绝密 * 启用前

2023 年全国硕士研究生入学统一考试

新 东 方

数学（三）模拟试题

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设有命题

①设有数列$\{x_n\}$，如果有$0 \leqslant x_n < 1, n = 1, 2, \cdots$，则$\lim\limits_{n \to \infty} x_n^n = 0$；

②设函数$f(x)$单调增加，如果数列$\{x_n\}$满足$x_{n+1} = f(x_n), n = 1, 2, \cdots$，则$\{x_n\}$单调增加；

③连续函数$f(x)$在$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$内可导，若$\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$存在，则$f(x)$在$x = 0$处可导；

④设函数$f(x), g(x)$处处连续，如果$f(x) > g(x)$，a, b为常数，则$\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$.

以上命题中正确的个数为（　　）.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（2）设有命题

①函数$f(x), g(x)$在区间I内无界，则$f(x)g(x)$在I内也无界；

②函数$f(x), g(x)$在点$x = x_0$处间断，则$f(x)g(x)$在$x = x_0$处也间断；

③函数$f(x), g(x)$在点$x = x_0$处不可导，则$f(x)g(x)$在$x = x_0$处也不可导；

④函数$f(x), g(x)$在点$x = x_0$处取极小值，则$f(x)g(x)$在$x = x_0$处也取极小值.

以上命题中正确的个数为（　　）.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（3）已知$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$，$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t \cos xt}{t} dt$，则（　　）.

（A）$f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right)$　　（B）$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1)$

（C）$f(1) = f(2)$　　（D）$f(0) = f(2)$

（4）设平面区域D由直线$y = \frac{1}{2}x, x = \frac{1}{2}, x = 1$及$x$轴围成，记$I_1 = \iint\limits_D [\ln(x-y)]^3 dxdy$，$I_2 = \iint\limits_D (x-y)^3 dxdy$，$I_3 = \iint\limits_D e^{(x-y)^3} dxdy$，则$I_1, I_2, I_3$之间的关系是（　　）.

（A）$I_1 < I_2 < I_3$　　（B）$I_3 < I_2 < I_1$

（C）$I_1 < I_3 < I_2$　　（D）$I_3 < I_1 < I_2$

（5）设A是4×3的矩阵，$B=\begin{pmatrix} t & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，且$r(A)=2$，$r(AB-A)=1$，则必有（　　）.

（A）B可逆，$B-E$可逆　　（B）B可逆，$B-E$不可逆

（C）B不可逆，$B-E$可逆　　（D）B不可逆，$B-E$不可逆

（6）设A为三阶方阵，有下列三个命题：

①A经初等行变换化为$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，则$A$的特征值一定为$1,2,3$；

②若A的秩$r(A)=2$，则A必有两个非零特征值；

③若三阶方阵P，使得$AP=P\Lambda$，Λ为对角阵，则P的列向量一定是A的特征向量.

其中正确的个数为（　　）.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（7）设$\xi_1=(1,-2,3,2)^T,\xi_2=(2,0,5,-2)^T$是齐次线性方程组$Ax=0$的解向量，则下列向量中，必是齐次线性方程组$Ax=0$的解向量的是（　　）.

（A）$\alpha_1=(1,-3,3,3)^T$　　（B）$\alpha_2=(0,0,5,-2)^T$

（C）$\alpha_3=(-1,-6,-1,10)^T$　　（D）$\alpha_4=(1,6,1,0)^T$

（8）设二维随机变量(X,Y)的密度函数为$f(x,y)$，X与Y的相关系数存在，则下列结论中正确的个数是（　　）.

①若对任意$x,y\in R$，有$f(-x,y)=f(x,y)$，则X的密度函数为偶函数；

②若对任意$x,y\in R$，有$f(-x,y)=f(x,y)$，则X与Y不相关；

③若对任意$x,y\in R$，有$f(x,y)=f(y,x)$，则$P\{X>Y\}=P\{X<Y\}$；

④若对任意$x,y\in R$，有$f(x,y)=f(y,x)$，则X与Y同分布.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（9）设随机变量$X \leqslant Y$，$F_X(x)$和$F_Y(y)$分别是X和Y的分布函数，$F(x,y)$为(X,Y)的分布函数，则对任意的t，有（　　）.

