目 录

第一部分 高等数学

一、极限综合专题

【1】计算下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}-2[x]\right\}$，其中$[x]$表示不超过$x$的最大整数.

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x}-x\arctan x}{\frac{\pi}{2}x+e^{x}}$.

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

【答案】（1）2；（2）1；（3）1.

【解析】

（1）$\lim\limits_{x\to 0^{-}}\left\{\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}-2[x]\right\}=\lim\limits_{x\to 0^{-}}\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+2=\lim\limits_{x\to 0^{-}}\dfrac{e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}+2=\lim\limits_{x\to 0^{-}}e^{\frac{1}{x}}+2=2$，

$$\lim_{x\to 0^{+}}\left\{\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}-2[x]\right\}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}-0=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}$$

$$\overset{e^{\frac{1}{x}}=t}{=}\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+t^{2})}{\ln(1+t)}\overset{洛}{=}\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{2t}{1+t^{2}}}{\frac{1}{1+t}}=2，$$

综上可知，$\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}-2[x]\right\}=2$；

（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}-x\arctan x}{\frac{\pi}{2}x+e^{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{e^{x}}=1$，

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x - x\arctan x}{\dfrac{\pi}{2}x+e^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\arctan x}{\dfrac{\pi}{2}x}=1$，综上有 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x - x\arctan x}{\dfrac{\pi}{2}x+e^x}=1$；

（3）$\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\dfrac{\sin x}{x}\right)=2-1=1$，

$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{x}\right)=0+1=1$，综上 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{x}\right)=1$.

【2】计算下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt{\cos 3x}}{x^2}$.

（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$.

（3）$f(x)$ 连续且满足 $f(0)=0,\ f'(0)\neq0$，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}f(t)dt}{x^2\int_0^x f(t)dt}$.

（4）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)dt\right]du}{\ln(1+x)\int_0^1\tan(xt)^2dt}$.

【答案】（1）$\dfrac{15}{4}$；（2）$-\dfrac{1}{12}$；（3）1；（4）$\dfrac{\pi}{4}$.

【解析】

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt{\cos 3x}}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})+\cos x\sqrt{\cos 2x}(1-\sqrt{\cos 3x})}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x\sqrt{\cos 2x}(1-\sqrt{\cos 3x})}{x^2}$

$=\dfrac{1}{2}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos 3x}}{x^2}$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x^2}+\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos3x}{x^2}=\frac{15}{4};$$

（2）因为 $\sqrt{1+x^2}=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$, $e^{x^2}=1+x^2+o(x^2)$, $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$,

故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)}=-\dfrac{1}{12}$.

（3）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t}{x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2xf(x^2)}{2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+x^2f(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2f(x^2)}{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\frac{f(x^2)}{x^2}}{\frac{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^2}+\frac{f(x)}{x}},$$

又 $f(x)$ 连续且满足 $f(0)=0, f'(0)\neq0$，从而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2f(x)}{2x}=f'(0)$，

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x^2)}{x^2}=f'(0)$，故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\frac{f(x^2)}{x^2}}{\frac{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^2}+\frac{f(x)}{x}}=1$.

（4）令 $xt=v$，则 $\int_0^1\tan(xt)^2\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^x\tan v^2\mathrm{d}v$，从而原式

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{\ln(1+x)\int_0^1\tan(xt)^2\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x\frac{\int_0^x\tan v^2\mathrm{d}v}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{\int_0^x\tan v^2 dv}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t}{\tan x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x\arctan(1+x^2)}{2x}=\frac{\pi}{4}.$$

【3】计算下列极限

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\dfrac{1}{n}-\arctan\dfrac{1}{n+1}\right)$.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\dfrac{e^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{e^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n+k}{n^2+k}$.

【答案】（1）1；（2）$e-1$；（3）$\dfrac{3}{2}$.

【解析】

（1）法一，利用倒代换：

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+1}\right)\overset{\frac{1}{n}=x}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x-\arctan\frac{x}{1+x}}{x^2}$$

$$\overset{洛}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+\left(\frac{x}{1+x}\right)^2}\cdot\frac{1+x-x}{(1+x)^2}}{2x}=1;$$

法二，利用拉格朗日中值定理：

取 $f(x)=\arctan x$，对其在$\left[\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right]$上使用拉格朗日中值定理有

$$\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+1}=\frac{1}{1+\xi^2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{1+\xi^2}\quad\left(\frac{1}{n+1}<\xi<\frac{1}{n}\right)$$，则

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)}\cdot\frac{1}{1+\xi^2}=1;$$

（2）记 $x_n=\dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\dfrac{e^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{e^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}$ ，则

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}}{n+1}<x_n<\frac{\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}}{n}，且\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}}{n}=\int_0^1e^x dx=e-1，$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}}{n}=\int_0^1e^x dx=e-1$$，故根据夹逼准则可知原式为 $e-1$.

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n+k}{n^2+k}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n^2+1}+\dfrac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n+n}{n^2+n}\right)$

记 $x_n=\dfrac{n+1}{n^2+1}+\dfrac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n+n}{n^2+n}$ ，则

$\dfrac{n^2+\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2+n}<x_n<\dfrac{n^2+\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2+1}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\dfrac{(n+1)}{2}}{n+1}=\dfrac{3}{2}$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n}{2n^2+2}=\dfrac{3}{2}$，故根据夹逼准则可知，原式$=\dfrac{3}{2}$.

【4】求解下列各题

（1）设 $x_1=2$， $x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解析】设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$， 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=a$.又 $x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}$，在其两边同时取极限有

$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{x_n}\right)$ 即 $a=2+\dfrac{1}{a}$，从而可得 $a=1+\sqrt{2}$ （负根舍去）.下面证明

$a=1+\sqrt{2}$ 就是数列的极限：

$$0\leqslant\left|x_n-(1+\sqrt{2})\right|=\left|\frac{1}{x_{n-1}}+1-\sqrt{2}\right|=\left|\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right|=\left|\frac{(1+\sqrt{2})-x_{n-1}}{x_{n-1}(1+\sqrt{2})}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left|x_{n-1}-(1+\sqrt{2})\right|$$

$\leqslant\dfrac{1}{2^2}\left|x_{n-2}-(1+\sqrt{2})\right|\leqslant\cdots\leqslant\dfrac{1}{2^{n-1}}\left|x_1-(1+\sqrt{2})\right|$ （上述过程中用到了 $x_n\geqslant 2$），

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}\left|x_1-(1+\sqrt{2})\right|=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|x_n-(1+\sqrt{2})\right|=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1+\sqrt{2}$.

（2）（I）证明方程 $e^x+x^{2n+1}=0$ 在 $(-1,0)$ 内有唯一的实根 $x_n\ (n=0,1,2,\cdots)$；

（II）证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值.

【证明】（I） 令 $f(x)=e^x+x^{2n+1}$， 则 $f(x)$ 连续且 $f(-1)=e^{-1}-1<0, f(0)=1>0$； 又 $f'(x)=e^x+(2n+1)x^{2n}>0$，即 $f(x)$ 单调递增.综上，$f(x)=0$ 在 $(-1,0)$ 内有唯一实根 x_n.

（II）根据（I）可知， x_n 满足： $-1<x_n<0$ 且 $e^{x_n}+{x_n}^{2n+1}=0$，从而 x_{n+1} 满足

$-1<x_{n+1}<0$ 且 $e^{x_{n+1}}+{x_{n+1}}^{2n+3}=0$， 于是 $e^{x_n}+{x_n}^{2n+1}=e^{x_{n+1}}+{x_{n+1}}^{2n+3}>e^{x_{n+1}}+{x_{n+1}}^{2n+1}$， 由

$f(x)$ 的单调性可得 $x_n > x_{n+1}$，综上，$\{x_n\}$ 满足单调有界准则，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

又 $e^{x_n} + x_n^{2n+1} = 0$，即 $e^{x_n} = -x_n^{2n+1}$，从而 $x_n = \ln(-x_n^{2n+1}) = (2n+1)\ln(-x_n)$，即 $\dfrac{x_n}{2n+1} = \ln(-x_n)$.设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，由于 $\{x_n\}$ 有界，在上式两边取极限可得 $0 = \ln(-a)$，即 $a = -1$.

二、导数综合专题

【5】设 $f(x)$ 是可导函数，且 $f(x) = x + x\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + x^2 \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$，求 $f(x)$.

【答案】 $f(x) = 6x + 6x^2$.

【解析】根据上式易知 $f(0) = 0$，从而可知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = f'(0)$.若设 $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = a$，则上式可化为

$$f(x) = x + ax + x^2 f'(0) \qquad （1）式$$

在（1）式两边求导并令 $x = 0$ 有

$$f'(0) = 1 + a \qquad （2）式$$

在（1）式两边同时取 $[0,1]$ 上的积分有

$$a = \frac{1}{2} + \frac{a}{2} + \frac{1}{3} f'(0) \qquad （3）式$$

联立（2)、（3）式可得 $f'(0) = 6, a = 5$，从而 $f(x) = 6x + 6x^2$.

【6】设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，请证明以下结论：

（1）当 $f(x_0) > 0$ 时，$y = |f(x)|$ 在点 x_0 处可导，且 $y'|_{x=x_0} = f'(x_0)$.

（2）当 $f(x_0) < 0$ 时，$y = |f(x)|$ 在点 x_0 处可导，且 $y'|_{x=x_0} = -f'(x_0)$.

（3）当 $f(x_0) = 0$ 时，但 $f'(x_0) \neq 0$ 时，$y = |f(x)|$ 在点 x_0 处不可导.

（4）当 $f(x_0) = 0$ 时，且 $f'(x_0) = 0$ 时，$y = |f(x)|$ 在点 x_0 处可导，且 $y'|_{x=x_0} = 0$.

【解析】因函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，即 $f'(x_0)$ 存在，故 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，即有

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. 设 $y=F(x)=|f(x)|$，当 $f(x_0)>0$ 时，在点 x_0 的邻域内有 $f(x)>0$（保号性），故 $F'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$. 由导数定义知，当 $f(x_0)>0$ 时，$y=F(x)=|f(x)|$ 在点 x_0 处可导，且 $y'|_{x=x_0}=f'(x_0)$.

当 $f(x_0)<0$ 时，在点 x_0 的邻域内有 $f(x)<0$（保号性），故

$F'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{-f(x)-[-f(x_0)]}{x-x_0}=-f'(x_0)$.由导数定义知，当 $f(x_0)<0$ 时，$y=F(x)=|f(x)|$ 在点 x_0 处可导，且 $y'|_{x=x_0}=-f'(x_0)$.

当 $f(x_0)=0$ 时，因 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}$，故由极限性质得

$$F'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\left|\frac{f(x)}{x-x_0}\right|=|f'(x_0)|,$$

$$F'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}=-\lim_{x\to x_0^-}\left|\frac{f(x)}{x-x_0}\right|=-|f'(x_0)|.$$

因 $F(x)=|f(x)|$ 在 $x=x_0$ 处可导的充要条件是 $F'_+(x_0)=F'_-(x_0)$，即

$$|f'(x_0)|=-|f'(x_0)| \Leftrightarrow |f'(x_0)|=0 \Leftrightarrow f'(x_0)=0,$$

故当 $f(x_0)=0$ 时，若 $f'(x_0)\neq 0$，$|f(x)|$ 在点 x_0 处不可导；若 $f'(x_0)=0$，$|f(x)|$ 在点 x_0 处可导，且 $y'|_{x=x_0}=0$.

【7】设 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 内有定义，且对任何的 $x,y\in(-l,l)$ 均有 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$，又 $f'(0)=1$，求证 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 上处处可导并求 $f(x)$ 的表达式.

【解析】在 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ 中令 $x=y=0$ 可得 $f(0)=0$.此时，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}\cdot\frac{1+f^2(x)}{1-f(x)f(y)} \qquad (1)式$$

由 $f'(0)=1$ 且 $f(0)=0$，知 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(y)}{y}=1$，从而（1）式$=1+f^2(x)$，即 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 上处处可导且 $f'(x)=1+f^2(x)$.此方程为变量可分离的微分方程，解之得 $f(x)=\tan x$.

【8】求高阶导.

（1）设函数 $f(x)=e^{\sqrt{3}x}\sin x$，则 $f^{(2023)}(0)=$____________.

【答案】-2^{2022}.

【解析】$f'(x)=e^{\sqrt{3}x}(\sqrt{3}\sin x+\cos x)=2e^{\sqrt{3}x}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x)=2e^{\sqrt{3}x}\sin(x+\dfrac{\pi}{6})$，

$f^{(n)}(x)=2^n e^{\sqrt{3}x}\sin(x+n\cdot\dfrac{\pi}{6})$，$f^{(n)}(0)=2^n\sin\dfrac{n\pi}{6}$，

$f^{(2023)}(0)=2^{2023}\sin\dfrac{2023\pi}{6}=2^{2023}\sin(337\pi+\dfrac{\pi}{6})=-2^{2023}\sin\dfrac{\pi}{6}=-2^{2022}$.

（2）设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+2x+4x^2}$，则 $f^{(2023)}(0)=$____________.

【答案】$-2^{2023}\cdot 2023!$.

【解析】$f(x)=\dfrac{1}{1+2x+4x^2}=\dfrac{1-2x}{(1+2x+4x^2)(1-2x)}=\dfrac{1-2x}{1-8x^3}=\dfrac{1}{1-8x^3}-\dfrac{2x}{1-8x^3}$

$=[1+8x^3+(8x^3)^2+(8x^3)^n+\cdots]-2x[1+8x^3+(8x^3)^2+(8x^3)^n+\cdots]$.

根据泰勒公式，$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.因此，

$[1+8x^3+(8x^3)^2+\cdots+(8x^3)^n+\cdots]-2x[1+8x^3+(8x^3)^2+\cdots+(8x^3)^n+\cdots]=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

等式两边的 x^{2023} 的系数是相同的，因此 $-2x\cdot(8x^3)^{674}=\dfrac{f^{(2023)}(0)}{2023!}x^{2023}$，

化简得 $-2\cdot(8)^{674}=\dfrac{f^{(2023)}(0)}{2023!}$，即 $f^{(2023)}(0)=-2^{2023}\cdot 2023!$

【9】已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上具有 2 阶导数， $f(a)=0, f'(x)>0, f''(x)>0$，设 $b>a$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(b,f(b))$ 处的切线与 x 轴的交点是 $(x_0,0)$，证明 $a<x_0<b$.

