第二章 矩阵

考试内容

矩阵的概念 矩阵的线性运算 矩阵的乘法 方阵的幂 方阵乘积的行列式 矩阵的转置 逆矩阵的概念和性质 矩阵可逆的充分必要条件 伴随矩阵 矩阵的初等变换 初等矩阵 矩阵的秩 矩阵的等价 分块矩阵及其运算

考试要求

1．理解矩阵的概念，了解单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、三角矩阵、对称矩阵和反对称矩阵以及它们的性质．

2．掌握矩阵的线性运算、乘法、转置以及它们的运算规律，了解方阵的幂与方阵的乘积的行列式的性质．

3．理解逆矩阵的概念，掌握逆矩阵的性质以及矩阵可逆的充分必要条件，理解伴随矩阵的概念，会用伴随矩阵求逆矩阵．

4．理解矩阵初等变换的概念，了解初等矩阵的性质和矩阵等价的概念，理解矩阵的秩的概念，掌握用初等变换求矩阵的秩和逆矩阵的方法．

5．了解分块矩阵及其运算．

§1.矩阵的概念

1. 矩阵的定义

由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m\times n$ 矩阵，记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$\boldsymbol{A}$，$\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ 或 $\left(a_{ij}\right)$，其中 a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 (i,j) 元素或 (i,j) 元．如果两个矩阵的行数相等、列数也相等，则称它们为**同型矩阵**．如果两个矩阵是同型矩阵，且对应元素相等，则称这两个**矩阵相等**．在不引起混淆的情况下，我们一般用大写字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 表示一个矩阵.

2. 特殊的矩阵

（1）行（列）矩阵：只有一行（列）的矩阵，又称为行（列）向量，一般用小写希腊字母 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 表示.

例：$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

（2）**零矩阵：**元素都是零的矩阵称为零矩阵，一般用大写字母$\boldsymbol{O}$表示.

（3）n**阶矩阵（方阵）：**行数与列数都等于n的矩阵称为n阶矩阵或n阶方阵.

【注】以下特殊矩阵均为方阵.

（4）**对角矩阵：**不在主对角线上的元素都是0的矩阵，简称对角阵，一般用大写希腊字母$\boldsymbol{\Lambda}$表示.

例：$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}$.

（5）**单位矩阵：**在主对角线上的元素都是1，其它元素都是0，一般用大写字母$\boldsymbol{E}$表示.

例：$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

（6）**数量矩阵：**主对角线上元素都相等的对角矩阵. 一般用$\lambda\boldsymbol{E}$表示.

例：$\lambda\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$.

（7）**上（下）三角矩阵：**

例：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

（8）**对称矩阵：**满足$a_{ij}=a_{ji}$的方阵.

例：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & x & y \\ x & b & z \\ y & z & c \end{pmatrix}$.

（9）**反对称矩阵：**满足$a_{ij}+a_{ji}=0$的方阵.

例：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix}$.

§2.矩阵的运算

1. 矩阵的加法

同型的两个矩阵方可相加，加法的法则是每个位置对应元素相加.

例：$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$.

矩阵的加法满足下列运算规律：

（1）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.　　（2）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

【例 2.1】填空

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & 9 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$；

（2）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & 9 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$.

【答案】（1）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$，（2）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 7 & 9 \end{vmatrix}$.

【解析】

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & 9 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$.

（2）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & 9 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 7 & 9 \end{vmatrix}$.

2. 矩阵的数乘

$k\boldsymbol{A}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 中每个元素都乘以 k.

例. $k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$.

矩阵的数乘满足下列运算规律:

(1) $(kl)\boldsymbol{A} = k(l\boldsymbol{A})$. (2) $(k+l)\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{A} + l\boldsymbol{A}$. (3) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = k\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{B}$.

【例 2.2】已知 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$, $|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$则下列选项正确的是( )

① $\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{A}$; ② $\boldsymbol{B} = 4\boldsymbol{A}$; ③ $|\boldsymbol{B}| = 2|\boldsymbol{A}|$; ④ $|\boldsymbol{B}| = 4|\boldsymbol{A}|$.

(A) ①③. (B) ②③. (C) ①④. (D) ②④.

