第二章　导数与微分

【考试要求　】

1. 理解导数和微分的概念,理解导数与微分的关系,理解导数的几何意义,会求平面曲线的切线方程和法线方程,了解导数的物理意义,会用导数描述一些物理量（数一、数二）,经济问题包含边际与弹性的概念（数三）,理解函数的可导性与连续性之间的关系.

2. 掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则,掌握基本初等函数的导数公式.了解微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性,会求函数的微分.

3. 了解高阶导数的概念,会求简单函数的高阶导数.

4. 会求分段函数的导数,会求隐函数和由参数方程所确定的函数（数一、数二）以及反函数的导数.

§1.导数概念

一、导数的定义

1.函数在一点处的导数

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，自变量 x 在 x_0 处有增量 Δx，相应地函数增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称函数在 x_0 处可导，同时称上述极限值为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数，记作 $f'(x_0)$，或 $y'\big|_{x=x_0}$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$ 等. 如果上述极限不存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导，同时称 x_0 为函数的不可导点.

【注】导数定义的两点式，令 $x=x_0+\Delta x$，则 $\Delta x=x-x_0$，于是 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

【例 2.1】 设函数 $f(x)=\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)\left(\mathrm{e}^{2x}-2\right)\cdots\left(\mathrm{e}^{nx}-n\right)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$（　　）

（A）$(-1)^{n-1}(n-1)!$.　　（B）$(-1)^{n}(n-1)!$.

（C）$(-1)^{n-1}n!$　　（D）$(-1)^{n}n!$.

【例 2.2】 已知 $f(0)=0, f'(0)=f'(1)=1$，求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-f(1)}{x}$；（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$；（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+3x)-f(1)}{x}$；

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-f(1-x)}{x}$；（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)}{1-\cos x}$.

【例 2.3】已知 $f(x)$ 连续，且 $f(x)$ 分别满足以下条件，判断 $f'(0)$ 是否存在：

（1）已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在；　（2）已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$ 存在；　（3）已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt[3]{x}}$ 存在.

2.单侧导数

左导数：$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

右导数：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

【注】 $f(x)$ 在点 x_0 处可导 $f(x)$ 在点 x_0 处左、右导数皆存在且相等.

【例 2.4】已知 $f(x)$ 连续，且 $f(x)$ 分别满足以下条件，判断 $f'(0)$ 是否存在：

（1）已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)}{x^2}$ 存在；（2）已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^3)}{x^3}$ 存在；（3）已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{x^2}$ 存在.

3.导函数

如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 I 内的每点处都可导，那么就称函数 $f(x)$ 在开区间 I 内可导，这时对于任意的 $x\in I$，都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数值，这样就构成了一个新的函数，这个函数叫做原来函数 $y=f(x)$ 的导函数，记作 y'，$f'(x)$ 或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，导函数简称导数.

【例 2.5】用导数定义证明下列求导公式：

（1）$\left(\mathrm{e}^{x}\right)' = \mathrm{e}^{x}$；　　　　（2）$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$.

二、导数的常用结论

1.奇偶性

如果 $f(x)$ 是奇函数且可导, 则 $f'(x)$ 是偶函数;

如果 $f(x)$ 是偶函数且可导, 则 $f'(x)$ 是奇函数.

2.周期性

如果 $f(x)$ 可导且以 T 为周期, 则 $f'(x)$ 也以 T 为周期.

3.函数的可导性与连续性之间的关系

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处一定连续；反之不然.

【例 2.6】讨论函数 $f\left(x\right)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性.

【例 2.7】设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0,\\ x^2 g(x), & x\leqslant 0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）

（A）极限不存在.　　（B）极限存在，但不连续.

（C）连续，但不可导.　　（D）可导.

三、导数的几何意义与物理意义

1.导数的几何意义

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处导数存在，则在几何上 $f'(x_0)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率，从而有

切线方程：$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

法线方程：$y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$，$f'(x_0)\neq 0$

【例 2.8】过原点作曲线 $y = \mathrm{e}^{x}$ 的切线，求切线方程.

2.导数的物理意义（数一、数二）

设物体作直线运动时, 路程 s 与时间 t 的函数关系为 $s=f(t)$, 如果 $f'(t_0)$ 存在, 则 $f'(t_0)$ 表示物体在时刻 t_0 时的瞬时速度.

