第四章　向量

【考试要求】

1. 理解 n 维向量、向量的线性组合与线性表示的概念.
2. 理解向量组线性相关、线性无关的概念，掌握向量组线性相关、线性无关的有关性质及判别法.
3. 理解向量组的极大线性无关组和向量组的秩的概念，会求向量组的极大线性无关组及秩.
4. 理解向量组等价的概念，理解矩阵的秩与其行（列）向量组的秩之间的关系.
5. 了解内积的概念，掌握线性无关向量组正交规范化的施密特方法.
6. 了解正交矩阵的概念以及它们的性质.

（以下内容仅限数一）

7. 了解规范正交基.
8. 了解 n 维向量空间、子空间、基底、维数、坐标等概念.
9. 了解基变换和坐标变换公式，会求过渡矩阵.

§1.向量的基本概念

1. 向量与向量组

（1）向量定义：

n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 构成的有序数组，称为一个 n 维向量，其中 a_i 称为向量的分量.

（2）行（列）向量：

n 维行向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$；

n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 或记作 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$.

（3）零向量：每个元素都是零的向量，可表示为 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

（4）向量组：若干个同维数的列向量（或行向量）所组成的集合，叫做向量组.

（5）向量组与矩阵的关系：

向量组可看作一个矩阵，反之，矩阵按照列（行）来划分，可看作列（行）向量组.

例: $\boldsymbol{A}_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，按列划分，则 $\boldsymbol{A}_{m\times n}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right)$,

其中 $\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}=\left(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj}\right)^{\mathrm{T}},\ j=1,2,\cdots,n$.

按行划分，则 $\boldsymbol{A}_{m\times n}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_i=\left(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}\right),i=1,2,\cdots,m$.

2. 向量的运算

$\boldsymbol{\alpha}=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=\left(b_1,b_2,\cdots,b_n\right)^{\mathrm{T}}$，则

（1）加法：$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\left(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n\right)^{\mathrm{T}}$.

（2）数乘：$k\boldsymbol{\alpha}=\left(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n\right)^{\mathrm{T}}$.

§2. 向量的线性表示

1. 向量由向量组线性表示

(1) 线性组合： 给定向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，对任何一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，表达式

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$$

称为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个线性组合，$k_1,k_2,\cdots,k_s$ 称为这个线性组合的系数.

(2) 向量的线性表示： 给定向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 和向量 $\boldsymbol{\beta}$，如存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s,$$

则称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示（或线性表出）.

（3）向量$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示

$\Leftrightarrow$ 非齐次线性方程组$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\beta}$有解.

$\Leftrightarrow$ $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta})$.

【例 4. 1】判断向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表示，如果可以，求出表达式.

（1） $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$；

（2） $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$;

（3） $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

2. 向量组由向量组线性表示

（1）定义：已知向量组(I)：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 和向量组(II)：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$，若向量组(II)中每个向量均可由向量组(I)中向量线性表示，则称向量组(II)可由向量组(I)线性表示.

（2）向量组(II)可由向量组(I)线性表示 $\Leftrightarrow r(\mathrm{I})=r(\mathrm{I},\ \mathrm{II})$.

（3）向量组(II)可由向量组(I)线性表示 $\Rightarrow r(\mathrm{II})\leqslant r(\mathrm{I})$.

【例 4. 2】判断向量组 $\boldsymbol{B}$ 能否由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表示，如果可以，求出表达式.

（1） $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$；

（2） $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$；

（3） $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$.

3. 向量组等价

（1）定义：若向量组(I)与(II)可以相互线性表示，则称这两个向量组等价.

（2）向量组(I)与(II)等价$\Leftrightarrow r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})=r(\mathrm{I},\ \mathrm{II})$.

【例 4. 3】 已知向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$，判断向量组 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是否等价.

【例 4.4】判断下列命题

（1）若矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价，则矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价；

（2）若矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价，则矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价.

§3. 向量组的线性相关性

1. 线性相关与线性无关的定义

（1）给定 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，如果存在一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0},$$

成立，则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

（2）给定 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，如果只有 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 全为 0 时，

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0},$$

才成立，则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

【例 4.5】设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots\boldsymbol{\alpha}_m$均为$n$维列向量，那么下列结论正确的是(　　).

（A）若$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关.

（B）若对任意一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，都有$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\neq\mathbf{0}$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关.

（C）若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，则对任意一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$都有$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$.

（D）若$0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关.

