相同, 则 $f(x)$ 在 x_0 处没有极值.

【例 3. 15】 当 $x=$____时, 函数 $y=x\cdot 2^x$ 取得极小值.

【答案】 $-\dfrac{1}{\ln 2}$.

【解析】 由于 $y=x\cdot 2^x$ 处处可导, 根据极值的必要条件可知, 只要令 $y'=0$, 即 $2^x+x\cdot 2^x\ln 2=0$, 解得 $x=-\dfrac{1}{\ln 2}$（虽然尚未验证这是极小值点, 但这是唯一可能的极值点, 即为所求）.

【例 3. 16】 求 $f(x)=\dfrac{2}{3}x-(x-1)^{\frac{2}{3}}$ 的单调区间和极值.

【答案】 增区间 $(-\infty,1),(2,+\infty)$, 减区间 $(1,2)$, 极大值 $f(1)=\dfrac{2}{3}$, 极小值 $f(2)=\dfrac{1}{3}$.

【解析】 令 $f'(x)=\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}=0$ 得驻点 $x=2$, 另有不可导点 $x=1$.

在 $(-\infty,1)$ 上 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单增；在 $(1,2)$ 上 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单减；在 $(2,+\infty)$ 上 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单增.

所以增区间是 $(-\infty,1),(2,+\infty)$，减区间是 $(1,2)$，极大值是 $f(1)=\dfrac{2}{3}$，极小值是 $f(2)=\dfrac{1}{3}$.

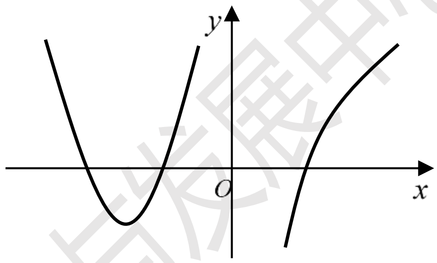
【例 3. 17】设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则 $f(x)$ 有（　）

（A）一个极小值点和两个极大值点.

（B）两个极小值点和一个极大值点.

（C）两个极小值点和两个极大值点.

（D）三个极小值点和一个极大值点.



【答案】（C）.

【解析】函数的极值点可能是驻点（一阶导数为零）或导数不存在的点，极值点是极大值点还是极小值点可进一步由取极值的第一或第二充分条件判定.

根据导函数的图形可知，一阶导数为零的点即导函数与 x 轴的交点有 3 个；而 $x=0$ 是导数不存在的点.

3 个一阶导数为零的点左右两侧导数符号均不一致，故必为极值点，其中第一个交点左右两侧导数符号由正变为负，是极大值点；第二个交点和第三个交点左右两侧导数符号由负变为正，是极小值点，则三个驻点中有两个极小值点，一个极大值点；

对导数不存在的点：$x=0$ 左侧一阶导数为正，右侧一阶导数为负，可见 $x=0$ 为极大值点.

故 $f(x)$ 共有两个极小值点和两个极大值点，应选（C）.

第二充分条件：设函数 $f(x)$ 在 x_0 处有二阶导数，且 $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)\neq 0$，则

（1）当 $f''(x_0)<0$ 时，$f(x_0)$ 为极大值，$x=x_0$ 为极大值点；

（2）当 $f''(x_0)>0$ 时，$f(x_0)$ 为极小值，$x=x_0$ 为极小值点.

【例 3. 18】函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^2-xy+x^2-3=0$ 确定，求 $f(x)$ 的驻点，并判断其是否为极值点.

【答案】驻点 $x=\pm1$;极大值点 $x=1$,极小值点 $x=-1$.

【解析】方程两端同时对 x 求导,得 $2yy'-y-xy'+2x=0$,令 $y'=0$ 得 $y=2x$,代回原方程,得驻点 $x=\pm1$.

继续对 x 求导,得 $2y'y'+2yy''-y'-y'-xy''+2=0$,

当 $x=1$ 时,$y=2$,$y'=0$,$y''=-\dfrac{2}{3}<0$,$x=1$ 是极大值点;

当 $x=-1$ 时,$y=-2$,$y'=0$,$y''=\dfrac{2}{3}>0$,$x=-1$ 是极小值点.

【例 3.19】函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续,且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=-1$,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处( )

(A)不可导.　　　　　　(B)可导且导数不为零.

(C)取极大值.　　　　　(D)取极小值.

【答案】(C).