【答案】(C).

【解析】数乘一个矩阵是将这个数乘进矩阵的每一个元素,数乘一个行列式,只能将此行列式的某一行或者某一列乘上这个数.

3. 矩阵的乘法

$$\boldsymbol{A}_{m\times s}\boldsymbol{B}_{s\times n} = \boldsymbol{C}_{m\times n}$$

两矩阵相乘,左边矩阵的列数要与右边矩阵的行数相等. 其中,$\boldsymbol{C}_{m\times n}$ 的第 i 行第 j 列的元素 $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj}$ ($i = 1,2,\cdots,m$, $j = 1,2,\cdots,n$).

例:已知 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$.

矩阵的乘法满足下列运算规律:

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$.

(2) $k(\boldsymbol{AB}) = (k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$.

(3) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC}$, $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{CA} + \boldsymbol{CB}$.

【注 1】矩阵乘法不满足交换律,即在一般情形下, $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 不一定相等(若方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换);

【注 2】 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}$ 可交换,即 $\boldsymbol{AE} = \boldsymbol{EA} = \boldsymbol{A}$;

【注 3】矩阵乘法不满足消去律.

【例 2.3】已知 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

【答案】 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}-16 & -32\\ 8 & 16\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

【解析】 略.

【例 2.4】 计算 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$.

【答案】 $\begin{pmatrix}x_1+2x_2+3x_3\\ 2x_1+x_2+x_2\\ x_1+x_2+x_3\end{pmatrix}$.

【解析】 略.

4. 矩阵的转置

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵.

由转置的定义可知，对称矩阵即满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$ 的矩阵，反对称矩阵即满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$ 的矩阵.

矩阵的转置有以下性质：

（1）$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；（2）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；（3）$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；（4）$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

【例 2.5】 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵，证明 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 也是对称阵.

【证明】 由 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵可知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，则 $\left(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$，

得证 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 也是对称阵.

【例 2.6】 已知三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的所有元素之和.

【答案】 0.

【解析】 记 $\boldsymbol{B}=\dfrac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}$，则 $\boldsymbol{B}$ 的所有元素之和与 $\boldsymbol{A}$ 的所有元素之和相等. 因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，故 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$. 所以 $\boldsymbol{A}$ 的所有元素之和为 0.

5. 方阵的幂

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，则 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{A}$（$k$ 个 $\boldsymbol{A}$ 相乘）.

矩阵的幂满足下列运算规律：

（1）$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$；（2）$(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$.

【注】一般地，$(\boldsymbol{AB})^k$ 与 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$ 不一定相等.

【例 2.7】已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$ 求 $\boldsymbol{A}^3$.

【答案】$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

【解析】$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

$$\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

【例 2.8】已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&4&4\\1&2&2\end{pmatrix}$ 求 $\boldsymbol{A}^{2023}$.

【答案】$7^{2022}\boldsymbol{A}$.

【解析】设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$. 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=7$. 于是

$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\right)\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=7\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=7\boldsymbol{A}$. 同理

$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\right)\left(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\right)\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=7^2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=49\boldsymbol{A}$.

以此类推可得 $\boldsymbol{A}^{2023}=7^{2022}\boldsymbol{A}$.

6. 方阵的多项式

设 x 的多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{m-1}x^{m-1}+a_mx^m$，则方阵 $\boldsymbol{A}$ 的多项式

$$f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+a_m\boldsymbol{A}^m.$$

【注】一般地 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\neq\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\neq\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$，

但是$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$.

7. 方阵的行列式

由n阶方阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$的元素所构成的$n$阶行列式，称为方阵$\boldsymbol{A}$的行列式，记作$|\boldsymbol{A}|$或$\det \boldsymbol{A}$. 矩阵的行列式具有以下性质：

（1）$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\Rightarrow|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$；（2）$|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$；（3）$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$；

（4）$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$；（5）$|\boldsymbol{A}^k|=|\boldsymbol{A}|^k$.

【注 1】以上$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$均为n阶方阵.

【注 2】一般地，$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$与$|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$不一定相等.

