第八章　二重积分

【考试要求】

1. 理解二重积分的概念,了解二重积分的基本性质,了解二重积分的中值定理.

2. 掌握二重积分的计算方法(直角坐标、极坐标).

3. 了解无界区域上较简单的反常二重积分并会计算.（数三）

§1. 二重积分的概念

一、二重积分的定义

1.定义

设 $f(x,y)$ 是闭区域 D 上的有界函数，将区域 D 任意分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\ldots\Delta\sigma_n$. 其中，$\Delta\sigma_i$ 既表示第 i 个小区域，也表示它的面积. 在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)，作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i(i=1,2\cdots,n)$，并作和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$. 若 $\lambda\to 0$ 时，极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 存在，其中 λ 为 n 个小闭区域的直径中的最大值, 则称此极限值为函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上的二重积分，记作 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$，即

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i .$$

其中：$f(x,y)$称之为被积函数，$f(x,y)\mathrm{d}\sigma$称之为被积表达式，$\mathrm{d}\sigma$称之为面积元素，x,y称之为积分变量，D称之为积分区域，$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$称之为积分和式.

2. 几何意义: 若 $f\left(x,y\right)\geqslant 0$，二重积分表示以 $f\left(x,y\right)$ 为曲顶，以 D 为底的曲顶柱体的体积.

3. 存在性定理: $f\left(x,y\right)$ 在闭区域 D 上连续，则 $f\left(x,y\right)$ 在 D 上的二重积分存在.

二、二重积分的性质

1. 线性性质

$$\iint_D [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]\mathrm{d}\sigma=\alpha\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\beta\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma .$$

2. 积分区域的可加性

若区域 D 可分为两个部分区域 D_1, D_2，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma .$$

3. 若 $f(x,y)=1$，S_D 为区域 D 的面积，则 $\iint\limits_D 1\mathrm{d}\sigma = S_D$.

4. 若在 D 上，$f(x,y) \leqslant g(x,y)$，则有不等式

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$

特别地，

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \iint\limits_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma.$$

5. 估值不等式

设 M 与 m 分别是 $f\left(x,y\right)$ 在闭区域 D 上最大值 M 和最小值 m，σ 是 D 的面积，则

$$m\boldsymbol{\sigma}\leqslant \iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \leqslant M\boldsymbol{\sigma}.$$

三、二重积分中值定理

设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，S_D 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ,η)，使得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)S_D.$$

【例 8.1】 设 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leqslant 1\right\}$，比较下面三个二重积分的大小：

$$I_1=\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma,\ I_2=\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma,\ I_3=\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)^2\mathrm{d}\sigma.$$

【例 8.2】二重积分 $I_i=\iint\limits_{D_i}\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma,i=1,2,3,4$. $D_i=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leqslant\dfrac{1}{i}\right\}$, 则下列积分中，最大的是（　　）.

(A) I_1　　(B) I_2　　(C) I_3　　(D) I_4

【例 8.3】 设 $g(x)$ 有连续的导数，$g(0)=0$，$g'(0)=a\neq 0$，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内连续，

则 $\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2} f(x,y)dxdy}{g(r^2)}=$（　　）.

（A）$\dfrac{f(0,0)}{a}$.　　（B）$\dfrac{f(0,0)}{2a}$.　　（C）$\dfrac{\pi}{a}f(0,0)$.　　（D）$\dfrac{\pi}{2a}f(0,0)$.

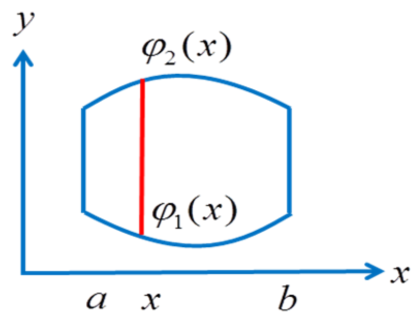
§2.二重积分的计算

一、二重积分在直角坐标系中的计算

1. 积分区域 D 为 X 型区域

若积分区域 D 可以用不等式 $a \leqslant x \leqslant b, \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$ 表示，则称区域 D 为 X 型区域. 此时二重积分可化为：

