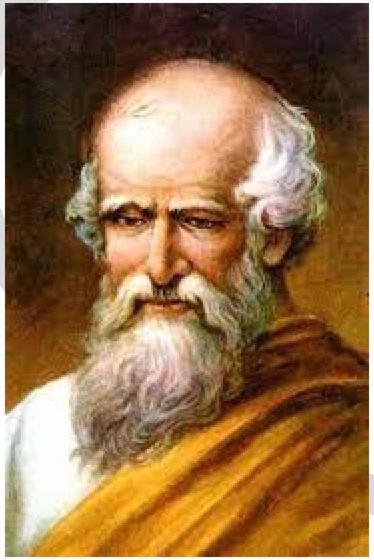
Optimal Control

בקרה אופטימאלית

פונקציית מחיר ריבועית

Quadratic Cost Function

הרצאה 5



"המתמטיקה מגלה את סודותיה לאלה שאוהבים אותה", ארכימדס, 212-287 לפנה"ס

Department of Mechanical Engineering, Shamoon College of Engineering, Beer-Sheva, Israel

הרצאה 5: פונקציית מחיר ריבועית

לרוב, תכנון בקרים אופטימאליים כוללים בדרך כלל פונקציית מחיר שנותנת למתכנן יכולת השפעה על הגודל של משתני המצב והבקרה בפרק הזמן שהמערכת מופעלת.

בדרך כלל, ניתן להשיג ביצועים טובים יותר ממערכת בקרה (למשל, זמן התכנסות קצר יותר, שגיאת יציאה קטנה יותר וכדומה) אם נאפשר ערכי כניסה גדולים יותר.

בכל אופן, עבור מערכות פיזיקאליות, הערך המרבי של אות הבקרה יוגבל על-ידי גבולות הפעולה של רכיבי המערכת (למשל: טווח זוויתי סופי של כנף מטוס, הספק מרבי של גוף חימום).

פונקציית העלות (המחיר) מתאימה אמורה לאפשר למתכנן למצוא פשרה טובה בין מדדי ביצועי המערכת (דיוק, מהירות וכו') לבין גודל/עלות של מאמץ הבקרה.

הרצאה 5: פונקציית מחיר ריבועית

נניח שאנחנו רוצים לתכנן בקר שיניע את המערכת ממצב התחלתי לערכי מצב סופי בפרק זמן סופי, $t=[0,T]$. אחת האפשרויות שניתן לדון בהן בתכנון הבקר, היא פונקציית מחיר מהצורה:

$$(5.1)\quad J=\frac{1}{2}\int_0^T\left(x^TQx+u^TRu\right)dt$$

משתני המצב x וכניסות הבקרה u הם פונקציה של הזמן, ופונקציות אלה הן משתני האופטימיזציה.

באופן כללי, מטריצות המשקל Q ו- R יכולות להיבחר כפונקציות של הזמן.

הקבוע $\frac{1}{2}$ נכלל בשביל לפשט את המשוואות שיוצגו כעת.

באופן דומה, ניתן לבנות פונקציית מחיר על-ידי הגדרת משתני יציאה עם משקול:

$$(5.2)\quad \tilde{x}=W_x x,\ \ \tilde{u}=W_u u$$

$$(5.3)\quad J=\frac{1}{2}\int_0^T\|\tilde{x}\|^2+\|\tilde{u}\|^2\,dt$$

משוואה (5.3) שקולה ל- (5.1) מתי ש: $Q=W_x^TW_x$ ו- $R=W_u^TW_u$. מטריצות המשקל W_x ו- W_u צריכות להיבחר בהתאם לחשיבות היחסית של מזעור כל רכיב של x ו- u, בהתאמה.

הרצאה 5: פונקציית מחיר ריבועית

$$(5.1)\quad J=\frac{1}{2}\int_0^T(x^TQx+u^TRu)dt=\phi(x(T),T)+\int_0^T L(x,u,t)dt$$

על פי ניסוח הבקרה האופטימאלית, כדי למזער את פונקציית המחיר (5.1), עלינו לדון בהמילטוניאן:

$$(5.4)\quad \mathcal{H}(x,u,t)=L(x,u,t)+\lambda^T(Ax+Bu)=\frac{1}{2}\left(x^TQx+u^TRu\right)+\lambda^T(Ax+Bu)$$

כאשר משוואות המצב ומשוואות מצב העזר הן:

$$(5.5)\quad \dot{x}(t)=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\lambda}=Ax(t)+Bu(t)$$

$$(5.6)\quad -\dot{\lambda}(t)=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x}=A^T\lambda(t)+\frac{dL}{dx}=A^T\lambda(t)+Qx$$

תנאי (אילוץ) הסטציונריות הוא:

$$(5.7)\quad 0=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x}=\frac{\partial L}{\partial u}+B^T\lambda=Ru+B^T\lambda$$

בהנחה ש- $R>0$, הבקר האופטימאלי יהיה (מתוך 5.7):

$$(5.8)\quad u^*=-R^{-1}B^T\lambda(t)$$

לכן, משוואות (5.5) ו- (5.6) יכולות להיכתב:

$$(5.9)\quad \begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{\lambda}\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}A & -BR^{-1}B^T\\ -Q & -A^T\end{bmatrix}}_{Haniltonian\ matrix}\begin{bmatrix}x\\ \lambda\end{bmatrix}$$

הרצאה 4 עמוד 19: בקרה אופטימאלית קלאסית - תזכורת

ניסוח בקרה אופטימאלית:

מודל המערכת: $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

מדד הביצועים: $J = \phi(x(T),T) + \int_0^T L(x,u,t)dt$

אילוץ תנאי סוף: $g\big(x(T)\big) = 0$

בקר אופטימאלי:

- המילטוניאן Hamilonian: $\mathcal{H}(x,u,t) = L(x,u,t) + \lambda^T(Ax + Bu)$
- משוואות המצב: $\dot{x}(t) = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\lambda} = Ax(t) + Bu(t)$
- משוואות המחיר (משוואות עזר) Costate equation: $-\dot{\lambda}(t) = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x} = A^T\lambda(t) + \frac{dL}{dx}$
- אילוץ סטציונרי (קבוע): $0 = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial u} + B^T\lambda$
- תנאיי שפה: $x(0)$ (נתון)

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}v - \lambda^T\right)\Bigg|_{t=T} dx(T) + \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial t}v + \mathcal{H}\right)\Bigg|_{t=T} dT = 0$$

הרצאה 5: פונקציית מחיר ריבועית

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}}_{Haniltonian\ matrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

משוואה (5.9) מגדירה לחלוטין את הדינאמיקה של המערכת תחת האילוץ של בקר אופטימאלי. בשביל לפתור את x, λ ו- u^*, עלינו לדון גם בערכים התחלתיים ו/או סופיים. תנאי הגבול הנדרשים ל- x ידועים בדרך כלל. **החלק המסובך** הוא למצוא את תנאי הגבול עבור λ התואמים את אלה של x. באופן כללי, עלינו למצוא את הערך ההתחלתי (או הסופי) של λ כך שהפתרון הכולל למערכת המילטוניאן המורחבת (5.9) תואמת את כל תנאי הגבול עבור $x(t)$.

האופן בו נמצא את הפתרון עבור λ, יהיה תלוי אם אנו דנים בזמן סופי T או לא (זמן אינסופי). זה יהיה תלוי גם אם המצב $x(T)$ קבוע באופטימיזציה, למשל כאשר כניסת הבקר חייבת להניע את מצבי המערכת ליעד הרצוי $x(T) = r$.
נראה כי מקרה עם קבוע $x(T)$ מוביל לחוק בקרה בחוג פתוח מאשר במקרים בהם $x(T)$ חופשי לקחת כל ערך סופי אשר יוביל לחוק בקרת משוב (בחוג סגור).

הרצאה 5: פונקציית מחיר ריבועית

אופטימיזציה בזמן סופי – Optimal Finite-Time Transitions

כפי שצוין קודם לכן, כאשר מקטע הזמן לבקרה עם ערך סופי קבוע, פתרונות הבקר הם פתרונות של בקרה בחוג פתוח.

המשמעות היא שכניסת הבקר האופטימאלי $u^*(t)$ תהיה תלויה רק בערכי ההתחלה וערכי הסוף של משתני המצב.

ראשית, נבחן את המקרה בו מטרת הבקרה היא להשיג: $x(T) = r$ בזמן סופי קבוע ובו זמנית ערך מינימאלי של פונקציית מחיר J.

(5.1) $J = \frac{1}{2}\int_0^T (x^T Q x + u^T R u)dt$

(5.8) $u^* = -R^{-1}B^T\lambda(t)$

הרצאה 5: פונקציית מחיר ריבועית

<u>מקרה 1:</u> $\boldsymbol{x(T) = r, R > 0, Q = 0}$ **with** $\boldsymbol{T}$ **and** $\boldsymbol{r}$ **fixed**

מקרה זה מתייחס לפונקציית מחיר שתוארה ב- (5.1) עם $Q = 0$. פונקציית המחיר היא:

$$(5.10)\quad J = \frac{1}{2}\int_0^T u^T R u\, dt$$

אנחנו גם רוצים ש: $x(T) = r$ עבור T נתון.

הפתרון למשוואות המצב $\dot{x} = Ax + Bu$ עם בקר אופטימאלי (5.8) הוא:

$$(5.11)\quad x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu^*(\tau)d\tau = e^{At}x(0) - \int_0^t e^{A(t-\tau)}BR^{-1}B^T\lambda(\tau)d\tau$$

משוואת מצב העזר המצב (5.6) תהיה:

$$-\dot{\lambda}(t) = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x} = A^T\lambda(t) + \frac{dL}{dx} = A^T\lambda(t) + \cancelto{0}{Q}x = A^T\lambda(t)$$

והפתרון ניתן לניסוח:

$$(5.12)\quad \lambda(t) = e^{A^T(T-t)}\lambda(T)$$

נציב את (5.12) ב- (5.11), נקבל:

$$(5.13)\quad x(t) = e^{At}x(0) - \int_0^t e^{A(t-\tau)}BR^{-1}B^T e^{A^T(T-t)}d\tau\, \lambda(T)$$

הרצאה 5: פונקציית מחיר ריבועית

$(5.13)\ \ x(t) = e^{At}x(0) - \int_0^t e^{A(t-\tau)}BR^{-1}B^T e^{A^T(T-t)}d\tau\, \lambda(T)$

$(2.11)\ \ \Gamma_c(t) = \int_0^t e^{A\tau}BB^T e^{A^T\tau}d\tau$

$(5.12)\ \ \lambda(t) = e^{A^T(T-t)}\lambda(T)$

$(5.8)\ u^* = -R^{-1}B^T\lambda(t)$

נסדר מחדש את (5.13), באופן הבא:

$$(5.14)\ \lambda(T) = G(T)^{-1}\left(e^{AT}x(0) - r\right)$$

כאשר $G(T)$ היא ***מטריצת משקל גרמיאן הבקירות*** (Rechability/Controllability Gramian):

$$(5.15)\ G(T) \triangleq \int_0^t e^{A(t-\tau)}BR^{-1}B^T e^{A^T(T-t)}d\tau$$

לכן, ממשוואות (5.8), (5.12) ו- (5.14), הבקר האופטימאלי ניתן לניסוח:

$$\boldsymbol{(5.16)\ u^* = -R^{-1}B^T\lambda(t) = -R^{-1}B^T G(T)^{-1}\left(e^{AT}x(0) - r\right)}$$

הרצאה 5: פונקציית מחיר ריבועית

$$(5.9)\ \begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{\lambda}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}A & -BR^{-1}B^T\\ -Q & -A^T\end{bmatrix}}_{\substack{Haniltonian\ matrix\\ \mathcal{H}}}\begin{bmatrix}x\\ \lambda\end{bmatrix}$$

מקרה 2: $\boldsymbol{x(T) = r, R > 0, Q \neq 0 \text{ with } T \text{ and } r \text{ fixed}}$

מתאים למקרה הכללי בו $Q \neq 0$, מטריצת ההמילטוניאן (מתוך 5.9) היא:

$$(5.17)\ \mathcal{H} = \begin{bmatrix}A & -BR^{-1}B^T\\ -Q & -A^T\end{bmatrix}$$

הפתרון הכללי עבור מערכת המילטוניאן היא:

$$(5.18)\ \begin{bmatrix}x(t)\\ \lambda(t)\end{bmatrix} = e^{\mathcal{H}t}\begin{bmatrix}x(0)\\ \lambda(0)\end{bmatrix},\quad e^{\mathcal{H}t} = \begin{bmatrix}W_{11}(t) & W_{12}(t)\\ W_{21}(t) & W_{22}(t)\end{bmatrix}$$

לכן עבור $t = T$:

$$(5.19)\ \begin{bmatrix}x(T)\\ \lambda(T)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}W_{11}(T) & W_{12}(T)\\ W_{21}(T) & W_{22}(T)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(0)\\ \lambda(0)\end{bmatrix}$$

ממשוואה ראשונה של (5.19):

$$(5.20)\ r = x(T) = W_{11}(T)x(0) + W_{12}(T)\lambda(0)$$

נסדר מחדש את (5.20):

$$(5.21)\ \lambda(0) = W_{12}^{-1}(T)\big(r - W_{11}(T)x(0)\big)$$

ממשוואה שנייה של (5.19):

$$(5.22)\ \lambda(t) = W_{21}(t)x(0) + W_{22}(t)\lambda(0)$$

הצבה (5.21) ב- (5.22):

$$(5.23)\ \lambda(t) = \Big(W_{21}(t) - W_{22}(t)W_{12}^{-1}(T)W_{11}(T)\Big)\,x(0) + W_{22}(t)W_{12}^{-1}(T)r$$

הרצאה 5: פונקציית מחיר ריבועית

(5.23) $\lambda(t) = \left(W_{21}(t) - W_{22}(t)W_{12}^{-1}(T)W_{11}(T)\right)x(0) + W_{22}(t)W_{12}^{-1}(T)r$

(5.18) $\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = e^{\mathcal{H}t}\begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix}, \quad e^{\mathcal{H}t} = \begin{bmatrix} W_{11}(t) & W_{12}(t) \\ W_{21}(t) & W_{22}(t) \end{bmatrix}$

(5.16) $u^* = -R^{-1}B^T\lambda(t) = -R^{-1}B^TG(T)^{-1}(e^{AT}x(0) - r)$

מכאן, חוק הבקרה האופטימאלי הוא:

(5.25) $\boldsymbol{u^* = -R^{-1}B^T\lambda(t)}$

$$\boldsymbol{= -R^{-1}B^T\left(W_{21}(t) - W_{22}(t)W_{12}^{-1}(T)W_{11}(T)\right)x(0) - R^{-1}B^TW_{22}(t)W_{12}^{-1}(T)r}$$

משוואה זו נראית מסובכת, אך היא כוללת רק פונקציות של זמן, כאשר ניתן למצוא אותן ישירות

על ידי חישוב ערכים עבור $e^{\mathcal{H}t}$.

כאשר $Q = 0$ הפתרון (5.25) יהיה זהה למקרה הקודם - משוואה (5.16).