【例 4.6】任意两个 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots\boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$，若存在两组不全为 0 的数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 和 $k_1,\cdots,k_m$，使得 $(\lambda_1+k_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(\lambda_m+k_m)\boldsymbol{\alpha}_m+(\lambda_1-k_1)\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+(\lambda_m-k_m)\boldsymbol{\beta}_m=\mathbf{0}$，则（　　）.

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots\boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 都线性相关.

（B）$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots\boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 都线性无关.

（C）$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关.

（D）$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关.

2. 相关性判断

（1） n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中至少有一个向量可由其余 $s-1$ 个向量线性表示.

$\Leftrightarrow x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$ 有非零解.

$\Leftrightarrow r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\right)<s$.

$\Leftrightarrow \left|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\right|=0$（当 $s=n$ 时）.

（2） n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任一向量均不能由其余向量线性表示.

$\Leftrightarrow$ $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$ 只有零解.

$\Leftrightarrow r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\right)=s$.

$\Leftrightarrow \left|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\right|\neq 0$（当 $s=n$ 时）.

【例 4. 7】判断下列向量组线性相关性

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$；

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$；

（3）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix}$；（4）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\a\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

3. 相关性的性质

（1）零向量与任何向量线性相关；反之，线性无关的向量组都不含零向量.

（2）两个非零向量线性相关的充分必要条件是对应分量成比例，两个非零向量线性无关的充分必要条件是对应分量不成比例.

（3）若部分组相关，则整体组相关；若整体组无关，则部分组无关；

例：若α_1,α_2相关，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$相关；若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$无关，则$\alpha_1,\alpha_2$无关.

（4）若缩短组无关，则延伸组无关；若延伸组相关，则缩短组相关.

【注】已知$\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix}$，则$\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\end{pmatrix}$称为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的缩短组，

$\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\\a_{41}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\\a_{42}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\\a_{43}\end{pmatrix}$称为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的延伸组.

（5）n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，如果 $s > n$，则向量组一定线性相关；

如果 $s \leqslant n$，则向量组线性相关性不定.

（6）如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，且表达式唯一；

如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

（7）如果向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性表示，且$s>t$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关（即如果多数向量能用少数向量线性表示，那么多数向量线性相关）；

如果向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性表示，且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则$s\leqslant t$.

【例 4.8】向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\ (s\geqslant 2)$ 线性相关的充分必要条件是（　　）.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中至少有一个是零向量.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中至少有两个向量成比例.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中至少有一个向量可由其余 $s-1$ 个向量线性表示.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任一部分组线性相关.

【例 4.9】已知 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\ (m>2)$ 线性无关，则（　　）.

（A）对任意一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=0$.

（B）$m<n$.

（C）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中少于 m 个向量构成的向量组均线性相关.

（D）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中任意两个向量均线性无关.

【例 4.10】设向量组α,β,γ线性无关，α,β,δ线性相关，则（　　）.

（A）α必可由β,γ,δ线性表示.　　（B）β必不可由α,γ,δ线性表示.

（C）δ必可由α,β,γ线性表示.　　（D）δ必不可由α,β,γ线性表示.

【例 4.11】下列向量组中，线性无关的是(　　).

(A) $(1,2,3,4)^T,(2,3,4,5)^T,(0,0,0,0)^T$.

(B) $(1,2,-1)^T,(3,5,6)^T,(0,7,9)^T,(1,0,2)^T$.

(C) $(a,1,2,3)^T,(b,1,2,3)^T,(c,3,4,5)^T,(d,0,0,0)^T$.

(D) $(a,1,b,0,0)^T,(c,0,d,6,0)^T,(a,0,c,5,6)^T$.

【例 4. 12】设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则下列向量组中，线性无关的是(　　).

（A）$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_1$.

（B）$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$.

（C）$\alpha_1+2\alpha_2$，$2\alpha_2+3\alpha_3$，$3\alpha_3+\alpha_1$.

（D）$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$2\alpha_1-3\alpha_2+22\alpha_3$，$3\alpha_1+5\alpha_2-5\alpha_3$.

§4. 极大线性无关组与向量组的秩

1. 定义

在向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中，若存在$r$个向量线性无关，且任意$r+1$个向量线性相关，则称这$r$个向量为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的一个极大线性无关组，简称极大无关组；$r$称为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的秩，记作$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$.

【注 1】只含零向量的向量组没有极大无关组，该向量组秩为 0；

【注 2】若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，即 $r=s$ 时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的极大线性无关组就是它本身，且 $r\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\right)=s$.

