目 录

第一部分 高等数学

一、极限综合专题

【1】计算下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}-2[x]\right\}$，其中$[x]$表示不超过$x$的最大整数.

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x}-x\arctan x}{\frac{\pi}{2}x+e^{x}}$.

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

【2】计算下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt{\cos 3x}}{x^2}$．

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-\mathrm{e}^{x^2})\sin x^2}$．

（3）$f(x)$ 连续且满足 $f(0)=0, f'(0)\neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t}{x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$．

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{\ln(1+x)\int_0^1\tan(xt)^2\mathrm{d}t}$．

【3】计算下列极限

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\dfrac{1}{n}-\arctan\dfrac{1}{n+1}\right)$.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n+k}{n^2+k}$.

【4】求解下列各题

（1）设 $x_1 = 2$，$x_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{x_n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

（2）（I）证明方程 $\mathrm{e}^x + x^{2n+1} = 0$ 在 $(-1,0)$ 内有唯一的实根 $x_n\ (n = 0,1,2,\cdots)$；

（II）证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求其值.

二、导数综合专题

【5】设 $f(x)$ 是可导函数，且 $f(x)=x+x\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t+x^2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$，求 $f(x)$.

【6】设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，请证明以下结论：

（1）当 $f(x_0)>0$ 时，$y=\left|f(x)\right|$ 在点 x_0 处可导，且 $y'\big|_{x=x_0}=f'(x_0)$.

（2）当 $f(x_0)<0$ 时，$y=\left|f(x)\right|$ 在点 x_0 处可导，且 $y'\big|_{x=x_0}=-f'(x_0)$.

（3）当 $f(x_0)=0$ 时，但 $f'(x_0)\neq 0$ 时，$y=\left|f(x)\right|$ 在点 x_0 处不可导.

（4）当 $f(x_0)=0$ 时，且 $f'(x_0)=0$ 时，$y=\left|f(x)\right|$ 在点 x_0 处可导，且 $y'\big|_{x=x_0}=0$.

【7】设 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 内有定义，且对任何的 $x,y\in(-l,l)$ 均有 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$，

又 $f'(0)=1$，求证 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 上处处可导并求 $f(x)$ 的表达式.

【8】求高阶导.

（1）设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{3}x}\sin x$，则 $f^{(2023)}(0)=$____________.

（2）设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+2x+4x^2}$，则 $f^{(2023)}(0)=$____________.

【9】已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上具有 2 阶导数， $f(a)=0, f'(x)>0, f''(x)>0$，设 $b>a$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(b, f(b))$ 处的切线与 x 轴的交点是 $(x_0,0)$，证明 $a<x_0<b$.

【10】求方程 $k\arctan x-x=0$ 不同实根的个数，其中 k 为参数.

【11】设函数 $f(x)$ 满足方程 $\dfrac{f''(x)}{x}+3x\left[f'(x)\right]^2=(1+\dfrac{1}{x})\ln^2(1+x)-x$，若 $x_0>0$ 是函数 $f(x)$ 的驻点，试问 x_0 是否是函数 $f(x)$ 的极值点，请说明你的理由.

【12】（数一、二）求曲线 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 在 $(1,1)$ 处的曲率半径.

三、中值定理专题

【13】设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)f(b)>0,\ f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$，

证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=kf(\xi)$.

【14】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=0$.证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$\int_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x=0$.

【15】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $f(0)=0,\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$.证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$\int_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x=\xi f(\xi)$.

【16】设函数 $f(x),g(x)$ 均在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=g(0), f(1)=g(1)$.证明：存在 $\xi\in(0,\frac{1}{2}),\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=g'(\xi)+g'(\eta)$.

【17】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a)=f(c)=f(b), c\in(a,b)$.又设 $f(x)$ 在 (a,b) 内任意子区间内不恒为常数.证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)<0$.

四、定积分综合专题

【18】$S(x)=\int_0^x |\cos t| \mathrm{d}t$.

（1）证明：当 $n\in N_+$，且 $n\pi \leqslant x<(n+1)\pi$ 时，$2n \leqslant S(x)<2(n+1)$；

（2）求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$.

【19】证明 $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 \mathrm{d}x>0$.

【20】设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，T 为常数，则下列命题中错误的是（　　）

（A）对于任意的 a，$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$.

（B）对于任意的 a，$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(-x)=f(x)$.

