第六章　微分方程

考试内容

常微分方程的基本概念,变量可分离的微分方程、齐次微分方程、一阶线性微分方程、伯努利(Bernoulli)方程、全微分方程,可用简单的变量代换求解的某些微分方程

可降阶的高阶微分方程,线性微分方程解的性质及解的结构定理,二阶常系数齐次线性微分方程、高于二阶的某些常系数齐次线性微分方程、简单的二阶常系数非齐次线性微分方程、欧拉(Euler)方程、差分与差分方程的概念,差分方程的通解与特解,一阶常系数线性差分方程,微分方程的简单应用

考试要求

1.了解微分方程及其阶、解、通解、初始条件和特解等概念.

2. 掌握变量可分离微分方程、齐次方程及一阶线性微分方程的解法.

3.会解伯努利方程和全微分方程(数学一),会用简单的变量代换解某些微分方程.

4.会用降阶法解 $y^{(n)}=f(x)$、$y''=f(y,y')$、$y''=f(x,y')$(数学一、二).

5.理解线性微分方程解的性质及解的结构.

6.掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法,并会解某些高于二阶的常系数齐次线性微分方程.

7.会解自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程.

8.会解欧拉方程(数学一).

9.会用微分方程解决一些简单的应用问题.

10.了解差分与差分方程及其通解与特解等概念(数学三).

11.了解一阶常系数线性差分方程的求解方法(数学三).

12.会用微分方程求解简单的经济应用(数学三).

§1.微分方程的概念

1．微分方程

含有自变量、未知函数和未知函数的导数(或微分)的方程称为微分方程.若未知函数是一元函数则称为常微分方程.

2．微分方程的阶

微分方程中未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶.

3．微分方程的解、通解和特解

代入微分方程能使方程成为恒等式的函数称为微分方程的解；通解就是含有任意常数的个数与方程的阶数相同的解；不含有任意常数或任意常数确定后的解称为特解.

4．初始条件

要求自变量取某定值时,对应函数与各阶导数取指定的值,这种条件称为初始条件.

5．线性方程

如果未知函数和它的各阶导数都是一次项,而且它们的系数只是自变量的函数或常数,则称这种微分方程为线性微分方程.

【例 6.1】下列微分方程中（　）是二阶微分方程.

(A) $y^2+xy=x$　　(B) $y^2+xy'=x$

(C) $(y')^2+xy=\mathrm{e}^x$　　(D) $y^2+xy''=x$

【答案】D

【例 6.2】下列选项中（　）是微分方程 $y''=6x+2$ 的特解,（　）是该方程的通解

(A) $y=x^3+x^2+x+C$.　　(B) $y=x^3+x^2+x+1$.

(C) $y=x^3+x^2+C_1x+C_2$.　　(D) $y=x^3+C_1x^2+x+C_2$.

【答案】(B)；(C)

【例 6.3】下列选项中（　）是线性微分方程

(A) $y^2+xy=x$　　(B) $y+x(y')^3=x$

(C) $y'+xy=\mathrm{e}^x$　　(D) $y^2+xy''=x$

【答案】(C)

§2.一阶微分方程

一、可分离变量的微分方程

如果一阶微分方程能写成

$$g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$$

的形式,即能把微分方程写成一端只含 y 的函数和 $\mathrm{d}y$,另一端只含 x 的函数和 $\mathrm{d}x$,那么原方程就称为可分离变量的微分方程.

将上式两端积分,$\int g(y)\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x$

设 $G(y)$ 及 $F(x)$ 依次为 $g(y)$ 及 $f(x)$ 的原函数,则通解 $G(y)=F(x)+C$.

【例 6.4】 求微分方程 $\left(xy^2+x\right)\mathrm{d}x+\left(y-x^2y\right)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

【答案】 $C(x^2-1)$.

【解析】 因为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{xy^2+x}{x^2y-y}=\dfrac{x(1+y^2)}{y(x^2-1)}$,所以 $\int\dfrac{y\mathrm{d}y}{1+y^2}=\int\dfrac{x\mathrm{d}x}{x^2-1}$,故 $1+y^2=C(x^2-1)$

【例 6.5】 求微分方程 $y'=\dfrac{1+x}{x}y$ 满足 $y\left(1\right)=\mathrm{e}$ 的特解.

