第二章　矩阵

【考试要求】

1．理解矩阵的概念，了解单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、三角矩阵、对称矩阵和反对称矩阵以及它们的性质.

2．掌握矩阵的线性运算、乘法、转置以及它们的运算规律，了解方阵的幂与方阵的乘积的行列式的性质.

3．理解逆矩阵的概念，掌握逆矩阵的性质以及矩阵可逆的充分必要条件，理解伴随矩阵的概念，会用伴随矩阵求逆矩阵.

4．理解矩阵初等变换的概念，了解初等矩阵的性质和矩阵等价的概念，理解矩阵的秩的概念，掌握用初等变换求矩阵的秩和逆矩阵的方法.

5．了解分块矩阵及其运算.

§1.矩阵的概念

1. 矩阵的定义

由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m\times n$ 矩阵, 记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$, $\boldsymbol{A}$, $\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ 或 $\left(a_{ij}\right)$, 其中 a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 (i,j) 元素或 (i,j) 元.

如果两个矩阵的行数相等、列数也相等，则称它们为**同型矩阵**.

如果两个矩阵是同型矩阵，且对应元素相等，则称这两个**矩阵相等**.

在不引起混淆的情况下，我们一般用大写字母 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 表示一个矩阵.

2. 特殊的矩阵

(1) 行(列)矩阵： 只有一行(列)的矩阵，又称为行(列)向量，一般用小写希腊字母 α，β，γ 表示.

例：$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

(2) 零矩阵： 元素都是零的矩阵称为零矩阵，一般用大写字母 O 表示.

(3) n 阶矩阵（方阵）： 行数与列数都等于 n 的矩阵称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵.

【注】以下特殊矩阵均为方阵.

(4) 对角矩阵： 不在主对角线上的元素都是 0 的矩阵，简称对角阵，一般用大写希腊字母 $\boldsymbol{\Lambda}$ 表示.

例：$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}$.

(5) 单位矩阵： 在主对角线上的元素都是1，其它元素都是 0 ，一般用大写字母 $\boldsymbol{E}$ 表示.

例：$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

(6) 数量矩阵： 主对角线上元素都相等的对角矩阵. 一般用 $\lambda\boldsymbol{E}$ 表示.

例：$\lambda\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda\end{pmatrix}$.

(7) 上（下）三角矩阵：

例：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}\end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$.

(8) 对称矩阵：满足 $a_{ij}=a_{ji}$ 的方阵.

例：$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & x & y \\ x & b & z \\ y & z & c \end{pmatrix}.$$

(9) 反对称矩阵：满足 $a_{ij}+a_{ji}=0$ 的方阵.

例：$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix}.$$

§2.矩阵的运算

1. 矩阵的加法

同型的两个矩阵方可相加，加法的法则是每个位置对应元素相加.

例：
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}.$$

矩阵的加法满足下列运算规律：

（1）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.　　（2）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

【例 2.1】填空

（1）$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix};$$

（2）$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{vmatrix}.$$

2. 矩阵的数乘

$k\boldsymbol{A}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 中每个元素都乘以 k.

例. $$k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}.$$

矩阵的数乘满足下列运算规律：

（1）$(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})$.　（2）$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$.　（3）$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$.

【例2.2】已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{pmatrix}$，$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}$，$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{vmatrix}$ 则下列选项正确的是(　　)

①$\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{A}$；　②$\boldsymbol{B}=4\boldsymbol{A}$；　③$|\boldsymbol{B}|=2|\boldsymbol{A}|$；　④$|\boldsymbol{B}|=4|\boldsymbol{A}|$.

（A）①③.　（B）②③.　（C）①④.　（D）②④.

3. 矩阵的乘法

$$\boldsymbol{A}_{m\times s}\boldsymbol{B}_{s\times n}=\boldsymbol{C}_{m\times n}$$

两矩阵相乘，左边矩阵的列数要与右边矩阵的行数相等. 其中，$\boldsymbol{C}_{m\times n}$ 的第 i 行第 j 列的元素

$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$（$i=1,2,\cdots,m$， $j=1,2,\cdots,n$）.

例：已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$.

矩阵的乘法满足下列运算规律：

（1） $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$.　　（2） $k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$.

（3） $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$, $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$.