【解析】证明：根据题意得点 $(b,f(b))$ 处的切线方程为 $y-f(b)=f'(b)(x-b)$.

令 $y=0$，得 $x_0=b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}$，

因为 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 递增，又

因为 $f(a)=0,$ 得 $f(b)>0$，又 $f'(b)>0$，

所以 $x_0=b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}<b$.

又 $x_0-a=b-a-\dfrac{f(b)}{f'(b)}$，在 (a,b) 上利用拉格朗日中值定理得，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),\xi\in(a,b),$$

所以 $x_0-a=\dfrac{f(b)}{f'(\xi)}-\dfrac{f(b)}{f'(b)}=f(b)\dfrac{f'(b)-f'(\xi)}{f'(\xi)f'(b)}$.

再由 $f''(x)>0$，可知 $f'(x)$ 单调递增.

所以 $f'(b)>f'(\xi)$，可得 $x_0>a$. 从而结论得证.

【10】求方程 $k\arctan x-x=0$ 不同实根的个数，其中 k 为参数.

【答案】当 $k>1$ 时，原方程有三个根；当 $k\leqslant 1$ 时，原方程有一个根.

【解析】易知 $x=0$ 为方程的一个实根.

当 $x\neq 0$ 时，令 $f(x)=\dfrac{x}{\arctan x}-k$，则 $f'(x)=\dfrac{\arctan x-\dfrac{x}{1+x^2}}{(\arctan x)^2}$.

令 $g(x)=\arctan x-\dfrac{x}{1+x^2}$，则

$$g'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1+x^2-x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}>0,\ g(x) \text{ 单调递增.}$$

又 $g(0)=0$，所以

当 $x<0$ 时，有 $g(x)<0$，从而 $f'(x)<0$；

当 $x>0$ 时，有 $g(x)>0$，从而 $f'(x)>0$.

又，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arctan x}-k=1-k$，$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{\arctan x}-k=+\infty$，

所以当 $1-k<0$ 时，由零点定理可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 内各有一个零点；

当 $1-k\geqslant 0$ 时，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 内均无零点.

综上所述，当 $k>1$ 时，原方程有三个根；当 $k\leqslant 1$ 时，原方程有一个根.

【11】设函数 $f(x)$ 满足方程 $\dfrac{f''(x)}{x}+3x\left[f'(x)\right]^2=(1+\dfrac{1}{x})\ln^2(1+x)-x$，若 $x_0>0$ 是函数 $f(x)$ 的驻点，试问 x_0 是否是函数 $f(x)$ 的极值点，请说明你的理由.

【答案】是极大值点.

【解析】由已知可得 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)=(1+x_0)\ln^2(1+x_0)-x_0{}^2$，其中 $x_0>0$.

记 $g(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2, x>0$，则

$g'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x, g''(x)=\dfrac{2}{1+x}[\ln(1+x)-x]$，

又 $x>0$ 时有 $\ln(1+x)<x$，故

$g''(x)<0\Rightarrow g'(x)$ 单调递减 $\Rightarrow g'(x)<g'(0)=0\Rightarrow g(x)$ 单调递减

$\Rightarrow g(x)<g(0)=0\Rightarrow g(x)<0$，

故 $f''(x_0)=(1+x_0)\ln^2(1+x_0)-x_0{}^2<0$，即 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点.

【12】（数一、二）求曲线 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 在 $(1,1)$ 处的曲率半径.

【答案】$R=2$.

【解析】在 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 两边同时对 x 求导有

$$6y^2y'-4yy'+2y+2xy'-2x=0 \qquad \text{（1）式}$$

令 $x=y=1$，可得 $y'(1)=0$，

在（1）式两边同时对 x 求导有

$$12yy'y'+6y^2y''-4y'y'-4yy''+2y'+2y'+2xy''-2=0$$

令 $x=y=1, y'(1)=0$ 可得 $y''(1)=\dfrac{1}{2}$.

故曲线 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 在 $(1,1)$ 处的曲率为 $K=\dfrac{|y''(1)|}{\left\{1+[y'(1)]^2\right\}^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{2}$

从而可知曲率半径 $R=2$.

三、中值定理专题

【13】设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)f(b)>0, f(a)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$，证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=kf(\xi)$.

【解析】令 $F(x)=\mathrm{e}^{-kx}f(x)$，$x\in[a,b]$，因为 $f(a)f(b)>0, f(a)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$，不妨设 $f(a)>0$，则 $f(b)>0$，$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$.

函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故根据零点定理可知 $\exists c_1\in\left(a,\dfrac{a+b}{2}\right)$ 使得 $f(c_1)=0$，$\exists c_2\in\left(\dfrac{a+b}{2},b\right)$ 使得 $f(c_2)=0$，故有 $F(c_1)=F(c_2)=0$，从而 $F(x)$ 在 $[c_1,c_2]$ 上满足罗尔定理，即 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=kf(\xi)$（$f(a)<0$ 时同理可证）.

【14】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=0$.证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\int_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x=0$.

【证明】设 $F(x)=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$，$x\in[0,1]$，

因为 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且在 $(0,1)$ 内可导并有 $F(0)=0, F(1)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t=0$，

所以 $F(x)$ 满足罗尔定理，故存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $F'(\xi)=0$，即

存在$\xi \in (0,1)$使得$\int_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

【15】设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续且 $f(0)=0, \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$.证明：存在$\xi \in (0,1)$，使得

$\int_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x = \xi f(\xi)$.

【证明】令 $F(x)=\begin{cases} \dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}, & x\in(0,1], \\ 0, & x=0, \end{cases}$

因为$\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0 = F(0)$，故$F(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导且$F(0)=F(1)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$，从而$F(x)$满足罗尔定理，故存在$\xi \in (0,1)$使得$F'(\xi)=0$，即$\int_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x = \xi f(\xi)$.

【16】设函数 $f(x), g(x)$ 均在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且 $f(0)=g(0), f(1)=g(1)$.证明：存在$\xi \in (0,\frac{1}{2}), \eta \in (\frac{1}{2},1)$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=g'(\xi)+g'(\eta)$.

【证明】令$F(x)=f(x)-g(x)$，则$F(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，故存在$\xi \in (0,\frac{1}{2})$

使得$F'(\xi)=\dfrac{F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)}{\frac{1}{2}}$，即 $f'(\xi)-g'(\xi)=2f\left(\frac{1}{2}\right)-2g\left(\frac{1}{2}\right)$，

存在$\eta \in \left(\frac{1}{2},1\right)$使得$F'(\eta)=\dfrac{F(1)-F\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}$，即 $f'(\eta)-g'(\eta)=-2f\left(\frac{1}{2}\right)+2g\left(\frac{1}{2}\right)$，

从而可知存在$\xi \in \left(0,\frac{1}{2}\right), \eta \in \left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=g'(\xi)+g'(\eta)$.

【17】设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，且 $f(a)=f(c)=f(b), c\in(a,b)$.又设 $f(x)$ 在(a,b)内任意子区间内不恒为常数.证明存在$\xi \in (a,b)$，使得 $f''(\xi)<0$.

【证明】根据罗尔定理可知，存在$\xi_1 \in (a,c)$使得 $f'(\xi_1)=0$，存在$\xi_2 \in (c,b)$使得 $f'(\xi_2)=0$.

又 $f(x)$ 在 (a,b) 内任意子区间内不恒为常数，故存在 $\xi_3\in(\xi_1,\xi_2)$ 使得 $f'(\xi_3)\neq 0$.

（1）当 $f'(\xi_3)<0$ 时，则必存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_3)$ 使得 $f''(\xi)=\dfrac{f'(\xi_3)-f'(\xi_1)}{\xi_3-\xi_1}<0$；

（2）当 $f'(\xi_3)>0$ 时，则必存在 $\xi\in(\xi_3,\xi_2)$ 使得 $f''(\xi)=\dfrac{f'(\xi_2)-f'(\xi_3)}{\xi_2-\xi_3}<0$.

综上，总存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f''(\xi)<0$.

四、定积分综合专题

【18】$S(x)=\int_0^x|\cos t|\mathrm{d}t$.

（1）证明：当 $n\in N_+$，且 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时，$2n\leqslant S(x)<2(n+1)$；

（2）求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$.

【答案】（1）略;（2）$\dfrac{2}{\pi}$.

【解析】（1）由于 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$，且 $S\left(x\right)=\int_0^x|\cos t|\mathrm{d}t$，从而

$$2n=\int_0^{n\pi}|\cos t|\mathrm{d}t\leqslant S(x)<\int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|\mathrm{d}t=2(n+1)$$

（2）根据第（1）问可知，$\dfrac{2n}{(n+1)\pi}<\dfrac{S(x)}{x}<\dfrac{2(n+1)}{n\pi}$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{(n+1)\pi}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+1)}{n\pi}=\dfrac{2}{\pi}$，

故根据夹逼准则可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}=\dfrac{2}{\pi}$.

【19】证明 $\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin x^2\mathrm{d}x>0$.

【证明】令 $x^2=t$，$\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin x^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\dfrac{1}{\sqrt{t}}\sin t\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{t}}\sin t\mathrm{d}t+\dfrac{1}{2}\int_\pi^{2\pi}\dfrac{1}{\sqrt{t}}\sin t\mathrm{d}t$.

在 $\int_\pi^{2\pi}\dfrac{1}{\sqrt{t}}\sin t\mathrm{d}t$ 中，令 $t=\pi+u$，$\int_\pi^{2\pi}\dfrac{1}{\sqrt{t}}\sin t\mathrm{d}t=-\int_0^{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{\pi+u}}\sin u\mathrm{d}u=-\int_0^{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{\pi+t}}\sin t\mathrm{d}t$.

综上有 $\dfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{t}}\sin t\mathrm{d}t+\dfrac{1}{2}\int_\pi^{2\pi}\dfrac{1}{\sqrt{t}}\sin t\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{t}}\sin t\mathrm{d}t-\dfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{\pi+t}}\sin t\mathrm{d}t$

$=\dfrac{1}{2}\int_0^{\pi}(\dfrac{1}{\sqrt{t}}-\dfrac{1}{\sqrt{\pi+t}})\sin t\mathrm{d}t>0$.

【20】设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，T 为常数，则下列命题中错误的是（　　）

（A）对于任意的 a，$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$.

（B）对于任意的 a，$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^{a}f(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow f(-x)=f(x)$.

（C）对于任意的 a，$\int_{a}^{a+T}f(x)\mathrm{d}x$ 与 a 无关 $\Leftrightarrow f(x)$ 有周期为 T.

（D）$f(x+T)=f(x)\Leftrightarrow\int_{a}^{x}f(x)\mathrm{d}x$ 以 T 为周期.

【答案】（D）.

【解析】不妨设题干中的 $a>0$，

对于（A），若 $f(x)$ 为奇函数，则必有 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0$；反之，若 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0$，两边关于 a 求导有 $f(a)+f(-a)=0$，即 $f(x)$ 为奇函数.

同理可得（B），（C）选项正确.

对于（D），$f(x+T)=f(x)$ 无法保证原函数以 T 为周期.例如，$f(x)=1+\sin x$ 以 2π 为周期，但其原函数 $x-\cos x$ 不是以 2π 为周期.

【21】设函数 $f(x)$ 连续，$\int_0^{x}tf(2x-t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\arctan x^2$，且 $f(1)=1$，求 $\int_1^{2}f(x)\mathrm{d}x$.

【答案】$\dfrac{3}{4}$.

【解析】令 $2x-t=u,\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$，则

$$\int_0^{x}tf(2x-t)\mathrm{d}t=-\int_{2x}^{x}(2x-u)f(u)\mathrm{d}u=2x\int_{x}^{2x}f(u)\mathrm{d}u-\int_{x}^{2x}uf(u)\mathrm{d}u$$

从而原式可化为 $2x\int_{x}^{2x}f(u)\mathrm{d}u-\int_{x}^{2x}uf(u)\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}\arctan x^2$，

两边同时对 x 求导有 $2\int_{x}^{2x}f(u)\mathrm{d}u=\dfrac{x}{1+x^4}+xf(x)$，上式中令 $x=1$ 有 $\int_1^{2}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{3}{4}$.

【22】设 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上连续且 $f'(0)\neq 0$，其中 $l>0$.

（1）证明对任意的 $x\in(0,l)$，都存在 $\theta\in(0,1)$，使得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t=x\left[f(\theta x)-f(-\theta x)\right].$$

（2）求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\theta$.

【答案】（1）略；（2）$\lim\limits_{x\to0^+}\theta=\dfrac{1}{2}$.

【解析】

（1）令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t, x\in(0,l)$，则 $F(x)$ 在 $[0,l]$ 上连续，在 $(0,l)$ 内可导，

故根据拉格朗日中值定理可得，$F(x)-F(0)=F'(\theta x)x$，其中 $\theta\in(0,1)$.

整理可得 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t=x\left[f(\theta x)-f(-\theta x)\right]$.

（2）由第（1）问可知，$\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t}{2x^2}=\dfrac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{2\theta x}\cdot\theta$，

上式两边同时取极限，

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t}{2x^2}\overset{洛}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(-x)}{4x}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{4x}+\lim_{x\to0^+}\frac{f(-x)-f(0)}{-4x}=\frac{1}{2}f'(0)$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{2\theta x}\cdot\theta=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{f(\theta x)-f(0)}{2\theta x}+\frac{f(-\theta x)-f(0)}{-2\theta x}\right]\cdot\theta=f'(0)\lim_{x\to0^+}\theta$$

故 $\dfrac{1}{2}f'(0)=f'(0)\lim\limits_{x\to0^+}\theta$，从而有 $\lim\limits_{x\to0^+}\theta=\dfrac{1}{2}$.

【23】设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且其图像关于 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 对称，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x.$$

【证明】由于 $f(x)$ 的图像关于 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 对称，故

$$f(x)=f\left[\frac{a+b}{2}-\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\right]=f\left[\frac{a+b}{2}+\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\right]=f(a+b-x),$$

于是 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x$，

而 $\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(a+b-x)\mathrm{d}x\overset{a+b-x=t}{=}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)\mathrm{d}t=\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x$，

故$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

【24】计算下列积分：

（1）$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\mathrm{d}x$.

