第一章 函数、极限、连续

考试内容

函数的概念及表示法 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性 复合函数、反函数、分段函数和隐函数 基本初等函数的性质及其图形 初等函数 函数关系的建立

数列极限与函数极限的定义及其性质 函数的左极限和右极限 无穷小量和无穷大量的概念及其关系 无穷小量的性质及无穷小量的比较 极限的四则运算 洛必达（L'Hospital）法则 极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则 两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$$

函数连续的概念 函数间断点的类型 初等函数的连续性 闭区间上连续函数的性质

考试要求

1. 理解函数的概念, 掌握函数的表示法, 会建立应用问题的函数关系；

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性；

3. 理解复合函数及分段函数的概念, 了解反函数及隐函数的概念；

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形, 了解初等函数的概念；

5. 理解极限的概念, 理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系；

6. 掌握极限的性质及四则运算法则；

7. 掌握极限存在的两个准则, 并会利用它们求极限, 掌握利用两个重要极限求极限的方法；

8. 理解无穷小量、无穷大量的概念, 掌握无穷小量的比较方法, 会用等价无穷小量求极限；

9. 掌握用洛必达法则求未定式极限的方法.

10. 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续）, 会判别函数间断点的类型；

11. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性, 理解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理）, 并会应用这些性质.

§1. 函数

一、函数

1. 定义

设 D 是一个非空的实数集, 如果有一个对应法则 f, 对每一个 $x\in D$, 总有唯一确定的值 y 与之对应，则这个对应法则 f 称为定义在 D 上的一个函数, 记为 $y=f(x)$, 称 x 为函数的自变量，y 为函数的因变量或函数值，D 称为函数的定义域，并把实数集 $R_f=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域.

【例 1. 1】 设 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$, $f\left[\varphi(x)\right]=1-x$, 且 $\varphi(x)\geqslant 0$, 求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

【答案】 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，$x\leqslant 0$.

【解析】 因为 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$, $f\left[\varphi(x)\right]=1-x$, 所以 $f\left[\varphi(x)\right]=\mathrm{e}^{\varphi^2(x)}=1-x$, 即

$\varphi^2(x)=\ln(1-x)$，又 $\varphi(x)\geqslant 0$，故 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，从而其定义域为 $\begin{cases}1-x>0,\\ \ln(1-x)\geqslant 0,\end{cases}$ 即

$x\leqslant 0$.

2. 函数的性质

（1）有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义,若存在正数 M，使得对任意的 $x\in I$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上是有界的. 否则, 称 $f(x)$ 在该区间上无界.

【注 1】 对于有界性的考察必须基于确定的区间；

【注 2】 常见的有界函数:

$f(x)=\sin x,\quad |f(x)|\leqslant 1$；$f(x)=\cos x,\quad |f(x)|\leqslant 1$.

（2）奇偶性

设函数 $f(x)$ 在关于原点对称的区间 I 上有定义, 若对任意 $x\in I$, 都有 $f(-x)=-f(x)$, 则称 $f(x)$ 在 I 上是奇函数；若对任意 $x\in I$, 都有 $f(-x)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 在 I 上是偶函数.

【注】 奇函数的图形关于原点对称, 偶函数的图形关于 y 轴对称.

【例 1. 2】 判断下列函数的奇偶性:

（1） $f(x)=x\sin x$；

（2） $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$；

（3） $y(x)=f(x)-f(-x)$.

【答案】（1）偶；（2）奇；（3）奇.

【解析】（1） $f(-x)=-x\sin(-x)=x\sin x$，故 $f(x)$ 是偶函数；

（2）定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=\ln\dfrac{\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x+\sqrt{x^2+1}}$

$=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{-1}=-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$，故 $f(x)$ 是奇函数；

（3） $y(-x)=f(-x)-f(x)=-y(x)$，故 $f(x)$ 是奇函数.

（3）周期性

设 $f(x)$ 在 I 上有定义,如果存在常数 $T\neq 0$,使得对任意的 $x\in I$,都有 $x+T\in I$ 且 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 是周期函数,称 T 为 $f(x)$ 的周期.

【注】周期函数的周期有无数个，通常函数的周期指最小正周期.

（4）单调性

设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对 I 上任意的 $x_1<x_2$,都有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调递增；若对 I 上任意的 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调递减.

【注】函数的单调性是基于区间的概念.

二、复合函数、反函数、分段函数、隐函数、参数方程所确定的函数

1. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域是 D_f，函数 $u=\phi(x)$ 的定义域是 D_ϕ，值域是 R_ϕ．若 $R_\phi\subset D_f$，则称函数 $y=f[\phi(x)]$ 为复合函数，它的定义域是 $\{x|x\in D_\phi,\phi(x)\in D_f\}$．$u$ 称为中间变量，x 称为自变量.

