目录

2016 年真题

一、选择题

1.（数一 1）若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x$ 收敛，则（　　）

（A）$a<1$ 且 $b>1$.　　（B）$a>1$ 且 $b>1$.

（C）$a<1$ 且 $a+b>1$.　　（D）$a>1$ 且 $a+b>1$.

2.（数一 2，数二 2）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1,\\ \ln x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是（　　）

（A）$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1), & x\geqslant 1.\end{cases}$　　（B）$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)-1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

（C）$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$　　（D）$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1)+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

3.（数一 3）若 $y=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$, $y=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解，则 $q(x)=$（　　）

（A）$3x(1+x^2)$.　　（B）$-3x(1+x^2)$.　　（C）$\frac{x}{1+x^2}$.　　（D）$-\frac{x}{1+x^2}$.

4.（数一 4）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1}<x\leqslant\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots,\end{cases}$ 则（　　）

（A）$x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.　　（B）$x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

（C）$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导.　　（D）$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

5.（数二 1）设 $\alpha_1 = x(\cos\sqrt{x}-1), \alpha_2 = \sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x}), \alpha_3 = \sqrt[3]{x+1}-1$．当 $x \to 0^+$ 时，以上 3 个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是（　　）

（A）$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$．　　（B）$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1$．

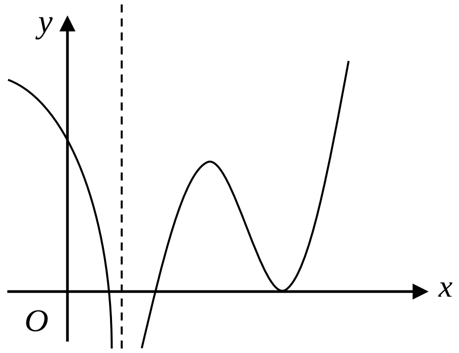
（C）$\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3$．　　（D）$\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$．

6.（数二 3）反常积分① $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$，　② $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$ 的敛散性为（　　）

（A）①收敛，②收敛．　　（B）①收敛，②发散．

（C）①发散，②收敛．　　（D）①发散，②发散．

7.（数二 4，数三 1）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则（　　）



（A）函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点．

（B）函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点．

（C）函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 1 个拐点．

（D）函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点．

8.（数二 6，数三 2）已知函数 $f(x,y) = \frac{e^x}{x-y}$，则（　　）

（A）$f'_x - f'_y = 0$．　　（B）$f'_x + f'_y = 0$．

（C）$f'_x - f'_y = f$．　　（D）$f'_x + f'_y = f$．

9.（数三 3）设 $J_i=\iint\limits_{D_i}\sqrt[3]{x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y(i=1,2,3)$，其中 $D_1=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，

$D_2=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant \sqrt{x}\},D_3=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,x^2\leqslant y\leqslant 1\}$，则（　　）

（A）$J_1<J_2<J_3$.　　（B）$J_3<J_1<J_2$.

（C）$J_2<J_3<J_1$.　　（D）$J_2<J_1<J_3$.

10.（数一 5，数二 7，数三 5）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则下列结论错误的是（　　）

（A）$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似.　　（B）$\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

（C）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似.　　（D）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

11.（数二 8，数三 6）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为$1,2$，则（　　）

（A）$a>1$.　　（B）$a<-2$.　　（C）$-2<a<1$.　　（D）$a=1$ 或 $a=-2$.

12.（数一 7）设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，记 $p=P\left\{X\leqslant\mu+\sigma^2\right\}$，则（　　）

（A）p 随着 μ 的增加而增加.　　（B）p 随着 σ 的增加而增加.

（C）p 随着 μ 的增加而减少.　　（D）p 随着 σ 的增加而减少.

13.（数一 8）随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1,A_2,A_3，且三种结果发生的概率均为 $\dfrac{1}{3}$. 将试验 E 独立重复做 2 次，X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数，Y 表示 2 次试验中结果 A_2 发生的次数，则 X 与 Y 的相关系数为（　　）

（A）$-\dfrac{1}{2}$.　　（B）$-\dfrac{1}{3}$.　　（C）$\dfrac{1}{3}$.　　（D）$\dfrac{1}{2}$.

14.（数三 7）设 A,B 为两个随机事件，$0<P(A)<1, 0<P(B)<1$，如果 $P(A|B)=1$，则（　）

（A）$P(\overline{B}|\overline{A})=1$.　　（B）$P(A|\overline{B})=0$.

（C）$P(A\cup B)=1$.　　（D）$P(B|A)=1$.

15.（数三 8）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(1,2), Y\sim N(1,4)$，则 $D(XY)$ 为（　）

（A）6.　　（B）8.　　（C）14.　　（D）15.

二、填空题

1.（数一 9）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\,\mathrm{d}t}{1-\cos x^2}=$____________.

2.（数一 11，数三 11）设函数 $f(u,v)$ 可微，$z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2 f(x-z,y)$ 确定，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$____________.

3.（数一 12）设函数 $f(x)=\arctan x-\dfrac{x}{1+ax^2}$，且 $f'''(0)=1$，则 $a=$____________.

4.（数二 9）曲线 $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)$ 的斜渐近线方程为____________.

5.（数二 10，数三 10）极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\cdots+n\sin\frac{n}{n})=$____________.

6.（数二 11）以 $y=x^2-\mathrm{e}^x$ 和 $y=x^2$ 为特解的一阶非齐次线性微分方程为____________.

7.（数二 12）已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，则当 $n\geqslant 2$ 时，$f^{(n)}(0)=$____________.

8.（数三 9）已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{\mathrm{e}^{3x}-1}=2$，则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=$__________.

9.（数三 12）设 $D=\{(x,y)\,\big|\,|x|\leqslant y\leqslant 1,-1\leqslant x\leqslant 1\}$，则 $\iint\limits_D x^2\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$____________.

10.（数一 13，数三 13）行列式 $\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=$____________.

11.（数二 14）设矩阵 $\begin{pmatrix}a & -1 & -1\\ -1 & a & -1\\ -1 & -1 & a\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 等价，则 $a=$____________.

12.（数三 14）设袋中有红、白、黑球各 1 个，从中有放回地取球，每次取 1 个，直到三种颜色的球都取到时停止，则取球次数恰好为 4 的概率为____________.

三、解答题

1.（数一 15）已知平面区域 $D=\left\{(r,\theta)\middle|\ 2\leqslant r\leqslant 2(1+\cos\theta),-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

2.（数一 16）设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y'+ky=0$，其中 $0<k<1$.

（1）证明：反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

（2）若 $y(0)=1, y'(0)=1$，求 $\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x$ 的值.

3.（数二 15，数三 15）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

4.（数二 16，数三 17）设函数 $f(x)=\int_0^1\left|t^2-x^2\right|\mathrm{d}t\,(x>0)$，求 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 的最小值.

5.（数二 17）已知函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ 确定，求 $z=z(x,y)$ 的极值.

6.（数二 18）设 D 是由直线 $y=1, y=x, y=-x$ 围成的有界区域，计算二重积分 $\iint\limits_D \dfrac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

7.（数二 21）已知 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上连续，在 $(0,\dfrac{3\pi}{2})$ 内是函数 $\dfrac{\cos x}{2x-3\pi}$ 的一个原函数，且 $f(0)=0$.

（1）求 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上的平均值；

（2）证明 $f(x)$ 在区间 $(0,\dfrac{3\pi}{2})$ 内存在唯一零点.

8.（数三 18）设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-x}-1$，求 $f(x)$.

9.（数一 20）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & a & 1\\ -1 & 1 & a\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & a\\ -a-1 & -2\end{pmatrix}$.

当 a 为何值时，方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解、有唯一解、有无穷多解？在有解时，求解此方程.

10.（数一 21，数二 23，数三 21）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

（1）求 $\boldsymbol{A}^{99}$.

（2）设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BA}$. 记 $\boldsymbol{B}^{100}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 分别表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

11.（数二 22，数三 20）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1-a\\1&0&a\\a+1&1&a+1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\1\\2a-2\end{pmatrix}$，且方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 无解.

（1）求 a 的值；

（2）求方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

12.（数一 22，数三 22）设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\left\{(x,y)\middle|\,0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\right\}$ 上服从均匀分布，令 $U=\begin{cases}1，X\leqslant Y,\\0，X>Y.\end{cases}$

（1）写出 (X,Y) 的概率密度；

（2）问 U 与 X 是否相互独立？并说明理由；

（3）求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(z)$.

13.（数一 23，数三 23）设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3},0<x<\theta,\\0,\quad\text{其他}.\end{cases}$ 其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数， X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的简单随机样本，令 $T=\max\{X_1,X_2,X_3\}$.

（1）求 T 的概率密度；

（2）确定 a ，使得 aT 为 θ 的无偏估计.（数一）/（2）确定 a ，使得 $E(aT)=\theta$.（数三）

2017 年真题

一、选择题

1.（数一 1，数二 1，数三 1）若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则（　　）

（A）$ab=\dfrac{1}{2}$.　（B）$ab=-\dfrac{1}{2}$.　（C）$ab=0$.　（D）$ab=2$.

2.（数一 2，数三 3）设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x)>0$，则（　　）

（A）$f(1)>f(-1)$.　（B）$f(1)<f(-1)$.

（C）$|f(1)|>|f(-1)|$.　（D）$|f(1)|<|f(-1)|$.

3.（数二 2）设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=f(-1)=1, f(0)=-1$，且 $f''(x)>0$，则（　　）

（A）$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x>0$.　（B）$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x<0$.

（C）$\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x>\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x$.　（D）$\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x<\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x$.

4.（数二 3）设数列 $\{x_n\}$ 收敛，则（　　）

（A）当 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.　（B）当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sqrt{|x_n|})=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

（C）当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+x_n^2)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.　（D）当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

5.（数二 4）微分方程 $y''-4y'+8y=\mathrm{e}^{2x}(1+\cos 2x)$ 的特解可设为 $y^*=$（　　）

（A） $A\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.　　（B） $Ax\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.

（C） $A\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.　　（D） $Ax\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.

6.（数二 5）设 $f(x,y)$ 具有一阶偏导数，且对任意的 (x,y) 都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0,\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$ ，则（　　）

（A） $f(0,0)>f(1,1)$.　　（B） $f(0,0)<f(1,1)$.

（C） $f(0,1)>f(1,0)$.　　（D） $f(0,1)<f(1,0)$.

7.（数三 2）二元函数 $z=xy(3-x-y)$ 的极值点是（　　）

（A） $(0,0)$.　　（B） $(0,3)$.　　（C） $(3,0)$.　　（D） $(1,1)$.

8.（数一 5，数三 5）设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维单位列向量， $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，则（　　）

（A） $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.　　（B） $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.

（C） $\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.　　（D） $\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.

9.（数一 6，数二 8，数三 6）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ ，则（　　）

（A） $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似， $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.　　（B） $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似， $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

（C） $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似， $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.　　（D） $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似， $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

10.（数二 7）设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为可逆矩阵，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，

则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=$（　　）

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$.　　（B）$\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$.　　（C）$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.　　（D）$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3$.

11.（数一 7）设 A,B 为随机事件.若 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，则 $P(A|B)>P(A|\bar{B})$ 的充分必要条件是（　　）

（A）$P(B|A)>P(B|\bar{A})$.　　（B）$P(B|A)<P(B|\bar{A})$.

（C）$P(\bar{B}|A)>P(B|\bar{A})$.　　（D）$P(\bar{B}|A)<P(B|\bar{A})$.

12.（数一 8，数三 8）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant2)$ 为来自总体 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本，记 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则下列结论中不正确的是（　　）

（A）$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布.　　（B）$2(X_n-X_1)^2$ 服从 χ^2 分布.

（C）$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 服从 χ^2 分布.　　（D）$n(\bar{X}-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布.

13.（数三 7）设 A,B,C 为三个随机事件，且 A 与 C 相互独立，B 与 C 相互独立，则 $A\cup B$ 与 C 相互独立的充分必要条件是（　　）

（A）A 与 B 相互独立.　　（B）A 与 B 互不相容.

（C）AB 与 C 相互独立.　　（D）AB 与 C 互不相容.

二、填空题

1.（数一 9）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，则 $f^{(3)}(0)=$____________.

2.（数一 10）微分方程 $y''+2y'+3y=0$ 的通解为 $y=$____________.

3.（数二 9）曲线 $y=x(1+\arcsin\dfrac{2}{x})$ 的斜渐近线方程为____________.

4.（数二 11）$\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=$____________.

5.（数二 12，数三 12）设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，且

$\mathrm{d}f(x,y)=y\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+x(1+y)\mathrm{e}^y\mathrm{d}y,\ f(0,0)=0$，则 $f(x,y)=$____________.

6.（数二 13）$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\dfrac{\tan x}{x}\mathrm{d}x=$____________.

7.（数三 9）$\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3 x+\sqrt{\pi^2-x^2})\mathrm{d}x=$____________.

8.（数一 13，数三 13）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的3维列向量组，则向量组 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3$ 的秩为____________.

9.（数二 14）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{pmatrix}$ 的一个特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，则 $a=$_________.