（2）$f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}, f(\varphi(x))=\ln x$，求$\int_0^2 \frac{\varphi'(x)}{4+\varphi^2(x)}\mathrm{d}x$.

【答案】（1）$\ln 2$；（2）$\frac{1}{2}(\arctan 8-\pi)$.

【解析】

（1）令$e^{-x}=t$，则

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2}\mathrm{d}t = \left[\ln t\cdot\frac{1}{1+t}-\ln t+\ln(1+t)\right]\Big|_0^1 = \ln 2-\lim_{t\to 0^+}\left(\ln t\cdot\frac{1}{1+t}-\ln t\right)$$

$$=\ln 2-\lim_{t\to 0^+}\ln t\cdot\frac{-t}{1+t}=\ln 2.$$

（2）$f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2} \Rightarrow f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$，而$f(\varphi(x))=\ln x$，故$\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=x$，得

$\varphi(x)=\frac{x+1}{x-1}$.

$$\int_0^2 \frac{\varphi'(x)}{4+\varphi^2(x)}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\varphi'(x)}{4+\varphi^2(x)}\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{\varphi'(x)}{4+\varphi^2(x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arctan\frac{\varphi(x)}{2}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\arctan\frac{\varphi(x)}{2}\Big|_1^2$$

$$=\frac{1}{2}\arctan\frac{u}{2}\Big|_{-1}^{-\infty}+\frac{1}{2}\arctan\frac{u}{2}\Big|_{+\infty}^{3}=\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\arctan\frac{3}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}(\arctan 8-\pi).$$

【25】讨论积分$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$的敛散性，其中$\alpha>0$.

【答案】$1<\alpha<2$时收敛，其他情况发散.

【解析】$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$

对于$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$，当$x\to 0^+$时，$\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\sim\frac{x}{x^\alpha}=\frac{1}{x^{\alpha-1}}$，当$\alpha-1<1$时即$0<\alpha<2$收敛；

对于$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$，当$\alpha>1$时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x^{\alpha}}}{\frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^{\frac{\alpha-1}{2}}}=0$，且$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}\mathrm{d}x$收敛，

故$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$收敛，当$\alpha\leqslant1$时，且$x$充分大时，$\frac{\ln(1+x)}{x^{\alpha}}>\frac{1}{x^{\alpha}}$，而$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$发散，故$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$发散.

综上$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$的敛散性为：当$1<\alpha<2$时收敛，其他情况发散.

【26】已知函数$f(x,y)$满足$\frac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$且$f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$，求曲线$f(x,y)=0$所围图形绕直线$y=-1$旋转所成旋转体的体积.

【答案】$(2\ln2-\frac{5}{4})\pi$.

【解析】因为$\frac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$，所以$f(x,y)=(y+1)^2+\varphi(x)$，其中$\varphi(x)$为待定函数.

又因为$f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$，则$\varphi(y)=-(2-y)\ln y$，从而

$$f(x,y)=y^2+2y+1-(2-x)\ln x=(y+1)^2-(2-x)\ln x,$$

所以$f(x,y)=0$对应的方程为$(y+1)^2=(2-x)\ln x,(1\leqslant x\leqslant2)$，

其所围图形绕直线$y=-1$旋转所成旋转体的体积为

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_1^2(y+1)^2\mathrm{d}x=\pi\int_1^2(2-x)\ln x\mathrm{d}x=\pi\int_1^2 2\ln x\mathrm{d}x-\pi\int_1^2 x\ln x\mathrm{d}x\\&=2\pi(2\ln2-1)-\frac{\pi}{2}(4\ln2-\frac{3}{2})=(2\ln2-\frac{5}{4})\pi.\end{aligned}$$

五、微分方程综合专题

【27】设$y''+p(x)y'=f(x)$有一个特解$y=\frac{1}{x}$，对应齐次方程有一个特解为$y=x^2$，求该方程的通解.

【答案】$y=C_1+C_2x^2+\frac{1}{x}$.

【解析】根据题意知，$\begin{cases}\dfrac{2}{x^3}+p(x)\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=f(x)\\ 2+2xp(x)=0\end{cases}$，解之得 $f(x)=\dfrac{3}{x^3},p(x)=-\dfrac{1}{x}$.

从而原方程为

$$y''-\frac{1}{x}y'=\frac{3}{x^3}$$

于是对应齐次方程为 $y''-\dfrac{1}{x}y'=0$，显见 $y_1=1,y_2=x^2$ 是方程的两个线性无关的解，故原非齐次方程的通解为 $y=C_1+C_2x^2+\dfrac{1}{x}$.

【28】设函数 $u=f(\sqrt{x^2+y^2})$，f 二阶可导，且满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\displaystyle\iint_D\frac{1}{1+s^2+t^2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t$，其中 $D=\left\{(s,t)\middle|s^2+t^2\leqslant x^2+y^2\right\}$，又 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$.

（1）试求 $f'(x)$ 的表达式；（2）若 $f(0)=0$，求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x^4}$.

【答案】（1）$f'(x)=\dfrac{\pi(1+x^2)}{2x}\left[\ln(1+x^2)-1\right]+\dfrac{\pi}{2x}$；（2）$\dfrac{\pi}{16}$.

【解析】设 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\left(\frac{x}{r}\right),\frac{\partial u}{\partial y}=f'(r)\left(\frac{y}{r}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(r)\left(\frac{x}{r}\right)^2+f'(r)\frac{r^2-x^2}{r^3},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(r)\left(\frac{y}{r}\right)^2+f'(r)\frac{r^2-y^2}{r^3}$$

又
$$\iint_D\frac{1}{1+s^2+t^2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^r\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{1+\rho^2}=\pi\ln(1+r^2),$$

从而根据 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\displaystyle\iint_D\frac{1}{1+s^2+t^2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t$ 可得，$f''(r)+\dfrac{1}{r}f'(r)=\pi\ln(1+r^2)$，

从而有

$$f'(x)=\frac{\pi(1+x^2)}{2x}\left[\ln(1+x^2)-1\right]+\frac{C}{x}.$$

又 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$，故 $C=\dfrac{\pi}{2}$.故 $f'(x)=\dfrac{\pi(1+x^2)}{2x}\left[\ln(1+x^2)-1\right]+\dfrac{\pi}{2x}$.

（2）

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x^4}=\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)}{4x^3}=\frac{\pi}{8}\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^3}\left[\frac{1+x^2}{x}\ln(1+x^2)-x\right]=\frac{\pi}{8}\lim_{x\to0^+}\frac{(1+x^2)\ln(1+x^2)-x^2}{x^4}$$

$$=\frac{\pi}{8}\lim_{t\to0^+}\frac{(1+t)\ln(1+t)-t}{t^2}=\frac{\pi}{8}\lim_{t\to0^+}\left[\frac{t\ln(1+t)}{t^2}+\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}\right]=\frac{\pi}{16}.$$

【29】（数一）设可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=e^x+e^x\int_0^x[f(t)]^2\,dt$，求 $f(x)$ 的表达式.

【答案】 $f(x)=\dfrac{2e^x}{3-e^{2x}}$.

【解析】在方程 $f(x)=e^x+e^x\int_0^x[f(t)]^2\,dt$ 两边同时关于 x 求导有，

$$f'(x)=e^x+e^x\int_0^x[f(t)]^2\,dt+e^xf^2(x)=f(x)+e^xf^2(x)$$

即

$$f'(x)-f(x)=e^xf^2(x)$$

故 $\dfrac{f'(x)-f(x)}{f^2(x)}=\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}-\dfrac{1}{f(x)}=e^x$，令 $u=\dfrac{1}{f(x)}$，从而有 $u'+u=-e^x$.

解之得

$$u=Ce^{-x}-\frac{1}{2}e^x$$

又 $f(0)=1$，从而可得 $f(x)=\dfrac{2e^x}{3-e^{2x}}$.

【30】（数一、二）设函数 $y(x)$ 满足方程 $y(x)=x^3-x\int_1^x\frac{y(t)}{t^2}dt+y'(x),\ x>0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y(x)}{x^3}=\dfrac{2}{3}$.求函数 $y(x)$.

【答案】 $y(x)=\dfrac{1}{3}(2x^3+3x^2+10)$.

【解析】在 $y(x)=x^3-x\int_1^x\frac{y(t)}{t^2}dt+y'(x)$ 同除以 x 有

$$\frac{y(x)}{x}=x^2-\int_1^x\frac{y(t)}{t^2}dt+\frac{y'(x)}{x},$$

两边同时关于 x 求导有

$$y''-\frac{1+x}{x}y'=-2x^2,$$

该方程是不显含 y 的可降阶方程，令 $y'=p, y''=p'$ 代入可得

$$p'-\frac{1+x}{x}p=-2x^2,$$

解之得
$$p=Cxe^x+2x^2+2x,$$

两边再积分可得

$$y=C(x-1)e^x+\frac{2}{3}x^3+x^2+C_1.$$

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x^3}=\frac{2}{3}$，从而可知 $C=0$.

再根据 $\frac{y(x)}{x}=x^2-\int_1^x\frac{y(t)}{t^2}dt+\frac{y'(x)}{x}$ 可知，$y(1)=1+y'(1)$，从而知 $C_1=\frac{10}{3}$.

综上，$y(x)=\frac{1}{3}(2x^3+3x^2+10)$.

六、多元函数微分学综合专题

【31】设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0\qquad\qquad, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 求 $f''_{xy}(0,0), f''_{yx}(0,0)$.

【答案】$f''_{xy}(0,0)=-1, f''_{yx}(0,0)=1$.

【解析】由偏导数定义可知

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\ f'_y(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0,$$

当 $y\neq0$ 时，$f'_x(0,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\Bigg|_{x=0}=-y$,

当 $x\neq0$ 时，$f'_y(x,0)=\frac{\partial}{\partial y}\left(xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\Bigg|_{y=0}=x$,

从而根据定义可知

$$f''_{xy}(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y}=-1,\ f''_{yx}(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x}=1.$$

【32】设 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数，且 $f(x,y)=1-x-y+o(\sqrt{(x-1)^2+y^2})$.若 $g(x,y)=f(e^{xy},x^2+y^2)$.试问 $(0,0)$ 是否为 $g(x,y)$ 的极值点，请说明理由.

【答案】$(0,0)$ 是 $g(x,y)$ 的极值点，且为极大值点，并有 $g(0,0)=f(1,0)=0$.

【解析】根据 $f(x,y)=1-x-y+o\left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)$ 可知

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-1+x+y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=0,$$

从而

$$f(1,0)=0,\ f_x'(1,0)=f_y'(1,0)=-1,$$

又 $g(x,y)=f(e^{xy},x^2+y^2)$，则

$$g_x'=ye^{xy}f_1'+2xf_2',g_y'=xe^{xy}f_1'+2yf_2',$$

从而

$$g_x'(0,0)=g_y'(0,0)=0.$$

又

$$g_{xx}''=(ye^{xy}f_{11}''+2xf_{12}'')ye^{xy}+y^2e^{xy}f_1'+(ye^{xy}f_{21}''+2xf_{22}'')2x+2f_2',$$

$$g_{xy}''=(xe^{xy}f_{11}''+2yf_{12}'')ye^{xy}+(xye^{xy}+e^{xy})f_1'+(xe^{xy}f_{21}''+2yf_{22}'')2x,$$

$$g_{yy}''=(xe^{xy}f_{11}''+2yf_{12}'')xe^{xy}+x^2e^{xy}f_1'+(xe^{xy}f_{21}''+2yf_{22}'')2y+2f_2',$$

从而

$$A=g_{xx}''(0,0)=2f_2'(1,0)=-2,B=g_{xy}''(0,0)=f_1'(1,0)=-1,C=g_{yy}''(0,0)=2f_2'(1,0)=-2$$

故

$$AC-B^2=3>0,A<0，即 g(0,0)=f(1,0)是其极大值.$$

【33】设函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $f(0,0)=1,\ f_x'(0,0)=2,\ f_y'(0,y)=-3$，以及 $f_{xx}''(x,y)=y,\ f_{xy}''(x,y)=x+y$，试求 $f(x,y)$ 的表达式.

【答案】 $f(x,y)=\dfrac{x^2y+xy^2}{2}+2x-3y+1$.

【解析】在 $f_{xx}''(x,y)=y$ 两边同时对 x 积分得 $f_x'(x,y)=xy+C_1(y)$，

在 $f''_{xy}(x,y)=x+y$ 两边同时对 y 积分得 $f'_x(x,y)=xy+\frac{1}{2}y^2+C_2(x)$，

从而

$$xy+C_1(y)=xy+\frac{1}{2}y^2+C_2(x),$$

即

$$C_1(y)=\frac{1}{2}y^2+C,$$

从而 $f'_x(x,y)=xy+\frac{1}{2}y^2+C$，又 $f'_x(0,0)=2$，故 $C=2$，即 $f'_x(x,y)=xy+\frac{1}{2}y^2+2$.

在 $f'_x(x,y)=xy+\frac{1}{2}y^2+2$ 两边对 x 再积分有

$$f(x,y)=\frac{x^2y+xy^2}{2}+2x+C_3(y),$$

从而 $f'_y(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy+C'_3(y)$，又 $f'_y(0,y)=-3$，于是 $C'_3(y)=-3$，故

$C_3(y)=-3y+C_4$，故 $f(x,y)=\frac{x^2y+xy^2}{2}+2x-3y+C_4$，又由 $f(0,0)=1$ 可得 $C_4=1$.

综上，$f(x,y)=\frac{x^2y+xy^2}{2}+2x-3y+1$.

七、多元函数积分学综合专题

【34】设平面区域 D 由直线 $x+y=\frac{1}{2},x+y=1$ 及两条坐标轴所围成.记

$I_1=\iint\limits_D(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I_2=\iint\limits_D[\sin(x+y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I_3=\iint\limits_D\ln(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则有

（A）$I_3>I_2>I_1$.　（B）$I_1>I_2>I_3$.　（C）$I_2>I_1>I_3$.　（D）$I_1>I_3>I_2$.