【例 2.9】设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$，矩阵$\boldsymbol{B}$满足$\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$，其中$\boldsymbol{E}$为单位矩阵，求$|\boldsymbol{B}|$.

【答案】2.

【解析】$\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{E}\Rightarrow\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}\Rightarrow|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})|=|2\boldsymbol{E}|$

$$\Rightarrow|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=2^2|\boldsymbol{E}|\Rightarrow|\boldsymbol{B}|=\frac{4}{|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|}.$$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}，所以|\boldsymbol{B}|=2.$$

【例 2.10】设三阶方阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$满足$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，其中$\boldsymbol{E}$为单位矩阵，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$，求$|\boldsymbol{B}|$.

【答案】$\frac{1}{2}$.

【解析】$(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\Rightarrow|\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$

$$\Rightarrow|\boldsymbol{B}|=\frac{|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|}{|\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}|}=\frac{|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|}{|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})|}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|}$$

又 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-2&0&0\end{pmatrix}$， $|\boldsymbol{B}|=\dfrac{1}{2}$.

§3.伴随矩阵与逆矩阵

1. 伴随矩阵的定义

已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$，由 $|\boldsymbol{A}|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

2. 伴随矩阵的性质

（1） $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$；

（2） $(k\boldsymbol{A})^*=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$；

（3） $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$；

（4） $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$；

（5） $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$.

3. 逆矩阵的定义

对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，如果存在一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E},$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，$\boldsymbol{B}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

【注】可逆矩阵的逆矩阵是唯一的.

4. 可逆的充要条件

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件为 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

推论：若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵且满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$（或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$），则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

【例 2.11】 判断下列矩阵是否可逆，若可逆，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\3&0&3\end{pmatrix}$；　　（2）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$.

【答案】（1）不可逆，（2）可逆.

【解析】（1）$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&2&0\\3&0&3\end{vmatrix}=0\Rightarrow\boldsymbol{A}$ 不可逆；

（2）$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{vmatrix}\neq0\Rightarrow\boldsymbol{A}$ 可逆.

又 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$，故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

【例 2.12】 解矩阵方程 $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\end{pmatrix}$.

【答案】 $\begin{pmatrix}3&-2\\0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

【解析】 $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$.

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

【例 2.13】 已知 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，求 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}$.

【答案】 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$.

【解析】 $(A+E)(A^2-A+E)=A^3+E=E\Rightarrow(A+E)^{-1}=A^2-A+E$.

【例 2.14】已知 3 阶矩阵 A 满足 $AB=E-A$，判断 A 是否可逆，若可逆，求出 A 的逆矩阵.

【答案】A 可逆且 $A^{-1}=B+E$.

【解析】$AB+A=E\Rightarrow A(B+E)=E\Rightarrow A^{-1}=B+E$.

5. 逆矩阵的性质

（1）若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，且 $(A^{-1})^{-1}=A$.

（2）若 A 可逆，常数 $k\neq0$，则 kA 可逆，且 $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$.

（3）若 A 可逆，则 $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$.

（4）若 A 可逆，则 A^* 也可逆，且 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*=\frac{A}{|A|}$.

【例 2.15】设 A 为 3 阶矩阵，$|A|=\frac{1}{2}$，求 $|(2A)^{-1}-5A^*|$.

【答案】-16.

【解析】$(2A)^{-1}-5A^*=\frac{1}{2}A^{-1}-5|A|A^{-1}=-2A^{-1}$；

$$|(2A)^{-1}-5A^*|=|-2A^{-1}|=(-2)^3|A^{-1}|=-8\frac{1}{|A|}=-16.$$

【例 2.16】设 A 为 3 阶矩阵，$|A|=\frac{1}{3}$，求 $|4A-(3A^*)^{-1}|$.

【答案】9.

【解析】$4A-(3A^*)^{-1}=4A-\frac{1}{3}(A^*)^{-1}=4A-\frac{1}{3}\frac{A}{|A|}=3A$；

$$|4A-(3A^*)^{-1}|=|3A|=3^3|A|=9.$$

（5）若 A,B 为同阶可逆矩阵，则 AB 可逆，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

推广：$(A_1A_2\cdots A_m)^{-1}=A_m^{-1}A_{m-1}^{-1}\ldots A_1^{-1}$，$(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$.

