第四章 不定积分

考试内容

原函数和不定积分的概念 不定积分的基本性质 基本积分公式 不定积分的换元积分法与分部积分法 有理函数、三角函数有理式和简单无理函数的积分

考试要求

1.理解原函数的概念，理解不定积分的概念.

2.掌握不定积分的基本公式，掌握不定积分性质，掌握换元积分法与分部积分法.

3.会求有理函数、三角函数有理式和简单无理函数的积分.

§1.不定积分的概念和基本性质

一、原函数与不定积分的概念

1.原函数

如果在区间 I 上,可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$,即对任一 $x\in I$ 都有:

$$F'(x)=f(x) \text{ 或 } \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$$

那么函数 $F(x)$ 就称为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

【注 1】 $F(x)$ 作为 $f(x)$ 的原函数必须要明确区间,若不加说明一般默认 $f(x)$ 的定义域.

【注 2】 若 $f(x)$ 在区间 I 存在原函数,则原函数不唯一.

2.原函数的存在性

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续,必定存在可导函数 $F(x)$,使对任一 $x\in I$ 都有 $F'(x)=f(x)$,也就是说连续函数一定有原函数.

【注】 初等函数的原函数不一定是初等函数,例如

$$\int\sin(x^2)\mathrm{d}x,\ \int\cos(x^2)\mathrm{d}x,\ \int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,\ \int\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x,\ \int\frac{\mathrm{d}x}{\ln x},\ \int\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$

等被积函数有原函数,但不能用初等函数表示,故这些不定积分均积不出来.

3.不定积分

在区间 I 上,称函数 $f(x)$ 的所有原函数为其在区间上的不定积分,记作

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C,$$

其中 $\int$ 称为积分号, x 称为积分变量, $f(x)$ 称为被积函数, $f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式, C 为积分常数.

【例 4.1】 设 $f(x)=\begin{cases} x, & x>0, \\ \sin x, & x\leqslant 0. \end{cases}$ 求 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

【答案】 $\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2+C, & x>0, \\ -\cos x+C+1, & x\leqslant 0. \end{cases}$

【解析】 当 $x>0$ 时, $\int f(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x^2+C_1$,

当 $x\leqslant 0$ 时, $\int f(x)\mathrm{d}x=\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C_2$, 又 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 必连续,所以, $C_1=-1+C_2$

则 $\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2+C, & x>0, \\ -\cos x+C+1, & x\leqslant 0. \end{cases}$

二、不定积分的性质

(1) 设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的原函数存在,则

$$\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$$

(2) 设函数 $f(x)$ 的原函数存在, k 为非零常数,则

$$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$$

(3) $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x)$ 或 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x$.

三、基本积分公式

(1) $\int x^\alpha\mathrm{d}x=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq -1$, 实常数$)$ (2) $\int\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$

(3) $\int a^x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\ln a}a^x+C\ (a>0, a\neq 1)$ (4) $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$

(5) $\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$ (6) $\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$

(7) $\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C$

(8) $\int \csc^2 x\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C$

(9) $\int \tan x\sec x\mathrm{d}x = \sec x + C$　(10) $\int \cot x\csc x\mathrm{d}x = -\csc x + C$

(11) $\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$　(12) $\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$

(13) $\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$　(14) $\int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$

(15) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \ (a > 0)$　(16) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \ (a > 0)$

(17) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + C$

(18) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C \ (a > 0)$.

【例 4.2】计算下列不定积分

(1) $\int \frac{(x-1)^3}{x^2}\mathrm{d}x$；(2) $\int \left(2\mathrm{e}^x + \frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x$；(3) $\int \frac{2\cdot 3^x - 5\cdot 2^x}{3^x}\mathrm{d}x$；

(4) $\int \tan^2 x\mathrm{d}x$；(5) $\int \frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$.

【答案】（1）$\frac{x^2}{2} - 3x + 3\ln|x| + \frac{1}{x} + C$；（2）$2\mathrm{e}^x + 3\ln|x| + C$；（3）$2x - 5\frac{(2/3)^x}{\ln(2/3)} + C$；（4）$\tan x - x + C$；（5）$-4\cot x + C$.

