第七章　多元函数微分学

【考试要求】

1. 了解多元函数的概念(数学一“理解”),了解二元函数的几何意义(数学一“理解”).

2. 了解二元函数的极限与连续的概念以及有界闭区域上连续函数的性质.

3. 了解多元函数偏导数和全微分的概念(数学一“理解”),会求全微分,了解全微分存在的必要条件和充分条件(数学一),了解全微分形式的不变性(数学一).

4. 理解方向导数与梯度的概念,并掌握其计算方法(数学一).

5. 会求多元复合函数一阶、二阶偏导数(数学一“掌握”).

6. 了解隐函数存在定理,会求多元隐函数的偏导数.

7. 了解空间曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念,会求它们的方程(数学一).

8. 了解二元函数的二阶泰勒公式(数学一).

9. 了解多元函数极值和条件极值的概念(数学一“理解”),掌握多元函数极值存在的必要条件,了解二元函数极值存在的充分条件,会求二元函数的极值,会用拉格朗日乘数法求条件极值,会求简单多元函数的最大值和最小值,并会解决一些简单的应用问题.

§1.多元函数极限与连续

一、多元函数的概念

1.定义

设D是R^2的一个非空子集，称映射$f:D\to R$为定义在D上的二元函数，记为$z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$，其中点集D称为函数的定义域，集合$f(D)=\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$称为函数的值域.

类似可定义三元函数$u=f(x,y,z)$.

2.几何意义

二元函数 $z=f(x,y)$ 表示空间的曲面，例如 $z=x^2+y^2$ 的图形为旋转抛物面；$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的图形为上半球面.

二、二元函数的极限

1.定义

设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某去心邻域有定义，若对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$.

【注 1】 只有当动点(x,y)以任意方式趋近于(x_0,y_0)，$f(x,y)$的极限都为A，这时才称二元函数的极限存在.

【注 2】若能找到两条不同路径，(x,y)沿其趋近于(x_0,y_0)时$f(x,y)$的极限不相等，则二元函数的极限不存在. 特别地，当$(x_0,y_0)=(0,0)$时选择$y=kx$，若极限值与k有关，则二元函数的极限不存在.

【例 7.1】求下列二元函数极限

（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{x^2-y^2}{x-y}$.　（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(xy)}{x^2y^2}$.　（3）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

（4）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$.　（5）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2|y|^{\frac{3}{2}}}{x^4+y^2}$.

【例 7. 2】 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

三、二元函数的连续性

1.定义

设二元函数 $z = f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域有定义，若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$，则称函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续.

2. 多元函数在有界闭区域上的性质

有界性: 在有界闭区域 D 上连续的多元函数必定在 D 上有界.

最大值与最小值定理: 在有界闭区域 D 上连续的多元函数必定在 D 上取到它的最大值和最小值.

介值定理: 在有界闭区域 D 上连续的多元函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值.

【例 7. 3】设 $f(x,y)=\begin{cases} y\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$，判断函数在 $(0,0)$ 处是否连续.

§2.偏导数

一、偏导概念

1．偏导定义

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，

（1）如果

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} \text{ 或 } \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数，记为 $f_x'(x_0,y_0)$.

还可以表示如下：$f_1'(x_0,y_0)$，$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,\ y_0)}$，$\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial x}$，$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$，$\left.z_x'\right|_{(x_0,\ y_0)}$.

（2）如果

$$\lim_{y\to y_0}\frac{f\left(x_0,y\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{y-y_0} \text{ 或 } \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 y 的偏导数，记为 $f_y'\left(x_0,y_0\right)$.

还可以表示如下：$f_2'\left(x_0,y_0\right)$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,\ y_0)}$，$\frac{\partial f\left(x_0,\ y_0\right)}{\partial y}$，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$，$\left.z_y'\right|_{(x_0,\ y_0)}$.

【例 7.4】 已知 $f(x,y)=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^4}}$ 判断 $f_x'(0,0)$, $f_y'(0,0)$ 是否存在.

【例 7.5】设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2), & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，求 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}$.

2．偏导几何意义

由偏导数的定义可知，$f_x'(x_0,y_0)$ 可看成函数 $z=f(x,y_0)$ 在 x_0 处的导数，根据导数的几何意义，$f_x'(x_0,y_0)$ 表示曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=y_0 \end{cases}$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处的切线对 x 轴的斜率.