【例 1.3】设 $f(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ 2+x, & x>0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

【答案】 $f[g(x)]=\begin{cases}2+x, & x\geqslant 0,\\ 2+x^2, & x<0.\end{cases}$

【解析】 $f[g(x)]=\begin{cases}2-g(x), & g(x)\leqslant 0,\\ 2+g(x), & g(x)>0,\end{cases}$ 又 $g(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 从而

$$f\left[g(x)\right]=\begin{cases}2+x, & x\geqslant 0,\\ 2+x^2, & x<0.\end{cases}$$

2. 反函数

设单调函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R_f．其中 x 是自变量，y 是因变量，f 是对应法则，表示已知 x 求 y．反之，若对于每一个 $y\in R_f$，都存在唯一的 $x\in D$，使得 $y=f(x)$，则其确定了反函数 $x=f^{-1}(y)$，此时 y 是自变量，x 是因变量．由于习惯上自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，所以 $y=f(x)$ 的反函数也常记为 $y=f^{-1}(x)$，此时定义域为 R_f，值域为 D．函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称．

【例 1. 4】 求 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 的反函数．

【答案】 $x=f^{-1}(y)=\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-y}\right)$ 或 $y=f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)$．

【解析】

$$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Rightarrow \mathrm{e}^y=x+\sqrt{x^2+1}\Rightarrow \mathrm{e}^y-x=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow\left(\mathrm{e}^y-x\right)^2=x^2+1$$

$$\Rightarrow \mathrm{e}^{2y}-2x\mathrm{e}^y+x^2=x^2+1\Rightarrow x=f^{-1}(y)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-y}\right)\text{或 } y=f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right).$$

3. 分段函数

在自变量的不同变化范围内用不同表达式表示的函数称为分段函数．常见的分段函数：

（1）绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

（2）最大值、最小值函数 $y=\max\left\{f(x),g(x)\right\}$，$y=\min\left\{f(x),g(x)\right\}$．

（3）取整函数 $y=[x]$（表示不超过 x 的最大整数），在 x 为整数时分段．性质：$x-1<[x]\leqslant x$．

4. 隐函数

形如 $y=f(x)$ 的函数称为显函数，由方程 $F(x,y)=0$ 确定的 $y=y(x)$ 称为隐函数，有些隐函数可以化为显函数，而有些隐函数则不能化为显函数．

5. 参数方程所确定的函数（数一、数二）

形如 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}$ 的为参数方程，其本质是 y 关于 x 的复合函数（t 为中间变量）．

三、初等函数

1. 基本初等函数

（1）幂函数 $y=x^\alpha$（α 是实数）．

a. 定点：$(1,1)$；定义域和值域取决于α的值；

b. 单调性：当$\alpha>0$时，$y=x^{\alpha}$在$(0,+\infty)$上单调递增；当$\alpha<0$时，$y=x^{\alpha}$在$(0,+\infty)$上单调递减.

c. 奇偶性：α是奇数时，$y=x^{\alpha}$是奇函数；α是偶数时，$y=x^{\alpha}$是偶函数.

（2）指数函数$y=a^x$（$a>0$且$a\neq 1$）.

a. 定点：$(0,1)$；定义域：R；值域：$(0,+\infty)$；

b. 当$a>1$时，$y=a^x$单调递增；当$0<a<1$时，$y=a^x$单调递减；

c. 常用的指数函数：$y=\mathrm{e}^x$（$\mathrm{e}=2.71828\cdots$），熟记$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$；

d. 运算法则：当$a>0$时，$a^b\cdot a^c=a^{b+c}$，$a^b\div a^c=a^{b-c}$，$(a^b)^c=a^{bc}$.

（3）对数函数$y=\log_a x$（$a>0$且$a\neq 1$）（与$y=a^x$互为反函数）.

a. 定点：$(1,0)$；定义域：$(0,+\infty)$；值域：R；

b. 当$a>1$时，$y=\log_a x$单调递增；当$0<a<1$时，$y=\log_a x$单调递减；

c. 常用的对数函数：$y=\ln x$，熟记$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$；

d. 运算法则：当$a>0$且$a\neq 1$时，

$$\log_a M+\log_a N=\log_a(MN),\quad \log_a M-\log_a N=\log_a\frac{M}{N},$$

$$\log_a M^n=n\log_a M,\quad \log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}(\forall c>0\text{且}c\neq 1),$$

$$\ln\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{\ln x}=x\ (x>0),\quad f(x)^{g(x)}=\mathrm{e}^{\ln f(x)^{g(x)}}=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}\ (f(x)>0).$$

【例 1.5】解下列不等式：

（1）$\ln x<2$；　　（2）$(\frac{1}{2})^x>3$.

【答案】（1）$0<x<\mathrm{e}^2$；（2）$x<\log_{\frac{1}{2}}3$或$x<-\log_2 3$.

【解析】（1）$\mathrm{e}^{\ln x}<\mathrm{e}^2\Rightarrow 0<x<\mathrm{e}^2$；

（2）$\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})^x<\log_{\frac{1}{2}}3\Rightarrow x<\log_{\frac{1}{2}}3$或$x<-\log_2 3$.