(5.9) $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}}_{\substack{Haniltonian\ matrix \\ \mathcal{H}}}\begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}$

הרצאה 5: פונקציית מחיר ריבועית

<u>דוגמא 5.1:</u>

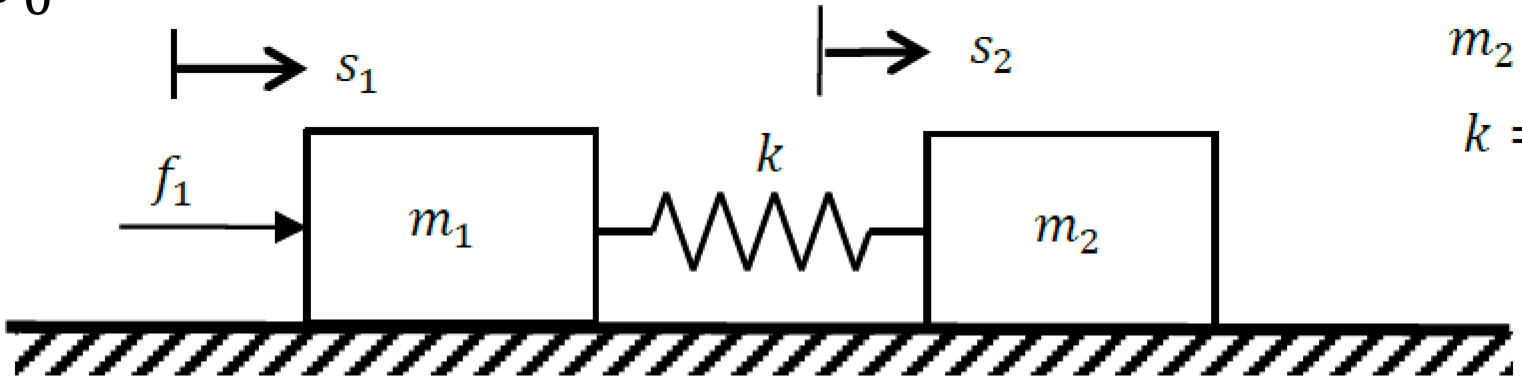
נדון במערכת מסה, קפיץ כמתואר באיור. נניח שרוצים להזיז את שתי המסות ממצב מנוחה למרחק 2 מטר ב-4 שניות וללא תנועה שיורית ועם ערך מזערי של פונקציית המחיר:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T q(s_1 - s_2)^2 + u^2 dt$$

$m_1 = 1\,kg$

$m_2 = 0.5\,kg$

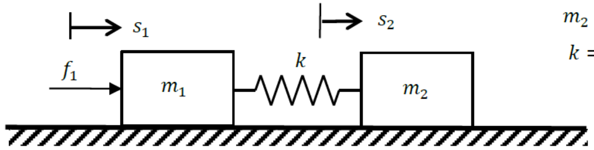
$k = 2\,N/m$



נדון בשני מקרים: $q = 0$ ו- $q = 100$.

חשבו ותארו את התנועה האופטימאלית ואת כניסת הבקר לכל מקרה.

הרצאה 5: פונקציית מחיר ריבועית



<u>פתרון דוגמא 5.1:</u>

נציין תחילה, שהמודל במרחב המצב פותח והוצג בדוגמא 1.1, עבור ווקטור משתני המצב $x = [s_1 \quad s_2 \quad \dot{s}_1 \quad \dot{s}_2]^T$. לכן, $s_1 - s_2 = [1 \quad -1 \quad 0 \quad 0]x$ ומכאן פונקציית המחיר יכולה להיות מבוטאת באמצעות משתני המערכת כך:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T q(s_1 - s_2)^2 + u^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^T (x^T[1 \quad -1 \quad 0 \quad 0]^T q[1 \quad -1 \quad 0 \quad 0]x + u^T u)dt$$

פונקציית המחיר כאן זהה ל- (5.1), עם:

$$\text{(5.1)} \quad J = \frac{1}{2}\int_0^T (x^T Q x + u^T R u)dt$$

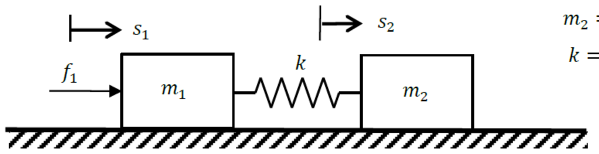
$$Q = q\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ and } \quad R = 1$$

תנאי התחלה והסוף ניתנים לייצוג, באופן הבא:

$$x(0) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \text{ and } \quad x(T) = [2 \quad 2 \quad 0 \quad 0]^T$$

כאשר, $T = 4\ sec$.

הרצאה 5: פונקציית מחיר ריבועית



$m_1 = 1\ kg$
$m_2 = 0.5\ kg$
$k = 2\ N/m$

<u>פתרון דוגמא 5.1:</u>

המסלול האופטימאלי של המצב נתון על-ידי משוואה (5.18):

$$(5.17)\ \mathcal{H} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$

$$(5.18)\ \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = e^{\mathcal{H}t} \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix},\quad e^{\mathcal{H}t} = \begin{bmatrix} W_{11}(t) & W_{12}(t) \\ W_{21}(t) & W_{22}(t) \end{bmatrix}$$

כאשר תנאי ההתחלה של משתנה מצב העזר (מתוך 5.21):

$$(5.21)\ \lambda(0) = W_{12}^{-1}(T)\big(r - W_{11}(T)x(0)\big)$$

בהתאם לכך, ניתן להשתמש בקוד מטלב לחישוב ותיאור הפתרון של הבקר האופטימאלי.

הרצאה 5: פונקצית מחיר ריבועית

פתרון דוגמא 5.1:

```
% Matlab code for Example 5.1
% system model
A = [0 0 1 0; 0 0 0 1; -2 2 0 0; 4 -4 0 0]; B = [0;0;1;0]; C = [1 0 0 0;0 1 0 0]
T = 4 % final time
x0 = [0 0 0 0]' % initial state values
xT = [2 2 0 0]' % final state values
q = 100; Q = q*[1 -1 0 0;-1 1 0 0;0 0 0 0;0 0 0 0] % state weighting
R = 1 % control weighting
H = [A -B*inv(R)*B';-Q -A']; % Hamiltonian
W_T = expm(H*T) % transition matrix
W11_T = W_T(1:4,1:4) % transition submatrix
W12_T = W_T(1:4,5:8) % transition submatrix
lambda0 = inv(W12_T)*(xT - W11_T*x0) % initial co-state values
% simulation
t = linspace(0,T,200); N = length(t)
for i = 1:N
z = expm(H*t(i))*[x0;lambda0] % extended state trajectory
x(1:4,i) = z(1:4) % state trajectory
lambda(1:4,i) = z(5:8) % costate trajectory
u(i) = -B'*inv(R)*lambda(:,i) % optimal control input
y(1:2,i) = C*x(:,i) % system output (mass displacements)
end
figure(1); subplot(2,1,1); plot(t,y(1,:),'-b',t,y(2,:),'--k')
xlabel('time (s)'); ylabel('mass displacements (m)')
legend('x_1','x_2')
subplot(2,1,2); plot(t,u); xlabel('time (s)')
ylabel('control input u (N)'); axis([0 4 -4 4])
```

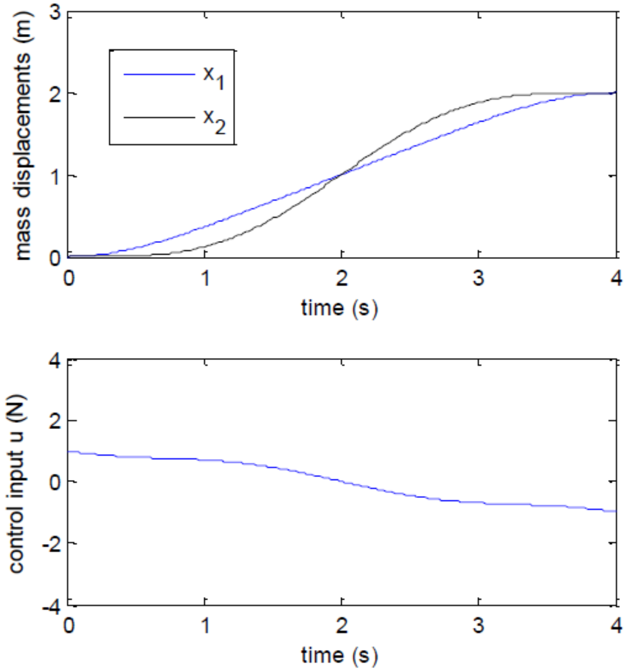
(5.17) $\mathcal{H} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$

(5.18) $e^{\mathcal{H}t} = \begin{bmatrix} W_{11}(t) & W_{12}(t) \\ W_{21}(t) & W_{22}(t) \end{bmatrix}$

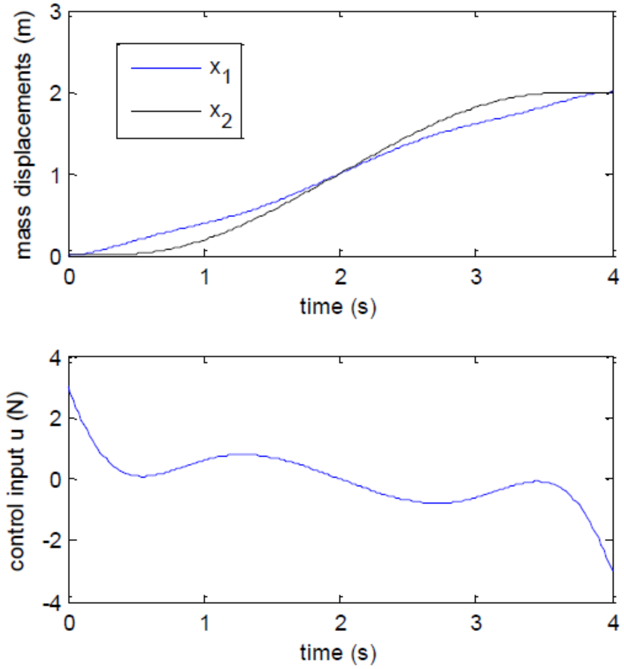
(5.21) $\lambda(0) = W_{12}^{-1}(T)\big(r - W_{11}(T)x(0)\big)$

(5.18) $\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = e^{\mathcal{H}t} \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix}$

Case 1: $q = 0$



Case 2: $q = 100$



(5.8) $u^* = -R^{-1}B^T\lambda(t)$

הרצאה 5: פונקציית מחיר ריבועית

אופטימיזציה בזמן אינסופי – Optimal Infinite-Time Transitions

במקרה זה, רוצים למזער את פונקציית המחיר J בזמן אינסופי.

פונקציית המחיר בזמן אינסופי תמיד זהה או קטנה מפונקציית המחיר בזמן סופי.

פונקציית המחיר בזמן סופי יורדת מונוטונית עם T ושואפת לערך קבוע בזמן אינסופי ($T \to \infty$).

השינוי בזמן של משתני המצב והמחיר בפתרון האופטימלי הוא:

$$(5.25)\quad \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = e^{\mathcal{H}t} \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix}, \mathcal{H} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$

על מנת שהמחיר יהיה סופי בגבול בו $T \to \infty$, נדרש לאלץ:

$$(5.26)\quad \lim_{T\to\infty} x(T) \to 0$$

הרצאה 5: פונקציית מחיר ריבועית

$$(5.9)\quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}}_{\substack{Haniltonian\ matrix \\ \mathcal{H}}} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}$$

ניתן להראות כי ל- $\mathcal{H}$ יש n ערכים עצמיים בחצי המישור השמאלי ו- n בחצי המישור הימני.

כמו כן, מיפוי הערכים העצמיים הוא סימטרי יחסית לציר המדומה: אם μ הוא ערך עצמי של $\mathcal{H}$ אז $-\mu$ גם ערך עצמי של $\mathcal{H}$.

$$(5.18)\quad \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = e^{\mathcal{H}t} \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix},\quad e^{\mathcal{H}t} = \begin{bmatrix} W_{11}(t) & W_{12}(t) \\ W_{21}(t) & W_{22}(t) \end{bmatrix}$$

לכן, נוכל להשתמש בפירוק ערכים עצמיים של $\mathcal{H}$ באופן הבא:

תזכורת הרצאה 2 עמ' 2

$$AV = VL,\qquad L = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$(5.27)\quad \mathcal{H} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

כאשר M היא מטריצה אלכסונית הכוללת ערכים עצמיים בחצי המישור הימני (לא יציב) ו- $-M$ כוללת ערכים עצמיים בחצי המישור השמאלי (יציב). הווקטורים העצמיים מחולקים בהתאם, כל המצבים (המודים) הלא יציבים והיציבים מופרדים.

$$(5.28)\quad \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = e^{\mathcal{H}t} \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-MT} & 0 \\ 0 & e^{MT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix}$$

HW

הרצאה 5: פונקציית מחיר ריבועית

$$(5.28)\quad \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-MT} & 0 \\ 0 & e^{MT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix}$$

נאפשר (נאלץ):

$$(5.29)\quad \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

לכן (5.28) הופכת להיות:

$$(5.30)\quad \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-MT} & 0 \\ 0 & e^{MT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{bmatrix} e^{-MT} a}_{Stable\ component} + \underbrace{\begin{bmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{bmatrix} e^{MT} b}_{Unstable\ component}$$

משוואה זו מצביעה על כך שאם רוצים $\lim_{T\to\infty} x(T) \to 0$ אז זה דורש ש- $b = 0$ (בהנחה ש- V_{12} לא סינגולארית) וכך ממשוואה (5.29) מקבלים:

$$(5.31)\quad \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{bmatrix} a$$

מ- (5.31) ניתן לצמצם את a ולבטא את הערך ההתחלתי של וקטור מצב העזר (λ) במונחים של הערך ההתחלתי של וקטור המצב:

$$(5.32)\quad \lambda(0) = V_{21} V_{11}^{-1} x(0)$$

(5.25) $\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = e^{\mathcal{H}t} \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix}, \mathcal{H} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$

הרצאה 5: פונקציית מחיר ריבועית

הבקר האופטימאלי $u^* = -R^{-1}B^T\lambda(t)$ יכול להיות מיושם בחוג פתוח על-ידי חישוב מקדים של $\lambda(t)$ במצב offline על-ידי שימוש במשוואה (5.25). **לחילופין**, ניתן ליישם אותו בחוג סגור על-ידי הנחה שבכל רגע בזמן אנו רוצים ליישם את הערך ההתחלתי של הבקר האופטימאלי (בזמן אינסופי) המבוסס על הערכים הנוכחיים (הנמדדים או משוערכים) של x (5.32).

(5.32) $\lambda(t) = V_{21}V_{11}^{-1}x(t)$

במקרה זה, חוק הבקרה הוא חוק בקרת משוב מצב עם הגברים קבועים, מהצורה:

(5.33) $u^*(t) = -R^{-1}B^T\lambda(t) = -R^{-1}B^TV_{21}V_{11}^{-1}x(t)$

חוק בקרת המשוב האופטימאלי, נקרא בדרך כלל LQR (Linear Quadratic Regulator) המוביל למערכת יציבה בחוג סגור (אם $\left(Q^{\frac{1}{2}},A\right)$ ברי צפייה והצמד (A,B) ברי שליטה, המשמעות היא שכל המודים הלא יציבים (unstable) הם ברי שליטה (controllable)).

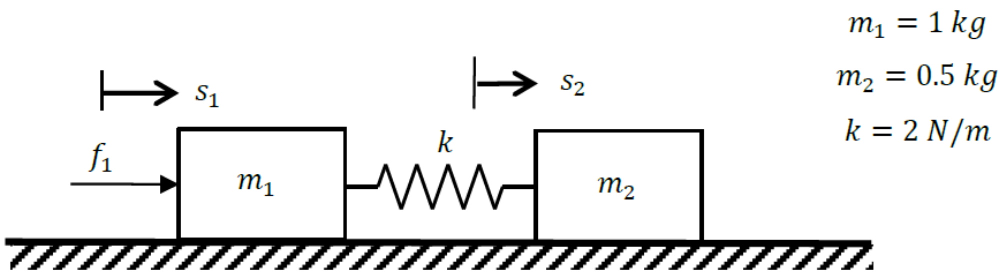
מערכת הבקרה האופטימלית בחוג סגור תהיה:

$$\dot{x} = Ax + Bu = (A + BK)x, \qquad K \stackrel{\text{def}}{=} -R^{-1}B^TV_{21}V_{11}^{-1}$$

דוגמא 5.2:

עבור המערכת הנתונה באיור, חשבו את הבקר האופטימאלי בזמן אינסופי והציגו את התנהגות המערכת עבור $x(0) = [-2 \quad -2 \quad 0 \quad 0]^T$. משקלי המצב Q ששימשו בדוגמא 5.1 הם אינם בחירה טובה לבעיה זאת. יש לכך שתי סיבות: הראשונה, כדי שיהיה קיים פתרון עבור בקר אופטימלי משוב מצב יציב צריך להתקיים שהצמד $\left(Q^{\frac{1}{2}}, A\right)$ ברי צפייה, עבור המשקל הנבחר בדוגמא 5.1, הם לא ברי צפייה. גם המשקל על המצבים בדוגמא 5.1 נוטה להעניש את התזוזה היחסית של המסות מה שימנע מהבקר האופטימלי להשיג תזוזה מהירה בחוג הסגור. לכן, נדון במטריצת משקל Q, אשר מענישה את הממוצע הריבועי של תזוזת שתי המסות:

$$Q = q\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ and } \quad R = 1$$



נדון בשני מקרים: $q = 1000$ ו- $q = 10$.