10.（数一 14）设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi(\dfrac{x-4}{2})$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $EX=$_________.

11.（数三 14）设随机变量 X 的概率分布为 $P\{x=-2\}=\dfrac{1}{2}$，$P\{x=1\}=a$，$P\{x=3\}=b$. 若 $EX=0$，则 $DX=$__________.

三、解答题

1.（数一 15，数二 16）设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，$y=f(\mathrm{e}^x,\cos x)$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0},\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

2.（数一 16，数二 17，数三 17）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln(1+\dfrac{k}{n})$.

3.（数一 17，数二 18）已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定,求 $y(x)$ 的极值.

4.(数一 18，数二 19)设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(1)>0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$.

证明：（1）方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根；

（2）方程 $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根.

5.（数二 15，数三 15）求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x\sqrt{x-t}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}{\sqrt{x^3}}$.

6.（数二 20）已知平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 2y\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D(x+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

7.（数二 21）设 $y(x)$ 是区间 $(0,\dfrac{3}{2})$ 内的可导函数，且 $y(1)=0$.点 P 是曲线 $l:y=y(x)$ 上的任意一点，l 在点 P 处的切线与 y 轴相交于点 $(0,Y_P)$，法线与 x 轴相交于点 $(X_P,0)$.若 $X_p=Y_p$，求 l 上点的坐标 (x,y) 满足的方程.

8.（数三 16）计算积分 $\iint\limits_D \frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是第一象限中以曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 x 轴为边界的无界区域.

9.（数三 18）已知方程 $\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}=k$ 在区间 $(0,1)$ 内有实根，确定常数 k 的取值范围.

10.（数一 20，数二 22，数三 20）设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 有 3 个不同的特征值，且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

（1）证明 $r(\boldsymbol{A})=2$；

（2）若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

11.（数一 21，数二 23，数三 21）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求 a 的值及一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

12.（数一 22，数三 22）设随机变量 X,Y 相互独立，且 X 的概率分布为

$P\{X=0\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$，$Y$ 的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

（1）求 $P\{Y\leqslant EY\}$；

（2）求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

13.（数一 23，数三 23）某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的.设 n 次测量结果 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i=|X_i-\mu|(i=1,2,\cdots,n)$.利用 $Z_1,Z_2,\cdots Z_n$ 估计 σ .

（1）求 Z_1 的概率密度；

（2）利用一阶矩求 σ 的矩估计量；

（3）求 σ 的最大似然估计量.

2018 年真题

一、选择题

1.（数一 1，数二 2，数三 1）下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是（　　）

（A） $f(x)=|x|\sin|x|$.　　（B） $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$.

（C） $f(x)=\cos|x|$.　　（D） $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.

2.（数一 4，数二 5，数三 3）设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$，$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\mathrm{d}x$，则（　　）

（A）$M>N>K$.　（B）$M>K>N$.　（C）$K>M>N$.　（D）$K>N>M$.

3.（数二 1）若 $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{e}^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=1$，则（　　）

（A） $a=\frac{1}{2},b=-1$.　　（B） $a=-\frac{1}{2},b=-1$.

（C） $a=\frac{1}{2},b=1$.　　（D） $a=-\frac{1}{2},b=1$.

4.（数二 3）设函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-ax, & x\leqslant -1,\\ x, & -1<x<0,\\ x-b, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 若 $f(x)+g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，则（　　）

（A） $a=3,b=1$.　　（B） $a=3,b=2$.

（C） $a=-3,b=1$.　　（D） $a=-3,b=2$.

5.（数二 4，数三 2）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$，则（　　）

（A）当 $f'(x)<0$ 时，$f(\frac{1}{2})<0$.　　（B）当 $f''(x)<0$ 时，$f(\frac{1}{2})<0$.

（C）当 $f'(x)>0$ 时，$f(\frac{1}{2})<0$.　　（D）当 $f''(x)>0$ 时，$f(\frac{1}{2})<0$.

6.（数二 6）$\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{2-x^2}(1-xy)\mathrm{d}y=$（　　）

（A）$\frac{5}{3}$.　　（B）$\frac{5}{6}$.　　（C）$\frac{7}{3}$.　　（D）$\frac{7}{6}$.

7.（数一 5，数二 7，数三 5）下列矩阵中，与矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似的为（　　）

（A）$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.　（B）$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.　（C）$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.　（D）$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

8.（数一 6，数二 8，数三 6）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，记 $r(\boldsymbol{X})$ 为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩，$(\boldsymbol{X}\ \ \boldsymbol{Y})$ 表示分块矩阵，则（　　）

（A）$r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$.　　（B）$r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{A})$.

（C）$r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})=\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$.　　（D）$r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$.

9.（数一 7，数三 7）设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$，且 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.6$，则 $P\{X<0\}=$（　）

（A）0.2.　　（B）0.3.　　（C）0.4.　　（D）0.5.

10.（数三 8）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本.令 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$，$S^*=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}$，则（　）

（A）$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}\sim t(n)$.　　（B）$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$.

（C）$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S^*}\sim t(n)$.　　（D）$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S^*}\sim t(n-1)$.

二、填空题

1.（数一 9）若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=\mathrm{e}$，则 $k=$________.

2.（数一 10）设函数 $f(x)$ 具有 2 阶连续导数.若曲线 $y=f(x)$ 过点 $(0,0)$ 且与曲线 $y=2^x$ 在点 $(1,2)$ 处相切，则 $\int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x=$________.

3.（数二 9）$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=$________.

4.（数二 10，数三 9）曲线 $y=x^2+2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是________.

5.（数二 11）$\int_5^{+\infty}\frac{1}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x=$________.

6.（数二 13）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\ln z+\mathrm{e}^{z-1}=xy$ 确定，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,\frac{1}{2})}=$________.

7.（数三 10）$\int \mathrm{e}^x\arcsin\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x=$________.

8.（数三 12）设函数 $f(x)$ 满足 $f(x+\Delta x)-f(x)=2xf(x)\Delta x+o(\Delta x)\ (\Delta x\to 0)$，且 $f(0)=2$，则 $f(1)=$________.

9.（数一 13）设 2 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有两个不同的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量，且满足 $\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$，则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

10.（数二 14，数三 13）设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的向量组.若 $\boldsymbol{A\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，$A\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，则 $\boldsymbol{A}$ 的实特征值为______.

11.（数一 14）设随机事件 A 与 B 相互独立，A 与 C 相互独立，$BC=\varnothing$.若 $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$，

$P(AC\mid AB\cup C)=\dfrac{1}{4}$，则 $P(C)=$________.

12.（数三 14）随机事件 A,B,C 相互独立，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{2}$，则

$P(AC\mid A\cup B)=$________.

三、解答题

1.（数一 15，数二 15）求不定积分 $\int \mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^{x}-1}\,\mathrm{d}x$.

2.（数一 16，数二 19，数三 17）将长为 2 m 的铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与正三角形. 三个图形的面积之和是否存在最小值? 若存在，求出最小值.

3.（数一 18）已知微分方程 $y'+y=f(x)$，其中 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数.

（1）若 $f(x)=x$，求方程的通解.

（2）若 $f(x)$ 为周期为 T 的函数，证明：方程存在唯一的以 T 为周期的解.

4.（数一 19，数二 21，数三 19）设数列$\{x_n\}$满足：$x_1>0,\ x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}}=\mathrm{e}^{x_n}-1\ (n=1,2,\cdots)$.

证明$\{x_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

5.（数二 16）已知连续函数 $f(x)$ 满足$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=ax^2$.

（1）求 $f(x)$；

（2）若 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上的平均值为 1，求a的值.

6.（数二 18）已知常数$k\geqslant\ln 2-1$.证明$(x-1)(x-\ln^2 x+2k\ln x-1)\geqslant 0$.

7.（数三 15）已知实数a,b满足$\lim\limits_{x\to+\infty}[(ax+b)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-x]=2$，求$a,b$的值.

8.（数三 16）设平面区域D由曲线$y=\sqrt{3(1-x^2)}$与直线$y=\sqrt{3}x$及y轴围成，计算

二重积分$\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

9.（数一 20，数二 22，数三 20）

设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$，其中 a 是参数.

（1）求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解；

（2）求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形.

10.（数一 21，数二 22，数三 21）已知 a 是常数，且矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

（1）求 a；

（2）求满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

11.（数一 22，数三 22）设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=-1\}=\dfrac{1}{2}$，$Y$ 服从参数为 λ 的泊松分布. 令 $Z=XY$.

（1）求 $\mathrm{Cov}(X,Z)$；

（2）求 Z 的概率分布.

12.（数一 23，数三 23）设总体 X 的概率密度为 $f(x;\sigma)=\dfrac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}$，$-\infty<x<+\infty$，其中 $\sigma\in(0,+\infty)$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.记 σ 的最大似然估计量为 σ.

（1）求 σ；

（2）求 $E\sigma$ 和 $D\sigma$.

2019 年真题

一、选择题

1.（数一 1，数二 1，数三 1）当 $x\to 0$ 时，若 $x-\tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小量，则 $k=$（　　）

（A）1.　　（B）2.　　（C）3.　　（D）4.

2.（数一 2）设函数 $f(x)=\begin{cases} x|x|, & x\leqslant 0, \\ x\ln x, & x>0, \end{cases}$ 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）

（A）可导点，极值点.　　（B）不可导点，极值点.

（C）可导点，非极值点.　　（D）不可导点，非极值点.

3.（数二 2）曲线 $y=x\sin x+2\cos x(-\dfrac{\pi}{2}<x<2\pi)$ 的拐点是（　　）

（A）$(0,2)$.　　（B）$(\pi,-2)$.　　（C）$(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$.　　（D）$(\dfrac{3\pi}{2},-\dfrac{3\pi}{2})$.

4.（数二 3）下列反常积分发散的是（　　）

（A）$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x$.　　（B）$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\mathrm{d}x$.　　（C）$\int_0^{+\infty} \dfrac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.　　（D）$\int_0^{+\infty} \dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

5.（数二 4，数三 3）已知微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+e^x$，则 a,b,c 依次为（　　）

（A）$1,0,1$.　　（B）$1,0,2$.　　（C）$2,1,3$.　　（D）$2,1,4$.

6.（数二 5）已知平面区域$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\leqslant\frac{\pi}{2}\}$，记$I_1=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

$I_2=\iint\limits_D\sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_3=\iint\limits_D(1-\cos\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则（　　）

（A）$I_3<I_2<I_1$.　（B）$I_2<I_1<I_3$.　（C）$I_1<I_2<I_3$.　（D）$I_2<I_3<I_1$.

7.（数三 2）已知方程$x^5-5x+k=0$有3个不同的实根，则k的取值范围是（　　）

（A）$(-\infty,-4)$.　（B）$(4,+\infty)$.　（C）$\{-4,4\}$.　（D）$(-4,4)$.

8.（数一 5，数二 8，数三 6）设$\boldsymbol{A}$是3阶实对称矩阵，$\boldsymbol{E}$是3阶单位矩阵. 若$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$，且$|\boldsymbol{A}|=4$，则二次型$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$的规范形为（　　）

（A）$y_1^2+y_2^2+y_3^2$.　（B）$y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

（C）$y_1^2-y_2^2-y_3^2$.　（D）$-y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

9.（数二 7，数三 5）设$\boldsymbol{A}$是4阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵.若线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系中只有2个向量，则$r(\boldsymbol{A}^*)=$（　　）

（A）0.　（B）1.　（C）2.　（D）3.

10.（数一 7，数三 7）设A,B为随机事件，则$P(A)=P(B)$的充分必要条件是（　　）

（A）$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.　（B）$P(AB)=P(A)P(B)$.

（C）$P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$.　（D）$P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$.

11.（数一 8，数三 8）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P\{|X-Y|<1\}$（　）

（A）与 μ 无关，而与 σ^2 有关.　　（B）与 μ 有关，而与 σ^2 无关.

（C）与 μ，σ^2 都有关.　　（D）与 μ，σ^2 都无关.

二、填空题

1.（数一 9）设函数 $f(u)$ 可导，$z=f(\sin y-\sin x)+xy$，则 $\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\cos y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=$______.

2.（数二 9）$\lim\limits_{x\to0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}=$__________.

3.（数二 11）设函数 $f(u)$ 可导，$z=yf(\dfrac{y^2}{x})$，则 $2x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________.

4.（数二 13）已知函数 $f(x)=x\int_1^x\dfrac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t$，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$__________.

5.（数三 9）$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]^n=$__________.

6.（数三 10）曲线 $y=x\sin x+2\cos x\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 的拐点坐标为__________.

7.（数三 11）已知函数 $f(x)=\int_1^x \sqrt{1+t^4}\mathrm{d}t$，则 $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=$____________.

8.（数一 13）设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为3阶矩阵. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，且 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为___________.

9.（数二 14）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-2&1&-1&1\\3&-2&2&-1\\0&0&3&4\end{pmatrix}$，$A_{ij}$ 表示 $|\boldsymbol{A}|$ 中 (i,j) 元的代数余子式，则

$A_{11}-A_{12}=$___________.