（4）三角函数：$y=\sin x$；$y=\cos x$；$y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$；$y=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$；

$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$；$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

a. 常用性质：

	定义域	值域	奇偶性	周期	$(0,\frac{\pi}{2})$ 内单调性
$\sin x$	$\mathbf{R}$	$[-1,1]$	奇	2π	增
$\cos x$	$\mathbf{R}$	$[-1,1]$	偶	2π	减
$\tan x$	$\left\{x \middle| x \neq k\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$	$\mathbf{R}$	奇	π	增

b. 特殊函数值：

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0

（5）反三角函数： $y=\arcsin x$ ； $y=\arccos x$ ； $y=\arctan x$ ； $y=\operatorname{arccot} x$.

a. 常用性质：

	定义域	值域	奇偶性	单调性	反函数
$y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	奇	增	$y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$
$y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	无	减	$y=\cos x(0\leqslant x\leqslant\pi)$
$y=\arctan x$	$\mathbf{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	奇	增	$y=\tan x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$
$y=\operatorname{arccot} x$	$\mathbf{R}$	$(0,\pi)$	无	减	$y=\cot x(0<x<\pi)$

b. 结论： $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}(-1\leqslant x\leqslant 1)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$.

【例 1. 6】 解不等式: $\sin x<\frac{1}{3}(0<x<\pi)$.

【答案】 $0<x<\arcsin\frac{1}{3}$ 或 $\pi-\arcsin\frac{1}{3}<x<\pi$.

【解析】（1）当 $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时， $0<x<\arcsin\frac{1}{3}$ ；

（2）当$\frac{\pi}{2}<x<\pi$时，$0<\pi-x<\frac{\pi}{2}$，$\sin(\pi-x)<\frac{1}{3}$，$0<\pi-x<\arcsin\frac{1}{3}$，

$\pi-\arcsin\frac{1}{3}<x<\pi$.

综上，$0<x<\arcsin\frac{1}{3}$或$\pi-\arcsin\frac{1}{3}<x<\pi$.

2. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和复合所构成的用一个表达式表示的函数称为初等函数.

§2. 极限的定义及性质

一、数列极限

1. 数列极限定义

设$\{x_n\}$为一数列, 如果存在常数a, 对于任意给定的正数ε（无论它多么小）, 总存在正整数N, 使得当$n>N$时, 不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

都成立, 那么称常数a是数列$\{x_n\}$的极限, 或者称数列$\{x_n\}$收敛于a, 记为: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 或者$x_n\to a(n\to\infty)$.

【例 1.7】 对于任意的$\varepsilon\in(0,1)$, 总存在正整数N, 当$n>N$时恒有$|a_n-a|<2\varepsilon$是数列$\{a_n\}$收敛于a的（　）

（A）充分而非必要条件.　　（B）必要而非充分条件.

（C）充分必要条件.　　（D）既不充分又不必要条件.

【答案】（C）.

【解析】 题干与数列极限定义相比, 做了两处修改, 一是“任意给定的正数ε”改为“任意的$\varepsilon\in(0,1)$”, 二是“$|a_n-a|<\varepsilon$”改为“$|a_n-a|<2\varepsilon$”, 修改后ε与2ε均可任意小, 故选（C）.

2. 收敛数列的性质

（1）唯一性: 如果数列$\{x_n\}$收敛, 那么它的极限唯一.

（2）有界性: 如果数列$\{x_n\}$收敛, 那么数列$\{x_n\}$一定有界.

【注】 数列$\{x_n\}$有界时, 数列$\{x_n\}$不一定收敛.

（3）保号性: 如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 且$a>0$（$a<0$）, 那么存在正整数$N$, 当$n>N$时, 都有$x_n>0$（或$x_n<0$）.

【例 1.8】 已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$, 判断下列命题的正确性:

（1）$a_n>0$;

（2）当n充分大时, $a_n>\dfrac{1}{2}$;

（3）当n充分大时, $a_n\geqslant 1-\dfrac{1}{n}$;

（4）当n充分大时，$a_n>\frac{1}{3}-\frac{1}{n}$.

【答案】（1）错；（2）对；（3）错；（4）对.

【解析】（1）缺少“n充分大”的字样，错；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}a_n>\frac{1}{2}$，故当$n$充分大时，$a_n>\frac{1}{2}$，正确；

（3）错误，反例$a_n=1-\frac{2}{n}$；

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}a_n>\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n}\right)$，故当$n$充分大时，$a_n>\frac{1}{3}-\frac{1}{n}$，正确.

推论：如果数列$\{x_n\}$从某项起有$x_n\geqslant 0$（或$x_n\leqslant 0$），且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，那么$a\geqslant 0$（或$a\leqslant 0$）.

收敛数列及其子列间的关系：数列$\{x_n\}$收敛于a的充要条件是$\{x_n\}$的任一子列都收敛于a.

【例 1.9】判断下列命题的正确性:

（1）若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a$；

（2）若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$；

（3）若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a$且$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

【答案】（1）对；（2）错；（3）对.

【解析】（1）数列$\{x_n\}$收敛于a，则其偶数项构成的子列也收敛于a，正确；

（2）数列$\{x_n\}$的偶数项收敛于a，但其奇数项未知，错误；

（3）数列$\{x_n\}$的偶数项与奇数项均收敛于a，则数列$\{x_n\}$收敛于a，正确.