הרצאה 5: פונקציית מחיר ריבועית

```
% Matlab code for Example 5.2
% system model
A = [0 0 1 0; 0 0 0 1; -2 2 0 0; 4 -4 0 0]; B = [0;0;1;0]; C = [1 0 0 0;0 1 0 0]
x0 = [-2 -2 0 0]' % initial state values

q = 10
Q = q*[1 0 0 0;0 1 0 0;0 0 0 0;0 0 0 0] % state weighting
R = 1 % control weighting

H = [A -B*inv(R)*B'; -Q -A']; % Hamiltonian
[V,D] = eig(H) % eigenvalue decomposition
Lambda = diag(D) % eigenvalues are diagonal elements of D
[dummy,I] = sort(real(Lambda)) % sort eigenvalues by increasing real part
Lambda = Lambda(I) % reorder eigenvalues (by increasing real part)
V = V(:,I) % reorder eigenvectors to match eigenvalues

V11 = V(1:4,1:4) % partition stable eigenvectors
V21 = V(5:8,1:4) % partition stable eigenvectors

K = -inv(R)*B'*V21*inv(V11) % optimal state feedback gain

% simulation
t = linspace(0,10,200)
N = length(t)
Ac = A + B*K % closed loop system matrix
for i = 1:N
x(1:4,i) = expm(Ac*t(i))*x0 % state trajectory
u(i) = K*x(1:4,i) % optimal control input
y(1:2,i) = C*x(:,i) % system output (mass displacements)
end
```

__פתרון דוגמא 5.2:__

תחילה עלינו לחשב פירוק ערכים עצמיים של מטריצת המילטוניאן ולחלק לווקטורים עצמיים בהתאם למשוואה (5.27). הגברי משוב המצב האופטימאליים יכולים להיות מחושבים בהתאם ל- (5.33). להלן קוד מטלב לפתרון:

$$(5.25)\quad \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = e^{\mathcal{H}t}\begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix}, \mathcal{H} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$

$$(5.27)\quad \mathcal{H} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

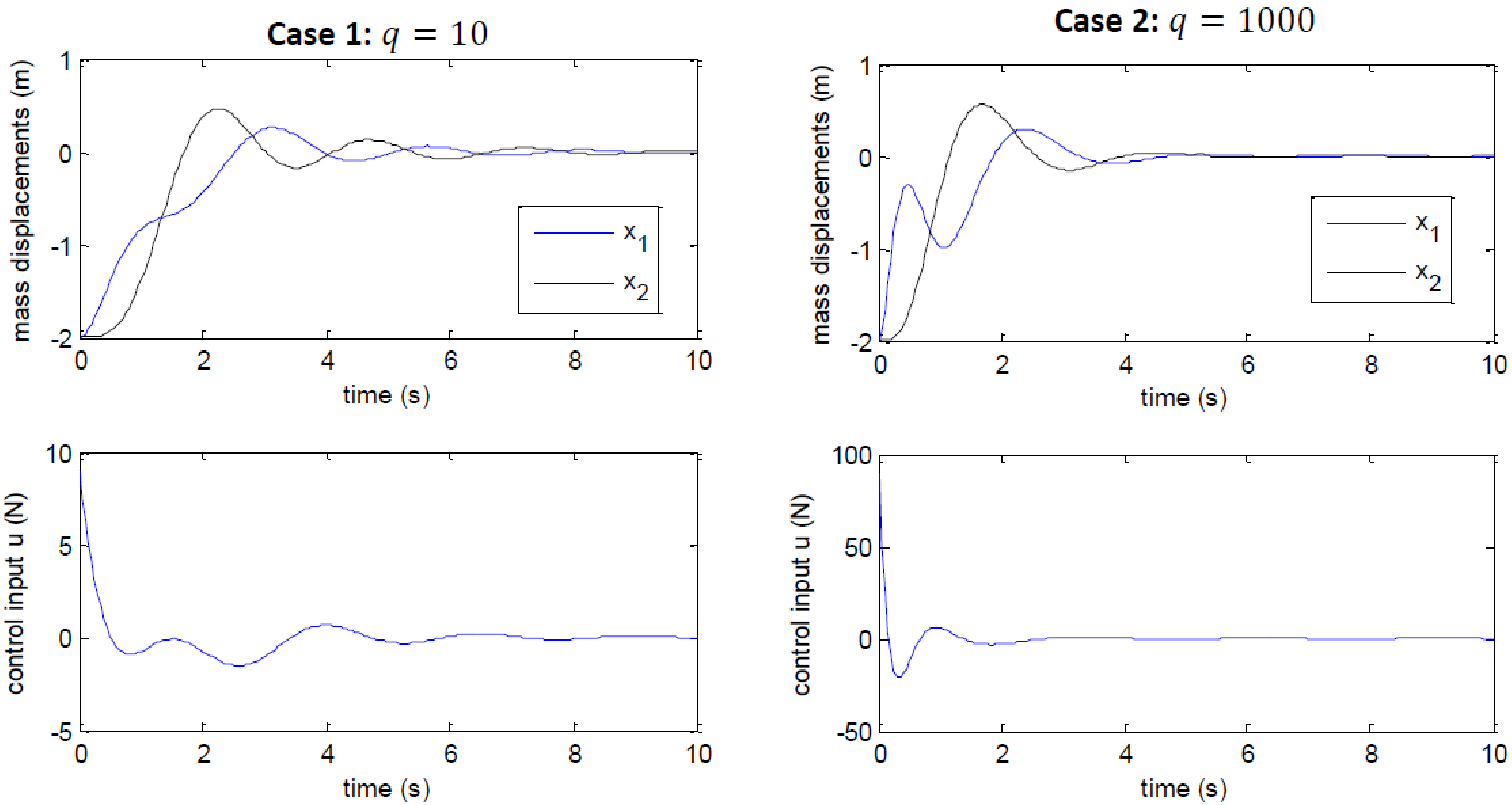
$$(5.33)\quad u^* = -R^{-1}B^T V_{21} V_{11}^{-1} x(t)$$

Solutions:

$q = 10:\ u^* = -5.26\,x_1 + 0.786\,x_2 - 3.24\,x_3 - 1.25\,x_4 \qquad (K = [-5.26 \quad 0.786 \quad -3.24 \quad -1.25])$

$q = 1000:\ u^* = -45.0\,x_1 + 0.232 x_2 - 9.48\,x_3 - 15.8\,x_4 \qquad (K = [-45.0 \quad 0.232 \quad -9.48 \quad -15.8])$

<u>פתרון דוגמא 5.2:</u>



HW ליישם בגישה החלופית בהתאם למשוואה (5.33) עמוד 19

הרצאה 5: פונקציית מחיר ריבועית

השתנות פונקציית המחיר:

גישה חלופית למציאת בקרים אופטימליים (זאת במקום לפתור את משוואות מצב העזר λ) היא לגזור משוואה המתארת את השינוי בזמן של פונקציית המחיר.

נתבונן במערכת חופשית (לא מבוקרת) הבאה:

(5.34) $\dot{x} = Ax$

בבקרה אופטימלית, ***Cost-to-Go*** (מחיר להגעה) הוא מושג מרכזי שמתאר את פונקציית המחיר המצטברת מהמצב הנוכחי (לרוב זמן נוכחי t) ועד לסיום האופק התכנוני (לרוב זמן סיום T). נניח ש- *cost-to-go* עבור ערך מצב התחלתי $x(t)$ בזמן t מוגדרת כך:

(5.35) $J(x(t),t) = \frac{1}{2}\int_t^T x(\tau)^T Q x(\tau) d\tau$

ממשוואה (1.22), $x(\tau) = e^{A(\tau-t)}x(t)$ ניתן לכתוב את (5.35):

(5.36) $J(x(t),t) = \frac{1}{2}\int_t^T x(t)^T e^{A^T(\tau-t)} Q e^{A(\tau-t)} x(t) d\tau = \frac{1}{2} x(t)^T \left(\int_t^T e^{A^T(\tau-t)} Q e^{A(\tau-t)} d\tau\right) x(t)$

הרצאה 5: פונקציית מחיר ריבועית

$$(5.36)\quad J(x(t),t) = \frac{1}{2}\int_t^T x(t)^T e^{A^T(\tau-t)} Q e^{A(\tau-t)} x(t) d\tau = \frac{1}{2} x(t)^T \left(\int_t^T \boldsymbol{e^{A^T(\tau-t)} Q e^{A(\tau-t)} d\tau}\right) x(t)$$

את זה ניתן לכתוב:

$$(5.37)\quad J(x(t),t) = \frac{1}{2} x(t)^T S(t) x(t)$$

כאשר:

$$(5.38)\quad S(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^T \boldsymbol{e^{A^T(\tau-t)} Q e^{A(\tau-t)} d\tau}$$

$$(5.38)\quad S(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^T e^{A^T(\tau-t)} Q e^{A(\tau-t)} d\tau$$

הרצאה 5: פונקציית מחיר ריבועית

ניתן להראות באמצעות משוואה (5.38) (תרגיל בית להוכיח) כי:

$$(5.39)\quad S(t+\Delta t) = S(t) - (Q + A^T S(t) + S(t)A)\Delta t$$

ולכן:

$$(5.40)\quad -\frac{dS}{dt} = A^T S + SA + \mathrm{Q}$$

זאת היא (5.40) ***משוואת ליאפונוב*** (כפי שהוצג בהרצאה 2 עמוד 7), שהיא משוואה דיפרנציאלית המגדירה את השינוי בזמן של מטריצה סימטרית $S(t)$. ניתן לפתור אותה על-ידי אינטגרציה של צעדי זמן, המהווה שיטה חלופית (5.37) לאינטגרל של פונקציית המחיר (5.35).

זה חייב להיות באינטגרציה לאחור מזמן $S(T)$ ועד ל- $S(t)$ (עם $t < T$) ועם $S(T) = 0$.

בגבול $T - t \to \infty$, אז $\frac{dS}{dt}$ שואף לערך קבוע ובתנאי שמטריצה A יציבה. בנוסף, $S(t) > 0$ אם הצמד $\left(Q^{\frac{1}{2}}, A\right)$ בר צפייה.

$$(5.37)\quad J(x(t),t) = \frac{1}{2} x(t)^T S(t) x(t) \qquad (5.35)\quad J(x(t),t) = \frac{1}{2}\int_t^T x(\tau)^T Q x(\tau) d\tau$$

$(5.33)\quad u^* = -R^{-1}B^TV_{21}V_{11}^{-1}x(t) = Kx(t)$

הרצאה 5: פונקציית מחיר ריבועית

פתרון רגולציה ריבועית – שיטה ישירה

נדון שוב בבעיית הרגולציה הריבועית בזמן אינסופי:

$$(5.41)\quad \dot{x} = Ax + Bu$$

עם פונקציית מחיר (5.42) עבור תנאי התחלה כלשהו $x(t_0)$:

$$(5.42)\quad J\big(x(t_0)\big) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\big(x(\tau)^TQx(\tau) + u(\tau)^TRu(\tau)\big)d\tau$$

כאשר $x(t)$ תלוי ב- $x(t_0)$ וב- $u(t)$.

אם נניח שחוק הבקרה האופטימלי שממזער את $J\big(x(t_0)\big)$ עבור כל $x(t_0)$ הוא בצורת משוב-מצב $u = Kx$ (כפי שהוצג קודם לכן במשוואה (5.33)), אז:

$$(5.43)\quad \dot{x} = (A + BK)x$$

עם פונקציית המחיר להגעה (cost-to-go) עבור ערך המצב ההתחלתי $x(t_0)$ נתונה על-ידי:

$$(5.44)\quad J\big(x(t_0)\big) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} x(\tau)^T(Q + K^TRK)x(\tau)d\tau$$

(5.35) $J(x(t),t)=\frac{1}{2}\int_t^T x(\tau)^T Q x(\tau)d\tau$

(5.44) $J\big(x(t_0)\big)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^T x(\tau)^T (Q+K^TRK) x(\tau)d\tau$

הרצאה 5: פונקציית מחיר ריבועית

השוואה עם פונקציית המחיר ששימשה עבור מערכת בלי כניסה (5.35), אנחנו יכולים לראות ש- A מוחלפת במטריצה $A+BK$ ו- Q מוחלף עם $Q+K^TRK$.

לכן, הגודל של פונקציית המחיר עבור מצב התחלתי $x(t_0)$ נתונה ממשוואה (5.37) על-ידי:

$$(5.45)\quad J\big(x(t_0)\big)=\frac{1}{2}x(t_0)^T S(t_0)x(t_0)$$

כאשר, בהתאם למשוואה (5.40), המטריצה הסימטרית S היא הפתרון של המצב היציב למשוואה:

$$(5.46)\quad -\frac{dS}{dt}=(A+BK)^TS+S(A+BK)+Q+K^TRK$$

כדי למזער את העלות J לתנאיי התחלה שרירותיים, יש להוריד את קצב העלייה של S ככל שהזמן מתקדם לאחור. כלומר, יש למזער את $-\frac{ds}{dt}$ כך ש- $S(t_0)$ יהיה מינימלי.

$$(5.47)\quad -\frac{dS}{dt}=A^TS+SA+K^TB^TS+SBK+Q+K^TRK$$

$$(5.48)\quad =A^TS+SA+(K^TR+SB)R^{-1}(RK+B^TS)-SBR^{-1}B^TS+Q$$

ניתן לראות שבשביל למזער את $-\frac{ds}{dt}$, צריכים לבחור K כך ש: $RK+B^TS=0$, כך שהביטוי הריבועי הכולל את K מתאפס.

(5.37) $J(x(t),t)=\frac{1}{2}x(t)^TS(t)x(t)$ (5.40) $-\frac{dS}{dt}=A^TS+SA+Q$

$$(5.48)\ -\frac{dS}{dt} = A^T S + SA + (K^T R + SB)R^{-1}(RK + B^T S) - SBR^{-1}B^T S + Q$$

$$(5.27)\ \mathcal{H} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

הרצאה 5: פונקציית מחיר ריבועית

לכן הפתרון האופטימלי הוא:

$$(5.49)\ \ K = -R^{-1}B^T S$$

באופן כללי, S ו- K, הן פונקציות של הזמן, אך מכיוון שאנו מחפשים פתרון בזמן אינסופי לבקרה, אזי S מתכנס לערך של מצב יציב, לכן ממשוואה (5.48), S יהיה:

$$(5.50)\ \ A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q = 0$$

זוהי ***משוואת ריקאטי האלגברית*** שניתן לפתור אותה באמצעות מטלב.

ניתן להראות כי הפתרון נתון על-ידי:

$$(5.51)\ \ S = V_{21}V_{11}^{-1}$$

תזכורת: V_{11} ו- V_{21} נוצרים מהווקטורים העצמיים היציבים של מטריצת המילטוניאן $(\mathcal{H})$

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$

הרצאה 5: פונקציית מחיר ריבועית

(למעשה, כך מטלב פותרת זאת). דבר נוסף שאנו יכולים להסיק על-ידי השוואה לפתרון (5.49) עם (5.8) שמסלול האופטימלי של משוואות מצב העזר (λ) נתונות על-ידי:

(5.52) $\lambda(t)=S(t)x(t)=\frac{dJ^*}{dx}$

ניתן להראות שהמשוואה $\lambda(t)=\frac{dJ^*}{dx}$ נכונה לכל צורה של פונקציית מחיר על-ידי שימוש ב- Bellman’s Principle of Optimality המוביל למשוואות המילטון-ג'יקובי-בלמן (Hamilton-Jacobi-Bellman-equation).

שימו לב פונקציית המחיר האופטימאלית J^* נתונה על-ידי משוואה (5.37).