（C）对于任意的 a，$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x$ 与 a 无关 $\Leftrightarrow f(x)$ 有周期为 T.

（D）$f(x+T)=f(x) \Leftrightarrow \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 以 T 为周期.

【21】设函数 $f(x)$ 连续，$\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\arctan x^2$，且 $f(1)=1$，求 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

【22】设 $f(x)$ 在 $\left[-l,l\right]$ 上连续且 $f'(0)\neq 0$，其中 $l>0$.

（1）证明对任意的 $x\in(0,l)$，都存在 $\theta\in(0,1)$，使得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t=x\left[f(\theta x)-f(-\theta x)\right].$$

（2）求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta$.

【23】设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且其图像关于 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 对称，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x .$$

【24】计算下列积分：

（1） $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x$.

（2） $f(x^2-1)=\ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$, $f(\varphi(x))=\ln x$，求 $\displaystyle\int_0^2 \frac{\varphi'(x)}{4+\varphi^2(x)}\mathrm{d}x$.

【25】讨论积分$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$的敛散性，其中$\alpha>0$.

【26】已知函数$f(x,y)$满足$\frac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$且$f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$，求曲线

$f(x,y)=0$所围图形绕直线$y=-1$旋转所成旋转体的体积.

五、微分方程综合专题

【27】设 $y''+p(x)y'=f(x)$ 有一个特解 $y=\dfrac{1}{x}$，对应齐次方程有一个特解为 $y=x^2$，求该方程的通解.

【28】设函数 $u=f(\sqrt{x^2+y^2})$，f 二阶可导，且满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\iint\limits_D \dfrac{1}{1+s^2+t^2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t$，其中 $D=\left\{(s,t)\middle|s^2+t^2\leqslant x^2+y^2\right\}$，又 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=0$.

（1）试求 $f'(x)$ 的表达式；（2）若 $f(0)=0$，求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x^4}$.

【29】（数一）设可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x}\int_{0}^{x}\left[f(t)\right]^{2}\mathrm{d}t$，求 $f(x)$ 的表达式.

【30】（数一、二）设函数 $y(x)$ 满足方程 $y(x)=x^{3}-x\int_{1}^{x}\frac{y(t)}{t^{2}}\mathrm{d}t+y'(x), x>0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x^{3}}=\frac{2}{3}$.求函数 $y(x)$.

六、多元函数微分学综合专题

【31】设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$ 求 $f''_{xy}(0,0), f''_{yx}(0,0)$.

【32】设 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数，且 $f(x,y)=1-x-y+o(\sqrt{(x-1)^2+y^2})$.若 $g(x,y)=f(\mathrm{e}^{xy},x^2+y^2)$.试问 $(0,0)$ 是否为 $g(x,y)$ 的极值点，请说明理由.

【33】设函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $f(0,0)=1, f_x'(0,0)=2, f_y'(0,y)=-3$，以及 $f_{xx}''(x,y)=y, f_{xy}''(x,y)=x+y$，试求 $f(x,y)$ 的表达式.

七、多元函数积分学综合专题

【34】设平面区域 D 由直线 $x+y=\dfrac{1}{2}, x+y=1$ 及两条坐标轴所围成.记 $I_1=\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_2=\iint\limits_D [\sin(x+y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_3=\iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则有（　）

（A）$I_3>I_2>I_1$.　（B）$I_1>I_2>I_3$.　（C）$I_2>I_1>I_3$.　（D）$I_1>I_3>I_2$.

【35】设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\arctan(1+x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 若平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\leqslant a^2\right\}$，则 $\lim\limits_{a\to 0^+}\dfrac{\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi a^2}=$（　）

（A）$\dfrac{\pi}{2}$.　（B）$\dfrac{\pi}{4}$.　（C）$\dfrac{\pi}{8}$.　（D）0.

【36】交换积分次序 $I=\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

【37】$I=\iint\limits_D \max\{x,y\}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$.

以下 38-43 题属于数一内容：

【38】设有一匀质物体，在空间所占据的区域 Ω 由球面 $x^2+y^2+z^2=2az$ 与圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成，其中 $a>0$，求该物体的质心坐标.

【39】计算曲线积分 $I=\int_L \dfrac{(x+2)^2+(y-3)^2}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s$，其中 $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y=0. \end{cases}$

【40】一薄壳形状为 $x^2+y^2=2-2z(z>0)$，其上任一点 (x,y,z) 处的面密度为 $\mu=\dfrac{3}{2}+y-z$，求该薄壳的质量.

