

第六章 微分方程

【考试要求】

1. 了解微分方程及其阶、解、通解、初始条件和特解等概念.
2. 掌握变量可分离微分方程、齐次方程及一阶线性微分方程的解法.
3. 会解伯努利方程和全微分方程(数学一), 会用简单的变量代换解某些微分方程.
4. 会用降阶法解 $y^{(n)} = f(x)$ 、 $y'' = f(y, y')$ 、 $y'' = f(x, y')$ (数学一、二).
5. 理解线性微分方程解的性质及解的结构.
6. 掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法, 并会解某些高于二阶的常系数齐次线性微分方程.
7. 会解自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程.
8. 会解欧拉方程(数学一).
9. 会用微分方程解决一些简单的应用问题.
10. 了解差分与差分方程及其通解与特解等概念(数学三).
11. 了解一阶常系数线性差分方程的求解方法(数学三).
12. 会用微分方程求解简单的经济应用(数学三).

§1.微分方程的概念

1. 微分方程

含有自变量、未知函数和未知函数的导数(或微分)的方程称为微分方程. 若未知函数是一元函数则称为常微分方程.

2. 微分方程的阶

微分方程中未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶.

3. 微分方程的解、通解和特解

代入微分方程能使方程成为恒等式的函数称为微分方程的解；通解就是含有任意常数的个数与方程的阶数相同的解；不含有任意常数或任意常数确定后的解称为特解.

4. 初始条件

要求自变量取某定值时, 对应函数与各阶导数取指定的值, 这种条件称为初始条件.

5. 线性方程

如果未知函数和它的各阶导数都是一次项, 而且它们的系数只是自变量的函数或常数, 则称这种微分方程为线性微分方程.

【例 6.1】下列微分方程中 () 是二阶微分方程.

(A) $y^2 + xy = x$

(B) $y^2 + xy' = x$

(C) $(y')^2 + xy = e^x$

(D) $y^2 + xy'' = x$

【例 6.2】下列选项中 () 是微分方程 $y'' = 6x + 2$ 的特解, () 是该方程的通解

(A) $y = x^3 + x^2 + x + C$.

(B) $y = x^3 + x^2 + x + 1$.

(C) $y = x^3 + x^2 + C_1x + C_2$.

(D) $y = x^3 + C_1x^2 + x + C_2$.

【例 6.3】下列选项中 () 是线性微分方程

(A) $y^2 + xy = x$

(B) $y + x(y')^3 = x$

(C) $y' + xy = e^x$

(D) $y^2 + xy'' = x$

§2.一阶微分方程

一、可分离变量的微分方程

如果一阶微分方程能写成

$$g(y)dy = f(x)dx$$

的形式, 即能把微分方程写成一端只含 y 的函数和 dy , 另一端只含 x 的函数和 dx , 那么原方程就称为可分离变量的微分方程.

将上式两端积分, $\int g(y)dy = \int f(x)dx$, 设 $G(y)$ 及 $F(x)$ 依次为 $g(y)$ 及 $f(x)$ 的原函数, 则通解

$$G(y) = F(x) + C.$$

【例 6.4】求微分方程 $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$ 的通解.

【例 6.5】求微分方程 $y' = \frac{1+x}{x} y$ 满足 $y(1) = e$ 的特解.

二、齐次方程

如果一阶微分方程可化成

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \text{ 的形式, 则称这方程为齐次方程.}$$

令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$, 得 $u + x \frac{du}{dx} = \varphi(u)$, 分离变量, 得 $\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$

两端积分, 得 $\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$, 求出积分后, 再以 $\frac{y}{x}$ 代替 u , 便得所给齐次方程的通解.

【例 6.6】解方程 $\frac{dy}{dx} = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$

【例 6.7】求 $x^2 y' + xy = y^2$, $y(1) = 1$ 的特解.

三、一阶线性微分方程

方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 叫做一阶线性微分方程. 如果 $Q(x) \equiv 0$, 则称方程为齐次的; 如果 $Q(x) \neq 0$, 则称方程为非齐次的.

