绝密 * 启用前

2023 年全国硕士研究生入学统一考试

新 东 方

数学（二）模拟试题

（科目代码：302）

考生注意事项

1.答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2.答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3.填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4.考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设有命题

①设有数列$\{x_n\}$，如果有$0\leqslant x_n<1,n=1,2,\cdots$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^n=0$；

②设函数$f(x)$单调增加，如果数列$\{x_n\}$满足$x_{n+1}=f(x_n),n=1,2,\cdots$，则$\{x_n\}$单调增加；

③连续函数$f(x)$在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$内可导，若$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$存在，则$f(x)$在$x=0$处可导；

④设函数$f(x),g(x)$处处连续，如果$f(x)>g(x)$，a,b为常数，则$\int_a^b f(x)dx>\int_a^b g(x)dx$．

以上命题中正确的个数为（　　）．

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（2）设有命题

①函数$f(x),g(x)$在区间I内无界，则$f(x)g(x)$在I内也无界；

②函数$f(x),g(x)$在点$x=x_0$处间断，则$f(x)g(x)$在$x=x_0$处也间断；

③函数$f(x),g(x)$在点$x=x_0$处不可导，则$f(x)g(x)$在$x=x_0$处也不可导；

④函数$f(x),g(x)$在点$x=x_0$处取极小值，则$f(x)g(x)$在$x=x_0$处也取极小值.

以上命题中正确的个数为（　　）．

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（3）已知$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t\cos xt}{t}dt$，则（　　）．

（A）$f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)$　　（B）$f\left(\frac{1}{2}\right)=f(1)$

（C）$f(1)=f(2)$　　（D）$f(0)=f(2)$

（4）设平面区域D由直线$y=\frac{1}{2}x,x=\frac{1}{2},x=1$及$x$轴围成，记$I_1=\iint\limits_D[\ln(x-y)]^3dxdy$，$I_2=\iint\limits_D(x-y)^3dxdy$，$I_3=\iint\limits_D e^{(x-y)^3}dxdy$，则$I_1,I_2,I_3$之间的关系是（　　）．

（A）$I_1<I_2<I_3$　　（B）$I_3<I_2<I_1$

（C）$I_1<I_3<I_2$　　（D）$I_3<I_1<I_2$

（5）设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，$f''(x)>0,f(0)=0$，则（　　）.

（A）$f(1)>2f\left(\frac{1}{2}\right)$　　（B）$f(1)<2f\left(\frac{1}{2}\right)$

（C）$f'(1)>2f'\left(\frac{1}{2}\right)$　　（D）$f'(1)<2f'\left(\frac{1}{2}\right)$

（6）曲线$y=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+e^{x}}{e^{\frac{1}{x}}-e^{x}}\cdot\dfrac{\arctan x}{x}$有（　　）.

（A）三条渐近线和一个第一类间断点　　（B）三条渐近线和两个第一类间断点

（C）两条渐近线和两个第一类间断点　　（D）两条渐近线和一个第一类间断点

（7）下列反常积分中，发散的反常积分是（　　）.

①$\displaystyle\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\left(\ln\sqrt{x}\right)^{2}}dx$ ②$\displaystyle\int_{0}^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}dx$ ③$\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}dx$ ④$\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}dx$

（A）①②　　（B）①③　　（C）②③　　（D）③④

（8）设A是4×3的矩阵，$B=\begin{pmatrix}t&0&2\\0&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}$，且$r(A)=2$，$r(AB-A)=1$，则必有（　　）.

（A）B可逆，$B-E$可逆　　（B）B可逆，$B-E$不可逆

（C）B不可逆，$B-E$可逆　　（D）B不可逆，$B-E$不可逆

（9）设A为三阶方阵，有下列三个命题：

①A经初等行变换化为$B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}$，则$A$的特征值一定为$1,2,3$；

②若A的秩$r(A)=2$，则A必有两个非零特征值；

③若三阶方阵P，使得$AP=P\Lambda$，Λ为对角阵，则P的列向量一定是A的特征向量.

其中正确的个数为（　　）.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（10）设$\xi_1=(1,-2,3,2)^T,\xi_2=(2,0,5,-2)^T$是齐次线性方程组$Ax=0$的解向量，则下列向量中，必是齐次线性方程组$Ax=0$的解向量的是（　　）.

（A）$\alpha_1=(1,-3,3,3)^T$　　（B）$\alpha_2=(0,0,5,-2)^T$

（C）$\alpha_3=(-1,-6,-1,10)^T$　　（D）$\alpha_4=(1,6,1,0)^T$

二、填空题:11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（11）极限$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-1}^{2}(\arctan nx)^3dx=$________.

（12）设函数$z=f(x,x+y)$，其中f具有二阶连续偏导数，而$y=y(x)$是由方程$x^2(y-1)+e^y=1$确定的隐函数，则$\left.\dfrac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=0}=$________.

（13）椭圆盘$x^2+\dfrac{y^2}{3}\leqslant 1$和$\dfrac{x^2}{3}+y^2\leqslant 1$的公共部分的面积等于________.

（14）设积分区域$D=\{(x,y)\,|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，则积分$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=$________.

（15）定积分$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4x\cdot\arctan e^x dx=$________.

（16）已知三阶矩阵A满足$|A-E|=|A-2E|=|A+E|=2$，则$|A+3E|=$________.

三、解答题:17～22 小题，共 70 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（17）(**本题满分 10 分**)（Ⅰ）设函数$f(x)$在点x_0处满足$f''(x_0)=0,f'''(x_0)\neq 0$.证明点$(x_0,f(x_0))$为曲线$y=f(x)$的拐点；（Ⅱ）若函数$f(x)$在点$x=0$的某邻域内有二阶连续导数，且$f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)+f''(x)}{\ln(1+x)}=1$，判别点$(0,f(0))$是否是曲线$y=f(x)$的拐点.

（18）（**本题满分 12 分**）用变量代换$x=e^t$化简微分方程$(x^2\ln x)y''-xy'+y=0$，再通过变换$z=\dfrac{dy}{dt}-y$，求该微分方程的通解.

（19）（**本题满分 12 分**）设单增光滑曲线$y=y(x)$位于第一象限，当$x>0$时，在区间$[0,x]$上以$y=y(x)$为曲边的曲边梯形绕x轴旋转一周所得旋转体体积值曲线$V(x)$与该曲边梯形的面积值$S(x)$之比为$\dfrac{3}{5}\pi y(x)$，且曲线$y=y(x)$过点$(1,1)$，求曲线$y=y(x)$的方程.

（20）（**本题满分 12 分**）（Ⅰ）设函数$f(x)$在$[a,b]$上可微，且$f'(x)$单调不减，证明：$\int_a^b f(x)dx \geqslant (b-a)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$．（Ⅱ）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，若$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$，证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得$f''(\xi)=0$.

（21）（**本题满分 12 分**）设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 内二阶可导且 $f''(x)<0$，又$b>a,f(b)>0,f'(b)<0$，求证：（Ⅰ）$f\left[b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}\right]<0$；（Ⅱ）方程$f(x)=0$在$[b,+\infty)$内有且仅有一个实根；（III）设又有$f(a)>0$，则方程$f(x)=0$在$[a,+\infty)$内有且仅有一个实根.

（22）（**本题满分 12 分**）已知$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$，$ab\neq 0$，$\beta=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ c \end{pmatrix}$，且方程组$Ax=\beta$有无穷多解.（Ⅰ）求$a,b$满足的关系及$c$的值；（Ⅱ）求正交阵$Q$，使$Q^TAQ=\Lambda$为对角阵.