10.（数三 13）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&-1\\0&1&a^2-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\a\end{pmatrix}$.若线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解，则 $a=$___________.

11.（数一 14，数三 14）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2},0<x<2,\\0,\ \text{其他},\end{cases}$ $F(x)$ 为 X 的分布函数，EX 为 X 的数学期望，则 $P\{F(X)>EX-1\}=$___________.

三、解答题

1.（数一 15）设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+xy=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0)=0$ 的特解.

（1）求 $y(x)$；

（2）求曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

2.（数一 17，数三 18）求曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x\left(x\geqslant 0\right)$ 与 x 轴之间图形的面积.

3.（数二 19）设 n 是正整数，记 S_n 为曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x\ (0\leqslant x\leqslant n\pi)$ 与 x 轴所围图形的面积.

求 S_n，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

4.（数一 18，数三 19）设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x(n=0,1,2,\cdots)$.

（1）证明：数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n=2,3,\cdots)$；

（2）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

5.（数二 15，数三 15）已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^{2x}, & x>0, \\ x\mathrm{e}^x+1, & x\leqslant 0, \end{cases}$ 求 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 的极值.

6.（数二 16）求不定积分$\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\mathrm{d}x.$

7.（数二 17，数三 17）设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'-xy=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1)=\sqrt{\mathrm{e}}$ 的特解.

（1）求 $y(x)$；

（2）设平面区域 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant y(x)\}$，求 D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

8.（数二 18）已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid |x|\leqslant y,(x^2+y^2)^3\leqslant y^4\}$，计算二重积分

$\iint\limits_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

9.（数二 20）已知函数 $u(x,y)$ 满足 $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0$，求 a,b 的值使得在变换 $u(x,y)=v(x,y)\mathrm{e}^{ax+by}$ 之下，上述等式可化为函数 $v(x,y)$ 的不含一阶偏导数的等式.

10.（数二 21）已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(0)=0, f(1)=1, \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$.
证明：

（1）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$；

（2）存在 $\eta\in(0,1)$，使得 $f''(\eta)<-2$.

11.（数三 16）设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，函数 $g(x,y)=xy-f(x+y,x-y)$，
求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

12.（数一 21，数二 23，数三 21）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&-2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{pmatrix}$ 相似.

（1）求 x,y；

（2）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

13.（数二 22，数三 20）已知向量组I：$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\a^2+3\end{pmatrix}$；

II：$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\a+3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1-a\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\a^2+3\end{pmatrix}$.若向量组I与向量组II等价，求$a$的取值，并将$\boldsymbol{\beta}_3$用$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

14.（数一 22，数三 22）设随机变量X与Y相互独立，X服从参数为1的指数分布，Y的概率分布为$P\{Y=-1\}=p$，$P\{Y=1\}=1-p\,(0<p<1)$.令$Z=XY$.

（1）求Z的概率密度;

（2）p为何值时，X与Z不相关;

（3）X与Z是否相互独立?

15.（数一 23，数三 23）设总体X的概率密度为$f(x;\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geqslant\mu,\\ 0, & x<\mu,\end{cases}$其中$\mu$是已知参数，$\sigma>0$是未知参数，$A$是常数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的简单随机样本.

（1）求A；

（2）求σ^2的最大似然估计量.

2020 年真题

一、选择题

1.（数一 1，数二 1）当 $x\to 0^+$ 时，下列无穷小量中最高阶的是（　　）

（A）$\int_0^x (e^{t^2}-1)dt$.　　（B）$\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})dt$.

（C）$\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$.　　（D）$\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}dt$.

2.（数一 2）设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$，则（　　）

（A）当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

（B）当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

（C）当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$.

（D）当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=0$.

3.（数二 2，数三 2）函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为（　　）

（A）1.　　（B）2.　　（C）3.　　（D）4.

4.（数二 3）$\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x =$（　　）

（A）$\frac{\pi^2}{4}$.　　（B）$\frac{\pi^2}{8}$.　　（C）$\frac{\pi}{4}$.　　（D）$\frac{\pi}{8}$.

5.（数二 4）已知函数 $f(x) = x^2\ln(1-x)$.当 $n \geqslant 3$ 时，$f^{(n)}(0) =$（　　）

（A）$-\frac{n!}{n-2}$.　　（B）$\frac{n!}{n-2}$.　　（C）$-\frac{(n-2)!}{n}$.　　（D）$\frac{(n-2)!}{n}$.

6.（数二 5）关于函数 $f(x,y) = \begin{cases} xy, xy \neq 0, \\ x, y = 0, \\ y, x = 0, \end{cases}$ 给出下列结论：

①$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 1$;②$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0)} = 1$;③$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$;④$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$.

其中正确的个数为（　　）

（A）4.　　（B）3.　　（C）2.　　（D）1.

7.（数二 6）设函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上可导，且 $f'(x) > f(x) > 0$，则（　　）

（A）$\frac{f(-2)}{f(-1)} > 1$.　　（B）$\frac{f(0)}{f(-1)} > \mathrm{e}$.　　（C）$\frac{f(1)}{f(-1)} < \mathrm{e}^2$.　　（D）$\frac{f(2)}{f(-1)} < \mathrm{e}^3$.

8.（数三 1）设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-a}{x-a}=b$，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=$（　　）

（A）$b\sin a$.　　（B）$b\cos a$.　　（C）$b\sin f(a)$.　　（D）$b\cos f(a)$.

9.（数三 3）设奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有连续导数，则（　　）

（A）$\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]\mathrm{d}t$ 是奇函数.　　（B）$\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]\mathrm{d}t$ 是偶函数.

（C）$\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]\mathrm{d}t$ 是奇函数.　　（D）$\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]\mathrm{d}t$ 是偶函数.

10.（数一 5）若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等列变换化为 $\boldsymbol{B}$，则（　　）

（A）存在矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$.　　（B）存在矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{A}$.

（C）存在矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{PB}=\boldsymbol{A}$.　　（D）方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解.

11.（数二 7，数三 5）设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 不可逆，a_{12} 的代数余子式 $A_{12}\neq 0$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为（　　）

（A）$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

（B）$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

（C）$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

（D）$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

12.（数二 8，数三 6）设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值1的线性无关的特征向量，

$\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的特征向量. 则满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可为（ ）

（A）$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$.　　（B）$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$.

（C）$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$.　　（D）$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$.

13.（数一 7，数三 7）设 A,B,C 为三个随机事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12}$，则 A,B,C 中恰有一个事件发生的概率为（　　）

（A）$\frac{3}{4}$.　　（B）$\frac{2}{3}$.　　（C）$\frac{1}{2}$.　　（D）$\frac{5}{12}$.

14.（数一 8）设 $X_1,X_2,\ldots,X_{100}$ 为来自总体 X 的简单随机样本，其中

$P\{X=0\}=P\{X=1\}=\frac{1}{2}$. $\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数，则利用中心极限定理可得

$P\left\{\sum\limits_{i=1}^{100}X_i\leqslant 55\right\}$ 的近似值为（　　）

（A）$1-\Phi(1)$.　　（B）$\Phi(1)$.　　（C）$1-\Phi(0.2)$.　　（D）$\Phi(0.2)$.

15.（数三 8）若随机变量 (X,Y) 服从 $N\left(0,0;1,4;-\frac{1}{2}\right)$，则下列随机变量中服从标准正态分布且与 X 独立的是（　　）

（A）$\frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$.　　（B）$\frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$.　　（C）$\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$.　　（D）$\frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$.

二、填空题

1.（数一 9）$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]=$____________.

2.（数一 11）若函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)+af'(x)+f(x)=0\ (a>0)$，且 $f(0)=m$，$f'(0)=n$，

则 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=$__________.

3.（数一 12）设函数 $f(x,y)=\int_0^{xy} e^{xt^2}\mathrm{d}t$，则 $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=$____________.

4.（数二 10）$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1}\mathrm{d}x=$_______.

5.（数二 11，数三 9）设 $z=\arctan\left[xy+\sin(x+y)\right]$，则 $\mathrm{d}z|_{(0,\pi)}=$_______.

6.（数二 13）设 $y=y(x)$ 满足 $y''+2y'+y=0$，且 $y(0)=0$，$y'(0)=1$，则 $\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x=$____.

7.（数三 10）曲线 $x+y+e^{2xy}=0$ 在点 $(0,-1)$ 处的切线方程为__________.

8.（数三 12）设平面区域 $D=\left\{(x,y)\,|\,\frac{x}{2}\leqslant y\leqslant\frac{1}{1+x^2},0\leqslant x\leqslant 1\right\}$，则 D 绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为__________.

9.（数一 13，数二 14，数三 13）行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=$________.

10.（数一 14）设 X 服从区间 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上的均匀分布，$Y=\sin X$，则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=$_________.

11.（数三 14）设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\frac{1}{2^k},k=1,2,\cdots$. Y 表示 X 被 3 除的余数，则 $E(Y)=$_________.

三、解答题

1.（数一 15，数二 17，数三 16）求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

2.（数一 19，数三 19）设函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,2\right]$ 上具有连续导数，$f(0)=f(2)=0$，$M=\max\limits_{x\in[0,2]}\left\{\left|f(x)\right|\right\}$.证明：

（1）存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $\left|f'(\xi)\right|\geqslant M$；

（2）若对任意 $x\in(0,2)$，$\left|f'(x)\right|\leqslant M$，则 $M=0$.

3.（数二 15）求曲线 $y=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^{x}}(x>0)$ 的斜渐近线方程.

4.（数二 16）已知函数 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，$g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，求 $g'(x)$ 且证明 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

5.（数二 18）设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$ 且满足 $2f(x)+x^2 f(\dfrac{1}{x})=\dfrac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$.求 $f(x)$，并求曲线 $y=f(x), y=\dfrac{1}{2}, y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 及 y 轴所围图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

6.（数二 19）设平面区域D由$x=1,x=2,y=x$与x轴围成，计算$\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

7.（数二 20）设函数$f(x)=\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$.

（1）证明：存在$\xi\in(1,2)$，使得$f(\xi)=(2-\xi)\mathrm{e}^{\xi^2}$.

（2）证明：存在$\eta\in(1,2)$，使得$f(2)=\ln 2\cdot\eta\mathrm{e}^{\eta^2}$.

8.（数三 15）已知a,b为常数，若$(1+\frac{1}{n})^n-\mathrm{e}$与$\frac{b}{n^a}$在$n\to\infty$时是等价无穷小，求$a,b$.

9.（数三 18）设$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leqslant1,y\geqslant0\right\}$，连续函数$f(x,y)$满足

$f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+x\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，求$\iint\limits_D xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

10.（数一 20，数三 20）设二次型$f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$经正交变换$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$化为二次型$g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$，其中$a\geqslant b$.

（1）求a,b的值；

（2）求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$.

11.（数一 21，数二 23，数三 21）设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

（1）证明 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵；

（2）若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.

12.（数二 22）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2ax_1x_3+2ax_2x_3$ 经可逆线性变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+4y_3^2+2y_1y_2$.

（1）求 a 的值；

（2）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

13.（数一 22）设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，其中 X_1 与 X_2 均服从标准正态分布，X_3 的概率分布为 $P\{X_3=0\}=P\{X_3=1\}=\dfrac{1}{2}$. $Y=X_3X_1+(1-X_3)X_2$.

（1）求二维随机变量 (X_1,Y) 的分布函数，结果用标准正态分布函数 $\varPhi(x)$ 表示；

（2）证明随机变量 Y 服从标准正态分布.

14.（数三 22）设二维随机变量(X,Y)在区域$D=\left\{(x,y)\middle|0<y<\sqrt{1-x^2}\right\}$上服从均匀分布，

令$Z_1=\begin{cases}1, & X-Y>0,\\ 0, & X-Y\leqslant 0,\end{cases}$ $Z_2=\begin{cases}1, & X+Y>0,\\ 0, & X+Y\leqslant 0.\end{cases}$

（1）求二维随机变量(Z_1,Z_2)的概率分布；

（2）求Z_1与Z_2的相关系数.

15.（数一 23，数三 23）设某种元件的使用寿命T的分布函数为$F(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-(\frac{t}{\theta})^m}, & t\geqslant 0,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$

其中θ,m为参数且大于零.

（1）求概率$P\{T>t\}$与$P\{T>s+t|T>s\}$，其中$s>0,t>0$；

（2）任取n个这种元件做寿命试验，测得它们的寿命分别为$t_1,t_2,\ldots,t_n$.若m已知，求θ的最大似然估计值θ.

2021 年真题

一、选择题

1.（数一 1，数二 2，数三 2）函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处（　　）

（A）连续且取得极大值.　　（B）连续且取得极小值.

（C）可导且导数等于零.　　（D）可导且导数不为零.

2.（数一 2，数二 6，数三 4）设函数 $f(x,y)$ 可微，且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$，$f(x,x^2)=2x^2\ln x$，则 $df(1,1)=$（　　）

（A）$dx+dy$.　　（B）$dx-dy$.　　（C）dy.　　（D）$-dy$.

3.（数一 3）设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$，则（　　）

（A）$a=1,b=0,c=-\dfrac{7}{6}$.　　（B）$a=1,b=0,c=\dfrac{7}{6}$.

