

# Потоковый анализ

(Data-flow analysis)

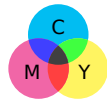
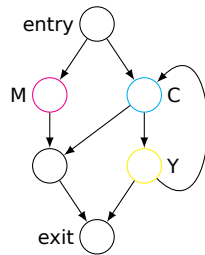
## Потоковый анализ (Data flow analysis)

- Статический
- Глобальный (весь CFG)
- Зависит от потока управления
- Вычисление свойств исполнения программы
- Единая формальная модель и теория

### Примеры

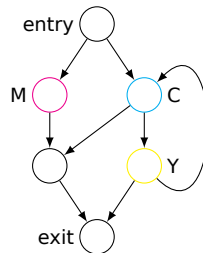
- Reaching definitions (use-def links)
- Liveness analysis
- Constant propagation
- Constant subexpression elimination
- Dead code elimination

## CFG



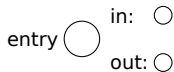
## Окружение потокового анализа

- Потокосый граф  $G = \langle V, E, v_{entry}, v_{exit} \rangle$
- Направление анализа  $D = \{\downarrow, \uparrow\}$
- Полурешетка свойств  $\langle L, \wedge \rangle$
- Потокосые функции  $f_{v \in V} : L \rightarrow L$
- Начальное значение  $in(v_{entry})$  или  $out(v_{exit})$



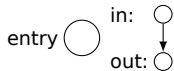
## Окружение потокового анализа

- Поточный граф  $G = \langle V, E, v_{entry}, v_{exit} \rangle$
- Направление анализа  $D = \{\downarrow, \uparrow\}$
- Полурешетка свойств  $\langle L, \wedge \rangle$
- Поточные функции  $f_{v \in V} : L \rightarrow L$
- Начальное значение  $in(v_{entry})$  или  $out(v_{exit})$



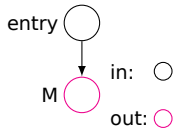
## Окружение потокового анализа

- Поточковый граф  $G = \langle V, E, v_{entry}, v_{exit} \rangle$
- Направление анализа  $D = \{\downarrow, \uparrow\}$
- Полурешетка свойств  $\langle L, \wedge \rangle$
- Поточковые функции  $f_{v \in V} : L \rightarrow L$
- Начальное значение  $in(v_{entry})$  или  $out(v_{exit})$



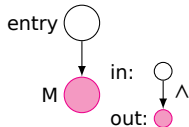
## Окружение потокового анализа

- Потокосый граф  $G = \langle V, E, v_{entry}, v_{exit} \rangle$
- Направление анализа  $D = \{\downarrow, \uparrow\}$
- Полурешетка свойств  $\langle L, \wedge \rangle$
- Потокосые функции  $f_{v \in V} : L \rightarrow L$
- Начальное значение  $in(v_{entry})$  или  $out(v_{exit})$



## Окружение потокового анализа

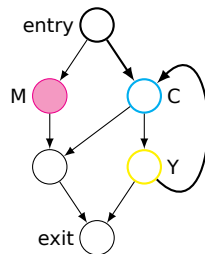
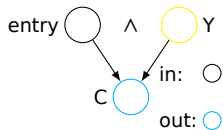
- Поточный граф  $G = \langle V, E, v_{entry}, v_{exit} \rangle$
- Направление анализа  $D = \{\downarrow, \uparrow\}$
- Полурешетка свойств  $\langle L, \wedge \rangle$
- Поточные функции  $f_{v \in V} : L \rightarrow L$
- Начальное значение  $in(v_{entry})$  или  $out(v_{exit})$





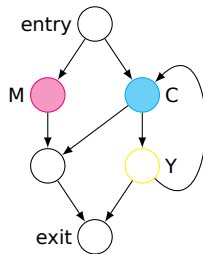
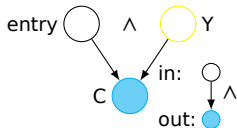
## Окружение потокового анализа

- Поточный граф  $G = \langle V, E, v_{entry}, v_{exit} \rangle$
- Направление анализа  $D = \{\downarrow, \uparrow\}$
- Полурешетка свойств  $\langle L, \wedge \rangle$
- Поточные функции  $f_{v \in V} : L \rightarrow L$
- Начальное значение  $in(v_{entry})$  или  $out(v_{exit})$



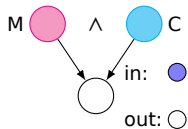
## Окружение потокового анализа

- Поточковый граф  $G = \langle V, E, v_{entry}, v_{exit} \rangle$
- Направление анализа  $D = \{\downarrow, \uparrow\}$
- Полурешетка свойств  $\langle L, \wedge \rangle$
- Поточковые функции  $f_{v \in V} : L \rightarrow L$
- Начальное значение  $in(v_{entry})$  или  $out(v_{exit})$



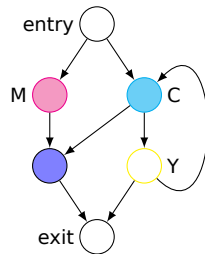
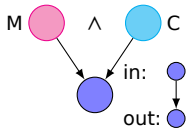
## Окружение потокового анализа