【答案】 $y=x\mathrm{e}^x$.

【解析】 因为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=(1+\dfrac{1}{x})\mathrm{d}x$,两边同时积分,得 $\ln\left|y\right|=\ln\left|x\right|+x+C_1$,整理可得, $y=Cx\mathrm{e}^x$

又因为 $y\left(1\right)=\mathrm{e}$,可得特解 $y=x\mathrm{e}^x$.

二、齐次方程

如果一阶微分方程可化成

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 的形式,则称这方程为齐次方程.

令 $u=\frac{y}{x}$,则 $y=ux$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,得 $u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)$,分离变量,得 $\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$

两端积分,得 $\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$, 求出积分后,再以 $\frac{y}{x}$ 代替 u,便得所给齐次方程的通解.

【例 6.6】 解方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$

【答案】 $-\mathrm{e}^{-\frac{y}{x}}=\ln|x|+C$.

【解析】 令 $u=\frac{y}{x}$ 则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 代入上式中有 $u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{u}+u$

即 $-\mathrm{e}^{-u}=\ln|x|+C$,则 $-\mathrm{e}^{-\frac{y}{x}}=\ln|x|+C$.

【例 6.7】 求 $x^2y'+xy=y^2$, $y(1)=1$ 的特解.

【答案】 $y-2x=-x^2y$.

【解析】 原式可化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{y}{x}=(\frac{y}{x})^2$,令 $\frac{y}{x}=u$,则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,代入上式,得

$2u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u^2$,变量分离,得 $\frac{2}{u(u-2)}\mathrm{d}u=\frac{2}{x}\mathrm{d}x$,两边同取积分,得 $\ln\left|\frac{u-2}{u}\right|=2\ln|x|+C_1$,整理,得 $y-2x=Cx^2y$,又因为 $y(1)=1$,可得 $C=-1$,故可得特解 $y-2x=-x^2y$.

三、一阶线性微分方程

方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$ 叫做一阶线性微分方程.如果 $Q(x)\equiv 0$,则称方程为齐次的;如果 $Q(x)\neq 0$,则称方程为非齐次的.

通解公式 $y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$

【例 6.8】 已知 $y'=\frac{1}{1+x^2}y$,求其在 $y(0)=\pi$ 时的特解.

【答案】 $y=\pi e^{\arctan x}$.

【解析】将方程看作 $y'-\frac{1}{1+x^2}y=0$,故通解为 $y=Ce^{\int\frac{1}{1+x^2}dx}=Ce^{\arctan x}$,代入初始条件 $y(0)=\pi$,得 $C=\pi$,因此,特解为 $y=\pi e^{\arctan x}$.

【例 6.9】求方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解.

【答案】 $y=(1+x)^2\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}+C\right]$..

【解析】带入通解公式后可得 $y=e^{\int\frac{2}{1+x}dx}\left(\int(1+x)^{\frac{5}{2}}e^{\int\frac{-2}{1+x}dx}dx+C\right)$,计算后可得通解

$y=(1+x)^2\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}+C\right]$.

【例 6.10】求微分方程的特解 $xy'+2y=x\ln x$,其中 $y(1)=-\frac{1}{9}$.

【答案】 $y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x$..

【解析】利用公式,其中 $p(x)=\frac{2}{x}$, $q(x)=\ln x$,可得通解为

$$y=e^{-\int\frac{2}{x}dx}[\int\ln x\, e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C]=e^{-2\ln x}[\int x^2\ln x dx+C]$$
$$=\frac{1}{x^2}[\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C]=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x+\frac{C}{x^2}.$$

代入初始条件 $y(1)=-\frac{1}{9}$,得 $C=0$,因此, $y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x$.