（C）$a=-1,b=-1,c=-\dfrac{7}{6}$.　　（D）$a=-1,b=-1,c=\dfrac{7}{6}$.

4.（数一 4，数二 7）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_0^1 f(x)dx=$（　　）

（A）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{2n}$.　　（B）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$.

（C）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$.　　（D）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k}{2n}\right)\dfrac{2}{n}$.

5.（数二 1，数三 1）当 $x \to 0$ 时，$\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt$ 是 x^7 的（　　）

（A）低阶无穷小.　（B）等价无穷小.　（C）高阶无穷小.　（D）同阶但非等价无穷小.

6.（数二 4，数三 3）设函数 $f(x)=ax-b\ln x(a>0)$ 有 2 个零点，则 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围为（　　）

（A）$(e,+\infty)$.　（B）$(0,e)$.　（C）$(0,\dfrac{1}{e})$.　（D）$(\dfrac{1}{e},+\infty)$.

7.（数二 5）设函数 $f(x)=\sec x$ 在 $x=0$ 处的 2 次泰勒多项式为 $1+ax+bx^2$，则（　　）

（A）$a=1,b=-\dfrac{1}{2}$.　（B）$a=1,b=\dfrac{1}{2}$.　（C）$a=0,b=-\dfrac{1}{2}$.　（D）$a=0,b=\dfrac{1}{2}$.

8.（数一 5，数二 8，数三 5）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为（　　）

（A）$2,0$.　（B）$1,1$.　（C）$2,1$.　（D）$1,2$.

9.（数一 6）已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$，记 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-k\boldsymbol{\beta}_1$，

$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-l_1\boldsymbol{\beta}_1-l_2\boldsymbol{\beta}_2$.若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 两两正交，则 l_1,l_2 依次为（　　）

（A）$\dfrac{5}{2},\dfrac{1}{2}$.　（B）$-\dfrac{5}{2},\dfrac{1}{2}$.　（C）$\dfrac{5}{2},-\dfrac{1}{2}$.　（D）$-\dfrac{5}{2},-\dfrac{1}{2}$.

10.（数一 7）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实矩阵，下列结论不成立的是（　　）

（A）$r\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \end{pmatrix}=2r(\boldsymbol{A})$.　　（B）$r\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}=2r(\boldsymbol{A})$.

（C）$r\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{BA} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}=2r(\boldsymbol{A})$.　　（D）$r\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{BA} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}=2r(\boldsymbol{A})$.

11.（数二 9）设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$.若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表出，则（　　）

（A）$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解.　　（B）$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

（C）$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.　　（D）$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

12.（数二 10，数三 7）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.若下三角可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和上三角可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}$ 为对角矩阵，则 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 可以分别取（　　）

（A）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.　　（B）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

（C）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.　　（D）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

13.（数三 6）设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 为 4 阶正交矩阵.若矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$k$ 表示任意常数，则线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解 $\boldsymbol{x}=$（　　）

（A）$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_1$.　　（B）$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_2$.

（C）$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_3$.　　（D）$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+k\boldsymbol{\alpha}_4$.

14.（数一 8，数三 8）设 A,B 为随机事件，且 $0<P(B)<1$，下列命题中为假命题的是（　　）

（A）若 $P(A|B)=P(A)$，则 $P(A|\overline{B})=P(A)$.

（B）若 $P(A|B)>P(A)$，则 $P(\overline{A}|\overline{B})>P(\overline{A})$.

（C）若 $P(A|B)>P(A|\overline{B})$，则 $P(A|B)>P(A)$.

（D）若 $P(A|A\cup B)>P(\overline{A}|A\cup B)$，则 $P(A)>P(B)$.

15.（数一 9）设 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 的简单随机样本.令 $\theta=\mu_1-\mu_2$，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$，$\hat{\theta}=\overline{X}-\overline{Y}$，则（　　）

（A）$\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计，$D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$.

（B）$\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计，$D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$.

（C）$\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计，$D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

（D）$\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计，$D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

16.（数三 9）设$(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$为来自总体$N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$的简单随机样本.令$\theta=\mu_1-\mu_2$，$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$\bar{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$，$\hat{\theta}=\bar{X}-\bar{Y}$，则（　　）

（A）$E(\hat{\theta})=\theta$，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$.（B）$E(\hat{\theta})=\theta$，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

（C）$E(\hat{\theta})\neq\theta$，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$.（D）$E(\hat{\theta})\neq\theta$，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

17.（数三 10）设总体X的概率分布为$P\{X=1\}=\frac{1-\theta}{2},P\{X=2\}=P\{X=3\}=\frac{1+\theta}{4}$.利用来自总体$X$的样本值$1,3,2,2,1,3,1,2$，可得$\theta$的最大似然估计值为（　　）

（A）$\frac{1}{4}$.　（B）$\frac{3}{8}$.　（C）$\frac{1}{2}$.　（D）$\frac{5}{8}$.

二、填空题

1.（数一 11）$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}=$__________.

2.（数二 11）$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|3^{-x^2}\mathrm{d}x=$__________.

3.（数二 13）设函数$z=z(x,y)$由方程$(x+1)z+y\ln z-\arctan(2xy)=1$确定，则$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,2)}=$__________.

4.（数二 14）已知函数 $f(t)=\int_1^{t^2}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{t}\sin\frac{x}{y}\mathrm{d}y$，则 $f'(\frac{\pi}{2})=$________.

5.（数二 15）微分方程 $y'''-y=0$ 的通解为 $y=$__________.

6.（数三 11）若 $y=\cos(\mathrm{e}^{-\sqrt{x}})$，则 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=$__________.

7.（数三 12）$\int_{\sqrt{5}}^{5}\frac{x}{\sqrt{|x^2-9|}}\mathrm{d}x=$__________.

8.（数三 13）设平面区域 D 由曲线段 $y=\sqrt{x}\sin\pi x(0\leqslant x\leqslant 1)$ 与 x 轴围成，则 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积为___________.

9.（数一 15）设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为3阶矩阵，A_{ij} 为元素 a_{ij} 代数余子式.若 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和均为2，且 $|\boldsymbol{A}|=3$，则 $A_{11}+A_{21}+A_{31}=$__________.

10.（数二 16，数三 15）多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数为__________.

11.（数一 16，数三 16）甲、乙两个盒子中各装有2个红球和2个白球，先从甲盒中任取一球，观察颜色后放入乙盒中，再从乙盒中任取一球，令 X,Y 分别表示从甲盒和从乙盒中取到的红球个数，则 X,Y 的相关系数为__________.

三、解答题

1.（数一 17，数二 17）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

2.（数二 18）已知函数 $f(x)=\dfrac{x|x|}{1+x}$，求曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间及渐近线.

3.（数二 20）设 $y=y(x)(x>0)$ 是微分方程 $xy'-6y=-6$ 满足条件 $y(\sqrt{3})=10$ 的解.

（1）求 $y(x)$；

（2）设 P 为曲线 $y=y(x)$ 上一点，记曲线 $y=y(x)$ 在点 P 处的法线在 y 轴上的截距为 I_P .

当 I_P 最小时，求点 P 的坐标.

4.（数二 21）设平面区域 D 由曲线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 与 x 轴围成，计算二重积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

5.（数三 17）已知 $\lim\limits_{x\to 0}[a\arctan\dfrac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}]$ 存在，求 a 的值.

6.（数三 18）求函数 $f(x,y)=2\ln|x|+\dfrac{(x-1)^2+y^2}{2x^2}$ 的极值.

7.（数三 19）设有界区域 D 是圆 $x^2+y^2=1$ 和直线 $y=x$ 以及 x 轴在第一象限围成的部分，计算二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{(x+y)^2}(x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

8.（数一 21）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$.

（1）求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵;

（2）求正定矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^2=(a+3)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为3阶单位矩阵.

9.（数二 22，数三 21）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&a&b\end{pmatrix}$ 仅有两个不同的特征值.若 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵，求 a,b 的值，并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

10.（数一 22，数三 22）在区间 $(0,2)$ 上随机取一点，将该区间分成两段，较短一段的长度记为 X，较长一段的长度记为 Y.令 $Z=\dfrac{Y}{X}$.

（1）求 X 的概率密度;

（2）求 Z 的概率密度;

（3）求 $E\left(\dfrac{X}{Y}\right)$.

2022 年真题

一、选择题

1.（数一 1）已知 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ln x}=1$，则（　　）

（A）$f(1)=0$.　　（B）$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$.

（C）$f'(1)=1$.　　（D）$\lim\limits_{x\to 1}f'(x)=1$.

2.（数一 2）已知 $z=xyf(\dfrac{y}{x})$，且 $f(u)$ 可导，$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=y^2(\ln y-\ln x)$，则（　　）

（A）$f(1)=\dfrac{1}{2}, f'(1)=0$.　　（B）$f(1)=0, f'(1)=\dfrac{1}{2}$.

（C）$f(1)=\dfrac{1}{2}, f'(1)=1$.　　（D）$f(1)=0, f'(1)=1$.

3.（数一 3，数二 6）设有数列 $\{x_n\}$，其中 x_n 满足 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x_n\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，则（　　）

（A）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

（B）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

（C）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$ 存在，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不一定存在.

（D）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$ 存在，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不一定存在.

4.（数一 4，数二 7，数三 4）已知 $I_1=\int_0^1 \frac{x}{2(1+\cos x)}\mathrm{d}x$， $I_2=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x$，

$I_3=\int_0^1 \frac{2x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$，则（　　）

（A）$I_1<I_2<I_3$.　　（B）$I_2<I_1<I_3$.　　（C）$I_1<I_3<I_2$.　　（D）$I_3<I_2<I_1$.

5.（数二 1，数三 1） $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$，$\beta(x)$ 是非零无穷小量，给出以下 4 个命题：

①若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，则 $\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$；

②若 $\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$，则 $\alpha(x)\sim\beta(x)$；

③若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，则 $\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$；

④若 $\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$，则 $\alpha(x)\sim\beta(x)$；

其中真命题是（　　）

（A）①③.　　（B）①④.　　（C）①③④.　　（D）②③④.

6.（数二 2） $\int_0^2 \mathrm{d}y\int_y^2 \frac{y}{\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}x=$（　　）

（A）$\frac{\sqrt{2}}{6}$.　　（B）$\frac{1}{3}$.　　（C）$\frac{\sqrt{2}}{3}$.　　（D）$\frac{2}{3}$.

7.（数二 3） $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处二阶可导，以下说法正确的是（　　）

（A）若在 $x=x_0$ 的某个邻域内 $f(x)$ 单调增加，则 $f'(x_0)>0$.

（B）若 $f'(x_0)>0$，则在 $x=x_0$ 的某个邻域内 $f(x)$ 单调增加.

（C）若在 $x=x_0$ 的某个邻域内 $f(x)$ 图像是凹的，则 $f''(x_0)>0$.

（D）若 $f''(x_0)>0$，则在 $x=x_0$ 某个邻域内 $f(x)$ 图像是凹的.

8.（数二 4，数三 3）设函数 $f(t)$ 连续，令 $F(x,y)=\int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)\mathrm{d}t$，则（　　）

（A） $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.　　（B） $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

（C） $\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.　　（D） $\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

9.（数二 5）设 p 为常数，有反常积分 $\int_0^1\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x$ 收敛，则 p 的取值范围是（　）

（A） $(-1,1)$.　　（B） $(-1,2)$.　　（C） $(-\infty,1)$.　　（D） $(-\infty,2)$.

10.（数三 2）已知 $a_n=\sqrt[n]{n}-\frac{(-1)^n}{n}\ (n=1,2,\cdots)$，则（　　）

（A）有最大值，有最小值.　　（B）有最大值，没有最小值.

（C）没有最大值，有最小值.　　（D）没有最大值，没有最小值.

11.(数一 5) 下列4个条件中，3阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化的一个充分但不必要条件为(　　)

(A) $\boldsymbol{A}$ 有3个不相等的特征值.

(B) $\boldsymbol{A}$ 有3个线性无关的特征向量.

(C) $\boldsymbol{A}$ 有3个两两线性无关的特征向量.

(D) $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量相互正交.

12.(数一 6) 设 $\boldsymbol{A}$， $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，若方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解，则 (　　)

(A) 方程组 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

(B) 方程组 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AB} \end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

(C) 方程组 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 与 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 同解.

(D) 方程组 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 与 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{BA} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 同解.

13.(数一 7，数二 10，数三 7) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$，若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 等价，则 λ 可取 (　　)

(A) $\{0,1\}$.

(B) $\{\lambda \mid \lambda\in\mathbf{R},\lambda\neq-2\}$.

(C) $\{\lambda \mid \lambda\in\mathbf{R},\lambda\neq-1,\lambda\neq-2\}$.

(D) $\{\lambda \mid \lambda\in\mathbf{R},\lambda\neq-1\}$.

14.（数二 8，数三 5）设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $1,-1,0$ 的充分必要条件为（　　）

（A）存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda Q}$.

（B）存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$.

（C）存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{-1}$.

（D）存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{\mathrm{T}}$.