【解析】

(1) 原式$= \int \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2}\mathrm{d}x = \int \left(x - 3 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - 3x + 3\ln|x| + \frac{1}{x} + C$；

(2) 原式$= \int 2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x + \int \frac{3}{x}\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^x + 3\ln|x| + C$；

(3) 原式 $=\int\left[2-5\left(\frac{2}{3}\right)^{x}\right]\mathrm{d}x=2x-5\frac{(2/3)^{x}}{\ln(2/3)}+C$；

(4) 原式 $=\int\left(\sec^{2}x-1\right)\mathrm{d}x=\int\sec^{2}x\mathrm{d}x-\int\mathrm{d}x=\tan x-x+C$；

(5) 原式 $=\int\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\sin x\right)^{2}}\mathrm{d}x=4\int\csc^{2}x\mathrm{d}x=-4\cot x+C$；

§2.不定积分的计算

一、第一类换元积分法(凑微分法)

设 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$,则有换元公式

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int f(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x)\xlongequal{u=\varphi(x)}\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C=F(\varphi(x))+C.$$

常见的凑微分公式

(1) $\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)$

(2) $\int \sin x f(\cos x)\mathrm{d}x=-\int f(\cos x)\mathrm{d}\cos x$

(3) $\int \cos x f\left(\sin x\right)\mathrm{d}x=\int f\left(\sin x\right)\mathrm{d}\left(\sin x\right)$

(4) $\int \frac{1}{x}f(\ln x)\mathrm{d}x=\int f(\ln x)\mathrm{d}\ln x$ (5) $\int \frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})\mathrm{d}x=-\int f(\frac{1}{x})\mathrm{d}\frac{1}{x}$

(6) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{x})\mathrm{d}x=2\int f(\sqrt{x})\mathrm{d}\sqrt{x}$ (7) $\int \mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}\mathrm{e}^x$

(8) $\int x^{n-1}f(x^n)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int f(x^n)\mathrm{d}x^n,\quad n\neq 0$

【例 4.3】求下列各不定积分

(1) $\int x\sin x^2\mathrm{d}x$; (2) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$; (3) $\int \frac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x$; (4) $\int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$;

(5) $\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$; (6) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x$; (7) $\int \frac{1+\ln x}{\left(x\ln x\right)^2}\mathrm{d}x$; (8) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\mathrm{d}x$;

【答案】(1) $-\frac{1}{2}\cos x^2+C$;(2) $-2\cos\sqrt{x}+C$;(3) $\frac{1}{3}\ln^3 x+C$;

(4) $-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C$;(5) $\ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)+C$;(6) $\arctan^2\sqrt{x}+C$;

(7) $-\frac{1}{x\ln x}+C$;(8) $\ln|\sin x-\cos x|+C$.

【解析】 (1) $\int x\sin x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \sin x^2\mathrm{d}x^2=-\frac{1}{2}\cos x^2+C$;

(2) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int \sin\sqrt{x}\mathrm{d}\sqrt{x} = -2\cos\sqrt{x} + C$;

(3) $\int \frac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x = \int \ln^2 x\mathrm{d}\ln x = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$;

(4) $\int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}\left(1-x^2\right) = -\frac{1}{2}\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} + C$;

(5) $\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x+1\right)}{\mathrm{e}^x+1} = \ln\left(\mathrm{e}^x+1\right) + C$;

(6) 原式 $= \int \frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}\mathrm{d}t^2 = 2\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\left(1+(\sqrt{x})^2\right)}\mathrm{d}\sqrt{x} = 2\int \arctan\sqrt{x}\mathrm{d}(\arctan\sqrt{x})$

$= \arctan^2\sqrt{x} + C$;

(7) $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x\ln x)^2}\mathrm{d}(x\ln x) = -\frac{1}{x\ln x} + C$;

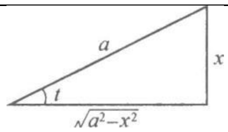
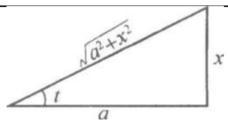
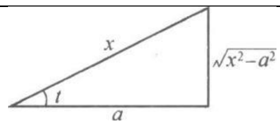
(8) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x-\cos x)}{\sin x-\cos x} = \ln|\sin x-\cos x| + C.$

二、第二类换元积分法

设 $x=\psi(t)$ 是单调的可导函数,并且 $\psi'(t)\neq 0$. 又设 $f\left[\psi(x)\right]\psi'(x)$ 具有原函数,则有换元公式

$$\int f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{t=\psi^{-1}(x)} \int f\left[\psi(t)\right]\psi'(t)\mathrm{d}t$$

其中 $t=\psi^{-1}(x)$ 为 $x=\psi(x)$ 的反函数.