二、函数极限

1. 自变量趋于无穷大时的函数的极限

设函数$f(x)$当$|x|$大于某一正数时有定义. 如果存在常数a，对于任意给定的正数ε（无论它多么小），总存在着正数X，使得当x满足不等式$|x|>X$时，对应的函数值满足不等式

$$|f(x)-a|<\varepsilon,$$

那么常数a就叫做函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=a\text{ 或 }f(x)\to a\text{（当 }x\to\infty\text{）}.$$

2. 自变量趋于有限值时的函数的极限

设函数 $f\left(x\right)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 a，对于任意给定的正数 ε（无论它多么小），总存在正数 δ，使得当 x 满足不等式 $0<\left|x-x_0\right|<\delta$ 时，对应函数值满足不等式

$$\left|f\left(x\right)-a\right|<\varepsilon,$$

那么常数 a 就叫做函数 $f\left(x\right)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=a \text{ 或 } f\left(x\right)\to a \text{（当 } x\to x_0\text{）}.$$

3. 单侧极限

右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=a$：

任给 $\varepsilon>0$，存在正数 δ，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，就有 $\left|f\left(x\right)-a\right|<\varepsilon$ 恒成立.

左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=a$：

任给 $\varepsilon>0$，存在正数 δ，当 $-\delta<x-x_0<0$ 时，就有 $\left|f\left(x\right)-a\right|<\varepsilon$ 恒成立.

【注】函数在一点处极限存在的充要条件是左右极限都存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

同样，以上结论也适用于 $x\to\infty$.

4. 函数极限的基本性质

（1）唯一性：如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)$ 存在，那么这极限值唯一.

（2）局部有界性:如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=a$，那么存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $0<\left|x-x_0\right|<\delta$ 时，有 $\left|f\left(x\right)\right|\leqslant M$.

（3）局部保号性：如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=a$，且 $a>0\left(a<0\right)$，那么存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<\left|x-x_0\right|<\delta$ 时，有 $f\left(x\right)>0$（$f\left(x\right)<0$）.

推论：如果在 x_0 的某去心邻域内 $f\left(x\right)\geqslant 0$（或 $f\left(x\right)\leqslant 0$），而且 $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=a$，那么 $a\geqslant 0$（或 $a\leqslant 0$）.

【注】若 $x\to\infty$ 时，以上性质仍成立.

【例 1.10】判断下列命题的正误：

（1）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，则 $\{x_n\}$ 有界；

（2）若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 有界.

【答案】（1）对；（2）错.

【解析】（1）这是数列极限的有界性, 正确；

（2）函数极限的有界性应为“局部”有界性, 结论中须有“存在着正数 X，当 $|x| > X$ 时”的字样, 故题干表述错误.

5. 函数极限与数列极限的关系

如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, $\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列, 且满足: $x_n \neq x_0$（$n \in \mathbf{N}_+$）, 那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛, 且

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

§3. 极限计算

一、极限运算法则

1. 四则运算法则： 设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

$$\lim\left[f(x)+g(x)\right]=A+B;\quad \lim\left[f(x)-g(x)\right]=A-B;$$

$$\lim\left[f(x)\cdot g(x)\right]=A\cdot B;\quad \lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0).$$

2. 复合运算法则： 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0,\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，且存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$g(x)\neq u_0$，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}f\left[g(x)\right]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$.

【例 1. 11】（1）若 $\lim[f(x)+g(x)]$ 存在，那么 $\lim f(x)$ 及 $\lim g(x)$ 是否存在？

（2）若 $\lim[f(x)+g(x)]$ 及 $\lim g(x)$ 存在，是否一定有 $\lim f(x)$ 存在？

【答案】（1）不一定；（2）一定.

【解析】 若两函数极限各自存在，则其和、差的极限也存在，反之未必，$f(x)=[f(x)+g(x)]-g(x)$，故（2）一定存在，（1）不一定存在.

【例 1. 12】 求极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{2x^2+x+3}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\arctan\dfrac{1}{x}$.

【答案】（1）$\dfrac{1}{2}$；（2）$\dfrac{\pi}{2}$.

【解析】（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{2x^2+x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$；

（2）因 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\arctan\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\dfrac{1}{x}=1\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$，

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\arctan\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\cdot\lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\dfrac{1}{x}=(-1)\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$，故原极限为 $\dfrac{\pi}{2}$.

二、无穷小与无穷大

1. 无穷小 如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的极限为零，那么称函数 $f(x)$ 是 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷小.

2. 无穷小的性质

（1）有限个无穷小量的和、差、积也是无穷小量.

（2）无穷小乘有界变量仍是无穷小量.

（3）无穷小与极限的关系

在自变量的某一变化过程 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）中，函数 $f(x)$ 具有极限 A 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$，其中 α 是在该变化过程中的无穷小.

3. 无穷大 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义（或 $|x|$ 大于某一正数时有定义）. 如果对于任意给定的正数 M（不论它多么大），总存在正数 δ（或正数 X），只要 x 适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$（$|x| > X$），对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式

$$|f(x)| > M$$

那么称函数 $f(x)$ 是当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷大.