15.（数二 9，数三 6）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&b&b^2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$（　　）

（A）有解.　　　　（B）无解.

（C）有无穷多解或无解.　　　　（D）有唯一解或无解.

16.（数一 8）设随机变量 $X\sim U(0,3)$，随机变量 Y 服从参数为 2 的泊松分布，且 X 与 Y 协方差为 -1，则 $D(2X-Y+1)=$（　　）

（A）1.　　（B）5.　　（C）9.　　（D）12.

17.（数一 9）设随机变量 X_1,X_2,X_3,X_4 独立同分布，且 X_1 的 4 阶矩存在.设 $\mu_k=E(X_1^k)$，$k=1,2,3,4$，则由切比雪夫不等式，对于任意的 $\varepsilon>0$，有 $P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\mu_2\right|\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant$（　　）

（A）$\dfrac{\mu_4-\mu_2^2}{n\varepsilon^2}$.　　（B）$\dfrac{\mu_4-\mu_2^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$.　　（C）$\dfrac{\mu_2-\mu_1^2}{n\varepsilon^2}$.　　（D）$\dfrac{\mu_2-\mu_1^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$.

18.（数一 10）设随机变量 $X \sim N(0,1)$，在 $X=x$ 的条件下，随机变量 $Y \sim N(x,1)$.则 X 与 Y 的相关系数为（　）

（A）$\dfrac{1}{4}$.　　（B）$\dfrac{1}{2}$.　　（C）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.　　（D）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

19.（数三 8）设随机变量 $X \sim N(0,4), Y \sim B(3,\dfrac{1}{3})$，且 X 与 Y 不相关,则 $D(X-3Y+1)=$（　）

（A）2.　　（B）4.　　（C）6.　　（D）10.

20.（数三 9）设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，X_i 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

则 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$ 依概率收敛于（　）

（A）$\dfrac{1}{8}$.　　（B）$\dfrac{1}{6}$.　　（C）$\dfrac{1}{3}$.　　（D）$\dfrac{1}{2}$.

21.（数三 10）二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
-1	0.1	0.1	b
1	a	0.1	0.1

已知事件 $\{\max(X,Y)=2\}$ 与事件 $\{\min(X,Y)=1\}$ 相互独立，则 $\operatorname{Cov}(X,Y)=$（　）

（A）-0.6.　　（B）-0.36.　　（C）0.　　（D）0.48.

二、填空题

1.（数一 12）$\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$__________.

2.（数一 13）当 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$ 时， $x^2+y^2\leqslant k\mathrm{e}^{x+y}$ 恒成立，则 k 的取值范围是__________.

3.（数二 11，数三 11）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\mathrm{e}^x}{2}\right)^{\cot x}=$__________.

4.（数二 12）设方程 $x^2+xy+y^3=3$ 确定了 $y=y(x)$，则 $y''(1)=$__________.

5.（数二 13）$\int_0^1\frac{2x+3}{x^2-x+1}\mathrm{d}x=$__________.

6.（数二 14）微分方程 $y'''-2y''+5y'=0$ 的通解为__________.

7.（数二 15）曲线的极坐标方程为 $r=\sin 3\theta, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}$，则曲线与极轴所围成的面积为__________.

8.（数三 12）$\int_0^2\frac{2x-4}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x=$__________.

9.（数三 13）设 $f(x)=\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x}$， $f'''(2\pi)=$__________.

10.（数三 14） $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x},0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0,\ 其他,\end{cases}$ 则 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)f(y-x)\mathrm{d}y=$__________.

11.（数一 15）已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $(\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=$_______.

12.（数二 16，数三 15）设 $\boldsymbol{A}$ 是3阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第二行与第三行交换，再将第二列的 -1 倍加到第一列，得到矩阵 $\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$，则 $tr(\boldsymbol{A}^{-1})=$_________.

13.（数一 16，数三 16）设 A,B,C 为随机事件，且 A 与 B 互不相容， A 与 C 互不相容， B 与 C 相互独立.若 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P\left(B\cup C\mid A\cup B\cup C\right)=$_______.

三、解答题

1.（数一 17，数三 17）设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+\frac{1}{2\sqrt{x}}y=2+\sqrt{x}$ 的满足 $y(1)=3$ 的解，求曲线 $y=y(x)$ 的渐近线.

2.（数一 18，数二 19，数三 19）已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle| y-2\leqslant x\leqslant\sqrt{4-y^2}, 0\leqslant y\leqslant 2\right\}$，计算 $I=\iint\limits_D \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

3.（数一 20，数二 21）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有二阶连续导数，证明：$f''(x)\geqslant 0$ 的充要条件为对不同实数 a,b，$f(\frac{a+b}{2})\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

4.（数二 17）已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，满足 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\mathrm{e}^{x^2})-3f(1+\sin^2 x)}{x^2}=2$，求 $f'(1)$.

5.（数二 20）已知可微函数 $f(u,v)$ 满足 $\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}-\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}=2(u-v)\cdot\mathrm{e}^{-(u+v)}$，且 $f(u,0)=u^2\mathrm{e}^{-u}$.

（1）记 $g(x,y)=f(x,y-x)$，求 $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$；

（2）求 $f(u,v)$ 的表达式和极值.

6.（数一 21）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} ij\cdot x_i x_j$.

（1）写出 $f(x_1,x_2,x_3)$ 对应的矩阵；

（2）求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形；

（3）求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

7.（数二 22，数三 21）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$.

（1）求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化二次型为标准形；

（2）证明 $\min\limits_{x\neq 0}\dfrac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}=2$.

8.（数一 22，数三 22）设 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 为来自均值为 θ 的指数分布总体的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots Y_m$ 为来自均值为 2θ 的指数分布总体的简单随机样本，且两样本相互独立，其中 $\theta(\theta>0)$ 是未知参数，利用样本 $X_1,X_2,\cdots X_n$，$Y_1,Y_2,\cdots Y_m$ 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$，并求 $D(\hat{\theta})$.

附录一：数一专题

2016 年

（6）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=2$ 在空间直角坐标下表示的二次曲面为（　　）

（A）单叶双曲面．　　（B）双叶双曲面．　　（C）椭球面．　　（D）柱面．

（10）向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=(x+y+z)\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 的旋度 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=$____________.

（14）设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，样本均值 $\bar{x}=9.5$，参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8，则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为____________.

（17）设函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)\mathrm{e}^{2x-y}$，且 $f(0,y)=y+1$，L_t 是从点 $(0,0)$ 到点 $(1,t)$ 的光滑曲线．计算曲线积分 $I(t)=\int_{L_t}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y$，并求 $I(t)$ 的最小值．

（18）设有界区域 Ω 由平面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标平面围成，Σ 为 Ω 整个表面的外侧，计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$．

2017 年

（3）函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,2)$ 的方向导数为（　　）

（A）12.　　（B）6.　　（C）4.　　（D）2.

（11）若曲线积分 $\int_L \frac{x\mathrm{d}x-ay\mathrm{d}y}{x^2+y^2-1}$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}$ 内与路径无关，则 $a=$_______.

（19）设薄片型物体 S 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 割下的有限部分，其上任一点的密度为 $\mu(x,y,z)=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.记圆锥面与柱面的交线为 C .

（1）求 C 在 xOy 平面上的投影曲线的方程；

（2）求 S 的质量 M .

2018 年

（2）过点 $(1,0,0)$，$(0,1,0)$，且与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切的平面为（　　）

（A）$z=0$ 与 $x+y-z=1$.　　（B）$z=0$ 与 $2x+2y-z=2$.

（C）$y=x$ 与 $x+y-z=1$.　　（D）$y=x$ 与 $2x+2y-z=2$.

（8）设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$．$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，据此样本检验假设 $H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$，则（　　）

（A）如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0.

（B）如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0.

（C）如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0.

（D）如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0.

（11）设 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=xy\boldsymbol{i}-yz\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k}$，则 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}(1,1,0)=$________.

（12）设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，则 $\oint_L xy\mathrm{d}s=$________.

（17）设 Σ 是曲面 $x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 的前侧，计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2019 年

（4）设函数$Q(x,y)=\dfrac{x}{y^2}$. 如果对上半平面$(y>0)$内的任意有向光滑封闭曲线C都有

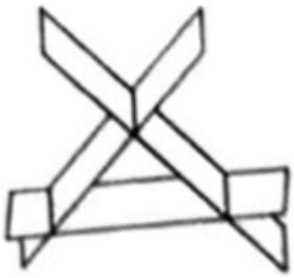
$\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$，那么函数$P(x,y)$可取为（　　）

（A）$y-\dfrac{x^2}{y^3}$.　　（B）$\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{y^3}$.　　（C）$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$.　　（D）$x-\dfrac{1}{y}$.

（6）如图所示，有3张平面两两相交，交线相互平行，它们的方程

$$a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=d_i\ (i=1,2,3)$$

组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为$\boldsymbol{A},\overline{\boldsymbol{A}}$，则（　　）



（A）$r(\boldsymbol{A})=2,r(\overline{\boldsymbol{A}})=3.$

（B）$r(\boldsymbol{A})=2,r(\overline{\boldsymbol{A}})=2.$

（C）$r(\boldsymbol{A})=1,r(\overline{\boldsymbol{A}})=2.$

（D）$r(\boldsymbol{A})=1,r(\overline{\boldsymbol{A}})=1.$

（12）设Σ为曲面$x^2+y^2+4z^2=4\ (z\geqslant 0)$的上侧，则$\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$__________.

（16）设 a,b 为实数，函数 $z=2+ax^2+by^2$ 在点 $(3,4)$ 处的方向导数中，沿方向 $\boldsymbol{l}=-3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$ 的方向导数最大，最大值为10.

（1）求 a,b；

（2）求曲面 $z=2+ax^2+by^2\ (z\geqslant 0)$ 的面积.

（19）设 Ω 是由锥面 $x^2+(y-z)^2=(1-z)^2(0\leqslant z\leqslant 1)$ 与平面 $z=0$ 围成的椎体，求 Ω 的形心坐标.

（20）设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,a,3)^{\mathrm{T}}$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基，$\boldsymbol{\beta}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 在这个基下的坐标 $(b,c,1)^{\mathrm{T}}$.

（1）求 a,b,c；

（2）证明 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基，并求 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵.

2020 年

（3）设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，$f(0,0)=0$，$\boldsymbol{n}=(f'_x,f'_y,-1)\big|_{(0,0)}$，非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直，则（　　）

（A）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在.

（B）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{n}\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在.

（C）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{\alpha}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在.

（D）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{\alpha}\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在.

（6）已知直线 $l_1:\dfrac{x-a_2}{a_1}=\dfrac{y-b_2}{b_1}=\dfrac{z-c_2}{c_1}$ 与直线 $l_2:\dfrac{x-a_3}{a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_2}$ 相交于一点.

记向量 $\boldsymbol{\alpha}_i=\begin{pmatrix}a_i\\b_i\\c_i\end{pmatrix}$，$i=1,2,3$，则（　　）

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

（B）$\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

（C）$\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示.

（D）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

（16）计算曲线积分 $I=\int_L\dfrac{4x-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x+\dfrac{x+y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y$，其中 L 是 $x^2+y^2=2$，方向为逆时针方向.

（18）设 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4)$ 的下侧，$f(x)$ 为连续函数. 计算

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\left[xf(xy)+2x-y\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[yf(xy)+2y+x\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left[zf(xy)+z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2021 年

（10）设 $X_1,X_2,\cdots,X_{16}$ 是来自总体 $N(\mu,4)$ 的简单随机样本，考虑假设检验问题:

$H_0:\mu\leqslant 10,H_1:\mu>10$，$\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数.若该检验问题的拒绝域为

$W=\{\bar{X}\geqslant 11\}$，其中 $\bar{X}=\dfrac{1}{16}\sum\limits_{i=1}^{16}X_i$，则 $\mu=11.5$ 时，该检验犯第二类错误的概率为(　　)

(A)$1-\Phi(0.5)$.　　(B)$1-\Phi(1)$.　　(C)$1-\Phi(1.5)$.　　(D)$1-\Phi(2)$.

（13）欧拉方程 $x^2y''+xy'-4y=0$ 满足条件 $y(1)=1,y'(1)=2$ 的解为 $y=$__________.

（14）设 Σ 为空间区域 $\{(x,y,z)\,|\,x^2+4y^2\leqslant 4,0\leqslant z\leqslant 2\}$ 表面的外侧，则曲面积分

$\oiint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$__________.

（19）已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+2y^2-z=6,\\4x+2y+z=30,\end{cases}$ 求 C 上的点到 xOy 坐标面距离的最大值.

（20）设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 是有界单连通闭区域，$I(D)=\iint\limits_D(4-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 取得最大值的积分域记为 D_1.

（1）求 $I(D_1)$ 的值;

（2）计算 $\displaystyle\int_{\partial D_1}\frac{(x\mathrm{e}^{x^2+4y^2}+y)\mathrm{d}x+(4y\mathrm{e}^{x^2+4y^2}-x)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$，其中 ∂D_1 是 D_1 的正向边界.