（6）若 A 可逆，则 A^{T} 可逆，且 $(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

【注】$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 皆可逆，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 不一定可逆，即使 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆，一般的

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1} \neq \boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}.$$

【例 2.17】已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，求 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$，$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$.

【答案】$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}2&-1\\0&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\0&2\end{pmatrix}$.

【解析】$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$, $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}2&-1\\0&2\end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\0&2\end{pmatrix}$.

§4.分块矩阵

1. 分块矩阵的定义

用一些横线和竖线将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分成若干个小矩阵，每个小矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的子块，以子块为元素的矩阵叫做分块矩阵.

2. 分块矩阵的加法

设 $\boldsymbol{A}$ 、 $\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵，且采用相同的分块法，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 等于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 对应子块相加.

例：已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{D}_1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{B}_2\\ \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{D}_2\end{pmatrix}$， 则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2\\ \boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{D}_1+\boldsymbol{D}_2\end{pmatrix}$.

3. 分块矩阵的数乘

数与分块矩阵相乘，指这个数乘进分块矩阵的每一个子块.

例： $\lambda\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{A} & \lambda\boldsymbol{C}\\ \lambda\boldsymbol{B} & \lambda\boldsymbol{D}\end{pmatrix}$

4. 分块矩阵的乘法

矩阵可分块之后再做乘法运算，与普通矩阵乘法运算法则相同．由于矩阵乘法要求左边矩阵的列数等于右边矩阵的行数，所以要求左边矩阵的列分法和右边矩阵的行分法相同.

例：设矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \hdashline -1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 1\\ \hdashline 1 & 0 & 4 & 1\\ -1 & -1 & 2 & 0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix}$， 则

$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix}$，

其中 $A_1B_{11}+B_{21}=\begin{pmatrix}-2&4\\-1&1\end{pmatrix}$，$A_1+B_{22}=\begin{pmatrix}3&3\\3&1\end{pmatrix}$，于是 $AB=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\ \hdashline -2&4&3&3\\-1&1&3&1\end{array}\right)$.

【例 2.18】已知 A,B 是 2 阶矩阵，且 $|A|=2$，$|B|=3$，化简 $\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}O&2B^*\\3A^*&O\end{pmatrix}$.

【答案】$6E_4$.

【解析】$\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}O&2B^*\\3A^*&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3AA^*&O\\O&2BB^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6E_2&O\\O&6E_2\end{pmatrix}=6E_4$.

5. 分块矩阵的转置

先将整个矩阵转置，然后每个子块也转置.

例：$\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}^{\mathrm T}=\begin{pmatrix}A^{\mathrm T}&C^{\mathrm T}\\B^{\mathrm T}&D^{\mathrm T}\end{pmatrix}$.

6. 分块方阵的逆矩阵

（1）$\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&O\\O&B^{-1}\end{pmatrix}$；$\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{pmatrix}$

（2）$\begin{pmatrix}A&O\\D&B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&O\\-B^{-1}DA^{-1}&B^{-1}\end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix}A&&\\&B&\\&&C\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&&\\&B^{-1}&\\&&C^{-1}\end{pmatrix}$；$\begin{pmatrix}&&A\\&B&\\C&&\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}&&C^{-1}\\&B^{-1}&\\A^{-1}&&\end{pmatrix}$.

【注】其中 A、B、C 都是可逆矩阵.

【例 2.19】求下列矩阵的逆矩阵

（1）$A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&1\\0&0&3&1\end{pmatrix}$；　　（2）$A=\begin{pmatrix}0&0&2&0\\0&0&0&3\\1&5&0&0\\2&2&0&0\end{pmatrix}$.

【答案】(1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$，(2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

【解析】(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$，故

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$，故 $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. 分块方阵的行列式

设 $\boldsymbol{A}$ 是 m 阶方阵，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，则

(1) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$；

(2) $\begin{vmatrix} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

【例 2.20】求下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$.

【答案】（1）-5，（2）$(a_1a_4-b_1b_4)(a_3a_2-b_2b_3)$.