【例 1. 13】 求（1）$\lim\limits_{n\to\infty} x^n$；（2）$\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha$；（3）$\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha$.

【答案】 见解析.

【解析】（1）$\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} \infty, & |x| > 1, \\ 0, & |x| < 1, \\ 1, & x = 1, \\ \text{不存在}, & x = -1. \end{cases}$

（2）$\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty, & \alpha > 0, \\ 0, & \alpha < 0, \\ 1, & \alpha = 0. \end{cases}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} +\infty, & \alpha < 0, \\ 0, & \alpha > 0, \\ 1, & \alpha = 0. \end{cases}$

【例 1. 14】 函数 $y = x\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是否有界？这个函数是否为 $x \to +\infty$ 时的无穷大？

【答案】 否；否.

【解析】 函数 $y = x\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界，但非无穷大. 事实上，取 $x = 2n\pi \ (n \in \mathbf{N})$，则

$y=2n\pi$ 随着 n 的增大而增大, 故其无界; 若取 $x=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $y=0$, 故其不是无穷大.

4. 无穷小与无穷大的关系

在自变量的同一个变化过程中, 若 $f(x)$ 为无穷大, 则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小; 若 $f(x)$ 为无穷小, 且 $f(x)\neq 0$, 则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

三、无穷小的比较

（1）如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$, 那么就说 β 是 α 的高阶无穷小, 记作 $\beta=o(\alpha)$;

（2）如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$, 那么就说 β 是 α 的低阶无穷小;

（3）如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$, 那么就说 β 与 α 是同阶无穷小;

（4）如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0, k>0$, 那么就说 β 是关于 α 的 k 阶无穷小;

（5）如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$, 那么就说 β 与 α 是等价无穷小, 记作 $\alpha\sim\beta$.

四、等价无穷小代换求极限

设 $\alpha\sim\alpha', \beta\sim\beta'$, 且 $\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$ 的极限存在, 则 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

【注】常见的等价无穷小

当 $x\to 0$ 时, $x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim e^x-1\sim\ln(1+x)$;

$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$; $(1+x)^a-1\sim ax$; $a^x-1\sim x\ln a$.

【例 1.15】 当 $x\to 0^+$ 时, 与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是（ ）

（A）$1-e^{\sqrt{x}}$. （B）$\ln(1+\sqrt{x})$. （C）$\ln\dfrac{1+x}{1-x}$. （D）$\ln(1+x)$.

【答案】（B）.

【解析】 利用等价无穷小关系, 当 $x\to 0$ 时, $\ln(1+x)\sim x$, 故 $x\to 0^+$ 时, $\ln(1+\sqrt{x})\sim\sqrt{x}$, 选（B）.

【例 1.16】 当 $x\to 0$ 时, 下列无穷小中哪项是其它三个的高阶无穷小量（ ）

（A）x^2. （B）$1-\cos x$. （C）$\sqrt{1-x^2}-1$. （D）$\sin x-\tan x$.

【答案】（D）.

【解析】当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\sqrt{1-x^2}-1\sim-\frac{1}{2}x^2,\sin x-\tan x\sim-\frac{1}{2}x^3$，

选（D）.

【例 1. 17】已知当 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则常数 $a=$ ________.

【答案】$-\frac{3}{2}$.

【解析】根据常见的等价无穷小知，$x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim\frac{a}{3}x^2$，$\cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2$，又

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=1$，故 $a=-\frac{3}{2}$.

【例 1. 18】求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\tan x^2}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x\left(1-\cos\sqrt{x}\right)}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}$；

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$.

【答案】（1）1；（2）$\frac{1}{2}$；（3）$-\frac{1}{2}$；（4）$\frac{3}{2}\mathrm{e}$.

【解析】（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\tan x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{x^2}=1$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x\left(1-\cos\sqrt{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\left(1-\sqrt{\cos x}\right)\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}{x\cdot\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}\right)^2\cdot\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}$；

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}\left(1-\mathrm{e}^{\cos x-1}\right)}{\frac{1}{3}x^2}=\mathrm{e}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{3}x^2}=\frac{3}{2}\mathrm{e}$.

五、洛必达法则

定理 1： $\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$

设 $\lim f(x)=0,\lim g(x)=0$，在 x 的变化过程中，$f'(x),g'(x)$ 皆存在且 $g'(x)\neq 0$，若 $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=a$（或 ∞），则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=a$（或 ∞）.

【例 1.19】求（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$；（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}$；（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$.

【答案】（1）$\dfrac{1}{6}$；（2）$\dfrac{1}{3}$；（3）$\dfrac{1}{2}$.

【解析】（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x-1}{2x(1+x)}=\dfrac{1}{2}$.

定理 2： $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$

设 $\lim f(x)=\infty$，$\lim g(x)=\infty$，在 x 的变化过程中，$f'(x)$，$g'(x)$ 皆存在且 $g'(x)\neq 0$，若 $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=a$（或 ∞），则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=a$（或 ∞）.

【例 1. 20】求极限，其中 n 为正整数，$\lambda>0$.