2022 年

（11）函数 $f(x,y)=x^2+2y^2$ 在点 $(0,1)$ 的最大方向导数为_______.

（19）L 是曲面 $\Sigma: 4x^2+y^2+z^2=1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$ 的边界，曲面方向朝上，已知曲线 L 的方向和曲面的方向符合右手法则，求 $I=\oint_L \left(yz^2-\cos z\right)\mathrm{d}x+2xz^2\mathrm{d}y+\left(2xyz+x\sin z\right)\mathrm{d}z$.

附录二：数一、数二专题

2016 年

1.（数二 5）设函数 $f_i(x)\,(i=1,2)$ 具有二阶连续导数，且 $f_i''(x_0)<0\,(i=1,2)$.若两条曲线 $y=f_i(x)\,(i=1,2)$ 在点 (x_0,y_0) 处具有公切线 $y=g(x)$，且在该点处曲线 $y=f_1(x)$ 的曲率大于曲线 $y=f_2(x)$ 的曲率，则在 x_0 的某个领域内，有（　　）

（A） $f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant g(x)$.　　（B） $f_2(x)\leqslant f_1(x)\leqslant g(x)$.

（C） $f_1(x)\leqslant g(x)\leqslant f_2(x)$.　　（D） $f_2(x)\leqslant g(x)\leqslant f_1(x)$.

2.（数二 13）已知动点 P 在曲线 $y=x^3$ 上运动，记坐标原点与点 P 间的距离为 l .若点 P 的横坐标对时间的变化率为常数 v_0，则当点 P 运动到点 $(1,1)$ 时，l 对时间的变化率是________.

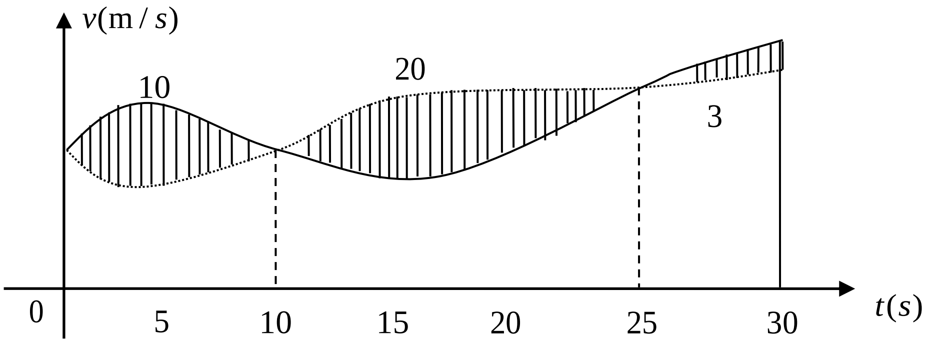
3.（数二 19）

已知 $y_1(x)=\mathrm{e}^x, y_2(x)=u(x)\mathrm{e}^x$ 是二阶微分方程 $(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$ 的两个解.若 $u(-1)=\mathrm{e}, u(0)=-1$，求 $u(x)$，并写出该微分方程的通解.

4.（数二 20）设 D 是由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}\,(0\leqslant x\leqslant 1)$ 与 $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}\left(0\leqslant t\leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$ 围成的平面区域，求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积.

2017 年

1.（数一 4，数二 6）甲、乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方10（单位：m）处.图中，实线表示甲的速度曲线$v=v_1(t)$（单位：$\mathrm{m/s}$），虚线表示乙的速度曲线$v=v_2(t)$，三块阴影部分面积的数值依次为$10,20,3$.计时开始后乙追上甲的时刻记为t_0（单位：s），则（　　）



（A）$t_0=10$.　　（B）$15<t_0<20$.　　（C）$t_0=25$.　　（D）$t_0>25$.

2.（数二 10）设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=t+\mathrm{e}^t,\\ y=\sin t\end{cases}$确定，则$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$__________.

2018 年

1.（数二 12）曲线$\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t \end{cases}$在$t=\dfrac{\pi}{4}$对应点处的曲率为________.

2.（数二 17）设平面区域D由曲线$\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t \end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$与$x$轴围成，计算二重积分$\iint\limits_D (x+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

3.（数二 20）已知曲线$L: y=\dfrac{4}{9}x^2(x\geqslant 0)$，点$O(0,0)$，点$A(0,1)$. 设$P$是$L$上的动点，$S$是直线$OA$与直线$AP$及曲线$L$所围图形的面积.若$P$运动到点$(3,4)$时沿$x$轴正向的速度是$4$，求此时$S$关于时间$t$的变化率.

2019 年

1.（数二 6）设函数 $f(x),g(x)$ 的二阶导函数在 $x=a$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$ 是两条曲线 $y=f(x),y=g(x)$ 在 $x=a$ 对应的点处相切且曲率相等的（　　）

（A）充分不必要条件.　　（B）充分必要条件.

（C）必要不充分条件.　　（D）既不充分又不必要条件.

2.（数一 10）微分方程 $2yy'-y^2-2=0$ 满足条件 $y(0)=1$ 的特解为 $y=$__________.

3.（数二 10）曲线 $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t \end{cases}$ 在 $t=\dfrac{3}{2}\pi$ 对应点处的切线在 y 轴上的截距为__________.

4.（数二 12）曲线 $y=\ln\cos x(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6})$ 的弧长为__________.

2020 年

1.（数一 10，数二 9）设$\begin{cases} x=\sqrt{t^2+1}, \\ y=\ln(t+\sqrt{t^2+1}), \end{cases}$ 则$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1} =$ ____________.

2.（数二 12）斜边长为$2a$的等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中，且斜边与水面相齐. 记重力加速度为g，水的密度为ρ，则该平板一侧所受的水压力为_______.

3.（数二 21）设函数$f(x)$可导，且$f'(x)>0$.曲线$y=f(x)(x\geqslant 0)$经过坐标原点O，其上任意一点M处的切线与x轴交于T，又MP垂直x轴于点P.已知由曲线$y=f(x)$，直线MP以及x轴所围图形的面积与ΔMTP的面积之比恒为$3:2$，求满足上述条件的曲线的方程.

2021 年

1.（数二 3）有一圆柱体底面半径与高随时间变化的速率分别为$2\ \mathrm{cm/s}, -3\ \mathrm{cm/s}$，当底面半径为$10\ \mathrm{cm}$，高为$5\ \mathrm{cm}$时，圆柱体的体积与表面积随时间变化的速率分别为（　　）

（A）$125\pi\ \mathrm{cm^3/s}, 40\pi\ \mathrm{cm^2/s}$.　　（B）$125\pi\ \mathrm{cm^3/s}, -40\pi\ \mathrm{cm^2/s}$.

（C）$-100\pi\ \mathrm{cm^3/s}, 40\pi\ \mathrm{cm^2/s}$.　　（D）$-100\pi\ \mathrm{cm^3/s}, -40\pi\ \mathrm{cm^2/s}$.

2.(数一 12，数二 12)设函数 $y=y(x)$ 由参数方程$\begin{cases} x=2\mathrm{e}^t+t+1, \\ y=4(t-1)\mathrm{e}^t+t^2 \end{cases}$确定，则$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$____.

3.（数二 19）设函数 $f(x)$ 满足$\displaystyle\int\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\frac{1}{6}x^2-x+C$，$L$ 为曲线 $y=f(x)(4\leqslant x\leqslant 9)$.记 L 的长度为 s， L 绕 x 轴旋转所成旋转曲面的面积为 A，求 s 和 A.

2022 年

（数二 18）设 $y(x)$ 是微分方程 $2xy'-4y=2\ln x-1$ 满足 $y(1)=\dfrac{1}{4}$ 的解.求曲线 $y=y(x)$ $(1\leqslant x\leqslant \mathrm{e})$ 的弧长.

附录三：数一、数三专题（无穷级数）

2016 年

1.（数一 19）已知函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=1,0<f'(x)<\dfrac{1}{2}$. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=1,2,\cdots)$.证明：

（1）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且 $0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$.

2.（数三 4）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)$（$k$ 为常数）（　　）

（A）绝对收敛.　（B）条件收敛.　（C）发散.　（D）收敛性与 k 有关.

3.（数三 19）求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛域及和函数.

2017 年

1.（数三 4）若级数$\sum_{n=2}^{\infty}[\sin\frac{1}{n}-k\ln(1-\frac{1}{n})]$收敛，则$k=$（　　）

（A）1.　　（B）2.　　（C）-1.　　（D）-2.

2.（数一 12）幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$在区间$(-1,1)$内的和函数$S(x)=$____________.

3.（数三 19）若$a_0=1$，$a_1=0$，$a_{n+1}=\frac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})(n=1,2,3,\cdots)$，$S(x)$为幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数.

（1）证明幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径不小于 1；

（2）证明$(1-x)S'(x)-xS(x)=0\ (x\in(-1,1))$，并求$S(x)$的表达式.

2018 年

1.（数一 3）$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+3}{(2n+1)!}=$（　　）

（A）$\sin1+\cos1$.　　　　（B）$2\sin1+\cos1$.

（C）$3\sin1+\cos1$.　　　　（D）$3\sin1+2\cos1$.

2. （数三 18）已知$\cos 2x-\dfrac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n(-1<x<1)$，求$a_n$.

2019 年

1.（数一 3）设$\{u_n\}$是单调增加的有界数列，则下列级数中收敛的是（　　）

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$.　　　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{u_n}$.

（C）$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{u_n}{u_{n+1}})$.　　　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}^2-u_n^2)$.

2.（数三 4）若$\sum_{n=1}^{\infty}nu_n$绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n}{n}$条件收敛，则（　　）

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$条件收敛.　　　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$绝对收敛.

（C）$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$收敛.　　　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$发散.

3.（数一 11）幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$在$(0,+\infty)$内的和函数$S(x)=$__________.

2020 年

1.（数一 4）设 R 为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径，r 为实数，则（　　）

（A）当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散时，$|r| \geqslant R$.　　（B）当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 收敛时，$|r| \leqslant R$.

（C）当 $|r| \geqslant R$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散.　　（D）当 $|r| \leqslant R$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 收敛.

2.（数三 4）设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-2)^n$ 的收敛区间为 $(-2,6)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^{2n}$ 的收敛区间为（　　）

（A）$(-2,6)$.　　（B）$(-3,1)$.　　（C）$(-5,3)$.　　（D）$(-17,15)$.

3.（数一 17）设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$，$(n+1)a_{n+1} = (n+\frac{1}{2})a_n$，证明:当 $|x| < 1$ 时，幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛，并求其和函数.

4.（数三 17）设函数 $y = f(x)$ 满足 $y'' + 2y' + 5y = 0$，且 $f(0) = 1,\ f'(0) = -1$.

（1）求 $f(x)$ 的表达式;

（2）设 $a_n = \int_{n\pi}^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$，求 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2021 年

1.（数一 18）设 $u_n(x)=\mathrm{e}^{-nx}+\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}(n=1,2,\cdots)$，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域及和函数.

2.（数三 20）设 n 为正整数，$y=y_n(x)$ 是微分方程 $xy'-(n+1)y=0$ 满足条件

$y_n(1)=\dfrac{1}{n(n+1)}$ 的解.

（1）求 $y_n(x)$；

（2）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n(x)$ 的收敛域及和函数.

2022 年

1.（数一 14）已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}\mathrm{e}^{-nx}$的收敛域为$(a,+\infty)$，则$a=$_______.

2.（数三 20）求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-4)^n+1}{4^n(2n+1)}x^{2n}$的收敛域及和函数$S(x)$.

附录四：数三专题

2016 年

（16）设某商品的最大需求量为 1200 件，该商品的需求函数 $Q=Q(p)$，需求弹性

$\eta=\dfrac{p}{120-p}(\eta>0)$, p 为单价（万元）.

（1）求需求函数的表达式;

（2）求 $p=100$ 万元时的边际收益，并说明其经济意义.

2017 年

（10）差分方程 $y_{t+1}-2y_t=2^t$ 的通解为 $y_t=$____________.

（11）设生产某产品的平均成本 $\overline{C}(Q)=1+\mathrm{e}^{-Q}$，其中 Q 为产量，则边际成本为__________.

2018 年

（4）设某产品的成本函数$C(Q)$可导，其中Q为产量.若产量为Q_0时平均成本最小，则（　）

（A）$C'(Q_0)=0$.　　（B）$C'(Q_0)=C\left(Q_0\right)$.

（C）$C'(Q_0)=Q_0C\left(Q_0\right)$.　　（D）$Q_0C'(Q_0)=C\left(Q_0\right)$.

（11）差分方程$\Delta^2 y_x - y_x = 5$的通解为________.

2019 年

（12）以p_A, p_B分别表示A、B两种商品的价格，设商品A的需求函数为

$Q_A = 500 - p_A{}^2 - p_A p_B + 2p_B{}^2$，则当$p_A = 10$，$p_B = 20$时，商品$A$的需求量对自身价格的弹性$\eta_{AA}$ $(\eta_{AA} > 0)$为________.

2020 年

（11）设某厂家生产某产品的产量为Q，成本$C(Q)=100+13Q$，设产品的单价为p，需求量$q(p)=\dfrac{800}{p+3}-2$，则该厂家获得最大利润时的产量为__________.