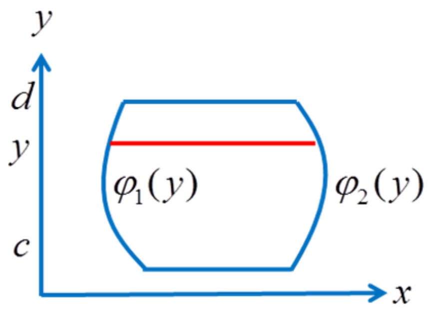
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$



2. 积分区域 D 为 Y 型区域

若积分区域 D 可以用不等式 $c \leqslant y \leqslant d, \varphi_1(y) \leqslant x \leqslant \varphi_2(y)$ 表示，则称区域 D 为 Y 型区域. 此时二重积分可化为：

$$\iint_D f(x,y) d\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y) \mathrm{d}x .$$



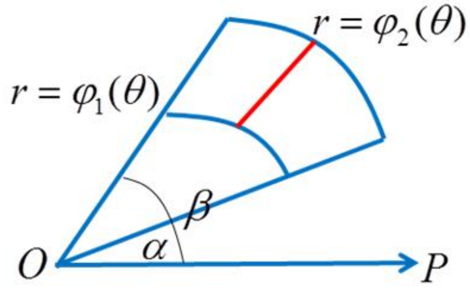
【例 8. 4】计算$\iint\limits_{D}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域$D$是由$x+y=1$与$x$轴、$y$轴所围成的区域.

【例 8. 5】 计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由抛物线 $y^2 = x$ 及 $y = x - 2$ 所围成的区域.

二、二重积分在极坐标中的计算

设积分区域 D 可表示成：$\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, r_1(\theta) \leqslant r \leqslant r_2(\theta)$，其中函数 $r_1(\theta)$，$r_2(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续. 则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r.$$



【注】极坐标与直角坐标的关系如下：

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \end{cases}.$$

【例 8.6】 计算 $\iint\limits_{D} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，区域 D 分别为如下区域：

（1）由 $x^2+y^2=1$ 所围成的区域.　　（2）由 $x^2+y^2=2x(y\geqslant 0)$ 与 x 轴围成的区域.

（3）$D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\leqslant 4, x^2+y^2\geqslant 2y, x\geqslant 0, y\geqslant 0\right\}$.

【例 8.7】计算 $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域 D 是由 $x=-2,\ y=0,\ y=2$ 以及 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的区域.

三、无界区域上的二重积分（数学三）

一般原理：用有界区域上的二重积分取极限来定义无界区域上的二重积分.

设函数 $f(x,y)$ 在无界区域 D 上有定义，且在区域 D 的任何有界部分上 $f(x,y)$ 的二重积分存在，则函数 $f(x,y)$ 在无界区域 D 上的二重积分 $\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim\limits_{D_\Gamma \to D}\iint\limits_{D_\Gamma} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

【例 8.8】计算二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{e}^x xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是以曲线 $y=\sqrt{x}, y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 及 y 轴为边界的无界区域.

§3. 二重积分的对称性

一、二重积分的奇偶对称性

1．设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，若 D 关于 x 轴对称，则

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases} 0, & f(x,y)\text{关于 } y \text{ 为奇函数}, \\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f(x,y)\text{关于 } y \text{ 为偶函数}. \end{cases}$$

其中 D_1 为 D 在 x 轴上半平面部分.

2. 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，若 D 关于 y 轴对称，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}0, & f(x,y)\text{关于 } x \text{ 为奇函数},\\ 2\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f(x,y)\text{关于 } x \text{ 为偶函数}.\end{cases}$$

其中 D_2 为 D 在 y 轴的右半平面部分.

【例 8.9】(1) 已知 $D=\left\{(x,y)\middle| y\geqslant -x, y\leqslant x, x\leqslant 1\right\}$，计算 $\iint\limits_D \mathrm{e}^x \sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

(2) 已知 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\leqslant 2y\right\}$，计算 $\iint\limits_D x^3y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【例 8. 10】设区域 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0\right\}$，计算二重积分

$$I=\iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

【例 8. 11】求二重积分 $\iint\limits_{D} y\left[1+x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值，其中 D 是由直线 $y=x, y=-1, x=1$ 围成的平面区域.

二、二重积分的轮换对称性

设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，若 D 关于直线 $y=x$ 对称，则

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D} f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

【例 8.12】已知区域 D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 在第一象限所围的部分，计算 $\iint\limits_D \frac{x}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【例 8.13】计算 $I=\iint\limits_{D}(x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,-1\leqslant x\leqslant 1,-1\leqslant y\leqslant 1\}$.