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{\lambda x}}$；（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^n x}{x}$.

【答案】（1）0；（2）0.

【解析】所求极限均为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，用洛必达法则：

（1）原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}}=0$；

（2）原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n\ln^{n-1}x}{x}=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n!}{x}=0$.

【注 1】如果$\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$不存在且不是无穷大量的情形, 则不能得出$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$不存在且不是无穷大量.

【例 1.21】$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$.

【答案】1.

【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)=1+0=1$.

【注 2】洛必达法则可用于求解七种未定式, 它们分别是$\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,\infty-\infty,1^{\infty},0^{0},\infty^{0}$. 这里的$\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty}$满足洛必达法则条件可直接使用结论求解, 其余五种应随实际情况化为$\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty}$求解.

【例 1. 22】计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

【答案】1.

【解析】此极限为$\dfrac{0}{0}$型, 且$x\to 0$时, $\ln(1+x)\sim x,1+\cos x\to 2$, 故

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{x}+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=1.$$

【例 1. 23】计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$.

【答案】$-\dfrac{1}{4}$.

【解析】此极限为$\dfrac{0}{0}$型且含有根式, 故考虑有理化处理, 从而有

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2\right)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1-x^2}-2}{4x^2}=-\frac{1}{4}.$$

【例 1. 24】计算$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

【答案】1.

【解析】 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x}+1-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2+\sin x}}{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}+1-\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}}=1$.

【例 1.25】计算 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}$.

【答案】2.

【解析】本题为 $0\cdot\infty$ 型, 且 $\sin\dfrac{2x}{x^2+1}\sim\dfrac{2x}{x^2+1}(x\to\infty)$, 故

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{2x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}x\frac{2x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2+1}=2.$$

【例 1.26】计算 $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x$.

【答案】0.

【解析】本题为 $0\cdot\infty$ 型, $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to0^+}x=0$.

【例 1.27】计算 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)$.

【答案】$\dfrac{1}{3}$.

【解析】本题为 $\infty-\infty$, 又含分式, 故考虑通分, 即

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sec^2x-1}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\tan^2x}{3x^2}=\frac{1}{3}.$$

【例 1.28】计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-3x}\right)$.

【答案】2.

【解析】本题为 $\infty-\infty$, 因为 $x\to+\infty$ 且无分母可考虑引入倒代换, 因为有根式可考虑根式有理化. 令 $x=\dfrac{1}{t}$, 则

$$\text{原式}=\lim_{t\to0^+}\left(\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}}-\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{3}{t}}\right)=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-3t}}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{4t}{t\left(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-3t}\right)}=2.$$

【例 1.29】求极限 $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}$.

【答案】e^{6}.

【解析】$\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{2}{\sin x}\ln(1+3x)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{x}\cdot3x}=e^{6}$.

【例 1. 30】求极限 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

【答案】$e^{-\frac{1}{2}}$.

【解析】$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x^2}\ln\cos x}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

【例 1. 31】求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})^{x}$.

【答案】e^{2}.

【解析】本题为1^{∞}型, 原式$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)}\overset{x=\frac{1}{t}}{=}e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin2t+\cos t-1}{t}}=e^{2}$.

【例 1. 32】计算 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{x}$.

【答案】1.

【解析】$\lim\limits_{x\to0^+}x^{x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{x\ln x}=e^{0}=1$.

【例 1. 33】计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$.

【答案】1.

【解析】本题为∞^{0}型, 故原式$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}=e^{0}=1$.

§4. 极限存在的两个准则及两个重要极限

一、夹逼准则

给定数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$，若存在 $n_0 \in \mathbf{N}_+$，当 $n \geqslant n_0$ 时，有 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, 那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

【例 1.34】 设对任意的 x，都有 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则下列关于 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 说法中正确的是（　）

（A）存在且为零.（B）存在但不一定为零.（C）不一定存在.（D）一定不存在.

【答案】（C）.

【解析】 $\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)-\varphi(x)]=0$ 无法保证 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x), \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$ 均存在, 从而无法确定.

【例 1.35】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+\pi}+\dfrac{n}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n\pi}\right)$.

【答案】 1.

【解析】 令 $x_n=\dfrac{n}{n^2+\pi}+\dfrac{n}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n\pi}$,

$$y_n=\frac{n}{n^2+n\pi}+\frac{n}{n^2+n\pi}+\cdots+\frac{n}{n^2+n\pi}=\frac{n^2}{n^2+n\pi},$$

$$z_n=\frac{n}{n^2+\pi}+\frac{n}{n^2+\pi}+\cdots+\frac{n}{n^2+\pi}=\frac{n^2}{n^2+\pi},$$

则 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$, 又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$, 所以根据夹逼准则可知原式$=1$.

【例 1.36】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$.

【答案】 $\dfrac{1}{2}$.

【解析】 令 $x_n=\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}$,

$$y_n=\frac{1}{n^2+n+n}+\frac{2}{n^2+n+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}=\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)},$$

$$z_n=\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+1}=\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)},$$

则 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\frac{1}{2}$，所以根据夹逼准则可知原式 $=\frac{1}{2}$.