- Поточный граф  $G = \langle V, E, v_{entry}, v_{exit} \rangle$
- Направление анализа  $D = \{\downarrow, \uparrow\}$
- Полурешетка свойств  $\langle L, \wedge \rangle$
- Поточные функции  $f_{v \in V} : L \rightarrow L$
- Начальное значение  $in(v_{entry})$  или  $out(v_{exit})$



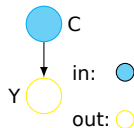
## Окружение потокового анализа

- Поточный граф  $G = \langle V, E, v_{entry}, v_{exit} \rangle$
- Направление анализа  $D = \{\downarrow, \uparrow\}$
- Полурешетка свойств  $\langle L, \wedge \rangle$
- Поточные функции  $f_{v \in V} : L \rightarrow L$
- Начальное значение  $in(v_{entry})$  или  $out(v_{exit})$



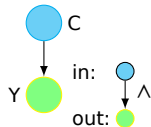
## Окружение потокового анализа

- Поточный граф  $G = \langle V, E, v_{entry}, v_{exit} \rangle$
- Направление анализа  $D = \{\downarrow, \uparrow\}$
- Полурешетка свойств  $\langle L, \wedge \rangle$
- Поточные функции  $f_{v \in V} : L \rightarrow L$
- Начальное значение  $in(v_{entry})$  или  $out(v_{exit})$



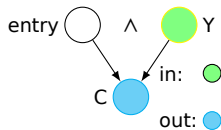
## Окружение потокового анализа

- Поточный граф  $G = \langle V, E, v_{entry}, v_{exit} \rangle$
- Направление анализа  $D = \{\downarrow, \uparrow\}$
- Полурешетка свойств  $\langle L, \wedge \rangle$
- Поточные функции  $f_{v \in V} : L \rightarrow L$
- Начальное значение  $in(v_{entry})$  или  $out(v_{exit})$



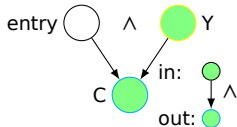
## Окружение потокового анализа

- Поточный граф  $G = \langle V, E, v_{entry}, v_{exit} \rangle$
- Направление анализа  $D = \{\downarrow, \uparrow\}$
- Полурешетка свойств  $\langle L, \wedge \rangle$
- Поточные функции  $f_{v \in V} : L \rightarrow L$
- Начальное значение  $in(v_{entry})$  или  $out(v_{exit})$



## Окружение потокового анализа

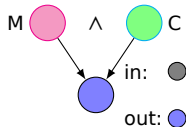
- Поточковый граф  $G = \langle V, E, v_{entry}, v_{exit} \rangle$
- Направление анализа  $D = \{\downarrow, \uparrow\}$
- Полурешетка свойств  $\langle L, \wedge \rangle$
- Поточковые функции  $f_{v \in V} : L \rightarrow L$
- Начальное значение  $in(v_{entry})$  или  $out(v_{exit})$





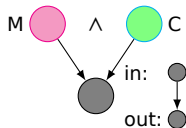
## Окружение потокового анализа

- Потокосный граф  $G = \langle V, E, v_{entry}, v_{exit} \rangle$
- Направление анализа  $D = \{\downarrow, \uparrow\}$
- Полурешетка свойств  $\langle L, \wedge \rangle$
- Потокосные функции  $f_{v \in V} : L \rightarrow L$
- Начальное значение  $in(v_{entry})$  или  $out(v_{exit})$



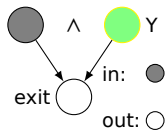
## Окружение потокового анализа

- Поточный граф  $G = \langle V, E, v_{entry}, v_{exit} \rangle$
- Направление анализа  $D = \{\downarrow, \uparrow\}$
- Полурешетка свойств  $\langle L, \wedge \rangle$
- Поточные функции  $f_{v \in V} : L \rightarrow L$
- Начальное значение  $in(v_{entry})$  или  $out(v_{exit})$



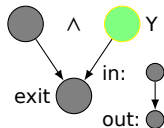
## Окружение потокового анализа

- Поточный граф  $G = \langle V, E, v_{entry}, v_{exit} \rangle$
- Направление анализа  $D = \{\downarrow, \uparrow\}$
- Полурешетка свойств  $\langle L, \wedge \rangle$
- Поточные функции  $f_{v \in V} : L \rightarrow L$
- Начальное значение  $in(v_{entry})$  или  $out(v_{exit})$



## Окружение потокового анализа

- Поточный граф  $G = \langle V, E, v_{entry}, v_{exit} \rangle$
- Направление анализа  $D = \{\downarrow, \uparrow\}$
- Полурешетка свойств  $\langle L, \wedge \rangle$
- Поточные функции  $f_{v \in V} : L \rightarrow L$
- Начальное значение  $in(v_{entry})$  или  $out(v_{exit})$