【41】已知 $\mathrm{d}u=\dfrac{ax+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x-\dfrac{x-y+b}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$.

（1）求 a,b；（2）计算 $\oint_l \mathrm{d}u$，其中 $l:x^2+y^2=1$ 且为逆时针方向.

【42】求 $I=\oint_L (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$，其中 L 是半球面 $x^2+y^2+z^2=2ax\ (z\geqslant 0)$ 与圆柱面 $x^2+y^2=2bx\ (a>b>0)$ 的交线，从 z 轴正向看为逆时针方向.

【43】已知点 $A(0,0,0)$ 与点 $B(0,1,1)$，Σ 是由直线 $\overline{AB}$ 绕 z 轴旋转一周所得旋转曲面（介于 $z=1$ 与 $z=2$ 之间部分的内侧），且 $f(x)$ 可导.

（1）求曲面 Σ 的方程;

（2）计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}[xf(\frac{x}{y})+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[yf(\frac{x}{y})+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[zf(\frac{x}{y})+4z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

八、无穷级数综合专题

【44】若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则必有（　　）

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 发散.

（B）$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\infty$.

（C）$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

（D）$\lim\limits_{n\to\infty}(|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|)=\infty$.

【45】如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$绝对收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$（　　）

（A）条件收敛.　　（B）绝对收敛.　　（C）发散.　　（D）以上均有可能.

【46】设$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_n|}{v_n}=1$，则下列说法中正确的是（　　）

（1）若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；　　（2）若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散；

（3）若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛；　　（4）若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散.

（A）（1）（2）.　　（B）（2）（3）.　　（C）（3）（4）.　　（D）（1）（4）.

【47】判断下列级数的敛散性:

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(2+n)}\sin\dfrac{1}{n}$.

（2）设$\{a_n\},\{b_n\}$满足$\mathrm{e}^{a_n}=a_n+\mathrm{e}^{b_n}$，其中$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛且$a_n>0$，判定$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$的敛散性.

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$，其中$\{x_n\}$是单调递增且有界的正数列.

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 x^2(1-x)^n\mathrm{d}x$.

【48】设$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$.

（1）求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+2}}{n}$的值；（2）试证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$收敛，其中$\lambda$为正常数.

【49】已知$\{a_n\}$满足$a_0=2, na_n=a_{n-1}+n-1, n=1,2,\cdots$.求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的和函数$S(x)$，其中$x\in(-1,1)$.

【50】求幂级数$2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$的收敛域及和函数.

第二部分 线性代数

一、选择题

【1】设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，下列命题中正确的是（　）

（A）$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{O}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 且 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$.　（B）若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

（C）若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}|=0$.　（D）若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$.

【2】设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}$ 是三阶可逆矩阵，且

$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} b_{12} & 2b_{11} & -3b_{13}\\ b_{22} & 2b_{21} & -3b_{23}\\ b_{32} & 2b_{31} & -3b_{33}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 相似于（　）

（A）$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$.　（B）$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

（C）$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$.　（D）$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 0\end{pmatrix}$.

【3】设 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵,令 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1^{2022}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2^{-1}$ 等于（ ）

（A）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.　（B）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

（C）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.　（D）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

【4】设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，记$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}$，$(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{B}$,其中$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为3阶矩阵，则（　　）

（A）存在$\boldsymbol{A}$，使$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性无关.　　（B）不存在$\boldsymbol{A}$，使$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性相关.

（C）存在$\boldsymbol{B}$，使$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$线性无关.　　（D）不存在$\boldsymbol{B}$，使$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$线性相关.

【5】（数一）设$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_i,b_i,c_i)^{\mathrm{T}},i=1,2,3,\boldsymbol{\alpha}=(d_1,d_2,d_3)^{\mathrm{T}}$，则三个平面

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$

$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0$$

两两相交成三条平行直线的充分必要条件是

（A）$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=1,r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha})=2$.

（B）$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2,r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha})=3$.

（C）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$中任意两个均线性无关，且$\boldsymbol{\alpha}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出.

（D）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，且$\boldsymbol{\alpha}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出.