二、单调有界准则

单调有界的数列必有极限. 具体结论如下：

如果数列 $\{x_n\}$ 单调不减有上界（或单调不增有下界），则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 一定存在.

【注】上述两个数列极限存在准则都可以推广到函数极限.

【例 1.37】 设 $0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$，$(n=1,2,\cdots)$. 证明：数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【证明】 先用数学归纳法证明 $\{x_n\}$ 有上界，首先，由于 $0<x_1<3$，利用均值不等式可知 $0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\leqslant\frac{x_1+(3-x_1)}{2}=\frac{3}{2}$，又假设 $0<x_n\leqslant\frac{3}{2}(n\geqslant2)$，则有 $0<x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\leqslant\frac{3}{2}$，故 $\{x_n\}$ 有上界（其实也有下界）.

再证 $\{x_n\}$ 单调不减，由

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\frac{x_n(3-2x_n)}{\sqrt{x_n(3-x_n)}+x_n}\geqslant0\quad(n\geqslant2)，有\ x_{n+1}\geqslant x_n(n\geqslant2).$$

由单调有界准则知，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设为 a，在递推公式两边取极限，得 $a=\sqrt{a(3-a)}$，解得 $a=\frac{3}{2}$ 或 0. 又 $\{x_n\}$ 单调不减且为正，故舍去 $a=0$，只能 $a=\frac{3}{2}$.

【例 1.38】 设 $x_1=\sqrt{2}$，$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$，证明：数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【证明】 猜测对于 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，$0<x_n<2$，用数学归纳法证明如下：① $n=1$ 时，$0<x_1=\sqrt{2}<2$ 成立；② 假设 $n=k$ 时成立，即 $0<x_k<2$，那么，当 $n=k+1$ 时，$0<x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}=2$ 也成立. 由数学归纳法，$0<x_n<2$ 恒成立，即数列 $\{x_n\}$ 有界.

因为 $x_{n+1}-x_n=\sqrt{2+x_n}-x_n=\frac{2+x_n-x_n^2}{\sqrt{2+x_n}+x_n}=\frac{-(x_n-2)(x_n+1)}{\sqrt{2+x_n}+x_n}>0$，故 $x_{n+1}>x_n$，即数列 $\{x_n\}$ 单调递增. 由单调有界准则知，数列 $\{x_n\}$ 的极限存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，在 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ 两边同时取极限，得 $a=\sqrt{2+a}$，因此 $a=2$（$a=-1$ 舍去），即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

三、两个重要极限

1. 第一个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

2. 第二个重要极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

§5. 连续与间断

一、函数的连续性

1. 定义 1:设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义, 如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0,$$

那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

2. 定义 2:设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义, 如果

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

【例 1. 39】 设 $f(x)=\begin{cases}a+bx^2, x\leqslant 0,\\ \dfrac{\sin bx}{x}, x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则常数 a 与 b 应满足的关系是____.

【答案】 $a=b$.

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)=a$, 故 $a=b$.

3. 左右连续:

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 存在且等于 $f(x_0)$, 即

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0),$$

那么就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续;

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 存在且等于 $f(x_0)$, 即

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0),$$

那么就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

【注 1】 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件是 $f(x)$ 在该点处既左连续又右连续.

【注 2】 在区间上每一点都连续的函数,叫做在该区间上的连续函数,或者说函数在该区间上连续;如果区间包括端点，那么函数在右端点连续是指左连续，在左端点连续是指右连续.

【例 1. 40】 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 处处连续, 则常数 $a=$____.

【答案】 1.

【解析】 因为函数处处连续, 故其在 $x=0$ 处连续, 即 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=a$, 因此

$$a=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}}=1.$$

二、函数的间断点

1. 间断点的定义:

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义且具有下列三种情形之一:

(1) 在 $x=x_0$ 没有定义;

(2) 虽在 $x=x_0$ 有定义, 但是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在;

(3) 虽在 $x=x_0$ 有定义, 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)\neq f\left(x_0\right)$;

那么函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续, 而点 $x=x_0$ 称为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点.

2. 间断点的分类

(1) 第一类间断点

如果 $f(x)$ 在间断点 x_0 处的左、右极限都存在, 则称 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点. 具体地, 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\left(\neq f\left(x_0\right)\right)$, 则称 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点; 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, 则称 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

(2) 第二类间断点

第一类间断点以外的其他间断点统称为第二类间断点. 常见的第二类间断点有无穷间断点和振荡间断点, 其中若间断点 $x=x_0$ 满足 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$, 则称 $x=x_0$ 为函数的无穷间断点; 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 均不存在且不为 ∞, 则称 $x=x_0$ 为函数的振荡间断点.

【例 1.41】 求下列函数的间断点并判断其类型:

(1) $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$;

（2） $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$；

（3） $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$.

【答案】（1） $x=0$ 是可去间断点；（2） $x=0$ 是跳跃间断点；（3） $x=1$ 是可去间断点，$x=2$ 是无穷间断点.