## Бинарная операция $\wedge$ (*meet*)

- $x \wedge x = x$  (идемпотентность)
- $x \wedge y = y \wedge x$  (коммутативность)
- $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$  (ассоциативность)

## Частичный порядок $\leq$

- $x \leq x$  (рефлексивность)
- $x \leq y \ \& \ y \leq z \Rightarrow x \leq z$  (транзитивность)
- $x \leq y \ \& \ y \leq x \Rightarrow x = y$  (антисимметричность)

## Полурешетка $\langle L, \wedge \rangle$ <sup>1 2</sup>

- $x \leq y \Leftrightarrow_{def} x \wedge y = x$
- $x < y \Leftrightarrow_{def} x \wedge y = x \ \& \ x \neq y$

---

<sup>1</sup>Выполняются ли свойства частичного порядка при таком определении  $\leq$  через  $\wedge$ ?

<sup>2</sup>Можно ли восстановить полурешетку  $\langle L, \wedge \rangle$  имея только частичный порядок  $\langle L, \leq \rangle$ ?

## Бинарная операция $\wedge$ (*meet*)

- $x \wedge x = x$  (*идемпотентность*)
- $x \wedge y = y \wedge x$  (*коммутативность*)
- $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$  (*ассоциативность*)

## Частичный порядок $\leq$

- $x \leq x$  (*рефлексивность*)
- $x \leq y \ \& \ y \leq z \Rightarrow x \leq z$  (*транзитивность*)
- $x \leq y \ \& \ y \leq x \Rightarrow x = y$  (*антисимметричность*)

## Полурешетка $\langle L, \wedge \rangle$ <sup>1 2</sup>

- $x \leq y \Leftrightarrow_{def} x \wedge y = x$
- $x < y \Leftrightarrow_{def} x \wedge y = x \ \& \ x \neq y$

## Свойства полурешеток

Ограниченность снизу

$$\exists \perp \in L : \forall x \in L : \perp \wedge x = \perp \ (\perp \leq x)$$

Ограниченность сверху

$$\exists \top \in L : \forall x \in L : \top \wedge x = x \ (x \leq \top)$$

Высота полурешетки

$$H_L = \max\{|x_1 > x_2 > \dots \in L|\}$$

Обрыв убывающих цепей

$$\forall x_1 > x_2 > \dots \in L : \exists k : \nexists y \in L : x_k > y$$

Произведение полурешеток

$$\begin{aligned} \langle A, \wedge_A \rangle \times \langle B, \wedge_B \rangle &= \langle A \times B, \wedge \rangle, \\ (a, b) \wedge (a', b') &= (a \wedge_A a', b \wedge_B b') \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Выполняются ли свойства частичного порядка при таком определении  $\leq$  через  $\wedge$ ?

<sup>2</sup>Можно ли восстановить полурешетку  $\langle L, \wedge \rangle$  имея только частичный порядок  $\langle L, \leq \rangle$ ?

- Множество подмножеств  $S$   
 $L = 2^S, \wedge = \cap$  (или  $\cup$ )
- Натуральные числа  
 $L = \mathbb{N}, x \wedge y = \min(x, y)$
- Константные целочисленные значения  
 $L = \mathbb{Z} \cup \{T, \perp\}, \perp < \mathbb{Z} < T$
- Иерархия типов в программе  
 $L = Types, x \leq y = x <: y$  (*subtype*)

# Задача потокового анализа

## Окружение потокового анализа

- Поточковый граф  $G = \langle V, E, v_{entry}, v_{exit} \rangle$
- Направление анализа  $D = \{\downarrow, \uparrow\}$
- Полурешетка свойств  $\langle L, \wedge \rangle$
- Поточковые функции  $f_{v \in V} : L \rightarrow L$
- Начальное значение  $in(v_{entry})$  или  $out(v_{exit})$

## Поточковые функции

Монотонная функция  $f$  на  $\langle L, \leq \rangle$

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

Монотонная функция  $f$  на  $\langle L, \wedge \rangle$ <sup>3</sup>

$$f(x \wedge y) \leq f(x) \wedge f(y)$$

Дистрибутивная функция  $f$  на  $\langle L, \wedge \rangle$

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$$

## Система потоковых уравнений

$$in(v_{entry}) \in L$$

$$out(v_{exit}) \in L$$

$$in(v) = \bigwedge_{x \in pred_v} out(x) \quad \text{или} \quad out(v) = \bigwedge_{x \in succ_v} in(x)$$

$$out(v) = f_v(in(v))$$

$$in(v) = f_v(out(v))$$

<sup>3</sup> Докажите эквивалентность определений монотонной функции на  $\langle L, \leq \rangle$  и на  $\langle L, \wedge \rangle$ .



- MOP
- MFP
  - $\exists MFP$
  - $\exists! MFP$
  - $MFP \leq MOP$
- Теорема Килдалла
  - дистрибутивность преобразователей  $\Rightarrow MFP = MOP$
- Неразрешимость

Topsort ??

Спасибо за внимание