§2.导数计算

一、常用导数公式

$(C)'=0$ （C 为常数）

$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$ （α 为实常数）

$(\sin x)'=\cos x$

$(\cos x)'=-\sin x$

$(\tan x)'=\sec^2 x$

$(\cot x)'=-\csc^2 x$

$(\sec x)'=\sec x\tan x$

$(\csc x)'=-\csc x\cot x$

$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}\quad(a>0且a\neq 1)$

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

$(a^x)'=a^x\ln a\ (a>0且a\neq 1)$

$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$

$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

二、四则运算求导法则

$$[f(x)\pm g(x)]' = f'(x)\pm g'(x)$$

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \left(g(x)\neq 0\right)$$

三、复合函数求导法则

设 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，如果 $\varphi(x)$ 在 x 处可导，$f(u)$ 在对应点 u 处可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x 处可导，且有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'[\varphi(x)]\varphi'(x)$.

【例 2.9】求下列函数的导数：

（1）$y=\ln\cos e^{x}$；　（2）$y=\cos x^{2}\sin^{2}\dfrac{1}{x}$；　（3）$y=x^{2x}$.

【例 2.10】设 $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$，则 $y''\big|_{x=0}=$____________.

四、分段函数求导

给定分段函数，其求导方法如下：

非分段点处按对应的解析式及法则求导； 分段点处严格按照定义求导.

【例 2.11】设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0,\end{cases}$ 其中 $\varphi(x)$ 具有二阶导数，且 $\varphi(0)=1$，$\varphi'(0)=0$.

（1）确定 a 的值，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.　　（2）求 $f'(x)$.

五、 隐函数求导

设 $F(x,y)=0$ 确定了函数关系 $y=f(x)$，则其导数计算如下：在方程 $F(x,y)=0$ 两侧同时对 x 求导（注意 y 是 x 的函数），得 $G(x,y,y')=0$，从中解出 y' 即可.

【例 2.12】方程 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$ 确定了 $y=f(x)$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

【例 2.13】已知 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定了隐函数 $y(x)$，求 $y''(0)$.

六、反函数求导

设 $y = f(x)$ 与 $x = g(y)$ 互为可导的反函数, 且 $g'(y) \neq 0$, 则 $f'(x) = \dfrac{1}{g'(y)}$.

【例 2.14】设 $y(x)=x^3+\mathrm{e}^x$，其反函数为 $x=\varphi(y)$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=1}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right|_{y=1}$.

七、参数方程所确定的函数求导（数一、数二）

若$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$， $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \dfrac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$.

【例 2.15】设 $\begin{cases} x = 1 + t^2, \\ y = \cos t, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

【例 2. 16】设$\begin{cases} x = \arctan t, \\ 2y - ty^2 + \mathrm{e}^t = 5, \end{cases}$求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

八、高阶导数

1.高阶导数的定义

如果函数 $y=f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 仍是可导的,则把 $f'(x)$ 的导数称为 $f(x)$ 的二阶导数,记作 y'', $f''(x)$ 或 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ 等,也称 $f(x)$ 二阶可导.

类似地,把 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数,称为 $f(x)$ 的 n 阶导数记作 $y^{(n)}$ 、 $f^{(n)}(x)$ 等,这时也称 $f(x)$ 是 n 阶可导的.

习惯上,称二阶及二阶以上的导数为高阶导数.

【例 2.17】已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则当 n 为大于 2 的正整数时 $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是（　　）

（A）$n![f(x)]^{n+1}$．　（B）$n[f(x)]^{n+1}$．　（C）$[f(x)]^{2n}$．　（D）$n![f(x)]^{2n}$．

2.常用的高阶导数公式

（1）$\left(\mathrm{e}^{ax+b}\right)^{(n)}=a^n\cdot \mathrm{e}^{ax+b}$；

（2）$\sin^{(n)}(ax+b)=a^n\cdot\sin(ax+b+n\cdot\frac{\pi}{2})$；

（3）$\cos^{(n)}(ax+b)=a^n\cdot\cos(ax+b+n\cdot\frac{\pi}{2})$；

（4）$\ln^{(n)}(ax+b)=a^n\cdot\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(ax+b)^n}$；

（5）$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=a^n\cdot\frac{(-1)^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$.