【注 1】矩阵乘法不满足交换律，即在一般情形下，$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 不一定相等（若方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换）；

【注 2】$\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}$ 可交换，即 $\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{A}$；

【注 3】矩阵乘法不满足消去律.

【例 2.3】已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

【例 2.4】计算$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

4. 矩阵的转置

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵.

由转置的定义可知，对称矩阵即满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$ 的矩阵，反对称矩阵即满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$ 的矩阵.

矩阵的转置有以下性质：

（1）$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；（2）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；（3）$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；（4）$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

【例 2.5】 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵，证明 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 也是对称阵.

【例 2.6】 已知三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的所有元素之和.

5. 方阵的幂

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，则 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{A}$ （k 个 $\boldsymbol{A}$ 相乘）.

矩阵的幂满足下列运算规律：

（1） $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$ ；　（2） $(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$.

【注】一般地，$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^k$ 与 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$ 不一定相等.

【例 2.7】已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^3$.

【例 2.8】已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{2023}$.

6. 方阵的多项式

设 x 的多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{m-1}x^{m-1}+a_mx^m$，则方阵 $\boldsymbol{A}$ 的多项式

$$f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+a_m\boldsymbol{A}^m.$$

【注】一般地 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\neq\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\neq\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$，

但是 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$.

7. 方阵的行列式

由 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的元素所构成的 n 阶行列式，称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，记作 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det \boldsymbol{A}$.

矩阵的行列式具有以下性质：

（1） $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\Rightarrow|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$ ；（2） $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$ ；（3） $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$ ；

（4） $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$ ；（5） $|\boldsymbol{A}^k|=|\boldsymbol{A}|^k$.

【注 1】以上 $\boldsymbol{A}$ ， $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵.

【注 2】一般地， $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 与 $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$ 不一定相等.

【例 2.9】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，求 $|\boldsymbol{B}|$.

【例 2. 10】设三阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$，求 $|\boldsymbol{B}|$.

§3.伴随矩阵与逆矩阵

1. 伴随矩阵的定义

已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，由 $|\boldsymbol{A}|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 A 的伴随矩阵.

2.伴随矩阵的性质

（1）$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$；

（2）$(k\boldsymbol{A})^* = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$；

（3）$(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$；

（4）$(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$；

（5）$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$.

3. 逆矩阵的定义

对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，如果存在一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E},$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，$\boldsymbol{B}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

【注】可逆矩阵的逆矩阵是唯一的.

4. 可逆的充要条件

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件为 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

推论：若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵且满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ （或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$ ），则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

【例 2.11】判断下列矩阵是否可逆，若可逆，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

（1） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\3&0&3\end{pmatrix}$;

（2） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$.

【例 2.12】 解矩阵方程 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

【例 2.13】已知 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，求 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}$.

【例 2.14】已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$，判断 $\boldsymbol{A}$ 是否可逆，若可逆，求出 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

5. 逆矩阵的性质

（1）若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也可逆，且 $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}$.

（2）若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，常数 $k\neq 0$，则 $k\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\left(k\boldsymbol{A}\right)^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$.

（3）若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}$.

（4）若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{*}$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{*})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{*}=\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$.

【例 2.15】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{2}$，求 $|(2\boldsymbol{A})^{-1}-5\boldsymbol{A}^{*}|$.

【例 2.16】设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{3}$，求 $|4\boldsymbol{A}-(3\boldsymbol{A}^{*})^{-1}|$.

（5）若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

推广：$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_m)^{-1}=\boldsymbol{A}_m^{-1}\boldsymbol{A}_{m-1}^{-1}\ldots\boldsymbol{A}_1^{-1}$，$(\boldsymbol{A}^n)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^n$.

（6）若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$.

【注】$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 皆可逆，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 不一定可逆，即使 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆，一般的

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\neq\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}.$$

【例 2.17】已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$，求 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$，$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$.

§4.分块矩阵

1. 分块矩阵的定义

用一些横线和竖线将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分成若干个小矩阵，每个小矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的子块，以子块为元素的矩阵叫做分块矩阵.

2. 分块矩阵的加法

设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵，且采用相同的分块法，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 等于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 对应子块相加.