(5.8) $u^*=-R^{-1}B^T\lambda(t)$

(5.49) $K=-R^{-1}B^T S$

(5.49) -> (5.8): $(-R^{-1}B^T S)x=-R^{-1}B^T\lambda(t)\rightarrow\lambda(t)=S(t)x(t)$

<u>דוגמא 5.3:</u>

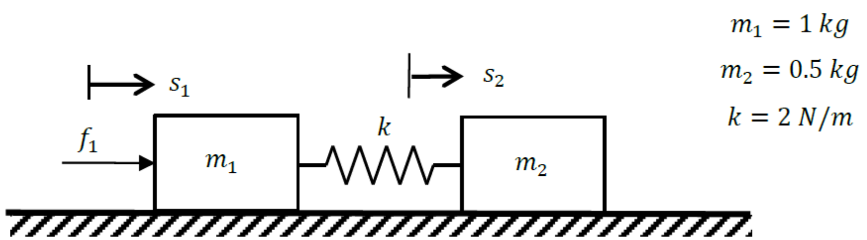
חשבו את חוק בקרת משוב מצב האופטימלי בזמן אינסופי עבור המערכת שהוצגה בדוגמא 5.2 על ידי פתרון משוואות ריקאטי האלגברית (5.50). בדקו שהפתרון זהה לשיטת המילטון בדוגמא 5.2.

<u>פתרון דוגמא 5.3:</u>

ניתן להשתמש בקוד מטלב לפתרון משוואה:

$$A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q = 0 \quad (5.50)$$

```
% Matlab code for Example 5.3
% system model
A = [0 0 1 0; 0 0 0 1; -2 2 0 0; 4 -4 0 0]; B = [0;0;1;0]; C = [1 0 0 0;0 1 0 0]
x0 = [-2 -2 0 0]' % initial state values
q = 10
Q = q*[1 0 0 0;0 1 0 0;0 0 0 0;0 0 0 0] % state weighting
R = 1 % control weighting
S = are(A, B*inv(R)*B', Q) % X = are(A,B,C) solves A'*X + X*A - X*B*X + C = 0
K = -inv(R)*B'*S % optimal state feedback gain
```



הרצאה 5: פונקציית מחיר ריבועית

פתרון דוגמא 5.3:

Case 1: q = 10,

$$S = \begin{bmatrix} 18.5444 & -4.0414 & 5.2585 & 4.8356 \\ -4.0414 & 9.6255 & -0.7863 & 0.7796 \\ 5.2585 & -0.7863 & 3.2430 & 1.2486 \\ 4.8356 & 0.7796 & 1.2486 & 3.2762 \end{bmatrix},$$

$$K = [-5.2585 \quad 0.7863 \quad -3.2430 \quad -1.2486].$$

Case 2: q = 1000,

$$S = \begin{bmatrix} 381.9985 & 42.0473 & 44.9537 & 150.0815 \\ 42.0473 & 664.7117 & -0.2324 & 124.8771 \\ 44.9537 & -0.2324 & 9.4820 & 15.8036 \\ 150.0815 & 124.8771 & 15.8036 & 174.9978 \end{bmatrix},$$

$$K = [-44.9537 \quad 0.2324 \quad -9.4820 \quad -15.8036].$$

$(5.51)\quad S = V_{21}V_{11}^{-1}$

הרצאה 5: פונקציית מחיר ריבועית

HAMILTONIAN EIGENSTRUCTURE AND THE RICCATI EQUATION

נתון ש: $\begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{bmatrix}$ הם ווקטורים עצמיים יציבים של מטריצת המילטוניאן, לכן:

$$\mathcal{H}\begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{bmatrix}[-M]$$

כאשר $-M$ כוללים n ערכים עצמיים יציבים של $\mathcal{H}$. נכפיל מצד ימין ב- V_{11}^{-1} נקבל:

$$\mathcal{H}\begin{bmatrix} I \\ V_{21}V_{11}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ V_{21}V_{11}^{-1} \end{bmatrix}V_{11}[-M]V_{11}^{-1}$$

נאפשר ל: $S = V_{21}V_{11}^{-1}$ (כפי שהוצג ב- (5.51)), כעת נכפיל מצד שמאל ב- $[S \quad -I]$

$$[S \quad -I]\mathcal{H}\begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix} = \underbrace{[S \quad -I]\begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix}}_{=0}V_{11}[-M]V_{11}^{-1}$$

לכן, S יהיה בהתאם ל:

$$[S \quad -I]\mathcal{H}\begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix} = 0$$

הרצאה 5: פונקציית מחיר ריבועית

$[S \quad -I]\mathcal{H}\begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix} = 0$

נציב את:

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$

$$[S \quad -I]\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix} = 0$$

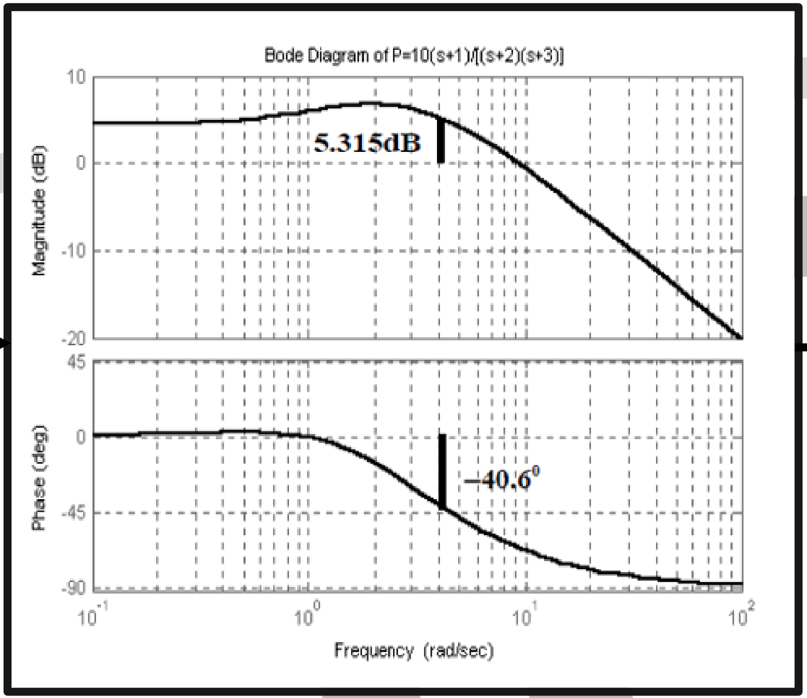
נקבל את משוואת ריקאטי האלגברית:

$$(5.50) \quad A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q = 0$$

לפיכך, $S = V_{21}V_{11}^{-1}$ הוא פתרון למשוואת ריקאטי האלגברית הזו. ניתן גם להראות כי פתרון זה הוא ממשי, סימטרי ויחיד במינו (אם כי הבחירה של V_{11} ו- V_{21} אינה כזו).

תגובת התדר - תזכורת

$Plant\ \ G_p(s)$

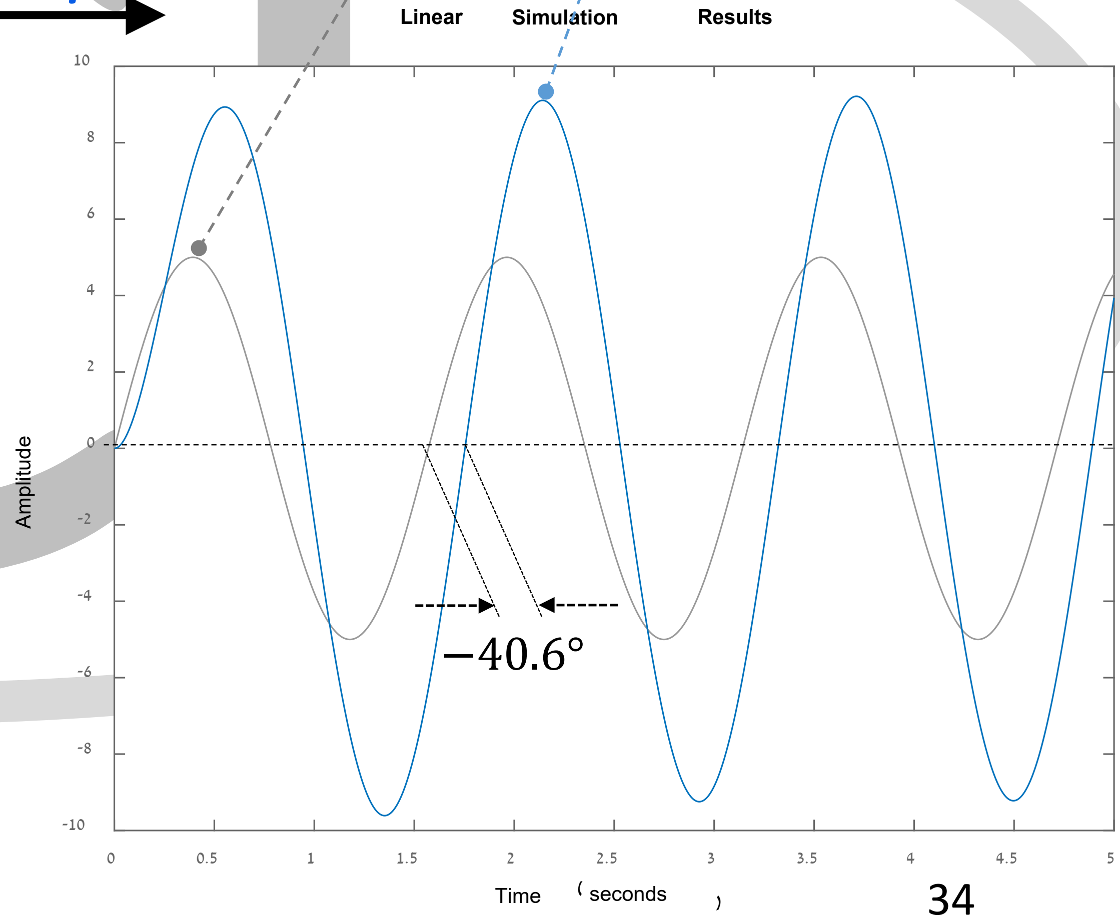


Input

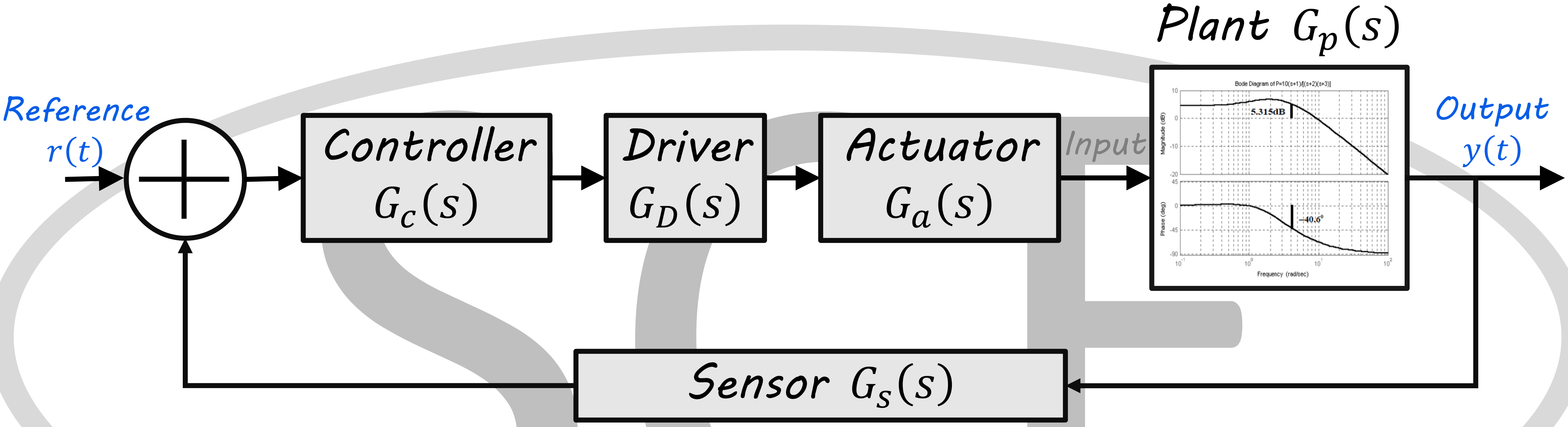
$u(t) = 5\sin(4t)$

Output

$10^{(5.315/20)} = 1.844$



עודפי יציבות / מקדמי ביטחון בתכנון מערכת בקרה - תזכורת



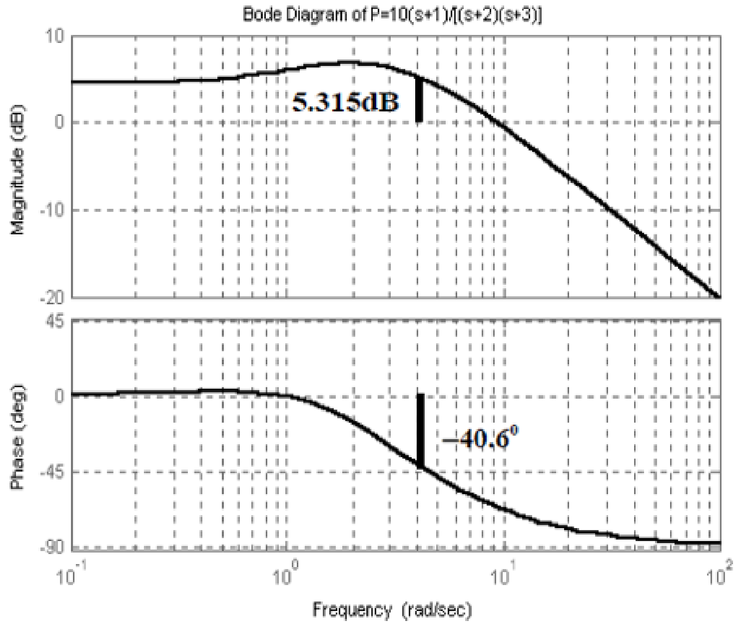
$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G_c(s)G_D(s)G_a(s)G_p(s)}{1+G_c(s)G_D(s)G_a(s)G_p(s)G_s(s)}$$

$$1+G_c(s)G_D(s)G_a(s)G_p(s)G_s(s)=0\rightarrow G_c(s)G_D(s)G_a(s)G_p(s)G_s(s)=-1$$

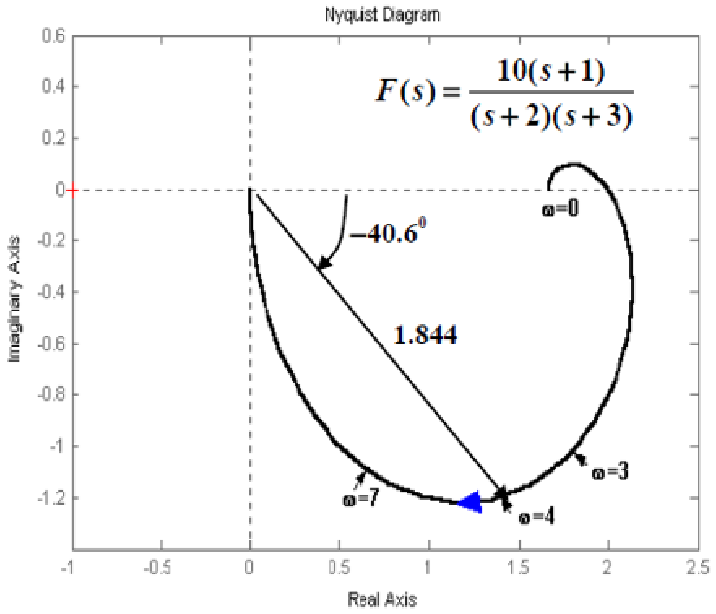
$$\left\|G_c(s)G_D(s)G_a(s)G_p(s)G_s(s)\right\|=1,\qquad \angle\left(G_c(s)G_D(s)G_a(s)G_p(s)G_s(s)\right)=180^\circ$$

דיאגרמת נייקוויסט - תזכורת

דיאגרמת נייקוויסט מהווה תיאור גרפי של תגובת התדר, באופן שונה מדיאגרמת בודה. דיאגרמת בודה מציגה גרפים נפרדים עבור ההגבר והפאזה, כתלות בתדר. דיאגרמת נייקוויסט מהווה תיאור פולארי משולב של ההגבר והפאזה, במישור המרוכב, כאשר התדר משמש כפרמטר.