【答案】（B）.

【解析】根据条件易知，$\frac{1}{2}\leqslant x+y\leqslant 1$，从而可知

$$\ln(x+y)<\sin(x+y)<x+y,$$

故正确选项为（B）.

【35】设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\arctan(1+x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 若平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\leqslant a^2\right\}$，则 $\lim\limits_{a\to 0^+}\dfrac{\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi a^2}=$（　）

（A）$\dfrac{\pi}{2}$.　　（B）$\dfrac{\pi}{4}$.　　（C）$\dfrac{\pi}{8}$.　　（D）0.

【答案】（B）.

【解析】设 $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\arctan(1+x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0,\\ \dfrac{\pi}{4}, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 则 $g(x,y)$ 连续，根据积分中值定理可知 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=g(\xi,\eta)\sigma=\pi a^2 g(\xi,\eta),(\xi,\eta)\in D$，

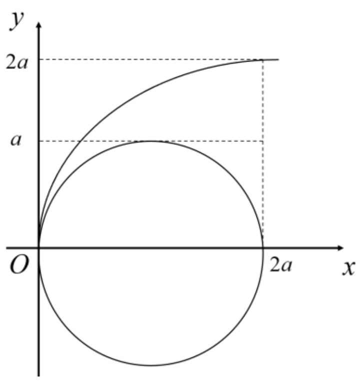
故 $\lim\limits_{a\to 0^+}\dfrac{\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi a^2}=\lim\limits_{a\to 0^+}\dfrac{\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi a^2}=\lim\limits_{a\to 0^+}\dfrac{\pi a^2 g(\xi,\eta)}{\pi a^2}=\lim\limits_{a\to 0^+}g(\xi,\eta)$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}g(x,y)=\dfrac{\pi}{4}$.

【36】交换积分次序 $I=\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

【答案】$I=\int_a^{2a}\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_0^a\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_0^a\mathrm{d}y\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a}f(x,y)\mathrm{d}x$.

【解析】见下图.



【37】$I=\iint\limits_D\max\{x,y\}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle| x\geqslant 0,y\geqslant 0\right\}$.

【答案】$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

【解析】$I=\iint\limits_{y\geqslant x\geqslant 0} ye^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{x>y\geqslant 0} xe^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}ye^{-y^2}\mathrm{d}y+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\int_y^{+\infty}xe^{-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}ye^{-y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

（其中用到了 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$）.

以下 38-43 题属于数一内容：

【38】设有一匀质物体，在空间所占据的区域 Ω 由球面 $x^2+y^2+z^2=2az$ 与圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成，其中 $a>0$，求该物体的质心坐标.

【答案】$\left(0,0,\dfrac{7a}{6}\right)$.

【解析】根据对称性可知，$\bar{x}=\bar{y}=0$.

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v}=\frac{\int_0^a\pi z^3\mathrm{d}z+\int_a^{2a}\pi(2az^2-z^3)\mathrm{d}z}{\int_0^a\pi z^2\mathrm{d}z+\int_a^{2a}\pi(2az-z^2)\mathrm{d}z}=\frac{\frac{7}{6}\pi a^4}{\pi a^3}=\frac{7}{6}a.$$

从而质心坐标为 $\left(0,0,\dfrac{7a}{6}\right)$.

【39】计算曲线积分 $I=\int_L\dfrac{(x+2)^2+(y-3)^2}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s$，其中 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ x+y=0.\end{cases}$

【答案】27π.

【解析】根据曲线方程可知

$$I=\int_\Gamma\frac{(x+2)^2+(y-3)^2}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s=\int_\Gamma[(x+2)^2+(y-3)^2]\mathrm{d}s=\int_\Gamma(x^2+y^2+4x-6y+13)\mathrm{d}s,$$

又根据曲线的对称性可知

$$\int_\Gamma x^2 \mathrm{d}s = \int_\Gamma y^2 \mathrm{d}s, \int_\Gamma x \mathrm{d}s = \int_\Gamma y \mathrm{d}s = 0,$$

从而

$$I = \int_\Gamma (2x^2 + 13)\mathrm{d}s,$$

又曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi), \\ z = \sin t, \end{cases}$

从而可得 $I = \int_\Gamma (2x^2 + 13)\mathrm{d}s = 27\pi.$

【40】一薄壳形状为 $x^2 + y^2 = 2 - 2z(z > 0)$，其上任一点 (x, y, z) 处的面密度为 $\mu = \dfrac{3}{2} + y - z$，求该薄壳的质量.

【答案】$\dfrac{\pi}{5}(9\sqrt{3} - 1)$.

【解析】由对称性可得该曲面关于 yoz 平面对称，也关于 xoz 平面对称.

$$M = \iint_\Sigma (\frac{3}{2} + y - z)\mathrm{d}S = \iint_\Sigma (\frac{3}{2} - z)\mathrm{d}S = \iint_{x^2+y^2 \leqslant 2} \frac{1 + x^2 + y^2}{2}\sqrt{1 + x^2 + y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi}{5}(9\sqrt{3} - 1).$$

【41】已知 $\mathrm{d}u = \dfrac{ax + y}{x^2 + y^2}\mathrm{d}x - \dfrac{x - y + b}{x^2 + y^2}\mathrm{d}y$.

（1）求 a, b；（2）计算 $\oint_l \mathrm{d}u$，其中 $l: x^2 + y^2 = 1$ 且为逆时针方向.

【答案】（1）$a = 1, b = 0$；（2）-2π.

【解析】（1）记 $P = \dfrac{ax + y}{x^2 + y^2}, Q = -\dfrac{x - y + b}{x^2 + y^2}$，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 - 2xy - y^2 + 2bx}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2 - 2axy - y^2}{(x^2 + y^2)^2};$$

经比对可知 $a = 1, b = 0$.

（2）$\oint_l \mathrm{d}u = \oint_l \frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x - \frac{x-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y = \oint_l (x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y = \iint_D -2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -2\pi$.

【42】求 $I=\oint_L (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$，其中 L 是半球面 $x^2+y^2+z^2=2ax\ (z\geqslant 0)$ 与圆柱面 $x^2+y^2=2bx\ (a>b>0)$ 的交线，从 z 轴正向看为逆时针方向.

【答案】$2\pi ab^2$.

【解析】由 $x^2+y^2+z^2=2ax$，知半球面的法向量为 $\vec{\boldsymbol{n}}=\left(x-a,y,z\right)$，

从而可知单位法向量为 $\overrightarrow{\boldsymbol{e}_n}=\left(\frac{x-a}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}\right)$，

$$\text{根据斯托克斯公式有 } I=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \frac{x-a}{a} & \frac{y}{a} & \frac{z}{a} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2+z^2 & x^2+z^2 & x^2+y^2 \end{vmatrix} \mathrm{d}S = 2\iint_\Sigma (z-y)\mathrm{d}S,$$

其中 Σ 为半球面 $x^2+y^2+z^2=2ax\ (z\geqslant 0)$ 在圆柱面 $x^2+y^2=2bx\ (a>b>0)$ 内部的部分，取上侧.

又 Σ 关于 xoz 面对称，故 $\iint_\Sigma y\mathrm{d}S=0$.从而 $I=2\iint_\Sigma z\mathrm{d}S=2\iint_{D_{xy}} a\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi ab^2$.

其中 $D_{xy}: x^2+y^2 \leqslant 2bx$.

【43】已知点 $A(0,0,0)$ 与点 $B(0,1,1)$，Σ 是由直线 $\overline{AB}$ 绕 z 轴旋转一周所得旋转曲面（介于 $z=1$ 与 $z=2$ 之间部分的内侧），且 $f(x)$ 可导.

（1）求曲面 Σ 的方程；

（2）计算 $I=\iint_\Sigma [xf(\frac{x}{y})+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[yf(\frac{x}{y})+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[zf(\frac{x}{y})+4z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【答案】（1）$z=\sqrt{x^2+y^2}\ (1\leqslant z\leqslant 2)$.（2）$14\pi$.

【解析】(1) 直线 $\overline{AB}$ 的方程为 $\dfrac{x-0}{0}=\dfrac{y-0}{1}=\dfrac{z-0}{1}=t$，其参数式方程为 $\begin{cases}x=0,\\ y=t,\\ z=t.\end{cases}$ 因此

直线 $\overline{AB}$ 绕 z 轴旋转一周所得旋转曲面 Σ 的方程为 $x^2+y^2=z^2(1\leqslant z\leqslant 2)$，即

$z=\sqrt{x^2+y^2}(1\leqslant z\leqslant 2)$.

(2) 因为 f 可导，不满足高斯公式要求的被积函数偏导数连续的条件，因此不能用高斯公式.

因为曲面 Σ 的方程为 $z=\sqrt{x^2+y^2}(1\leqslant z\leqslant 2)$，因此 $z'_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},z'_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

根据两类曲面积分之间的关系，使用转换投影法，可将投影到三个平面上的第二类曲面积分 I 转换为仅投影到 xoy 面上的第二类曲面积分.

$$I=\iint\limits_{\Sigma}[xf(\frac{x}{y})+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[yf(\frac{x}{y})+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[zf(\frac{x}{y})+4z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}\left\{[xf(\frac{x}{y})+x]\cdot(-z'_x)+[yf(\frac{x}{y})+y]\cdot(-z'_y)+[zf(\frac{x}{y})+4z]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}\left\{-[f(\frac{x}{y})+1]\cdot\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-[f(\frac{x}{y})+1]\cdot\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+[zf(\frac{x}{y})+4z]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}\left\{-[f(\frac{x}{y})+1]\cdot\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2}f(\frac{x}{y})+4\sqrt{x^2+y^2}\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r^2\mathrm{d}r$$

$$=14\pi.$$

八、无穷级数综合专题

【44】若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则必有

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 发散.　　（B）$\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\infty$.

（C）$\lim_{n\to\infty} a_n=0$.　　（D）$\lim_{n\to\infty}(|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|)=\infty$.

【答案】（D）.

【解析】反证法，若 $\lim_{n\to\infty}(|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|)\neq\infty$，则必有 $\lim_{n\to\infty}(|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|)$ 存在，

即 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，与题干相矛盾，故假设错误，原命题成立.

【45】如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$

（A）条件收敛.　（B）绝对收敛.　（C）发散.　（D）以上均有可能.

【答案】（A）.

【解析】首先，根据已知 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 是收敛的.

现设 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 绝对收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n+v_n|$ 收敛，从而

$$|u_n|=|u_n+v_n-v_n|\leqslant|u_n+v_n|+|v_n|$$

于是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，显然与条件矛盾，故 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 只能条件收敛.

【46】设 $\lim_{n\to\infty}\frac{|u_n|}{v_n}=1$，则下列说法中正确的是

（1）若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；　（2）若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；

（3）若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛；　（4）若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

（A）（1）（2）．　　（B）（2）（3）．　（C）（3）（4）．　（D）（1）（4）．

【答案】（D）．

【解析】根据条件可知当n充分大时，$v_n>0$，且$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$同敛散.若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，从而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，即（1）正确.若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，从而$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散.

故正确选项为（D）．

【47】判断下列级数的敛散性:

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(2+n)}\sin\frac{1}{n}$；

（2）设$\{a_n\},\{b_n\}$满足$\mathrm{e}^{a_n}=a_n+\mathrm{e}^{b_n}$，其中$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛且$a_n>0$，判定$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n}$的敛散性.

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$，其中$\{x_n\}$是单调递增且有界的正数列;

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 x^2(1-x)^n\mathrm{d}x$.

【答案】（1）发散;（2）收敛.（3）收敛;（4）收敛.

【解析】（1）因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{\ln(n+2)}\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n\ln n}}=1$，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+2)}\sin\frac{1}{n}$和$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$有相同的敛散性．又因为$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$发散，由积分判别法知$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$发散．所以原级数发散.

（2）$x\neq 0$时$\mathrm{e}^x>1+x$，从而可知$b_n=\ln(\mathrm{e}^{a_n}-a_n)>0$，于是有$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n}$为正项级数.又因为$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，下面只证$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n^{\ 2}}$存在，即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}^{a_n}-a_n)}{a_n^{\ 2}}$存在.事实上，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}^{a_n}-a_n)}{a_n^{\ 2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\mathrm{e}^x-x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{2x(\mathrm{e}^x-x)}=\frac{1}{2},$$

故根据比较判别法知，原级数收敛.

（3）因为$\{x_n\}$是单调递增且有界的正数列，从而根据单调有界准则可知$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在.

又$u_n = 1-\dfrac{x_n}{x_{n+1}} = \dfrac{x_{n+1}-x_n}{x_{n+1}} \leqslant \dfrac{x_{n+1}-x_n}{x_1} = v_n$，对于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$，其前$n$项部分和：

$$S_n = \frac{x_2-x_1}{x_1}+\frac{x_3-x_2}{x_1}+\cdots+\frac{x_{n+1}-x_n}{x_1} = \frac{x_{n+1}-x_1}{x_1}$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，从而可知$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$存在，从而原级数收敛.

（4）$\int_0^1 x^2(1-x)^n\mathrm{d}x \overset{1-x=t}{=} \int_0^1 t^n(1-t)^2\mathrm{d}t = \int_0^1\left(t^{n+2}+t^n-2t^{n+1}\right)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{n+3}+\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{2}{n+2}$

$=\left(\dfrac{1}{n+3}-\dfrac{1}{n+2}\right)-\left(\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+1}\right)$，

从而级数的前n项部分和：

$$S_n = \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+2}\right)-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+2)(n+3)},$$

故$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{6}$，即原级数收敛.

【48】设$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\mathrm{d}x$.

（1）求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+2}}{n}$的值；（2）试证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^\lambda}$收敛，其中$\lambda$为正常数.

【答案】（1）1；（2）见解析.

【解析】因为$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\mathrm{d}x$，故$a_n + a_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\mathrm{d}\tan x = \dfrac{1}{n+1}$，故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+2}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1;$$

（2）令$\tan x = t$，则$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\mathrm{d}x = \int_0^1 \dfrac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t < \int_0^1 t^n\mathrm{d}t = \dfrac{1}{n+1}$；

$0<\frac{a_n}{n^\lambda}<\frac{1}{n^\lambda(n+1)}<\frac{1}{n^{1+\lambda}}$，由于 $\lambda>0$，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\lambda}}$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

【49】已知 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=2, na_n=a_{n-1}+n-1, n=1,2,\cdots$.求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$，其中 $x\in(-1,1)$.