例：已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{D}_1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{B}_2\\ \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{D}_2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2\\ \boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{D}_1+\boldsymbol{D}_2\end{pmatrix}$.

3. 分块矩阵的数乘

数与分块矩阵相乘，指这个数乘进分块矩阵的每一个子块.

例：$\lambda\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{A} & \lambda\boldsymbol{C}\\ \lambda\boldsymbol{B} & \lambda\boldsymbol{D}\end{pmatrix}$

4. 分块矩阵的乘法

矩阵可分块之后再做乘法运算，与普通矩阵乘法运算法则相同．由于矩阵乘法要求左边矩阵的列数等于右边矩阵的行数，所以要求左边矩阵的列分法和右边矩阵的行分法相同．

例：设矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \hline -1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 1\\ \hline 1 & 0 & 4 & 1\\ -1 & -1 & 2 & 0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{B}_{21}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_{22}=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$，于是 $\boldsymbol{AB}=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 1\\ \hline -2 & 4 & 3 & 3\\ -1 & 1 & 3 & 1\end{array}\right)$.

【例 2.18】 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 2 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，化简 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^* \\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.

5. 分块矩阵的转置

先将整个矩阵转置，然后每个子块也转置.

例：$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

6. 分块方阵的逆矩阵

（1）$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}$；$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$

（2）$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & & \\ & \boldsymbol{B} & \\ & & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & & \\ & \boldsymbol{B}^{-1} & \\ & & \boldsymbol{C}^{-1} \end{pmatrix}$；$\begin{pmatrix} & & \boldsymbol{A} \\ & \boldsymbol{B} & \\ \boldsymbol{C} & & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & & \boldsymbol{C}^{-1} \\ & \boldsymbol{B}^{-1} & \\ \boldsymbol{A}^{-1} & & \end{pmatrix}$.

【注】其中 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 都是可逆矩阵.

【例 2.19】求下列矩阵的逆矩阵

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&1\\0&0&3&1\end{pmatrix}$；（2）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&2&0\\0&0&0&3\\1&5&0&0\\2&2&0&0\end{pmatrix}$.

7. 分块方阵的行列式

设 $\boldsymbol{A}$ 是 m 阶方阵，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，则

（1）$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$；

（2）$\begin{vmatrix} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

【例 2.20】求下列行列式

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；　　（2）$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$.

§5. 矩阵的初等变换

1. 矩阵的初等变换

（1）定义： 下列三种变换称为矩阵的初等行（列）变换，统称为矩阵的初等变换.

（Ⅰ）互换两行（列）；

例：$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

（II）用数 $k \neq 0$ 乘以某一行（列）的所有元素；

例：$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{kr_1} \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

（III）把某一行（列）的所有元素的 k 倍加到另一行（列）对应的元素上去.

例：$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+2r_2} \begin{pmatrix} a_{11}+2a_{21} & a_{12}+2a_{22} & a_{13}+2a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

(2) 矩阵等价: 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，记 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$. 矩阵的等价具有传递性，即 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$ 且 $\boldsymbol{B} \cong \boldsymbol{C}$ ，则 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{C}$.

2. 初等变换化行阶梯形与行最简形

（1）行阶梯形矩阵： 矩阵通过初等行变换，可化为行阶梯形矩阵，其特征为可画出一条阶梯线，线的下方全是 0；每个台阶只有一行，阶梯线后的第一个元素为非零元素（非零元素所在位置称为台角）. 行阶梯形矩阵不唯一.

例：$\begin{pmatrix} a & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & b & y_1 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

（2）行最简形矩阵（特殊的行阶梯形矩阵）： 矩阵通过初等行变换，可化为行最简形矩阵，其特征为非零行的第一个非零元素为1，且这些1所在列的其它元素都为0．行最简形矩阵是唯一的.

例：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

【例 2.21】把下列矩阵化为行最简形

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$；

（2）$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$.

（3）标准形矩阵（特殊的行最简矩阵）： $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}_{m\times n}$ 左上角单位矩阵，其他为零．可在行最简形基础上通过初等列变换得到．标准形矩阵是唯一的．

例：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$．

3. 初等矩阵

（1）定义： 单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

(2）三种初等矩阵：

（Ⅰ）$\boldsymbol{E}$ 作变换 $r_i \leftrightarrow r_j$（或 $c_i \leftrightarrow c_j$），得初等矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}$．

例：$$\boldsymbol{E}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

（Ⅱ）$\boldsymbol{E}$ 作变换 $r_i \times k$（或 $c_i \times k$）（$k \neq 0$），得初等矩阵 $\boldsymbol{E}_i(k)$.