【解析】

（1）$D=(-1)^{2\times 2}\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{vmatrix}=-5$；

（2）$D\overset{r_2\leftrightarrow r_4}{=}-\begin{vmatrix}a_1 & 0 & 0 & b_1\\b_4 & 0 & 0 & a_4\\0 & b_3 & a_3 & 0\\0 & a_2 & b_2 & 0\end{vmatrix}\overset{c_2\leftrightarrow c_4}{=}\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & 0 & 0\\b_4 & a_4 & 0 & 0\\0 & 0 & a_3 & b_3\\0 & 0 & b_2 & a_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\b_4 & a_4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\b_2 & a_2\end{vmatrix}$

$=(a_1a_4-b_1b_4)(a_3a_2-b_2b_3)$.

§5.矩阵的初等变换

1. 矩阵的初等变换

（1）定义： 下列三种变换

（I）互换两行（列）；

例：$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

（II）用数$k \neq 0$乘以某一行（列）的所有元素；

例：$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{kr_1} \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

（III）把某一行（列）的所有元素的k倍加到另一行（列）对应的元素上去.

例：$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + 2r_2} \begin{pmatrix} a_{11}+2a_{21} & a_{12}+2a_{22} & a_{13}+2a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

称为矩阵的初等行（列）变换，统称为矩阵的初等变换.

（2）矩阵等价： 如果矩阵$\boldsymbol{A}$经有限次初等变换变成矩阵$\boldsymbol{B}$，则称矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$等价，记

$\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$. 矩阵的等价具有传递性，即$\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$且$\boldsymbol{B} \cong \boldsymbol{C}$，则$\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{C}$.

2. 初等变换化行阶梯形与行最简形

（1）行阶梯形矩阵： 矩阵通过初等行变换，可化为行阶梯形矩阵，其特征为可画出一条阶梯线，线的下方全是0；每个台阶只有一行，阶梯线后的第一个元素为非零元素（非零元素所在位置称为台角）. 行阶梯形矩阵不唯一.

例：$\begin{pmatrix} a & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & b & y_1 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

（2）行最简形矩阵（特殊的行阶梯形矩阵）：矩阵通过初等行变换，可化为行最简形矩阵，其特征为非零行的第一个非零元素为1，且这些1所在列的其它元素都为0．行最简形矩阵是唯一的.

例：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

【例 2.21】把下列矩阵化为行最简形

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$；

（2）$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$.

【答案】（1）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，（2）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，（3）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

【解析】（1）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_1+2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；

（2）$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_1}\begin{pmatrix}0&1&-1&2\\0&2&-3&1\\0&4&-7&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}0&1&-1&2\\0&0&-1&-3\\0&0&-3&-9\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}0&1&-1&2\\0&0&-1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}0&1&0&5\\0&0&-1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{(-1)r_2}\begin{pmatrix}0&1&0&5\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix};$$

（3）$$\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\div 2]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\2&-1&-1&1&2\\2&-3&1&-1&2\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-r_3\\r_3-2r_1}}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&2&-2&2&0\\0&-5&5&-3&-6\\0&3&-3&4&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-3r_2]{\substack{r_2\div 2\\r_3+5r_2}}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&2&-6\\0&0&0&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_3]{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

（3）标准形矩阵（特殊的行最简矩阵）：$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}_{m\times n}$ 左上角单位矩阵，其他为零．可在行最简形基础上通过初等列变换得到．标准形矩阵是唯一的．

例：$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

3. 初等矩阵

（1）定义：单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵．

（2）三种初等矩阵：

（Ⅰ）$\boldsymbol{E}$ 作变换 $r_i\leftrightarrow r_j$（或 $c_i\leftrightarrow c_j$），得初等矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}$．

例：$\boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

（Ⅱ）$\boldsymbol{E}$ 作变换 $r_i \times k$（或 $c_i \times k$）（$k \neq 0$），得初等矩阵 $\boldsymbol{E}_i(k)$.

例：$\boldsymbol{E}_2(3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

（Ⅲ）$\boldsymbol{E}$ 作变换 $r_i + kr_j$（或 $c_j + kc_i$），得初等矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}(k)$.