【答案】$S(x)=\frac{1}{1-x}+\mathrm{e}^x$.

【解析】由于 $na_n=a_{n-1}+n-1$，所以 $\frac{a_n-1}{a_{n-1}-1}=\frac{1}{n}$，从而

$$\frac{a_n-1}{a_{n-1}-1}\cdot\frac{a_{n-1}-1}{a_{n-2}-1}\cdot\frac{a_{n-2}-1}{a_{n-3}-1}\cdots\cdots\frac{a_1-1}{a_0-1}=\frac{a_n-1}{1}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdots\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{n!},$$

故 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n!}\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=\frac{1}{1-x}+\mathrm{e}^x$，其中 $x\in(-1,1)$.

【50】求幂级数 $2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的收敛域及和函数.

【答案】（1）$(-\infty,+\infty)$；（2）$\frac{1}{2}\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}+1$.

【解析】

（1）$\lim_{n\to\infty}\frac{[2(n+1)]!}{(2n)!}=+\infty$，故收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

（2）令 $S(x)=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$，则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=S(x)-1,$$

即 $S''(x)-S(x)=-1$，其中 $S(0)=2, S'(0)=0$，

解之得 $S(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}+1$.

第二部分 线性代数

一、选择题

【1】设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，下列命题中正确的是

（A） $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{O}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 且 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$.　（B）若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

（C）若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}|=0$.　（D）若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$.

【答案】（C）

【解析】设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & \\ & 0\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & \\ & 1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，可知（A）、（B）均不正确；

若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，有 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=0$，所以 $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}|=0$,即（C）正确；若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$， $\boldsymbol{B}$ 可为任意一个 n 阶矩阵，知（D）不正确.

【2】设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵， $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}$ 是三阶可逆矩阵，且

$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}b_{12} & 2b_{11} & -3b_{13}\\ b_{22} & 2b_{21} & -3b_{23}\\ b_{32} & 2b_{31} & -3b_{33}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 相似于

（A） $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$.　（B） $\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

（C） $\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$.　（D） $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 0\end{pmatrix}$.

【答案】（C）

【解析】考察初等矩阵的作用，题中 $\boldsymbol{AB}$ 是由矩阵 $\boldsymbol{B}$ 经过初等列变换：先第一、二列进行互换，然后第二、三列分别乘以 2 和 -3 得到，即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BP}$，其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$，

得 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{P}$， $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{P}$，故选（C）.

【3】设 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，令 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1^{2022}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2^{-1}$ 等于

（A）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$.　　（B）$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

（C）$\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　（D）$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

【答案】（B）

【解析】由于 $\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}=\boldsymbol{E},\left[\boldsymbol{E}_{ij}(k)\right]^{-1}=\boldsymbol{E}_{ij}(-k)$,所以 $\boldsymbol{P}_1^{2022}=\boldsymbol{E},\boldsymbol{P}_2^{-1}=\boldsymbol{E}_{ij}(2)$，故选（B）.

【4】设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，记 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}$，$(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{B}$,其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为3阶矩阵，则

（A）存在 $\boldsymbol{A}$，使 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.　（B）不存在 $\boldsymbol{A}$，使 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关.

（C）存在 $\boldsymbol{B}$，使 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 线性无关.　（D）不存在 $\boldsymbol{B}$，使 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 线性相关.

【答案】（C）

【解析】$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}\Rightarrow r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\leqslant 2$. $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{B}\Rightarrow r(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\leqslant 3$,特别地，当 $\boldsymbol{B}$ 可逆时，$r(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=3$，故选（C）.

【5】（数一）设 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_i,b_i,c_i)^{\mathrm{T}},i=1,2,3,\boldsymbol{\alpha}=(d_1,d_2,d_3)^{\mathrm{T}}$，则三个平面

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$

$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0$$

两两相交成三条平行直线的充分必要条件是

（A）$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=1,r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha})=2$.

（B）$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2,r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha})=3$.

（C）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$中任意两个均线性无关，且$\boldsymbol{\alpha}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出.

（D）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，且$\boldsymbol{\alpha}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出.

【答案】（C）

【解析】（A）中$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=1$，表明三个平面的法向量平行，从而三个平面相互平行或重合，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha})=2$说明三个平面没有公共的交点，因而这三个平面两两平行或至多有两个重合.

当三个平面两两相交成三条平行直线时，必有$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2,r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha})=3$，但当$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2,r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha})=3$时，有可能其中两个平面平行，第三个平面和它们相交，所以（B）是必要不充分条件.

而（D）$\Leftrightarrow$（A）或（B）亦知（D）是必要不充分条件.

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$中任意两个线性无关$\Leftrightarrow$任何两个平面都不平行且相交成一条直线，而$\boldsymbol{\alpha}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出$\Leftrightarrow$三个平面没有公共交点，故选（C）.

【6】设$\boldsymbol{A}$为4×3的矩阵,非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$有3个线性无关的解$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，$k_1,k_2,k_3$为任意常数.则下列表达式中为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$通解的有______个：

①$\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+k_1(\alpha_1-\alpha_2)$

②$\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{3}+k_1(\alpha_1-\alpha_2)+k_2(\alpha_2-\alpha_3)$

③$\alpha_3+k_1(\alpha_1-\alpha_3)+k_2(\alpha_2-\alpha_3)$

④$\alpha_1+k_1(\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2)+k_2(\alpha_2-\alpha_3)$

（A）1.　　（B）2.　　（C）3.　　（D）4.

【答案】（C）

【解析】$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$有3个线性无关的解$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，对应的齐次方程组有两个解$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$且线性无关，则$r(\boldsymbol{A})\leqslant1$，又$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，则$r(\boldsymbol{A})\geqslant1$，所以$r(\boldsymbol{A})=1$.利用方程组的性质和解的结构知（2）（3）（4）均正确，故选（C）.

【7】设$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&a&4\\4&5&a\end{pmatrix}(a>0)$，$\boldsymbol{A}$是3阶非零矩阵且$\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$，则方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的通解为

（A）$k_1(1,2,-1)^{\mathrm{T}}+k_2(3,3,4)^{\mathrm{T}}$.　　（B）$k_1(1,2,-1)^{\mathrm{T}}+k_2(4,5,-1)^{\mathrm{T}}$.

（C）$k_1(1,3,4)^{\mathrm{T}}+k_2(2,3,5)^{\mathrm{T}}$.　　（D）$k_1(1,3,4)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,4,3)^{\mathrm{T}}$.

【答案】（A）

【解析】利用矩阵秩的性质：$\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$，则$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant 3$，又$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，$r(\boldsymbol{A})\geqslant 1$，

$r(\boldsymbol{B})\leqslant 2$；又$\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}\neq 0,\ r(\boldsymbol{B})\geqslant 2$，所以$r(\boldsymbol{B})=2$. 由$\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & a & 4\\ 4 & 5 & a\end{vmatrix}=0$求出$a=3$或者

$a=-1$（舍去），$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 5\\ -1 & 4 & 3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$的列向量即为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解向量，找出两列线性无关的向量即可，故选（A）.

【8】设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均是$n$阶可逆矩阵，且$\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$，则下列结果

$$①\ \boldsymbol{AB}\sim\boldsymbol{BA}\quad ②\ \boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}\quad ③\ \boldsymbol{A}^{2022}\sim\boldsymbol{B}^{2022}\quad ④\ \boldsymbol{A}^{*}\sim\boldsymbol{B}^{*}$$

正确的个数为

（A）1.　　（B）2.　　（C）3.　　（D）4.

【答案】（D）

【解析】由$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{BA}$，所以$\boldsymbol{AB}\sim\boldsymbol{BA}$；

由$\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$知存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$,使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}^{-1}$，两边取逆，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，故$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$；

由$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B},\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{APP}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}^2$即$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}^2,\cdots,\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{2022}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}^{2022}$，故

$\boldsymbol{A}^{2022}\sim\boldsymbol{B}^{2022}$；

由$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，两边求伴随得$\boldsymbol{P}^{*}\boldsymbol{A}^{*}(\boldsymbol{P}^{*})^{-1}=\boldsymbol{B}^{*}$，则$\boldsymbol{A}^{*}\sim\boldsymbol{B}^{*}$，故选（D）.

【9】设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均是3阶矩阵且$\boldsymbol{A}$不可逆，又$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$且$r(\boldsymbol{B})=2$，则$|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=$

（A）0.　　（B）2.　　（C）4.　　（D）8.

【答案】（B）

【解析】令$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，得$\boldsymbol{A\alpha}_i=-\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$.又$r(\boldsymbol{B})=2$得

$\lambda=-1$至少是$\boldsymbol{A}$的二重根，又$\boldsymbol{A}$不可逆，所以$\boldsymbol{A}$有特征值$\lambda=0$，故$\lambda_{1,2}=-1,\lambda_3=0$.

$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$的特征值为$\lambda_{1,2}=1,\lambda_3=2$，故$|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=2$，故选（B）.

【10】设$\boldsymbol{A}$是3阶实对称矩阵，且满足$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，则$\boldsymbol{A}$的秩为

（A）0． （B）1． （C）2． （D）3．

【答案】（A）

【解析】设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，满足 $\lambda(1+2\lambda+3\lambda^2)=0$，解出 $\lambda=0$ 或 $\lambda=\dfrac{-1\pm\sqrt{2}i}{3}$.由于

$\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，其特征值均为实数,所以 $\lambda=0$（三重），则 $\boldsymbol{A}\sim\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}$，即

$r(\boldsymbol{A})=0$，故选（A）.

【11】设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 3 维单位正交列向量，则二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+2\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}$ 的规范形为

（A）$y_1^2+y_2^2$. （B）$y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

（C）$y_1^2-y_2^2$. （D）$y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

【答案】（A）

【解析】由 $(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+2\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+2\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}$, 知 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+2\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}$ 是实对称矩阵. 又

$\boldsymbol{A\alpha}=(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+2\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\beta}=(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+2\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\beta}$ 知 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2.$

又 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}$ 的秩均为1，所以 $r(\boldsymbol{A})=r\left(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+2\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}\right)\leqslant r\left(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\right)+r\left(\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}\right)=2<3$

则 $|\boldsymbol{A}|=0=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=2\times1\times\lambda_3$, 故 $\lambda_3=0.$ 即知正惯性指数为 $p=2$，负惯性指数 $q=0$，故选（A）.

二、填空题

【12】设 $\boldsymbol{B}$ 是 3 阶正交矩阵,且 $|\boldsymbol{B}|<0$, $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵,且 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=6$, 则

$\left|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}\right|=$____________.

【答案】6.

【解析】$\boldsymbol{B}$ 是正交矩阵,知 $\boldsymbol{BB}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$, 则有 $|\boldsymbol{B}|^2=1$. 由 $|\boldsymbol{B}|<0$, 知 $|\boldsymbol{B}|=-1$, 故

$\left|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}\right|=\left|\boldsymbol{BB}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}\right|=\left|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\right|=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|=-(-1)^3|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=6.$

【13】设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 分别是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，若 $|\boldsymbol{A}|=1,|\boldsymbol{B}|=2$，则分块

矩阵$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{BA} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$的伴随矩阵为______________.

【答案】$\begin{pmatrix} 2\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \\ -2\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}^* \end{pmatrix}$.

【解析】因为矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均可逆，所以分块矩阵$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{BA} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$可逆.设其逆矩阵为$\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{T} \end{pmatrix}$，

其中$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{T}$均为 2 阶方阵.则$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{BA} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{T} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}$，而

$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{BA} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{T} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{AX} & \boldsymbol{AY} \\ \boldsymbol{BAX}+\boldsymbol{BZ} & \boldsymbol{BAY}+\boldsymbol{BT} \end{pmatrix}$，有

$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{AY}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{BAX}+\boldsymbol{BZ}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{BAY}+\boldsymbol{BT}=\boldsymbol{E}$，解之可得

$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{Z}=-\boldsymbol{E},\boldsymbol{T}=\boldsymbol{B}^{-1}$，因此

$\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{T} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}$，而$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{BA} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$，所以

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{BA} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^*=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{BA} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ -|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{E} & |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \\ -2\boldsymbol{E} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \\ -2\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}^* \end{pmatrix}$$

【14】设$\boldsymbol{A}$是3阶实对称矩阵且$r(\boldsymbol{A})=1$，$\lambda=1$是$\boldsymbol{A}$的特征值，其对应的特征向量是

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$,则方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系为______________.

【答案】$(2,1,0)^{\mathrm{T}},(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

【解析】由$r(\boldsymbol{A})=1$知$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=0$.设$\lambda_2=\lambda_3=0$对应的特征向量为

$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，即有$\boldsymbol{A\alpha}=0\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，因此$\boldsymbol{\alpha}$就是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解.$\boldsymbol{A}$为实对称矩阵，所以

$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\alpha}_1$正交，即$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=x_1-2x_2+x_3=0$，

解得$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

【15】若可逆矩阵满足 $D^{\mathrm{T}}D=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&2&-2\\1&-2&6\end{pmatrix}$，则 $D=$________________.

【答案】$\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&2\end{pmatrix}$.

【解析】记 $\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&2&-2\\1&-2&6\end{pmatrix}=A$，则其对应的二次型为

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x^{\mathrm{T}}Ax=x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-4x_2x_3$$

$$=\left(x_1-x_2+x_3\right)^2+\left(x_2-x_3\right)^2+4x_3^2=\left(x_1-x_2+x_3,x_2-x_3,2x_3\right)\begin{pmatrix}x_1-x_2+x_3\\x_2-x_3\\2x_3\end{pmatrix}$$

$$=\left(x_1,x_2,x_3\right)\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\overset{\text{记}}{=\!=}\left(x_1,x_2,x_3\right)D^{\mathrm{T}}D\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

其中 $A=D^{\mathrm{T}}D,D=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&2\end{pmatrix}$.