2. 性质

（1）向量组中任何向量均可由其极大线性无关组线性表示，且表达式唯一；

（2）向量组与它的极大线性无关组等价；

（3）向量组的极大线性无关组一般不唯一，但任意两个极大无关组都等价，并且极大无关组中所含的向量个数（秩）是唯一确定的；

（4）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩= $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩= $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩.

（5）对矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 施行初等行变换得到矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 任何对应的列向量有相同的线性关系.

例如：如果 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的极大无关组，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的极大无关组；如果 $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_3-4\boldsymbol{\beta}_4$，则 $\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3-4\boldsymbol{\alpha}_4$.

【例 4.13】向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}5\\1\\8\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$的一个极大线性无关组是_________.

【例 4.14】 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大线性无关组，并用极大线性无关组表示其它列向量.

§5. 线性方程组解的结构

性质 1：若 ξ_1,ξ_2 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，则 $\xi_1+\xi_2$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

性质 2：若 ξ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，k 为实数，则 $k\xi$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

定义：齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 所有解向量的集合称为 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解集，记作 $\mathbf{S}$；

当齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解时，解集 $\mathbf{S}$ 的极大线性无关组称为 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系.

性质 3：基础解系不唯一，但基础解系中解向量的个数（即 $r(\mathbf{S})$）是确定的，等于 $n-r(\boldsymbol{A})$，其中 n 是 $\boldsymbol{A}$ 的列数.

性质 4：在齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解时，通解为基础解系的线性组合，形如

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{\xi}_{n-r(\boldsymbol{A})}.$$

【例 4.15】设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^* \neq \boldsymbol{0}$，若 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的互不相等的解，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系（　　）.

（A）不存在.　　（B）仅含一个非零解向量.

（C）含有两个线性无关的解向量.　　（D）含有三个线性无关的解向量.

【例 4.16】 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & a & 4\\ 3 & 0 & b\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，求 a,b.

【例 4. 17】已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&0&4\\1&1&b\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}2\\1\\a\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，求 a,b .

性质 5：若$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解，则$\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解.

【注】若$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解，则当$k_1+k_2=1$时，$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2$仍为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解，当$k_1+k_2=0$时，$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2$为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解.

性质 6:若ξ是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，$\boldsymbol{\eta}$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解，则$\xi+\eta$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解.

性质 7：非齐次通解=齐次通解＋非齐次特解．即若 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r(\boldsymbol{A})}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系，$\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{\xi}_{n-r(\boldsymbol{A})}+\boldsymbol{\eta}$．

【例 4.18】已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix}$ 是线性方程组 $\begin{cases}ax_1+bx_2+cx_3=d\\x_1-x_2+2x_3=-1\\3x_1+x_2+4x_3=1\end{cases}$ 的两个解，那么此方程组的通解是______________.

【例 4. 19】已知3阶方阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$均为$3$维列向量，$r(\boldsymbol{A})=2$，$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$. 如果$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，求线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$的通解.

§6. 向量的内积、长度及正交性

1. 向量的内积、长度及正交性

（1）**内积**：已知 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 及 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，则

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积，记作 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.

（2）**正交**：当 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$ 时，称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交.

【注】零向量与任何向量正交.

（3）**向量长度：**$\|\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}} = \sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + \cdots + a_n^{\ 2}}$，也叫向量$\boldsymbol{\alpha}$的模.

（4）**单位向量：**长度为 1 的向量，可表示为$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 1$.

（5）**向量单位化：**向量除以自身长度.

（6）**正交向量组：**若非零向量组中的向量两两正交，则称该向量组为正交向量组.

【注】正交向量组一定线性无关.

（7）**规范正交向量组：**若正交向量组中的每一个向量都是单位向量，则称该向量组为规范正交向量组.

（8）**施密特正交化：**

已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，令

$$\beta_1=\alpha_1,$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\beta_1,\alpha_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\beta_1,\alpha_3)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\beta_2,\alpha_3)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2,$$

从$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的这一过程称为施密特正交化，

此时β_1,β_2,β_3两两正交，若再将其单位化，有

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|},\ \gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|},\ \gamma_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|},$$

此时$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$为规范正交向量组.

【例 4.20】分别求下列两个向量的内积，并判断是否正交，若没有正交，请利用施密特正交化过程将其化成规范正交向量组.

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$　　（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

【例 4. 21】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$，利用施密特正交化过程将其化成规范正交向量组.

2. 正交矩阵

（1）**定义**：若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$（即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$），则称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

（2）**性质**：

$\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的列（行）向量组是规范正交向量组.

$\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵 $\Rightarrow |\boldsymbol{A}|=\pm 1$.