同理，$f_y'(x_0,y_0)$ 表示曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ x=x_0 \end{cases}$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处的切线对 y 轴的斜率.

【例 7.6】已知 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0,\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$ 则使不等式 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的充分条件是（　　）.

（A） $x_1>x_2,y_1<y_2$.　　（B） $x_1>x_2,y_1>y_2$.

（C） $x_1<x_2,y_1<y_2$.　　（D） $x_1<x_2,y_1>y_2$.

3．二阶偏导

一般情况 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 仍是二元函数，那么它们的偏导数就称为 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数，记作

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,\ y)=f''_{11}(x,\ y),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,\ y)=f''_{12}(x,\ y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,\ y)=f''_{21}(x,\ y),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,\ y)=f''_{22}(x,\ y),$$

其中 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 称为混合偏导，当 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在 $(x,\ y)$ 处连续时 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

4．偏导计算

【例 7. 7】求下列函数的所有一阶、二阶偏导.

（1） $z = x\sin(x+y)$.

（2） $z = x^y$.

【例 7.8】已知 $z = xye^{\frac{x}{y}}$，求 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)}, \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)}$.

【例 7.9】求下列函数的所有一阶偏导.

（1） $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.　　　（2） $u=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$.

二、复合函数求偏导

复合函数的链式求导法则为：如果 $z=f\left(u,v\right)$，$u=u\left(x,y\right)$，$v=v\left(x,y\right)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'(u,v)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+f_2'(u,v)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\text{；}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=f_1'(u,v)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f_2'(u,v)\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

【注】其他一元函数与多元函数复合情形和多元函数与多元函数复合情形与此类似，通常使用“树形图”分析变量之间的关系.

【例 7.10】设 $z=f(u,v),u=x+y,v=xy$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【例 7. 11】设 $z=f\left(\mathrm{e}^{xy}, x^2+y^2\right)$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

【例 7.12】 设 $z=f(u)$，$u=x^2y^3$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

【例 7.13】设 $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

三、隐函数求偏导

隐函数存在定理 1：

设函数 $F(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内具有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0)=0$，$F_y'(x_0,y_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 $y=f(x)$，它满足条件 $y_0=f(x_0)$，并有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F_x'}{F_y'}$.

隐函数存在定理 2:

设函数 $F(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某一邻域内具有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F_z'(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某一邻域内能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$，它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$，并有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_z'}$.

【例 7.14】设 $z=z(x, y)$ 是由方程 $xz+x^2y=\sin(yz)$ 所确定的函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

【例 7.15】设 $x^2+z^2=y\varphi\left(\dfrac{z}{y}\right)$，其中 φ 为可微函数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$______.

【例 7.16】设有三元方程 $xy - z\ln y + \mathrm{e}^{xz} = 1$，根据隐函数存在定理，存在点(0,1,1)的一个邻域，在此邻域内该方程（　　）.

（A）只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z = z(x, y)$.

（B）可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y = y(x, z)$ 和 $z = z(x, y)$.

（C）可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y, z)$ 和 $z = z(x, y)$.

（D）可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y, z)$ 和 $y = y(x, z)$.

§3.全微分

一、全微分定义

若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

其中 A,B 不依赖于 $\Delta x,\Delta y$，而仅与 x,y 有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，而 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全微分，记为

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y.$$

二、全微分计算

习惯上，将自变量的增量 Δx 和 Δy 分别记作 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$.

若函数 $z=f\left(x,y\right)$ 可微，则全微分

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y .$$

若函数 $u=f\left(x,y,z\right)$ 可微，则全微分

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z .$$

【例 7. 17】已知 $z=x^2+y^2$，用定义求 $\mathrm{d}z\big|_{(1,1)}$.

【例 7. 18】求下列函数的全微分.

（1） $z=\mathrm{e}^{xy}$.　　（2） $u=z+\dfrac{y}{x}$.

【例 7.19】设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$ 确定的函数，求 $\mathrm{d}z\Big|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$.

【例 7. 20】 设 $z=z(x,y)$ 的全微分为 $\mathrm{d}z=(axy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1+by\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$，求 a,b.

三、可微与偏导的关系

1．可微的充分条件

若函数 $z=f(x,y)$ 的一阶偏导 $f_x'(x,y)$、$f_y'(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，则函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微.