被积函数所含根号的形式	所作替换	示意图(回代过程中用)
$\sqrt{a^2-x^2}$	令 $x=a\sin t$	
$\sqrt{a^2+x^2}$	令 $x=a\tan t$	
$\sqrt{x^2-a^2}(x>0)$	令 $x=a\sec t$	

$\sqrt[n]{ax+b}$	令 $\sqrt[n]{ax+b}=t$	$x=\dfrac{t^n-b}{a}$

【例 4.4】 求不定积分 $\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\,(a>0)$.

【答案】 $\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}+\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$.

【解析】 令 $x=a\sin t$,则,$\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$ 代入上式有

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\int a^2\cos^2 t\mathrm{d}t=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

【例 4.5】 求不定积分 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}(a>0)$;

【答案】 $\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C$.

【解析】 令 $x=a\tan t,\mathrm{d}x=a\sec^2 t\mathrm{d}t$,

$$原式=\int\frac{a\sec^2 t\mathrm{d}t}{a\sec t}=\int\sec t\mathrm{d}t=\ln|\sec t+\tan t|+C_1=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C.$$

【例 4.6】 计算 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}$

【答案】 $-\arcsin\dfrac{2-x}{2}+C$.

【解析】 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-x^2}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2^2-(2-x)^2}}=-\arcsin\frac{2-x}{2}+C$.

【例 4.7】 求下列不定积分

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$;

【答案】(1) $2\arctan\sqrt{x}+C$;(2) $\displaystyle\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}+1}\right|+C$.

【解析】

(1) 令 $\sqrt{x}=t$,则 $x=t^2,\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$,所以,

原式$=\int\frac{2t\mathrm{d}t}{(1+t^2)t}=\int\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}=2\arctan t+C=2\arctan\sqrt{x}+C$；

(2) 令 $\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}=t$，则，$x=\frac{1}{2}\ln\left(t^2-1\right)$，$\mathrm{d}x=\frac{t}{t^2-1}\mathrm{d}t$，所以，

原式$=\int\frac{t^2}{t^2-1}\mathrm{d}t=\int 1+\frac{1}{t^2-1}\mathrm{d}t=t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}+1}\right|+C$.

三、分部积分法

设 $u(x),v(x)$ 均有连续的导数，则 $\int u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)-\int v(x)\mathrm{d}u(x)$.

【例 4.8】求下列不定积分

(1) $\int x\cos x\mathrm{d}x$； (2) $\int x\arctan x\mathrm{d}x$； (3) $\int x^3\ln x\mathrm{d}x$；

(4) $\int \ln x\mathrm{d}x$； (5) $\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$； (6) $\int \sec^3 x\mathrm{d}x$.

【答案】（1） $x\sin x+\cos x+C$；（2） $\frac{1}{2}\left(x^2\arctan x-x+\arctan x\right)+C$；

（3） $\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4+C$；（4） $x\ln x-x+C$；

（5） $\frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)+C$；（6） $\frac{1}{2}(\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|)+C$.

【解析】

(1) 原式$=\int x\mathrm{d}\sin x=x\sin x-\int\sin x\mathrm{d}x=x\sin x+\cos x+C$；

(2) 原式$=\frac{1}{2}\int\arctan x\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\left(x^2\arctan x-\int x^2\mathrm{d}\arctan x\right)=\frac{1}{2}\left(x^2\arctan x-\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x\right)$

$$=\frac{1}{2}\left[x^2\arctan x-\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{2}\left(x^2\arctan x-x+\arctan x\right)+C；$$

(3) 原式

$$=\frac{1}{4}\int\ln x\mathrm{d}x^4=\frac{1}{4}\left(x^4\ln x-\int x^4\mathrm{d}\ln x\right)=\frac{1}{4}\left(x^4\ln x-\int x^3\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4+C；$$

(4) 原式$=\int\ln x\mathrm{d}x=x\ln x-\int x\frac{1}{x}\mathrm{d}x=x\ln x-x+C$；

(5) 原式$=\int\sin x\mathrm{d}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\sin x-\int\mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\sin x-\mathrm{e}^x\cos x-\int\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)+C\cdot$$