例：$$\boldsymbol{E}_2(3)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

（Ⅲ）$\boldsymbol{E}$ 作变换 $r_i + kr_j$（或 $c_j + kc_i$），得初等矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}(k)$.

例：$\boldsymbol{E}_{12}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

（3）初等矩阵的运算：

（Ⅰ）初等矩阵的行列式，即单位阵做一次初等变换后的行列式.

$$\left|\boldsymbol{E}_{ij}\right| = -1,\ \left|\boldsymbol{E}_{i}(k)\right| = k,\ \left|\boldsymbol{E}_{ij}(k)\right| = 1.$$

（Ⅱ）初等矩阵均可逆，而且初等矩阵的逆矩阵是同类型的初等矩阵.

$$\boldsymbol{E}_{ij}^{-1}=\boldsymbol{E}_{ij}, \quad \boldsymbol{E}_{i}^{-1}(k)=\boldsymbol{E}_{i}(\frac{1}{k}), \quad \boldsymbol{E}_{ij}^{-1}(k)=\boldsymbol{E}_{ij}(-k).$$

（Ⅲ）初等矩阵的伴随即行列式乘其逆.

$$\boldsymbol{E}_{ij}^{*}=-\boldsymbol{E}_{ij},\quad \boldsymbol{E}_{i}^{*}(k)=k\boldsymbol{E}_{i}(\frac{1}{k}),\quad \boldsymbol{E}_{ij}^{*}(k)=\boldsymbol{E}_{ij}(-k).$$

（Ⅳ）初等矩阵的转置仍是初等矩阵

$$\boldsymbol{E}_{ij}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}_{ij}，\ \boldsymbol{E}_{i}^{\mathrm{T}}(k) = \boldsymbol{E}_{i}(k)，\ \boldsymbol{E}_{ij}^{\mathrm{T}}(k) = \boldsymbol{E}_{ji}(k).$$

【例 2.22】判断下列矩阵是否是初等矩阵，如果是，写出它的逆矩阵.

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;　　（2）$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

（3）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;　　（4）$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(4) 初等矩阵的性质:

性质 1: 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作一次行(列)变换等价于 $\boldsymbol{A}$ 的左(右)边乘以一个相应的初等矩阵.

推论 1: 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作 k 次行(列)变换等价于 $\boldsymbol{A}$ 的左(右)边乘以 k 个相应的初等矩阵.

【例 2.23】已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 用 $\boldsymbol{A}$ 表示如下，根据初等矩阵的性质，用行列变换说明 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的关系.

（1）$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}$；（2）$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$；（3）$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.

【例 2.24】已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过如下变换变成 $\boldsymbol{B}$，根据初等矩阵的性质，用 $\boldsymbol{A}$ 表示 $\boldsymbol{B}$.

（1）$\boldsymbol{A} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \boldsymbol{B}$；（2）$\boldsymbol{A} \xrightarrow{2r_1} \boldsymbol{B}$；（3）$\boldsymbol{A} \xrightarrow{c_1 - 2c_3} \boldsymbol{B}$.

【例 2.25】$\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，$\boldsymbol{A} \xrightarrow{r_1+r_2} \boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B} \xrightarrow{c_2-c_1} \boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{C}=$（　　）.

（A）$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$　　（B）$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}$　　（C）$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$　　（D）$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$

【例 2.26】 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+2a_{11} & a_{32}+2a_{12} & a_{33}+2a_{13} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{B}=$（　　）

（A） $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{A}$ （B） $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{A}$ （C） $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2$ （D） $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_3$

【例 2.27】 计算 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

性质 2： 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 等于有限个初等矩阵的乘积.

推论 2：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次行列变换之后可化为单位矩阵.

推论 3：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的充要条件是存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PAQ}$.

4. 利用初等行变换求解矩阵方程

（1）求解方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$（$\boldsymbol{A}$ 可逆）.