§3.高阶微分方程

一、可降阶的高阶微分方程（数一、数二）

1. $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程

微分方程 $y^{(n)}=f(x)$ 的右端仅含有自变量 x,对方程两边积分,得到一个 $n-1$ 阶的微分方程

$$y^{(n-1)}=\int f(x)\mathrm{d}x+C_1$$

同理可得 $y^{(n-2)}=\int\left[\int f(x)\mathrm{d}x+C_1\right]\mathrm{d}x+C_2$.

以此类推,接连积分 n 次,可得方程的含有 n 个任意常数的通解.

【例 6.11】求微分方程 $y'''=\mathrm{e}^{2x}-\cos x$ 的通解.

【答案】$y=\frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x}+\sin x+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3$.

【解析】将方程逐次还原即可得

$$y''=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-\sin x+C_1,$$

$$y'=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}+\cos x+C_1x+C_2$$

$$y=\frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x}+\sin x+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3.$$

2. $y''=f(x,y')$ 型的微分方程

方程 $y''=f(x,y')$ 的右端不显含未知函数 y.令 $y'=p$,则 $y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=p'$,代入原方程有 $p'=f(x,p)$.

这是一个关于变量 x, p 的一阶微分方程.设其通解为

$$p=\varphi(x,C_1)$$

将 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 回代,得到一个一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(x,C_1)$$

对它进行积分,得到原方程的通解为

$$y=\int\varphi(x,C_1)\mathrm{d}x+C_2.$$

【例 6.12】求微分方程$\left(1+x^2\right)y''=2xy'$满足初始条件$y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=3$的特解.

【答案】 $y=3x+x^3+1$.

【解析】令$y'=p, y''=p'$,代入原方程得$p'-\dfrac{2x}{1+x^2}p=0$.

利用齐次线性通解公式有$p=y'=C_1+C_1x^2$, 故$y=C_1x+\dfrac{C_1}{3}x^3+C_2$,又因为$y|_{x=0}=1$,

$y'|_{x=0}=3$,可得特解$y=3x+x^3+1$.

3. $y''=f(y,y')$型的微分方程

方程$y''=f(y,y')$中不明显地含自变量x.令$y'=p$,则

$$y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y},$$

原方程变为

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p),$$

这是一个关于变量y, p的一阶微分方程.设它的通解为

$$y'=p=\varphi(y,C_1)$$

分离变量并积分,便得原方程的通解为

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2.$$

【例 6.13】求微分方程$yy''-y'^2=0$的通解.

【答案】$y=C_2\mathrm{e}^{C_1x}$.

【解析】令 $y'=p$, $y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,代入原方程可得 $y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=p$,解后可得 $p=y'=C_1y$,故可得 $y=C_2\mathrm{e}^{C_1x}$.

二、 线性微分方程解的结构

1．一阶线性微分方程解的结构

(1)若 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 为一阶齐次线性方程的两个特解,则它们的线性组合 $k_1y_1(x)+k_2y_2(x)$ 仍为原方程的解.

(2) 若 $y^*(x)$ 为一阶非齐次方程的一个特解,而 $Cy(x)$ 为对应的一阶齐次线性方程的通解,则 $y=Cy(x)+y^*(x)$ 是此一阶非齐次线性方程的通解.

(3) 设 $y_1^*(x)$ 与 $y_2^*(x)$ 分别是 $y'+P(x)y=f_i(x)$ 的特解,$(i=1,2)$ 则 $y_1^*(x)+y_2^*(x)$ 是 $y'+P(x)y=f_1(x)+f_2(x)$ 的特解.

【例 6.14】设非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$, C 为任意常数,则该方程的通解是（ ）

(A) $C\left[y_1(x)-y_2(x)\right]$.　　　(B) $y_1(x)+C\left[y_1(x)-y_2(x)\right]$.

(C) $C\left[y_1(x)+y_2(x)\right]$.　　　(D) $y_1(x)+C\left[y_1(x)+y_2(x)\right]$.

【答案】(B).

2．高阶线性微分方程解的结构

(1)若 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 为二阶齐次线性方程的两个特解,则它们的线性组合 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 仍为原方程的解.特别地,当 $y_1(x)\neq\lambda y_2(x)$ (λ 为常数),也即 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性无关时,原方程的通解为 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$.