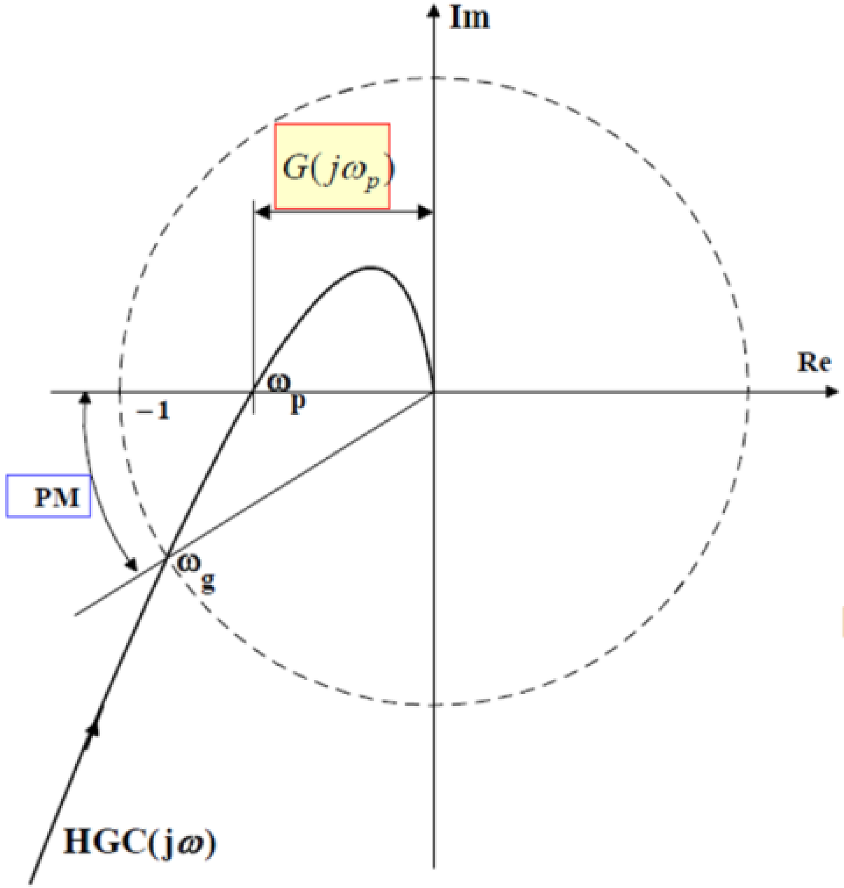


תאור בודה



תאור פולרי

עודף הגבר (GM) - תזכורת



<u>תדר מעבר הפאזה</u> (ω_p) – התדר בו הפאזה של L היא -180^0

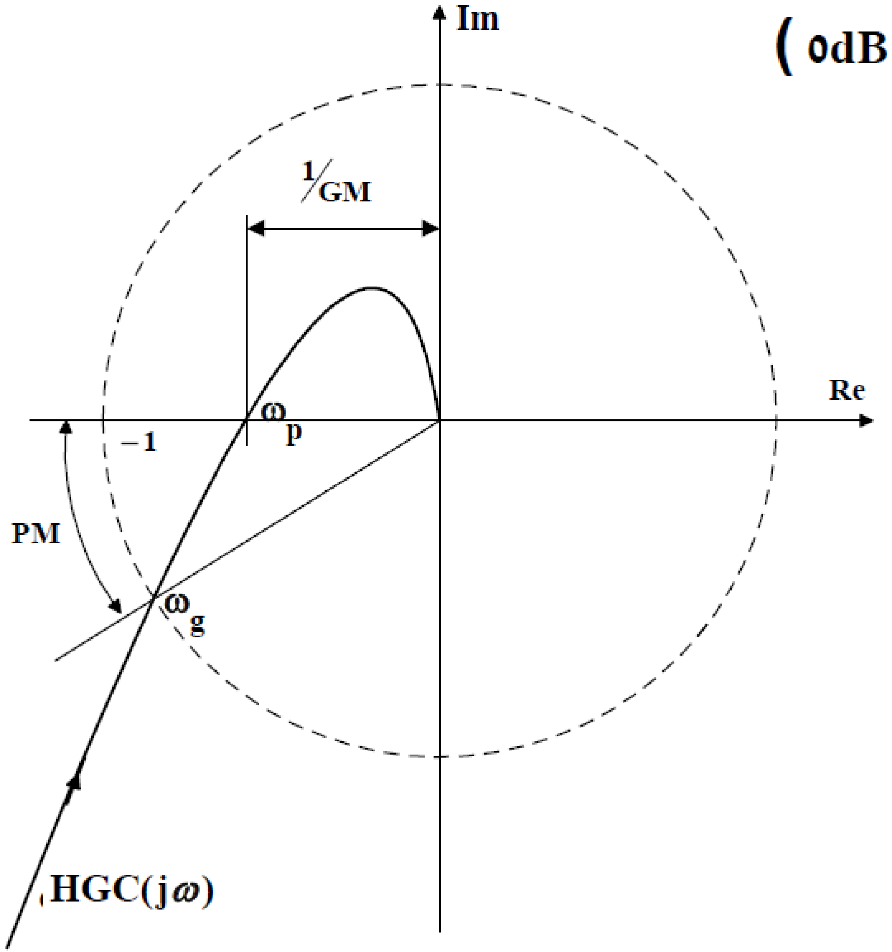
עודף הגבר (GM): פי כמה ניתן להגדיל / להקטין הגבר החוג הפתוח עד להבאת החוג הסגור לסף היציבות.

$$GM=\frac{1}{|L(j\omega_p)|}$$

$$\{L(s)=G(s)H(s)C(s)\}$$

עודף פאזה (PM) - תזכורת

<u>תדר מעבר ההגבר</u> (ω_g) – התדר בו ההגבר (אמפליטודה) של $|L(j\omega)|$ הוא 1 ($0dB$)



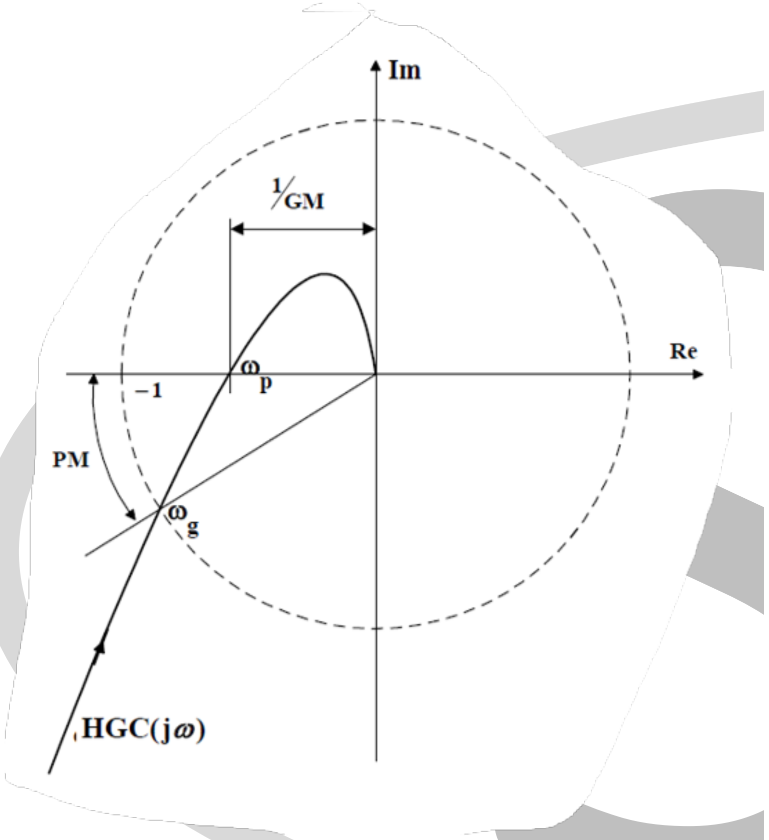
עודף פאזה (PM):

תוספת / הפחתה מינימלית של פאזה המביאה החוג הסגור לסף היציבות.

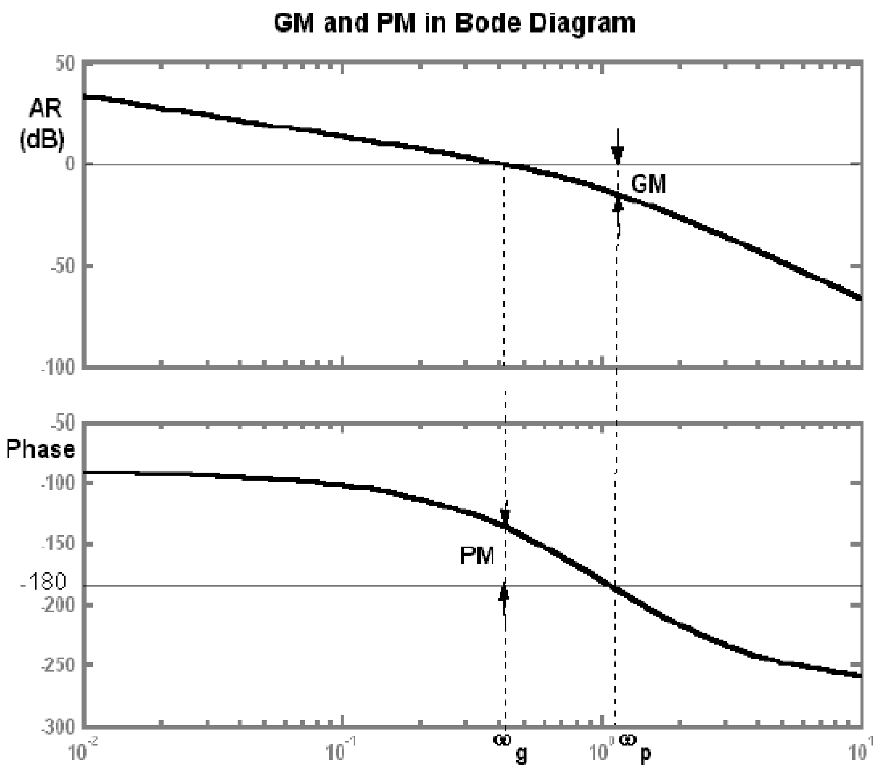
$$\boxed{PM = \arg[L(j\omega_g)] + 180}$$

$$\{L(s) = G(s)H(s)C(s)\}$$

עודף הגבר (GM) ועודף פאזה (PM) בדיאגרמת בודה - תזכורת



<u>תדר מעבר ההגבר</u> (ω_g) – התדר בו
ההגבר (אמפליטודה) של $|L(j\omega)|$ הוא 0dB



<u>תדר מעבר הפאזה</u> (ω_p) – התדר
בו הפאזה של L היא -180^0

בהנחה שהחוג הסגור יציב,

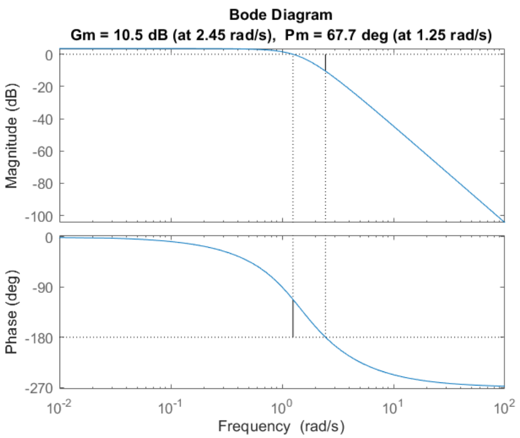
<u>עודף הגבר (GM)</u> – בכמה dB ניתן
להעלות את האמפליטודה ב ω_p עד
ל 0dB

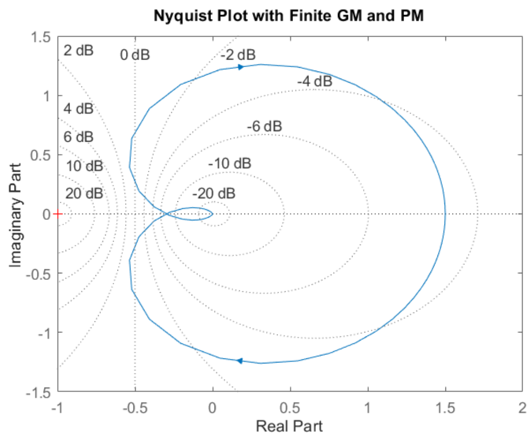
<u>עודף פאזה (PM)</u> – בכמה מעלות ניתן
להוריד (תוספת פיגור פאזה) את גרף
הפאזה בתדירות ω_g עד ל -180^0

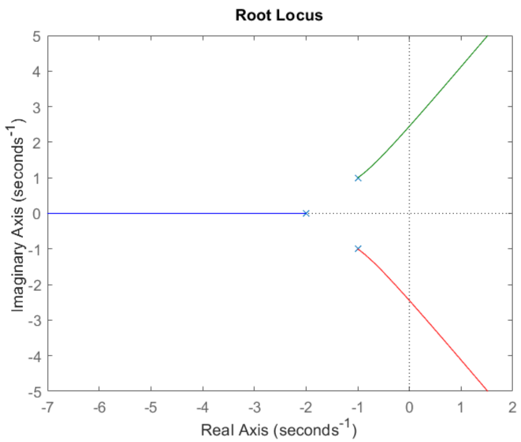
דוגמה - עודף הגבר (GM) ועודף פאזה (PM)

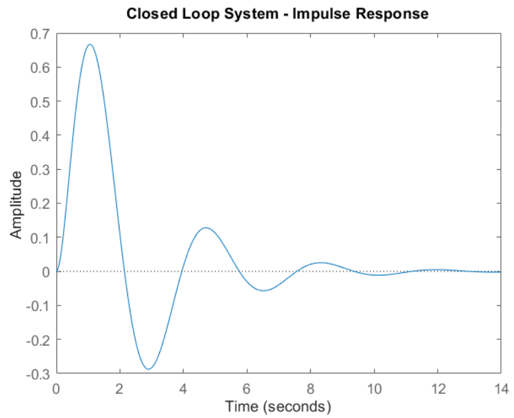
נתונות פונקציות תמסורת של מערכות פיזיקאליות הבאות: $G_1(s)=\frac{6}{(s^2+2s+2)(s+2)}$ ו- $G_2(s)=\frac{500}{s^2+4s+100}$ עבור כל מערכת נתחו את ה- GM ו- PM.

```
clc; close all; clear all
% Define transfer function
s = tf('s')
sys_open_loop = 6/((s^2+2*s+2)*(s+2)); % GM = 3.33409; PM = 1/1.2/s
% Nyquist plot
figure (1);
nyquist(sys_open_loop);
grid on;
title('Nyquist Plot with Finite GM and PM');
xlabel('Real Part');
ylabel('Imaginary Part');
% Calculate and display Gain Margin (GM) and Phase Margin (PM)
figure (2);
margin(sys_open_loop);
[Gm, Pm, Wcg, Wcp] = margin(sys_open_loop);
disp(['Gain Margin (GM): ', num2str(Gm), ' (linear scale)']);
disp(['Gain Margin (GM): ', num2str(20*log10(Gm)), ' dB']);
disp(['Phase Margin (PM): ', num2str(Pm), ' degrees']);
disp(['Gain Crossover Frequency (Wcg): ', num2str(Wcg), ' rad/s']);
disp(['Phase Crossover Frequency (Wcp): ', num2str(Wcp), ' rad/s']);
figure (3);
rlocus (sys_open_loop)
figure (4);
impulse (sys_open_loop/(1+sys_open_loop))
title('Closed Loop System - Impulse Response');
```