【解析】由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$ 存在,得 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$,又 $f(x)$ 连续,得 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$,

所以 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}\cdot x=0$,(A)与(B)均不对;

又 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=-1<0$,所以在 $x=0$ 的去心邻域内 $\dfrac{f(x)}{x^2}<0$,即 $f(x)<0=f(0)$,由极值的定义知,$f(0)$ 是极大值.

4. 闭区间上连续函数的最大值和最小值

a. 求出 $f(x)$ 在 (a,b) 内的驻点及不可导点;

b. 计算 $f(x)$ 在上述驻点、不可导点处的函数值及 $f(a),f(b)$;

c. 比较(**b**)中诸值的大小,其中最大的便是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值,最小的便是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值.

三、曲线的凹凸性与拐点

1. 凹凸性的定义:设 $f(x)$ 在区间 I 上连续,若对任意不同的两点 x_1,x_2,恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凸的．若恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凹的．

在几何上，曲线 $y=f(x)$ 上任意两点的割线在曲线下（上）面，则 $y=f(x)$ 的图形是凸（凹）的．如果曲线 $y=f(x)$ 有切线的话，每一点的切线都在曲线之上（下），则 $y=f(x)$ 的图形是凸（凹）的．

2. 凹凸性的判定

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数，那么

（1）如果在 (a,b) 内 $f''(x)<0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸的；

（2）如果在 (a,b) 内 $f''(x)>0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹的．

【注】凹凸性与区间有关．

3. 拐点的定义:连续曲线上凹弧与凸弧的分界点，称为曲线的拐点．

4. 拐点的必要条件（二阶可导情形）

设函数 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导，且 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的一个拐点，则 $f''(x_0)=0$．

5. 拐点的充分条件

第一充分条件：设 $f(x)$ 在 x_0 处连续，且在 x_0 的去心邻域 $\overset{o}{U}(x_0)$（即 $\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}$）内二阶可导，

（1）如果 $f''(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0)$ 与 $(x_0, x_0+\delta)$ 内的符号不一致，则 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一个拐点；

（2）如果 $f''(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0)$ 与 $(x_0, x_0+\delta)$ 内的符号一致, 则 $(x_0, f(x_0))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

第二充分条件：设函数 $f(x)$ 在 x_0 处有二阶导数, 且 $f''(x_0)=0, f'''(x_0)\neq 0$, 则 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一个拐点.

【例 3. 20】 求曲线 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ 的凹凸区间及拐点.

【答案】 凸区间为 $(-\infty,0)$, 凹区间为 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$, 拐点为 $(0,0)$.

【解析】 由 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$, 得 $y'=\dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$, $y''=\dfrac{6x}{(x-1)^4}$, 列表讨论如下：

x	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
y''	$-$	$+$	$+$
y	凸	凹	凹

由此可知, 函数图形在区间 $(-\infty,0)$ 内是凸的， 在区间 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 内是凹的， 拐点为 $(0,0)$.

【例 3. 21】 设函数 $f(x)=|x(1-x)|$, 则（　）

（A） $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（B） $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

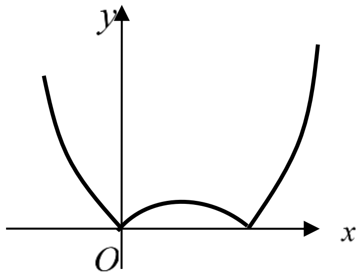
（C） $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（D） $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

【答案】 选（C）.

【解析】方法一： 由于是选择题, 可以用图形法解决, 令 $\varphi(x)=x(x-1)$,

则 $\varphi(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$, 是以直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 为对称轴、顶点坐标为 $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{4}\right)$、开口向上的一条抛物线, 与 x 轴的交点坐标为 $(0,0),(1,0)$, $y=f(x)=|\varphi(x)|$ 的图形如图:



$x=0$ 是极小值点; 又在点 $(0,0)$ 左侧邻近曲线是凹的, 右侧邻近曲线是凸的, 所以点 $(0,0)$ 是拐点, 选（C）.

方法二： 在 $x=0$ 的足够小的去心邻域内, $f(x)=\begin{cases} x^2-x, x<0, \\ x-x^2, x>0, \end{cases}$ 故

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-1, x<0, \\ 1-2x, x>0, \end{cases} \quad f''(x)=\begin{cases} 2, \ x<0, \\ -2, x>0, \end{cases}$$

因此, $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 在 $x=0$ 的左右两侧都异号, 所以, $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

四、渐近线

1. 铅直渐近线

若 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\infty$, 则 $x=a$ 为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线.