(2) 若 $y^*(x)$ 为二阶非齐次方程的一个特解,而 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 为对应的二阶齐次线

性方程的通解,则 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y^*(x)$ 是此二阶非齐次线性方程的通解.

(3) 设 $y_1^*(x)$ 与 $y_2^*(x)$ 分别是 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_i(x)$ 的特解,$(i=1,2)$ 则

$y_1^*(x)+y_2^*(x)$ 是 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$ 的特解.

【注】以上性质也可推广到 n 阶齐次和非齐次线性方程.

【例 6.15】已知 $y_1=1,y_2=x,y_3=x^2$ 是某二阶非齐次线性微分方程的三个解,则该方程的通解为____________.

【答案】 $y=C_1(x-1)+C_2(x^2-1)+1$.

【解析】根据解的结构可知 $y_2-y_1=x-1,y_3-y_1=x^2-1$ 是对应齐次方程的两个线性无关的解,故非齐次方程的通解是 $y=C_1(x-1)+C_2(x^2-1)+1$.(不唯一)

三、 常系数齐次线性微分方程

1. 二阶齐次、非齐次线性微分方程

二阶齐次线性方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$;

二阶非齐次线性方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$.

2. 二阶常系数齐次线性微分方程

在二阶齐次线性微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 中,如果 y' 和 y 的系数 $P(x),Q(x)$ 均为常数,即 $y''+py'+qy=0$,其中 p,q 是常数,称为二阶常系数齐次线性微分方程.

特征方程 $r^2+pr+q=0$,特征方程根的三种不同情形对应齐次方程通解的三种形式

特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的两个根 r_1,r_2	微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
两个不相等的实根 r_1,r_2	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
两个相等的实根 $r_1=r_2$	$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$
一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

【例 6.16】求微分方程 $y''-7y'+6y=0$ 的通解.

【答案】 $y=C_1e^x+C_2e^{6x}$.

【解析】特征方程 $r^2-7r+6=0$,特征根 $r_1=1, r_2=6$,

微分方程通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{6x}$.

【例 6.17】求微分方程 $y''-2y'+y=0$ 的通解.

【答案】 $y=(C_1+xC_2)e^x$.

【解析】特征方程 $r^2-2r+1=0$,特征根 $r_1=r_2=1$,

微分方程通解为 $y=(C_1+xC_2)e^x$.

【例 6.18】求微分方程 $y''-6y'+13y=0$ 的通解.

【答案】 $y=e^{3x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)$.

【解析】特征方程 $r^2-6r+13=0$.特征根 $r=3\pm 2i$,

微分方程通解 $y=e^{3x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)$.

3. n 阶常系数齐次线性微分方程

n 阶常系数齐次线性微分方程的一般形式是

$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$,其中 $p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}, p_n$ 都是常数.

特征方程 $r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0$,根据特征方程的根的形式,写出对应的微分方程的通解如下

特征方程的根	微分方程通解中的对应项
单实根 r	给出一项 Ce^{rx}
一对单复根 $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$	给出两项 $e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$
k 重实根 r	给出 k 项 $e^{rx}\left(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1}\right)$
一对 k 重复根 $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$	给出 $2k$ 项

	$e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x$ $+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$

【例 6.19】求方程 $y^{(4)}-2y'''+5y''=0$ 的通解.

【答案】 $y=C_1+C_2x+e^x\left(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x\right)$.

【解析】特征方程为 $r^4-2r^3+5r^2=0$,

解得特征根为 $r_1=r_2=0, r_{3,4}=1\pm 2i$,

故通解为 $y=C_1+C_2x+e^x\left(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x\right)$.

四、 二阶常系数非齐次线性微分方程

1．二阶常系数非齐次线性微分方程

二阶常系数非齐次线性微分方程的一般形式是

$$y''+py'+qy=f(x)$$

其中 p,q 是常数.其通解为 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y^*(x)$,其中 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 为对应的二阶常系数齐次线性方程的通解.