【6】设 $\boldsymbol{A}$ 为 4×3 的矩阵,非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有 3 个线性无关的解 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$,

k_1,k_2,k_3 为任意常数.则下列表达式中为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 通解的有（　　）个:

①$\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+k_1(\alpha_1-\alpha_2)$

②$\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{3}+k_1(\alpha_1-\alpha_2)+k_2(\alpha_2-\alpha_3)$

③$\alpha_3+k_1(\alpha_1-\alpha_3)+k_2(\alpha_2-\alpha_3)$

④$\alpha_1+k_1(\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2)+k_2(\alpha_2-\alpha_3)$

（A）1.　　（B）2.　　（C）3.　　（D）4.

【7】设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&a&4\\4&5&a\end{pmatrix}(a>0)$，$\boldsymbol{A}$ 是 3 阶非零矩阵且 $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为（　　）

（A）$k_1(1,2,-1)^{\mathrm{T}}+k_2(3,3,4)^{\mathrm{T}}$.　　（B）$k_1(1,2,-1)^{\mathrm{T}}+k_2(4,5,-1)^{\mathrm{T}}$.

（C）$k_1(1,3,4)^{\mathrm{T}}+k_2(2,3,5)^{\mathrm{T}}$.　　（D）$k_1(1,3,4)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,4,3)^{\mathrm{T}}$.

【8】设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 n 阶可逆矩阵，且 $\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$，则下列结果

① $\boldsymbol{AB}\sim\boldsymbol{BA}$　② $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$　③ $\boldsymbol{A}^{2022}\sim\boldsymbol{B}^{2022}$　④ $\boldsymbol{A}^*\sim\boldsymbol{B}^*$

正确的个数为（　　）

（A）1.　　（B）2.　　（C）3.　　（D）4.

【9】设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是3阶矩阵且 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，又 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 且 $r(\boldsymbol{B})=2$,则 $\left|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}\right|=$（　）

（A）0.　　（B）2.　　（C）4.　　（D）8.

【10】设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，且满足 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的秩为（　）

（A）0.　　（B）1.　　（C）2.　　（D）3.

【11】设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 3 维单位正交列向量，则二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+2\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}$ 的规范形为（　）

（A）$y_1^2+y_2^2$.　　（B）$y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

（C）$y_1^2-y_2^2$.　　（D）$y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

二、填空题

【12】设 $\boldsymbol{B}$ 是 3 阶正交矩阵，且 $|\boldsymbol{B}|<0$, $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=6$，则 $\left|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|=$____________.

【13】设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 分别是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，若 $|\boldsymbol{A}|=1,|\boldsymbol{B}|=2$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{BA} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为______________.

【14】设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵且 $r(\boldsymbol{A})=1$，$\lambda=1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，其对应的特征向量是 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为______________.

【15】若可逆矩阵满足 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{D}=$______________.

【16】设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-1,a)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(1,a,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$，且 $\lambda=3$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\lambda=3$ 的特征向量是______________.

三、解答题

【17】设 $A=\begin{pmatrix}1&3&9\\2&0&6\\-3&1&-7\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}$ 为 3 阶非零矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}b\\1\\0\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的解向量，且 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}_3$ 有解.

（1）求常数 a,b.

（2）求 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的通解.

【18】设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{\alpha}_1=(0,3,c)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(a,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(b,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,-3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(3,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(9,6,-7)^{\mathrm{T}}$，且 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示.

（1）求 a,b,c 的值.

（2）若 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{A}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

【19】设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-1 & 1 & a+1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

（1）求 a 的值；

（2）求可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{B}$.

【20】设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和都为 2，且存在线性无关的向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 使得

$\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta}=9\boldsymbol{\alpha}$，求 $|\boldsymbol{A}|$，若 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

【21】设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+2ax_2x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化为标准形 $f=3y_1^2+3y_2^2+by_3^2$.

（1）求实数 a,b；

（2）求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$；

（3）若 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=2$，求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的最大值.

【22】设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，它们对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$. 令 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

（1）证明：$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关；

（2）若 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A\beta}$，求 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$.

【23】设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称矩阵，$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & a & d \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & b & e \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & c & f \end{pmatrix}$ 为正交矩阵．二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化为 $-y_1^2+2y_2^2+ky_3^2$，且 $|\boldsymbol{A}|=-4$，求

（1）k 的值；

（2）正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$；

（3）矩阵 $\boldsymbol{A}$．

【24】设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 分别是 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 -1 与 1 的特征向量，且 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$.

（1）证明 $\boldsymbol{P}$ 可逆；

（2）计算 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{P}$.

