第八章　二重积分

考试内容

二重积分的概念、基本性质和计算，无界区域上简单的反常二重积分（数三）.

考试要求

1.理解二重积分的概念,了解二重积分的基本性质,了解二重积分的中值定理.

2.掌握二重积分的计算方法(直角坐标、极坐标).

3.了解无界区域上较简单的反常二重积分并会计算. (数三)

§1.二重积分的概念

一、二重积分的定义

1.定义

设 $f(x,y)$ 是闭区域 D 上的有界函数，将区域 D 任意分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\ldots\Delta\sigma_n$.其中，$\Delta\sigma_i$ 既表示第 i 个小区域,也表示它的面积.在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)，作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i(i=1,2\cdots,n)$，并作和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.若 $\lambda\to 0$ 时，极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 存在，其中 λ 为 n 个小闭区域的直径中的最大值,则称此极限值为函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上的二重积分，记作 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$，即

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i .$$

其中: $f(x,y)$ 称之为被积函数, $f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 称之为被积表达式，$\mathrm{d}\sigma$ 称之为面积元素，x,y 称之为积分变量，D 称之为积分区域，$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 称之为积分和式.

2.几何意义: 若 $f(x,y)\geqslant 0$，二重积分表示以 $f(x,y)$ 为曲顶，以 D 为底的曲顶柱体的体积.

3.存在性定理： $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分存在.

二、二重积分的性质

1.线性性质

$$\iint\limits_D[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]\mathrm{d}\sigma=\alpha\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\beta\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma .$$

2.积分区域的可加性

若区域 D 可分为两个部分区域 D_1,D_2，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma .$$

3.若 $f(x,y)=1$，S_D 为区域 D 的面积，则 $\iint\limits_D 1\mathrm{d}\sigma = S_D$.

4.若在 D 上，$f(x,y)\leqslant g(x,y)$，则有不等式

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$

特别地，

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \iint\limits_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma.$$

5.估值不等式

设 M 与 m 分别是 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上最大值 M 和最小值 m，σ 是 D 的面积，则

$$m\boldsymbol{\sigma} \leqslant \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \leqslant M\boldsymbol{\sigma}.$$

三、二重积分中值定理

设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，S_D 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ,η)，使得

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)S_D.$$

【例 8.1】设 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\leqslant 1\right\}$，比较下面三个二重积分的大小：

$$I_1=\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma, I_2=\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma, I_3=\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)^2\mathrm{d}\sigma.$$

【答案】$I_1>I_2>I_3$.

【解析】积分区域相同，被积函数不同时，比较被积函数的大小.对于 $\forall(x,y)\in D$，

$(x^2+y^2)^2\leqslant x^2+y^2\leqslant\sqrt{x^2+y^2}$，所以，$I_1>I_2>I_3$.

【例 8.2】二重积分 $I_i=\iint\limits_{D_i}\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma, i=1,2,3,4$. $D_i=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\leqslant\frac{1}{i}\right\}$,则下列积分中，最大的是（　）.

(A) I_1 (B) I_2 (C) I_3 (D) I_4

【答案】(A).

【解析】根据二重积分的几何意义可知，被积函数大于零时，若区域之间存在包含关系，则哪个积分区域大哪个积分值就大.故正确选项为(A).

【例 8.3】设 $g(x)$ 有连续的导数，$g(0)=0$，$g'(0)=a\neq 0$，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内连续，则 $\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2} f(x,y)dxdy}{g(r^2)}=$

（A）$\dfrac{f(0,0)}{a}$. （B）$\dfrac{f(0,0)}{2a}$. （C）$\dfrac{\pi}{a}f(0,0)$. （D）$\dfrac{\pi}{2a}f(0,0)$.

【答案】（C）.

【解析】由二重积分的中值定理可得，$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2} f(x,y)dxdy=\pi r^2 f(\xi,\eta)$，其中 (ξ,η) 为圆域 $x^2+y^2\leqslant r^2$ 上的一个点．且 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内连续，则 $\lim\limits_{r\to 0^+} f(\xi,\eta)=f(0,0)$.而 $\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{r^2}{g(r^2)}=\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{2r}{2rg'(r^2)}=\dfrac{1}{a}$ ，所以 $\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2} f(x,y)dxdy}{g(r^2)}=\dfrac{\pi}{a}f(0,0)$.