【16】设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-1,a)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(1,a,2)^{\mathrm{T}}$， $A=E+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，且 $\lambda=3$ 是矩阵 A 的特征值，则矩阵 A 属于特征值 $\lambda=3$ 的特征向量是________________.

【答案】$k(1,-1,1)^{\mathrm{T}}(k\neq 0)$.

【解析】$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 的特征值为 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha},0,0$，且特征值 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$.故

$A=E+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 的特征值为 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}+1,1,1$，则 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}+1=1-a+2a+1=3\Rightarrow a=1$,矩阵 A 属于特征值 $\lambda=3$ 的特征向量是 $k(1,-1,1)^{\mathrm{T}}(k\neq 0)$.

三、解答题

【17】设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3&9\\2&0&6\\-3&1&-7\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 为 3 阶非零矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}b\\1\\0\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解向量，且 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}_3$ 有解.

（1）求常数 a,b.

（2）求 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

【解析】（1）由 $\boldsymbol{B}$ 为三阶非零矩阵得 $r(\boldsymbol{B})\geqslant 1$，从而 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中最多有两个解向量，于是 $\begin{vmatrix}0&a&b\\1&2&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=0$，解得 $a=3b$.

由 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}_3$ 有解，得 $r(\boldsymbol{A})=r\left(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\alpha}_3\right)$.

$$\left(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\alpha}_3\right)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&3&9&b\\2&0&6&1\\-3&1&-7&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&3&9&b\\0&-6&-12&1-2b\\0&10&20&3b\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&3&9&b\\0&1&2&\dfrac{2b-1}{6}\\0&0&0&\dfrac{5-b}{3}\end{array}\right)$$

解得 $b=5$，从而 $a=15$.

（2）由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的两个线性无关解，得 $3-r(\boldsymbol{B})\geqslant 2$，从而 $r(\boldsymbol{B})\leqslant 1$，

再由 $r(\boldsymbol{B})\geqslant 1$ 得 $r(\boldsymbol{B})=1$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，故 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}15\\2\\1\end{pmatrix}$$（k_1,k_2 为任意常数）.

【18】设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,3,c)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(a,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(b,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,-3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(3,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(9,6,-7)^{\mathrm{T}}$，且 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示.

（1）求 a,b,c 的值.

（2）若 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{A}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

【解析】（1）利用初等行变换，得

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&3&9&0&a&b\\2&0&6&3&2&1\\-3&1&-7&c&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&3&9&0&a&b\\0&-6&-12&3&2-2a&1-2b\\0&0&0&c+5&\frac{13-a}{3}&\frac{5-b}{3}\end{array}\right)$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，因此 $a=13,b=5$.又因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，因此 $c=-5$.

（2）对增广矩阵做初等行变换，得 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&3&\frac{3}{2}&1&\frac{1}{2}\\0&1&2&-\frac{1}{2}&4&\frac{3}{2}\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$.

$\xi=(-3,-2,1)^{\mathrm{T}},\eta_1=(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0)^{\mathrm{T}},\eta_2=(1,4,0)^{\mathrm{T}},\eta_3=(\frac{1}{2},\frac{3}{2},0)^{\mathrm{T}}$.

$\boldsymbol{X}=(c_1\xi+\eta_1,c_2\xi+\eta_2,c_3\xi+\eta_3)=\begin{pmatrix}-3c_1+\frac{3}{2}&-3c_2+1&-3c_3+\frac{1}{2}\\-2c_1-\frac{1}{2}&-2c_2+4&-2c_3+\frac{3}{2}\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$，其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数.

【19】设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\a-1&1&a+1\\1&0&0\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$.

（1）求 a 的值；

（2）求可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{B}$.

【答案】$a=0$；$\begin{pmatrix}-1&0&-1\\-2&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$.

【解析】（1）$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-\lambda&0&1\\a-1&1-\lambda&a+1\\1&0&-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$，解出

$\lambda_{1,2}=1,\lambda_3=-1$.

$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\a-1&0&a+1\\1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&2a\\0&0&0\end{pmatrix}$，当$a=0$时$\lambda=1$对应两个线性无关的特征向量.

（2）$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}0&0&1&1&0&0\\-1&1&1&0&1&0\\1&0&0&-1&0&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-1&0&-1\\0&1&0&-2&1&-1\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right)$

$\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{B}$，则$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\-2&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$.

【20】设三阶矩阵$\boldsymbol{A}$的每行元素相加都为2，且存在线性无关的向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$使得

$\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta}=9\boldsymbol{\alpha}$，求$|\boldsymbol{A}|$，若$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$，求矩阵$\boldsymbol{A}$.

【答案】$|\boldsymbol{A}|=-18$；$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\-3&1&4\\-3&4&1\end{pmatrix}$.

【解析】由于$\boldsymbol{A}$的每行元素相加都为2，则$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}$有特征值$2$，对应特征向量

$\boldsymbol{\gamma}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.由已知$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A\gamma})=(\boldsymbol{\beta},9\boldsymbol{\alpha},2\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\begin{pmatrix}0&9&0\\1&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

其中，$|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}|=\begin{vmatrix}1&3&1\\2&3&1\\1&6&1\end{vmatrix}\neq0$，在$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\begin{pmatrix}0&9&0\\1&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$两端同取行列式，

得$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0&9&0\\1&0&0\\0&0&2\end{vmatrix}=-18$，两端同时在右侧乘$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})^{-1}$得，

$$A=(\alpha,\beta,\gamma)\begin{pmatrix}0&9&0\\1&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}(\alpha,\beta,\gamma)^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\-3&1&4\\-3&4&1\end{pmatrix}.$$

【21】设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+2ax_2x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 化为标准形 $f=3y_1^2+3y_2^2+by_3^2$，

（1）求实数 a,b；

（2）求正交阵 $\boldsymbol{Q}$；

（3）若 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=2$，求 f 的最大值.

【解析】（1）由题，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&a\\-2&a&1\end{pmatrix}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=b$，

由 $\begin{cases}\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\\|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3,\end{cases}$ 解得 $a=-2$，$b=-3$（$a=10$ 时，3 不是特征值，矛盾）；

（2）由 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，解得对应于 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$，

由 $(-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，解得对应于 $\lambda_3=-3$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

$$\boldsymbol{Q}=\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|},\frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|},\frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}\right)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix};$$

（3）$f=3y_1^2+3y_2^2-3y_3^2$，

$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{Qy})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Qy}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Qy}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=2$，即 $y_1^2+y_2^2+y_3^2=2$，

当 $y_1^2+y_2^2=2,y_3^2=0$ 时，$f_{\max}=6$.

【22】设矩阵 $\boldsymbol{A}_{3\times3}$ 有三个不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，它们对应的特征向量分别为

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$. 令$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

（1）证明：$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关；

（2）若 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A\beta}$，求 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$.

【答案】（1）略；（2）2.

【解析】（1）证明：由题知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，

$\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{A\alpha}_1+\boldsymbol{A\alpha}_2+\boldsymbol{A\alpha}_3=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3$,

$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_3=\lambda_1^2\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2^2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3^2\boldsymbol{\alpha}_3$，所以向量组

$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2\\1&\lambda_2&\lambda_2^2\\1&\lambda_3&\lambda_3^2\end{pmatrix}$，又

$\begin{vmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2\\1&\lambda_2&\lambda_2^2\\1&\lambda_3&\lambda_3^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\\lambda_1&\lambda_2&\lambda_3\\\lambda_1^2&\lambda_2^2&\lambda_3^2\end{vmatrix}=(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)\neq 0$，所以

$r(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，即 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

（2）令$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{P}$，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，又

$\boldsymbol{AP}=(\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta})\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，所以

$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}\sim\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，经计算$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$的特征值为$0,1,-1$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值也为$0,1,-1$，则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 的特征值为$-1,0,-2$，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可对角化，所以

$r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2$.

【23】设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称矩阵，$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & a & d\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & b & e\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & c & f\end{pmatrix}$ 为正交矩阵. 二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化为 $-y_1^2+2y_2^2+ky_3^2$，且 $|\boldsymbol{A}|=-4$，求

（1）k 的值；

（2）正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$；

（3）矩阵 $\boldsymbol{A}$.

【答案】$k=2$；$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$；$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

【解析】

（1）由题知 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $-1,2,k$，$|\boldsymbol{A}|=-4$，所以 $k=2$.

（2）$\lambda_1=-1$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，设 $\lambda_{2,3}=2$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，

则 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$，求出其基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，施密特正交化：

令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\xi}_2-\dfrac{(\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$，单位化：

令 $\boldsymbol{\gamma}_1=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$，

令 $\boldsymbol{Q}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 则 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=-y_1^2+2y_2^2+2y_3^2$.

（3） $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

【24】设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 分别是 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 -1 与 1 的特征向量，且 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$.

（1）证明 $\boldsymbol{P}$ 可逆；

（2）计算 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$.

【答案】（1）略；（2）$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

【解析】

（1）设存在数 k_1,k_2,k_3，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$ ①

①式两边左乘 $\boldsymbol{A}$，得 $k_1\boldsymbol{A\alpha}_1+k_2\boldsymbol{A\alpha}_2+k_3\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{0}$

即 $-k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$

整理得 $-k_1\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$ ②

①式减去 ②式得 $2k_1\boldsymbol{\alpha}_1-k_3\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关知 $k_1=k_3=0$,代入①式,有 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$.因 $\boldsymbol{\alpha}_2\neq\mathbf{0}$，故 $k_2=0$，于是

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，即 $\boldsymbol{P}$ 可逆.

（2） $$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(-\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\overset{\text{记}}{=\!=}\boldsymbol{PB}$$

故 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B},|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=-1$，则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=-\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}\right)^{-1}=-\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

【25】（数一）已知三维向量空间 R^3 的两组基

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，

（1）求 $\boldsymbol{\gamma}=(3,6,2)^{\mathrm{T}}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标；

（2）求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵；

（3）若 $\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2-3\boldsymbol{\beta}_3$，求 $\boldsymbol{\delta}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标.

【答案】$\begin{pmatrix}-3\\4\\2\end{pmatrix}$；$\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$；$\begin{pmatrix}-5\\4\\-1\end{pmatrix}$.

【解析】（1）设 $\boldsymbol{\gamma}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$，解方程组可得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\4\\2\end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{\gamma}=(3,6,2)^{\mathrm{T}}$ 在

基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}-3\\4\\2\end{pmatrix}$.

（2）设过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$,由 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

（3）$\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2-3\boldsymbol{\beta}_3=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$$

$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}-5\\4\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\delta}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为$\begin{pmatrix}-5\\4\\-1\end{pmatrix}$.

第三部分 概率论与数理统计

一、选择题

【1】设 A、B 为随机事件，$P(B)>0$，则（　　）

（A）$P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)$.　　（B）$P(AB)\geqslant P(A)P(B)$.

（C）$P(A-B)\geqslant P(A)-P(B)$.　　（D）$P(A|B)\geqslant \dfrac{P(A)}{P(B)}$.

【答案】（C）.

【解析】$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\leqslant P(A)+P(B)$，（A）不正确.选项（B）不一定成立.

对(C)，$P(A-B)=P(A)-P(AB)$，$AB\subset B$，$P(AB)\leqslant P(B)$,故 $P(A-B)\geqslant P(A)-P(B)$，应选（C）.选项（D）为 $P(B)P(A|B)\geqslant P(A)$，即 $P(AB)\geqslant P(A)$，显然不正确.

【2】设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$，则随机变量 $Y=|X|$ 的概率密度为（　　）

（A）$f_Y(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$.　　（B）$f_Y(x)=f(x)+f(-x)$.

（C）$f_Y(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$　　（D）$f_Y(x)=\begin{cases}f(x)+f(-x), & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$

【答案】（D）.

【解析】法一：直接计算 $Y=|X|$ 的分布函数为 $F_Y(x)=P(Y\leqslant x)=P(|X|\leqslant x)$，

若 $x\leqslant 0$ 时，则 $F_Y(x)=0$；

若 $x>0$，$F_Y(x)=P(-x\leqslant X\leqslant x)=\int_{-x}^{x}f(t)\mathrm{d}t$，因此，$Y$ 的概率密度函数为

$$f_Y(x)=F_Y'(x)=\begin{cases}f(x)+f(-x), & x>0\\ 0, & 0.\end{cases}$$

选（D）.

法二：直接用排除法，因为 $Y=|X|\geqslant 0$，排除（A）和（B），由公式 $\int_0^{+\infty} f(-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ 可知 $\int_0^{+\infty}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$.

故（C）违背了规范性而（D）满足，所以选（D）.

【3】设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 则随机变量 $Y=1-\mathrm{e}^{-2X}$ 服从（　）

（A）正态分布.　　（B）指数分布.

（C）泊松分布.　　（D）$[0,1]$ 上的均匀分布.

【答案】（D）.

【解析】法一：由已知，X 服从参数为 2 的指数分布，所以分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

由于 $Y=1-\mathrm{e}^{-2X}$ 是单调函数，其反函数为 $X=-\frac{1}{2}\ln(1-Y)$，故 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{1-\mathrm{e}^{-2X}\leqslant y\},$$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $y\geqslant 1$ 时，$F_Y(y)=1$；

当 $0\leqslant y<1$ 时，$F_Y(y)=P\left\{X\leqslant -\frac{1}{2}\ln(1-y)\right\}=F_X\left[-\frac{1}{2}\ln(1-y)\right]=y$，

由此可知，

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ y, & 0\leqslant y<1,\\ 1, & y\geqslant 1,\end{cases}$$

所以 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故Y服从$[0,1]$上的均匀分布，选（D）.

法二：直接套用结论：若连续型随机变量X的分布函数为$F(x)$，则随机变量$Y=F(X)$服从$[0,1]$上的均匀分布.

【4】设随机变量X和Y相互独立，且有相同的分布函数$F(x)$，$Z=X+Y$，$F_Z(z)$为Z的分布函数，则下列成立的是（　　）

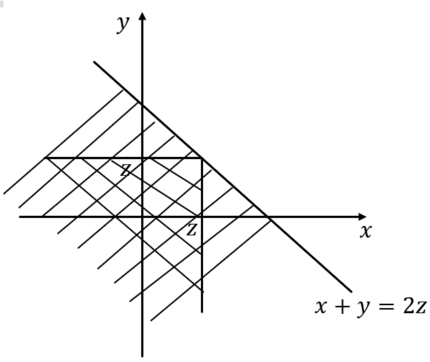
（A）$F_Z(2z)=2F(z)$.　　（B）$F_Z(2z)=[F(z)]^2$.