【25】（数一）已知三维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的两组基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

（1）求 $\boldsymbol{\gamma}=(3,6,2)^{\mathrm{T}}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标；

（2）求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵；

（3）若 $\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2-3\boldsymbol{\beta}_3$，求 $\boldsymbol{\delta}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标.

第三部分 概率论与数理统计

一、选择题

【1】设 A、B 为随机事件，$P(B)>0$，则（　）

（A）$P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)$.　　（B）$P(AB)\geqslant P(A)P(B)$.

（C）$P(A-B)\geqslant P(A)-P(B)$.　　（D）$P(A|B)\geqslant \dfrac{P(A)}{P(B)}$.

【2】设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$，则随机变量 $Y=|X|$ 的概率密度为（　）

（A）$f_Y(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$.　　（B）$f_Y(x)=f(x)+f(-x)$.

（C）$f_Y(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$　　（D）$f_Y(x)=\begin{cases}f(x)+f(-x), & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$

【3】设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 则随机变量 $Y=1-e^{-2X}$ 服从（　）

（A）正态分布.　　（B）指数分布.

（C）泊松分布.　　（D）$[0,1]$上的均匀分布.

【4】设随机变量 X 和 Y 相互独立，且有相同的分布函数 $F(x)$，$Z=X+Y$，$F_Z(z)$ 为 Z 的分布函数，则下列成立的是（　）

（A）$F_Z(2z)=2F(z)$.　　（B）$F_Z(2z)=\left[F(z)\right]^2$.

（C）$F_Z(2z)\leqslant\left[F(z)\right]^2$.　　（D）$F_Z(2z)\geqslant\left[F(z)\right]^2$.

【5】设平面区域 D 是由 x 轴，y 轴及直线 $x+\frac{y}{2}=1$ 所围成的三角形区域，二维随机变量 (X,Y) 在 D 上服从均匀分布，则 $f_{X|Y}(x|y)=$（　）

（A）$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{2}{2-y}, & 0<x<1-\frac{y}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

（B）$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{2}{1-y}, & 0<x<1-\frac{y}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

（C）$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{1}{2-y}, & 0<x<1-\frac{y}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

（D）$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{1}{1-y}, & 0<x<1-\frac{y}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

【6】设相互独立的随机变量 X_1 和 X_2 的分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，则随机变量 $Y=\min(X_1,X_2)$ 的概率密度 $f(x)=$（　）

（A）$f_1(x)f_2(x)$.　　（B）$f_1(x)F_1(x)+f_2(x)F_2(x)$.

（C）$f_1(x)\left[1-F_2(x)\right]+f_2(x)\left[1-F_1(x)\right]$.　　（D）$f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$.

【7】设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=a\mathrm{e}^{x(b-x)}\left(-\infty<x<+\infty\right)$，且 $E(X)=2D(X)$，则（　　）

（A）$a=\dfrac{1}{\mathrm{e}\sqrt{\pi}},b=2$.　　　　（B）$a=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}},b=2$.

（C）$a=\dfrac{1}{\mathrm{e}\sqrt{\pi}},b=1$.　　　　（D）$a=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}},b=1$.

【8】设随机变量 X 服从指数分布 $E(1)$，用切比雪夫不等式得到估计 $P\{X\geqslant 3\}\leqslant a$，则 a 等于（　　）

（A）$\dfrac{1}{2}$.　　（B）$\dfrac{1}{4}$.　　（C）$\dfrac{1}{8}$.　　（D）e^{-3}.

【9】设 X_n 表示将一硬币独立重复投掷 n 次，出现反面向上的次数，则（　　）

（A）$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{X_n-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\varPhi(x)$.　　　　（B）$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{X_n-2n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\varPhi(x)$.

（C）$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{2X_n-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\varPhi(x)$.　　　　（D）$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{2X_n-2n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\varPhi(x)$.

【10】数集 $\{1,2,3,4,5\}$ 中任取 n 个数 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，对于 $\forall\varepsilon>0$，有

$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-a\right|<\varepsilon\right\}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^{\ 2}-b\right|<\varepsilon\right\}=1$，则（　　）

（A）$a=3,b=11$.　　　　（B）$a=3,b=2$.

（C）$a=\dfrac{3}{5},b=\dfrac{2}{5}$.　　　　（D）$a=\dfrac{3}{5},b=2$.