例：$\boldsymbol{E}_{12}(3)=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

（3）初等矩阵的运算：

（Ⅰ）初等矩阵的行列式，即单位阵做一次初等变换后的行列式.

$$\left|\boldsymbol{E}_{ij}\right|=-1，\ \left|\boldsymbol{E}_i(k)\right|=k，\ \left|\boldsymbol{E}_{ij}(k)\right|=1.$$

（Ⅱ）初等矩阵均可逆，而且初等矩阵的逆矩阵是同类型的初等矩阵.

$$\boldsymbol{E}_{ij}^{-1}=\boldsymbol{E}_{ij}，\ \boldsymbol{E}_i^{-1}(k)=\boldsymbol{E}_i(\frac{1}{k})，\ \boldsymbol{E}_{ij}^{-1}(k)=\boldsymbol{E}_{ij}(-k).$$

（Ⅲ）初等矩阵的伴随即行列式乘其逆.

$$\boldsymbol{E}_{ij}^{*}=-\boldsymbol{E}_{ij}，\ \boldsymbol{E}_i^{*}(k)=k\boldsymbol{E}_i(\frac{1}{k})，\ \boldsymbol{E}_{ij}^{*}(k)=\boldsymbol{E}_{ij}(-k).$$

（Ⅳ）初等矩阵的转置仍是初等矩阵

$$\boldsymbol{E}_{ij}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}_{ij}，\ \boldsymbol{E}_i^{\mathrm{T}}(k)=\boldsymbol{E}_i(k)，\ \boldsymbol{E}_{ij}^{\mathrm{T}}(k)=\boldsymbol{E}_{ji}(k).$$

【例 2.22】判断下列矩阵是否是初等矩阵，如果是，写出它的逆矩阵

（1）$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$；　　（2）$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$；　　　　（4）$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

【答案】（1）是，（2）不是，（3）是，（4）不是.

【解析】

（1）是倍加得到的初等矩阵，$\boldsymbol{P}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；

（2）不是；

（3）是数乘得到的初等矩阵，$\boldsymbol{P}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$；

（4）不是.

（4）初等矩阵的性质：

性质 1：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作一次行（列）变换等价于 $\boldsymbol{A}$ 的左（右）边乘以一个相应的初等矩阵.

推论 1：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作 k 次行（列）变换等价于 $\boldsymbol{A}$ 的左（右）边乘以 k 个相应的初等矩阵.

【例 2.23】已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 用 $\boldsymbol{A}$ 表示如下，根据初等矩阵的性质，用行列变换说明 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的关系

（1）$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{A}$；

（2）$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$；

（3） $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.

【答案】

（1） $\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_2+2r_3}\boldsymbol{B}$.

（2） $\boldsymbol{A}\xrightarrow{c_2\leftrightarrow c_3}\boldsymbol{B}$.

（3） $\boldsymbol{A}\xrightarrow[c_3+3c_2]{2r_2}\boldsymbol{B}$.

【解析】略.

【例 2.24】已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过如下变换变成 $\boldsymbol{B}$，根据初等矩阵的性质，用 $\boldsymbol{A}$ 表示 $\boldsymbol{B}$

（1） $\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\boldsymbol{B}$；

（2） $\boldsymbol{A}\xrightarrow{2r_1}\boldsymbol{B}$；

（3） $\boldsymbol{A}\xrightarrow{c_1-2c_3}\boldsymbol{B}$.

【答案】（1） $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{A}$.

（2） $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}$.

（3） $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$.

【解析】略.

【例 2.25】$\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_1+r_2}\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}\xrightarrow{c_2-c_1}\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{C}=$（　　）

（A）$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$　　（B）$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}$　　（C）$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$　　（D）$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$

【答案】（B）.

【解析】矩阵 $\boldsymbol{P}$ 表示将矩阵的第二行加到第一行，也可表示将矩阵的第一列加到第二列.

$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$表示将矩阵的第二行 -1 倍的加到第一行，也可表示将矩阵的第一列 -1 倍加到第二列. 由此可得 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{BP}^{-1}=\boldsymbol{C}\Rightarrow\boldsymbol{PAP}^{-1}=\boldsymbol{C}$.