2. 水平渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$, 则 $y=b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

3. 斜渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\ (a\neq 0)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$

或 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\ (a\neq 0)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=b$, 则 $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

【注】在自变量的同一变化过程中，水平渐近线与斜渐近线不会同时存在.

【例 3. 22】求曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 的渐近线.

【答案】$x=0$ 是铅直渐近线，$y=0$ 是水平渐近线，$y=x$ 是斜渐近线.

【解析】$\lim\limits_{x\to0^+}\left[\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]=+\infty$，所以 $x=0$ 是铅直渐近线；

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]=0$，所以 $y=0$ 是水平渐近线；

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}\right]=0+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)-x\right]=0+\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(1+\mathrm{e}^x)-x\right]$$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(1+\mathrm{e}^x)-\ln\mathrm{e}^x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}=0$，所以 $y=x$ 是斜渐近线.

【例 3. 23】当 $x>0$ 时，曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$（　）

（A）有且仅有水平渐近线.　　（B）有且仅有铅直渐近线.

（C）既有水平渐近线，又有铅直渐近线.　　（D）既无水平渐近线，又无铅直渐近线.

【答案】（A）.

【解析】先看水平渐近线：$\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\dfrac{1}{x}=1$，故 $y=1$ 为其水平渐近线；又根据水平渐近线与斜渐近线在自变量的同一变化过程中不会同时存在，从而该曲线无斜渐近线；又 $\lim\limits_{x\to0^+}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，故曲线无铅直渐近线. 综上正确选项为（A）.

【例 3. 24】曲线 $y=\dfrac{1+\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}$（　）

（A）没有渐近线.　　（B）仅有水平渐近线.

（C）仅有铅直渐近线.　　（D）既有水平渐近线又有铅直渐近线.

【答案】（D）.

【解析】先来看水平渐近线：因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=1$，所以曲线有水平渐近线$y=1$；又根据水平渐近线与斜渐近线在自变量的同一变化过程中不会同时存在，从而该曲线无斜渐近线；再看铅直渐近线：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=\infty$，所以$x=0$是曲线的铅直渐近线.

综上可知正确选项为（D）.

【例 3. 25】曲线$y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$的斜渐近线方程为____________.

【答案】$y=2x+1$.

【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(2-\dfrac{1}{x})e^{\frac{1}{x}}=2$，$\lim\limits_{x\to\infty}(y-2x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(2x-1)e^{\frac{1}{x}}-2x\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[2x(e^{\frac{1}{x}}-1)-e^{\frac{1}{x}}\right]=\lim_{x\to\infty}2x(e^{\frac{1}{x}}-1)-\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}2x\cdot\frac{1}{x}-1=1,$$

所以斜渐近线方程为$y=2x+1$.

五、弧微分和曲率（数一、数二）

1. 弧微分：弧微分公式$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$

2. 曲率：设曲线的方程为$y=f(x)$，且$f(x)$具有二阶导数，则曲线在点$M(x,y)$处的曲率为$K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$（曲率越大，曲线越弯曲），$\rho=\dfrac{1}{K}$叫做曲线在点$M(x,y)$处的曲率半径.

【例 3. 26】曲线$\begin{cases}x=t^2+7,\\ y=t^2+4t+1\end{cases}$上对应于$t=1$的点处的曲率半径是（　）

（A）$\dfrac{10}{\sqrt{50}}$.　（B）$\dfrac{\sqrt{10}}{100}$.　（C）$10\sqrt{10}$.　（D）$5\sqrt{10}$.

【答案】（C）.

【解析】$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1}=\left.\dfrac{2t+4}{2t}\right|_{t=1}=3$，$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=\left.\dfrac{-\frac{2}{t^2}}{2t}\right|_{t=1}=-1$，故

$K=\left.\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{t=1}=\frac{\sqrt{10}}{100}$, 从而 $\rho=\frac{1}{K}=10\sqrt{10}$, 故选择（C）.

3. 曲率圆：在曲线 $y=f(x)$ 上点 M 处的法线上, 在凹的一侧取一点 D, 使 $|DM|=\frac{1}{K}=\rho$, 以 D 为圆心、 ρ 为半径作圆，这个圆叫做曲线在点 M 处的曲率圆. 曲率圆与曲线 $y=f(x)$ 在点 M 处有相同的切线和曲率.