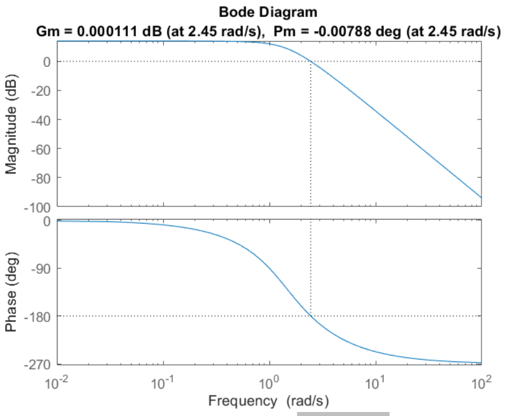


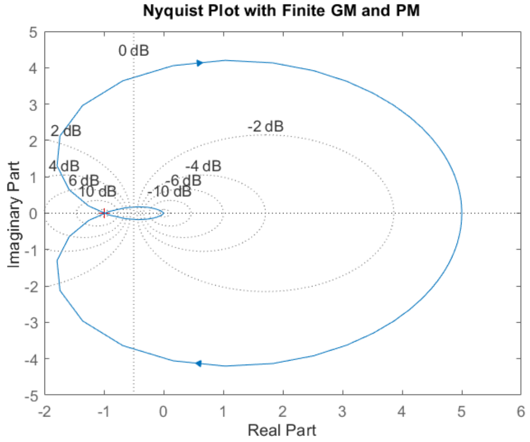

```
Gain Margin (GM): 3.3341 (linear scale)
Gain Margin (GM): 10.4597 dB
Phase Margin (PM): 67.7122 degrees
Gain Crossover Frequency (Wcg): 2.4497 rad/s
Phase Crossover Frequency (Wcp): 1.2525 rad/s
```

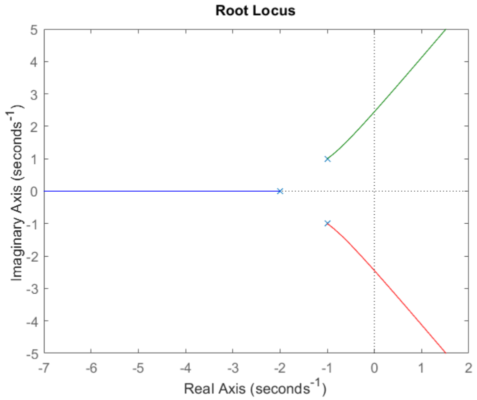
דוגמה - עודף הגבר (GM) ועודף פאזה (PM)

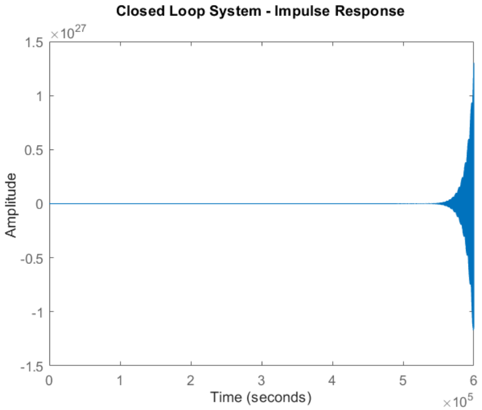
נתונות פונקציות תמסורת של מערכות פיזיקאליות הבאות: $G_1(s) = \frac{6}{(s^2+2s+2)(s+2)}$ ו- $G_2(s) = \frac{500}{s^2+4s+100}$ עבור כל מערכת נתחו את ה- GM ו- PM.

```
clc; close all; clear all
% Define transfer function
s = tf('s')
sys_open_loop = 3.33409*6/((s^2+2*s+2)*(s+2));
% Nyquist plot
figure (1);
nyquist(sys_open_loop);
grid on;
title('Nyquist Plot with Finite GM and PM');
xlabel('Real Part');
ylabel('Imaginary Part');
% Calculate and display Gain Margin (GM) and Phase Margin (PM)
figure (2);
margin(sys_open_loop);
[Gm, Pm, Wcg, Wcp] = margin(sys_open_loop);
disp(['Gain Margin (GM): ', num2str(Gm), ' (linear scale)']);
disp(['Gain Margin (GM): ', num2str(20*log10(Gm)), ' dB']);
disp(['Phase Margin (PM): ', num2str(Pm), ' degrees']);
disp(['Gain Crossover Frequency (Wcg): ', num2str(Wcg), ' rad/s']);
disp(['Phase Crossover Frequency (Wcp): ', num2str(Wcp), ' rad/s']);
figure (3);
rlocus (sys_open_loop)
figure (4);
impulse (sys_open_loop/(1+sys_open_loop))
title('Closed Loop System - Impulse Response');
```







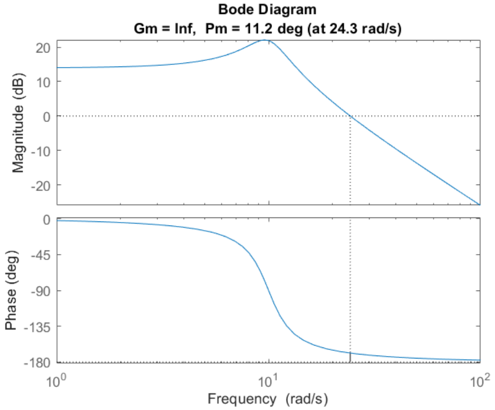


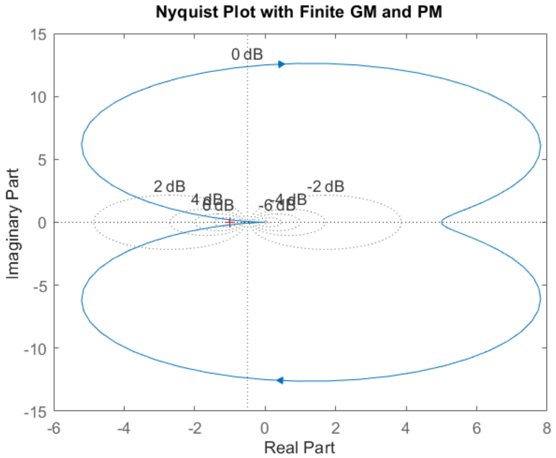

```
Gain Margin (GM): 1 (linear scale)
Gain Margin (GM): 0.00011118 dB
Phase Margin (PM): -0.0078811 degrees
Gain Crossover Frequency (Wcg): 2.4497 rad/s
Phase Crossover Frequency (Wcp): 2.4497 rad/s
```

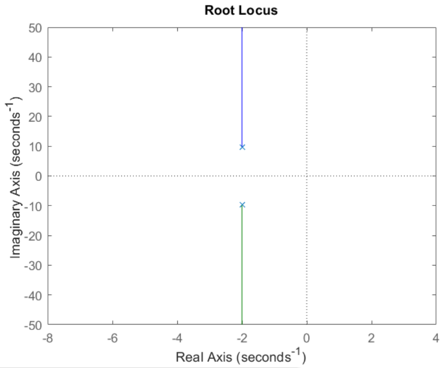
דוגמה - עודף הגבר (GM) ועודף פאזה (PM)

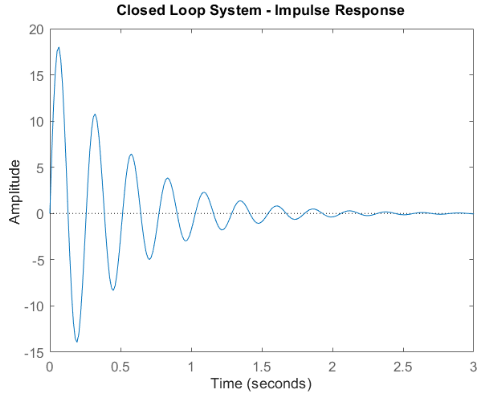
נתונות פונקציות תמסורת של מערכות פיזיקאליות הבאות: $G_1(s) = \frac{6}{(s^2+2s+2)(s+2)}$ ו- $G_2(s) = \frac{500}{s^2+4s+100}$ עבור כל מערכת נתחו את ה- GM ו- PM.

```
clc; close all; clear all
% Transfer function (second-order system)
num = [K * omega_n^2]; % Numerator
den = [1, 2 * zeta * omega_n, omega_n^2]; % Denominator
% Create the transfer function
sys_open_loop = tf(num, den);
% Nyquist plot
figure (1);
nyquist(sys_open_loop);
grid on;
title('Nyquist Plot with Finite GM and PM');
xlabel('Real Part');
ylabel('Imaginary Part');
% Calculate and display Gain Margin (GM) and Phase Margin
(PM)
figure (2);
margin(sys_open_loop);
[Gm, Pm, Wcg, Wcp] = margin(sys_open_loop);
disp(['Gain Margin (GM): ', num2str(Gm), ' (linear scale)']);
disp(['Gain Margin (GM): ', num2str(20*log10(Gm)), ' dB']);
disp(['Phase Margin (PM): ', num2str(Pm), ' degrees']);
disp(['Gain Crossover Frequency (Wcg): ', num2str(Wcg), '
rad/s']);
disp(['Phase Crossover Frequency (Wcp): ', num2str(Wcp), '
rad/s']);
figure (3);
rlocus (sys_open_loop)
```



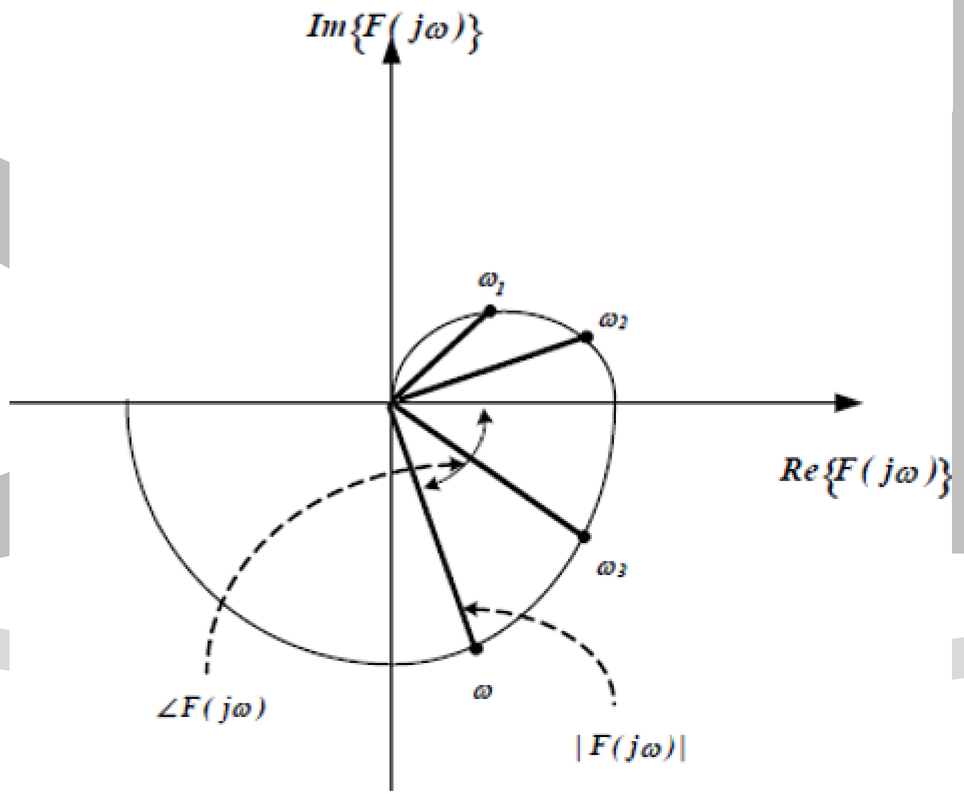





```
Gain Margin (GM): Inf (linear scale)
Gain Margin (GM): Inf dB
Phase Margin (PM): 11.2079 degrees
Gain Crossover Frequency (Wcg): Inf rad/s
Phase Crossover Frequency (Wcp): 24.3018 rad/s
```

דיאגרמת נייקוויסט (Nyquist)

דרך שימושית לתיאור גרפי של תגובת התדר הוא באמצעות דיאגרמת נייקוויסט (Nyquist).
זהו תיאור של $Re\{F(j\omega)\}$ ו- $Im\{F(j\omega)\}$ במערכת קרטזית, כאשר התדר ω הוא פרמטר, או לחילופין תיאור פולארי כאשר גם כאן ω הוא פרמטר והקואורדינטות הן $|F(j\omega)|$ והזווית $\angle F(j\omega)$



דיאגרמת נייקוויסט (Nyquist)

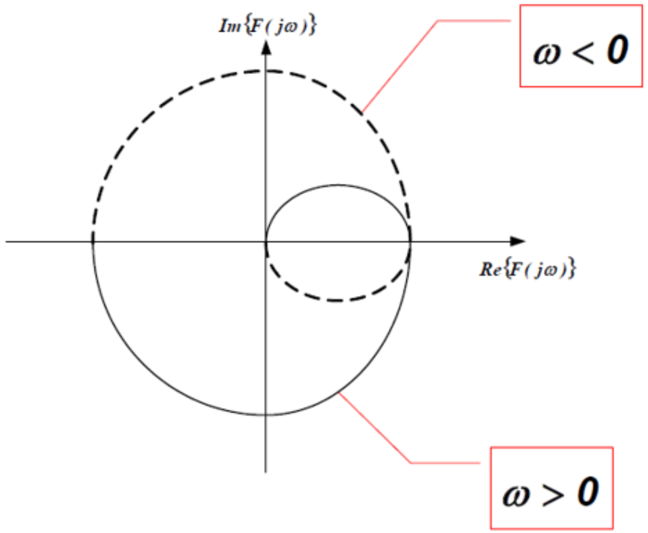
לדיאגרמת נייקוויסט חשיבות רבה כאמצעי לבדיקת יציבות מערכות בחוג סגור. נדגיש כי:

I. הדרך הנוחה לציור הדיאגרמה היא בעזרת מחשב. ניתן לצייר ב"אופן איכותי" ללא מחשב וממנו להפיק מידע רב.

II. רצוי, לצייר הן עבור תדרים חיוביים והן עבור שליליים. קיימת הסימטריה:

$$Re\{F(-j\omega)\} = Re\{F(j\omega)\}$$
$$Im\{F(-j\omega)\} = Im\{F(j\omega)\}$$

ולכן, בדוגמא הנ"ל, הדיאגרמה "השלמה" נראית כך:

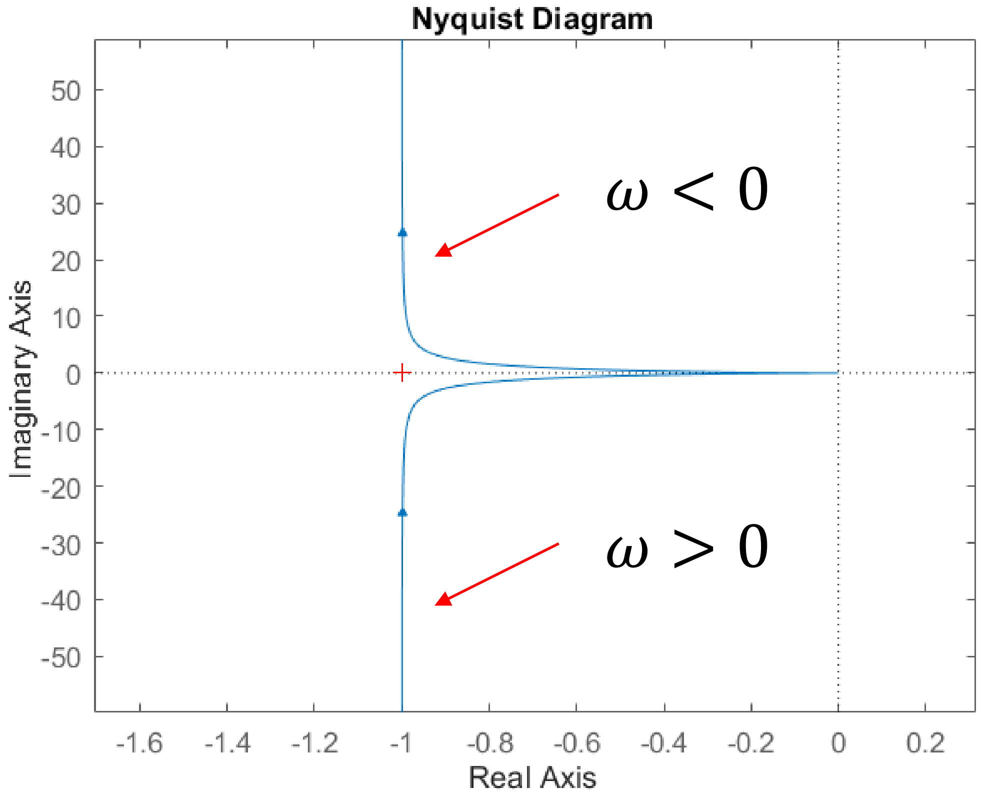


דיאגרמת נייקוויסט (Nyquist)