2．二阶常系数非齐次线性微分方程的特解

根据 $f(x)$ 的形式先确定特解 $y^*(x)$ 的形式,其中包含一些待定的系数,然后代入方程确定这些系数就得到特解 $y^*(x)$,常见的 $f(x)$ 的形式和相对应的特解 $y^*(x)$ 的形式如下

(1) $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ **型**

a. 若 λ 不是特征方程的根,则令 $y^*(x)=R_m(x)e^{\lambda x}$;

b. 若 λ 是特征方程的单根,则令 $y^*(x)=xR_m(x)e^{\lambda x}$;

c. 若 λ 是特征方程的重根,则令 $y^*(x)=x^2R_m(x)e^{\lambda x}$.

其中 $R_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 同次(m 次)的多项式.

【例 6.20】求微分方程 $y''-2y'-3y=3x+1$ 的通解.

【答案】 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{3}-x$.

【解析】特征方程为 $r^2-2r-3=0$, 特征根为 $r_1=-1,r_2=3$,设特解 $y^*=ax+b$,代入方程可得 $a=-1,b=\frac{1}{3}$,所以特解为 $y^*=\frac{1}{3}-x$.故,通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{3}-x$.

【例 6.21】求微分方程 $y''-5y'+6y=x\mathrm{e}^{2x}$ 的通解.

【答案】 $y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{3x}-x\left(\frac{1}{2}x+1\right)\mathrm{e}^{2x}$.

【解析】特征方程为 $r^2-5r+6=0$.特征根为 $r_1=2,r_2=3$,

特解设成 $y^*=x(ax+b)\mathrm{e}^{2x}$,将特解代入原非齐次方程,由此解得, $a=-\frac{1}{2},b=-1$.

因此特解为 $y^*=-x\left(\frac{1}{2}x+1\right)\mathrm{e}^{2x}$;

最后得原方程通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{3x}-x\left(\frac{1}{2}x+1\right)\mathrm{e}^{2x}$.

(2) $f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+Q_n(x)\sin\omega x\right]$ 型

a. 若 $\lambda+\omega i$ 不是特征方程的根,则令 $y^*=\mathrm{e}^{\lambda x}\left[R_m^{(1)}\cos\omega x+R_m^{(2)}\sin\omega x\right]$

b. 若 $\lambda+\omega i$ 是特征方程的根,则令 $y^*=x\mathrm{e}^{\lambda x}\left[R_m^{(1)}\cos\omega x+R_m^{(2)}\sin\omega x\right]$

其中 $R_m^{(1)}(x),R_m^{(2)}(x)$ 是 m 次多项式, $m=\max\{l,n\}$.

【例 6.22】求微分方程 $y''+y'-2y=2\cos 2x$ 的一个特解.

【答案】 $y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{x}-\frac{3}{10}\cos 2x+\frac{1}{10}\sin 2x$.

【解析】 其特征方程为$r^2+r-2=0$,特征根为$r_1=-2,r_2=1$,

设非齐次线性方程的特解为$y^*=a\cos 2x+b\sin 2x$.代入方程得$a=-\frac{3}{10},b=\frac{1}{10}$,因此$y^*=-\frac{3}{10}\cos 2x+\frac{1}{10}\sin 2x$.故原方程通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{x}-\frac{3}{10}\cos 2x+\frac{1}{10}\sin 2x.$$

【例 6.23】 微分方程$y''+y=x^2+1+\sin x$的特解形式可设为（　）

(A) $y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$.　(B) $y^*=ax^2+bx+c+A\sin x$.

(C) $y^*=x(ax^2+bx+c+A\sin x+B\cos x)$.　(D) $y^*=ax^2+bx+c+A\cos x$.

【答案】 (A).

【解析】 特征方程为$r^2+1=0$,故$r=\pm i$.因此,$y''+y=x^2+1$的特解应设为$y_1(x)=ax^2+bx+c$；$y''+y=\sin x$的特解应设为$y_2(x)=(A\sin x+B\cos x)\cdot x$,然后相加,选(A).