通解公式 $y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right)$

【例 6.8】已知 $y' = \frac{1}{1+x^2} y$, 求其在 $y(0) = \pi$ 时的特解.

【例 6.9】求方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解.

【例 6.10】求微分方程的特解 $xy' + 2y = x \ln x$, 其中 $y(1) = -\frac{1}{9}$.

§3.高阶微分方程

一、可降阶的高阶微分方程 (数一、数二)

1. $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

微分方程 $y^{(n)} = f(x)$ 的右端仅含有自变量 x , 对方程两边积分, 得到一个 $n-1$ 阶的微分方程

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$$

同理可得 $y^{(n-2)} = \int \left[\int f(x)dx + C_1 \right] dx + C_2$.

以此类推, 接连积分 n 次, 可得方程的含有 n 个任意常数的通解.

【例 6.11】求微分方程 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

2. $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

方程 $y'' = f(x, y')$ 的右端不显含未知函数 y . 令 $y' = p$, 则 $y'' = \frac{dp}{dx} = p'$, 代入原方程有 $p' = f(x, p)$.

这是一个关于变量 x, p 的一阶微分方程. 设其通解为

$$p = \varphi(x, C_1)$$

将 $p = \frac{dy}{dx}$ 回代, 得到一个一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, C_1)$$

对它进行积分, 得到原方程的通解为

$$y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2.$$

【例 6.12】求微分方程 $(1+x^2)y'' = 2xy'$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 3$ 的特解.

3. $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

方程 $y'' = f(y, y')$ 中不明显地含自变量 x . 令 $y' = p$, 则

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy},$$

原方程变为

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p),$$

这是一个关于变量 y, p 的一阶微分方程. 设它的通解为

$$y' = p = \varphi(y, C_1)$$

分离变量并积分, 便得原方程的通解为

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

【例 6.13】求微分方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

二、线性微分方程解的结构

1. 一阶线性微分方程解的结构

(1) 若 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 为一阶齐次线性方程的两个特解, 则它们的线性组合 $k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x)$ 仍为原方程的解.

(2) 若 $y^*(x)$ 为一阶非齐次方程的一个特解, 而 $Cy(x)$ 为对应的一阶齐次线性方程的通解, 则 $y = Cy(x) + y^*(x)$ 是此一阶非齐次线性方程的通解.

(3) 设 $y_1^*(x)$ 与 $y_2^*(x)$ 分别是 $y' + P(x)y = f_i(x)$ ($i=1,2$) 的特解, 则 $y_1^*(x) + y_2^*(x)$ 是 $y' + P(x)y = f_1(x) + f_2(x)$ 的特解.

【例 6.14】设非齐次线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$, C 为任意常数, 则该方程的通解是 ()

(A) $C[y_1(x) - y_2(x)]$.

(B) $y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$.

(C) $C[y_1(x) + y_2(x)]$.

(D) $y_1(x) + C[y_1(x) + y_2(x)]$.

2. 高阶线性微分方程解的结构

(1) 若 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 为二阶齐次线性方程的两个特解, 则它们的线性组合 $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 仍为原方程的解. 特别地, 当 $y_1(x) \neq \lambda y_2(x)$ (λ 为常数), 也即 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性无关时, 原方程的通解为 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$.

(2) 若 $y^*(x)$ 为二阶非齐次方程的一个特解, 而 $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 为对应的二阶齐次线性方程的通解, 则 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y^*(x)$ 是此二阶非齐次线性方程的通解.

(3) 设 $y_1^*(x)$ 与 $y_2^*(x)$ 分别是 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_i(x)$ ($i = 1, 2$) 的特解, 则 $y_1^*(x) + y_2^*(x)$ 是 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$ 的特解.

【注】以上性质也可推广到 n 阶齐次和非齐次线性方程.