（C）$F_Z(2z)\leqslant[F(z)]^2$.　　（D）$F_Z(2z)\geqslant[F(z)]^2$.

【答案】（D）

【分析】本题考查考生对分布函数的理解、本题实质是比较事件的概率，主要从事件是否存在包含关系的角度进行分析.

【解析】如下图所示，$F_Z(2z)=P\{Z\leqslant 2z\}=P\{X+Y\leqslant 2z\}$，由于$X$和$Y$相互独立，且有相同的分布函数$F(x)$，从而



$$[F(z)]^2=F(z)F(z)=P\{X\leqslant z\}P\{Y\leqslant z\}=P\{X\leqslant z,Y\leqslant z\},$$

显然$X+Y\leqslant 2z$对应区域包含$X\leqslant z,Y\leqslant z$对应区域，故$F_Z(2z)\geqslant[F(z)]^2$，因此选（D）.

【5】设平面区域D是由x轴，y轴及直线$x+\dfrac{y}{2}=1$所围成的三角形区域，二维随机变量

(X,Y) 在 D 上服从均匀分布，则 $f_{X|Y}(x|y)=$（　　）

（A） $f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{2}{2-y}, & 0<x<1-\dfrac{y}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

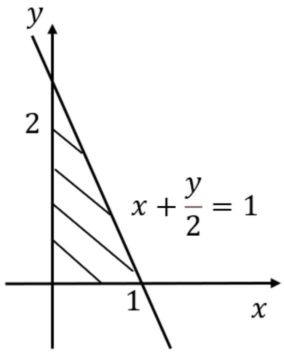
（B） $f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{2}{1-y}, & 0<x<1-\dfrac{y}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

（C） $f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-y}, & 0<x<1-\dfrac{y}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

（D） $f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-y}, & 0<x<1-\dfrac{y}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

【答案】（A）。

【解析】由已知条件，如下图所示，



$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^{1-\frac{y}{2}}\mathrm{d}x=1-\dfrac{y}{2}$， $0<y<2$

所以， $f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{2}{2-y}, & 0<x<1-\dfrac{y}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

故应选（A）.

【6】设相互独立的随机变量 X_1 和 X_2 的分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，则随机变量 $Y=\min(X_1,X_2)$ 的概率密度 $f(x)=$（　　）

（A）$f_1(x)f_2(x)$.　　　　（B）$f_1(x)F_1(x)+f_2(x)F_2(x)$.

（C）$f_1(x)[1-F_2(x)]+f_2(x)[1-F_1(x)]$.　　　　（D）$f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$.

【答案】（C）.

【解析】$Y=\min(X_1,X_2)$ 的分布函数为 $F_Y(x)=1-[1-F_1(x)][1-F_2(x)]$，

所以 $f_Y(x)=F_Y'(x)=f_1(x)[1-F_2(x)]+f_2(x)[1-F_1(x)]$，因此选（C）.

【7】设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=ae^{x(b-x)}\ (-\infty<x<+\infty)$，且 $E(X)=2D(X)$，则（　　）

（A）$a=\dfrac{1}{e\sqrt{\pi}},b=2$.　　　　（B）$a=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}},b=2$.

（C）$a=\dfrac{1}{e\sqrt{\pi}},b=1$.　　　　（D）$a=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}},b=1$.

【答案】（A）.

【解析】根据概率密度函数的形式知，X 服从正态分布，经配方，可得

$$f(x)=ae^{x(b-x)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}e^{-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2}\ (-\infty<x<+\infty),$$

所以，$X\sim N\left(\dfrac{b}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，及 $a=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{b^2}{4}}$，由 $E(X)=2D(X)$ 可知，$\dfrac{b}{2}=1$,

因此，$b=2,a=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-1}=\dfrac{1}{e\sqrt{\pi}}$，选（A）.

【8】设随机变量 X 服从指数分布 $E(1)$，用切比雪夫不等式得到估计 $P\{X\geqslant 3\}\leqslant a$，则 a 等于（　　）

（A）$\dfrac{1}{2}$.　　（B）$\dfrac{1}{4}$.　　（C）$\dfrac{1}{8}$.　　（D）e^{-3}.

【答案】(B).

【解析】$EX=1,DX=1$，根据切比雪夫不等式$P\{|X-1|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}$. 令$\varepsilon=2$，得$P\{|X-1|\geqslant 2\}\leqslant\frac{1}{4}$，即$P\{X\geqslant 3或X\leqslant -1\}\leqslant\frac{1}{4}$，又因为$X$服从指数分布不取负值，因此$P\{X\geqslant 3\}\leqslant\frac{1}{4}$，故选(B).

【9】设X_n表示将一硬币独立重复投掷n次，出现反面向上的次数，则(　　)

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\frac{X_n-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\frac{X_n-2n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\frac{2X_n-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\frac{2X_n-2n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.

【答案】(C)

【解析】易知$X_n\sim B\left(n,\frac{1}{2}\right)$，因此，$E(X_n)=\frac{1}{2}n,D(X_n)=\frac{1}{4}n$，由中心极限定理可得，

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{X_n-\frac{1}{2}n}{\sqrt{\frac{1}{4}n}}\leqslant x\right\}=\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{2X_n-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x),$$

故选(C).

【10】数集$\{1,2,3,4,5\}$中任取n个数$X_1,X_2,\cdots,X_n$，对于$\forall\varepsilon>0$，有

$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-a\right|<\varepsilon\right\}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-b\right|<\varepsilon\right\}=1$，则(　　)

(A) $a=3,b=11$.　　(B) $a=3,b=2$.

(C) $a=\frac{3}{5},b=\frac{2}{5}$.　　(D) $a=\frac{3}{5},b=2$.

【答案】(A).

【解析】由题意得，$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}a$，$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\xrightarrow{P}b$，根据大数定律$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}EX$，

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\,2}\xrightarrow{P}EX^2 .\ EX=3, EX^2=11$，因此选（A）.

【11】设总体 X 和 Y 都服从标准正态分布 $N(0,1)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 是来自于总体 X 和 Y 的两个相互独立的简单随机样本，其样本均值和样本方差分别为 $\overline{X}$，S_X^2 和 $\overline{Y}$，S_Y^2，则（　　）

（A）$\overline{X}-\overline{Y}\sim N(0,2)$.

（B）$S_X^2+S_Y^2\sim\chi^2(2n-2)$.

（C）$\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{S_X^2+S_Y^2}}\sim t(2n-2)$.

（D）$\dfrac{S_X^2}{S_Y^2}\sim F(n-1,n-1)$.

【答案】（D）

【解析】因为总体 X 和 Y 的两个相互独立，根据正态总体抽样的定理，$\overline{X}\sim N\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$，$\overline{Y}\sim N\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$，$(n-1)S_X^2\sim\chi^2(n-1)$，$(n-1)S_Y^2\sim\chi^2(n-1)$ 且这四个统计量独立.

选（D），因为 $\dfrac{(n-1)S_X^2/(n-1)}{(n-1)S_X^2/(n-1)}=\dfrac{S_X^2}{S_Y^2}\sim F(n-1,n-1)$；

对于另外三个选项，

因 $\overline{X}-\overline{Y}\sim N(0,\dfrac{2}{n})$，故（A）错误；

由 χ^2 分布的可加性，$(n-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2=(n-1)(S_X^2+S_Y^2)\sim\chi^2(2n-2)$，故（B）错误；

因 $\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{2}/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，故 $\dfrac{\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{2}/\sqrt{n}}}{\sqrt{(n-1)(S_X^2+S_Y^2)/(2n-2)}}=\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\overline{Y})}{\sqrt{S_X^2+S_Y^2}}\sim t(2n-2)$，

所以（C）错误.

【12】设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体的简单随机样本，S^2 是样本方差，下列正确的是（　　）

（A）$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$.

（B）$\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}S} \sim t(n)$.

（C）$\dfrac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\dfrac{X_i}{\sigma}\right)^2 + \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$.

（D）$\dfrac{(n-1)X_n^2}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2} \sim F(1,n-1)$.

【答案】（C）.

【解析】考查正态总体的抽样分布：

对于（A），$\dfrac{X_i}{\sigma} \sim N(0,1)$，于是$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$，（A）不对；

对于（B），根据$\dfrac{\bar{X}}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$，即$\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}S} \sim t(n-1)$，自由度应为$n-1$，（B）不对;

对于（C），由$\bar{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \sim N\left(0,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$，标准化后$\dfrac{\bar{X}}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0,1)$，进而有

$\dfrac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\dfrac{X_i}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$，由$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$且$\bar{X}$与$S^2$独立以及$\chi^2$分布的可加性知，

$\dfrac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\dfrac{X_i}{\sigma}\right)^2 + \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$；

对于（D），分子$\dfrac{X_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$与分母$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$不独立，不能构成$F$分布.

二、填空题

【13】设相互独立的三事件A,B,C满足条件：$P(A)=0.4, P(B)=0.5, P(C)=0.5$，则

$P(A-C|AB\cup C) =$ ____________.

【答案】$\dfrac{1}{6}$

【解析】$P(A-C|AB\cup C)=\dfrac{P[(A-C)(AB\cup C)]}{P(AB\cup C)}=\dfrac{P[A\overline{C}(AB\cup C)]}{P(AB)+P(C)-P(ABC)}$

$=\dfrac{P[AB\overline{C}\cup AC\overline{C}]}{P(AB)+P(C)-P(ABC)}=\dfrac{P(AB\overline{C})}{P(AB)+P(C)-P(A)P(B)P(C)}=\dfrac{1}{6}$.

【14】设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{5x+7}{16}, & -1\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$ 则 $P\{X^2=1\}=$______.

【答案】$\dfrac{3}{8}$.

【解析】易求出

$P(X^2=1)=P(X=1)+P(X=-1)=[P(X\leqslant 1)-P(X<1)]+[P(X\leqslant -1)-P(X<-1)]$

$$=[F(1)-F(1-0)]+[F(-1)-F(-1-0)]=\left[1-\frac{12}{16}\right]+\left[\frac{2}{16}-0\right]=\frac{3}{8}.$$

【15】已知 $X\sim P(2)$，在 X 取 x 的条件下，Y 在 $[0,x]$ 内的整数中等可能取值，则 $P\{Y=0\}=$______.

【答案】$\dfrac{e^2-1}{2e^2}$.

【解析】$P(Y=0)=P(Y=0,X=0)+P(Y=0,X=1)+\cdots+P(Y=0,X=n)+\cdots$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}P(Y=0,X=n)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}P(X=n)P(Y=0|X=n)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n e^{-2}}{n!}\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{1}{e^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{(n+1)!}$

$=\dfrac{1}{e^2}(1+\dfrac{2}{2!}+\dfrac{2^2}{3!}+\cdots)=\dfrac{1}{2e^2}(2+\dfrac{2^2}{2!}+\dfrac{2^3}{3!}+\cdots)=\dfrac{e^2-1}{2e^2}$.

【16】已知 $X\sim N(\frac{1}{4},1),Y\sim B(3,\frac{3}{4})$，$X$ 与 Y 相互独立，则 $P\{XY+2>X+Y\}=$____.

【答案】$\dfrac{\Phi(\frac{7}{4})+36}{64}$.

【解析】$P\{XY+2>X+Y\}=P\{XY+2>X+Y,Y=0\}+P\{XY+2>X+Y,Y=1\}$

$+P\{XY+2>X+Y,Y=2\}+P\{XY+2>X+Y,Y=3\}$，化简得

$$=P\{2>X\}P\{Y=0\}+P\{2>1\}P\{Y=1\}+P\{X>0\}P\{Y=2\}+P\left\{X>\frac{1}{2}\right\}P\{Y=3\}$$

$$=C_3^0(\frac{1}{4})^3P\{X<2\}+C_3^1(\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4})+C_3^2(\frac{1}{4})^1(\frac{3}{4})^2P\{X>0\}+C_3^3(\frac{3}{4})^3P\left\{X>\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{64}\Phi(\frac{7}{4})+\frac{9}{64}+\frac{27}{64}[P\{X>0\}+P\left\{X>\frac{1}{2}\right\}]$$

$$=\frac{1}{64}\Phi(\frac{7}{4})+\frac{9}{64}+\frac{27}{64}$$

$$=\frac{\Phi(\frac{7}{4})+36}{64}.$$

【17】已知随机变量Y的分布函数为$F_Y(y)=0.1F_1(y)+aF_1(3y)$，其中$F_1(x)$是服从方差为1的指数分布的随机变量$X$的分布函数，则$DY=$_______.

【答案】$\frac{6}{25}$.

【解析】因为$F_Y(+\infty)=1$，所以$0.1F_1(+\infty)+aF_1(+\infty)=1$，得$a=0.9$.

求导得Y的概率密度$f_Y(y)=\frac{1}{10}f_1(y)+\frac{27}{10}f_1(3y)$

$$=\frac{1}{10}\begin{cases}e^{-y},y>0,\\0,\quad 其他\end{cases}+\frac{27}{10}\begin{cases}e^{-3y},y>0,\\0,\quad 其他\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{10}e^{-y}+\frac{27}{10}e^{-3y},y>0,\\0,\qquad 其他.\end{cases}$$

$$EY=\frac{1}{10}\int_0^{+\infty}ye^{-y}dy+\frac{27}{10}\int_0^{+\infty}ye^{-3y}dy=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}=\frac{2}{5},$$

$$EY^2=\frac{1}{10}\int_0^{+\infty}y^2e^{-y}dy+\frac{27}{10}\int_0^{+\infty}y^2e^{-3y}dy=\frac{1}{10}\cdot 2!+\frac{1}{10}\cdot 2!=\frac{2}{5}.$$

因此$DY=EY^2-(EY)^2=\frac{2}{5}-(\frac{2}{5})^2=\frac{6}{25}$.

【18】在数轴上的区间$[0,a]$内任意独立地选取两点M与N，求线段MN长度的数学期望

为________.

【答案】$\frac{a}{3}$.