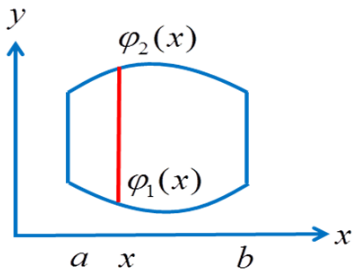
§2.二重积分的计算

一、二重积分在直角坐标系中的计算

1. 积分区域 D 为 X 型区域

若积分区域 D 可以用不等式 $a \leqslant x \leqslant b, \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$ 表示，则称区域 D 为 X 型区域.此时二重积分可化为：

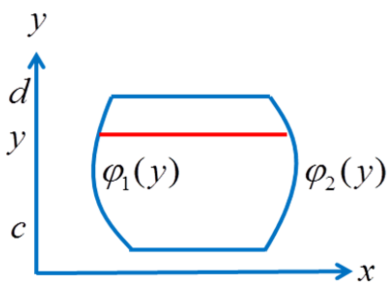
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y .$$



2. 积分区域 D 为 Y 型区域

若积分区域 D 可以用不等式 $c \leqslant y \leqslant d, \varphi_1(y) \leqslant x \leqslant \varphi_2(y)$ 表示，则称区域 D 为 Y 型区域.此时二重积分可化为：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x .$$



【例 8.4】计算 $\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域 D 是由 $x+y=1$ 与 x 轴、y 轴所围成的区域.

【答案】$\dfrac{1}{3}$.

【解析】 看成 X 型区域：$\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}(x+y)\mathrm{d}y = \int_0^1 x(1-x)+\dfrac{(1-x)^2}{2}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}$.

【例 8.5】 计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由抛物线 $y^2 = x$ 及 $y = x-2$ 所围成的区域.

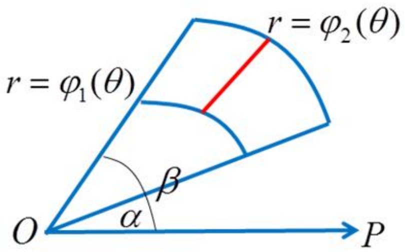
【答案】 $\dfrac{45}{8}$.

【解析】 易求得交点为 $(1,-1)$，$(4,2)$，看成 Y 型区域，因此，

原式 $= \int_{-1}^2 \mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2} xy\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int_{-1}^2\left[y(y+2)^2 - y^5\right]\mathrm{d}y = \dfrac{45}{8}$.

二、二重积分在极坐标中的计算

设积分区域 D 可表示成：$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta, r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta)$，其中函数 $r_1(\theta)$，$r_2(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.



【注】 极坐标与直角坐标的关系如下：

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \end{cases}.$$

【例 8.6】 计算 $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，区域 D 分别为如下区域：

（1）由 $x^2+y^2=1$ 所围成的区域.

（2）由 $x^2+y^2=2x(y\geqslant 0)$ 与 x 轴围成的区域.

（3） $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leqslant 4,x^2+y^2\geqslant 2y,x\geqslant 0,y\geqslant 0\right\}$.

【答案】（1） 0；（2） $\dfrac{\pi}{2}$；（3） 2.

【解析】（1） $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\cos\theta r\mathrm{d}r=\dfrac{1}{3}\int_0^{2\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta=0$.

（2） $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} r\cos\theta r\mathrm{d}r=\dfrac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=\dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$.

（3） $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{2} r\cos\theta r\mathrm{d}r=\dfrac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta=\dfrac{8}{3}(1-\dfrac{1}{4})=2$.

【例 8.7】计算 $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域 D 是由 $x=-2,\ y=0,\ y=2$ 以及 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的区域.

【答案】 $4-\dfrac{\pi}{2}$.

【解析】 $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-2}^{0}\mathrm{d}x\int_0^2 y\mathrm{d}y-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} r\sin\theta r\mathrm{d}r=4-\dfrac{\pi}{2}$.

三、无界区域上的二重积分（数学三）

一般原理：用有界区域上的二重积分取极限来定义无界区域上的二重积分.