【解析】（1） $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$，但 $f(0)$ 无定义，所以 $x=0$ 是可去间断点；

（2） $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0, \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$，所以 $x=0$ 是跳跃间断点；

（3） $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=-2$，但 $f(1)$ 无定义，所以 $x=1$ 是可去间断点;

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\infty$，所以 $x=2$ 是无穷间断点.

【例 1.42】 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$，$g(x)=\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$

则（ ）

（A） $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点. （B） $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点.

（C） $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点. （D） $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的值有关.

【答案】（D）.

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0} f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$，当 $a=0$ 时，$g(x)$ 在点 $x=0$ 处连续；当 $a\neq 0$ 时，$g(x)$ 在点 $x=0$ 处的极限值不等于其函数值，即 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续. 综上可知 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性跟 a 的值有关，故正确选项为（D）.

【例 1.43】 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性，若有间断点，判断其类型.

【答案】 见解析.

【解析】 当$|x|<1$时，$f(x)=x$；当$|x|>1$时，$f(x)=-x$；当$|x|=1$时，$f(x)=0$.

所以$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1, \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-1$, 故$x=1$是跳跃间断点；

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=1, \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-1$, 故$x=-1$也是跳跃间断点.

三、连续函数的常用结论

1. 设函数$f(x),g(x)$在点x_0处连续，则$f(x)\pm g(x), f(x)g(x), \dfrac{f(x)}{g(x)}\left(g(x_0)\neq 0\right)$都在点$x_0$处连续.

2. 如果函数$y=f(x)$在区间I_x上单调增加（单调减少）且连续，那么它的反函数$x=f^{-1}(y)$也在对应区间$I_y=\left\{y \mid y=f(x), x\in I_x\right\}$上单调增加（或单调减少）且连续.

3. 设函数$y=f\left[g(x)\right]$由函数$u=g(x)$与函数$y=f(u)$复合而成，$\overset{o}{U}\left(x_0\right)\subset D_{f\circ g}$. 若$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$, 而函数$y=f\left(u\right)$在$u=u_0$连续，则$\lim\limits_{x\to x_0} f\left[g(x)\right]=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)$.

4. 设函数$y=f\left[g(x)\right]$由函数$u=g(x)$与函数$y=f(u)$复合而成，$U\left(x_0\right)\subset D_{f\circ g}$. 若函数$u=g(x)$在$x=x_0$连续，且$g(x_0)=u_0$，而函数$y=f(u)$在$u=u_0$连续，则复合函数$y=f\left[g(x)\right]$在$x=x_0$也连续.

5. 一切基本初等函数在定义域内是连续的，一切初等函数在其定义区间内是连续的.

四、闭区间上连续函数的性质

在闭区间$\left[a,b\right]$上连续的函数$f(x)$，有以下几个基本性质.

定理 1（有界定理）： 如果函数$f(x)$在闭区间$\left[a,b\right]$上连续，则$f(x)$必在$\left[a,b\right]$上有界.

定理 2（最大值和最小值定理）： 如果函数$f(x)$在闭区间$\left[a,b\right]$上连续，则$f(x)$在该区间上一定存在最大值M和最小值m. 其中最大值M和最小值m. 的定义如下：

对于区间I上有定义的函数$f\left(x\right)$，如果有$x_0\in I$，使得对任一$x\in I$，都有$f\left(x\right)\leqslant f\left(x_0\right)=M$，那么称$f\left(x_0\right)$是函数$f(x)$在区间$I$上的最大值. 同样可以定义最小值$m$.

定理 3（零点定理）： 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)\cdot f(b)<0$, 则在 (a,b) 内至少存在一个点 ξ, 使得 $f(\xi)=0$.

【例 1. 44】 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0)=0, f(1)=1$, 证明:存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)=1-\xi$.

【证明】 令 $F(x)=f(x)-1+x$, 则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $F(0)=-1<0$, $F(1)=1>0$, 于是由零点定理知, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $F(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=1-\xi$.

定理 4（介值定理）： 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且其在区间端点处的函数值不同:

$$f(a)=A \quad 及 \quad f(b)=B$$

则对于 A 和 B 之间的任何一个数 C, 在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ, 使得

$$f(\xi)=C \quad (a<\xi<b).$$

推论： 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且其最大值和最小值分别为 M 和 m, 则对于介于 m 和 M 之间的任何实数 c, 在 $[a,b]$ 上至少存在一个 ξ, 使得 $f(\xi)=c$. 即：闭区间上的连续函数必能取得最大值和最小值之间的一切值.

【例 1. 45】 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$, 证明必存在 $\xi\in[0,2]$, 使得 $f(\xi)=1$.

【证明】 函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最小值为 m, 最大值为 M,

则 $m\leqslant f(0)\leqslant M$, $m\leqslant f(1)\leqslant M$, $m\leqslant f(2)\leqslant M$,

所以 $3m\leqslant f(0)+f(1)+f(2)\leqslant 3M$, 即 $m\leqslant \dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\leqslant M$,

所以 $m\leqslant 1\leqslant M$, 由介值定理的推论知, 存在 $\xi\in[0,2]$, 使得 $f(\xi)=1$.