【注】一阶偏导连续记作：$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f_x'(x,y)=f_x'(x_0,y_0)$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f_y'(x,y)=f_y'(x_0,y_0)$

2．可微的必要条件

（1）若函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，则偏导 $f_x'(x_0,y_0)$ 、 $f_y'(x_0,y_0)$ 存在；

（2）若函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，则函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

3．可微定义的极限形式

函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微的充要条件是，存在 A,B 使得

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\left[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f\left(x_0,y_0\right)\right]-\left(A\Delta x+B\Delta y\right)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0.$$

其中 $A=f_x'(x_0,y_0)$，$B=f_y'(x_0,y_0)$.

【例 7.21】（2002，一）考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面 4 条性质：

（1） $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，（2） $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续，

（3） $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，（4） $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在，

则有（　　）.

（A）（2）$\Rightarrow$（3）$\Rightarrow$（1）.　（B）（3）$\Rightarrow$（2）$\Rightarrow$（1）.

（C）（3）$\Rightarrow$（4）$\Rightarrow$（1）.　（D）（3）$\Rightarrow$（1）$\Rightarrow$（4）.

【例 7.22】（1994，一）二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处偏导 $f_x'(x_0,y_0)$、$f_y'(x_0,y_0)$ 存在是 $f(x,y)$ 在该点连续的（　　）.

（A）充分条件而非必要条件.　　（B）必要条件而非充分条件.

（C）充分必要条件.　　（D）既非充分条件又非必要条件.

【例 7.23】 讨论函数 $z=\sqrt{|xy|}$ 在 $(0,0)$ 点的连续性，偏导数的存在性，可微性.

§4.多元函数极值与最值

一、二元函数极值（无条件极值）

1．定义

设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点的某邻域内有定义，如果对在此邻域内任意异于 (x_0,y_0) 的点 (x,y) 都有 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$，则称 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 取得极大值，称 (x_0,y_0) 为极大值点；若 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$，则称 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 取得极小值，称 (x_0,y_0) 为极小值点.

2．必要条件

设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处具有偏导数，且在点 (x_0,y_0) 处取得极值，则它在该点的偏导数必然为零，即 $f_x'(x_0,y_0)=0$， $f_y'(x_0,y_0)=0$.

【注】若 $\begin{cases} f_x'(x_0,y_0)=0 \\ f_y'(x_0,y_0)=0 \end{cases}$，则称点 (x_0,y_0) 为 $z=f(x,y)$ 的驻点.

3．充分条件

设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处具有二阶连续偏导数，若 $f'_x(x_0,y_0)=0$， $f'_y(x_0,y_0)=0$，令 $A=f''_{xx}(x_0,y_0),B=f''_{xy}(x_0,y_0),C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，算出 $\Delta=AC-B^2$.

若 $\Delta<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 不是极值；

若 $\Delta=0$，则不确定；

若 $\Delta>0$，则 $f(x_0,y_0)$ 是极值：当 $A>0$ 时，则 $f(x_0,y_0)$ 为极小值；当 $A<0$ 时，则 $f(x_0,y_0)$ 为极大值.

【例 7. 24】 求 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值.

二、多元函数条件极值（最值）

求目标函数 $u=f(x,y,z)$ 在约束条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 下的极值（最值），采用拉格朗日乘数法：

第一步：构造拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$；

第二步：令所有偏导等于 0，$\begin{cases} L_x'=0 \\ L_y'=0 \\ L_z'=0 \\ L_\lambda'=0 \end{cases}$；

第三步：解方程组得到的点为驻点（若唯一，则默认为极值点；若有多个，则比大小）.

推广：如果有两个条件 $\varphi(x,y,z)=0$，$g(x,y,z)=0$ 则令

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu g(x,y,z).$$

【例 7.25】求 $u = xyz$ 在条件 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}\quad(x>0, y>0, z>0, a>0)$ 下的最小值.

【例 7.26】求 $u=x^2+y^2+z^2$ 在条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最大最小值.

三、闭区域最值

求二元连续函数 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上的最大最小值步骤：

（1）求出 $f(x,y)$ 在 D 内的全体驻点，并求出 $f(x,y)$ 在各驻点处的函数值；

（2）求出 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的最大值和最小值；

（3）将 $f(x,y)$ 在各驻点处的函数值与 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的最大值和最小值相比较，最大者为 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值，最小者为 $f(x,y)$ 在 D 上的最小值.

【例 7. 27】求 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 在椭圆域 $D=\{(x,y)\mid x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1\}$ 上的最大值和最小值.