【例 2.26】$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+2a_{11}&a_{32}+2a_{12}&a_{33}+2a_{13}\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{B}=$（　　）

（A）$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{A}$　　（B）$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{A}$　　（C）$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2$　　（D）$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_3$

【答案】（B）.

【解析】$\boldsymbol{A}\underset{r_3+2r_2}{\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}}\boldsymbol{B}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过两次行变换得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，第一次是交换一二行，对应的初等矩阵是 $\boldsymbol{P}_3$，第二次变换是将第二行的两倍加到第三行，对应初等矩阵 $\boldsymbol{P}_2$ 故选（B）.

【例 2.27】计算 $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

【答案】$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&1\\1&0&0\end{pmatrix}$.

【解析】 原式$=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&1\\1&0&0\end{pmatrix}$. 相当于将矩阵$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$的第二行加上第一行，再交换第一列与第三列.

性质 2： 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 等于有限个初等矩阵的乘积.

推论 2： 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次行列变换之后可化为单位矩阵.

推论 3： 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的充要条件是存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PAQ}$.

4. 利用初等行变换求解矩阵方程

（1）求解方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ （$\boldsymbol{A}$ 可逆）.

解法：$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\xrightarrow{r}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$.

【注】 若解方程 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$ （$\boldsymbol{A}$ 可逆），则可两边同时转置：$\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})\xrightarrow{r}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})$.

【例 2.28】 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{B}$.

【答案】 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}$.

【解析】 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$，

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\ \vdots\ \boldsymbol{A})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&3&0&1\\1&-1&0&1&1&0\\0&1&2&0&1&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&5&-2&-2\\0&1&0&4&-3&-2\\0&0&1&-2&2&3\end{array}\right)$$

故 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}$.

（2）求 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，可看作解方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{E}$ （若 $\boldsymbol{A}$ 可逆）.

解法：$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})\xrightarrow{r}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1})$.

【例 2.29】用行变换求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

【答案】$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\dfrac{3}{2}&-3&\dfrac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}$.

【解析】$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&3&-2\\0&1&0&-\dfrac{3}{2}&-3&\dfrac{5}{2}\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right)$

故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\dfrac{3}{2}&-3&\dfrac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}$.

§6.矩阵的秩

1. 秩的定义

（1）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 r 阶子式： 在 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，任取 r 行和 r 列（$0\leqslant r\leqslant m,0\leqslant r\leqslant n$），位于这

些行列交叉处的 r^2 个元素，不改变它们在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中所处的位置而得到的 r 阶行列式，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 r 阶子式.

【注 1】 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的1阶子式就是 $\boldsymbol{A}$ 中的元素.

【注 2】 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 阶子式就是 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素的余子式

【注 3】 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 阶子式就是 $|\boldsymbol{A}|$.

（2）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩： 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中存在 r 阶子式不为 0，而 $\boldsymbol{A}$ 的所有的 $r+1$ 阶子式（在存在的情况下）全为 0，则该 r 阶子式叫做 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式，r 叫做 $\boldsymbol{A}$ 的秩，记作 $r(\boldsymbol{A})$. 规定零矩阵的秩为 0.

【注】 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式就是 $|\boldsymbol{A}|$，且 $r(\boldsymbol{A})=n$.

【例 2.30】 命题判断

（1）3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，若 $r(\boldsymbol{A})=3$，则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$；

（2）4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，若 $r(\boldsymbol{A})=2$，所有 2 阶子式均不为 0；

（3）4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，若 $r(\boldsymbol{A})=2$，所有 3 阶子式均为 0.

【答案】（1）对；（2）错；（3）对.

【解析】（1）方阵满秩的充要条件是行列式不为 0，故正确；

（2）由 $r(\boldsymbol{A})=2$ 可知至少有一个 2 阶子式均不为 0，不是所有的 2 阶子式均不为 0，故错误.

（3）由 $r(\boldsymbol{A})=2$ 可知所有 3 阶子式（若存在）均为 0.

【例 2.31】利用定义求下列矩阵的秩.

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&-5\\4&7&1\end{pmatrix}$；

（2）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\2&1&2\end{pmatrix}$.

【答案】（1）2；（2）3.