（A）$F_X(t) \leqslant F_Y(t), F(t,t)=F_X(t)$　　（B）$F_Y(t) \leqslant F_X(t), F(t,t)=F_X(t)$

（C）$F_X(t) \leqslant F_Y(t), F(t,t)=F_Y(t)$　　（D）$F_Y(t) \leqslant F_X(t), F(t,t)=F_Y(t)$

（10）设随机变量$X \sim N(0,1), \chi^2 \sim \chi^2(1)$，给定$\alpha(0<\alpha<1)$，数$U_\alpha$满足$P\{X>U_\alpha\}=\alpha$，数$\chi_\alpha^2(1)$满足$P\{\chi^2>\chi_\alpha^2(1)\}=\alpha$，则$\chi_{0.05}^2(1)=$（　　）.

（A）$U_{0.025}$　　（B）$U_{0.025}^2$　　（C）$U_{0.05}$　　（D）$U_{0.05}^2$

二、填空题:11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（11）级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2+n-1}$的和为__________.

（12）设函数$z=f(x,x+y)$，其中f具有二阶连续偏导数，而$y=y(x)$是由方程$x^2(y-1)+e^y=1$确定的隐函数，则$\left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=0}=$__________.

（13）椭圆盘$x^2+\frac{y^2}{3}\leqslant 1$和$\frac{x^2}{3}+y^2\leqslant 1$的公共部分的面积等于__________.

（14）设积分区域$D=\{(x,y)\,|0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$，则积分$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=$__________.

（15）已知三阶矩阵A满足$|A-E|=|A-2E|=|A+E|=2$，则$|A+3E|=$__________.

（16）设有三箱同型号产品，其中第i箱产品的次品率为$0.01i$，$i=1,2,3$．现从每箱中任取一个产品，记X为所取三个产品中的次品个数，则$EX=$__________.

三、解答题:17～22 小题，共 70 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（17）(**本题满分 10 分**)（Ⅰ）设函数$f(x)$在点x_0处满足$f''(x_0)=0, f'''(x_0)\neq 0$．证明点$(x_0,f(x_0))$为曲线$y=f(x)$的拐点；（Ⅱ）若函数$f(x)$在点$x=0$的某邻域内有二阶连续导数，且$f'(0)=0$，

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)+f''(x)}{\ln(1+x)}=1$，判别点$(0,f(0))$是否是曲线$y=f(x)$的拐点.

（18）**（本题满分 12 分）**设单增光滑曲线$y=y(x)$位于第一象限，当$x>0$时，在区间$[0,x]$上以$y=y(x)$为曲边的曲边梯形绕x轴旋转一周所得旋转体体积值曲线$V(x)$与该曲边梯形的面积值$S(x)$之比为$\dfrac{3}{5}\pi y(x)$，且曲线$y=y(x)$过点$(1,1)$，求曲线$y=y(x)$的方程.

（19）**（本题满分 12 分）**用变量代换$x=e^t$化简微分方程$(x^2\ln x)y''-xy'+y=0$，再通过变换$z=\dfrac{dy}{dt}-y$，求该微分方程的通解.

（20）**（本题满分 12 分）**设函数$f(x)$在$[a,+\infty)$内二阶可导且$f''(x)<0$，又$b>a,f(b)>0,f'(b)<0$，求证：（Ⅰ）$f\left[b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}\right]<0$；（Ⅱ）方程$f(x)=0$在$[b,+\infty)$内有且仅有一个实根；（Ⅲ）设又有$f(a)>0$，则方程$f(x)=0$在$[a,+\infty)$内有且仅有一个实根.

（21）**（本题满分 12 分）**已知$A=\begin{pmatrix}a&0&0&b\\0&a&b&0\\0&b&a&0\\b&0&0&a\end{pmatrix}$，$ab\neq 0$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\2\\c\end{pmatrix}$，且方程组$Ax=\beta$有无穷多解.（Ⅰ）求$a,b$满足的关系及$c$的值；（Ⅱ）求正交阵$Q$，使$Q^TAQ=\Lambda$为对角阵.

（22）**（本题满分 12 分）**设随机变量$X\sim E(1)$，$[x]$表示取整函数.

（Ⅰ）令$U=\min\{2,[X]\}$，求U的概率分布；（Ⅱ）令$Y=X-[X]$，求Y的密度函数$f_Y(y)$；（Ⅲ）求$E[X]$.