设函数 $f(x,y)$ 在无界区域 D 上有定义，且在区域 D 的任何有界部分上 $f(x,y)$ 的二重积分存在，则函数 $f(x,y)$ 在无界区域 D 上的二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim\limits_{D_\Gamma\to D}\iint\limits_{D_\Gamma} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

【例 8.8】计算二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{e}^x xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是以曲线 $y=\sqrt{x},y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 及 y 轴为边界的无界区域.

【答案】 $\dfrac{1}{2}$.

【解析】$\iint\limits_{D} \mathrm{e}^{x} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{0}^{1} x\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}} y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{0}^{1}\left(1-x^{2}\right)\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\left(1-x^{2}\right)\Big|_{0}^{1} + \int_{0}^{1} x\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

§3.二重积分的对称性

一、二重积分的奇偶对称性

1． 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，若 D 关于 x 轴对称，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}0, & f(x,y)\text{关于 } y \text{ 为奇函数},\\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f(x,y)\text{关于 } y \text{ 为偶函数}.\end{cases}$$

其中 D_1 为 D 在 x 轴上半平面部分.

2． 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，若 D 关于 y 轴对称，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}0, & f(x,y)\text{关于 } x \text{ 为奇函数},\\ 2\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f(x,y)\text{关于 } x \text{ 为偶函数}.\end{cases}$$

其中 D_2 为 D 在 y 轴的右半平面部分.

【例 8.9】 (1)已知 $D=\left\{(x,y)\middle| y\geqslant -x, y\leqslant x, x\leqslant 1\right\}$，计算 $\iint\limits_D \mathrm{e}^x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

(2)已知 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\leqslant 2y\right\}$，计算 $\iint\limits_D x^3y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【答案】（1） 0；（2） 0.

【解析】 (1) 积分区域 D 关于 x 轴对称， $f(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y$ 是关于 y 的奇函数，故

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

(2) 积分区域 D 关于 y 轴对称， $f(x,y)=x^3y^2$ 是关于 x 的奇函数，故

$$\iint\limits_D x^3y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

【例 8.10】 设区域 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0\right\}$，计算二重积分

$$I=\iint\limits_D\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

【答案】$\frac{\pi}{2}\ln 2$.

【解析】积分区域关于 x 轴对称，$\frac{xy}{1+x^2+y^2}$ 是 y 的奇函数，从而 $\iint\limits_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$.

$$I = \iint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \frac{r}{1+r^2}\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}\ln 2.$$

【例 8.11】求二重积分 $\iint\limits_D y\left[1+x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值，其中 D 是由直线 $y=x, y=-1, x=1$ 围成的平面区域.

【答案】$-\frac{2}{3}$.

【解析】$\iint\limits_D y\left[1+x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_D xy\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中，

$$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^1 \mathrm{d}y\int_y^1 y\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 y(1-y)\mathrm{d}y = -\frac{2}{3},$$

添加 $y=-x$ 后结合区域的对称性和被积函数的奇偶性知 $\iint\limits_D xy\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$，于是 $\iint\limits_D y\left[1+x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{2}{3}$.

二、二重积分的轮换对称性

设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，若 D 关于直线 $y=x$ 对称，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

【例 8.12】已知区域 D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 在第一象限所围的部分，计算 $\iint\limits_D \frac{x}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【答案】$\frac{\pi}{2}$.

【解析】由轮换对称性，所求 $I=\iint\limits_D \frac{x}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D \frac{y}{y+x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，所以，

$2I=\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=S_D=\frac{1}{4}\cdot 4\pi=\pi$，所以，所求积分为 $\frac{\pi}{2}$.

【例 8.13】计算 $I=\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,-1\leqslant y\leqslant 1\}$.

【答案】$\frac{8}{3}$.

【解析】$\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D x^2+2xy+y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

因为积分区域关于 x 轴对称，$2xy$ 是关于 y 的奇函数，从而 $\iint\limits_D 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.所以，

$\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D x^2+y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{D_1} x^2+y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D_1 是 D 在第一象限的部分.

由轮换对称性，$\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{D_1} x^2+y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8\iint\limits_{D_1} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 x^2\mathrm{d}y=\frac{8}{3}$.