(6) 原式$=\int \sec x\sec^2 x\mathrm{d}x=\int \sec x\mathrm{d}\tan x$

$$=\sec x\tan x-\int \tan x\mathrm{d}\sec x$$

$$=\sec x\tan x-\int \sec x\tan^2 x\mathrm{d}x$$

$$=\sec x\tan x-\int \sec x\left(\sec^2 x-1\right)\mathrm{d}x$$

$$=\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|-\int \sec^3 x\mathrm{d}x$$

$$=\sec x\tan x-\int \sec^3 x\mathrm{d}x+\ln|\sec x+\tan x|,$$

所以，$\int \sec^3 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|)+C$.

【例 4.9】 求不定积分 $\int \ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$.

【答案】 $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+C$.

【解析】

$$原式=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\int x\mathrm{d}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

$$=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}\left(1+x^2\right)$$

$$=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+C.$$

【例 4.10】 设连续函数 $f(x)$ 的原函数为 $\frac{\sin x}{x}$，试求不定积分 $\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

【答案】 $\cos x-2\frac{\sin x}{x}+C$.

【解析】

$$\int xf'(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}f(x)=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x=x\left(\frac{\sin x}{x}\right)'-\frac{\sin x}{x}+C$$

$$=\cos x-2\frac{\sin x}{x}+C.$$

四、有理函数的积分

1.有理函数的相关定义：

有理函数是指两个多项式的商表示的函数 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$，其中 $a_0,a_1,\cdots a_n$ 及 $b_0,b_1,\cdots b_m$ 为常数,且 $a_0\neq 0,b_0\neq 0$.如果分子多项式 $P(x)$ 的次数 n 小于分母多项式 $Q(x)$ 的次数 m,称分式为真分式；如果分子多项式 $P(x)$ 的次数 n 大于或等于分母多项式 $Q(x)$ 的次数 m,称分式为假分式.

2.定理：若上面定义中的真分式的分母 $Q(x)$ 可以被因式分解成

$$Q(x)=b_0(x-a)^k(x-b)^l(x^2+px+q)^s\ (p^2-4q<0)$$

则，

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}&=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots\frac{A_k}{(x-a)^k}\\&+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\cdots\frac{B_l}{(x-b)^l}\\&+\frac{P_1x+Q_1}{x^2+px+q}+\frac{P_2x+Q_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{P_sx+Q_s}{(x^2+px+q)^s}\end{aligned}$$

其中， $A_i,B_i,P_i,Q_i\ (i=1,2,\ldots)$ 均为常数.

【例 4.11】求下列各不定积分

(1) $\int\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x$；(2) $\int\frac{x-1}{x^2-2x-3}\mathrm{d}x$；(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+1}$；(4) $\int\frac{x-1}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$；

【答案】（1） $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$；（2） $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-3}\right|+C$；

（3） $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{3}}{x+2+\sqrt{3}}\right|+C$；（4） $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)-\sqrt{2}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$.

【解析】

(1) 原式 $=\int\frac{1}{(1-x)(1+x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$；

(2) 利用待定系数法将其拆, $\frac{x-1}{(x+1)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}$,通分，取其分子有:

$$A(x-3)+B(x+1)=(A+B)x+(B-3A)=x-1$$

比较系数得 $A=\frac{1}{2},B=\frac{1}{2}$，所以，

原式 $=\int\frac{x-1}{(x+1)(x-3)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-3}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-3}\right|+C$；

(3) 原式 $=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+1}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{3}}{x+2+\sqrt{3}}\right|+C$；

(4) 原式 $=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2-4}{(x+1)^2+2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{(x+1)^2+2}\mathrm{d}x-\int\frac{2}{(x+1)^2+2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+3\right)-\sqrt{2}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

【例 4.12】求下列不定积分

(1) $\int\frac{2x^4+x^2+3}{x^2+1}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int\frac{2x+3}{(x-1)(x^2-1)}\mathrm{d}x$；

【答案】（1）$\frac{2}{3}x^3-x+4\arctan x+C$；（2）$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{5}{2(x-1)}+C$.

【解析】

（1）原式 $=\int\left(2x^2-1+\frac{4}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^3-x+4\arctan x+C$；

（2）原式 $=\frac{1}{4}\int\frac{-1}{x-1}+\frac{10}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{5}{2(x-1)}+C$.