【11】设总体 X 和 Y 都服从标准正态分布 $N(0,1)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 是来自于总体 X 和 Y 的两个相互独立的简单随机样本，其样本均值和样本方差分别为 $\overline{X}$，S_X^2 和 $\overline{Y}$，S_Y^2，则（　　）

（A）$\overline{X}-\overline{Y}\sim N(0,2)$.

（B）$S_X^2+S_Y^2\sim \chi^2(2n-2)$.

（C）$\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{S_X^2+S_Y^2}}\sim t(2n-2)$.

（D）$\dfrac{S_X^2}{S_Y^2}\sim F(n-1,n-1)$.

【12】设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体的简单随机样本，S^2 是样本方差，下列正确的是（　　）

（A）$\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n)$.

（B）$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{n}S}\sim t(n)$.

（C）$\dfrac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{X_i}{\sigma}\right)^2+\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$.

（D）$\dfrac{(n-1)X_n^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2}\sim F(1,n-1)$.

二、填空题

【13】设相互独立的三事件 A,B,C 满足条件：$P(A)=0.4,P(B)=0.5,P(C)=0.5$，则 $P(A-C|AB\cup C)=$____________.

【14】设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{5x+7}{16}, & -1\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$ 则 $P\left\{X^2=1\right\}=$______.

【15】已知 $X \sim P(2)$，在 X 取 x 的条件下，Y 在 $\left[0,x\right]$ 内的整数中等可能取值，则 $P\left\{Y=0\right\}=$______.

【16】已知 $X \sim N(\frac{1}{4},1), Y \sim B(3,\frac{3}{4})$，$X$ 与 Y 相互独立，则 $P\left\{XY+2>X+Y\right\}=$____.

【17】已知随机变量 Y 的分布函数为 $F_Y(y)=0.1F_1(y)+aF_1(3y)$，其中 $F_1(x)$ 是服从方差为1的指数分布的随机变量 X 的分布函数，则 $DY=$______.

【18】在数轴上的区间$[0,a]$内任意独立地选取两点M与N，求线段MN长度的数学期望为________.

【19】随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$相互独立同分布，且期望均为μ，方差均为$\sigma^2(\sigma>0)$.令$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，求$X_1$与$\bar{X}$的相关系数$\rho=$_______.

【20】（数一）设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本，其中μ,σ^2未知.记$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$Q=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$，则假设$H_0:\mu=0$的$t$检验统计量$T=$______.

三、解答题

【21】已知 $f(x)=\begin{cases}1, 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, 其它.\end{cases}$

（1）求 $F(x)$；　（2）设 $Y=2X$，求 $F_Y(y)$；　（3）设 $Y=\left|X-\dfrac{1}{2}\right|$，求 $F_Y(y)$.

（4） $P\{Y=1\}=\dfrac{1}{2}$， $P\{Y=2\}=\dfrac{1}{2}$，且 X,Y 独立，设 $Z=X+Y$，求 $F_Z(z)$；

（5） $Y=\begin{cases}1, X>\dfrac{1}{3},\\ 2, X\leqslant\dfrac{1}{3},\end{cases}$ 设 $Z=X+Y$，求 $F_Z(z)$.

【22】已知 $f(x,y)=\begin{cases}2, 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant x,\\ 0, \qquad\qquad 其他.\end{cases}$

（1）$P\{U=1\}=\dfrac{1}{2}$，$P\{U=2\}=\dfrac{1}{2}$，且U与X,Y独立，设$Z=U+X$，求$F_Z(z)$；

（2）$U=\begin{cases}1, Y>\dfrac{X}{2},\\ 2, Y\leqslant\dfrac{X}{2},\end{cases}$ 设$Z=U+X$，求$F_Z(z)$.

【23】设 X,Y 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-(x+y)}, & x>0,y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

求：（1）求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$；（2）求 $Z=2X-Y$ 的密度函数；

（3）求 $E(X+Y)$；　　（4）求联合分布函数 $F(x,y)$.

【24】设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}, & x\geqslant\mu, \\ 0, & 其他.\end{cases}$ 其中 $\theta>0$.

求：（1） μ,θ 的矩估计量；（2） μ,θ 的最大似然估计量.

【25】设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(2\mu,\sigma^2)$ 与 $N(\mu,\sigma^2)$.其中 σ 是未知参数且 $\sigma>0$.记 $Z=X-2Y$.

（1）求 Z 的概率密度 $f(z;\sigma^2)$；

（2）设 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本，求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$；

（3）求 $E(\hat{\sigma}^2),D(\hat{\sigma}^2)$.