2021 年

（14）差分方程 $\Delta y_t = t$ 的通解为 $y_t =$__________.

2022 年

（18）设某产品的产量 Q 由资本投入量 x 和劳动投入量 y 决定，生产函数为 $Q = 12x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}$，该产品的销售单价 p 与 Q 的关系为 $p = 1160 - 1.5Q$.若单位资本投入和单位劳动投入的价格分别为 6 和 8，求利润最大时的产量.

拔高专题

第一部分　高等数学

一、极限综合专题

【1】计算下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}-2[x]\right\}$，其中$[x]$表示不超过$x$的最大整数.

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x}-x\arctan x}{\dfrac{\pi}{2}x+e^{x}}$.

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

【2】计算下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt{\cos 3x}}{x^{2}}$.

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^{2}}{2}+1-\sqrt{1+x^{2}}}{(\cos x-e^{x^{2}})\sin x^{2}}$.

（3） $f(x)$ 连续且满足 $f(0)=0, f'(0)\neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t}{x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$.

（4） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{\ln(1+x)\int_0^1\tan(xt)^2\mathrm{d}t}$.

【3】计算下列极限

（1） $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\dfrac{1}{n}-\arctan\dfrac{1}{n+1}\right)$.

（2） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

（3） $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n+k}{n^2+k}$.

【4】求解下列各题

（1）设 $x_1=2$， $x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

（2）（I）证明方程 $\mathrm{e}^{x}+x^{2n+1}=0$ 在 $(-1,0)$ 内有唯一的实根 $x_n\ (n=0,1,2,\cdots)$；

（II）证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值.

二、导数综合专题

【5】设 $f(x)$ 是可导函数，且 $f(x)=x+x\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t+x^2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$，求 $f(x)$.

【6】设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，请证明以下结论：

（1）当 $f(x_0)>0$ 时，$y=|f(x)|$ 在点 x_0 处可导，且 $y'|_{x=x_0}=f'(x_0)$.

（2）当 $f(x_0)<0$ 时，$y=|f(x)|$ 在点 x_0 处可导，且 $y'|_{x=x_0}=-f'(x_0)$.

（3）当 $f(x_0)=0$ 时，但 $f'(x_0)\neq 0$ 时，$y=|f(x)|$ 在点 x_0 处不可导.

（4）当 $f(x_0)=0$ 时，且 $f'(x_0)=0$ 时，$y=|f(x)|$ 在点 x_0 处可导，且 $y'|_{x=x_0}=0$.

【7】设 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 内有定义，且对任何的 $x,y\in(-l,l)$ 均有 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$，又 $f'(0)=1$，求证 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 上处处可导并求 $f(x)$ 的表达式.

【8】求高阶导.

（1）设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{3}x}\sin x$，则 $f^{(2023)}(0)=$____________.

（2）设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+2x+4x^2}$，则 $f^{(2023)}(0)=$____________.

【9】已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上具有 2 阶导数， $f(a)=0, f'(x)>0, f''(x)>0$，设 $b>a$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(b,f(b))$ 处的切线与 x 轴的交点是 $(x_0,0)$，证明 $a<x_0<b$.

【10】求方程 $k\arctan x-x=0$ 不同实根的个数，其中 k 为参数.

【11】设函数 $f(x)$ 满足方程 $\dfrac{f''(x)}{x}+3x\left[f'(x)\right]^2=(1+\dfrac{1}{x})\ln^2(1+x)-x$，若 $x_0>0$ 是函数 $f(x)$ 的驻点，试问 x_0 是否是函数 $f(x)$ 的极值点，请说明你的理由.

【12】（数一、二）求曲线 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 在 $(1,1)$ 处的曲率半径.

三、中值定理专题

【13】设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)f(b)>0,\ f(a)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$，

证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=kf(\xi)$.

【14】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=0$.证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$\int_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x=0$.

【15】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $f(0)=0,\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$.证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$\int_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x=\xi f(\xi)$.

【16】设函数 $f(x),g(x)$ 均在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=g(0),\ f(1)=g(1)$.

证明：存在 $\xi\in(0,\frac{1}{2}),\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=g'(\xi)+g'(\eta)$.

【17】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a)=f(c)=f(b),c\in(a,b)$.又

设 $f(x)$ 在 (a,b) 内任意子区间内不恒为常数.证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)<0$.

四、定积分综合专题

【18】$S(x)=\int_0^x |\cos t| \mathrm{d}t$.

（1）证明：当$n \in N_+$，且$n\pi \leqslant x<(n+1)\pi$时，$2n \leqslant S(x)<2(n+1)$；

（2）求$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}$.

【19】证明$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 \mathrm{d}x>0$.

【20】设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，T为常数，则下列命题中错误的是（　　）

（A）对于任意的a，$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$.

（B）对于任意的a，$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(-x)=f(x)$.

（C）对于任意的a，$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x$与$a$无关$\Leftrightarrow f(x)$有周期为$T$.

（D）$f(x+T)=f(x) \Leftrightarrow \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$以$T$为周期.

【21】设函数$f(x)$连续，$\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\arctan x^2$，且$f(1)=1$，求$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

【22】设 $f(x)$ 在 $\left[-l,l\right]$ 上连续且 $f'(0)\neq 0$，其中 $l>0$.

（1）证明对任意的 $x\in(0,l)$，都存在 $\theta\in(0,1)$，使得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t = x\left[f(\theta x)-f(-\theta x)\right].$$

（2）求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta.$

【23】设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且其图像关于 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 对称，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x.$$

【24】计算下列积分：

（1）$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x$.

（2）$f(x^2-1)=\ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$, $f(\varphi(x))=\ln x$，求 $\displaystyle\int_0^2\frac{\varphi'(x)}{4+\varphi^2(x)}\mathrm{d}x$.

【25】讨论积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$ 的敛散性，其中 $\alpha>0$.

【26】已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$ 且 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$，求曲线 $f(x,y)=0$ 所围图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成旋转体的体积.

五、微分方程综合专题

【27】设 $y''+p(x)y'=f(x)$ 有一个特解 $y=\dfrac{1}{x}$，对应齐次方程有一个特解为 $y=x^2$，求该方程的通解.

【28】设函数 $u=f(\sqrt{x^2+y^2})$， f 二阶可导，且满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\iint\limits_D \dfrac{1}{1+s^2+t^2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t$，其中 $D=\left\{(s,t)\middle|s^2+t^2\leqslant x^2+y^2\right\}$，又 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=0$.

（1）试求 $f'(x)$ 的表达式；（2）若 $f(0)=0$，求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x^4}$.

【29】（数一）设可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x\int_0^x\left[f(t)\right]^2\mathrm{d}t$，求 $f(x)$ 的表达式.

【30】（数一、二）设函数 $y(x)$ 满足方程 $y(x)=x^3-x\int_1^x \frac{y(t)}{t^2}\mathrm{d}t+y'(x), x>0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x^3}=\frac{2}{3}$.求函数 $y(x)$.

六、多元函数微分学综合专题

【31】设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$ 求 $f''_{xy}(0,0), f''_{yx}(0,0)$.

【32】设 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数，且 $f(x,y)=1-x-y+o(\sqrt{(x-1)^2+y^2})$.若 $g(x,y)=f(\mathrm{e}^{xy},x^2+y^2)$.试问 $(0,0)$ 是否为 $g(x,y)$ 的极值点，请说明理由.

【33】设函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $f(0,0)=1, f'_x(0,0)=2, f'_y(0,y)=-3$，以及 $f''_{xx}(x,y)=y, f''_{xy}(x,y)=x+y$，试求 $f(x,y)$ 的表达式.

七、多元函数积分学综合专题

【34】设平面区域 D 由直线 $x+y=\frac{1}{2}, x+y=1$ 及两条坐标轴所围成.记 $I_1=\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_2=\iint\limits_D [\sin(x+y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_3=\iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则有（　）

（A）$I_3>I_2>I_1$.　（B）$I_1>I_2>I_3$.　（C）$I_2>I_1>I_3$.　（D）$I_1>I_3>I_2$.

【35】设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\arctan(1+x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 若平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\leqslant a^2\right\}$，则 $\lim\limits_{a\to 0^+}\dfrac{\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi a^2}=$（　）

（A）$\frac{\pi}{2}$.　（B）$\frac{\pi}{4}$.　（C）$\frac{\pi}{8}$.　（D）0.

【36】交换积分次序 $I=\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\mathrm{d}y$.

【37】$I=\iint\limits_D \max\{x,y\}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle| x\geqslant 0, y\geqslant 0\right\}$.

以下 38-43 题属于数一内容：

【38】设有一匀质物体，在空间所占据的区域Ω由球面$x^2+y^2+z^2=2az$与圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$所围成，其中$a>0$，求该物体的质心坐标.

【39】计算曲线积分$I=\int_L \frac{(x+2)^2+(y-3)^2}{x^2+y^2+z^2}ds$，其中$L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y=0. \end{cases}$

【40】一薄壳形状为$x^2+y^2=2-2z(z>0)$，其上任一点(x,y,z)处的面密度为$\mu=\frac{3}{2}+y-z$，求该薄壳的质量.

【41】已知$du=\frac{ax+y}{x^2+y^2}dx-\frac{x-y+b}{x^2+y^2}dy$.

（1）求a,b；（2）计算$\oint_l du$，其中$l:x^2+y^2=1$且为逆时针方向.

【42】求 $I=\oint_L (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$，其中 L 是半球面 $x^2+y^2+z^2=2ax\ (z\geqslant 0)$ 与圆柱面 $x^2+y^2=2bx\ (a>b>0)$ 的交线，从 z 轴正向看为逆时针方向.

【43】已知点 $A(0,0,0)$ 与点 $B(0,1,1)$，$\varSigma$ 是由直线 $\overline{AB}$ 绕 z 轴旋转一周所得旋转曲面（介于 $z=1$ 与 $z=2$ 之间部分的内侧），且 $f(x)$ 可导.

（1）求曲面 $\varSigma$ 的方程；

（2）计算 $I=\iint\limits_{\varSigma}[xf(\frac{x}{y})+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[yf(\frac{x}{y})+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[zf(\frac{x}{y})+4z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

八、无穷级数综合专题

【44】若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则必有（　　）

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 发散.

（B）$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\infty$.

（C）$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

（D）$\lim\limits_{n\to\infty}(|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|)=\infty$.

【45】如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$（　　）

（A）条件收敛.　（B）绝对收敛.　（C）发散.　（D）以上均有可能.

【46】设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_n|}{v_n}=1$，则下列说法中正确的是（　　）

（1）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；　　（2）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；

（3）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛；　　（4）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

（A）（1）（2）.　　（B）（2）（3）.　　（C）（3）（4）.　　（D）（1）（4）.

【47】判断下列级数的敛散性:

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(2+n)}\sin\dfrac{1}{n}$.

（2）设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $\mathrm{e}^{a_n}=a_n+\mathrm{e}^{b_n}$，其中 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛且 $a_n>0$，判定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$ 的敛散性.

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x_n}{x_{n+1}}\right)$，其中 $\{x_n\}$ 是单调递增且有界的正数列.

（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^1 x^2(1-x)^n\,\mathrm{d}x$.

【48】设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$.

（1）求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+2}}{n}$ 的值；（2）试证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛，其中 λ 为正常数.

【49】已知 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=2,na_n=a_{n-1}+n-1,n=1,2,\cdots$.求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$，其中 $x\in(-1,1)$.

【50】求幂级数 $2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的收敛域及和函数.

第二部分 线性代数

一、选择题

【1】设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，下列命题中正确的是（　）

（A）$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{O}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 且 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$.　　（B）若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

（C）若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}|=0$.　　（D）若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$.

【2】设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ 是三阶可逆矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} b_{12} & 2b_{11} & -3b_{13} \\ b_{22} & 2b_{21} & -3b_{23} \\ b_{32} & 2b_{31} & -3b_{33} \end{pmatrix}$，

则 $\boldsymbol{A}$ 相似于（　）

（A）$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.　　（B）$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

（C）$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.　　（D）$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

【3】设 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵,令 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1^{2022}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2^{-1}$ 等于（ ）

（A）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.　　（B）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

（C）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.　　（D）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

【4】设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，记$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}$，$(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{B}$,其中$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为3阶矩阵，则（　　）

（A）存在$\boldsymbol{A}$，使$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性无关.　（B）不存在$\boldsymbol{A}$，使$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性相关.

（C）存在$\boldsymbol{B}$，使$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$线性无关.　（D）不存在$\boldsymbol{B}$，使$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$线性相关.

【5】（数一）设$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_i,b_i,c_i)^{\mathrm{T}},i=1,2,3,\boldsymbol{\alpha}=(d_1,d_2,d_3)^{\mathrm{T}}$，则三个平面

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$

$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0$$

两两相交成三条平行直线的充分必要条件是

（A）$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=1,r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha})=2$.

（B）$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2,r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha})=3$.

（C）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$中任意两个均线性无关，且$\boldsymbol{\alpha}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出.

（D）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，且$\boldsymbol{\alpha}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出.