III. כאשר יש למערכת קטבים על ציר המדומה $j\omega$, יש "בריחה" של הדיאגרמה לאינסוף בתדרי הקטבים.

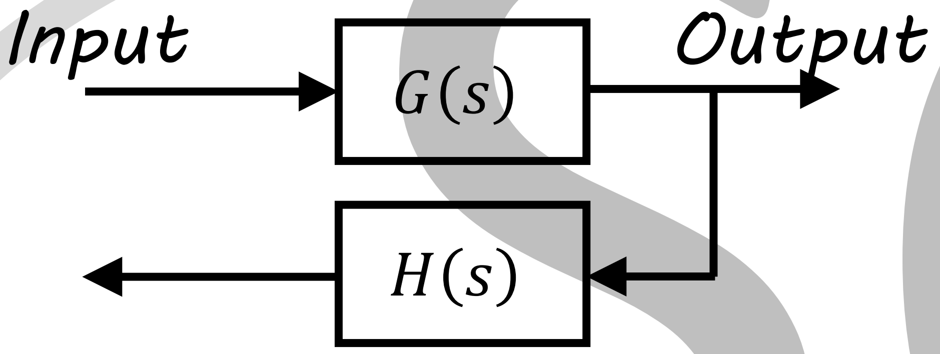
דוגמא:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$



פונקציית תמסורת בחוג פתוח ובחוג סגור

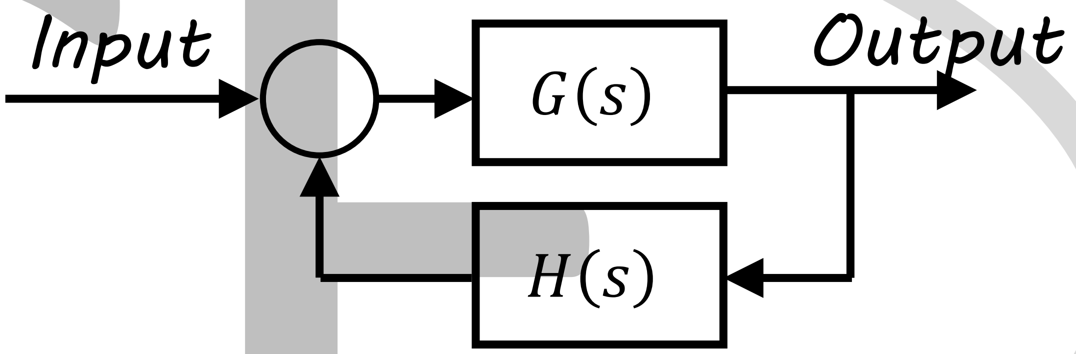
חוג פתוח



Open Loop Transfer function (O.L.T)

$= G(s)H(s) = GH$

חוג סגור



Closed Loop Transfer function

(C.L.T) $= \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{G}{1+GH} = \frac{G}{L}$

where: $L = 1 + GH$

עקום נייקוויסט (Nyquist) - יציבות

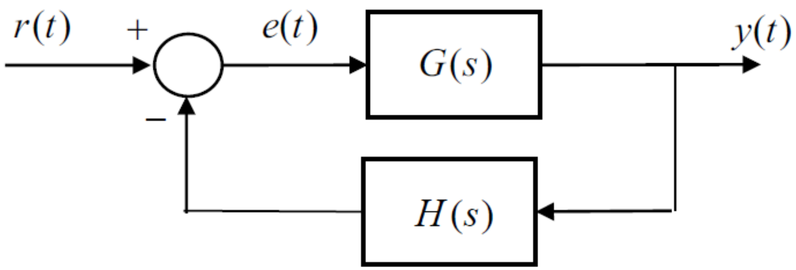
(*) נניח ש- $H(s) = 1$

O.L.T(*): $G(s) = \dfrac{(s+z_1)}{s(s+p_1)}$

כאשר כל האפסים של $L(s)$ (שהם הקטבים של CLT)
הם בחצי השמאלי של S-plane המערכת יציבה.

C.L.T: $\dfrac{Y(s)}{R(s)} = \dfrac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \underset{H(s)=1}{=} \dfrac{G(s)}{1+G(s)} = \dfrac{\dfrac{(s+z_1)}{s(s+p_1)}}{1+\dfrac{(s+z_1)}{s(s+p_1)}} = \dfrac{(s+z_1)}{s(s+p_1)+(s+z_1)}$

$$L(s) = 1 + G(s) = \frac{s(s+p_1)+(s+z_1)}{s(s+p_1)}$$

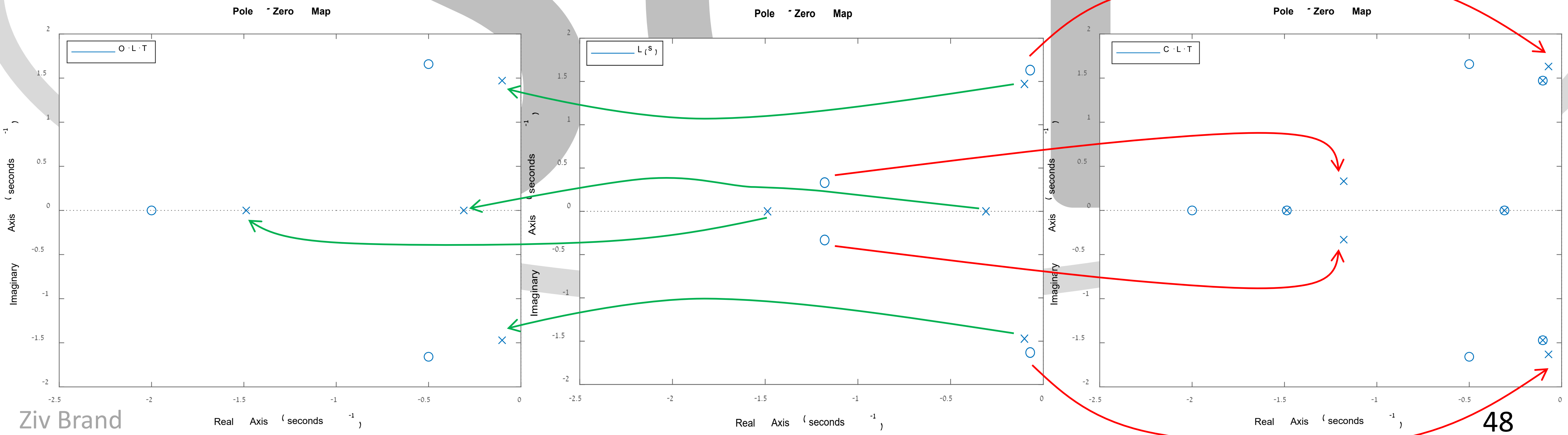


1. האפסים של $L(s)$ הם הקטבים של החוג הסגור $\dfrac{Y(s)}{R(s)}$.
2. הקטבים של $L(s)$ הם הקטבים של החוג הפתוח $G(s)$.

דוגמה

1. האפסים של $L(s)$ הם הקטבים של החוג הסגור $\frac{Y(s)}{R(s)}$.
2. הקטבים של $L(s)$ הם הקטבים של החוג הפתוח $G(s)H(s)$.

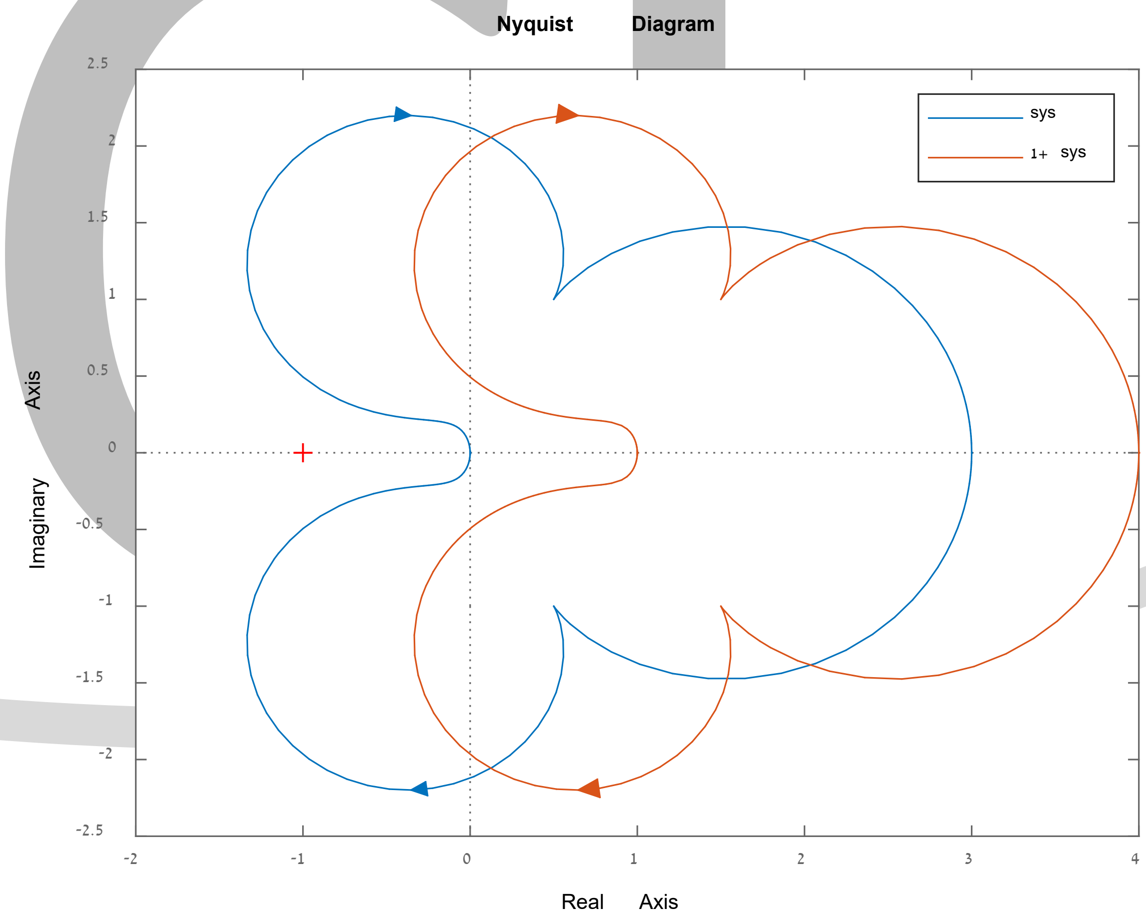
```
clear all
close all
clc
sys = tf([1 3 5 6],[2 4 6 8 2]); % Random
System
% Map the poles and zeros for the OL system
pzmap(sys); legend('O.L.T')
figure; pzmap(1+sys); legend('L(s)')
figure; pzmap(sys/(1+sys)); legend('C.L.T')
```



דוגמה – המשמעות של $L(s)=1+G(s)H(s)$

1. האפסים של $L(s)$ הם הקטבים של החוג הסגור $\frac{Y(s)}{R(s)}$.
2. הקטבים של $L(s)$ הם הקטבים של החוג הפתוח $G(s)H(s)$.