【解析】（1）$\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}\neq 0$，$|\boldsymbol{A}|=0$，故$r(\boldsymbol{A})=2$；（2）$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，故$r(\boldsymbol{A})=3$.

2. 秩的计算

$\boldsymbol{A}$ 化为行阶梯形矩阵的非零行数（初等变换后矩阵的秩不变）.

【注】非零行指的是该行元素不全为0.

【例 2.32】已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&0&2\\1&-1&2&-1\\1&3&-4&4\end{pmatrix}$，求$r(\boldsymbol{A})$.

【答案】2.

【解析】$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\3&1&0&2\\1&3&-4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&4&-6&5\\0&4&-6&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&4&-6&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，故

$r(\boldsymbol{A})=2$.

【例 2.33】已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-1&1&1\\3&a&-5\\0&1&-2\end{pmatrix}$，且$r(\boldsymbol{A})=2$求$a$.

【答案】$a=-2$.

【解析】$A \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & a+6 & -8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2a+4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，故 $a=-2$.

3. 秩的性质

（1）$0 \leqslant r(A_{m\times n}) \leqslant \min\{m,n\}$；

（2）$r(A^{\mathrm{T}})=r(A)$；

（3）若 P,Q 可逆，则 $r(PAQ)=r(A)$；

【例 2.34】设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，则 $r(BA+2A)=$ ________.

【答案】2.

【解析】$BA+2A=(B+2E)A$，而 $B+2E=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 可逆，

所以 $r(BA+2A)=r(A)$，又 $A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

所以 $r(BA+2A)=r(A)=2$.

（4）若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=O$，则 $r(A)+r(B) \leqslant n$；

【例 2.35】已知 $Q=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$， $P \neq O$，使 $PQ=O$ 则（　　）

（A）当$t=6$时，$r(\boldsymbol{P})=1$.　　（B）当$t=6$时，$r(\boldsymbol{P})=2$.

（C）当$t\neq6$时，$r(\boldsymbol{P})=1$.　　（D）当$t\neq6$时，$r(\boldsymbol{P})=2$.

【答案】（C）.

【解析】 $r(\boldsymbol{P})+r(\boldsymbol{Q})\leqslant3$，$\boldsymbol{Q}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&t-6\\0&0&0\end{pmatrix}$，若$t\neq6$，$r(\boldsymbol{Q})=2$，则$r(\boldsymbol{P})\leqslant1$，又$r(\boldsymbol{P})\neq0$，故$r(\boldsymbol{P})=1$，选（C）.

（5）已知$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵，则$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & r(\boldsymbol{A})=n,\\1, & r(\boldsymbol{A})=n-1,\\0, & r(\boldsymbol{A})<n-1.\end{cases}$

【例 2.36】 设三阶矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}$，若$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵的秩等于 1，则必有（　　）

（A）$a=b$或$a+2b=0$.　　（B）$a=b$或$a+2b\neq0$.

（C）$a\neq b$且$a+2b=0$.　　（D）$a\neq b$且$a+2b\neq0$.

【答案】（C）.

【解析】 $r(\boldsymbol{A}^*)=1\Rightarrow r(\boldsymbol{A})=2$，故$|\boldsymbol{A}|=0$，

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+2b&a+2b&a+2b\\b&a&b\\b&b&a\end{vmatrix}=(a+2b)\begin{vmatrix}1&1&1\\b&a&b\\b&b&a\end{vmatrix}$$

$=(a+2b)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&a-b&0\\0&0&a-b\end{vmatrix}=(a+2b)(a-b)^2=0$，$a=b$或$a+2b=0$. 又$a=b$时$r(\boldsymbol{A})=1$矛盾，故$a\neq b$且$a+2b=0$，选（C）.

（6）$r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})=r(k\boldsymbol{A})$，其中$k\neq0$；

（7） $\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}\leqslant r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$；

（8） $r(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$；

（9） $r(\boldsymbol{AB})\leqslant \min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$.

【例 2.37】已知$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$是$n$维列向量，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，证明：$r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$.

【证明】$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})+r(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{\alpha})+r(\boldsymbol{\beta})\leqslant 1+1=2$.