【6】设$\boldsymbol{A}$为4×3的矩阵,非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$有 3 个线性无关的解$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，$k_1,k_2,k_3$为任意常数.则下列表达式中为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$通解的有（　　）个：

①$\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+k_1(\alpha_1-\alpha_2)$

②$\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{3}+k_1(\alpha_1-\alpha_2)+k_2(\alpha_2-\alpha_3)$

③$\alpha_3+k_1(\alpha_1-\alpha_3)+k_2(\alpha_2-\alpha_3)$

④$\alpha_1+k_1(\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2)+k_2(\alpha_2-\alpha_3)$

（A）1.　　（B）2.　　（C）3.　　（D）4.

【7】设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&a&4\\4&5&a\end{pmatrix}(a>0)$，$\boldsymbol{A}$ 是 3 阶非零矩阵且 $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为（　）

（A）$k_1(1,2,-1)^{\mathrm{T}}+k_2(3,3,4)^{\mathrm{T}}$.　　（B）$k_1(1,2,-1)^{\mathrm{T}}+k_2(4,5,-1)^{\mathrm{T}}$.

（C）$k_1(1,3,4)^{\mathrm{T}}+k_2(2,3,5)^{\mathrm{T}}$.　　（D）$k_1(1,3,4)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,4,3)^{\mathrm{T}}$.

【8】设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 n 阶可逆矩阵，且 $\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$，则下列结果

① $\boldsymbol{AB}\sim\boldsymbol{BA}$ ② $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ ③ $\boldsymbol{A}^{2022}\sim\boldsymbol{B}^{2022}$ ④ $\boldsymbol{A}^*\sim\boldsymbol{B}^*$

正确的个数为（　）

（A）1.　　（B）2.　　（C）3.　　（D）4.

【9】设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是3阶矩阵且 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，又 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 且 $r(\boldsymbol{B})=2$,则 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=$（　）

（A）0.　　（B）2.　　（C）4.　　（D）8.

【10】设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，且满足 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的秩为（　）

（A）0.　　（B）1.　　（C）2.　　（D）3.

【11】设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 3 维单位正交列向量，则二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+2\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}$ 的规范形为（　）

（A）$y_1^2+y_2^2$.　　（B）$y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

（C）$y_1^2-y_2^2$.　　（D）$y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

二、填空题

【12】设 $\boldsymbol{B}$ 是 3 阶正交矩阵，且$|\boldsymbol{B}|<0, \boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，且$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=6$，则

$\left|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|=$__________.

【13】设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*, \boldsymbol{B}^*$ 分别是 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，若$|\boldsymbol{A}|=1, |\boldsymbol{B}|=2$，则分块矩阵$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{BA} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$的伴随矩阵为____________.

【14】设 $\boldsymbol{A}$ 是3阶实对称矩阵且$r(\boldsymbol{A})=1$，$\lambda=1$是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，其对应的特征向量是

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为____________.

【15】若可逆矩阵满足 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{D}=$____________.

【16】设$\boldsymbol{\alpha}=(1,-1,a)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}=(1,a,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，且$\lambda=3$是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值$\lambda=3$的特征向量是____________.

三、解答题

【17】设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & -7 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}$ 为 3 阶非零矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$为 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解向量，且 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}_3$ 有解.

（1）求常数 a, b.

（2）求 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

【18】设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{\alpha}_1=(0,3,c)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(a,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(b,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，

$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,-3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(3,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(9,6,-7)^{\mathrm{T}}$，且 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示.

（1）求 a,b,c 的值.

（2）若 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{A}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

【19】设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\a-1&1&a+1\\1&0&0\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$.

（1）求 a 的值；

（2）求可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{B}$.

【20】设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和都为 2，且存在线性无关的向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 使得

$\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta}=9\boldsymbol{\alpha}$，求 $|\boldsymbol{A}|$，若 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

【21】设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+2ax_2x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 化为标准形 $f=3y_1^2+3y_2^2+by_3^2$.

（1）求实数 a,b；

（2）求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$；

（3）若 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=2$，求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的最大值.

【22】设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，它们对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$. 令 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

（1）证明：$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关；（2）若 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A\beta}$，求 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$.

【23】设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称矩阵，$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & a & d\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & b & e\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & c & f\end{pmatrix}$ 为正交矩阵. 二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化为 $-y_1^2+2y_2^2+ky_3^2$，且 $|\boldsymbol{A}|=-4$，求

（1）k 的值；（2）正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$；（3）矩阵 $\boldsymbol{A}$.

【24】设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 分别是 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 -1 与 1 的特征向量，且 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$.

（1）证明 $\boldsymbol{P}$ 可逆；（2）计算 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$.

【25】（数一）已知三维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的两组基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

（1）求 $\boldsymbol{\gamma}=(3,6,2)^{\mathrm{T}}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标；

（2）求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵；

（3）若 $\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2-3\boldsymbol{\beta}_3$，求 $\boldsymbol{\delta}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标.

第三部分 概率论与数理统计

一、选择题

【1】设 A、B 为随机事件，$P(B)>0$，则（　　）

（A）$P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)$.　　（B）$P(AB)\geqslant P(A)P(B)$.

（C）$P(A-B)\geqslant P(A)-P(B)$.　　（D）$P(A|B)\geqslant \dfrac{P(A)}{P(B)}$.

【2】设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$，则随机变量 $Y=|X|$ 的概率密度为（　　）

（A）$f_Y(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$.　　（B）$f_Y(x)=f(x)+f(-x)$.

（C）$f_Y(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$　　（D）$f_Y(x)=\begin{cases}f(x)+f(-x), & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$

【3】设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 则随机变量 $Y=1-\mathrm{e}^{-2X}$ 服从（　　）

（A）正态分布.　　（B）指数分布.

（C）泊松分布.　　（D）$[0,1]$上的均匀分布.

【4】设随机变量 X 和 Y 相互独立，且有相同的分布函数 $F(x)$，$Z=X+Y$，$F_Z(z)$ 为 Z 的分布函数，则下列成立的是（　　）

（A）$F_Z(2z)=2F(z)$.　　（B）$F_Z(2z)=[F(z)]^2$.

（C）$F_Z(2z)\leqslant [F(z)]^2$.　　（D）$F_Z(2z)\geqslant [F(z)]^2$.

【5】设平面区域D是由x轴，y轴及直线$x+\frac{y}{2}=1$所围成的三角形区域，二维随机变量(X,Y)在D上服从均匀分布，则$f_{X|Y}(x|y)=$（　　）

（A）$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{2}{2-y}, & 0<x<1-\frac{y}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

（B）$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{2}{1-y}, & 0<x<1-\frac{y}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

（C）$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{1}{2-y}, & 0<x<1-\frac{y}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

（D）$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{1}{1-y}, & 0<x<1-\frac{y}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

【6】设相互独立的随机变量X_1和X_2的分布函数分别为$F_1(x)$和$F_2(x)$，概率密度分别为$f_1(x)$和$f_2(x)$，则随机变量$Y=\min(X_1,X_2)$的概率密度$f(x)=$（　　）

（A）$f_1(x)f_2(x)$.　　（B）$f_1(x)F_1(x)+f_2(x)F_2(x)$.

（C）$f_1(x)[1-F_2(x)]+f_2(x)[1-F_1(x)]$.　　（D）$f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$.

【7】设随机变量X的概率密度为$f(x)=ae^{x(b-x)}\left(-\infty<x<+\infty\right)$，且$E(X)=2D(X)$，则（　　）

（A）$a=\frac{1}{e\sqrt{\pi}},b=2$.　　（B）$a=\frac{1}{\sqrt{\pi}},b=2$.

（C）$a=\frac{1}{e\sqrt{\pi}},b=1$.　　（D）$a=\frac{1}{\sqrt{\pi}},b=1$.

【8】设随机变量 X 服从指数分布 $E(1)$，用切比雪夫不等式得到估计 $P\left\{X\geqslant 3\right\}\leqslant a$，则 a 等于（　　）

（A）$\frac{1}{2}$.　　（B）$\frac{1}{4}$.　　（C）$\frac{1}{8}$.　　（D）e^{-3}.

【9】设 X_n 表示将一硬币独立重复投掷 n 次，出现反面向上的次数，则（　　）

（A）$\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{X_n-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.　　（B）$\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{X_n-2n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.

（C）$\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{2X_n-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.　　（D）$\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{2X_n-2n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.

【10】数集 $\{1,2,3,4,5\}$ 中任取 n 个数 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，对于 $\forall\varepsilon>0$，有

$\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-a\right|<\varepsilon\right\}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2-b\right|<\varepsilon\right\}=1$，则（　　）

（A）$a=3,b=11$.　　（B）$a=3,b=2$.

（C）$a=\frac{3}{5},b=\frac{2}{5}$.　　（D）$a=\frac{3}{5},b=2$.

【11】设总体 X 和 Y 都服从标准正态分布 $N(0,1)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 是来自于总体 X 和 Y 的两个相互独立的简单随机样本，其样本均值和样本方差分别为 $\overline{X}$，S_X^2 和 $\overline{Y}$，S_Y^2，则（　　）

（A）$\overline{X}-\overline{Y}\sim N(0,2)$.　　（B）$S_X^2+S_Y^2\sim\chi^2(2n-2)$.

（C）$\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{S_X^2+S_Y^2}}\sim t(2n-2)$.　　（D）$\frac{S_X^2}{S_Y^2}\sim F(n-1,n-1)$.

【12】设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体的简单随机样本，S^2 是样本方差，下列正确的是（　　）

（A）$\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n)$.

（B）$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{n}S}\sim t(n)$.

（C）$\dfrac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{X_i}{\sigma}\right)^2+\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$.

（D）$\dfrac{(n-1)X_n^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2}\sim F(1,n-1)$.

二、填空题

【13】设相互独立的三事件 A,B,C 满足条件：$P(A)=0.4,P(B)=0.5,P(C)=0.5$，则 $P(A-C|AB\cup C)=$____________.

【14】设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{5x+7}{16}, & -1\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$ 则 $P\{X^2=1\}=$______.

【15】已知 $X\sim P(2)$，在 X 取 x 的条件下，Y 在 $[0,x]$ 内的整数中等可能取值，则 $P\{Y=0\}=$______.

【16】已知 $X\sim N(\frac{1}{4},1),Y\sim B(3,\frac{3}{4})$，$X$ 与 Y 相互独立，则 $P\{XY+2>X+Y\}=$____.

【17】已知随机变量 Y 的分布函数为 $F_Y(y)=0.1F_1(y)+aF_1(3y)$，其中 $F_1(x)$ 是服从方差为1的指数分布的随机变量 X 的分布函数，则 $DY=$______.

【18】在数轴上的区间$[0,a]$内任意独立地选取两点M与N，求线段MN长度的数学期望为_________.

【19】随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$相互独立同分布，且期望均为μ，方差均为$\sigma^2(\sigma>0)$.令$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，求$X_1$与$\overline{X}$的相关系数$\rho=$________.

【20】（数一）设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本，其中μ,σ^2未知.记$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$Q=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$，则假设$H_0:\mu=0$的$t$检验统计量$T=$______.

三、解答题

【21】已知$f(x)=\begin{cases}1,0\leqslant x\leqslant 1,\\0,其它.\end{cases}$

（1）求$F(x)$；（2）设$Y=2X$，求$F_Y(y)$；（3）设$Y=\left|X-\frac{1}{2}\right|$，求$F_Y(y)$.

（4）$P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$，$P\{Y=2\}=\frac{1}{2}$，且X,Y独立，设$Z=X+Y$，求$F_Z(z)$；

（5）$Y=\begin{cases}1,X>\frac{1}{3},\\2,X\leqslant\frac{1}{3},\end{cases}$设$Z=X+Y$，求$F_Z(z)$.

【22】已知 $f(x,y)=\begin{cases}2, 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant x,\\ 0, \qquad 其他.\end{cases}$

（1）$P\{U=1\}=\dfrac{1}{2}$，$P\{U=2\}=\dfrac{1}{2}$，且 U 与 X,Y 独立，设 $Z=U+X$，求 $F_Z(z)$；

（2）$U=\begin{cases}1, Y>\dfrac{X}{2},\\ 2, Y\leqslant\dfrac{X}{2},\end{cases}$ 设 $Z=U+X$，求 $F_Z(z)$.

【23】设 X,Y 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(x+y)}, & x>0, y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

求：（1）求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$；（2）求 $Z=2X-Y$ 的密度函数；

（3）求 $E(X+Y)$；（4）求联合分布函数 $F(x,y)$.

【24】设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}, x\geqslant\mu,\\ 0, \qquad 其他.\end{cases}$ 其中 $\theta>0$.

求：（1）μ,θ 的矩估计量；（2）μ,θ 的最大似然估计量.

【25】设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(2\mu,\sigma^2)$ 与 $N(\mu,\sigma^2)$.其中 σ 是未知参数且 $\sigma>0$.记 $Z=X-2Y$.

（1）求 Z 的概率密度 $f(z;\sigma^2)$；

（2）设 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本，求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$；

（3）求 $E(\hat{\sigma}^2),D(\hat{\sigma}^2)$.