【例 2.18】求下列函数的 n 阶导（$n\geqslant 1$）：

（1）$y=\cos^2 x$；　　　　（2）$y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

3.莱布尼茨公式

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}=C_n^0u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''+\cdots+C_n^nuv^{(n)}$$

【例 2.19】已知 $y=x^2\mathrm{e}^x$，求 $y^{(n)}(x)$.

§3.微分

一、微分的定义

设函数 $f(x)$ 在某区间内有定义, x_0 及 $x_0+\Delta x$ 在这区间内, 如果函数的增量

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

可表示为:

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0)$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数, $o(\Delta x)$ 是 $\Delta x \to 0$ 时比 Δx 高阶的无穷小, 则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处是可微的, 而 $A\Delta x$ 叫做 Δy 的线性主部, 也叫函数在该点处的微分, 记作 $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}$, 即

$$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0} = A\Delta x.$$

二、可微与可导的关系

$f(x)$ 在 x_0 处可微 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0} = A\Delta x = f'(x_0)\Delta x$，即 $A = f'(x_0)$.

一般地，若 $y = f(x)$ 可导，则 $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$. 所以导数 $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 也称为微商，就是微分之商的含义.

三、微分的运算法则

1.四则运算微分法则

$$\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v;$$

$$\mathrm{d}(\mathrm{C}u) = C\mathrm{d}u;$$

$$\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v;$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}\ (v \neq 0);$$

2.复合函数微分法则

已知 $y=f[g(x)]$，则 $\mathrm{d}y=f'[g(x)]g'(x)\mathrm{d}x$. 也可以表示如下：设 $u=g(x)$， $y=f(u)$，则 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$. 变量 u 不管是作为自变量还是作为中间变量，微分形式 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$ 保持不变，这一性质称为微分形式的不变性.

【例 2.20】 设 $f(x)$ 可导且 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$，则 $\Delta x \to 0$ 时 $f(x)$ 在 x_0 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是（　　）

（A）与 Δx 等价的无穷小.　　（B）与 Δx 同阶的无穷小.

（C）比 Δx 低阶的无穷小.　　（D）比 Δx 高阶的无穷小.

【例 2.21】设函数 $f(u)$ 可导，且 $y=f(x^2)$ 当自变量 x 在 $x_0=-1$ 的基础上产生增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数值增量 Δy 的线性主部为 0.1，求 $f'(1)$.

【例 2.22】填空:

（1） $\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}$ ________.

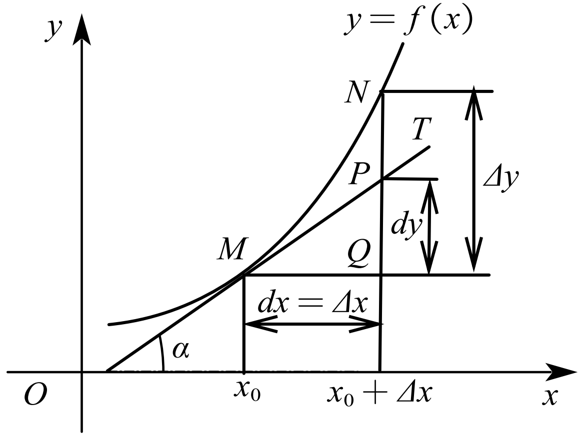
（2） $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \mathrm{d}$ ________.

（3） $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \mathrm{d}$ ________.

（4） $\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}$ ________.

四、微分的几何意义

在直角坐标系中，函数 $y=f(x)$ 的图形是一条曲线，对于某一固定的 x_0 值，曲线上有一个确定点 $M(x_0,y_0)$，当自变量 x 有微小增量 Δx 时，得到曲线上的另一点 $N(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$，如下图：



$$MQ=\Delta x,\quad QN=\Delta y,$$

过点 M 做曲线的切线 MT，它的倾角是 α，则 $QP=MQ\cdot\tan\alpha=\Delta x\cdot f'(x_0)$，

即

$$\mathrm{d}y=QP,$$

从而可得微分的几何意义是切线在 $(x_0,f(x_0))$ 处纵坐标的增量.

【例 2.23】设 $f(x)$ 满足 $f'(x)>0, f''(x)>0,$ 当自变量在 x_0 的基础上产生增量为 Δx（$\Delta x>0$）时, 试确定 $\Delta y, \mathrm{d}y, 0$ 三者间的大小关系.