【例 6.15】已知 $y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = x^2$ 是某二阶非齐次线性微分方程的三个解, 则该方程的通解为

_____.

三、常系数齐次线性微分方程

1. 二阶齐次、非齐次线性微分方程

二阶齐次线性方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0;$

二阶非齐次线性方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x).$

2. 二阶常系数齐次线性微分方程

在二阶齐次线性微分方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 中, 如果 y' 和 y 的系数 $P(x)$, $Q(x)$ 均为常数, 即 $y'' + py' + qy = 0$, 其中 p, q 是常数, 称为二阶常系数齐次线性微分方程.

特征方程 $r^2 + pr + q = 0$, 特征方程根的三种不同情形对应齐次方程通解的三种形式

特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的两个根 r_1, r_2	微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解
两个不相等的实根 r_1, r_2	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
两个相等的实根 $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
一对共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

【例 6.16】求微分方程 $y'' - 7y' + 6y = 0$ 的通解.

【例 6.17】求微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的通解.

【例 6.18】求微分方程 $y'' - 6y' + 13y = 0$ 的通解.

3. n 阶常系数齐次线性微分方程

n 阶常系数齐次线性微分方程的一般形式是 $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$, 其中 $p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}, p_n$ 都是常数.

特征方程 $r^n + p_1 r^{n-1} + p_2 r^{n-2} + \cdots + p_{n-1} r + p_n = 0$, 根据特征方程的根的形式, 写出对应的微分方程的通解如下

特征方程的根	微分方程通解中的对应项
单实根 r	给出一项 Ce^{rx}
一对单复根 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	给出两项 $e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$
k 重实根 r	给出 k 项 $e^{rx} (C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1})$
一对 k 重复根 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	给出 $2k$ 项 $e^{\alpha x} [(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x + (D_1 + D_2 x + \cdots + D_k x^{k-1}) \sin \beta x]$

【例 6.19】求方程 $y^{(4)} - 2y''' + 5y'' = 0$ 的通解.

四、二阶常系数非齐次线性微分方程

1. 二阶常系数非齐次线性微分方程

二阶常系数非齐次线性微分方程的一般形式是

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

其中 p, q 是常数. 其通解为 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y^*(x)$, 其中 $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 为对应的二阶常系数齐次线性方程的通解.

2. 二阶常系数非齐次线性微分方程的特解

根据 $f(x)$ 的形式先确定特解 $y^*(x)$ 的形式, 其中包含一些待定的系数, 然后代入方程确定这些系数就得到特解 $y^*(x)$, 常见的 $f(x)$ 的形式和相对应的特解 $y^*(x)$ 的形式如下

(1) $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型

- a. 若 λ 不是特征方程的根, 则令 $y^*(x) = R_m(x)e^{\lambda x}$;
- b. 若 λ 是特征方程的单根, 则令 $y^*(x) = xR_m(x)e^{\lambda x}$;
- c. 若 λ 是特征方程的重根, 则令 $y^*(x) = x^2R_m(x)e^{\lambda x}$.

其中 $R_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 同次 (m 次) 的多项式.

【例 6.20】求微分方程 $y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$ 的通解.

【例 6.21】求微分方程 $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$ 的通解.

(2) $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + Q_n(x) \sin \omega x]$ 型

a. 若 $\lambda + \omega i$ 不是特征方程的根, 则令 $y^* = e^{\lambda x} [R_m^{(1)} \cos \omega x + R_m^{(2)} \sin \omega x]$

b. 若 $\lambda + \omega i$ 是特征方程的根, 则令 $y^* = x e^{\lambda x} [R_m^{(1)} \cos \omega x + R_m^{(2)} \sin \omega x]$

其中 $R_m^{(1)}(x), R_m^{(2)}(x)$ 是 m 次多项式, $m = \max \{l, n\}$.

【例 6.22】求微分方程 $y'' + y' - 2y = 2\cos 2x$ 的一个特解.

【例 6.23】微分方程 $y'' + y = x^2 + 1 + \sin x$ 的特解形式可设为 ()

- (A) $y^* = ax^2 + bx + c + x(A\sin x + B\cos x)$. (B) $y^* = ax^2 + bx + c + A\sin x$.
- (C) $y^* = x(ax^2 + bx + c + A\sin x + B\cos x)$. (D) $y^* = ax^2 + bx + c + A\cos x$.