【解析】设两点的坐标分别为 X,Y，则 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{a^2}, & 0\leqslant x,y\leqslant a,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$.所以，所求

$$E\left(\left|X-Y\right|\right)=\iint\limits_{D}\left|x-y\right|\cdot\frac{1}{a^2}\mathrm{d}\sigma=\frac{2}{a^2}\iint\limits_{D_1}(x-y)\mathrm{d}\sigma=\frac{a}{3}.$$

（其中：$D=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant a\right\}$，$D_1=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant x\right\}$）

【19】随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$ 相互独立同分布，且期望均为 μ，方差均为 $\sigma^2(\sigma>0)$，令 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，求 X_1 与 $\bar{X}$ 的相关系数 $\rho=$________.

【答案】$\frac{1}{\sqrt{n}}$.

【分析】本题考查正确使用公式和性质计算数字特征的能力及 X_i 与 $\bar{X}$ 的关系，是基本问题.

$\bar{X}$ 中含有 X_i，因此 $\bar{X}$ 与 X_i 一般是不独立的.

【解析】$D(\bar{X})=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D\left(X_i\right)=\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\frac{1}{n}\sigma^2$.

$$\mathrm{Cov}(X_1,\bar{X})=\mathrm{Cov}\left(X_1,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\mathrm{Cov}(X_1,\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\mathrm{Cov}(X_1,X_1+X_2+\cdots+X_n)$$

$$=\frac{1}{n}\left[\mathrm{Cov}(X_1,X_1)+\mathrm{Cov}(X_1,X_2)+\cdots+\mathrm{Cov}(X_1,X_n)\right]=\frac{1}{n}\left[D(X_1)+0+\cdots+0\right]=\frac{\sigma^2}{n}$$

所以，相关系数为 $\rho=\frac{\mathrm{Cov}(X_1,\bar{X})}{\sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(\bar{X})}}=\frac{\frac{1}{n}\sigma^2}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}}\sigma}=\frac{1}{\sqrt{n}}$.

【20】（数一）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其中 μ,σ^2 未知，记 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$Q^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，则假设 $H_0:\mu=0$ 的 t 检验统计量 $T=$________.

【答案】$\frac{\bar{X}}{Q}\sqrt{n(n-1)}$.

【解析】由于 σ^2 未知，对 $H_0:\mu=0$ 检验选取的统计量 $T=\frac{\bar{X}}{S/\sqrt{n}}$，其中

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{1}{n-1}Q^2$$

从而 $T=\frac{\bar{X}}{S/\sqrt{n}}=\frac{\bar{X}}{\frac{Q}{\sqrt{n-1}}\Big/\sqrt{n}}=\frac{\bar{X}}{Q}\sqrt{n(n-1)}$.

三、解答题

【21】已知 $f(x)=\begin{cases}1,0\leqslant x\leqslant 1,\\0,其它.\end{cases}$

（1）求 $F(x)$；　　（2）设 $Y=2X$，求 $F_Y(y)$；　　（3）设 $Y=|X-\frac{1}{2}|$，求 $F_Y(y)$.

（4）$P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$，$P\{Y=2\}=\frac{1}{2}$，且 X,Y 独立，设 $Z=X+Y$，求 $F_Z(z)$；

（5）$Y=\begin{cases}1,X>\frac{1}{3},\\2,X\leqslant\frac{1}{3},\end{cases}$ 设 $Z=X+Y$，求 $F_Z(z)$.

【解析】（1）$F(x)=P\{X\leqslant x\},-\infty<x<+\infty$

$$=\begin{cases}0,x<0,\\x,0\leqslant x<1,\\1,x\geqslant 1.\end{cases}$$

（2） $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\},-\infty<y<+\infty$

$$=P\{2X\leqslant y\}$$
$$=\begin{cases}0, y<0,\\ \dfrac{y}{2},0\leqslant y<2,\\ 1, y\geqslant 2.\end{cases}$$

（3） $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\},-\infty<y<+\infty$

$$=P\{\left|X-\frac{1}{2}\right|\leqslant y\}$$
$$=\begin{cases}0, y<0,\\ 2y,0\leqslant y<\dfrac{1}{2},\\ 1, y\geqslant \dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

（4） $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\},-\infty<z<+\infty$

$$=P\{X+Y\leqslant z\}$$
$$=P\{X+Y\leqslant z,Y=1\}+P\{X+Y\leqslant z,Y=2\}$$
$$=P\{X\leqslant z-1,Y=1\}+P\{X\leqslant z-2,Y=2\}$$
$$=\frac{1}{2}F_X(z-1)+\frac{1}{2}F_X(z-2)$$
$$=\begin{cases}0, z<1,\\ \dfrac{1}{2}(z-1),1\leqslant z<3,\\ 1, z\geqslant 3.\end{cases}$$

（5） $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\},-\infty<z<+\infty$

$$
\begin{aligned}
&= P\{X+Y \leqslant z\} \\
&= P\{X+Y \leqslant z, Y=1\} + P\{X+Y \leqslant z, Y=2\} \\
&= P\{X \leqslant z-1, X > \frac{1}{3}\} + P\{X \leqslant z-2, X \leqslant \frac{1}{3}\}
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{cases} 0, z < \dfrac{4}{3}, \\ z - \dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3} \leqslant z < \dfrac{7}{3}, \\ 1, z \geqslant \dfrac{7}{3}. \end{cases}
$$

【22】已知 $f(x,y) = \begin{cases} 2, 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x, \\ 0, \quad \text{其他}. \end{cases}$

（1） $P\{U=1\} = \frac{1}{2}$， $P\{U=2\} = \frac{1}{2}$，且 U 与 X,Y 独立，设 $Z=U+X$，求 $F_Z(z)$；

（2） $U = \begin{cases} 1, Y > \dfrac{X}{2}, \\ 2, Y \leqslant \dfrac{X}{2}, \end{cases}$ 设 $Z=U+X$，求 $F_Z(z)$.

【解析】（1） $F_Z(z) = P\{Z \leqslant z\}, -\infty < z < +\infty$

$$
\begin{aligned}
&= P\{X+U \leqslant z\} \\
&= P\{X+U \leqslant z, U=1\} + P\{X+U \leqslant z, U=2\} \\
&= P\{X \leqslant z-1, U=1\} + P\{X \leqslant z-2, U=2\} \\
&= \frac{1}{2}F_X(z-1) + \frac{1}{2}F_X(z-2)
\end{aligned}
$$

$$
f_Z(z) = \frac{1}{2}f_X(z-1) + \frac{1}{2}f_X(z-2).
$$

其中 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = \begin{cases} 2x, 0 < x < 1, \\ 0, \quad \text{其他}. \end{cases}$

因此 $f_Z(z) = \frac{1}{2}\begin{cases} 2(z-1), 1 < z < 2, \\ 0, \quad \text{其他}. \end{cases} + \frac{1}{2}\begin{cases} 2(z-2), 2 < z < 3, \\ 0, \quad \text{其他}. \end{cases} = \begin{cases} z-1, 1 < z < 2, \\ z-2, 2 < z < 3, \\ 0, \quad \text{其他}. \end{cases}$

（2） $F_Z(z) = P\{Z \leqslant z\}, -\infty < z < +\infty$

$$
\begin{aligned}
&= P\{X+U\leqslant z\} \\
&= P\{X+U\leqslant z, U=1\}+P\{X+U\leqslant z, U=2\} \\
&= P\{X\leqslant z-1, Y>\frac{X}{2}\}+P\{X\leqslant z-2, Y\leqslant\frac{X}{2}\} \\
&= \begin{cases} 0, z<1, \\ \frac{1}{2}(z-1)^2, 1\leqslant z<2, \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(z-2)^2, 2\leqslant z<3, \\ 1, z\geqslant 3. \end{cases}
\end{aligned}
$$

因此 $f_Z(z)=\begin{cases} z-1, 1<z<2, \\ z-2, 2<z<3, \\ 0, \quad 其他. \end{cases}$

【23】设 X,Y 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & 其他. \end{cases}$

求：（1）求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$；（2）求 $Z=2X-Y$ 的密度函数；

（3）求 $E(X+Y)$；　　　　（4）求联合分布函数 $F(x,y)$.

【答案】（1） $f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & 其他. \end{cases}$ （2） $f_Z(z)=\begin{cases} \frac{1}{3}e^{-\frac{z}{2}}, & z\geqslant 0, \\ \frac{1}{3}e^{z}, & z<0. \end{cases}$

（3） $E(X+Y)=2$；（4） $F(x,y)=\begin{cases} (1-e^{-x})(1-e^{-y}), & x>0, y>0, \\ 0, & 其他. \end{cases}$

【解析】（1）先计算 Y 的边缘概率密度， $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases} e^{-y}, & y>0, \\ 0, & 其他. \end{cases}$

同理可得 $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & 其他. \end{cases}$，显然 X,Y 独立同分布，所以当 $y>0$ 时，

$$
f_{X|Y}(x|y)=f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & 其他. \end{cases}
$$

（2）由公式法，对于 $Z=2X-Y$ 有 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,2x-z)\mathrm{d}x$，又被积函数

$$f(x,2x-z)=\begin{cases} \mathrm{e}^{z-3x}, & x>0,2x>z, \\ 0, & 其他. \end{cases},$$

所以 $f_Z(z)=\begin{cases} \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}, & z\geqslant 0, \\ \frac{1}{3}\mathrm{e}^{z}, & z<0. \end{cases}$

（3）$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=2$；

（4）由于 X,Y 独立同分布，都服从参数为 1 的指数分布，有

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)=\begin{cases} (1-\mathrm{e}^{-x})(1-\mathrm{e}^{-y}), & x>0,y>0, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

【24】设总体 X 的密度密度为 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}, & x\geqslant\mu, \\ 0, & 其他. \end{cases}$ 其中 $\theta>0$.

求：（1）μ,θ 的矩估计；（2）μ,θ 的最大似然估计.

【答案】(I) $\hat{\theta}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}, \hat{\mu}=\bar{X}-\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$

(II) $\hat{\mu}=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$，$\hat{\theta}=\bar{X}-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$

【解析】(I) 令 $\begin{cases} E(X)=\int_{\mu}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\mathrm{d}x=\mu+\theta=\bar{X} \\ E(X^2)=\int_{\mu}^{+\infty} x^2\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\mathrm{d}x=(\mu+\theta)^2+\theta^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \end{cases}$

解得 μ,θ 的矩估计量为 $\begin{cases} \hat{\theta}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}, \\ \hat{\mu}=\bar{X}-\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}. \end{cases}$

注：其中$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\ 2}-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$.

（II）设$X_1,X_2,\cdots,X_n$的观测值分别为$x_1,x_2,\cdots,x_n$，则似然函数为

$$L(\theta,\mu)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta,\mu)=\theta^{-n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i}\mathrm{e}^{\frac{n\mu}{\theta}}, & x_1,x_2,\cdots x_n\geqslant\mu,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

当$\mu\leqslant\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}$时，对似然函数取对数，有$\ln L(\theta,\mu)=-n\ln\theta+\frac{1}{\theta}\left(n\mu-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$，

因为$\frac{\partial\ln L(\theta,\mu)}{\partial\mu}=\frac{n}{\theta}>0$，

并令$\frac{\partial\ln L(\theta,\mu)}{\partial\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\mu\right)=0$，

可知$L(\theta,\mu)$是关于μ的单调递增函数，所以μ的最大似然估计量为$\hat{\mu}=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$，

将$\hat{\mu}=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$代入$\frac{\partial L(\theta,\mu)}{\partial\theta}=0$中，得$\hat{\theta}=\bar{X}-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$.

【25】设随机变量X与Y相互独立且分别服从正态分布$N(2\mu,\sigma^2)$与$N(\mu,\sigma^2)$.其中σ是未知参数且$\sigma>0$.记$Z=X-2Y$.

（1）求Z的概率密度$f(z;\sigma^2)$；

（2）设$Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$为来自总体Z的简单随机样本，求σ^2的最大似然估计量$\hat{\sigma}^2$；

（3）求$E(\hat{\sigma}^2),D(\hat{\sigma}^2)$.

【答案】（I）$f(z;\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{10\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{10\sigma^2}},z\in R$；（II）$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{5n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2$；

（III）$E(\hat{\sigma}^2)=\sigma^2$，$D(\hat{\sigma}^2)=\frac{2\sigma^4}{n}$.

【解析】（I）因为 X,Y 相互独立且分别服从正态分布,所以 Z 仍然服从正态分布，且

$$E(Z)=E(X-2Y)=2\mu-2\mu=0,$$
$$D(Z)=D(X-2Y)=D(X)+4D(Y)=\sigma^2+4\sigma^2=5\sigma^2,$$

所以 $Z\sim N(0,5\sigma^2)$，故 Z 的概率密度函数为

$$f(z;\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{10\pi\sigma}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{10\sigma^2}},z\in R.$$

（II）设 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 的观测值分别为 $z_1,z_2,\cdots,z_n$，则似然函数为

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{10\pi\sigma}}\mathrm{e}^{-\frac{z_i^2}{10\sigma^2}}\right)=(10\pi)^{-\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{10\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2},$$

取对数，得

$$\ln L(\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(10\pi)-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{10\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2,$$

令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma^2)}{\mathrm{d}(\sigma^2)}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{10(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2=0,$$

可得 $\sigma^2=\frac{1}{5n}\sum_{i=1}^{n}z_i^2$,所以 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{5n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2$；

（III）易知 $E(\hat{\sigma}^2)=\frac{1}{5n}\sum_{i=1}^{n}E(Z_i^2)=\frac{1}{5n}nE(Z^2)=\frac{1}{5}\left(5\sigma^2+0\right)=\sigma^2$，

因为 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 独立且所有 $Z_i\sim N(0,5\sigma^2)$，标准化得 $\frac{Z_i}{\sqrt{5}\sigma}\sim N(0,1)$，故

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Z_i}{\sqrt{5}\sigma}\right)^2=\frac{1}{5\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2=\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n),$$

所以，$D\left(\dfrac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right)=\dfrac{n^2}{\sigma^4}D(\hat{\sigma}^2)=2n$，故 $D(\hat{\sigma}^2)=\dfrac{2\sigma^4}{n}$.