解法：$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\xrightarrow{r}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$.

【注】若解方程 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$ （$\boldsymbol{A}$ 可逆），则可两边同时转置：$\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，$\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right)\xrightarrow{r}\left(\boldsymbol{E},\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\right)$.

【例 2.28】设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{B}$.

（2）求 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，可看作解方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{E}$ （若 $\boldsymbol{A}$ 可逆）.

解法：$\left(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}\right)\xrightarrow{r}\left(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1}\right)$.

【例 2.29】用行变换求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

§6. 矩阵的秩

1. 秩的定义

(1) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 r 阶子式： 在 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，任取 r 行和 r 列（$0\leqslant r\leqslant m, 0\leqslant r\leqslant n$），位于这些行列交叉处的 r^2 个元素，不改变它们在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中所处的位置而得到的 r 阶行列式，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 r 阶子式.

【注 1】矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 1 阶子式就是 $\boldsymbol{A}$ 中的元素.

【注 2】n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 阶子式就是 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素的余子式

【注 3】n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 阶子式就是 $|\boldsymbol{A}|$.

(2) 矩阵 A 的秩： 如果矩阵 A 中存在 r 阶子式不为 0，而 A 的所有的 $r+1$ 阶子式（在存在的情况下）全为 0，则该 r 阶子式叫做 A 的最高阶非零子式，r 叫做 A 的秩，记作 $r(A)$. 规定零矩阵的秩为 0 .

【注】若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，则 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式就是 $|\boldsymbol{A}|$，且 $r(\boldsymbol{A}) = n$．

【例 2.30】命题判断

（1）3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，若 $r(\boldsymbol{A})=3$，则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$；

（2）4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，若 $r(\boldsymbol{A})=2$，所有 2 阶子式均不为 0；

（3）4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，若 $r(\boldsymbol{A})=2$，所有 3 阶子式均为 0.

【例 2.31】利用定义求下列矩阵的秩.

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -5\\ 4 & 7 & 1\end{pmatrix}$;

（2）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

2. 秩的计算

$\boldsymbol{A}$ 化为行阶梯形矩阵的非零行数（初等变换后矩阵的秩不变）.

【注】非零行指的是该行元素不全为 0 .

【例 2.32】 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & -4 & 4\end{pmatrix}$，求 $r(\boldsymbol{A})$.

【例 2. 33】已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & a & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$，且 $r(A)=2$，求 a．

3. 秩的性质

（1）$0 \leqslant r(\boldsymbol{A}_{m\times n}) \leqslant \min\{m,n\}$；

（2）$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = r(\boldsymbol{A})$；

（3）若 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 可逆，则 $r(\boldsymbol{PAQ}) = r(\boldsymbol{A})$；

【例 2. 34】设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1&2&4\\0&2&0&1\\0&0&3&-1\\0&0&0&4\end{pmatrix}$，则 $r(\boldsymbol{BA}+2\boldsymbol{A})=$ ________.

（4）若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times l}=\boldsymbol{O}$，则 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$；

【例 2.35】已知 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}\neq\boldsymbol{O}$，使 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$ 则（　　）

（A）当 $t=6$ 时，$r(\boldsymbol{P})=1$.　　（B）当 $t=6$ 时，$r(\boldsymbol{P})=2$.

（C）当 $t\neq6$ 时，$r(\boldsymbol{P})=1$.　　（D）当 $t\neq6$ 时，$r(\boldsymbol{P})=2$.

（5）已知 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n, & r(\boldsymbol{A})=n, \\ 1, & r(\boldsymbol{A})=n-1, \\ 0, & r(\boldsymbol{A})<n-1. \end{cases}$

【例 2.36】 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵的秩等于 1，则必有（　　）

（A）$a=b$ 或 $a+2b=0$．　　（B）$a=b$ 或 $a+2b\neq 0$．

（C）$a\neq b$ 且 $a+2b=0$．　　（D）$a\neq b$ 且 $a+2b\neq 0$．

（6）$r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})=r(k\boldsymbol{A})$，其中$k\neq 0$；

（7）$\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}\leqslant r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$；

（8）$r(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$；

（9）$r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\leqslant \min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$.

【例 2.37】已知 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 n 维列向量，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，证明：$r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$．