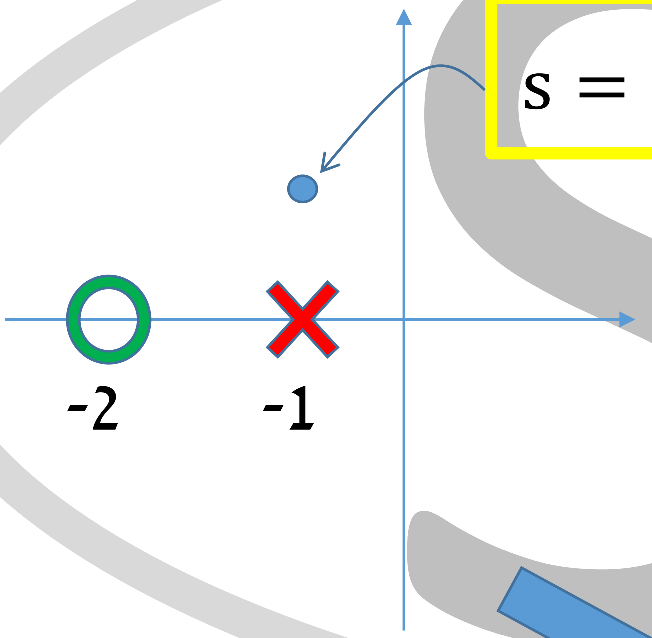
```
figure;
nyquist(sys,(1+sys))
```



משפט הארגומנט

$$\text{Transfer function} = \frac{s+2}{s+1}$$

S - Plane



נציב בפונקציית התמסורת

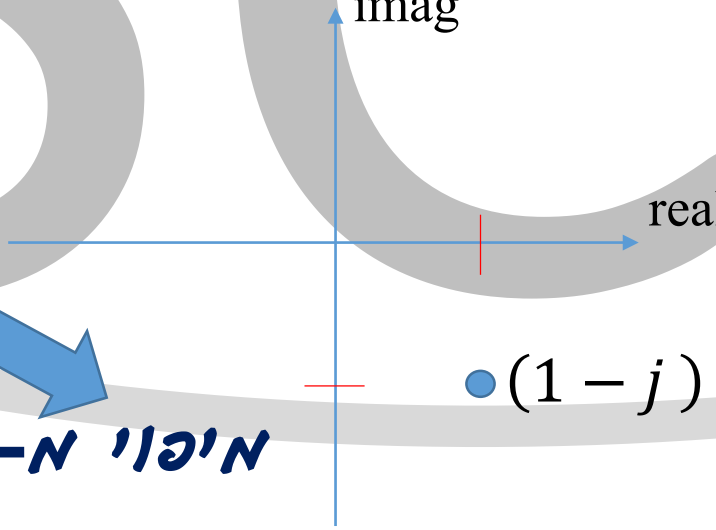
$$\boxed{s = -1 + 1j}$$

$$\frac{(-1 + 1j\,) + 2}{(-1 + 1j\,) + 1} = \frac{1 + j}{j}$$

$$\Rightarrow \frac{1 + j}{j} \cdot \frac{-j}{-j} = \underbrace{1 - j}$$

New complex number

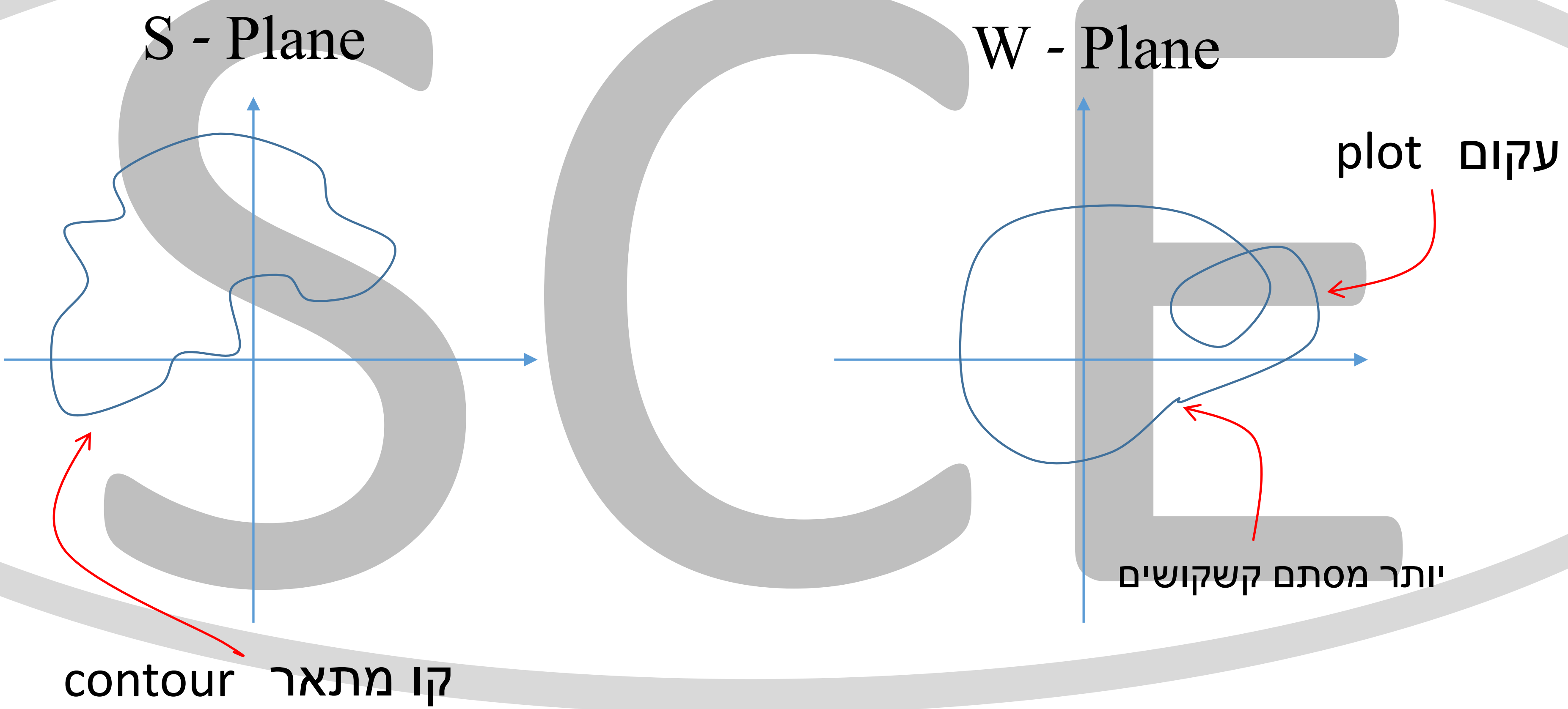
W - Plane



מיפוי מ- s ל- w דרך פונקציית התמסורת

משפט הארגומנט

נתונות פונקציות תמסורת של מערכות פיזיקאליות הבאות

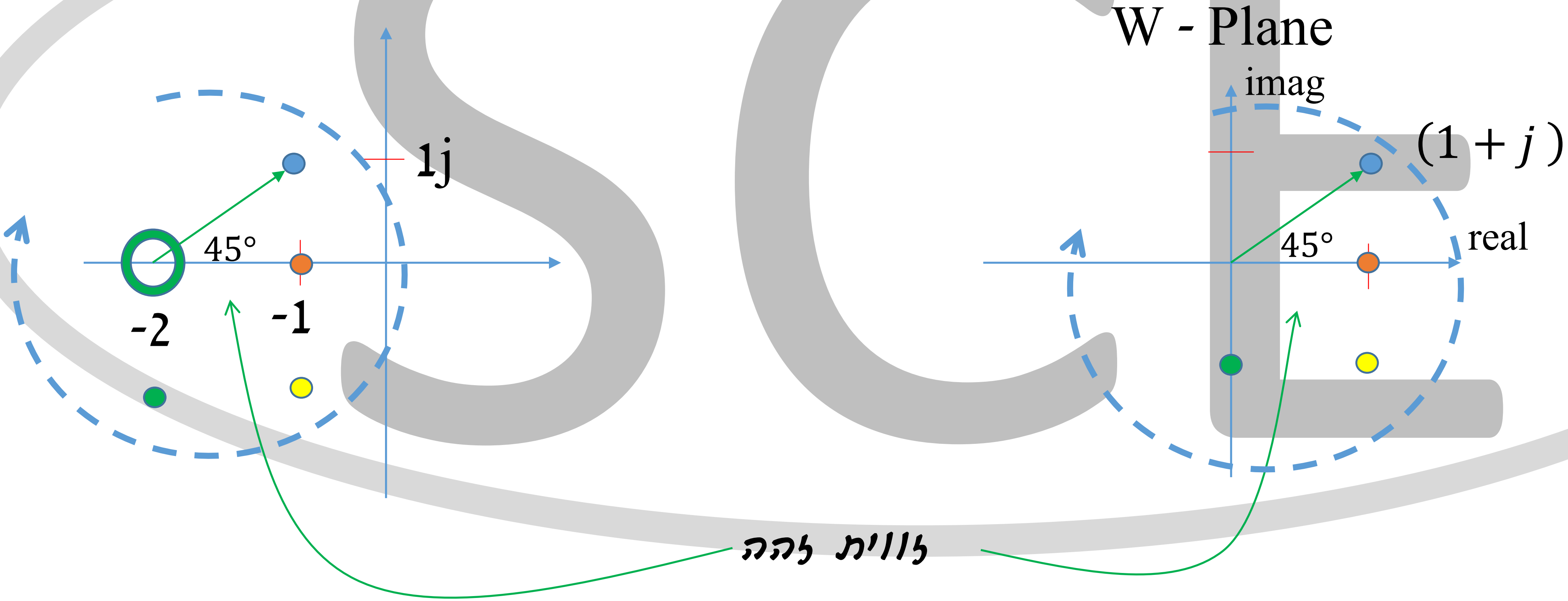


דוגמה – מיפוי של מערכת עם אפס אחד

$$\text{Transfer function} = \frac{s+2}{1}$$

$$\frac{(-1+j)+2}{1} = 1+j$$

S - Plane

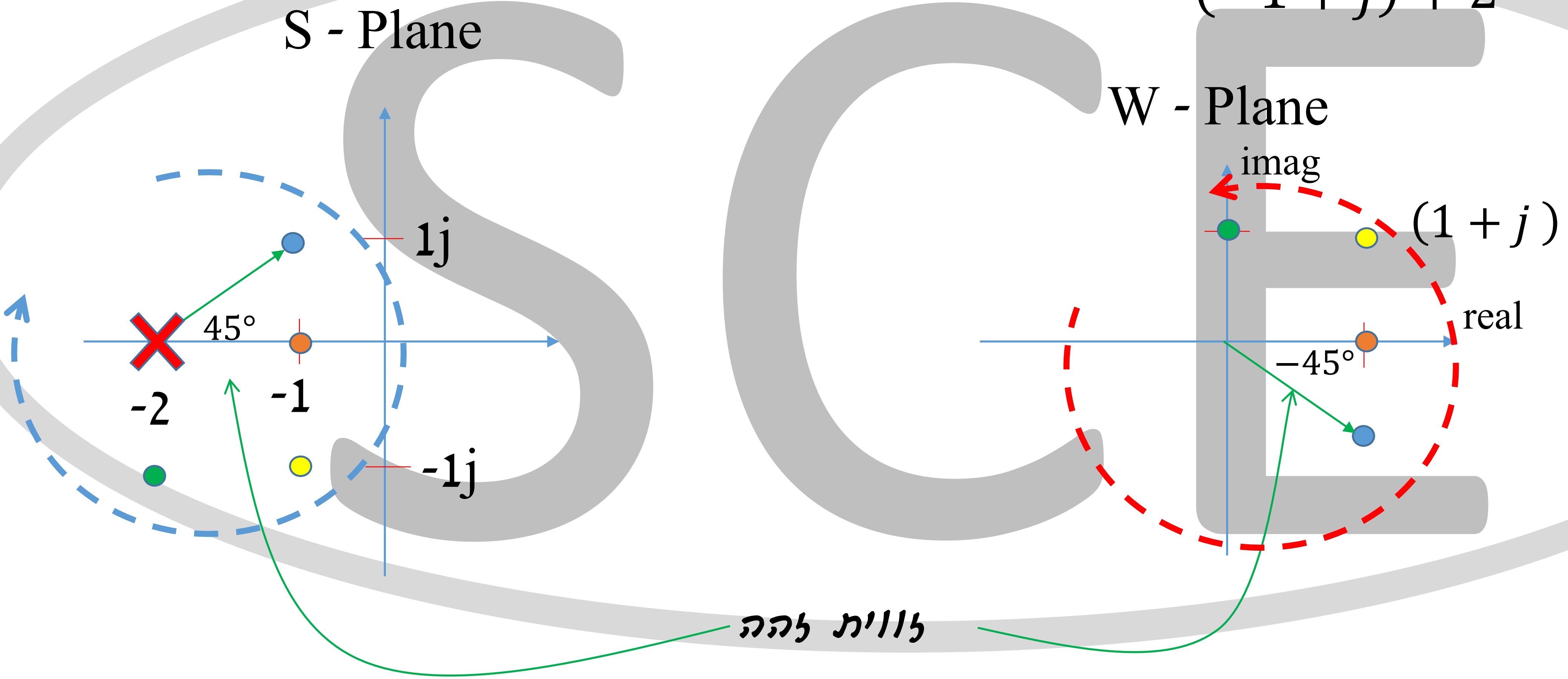


ניתן להרחיב זאת למקרה מרובה קטבים ואפסים

דוגמה – מיפוי של מערכת עם קוטב אחד

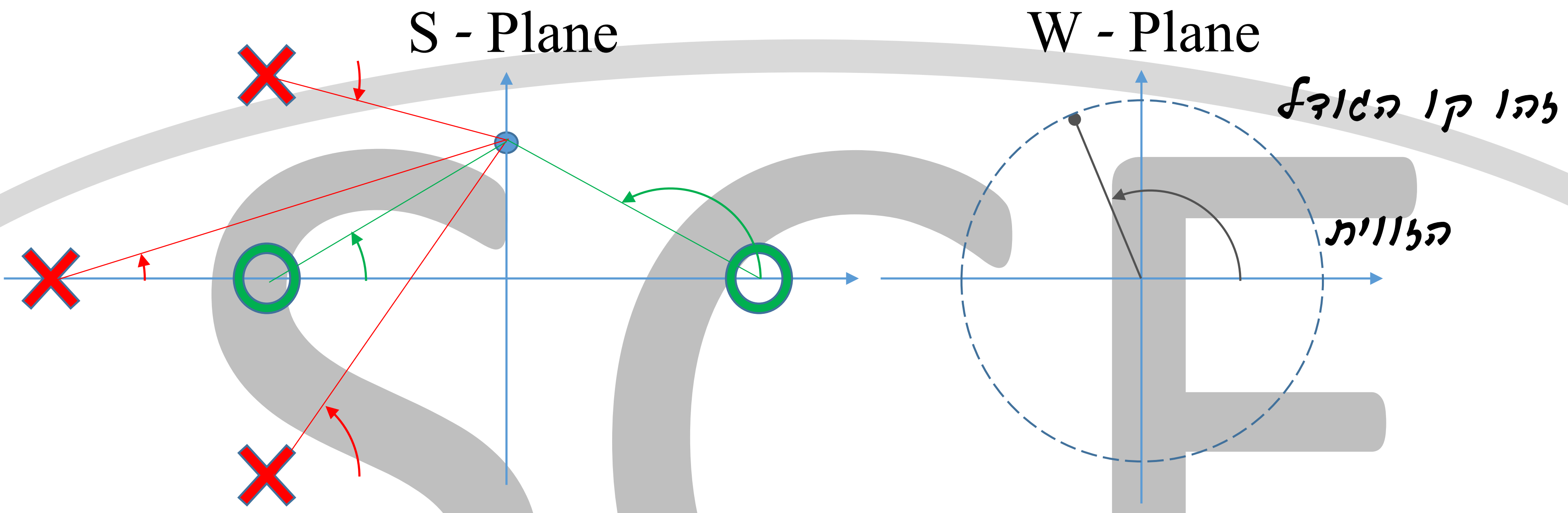
$$\text{Transfer function} = \frac{1}{s+2}$$

$$\frac{1}{(-1+j)+2} = \frac{1}{1+j}$$



ניתן להרחיב זאת למקרה מרובה קטבים ואפסים

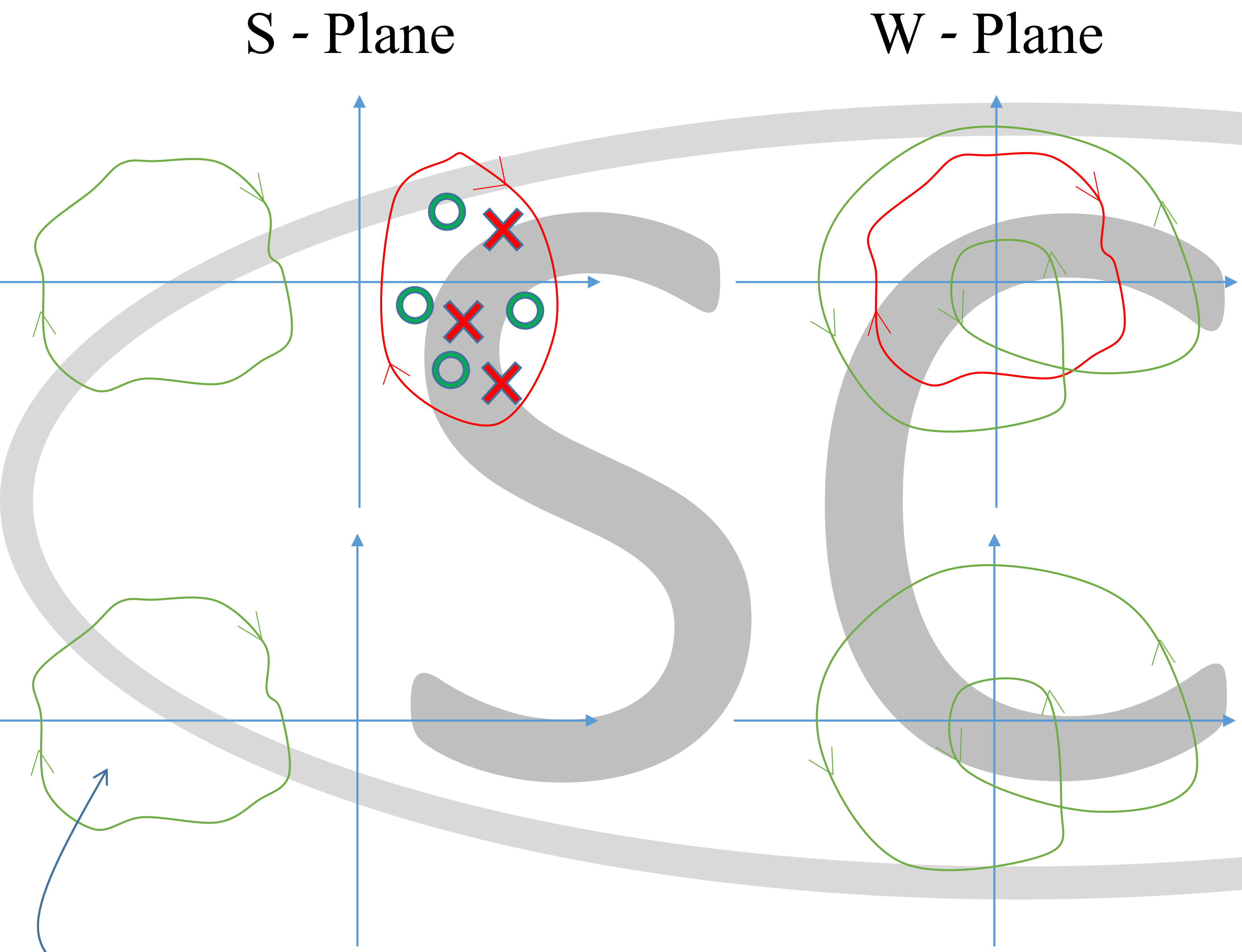
דוגמה – מיפוי של מערכת מרובת קטבים ואפסים



שלבים:

1. סמן את הנקודה ב – S - plane.
2. צייר וקטורים מכל קוטב ואפס אל הנקודה.
3. עבור הגודל: הכפל את כל הגדלים של האפסים וחלק במכפלה את כל הגדלים של הקטבים.
4. עבור הזווית: חבר את כל זוויות של האפסים וחסר את זוויות הקטבים.

חזרה למשפט הארגומנט



מה יש בתוך המעגל ב- S-Plane?

המעגל ב- W-Plane הוא בכיוון השעון. לכן, יש אפס אחד?

טעות! קיים אפס אחד יותר

מה יש בתוך המעגל ב- S-Plane?

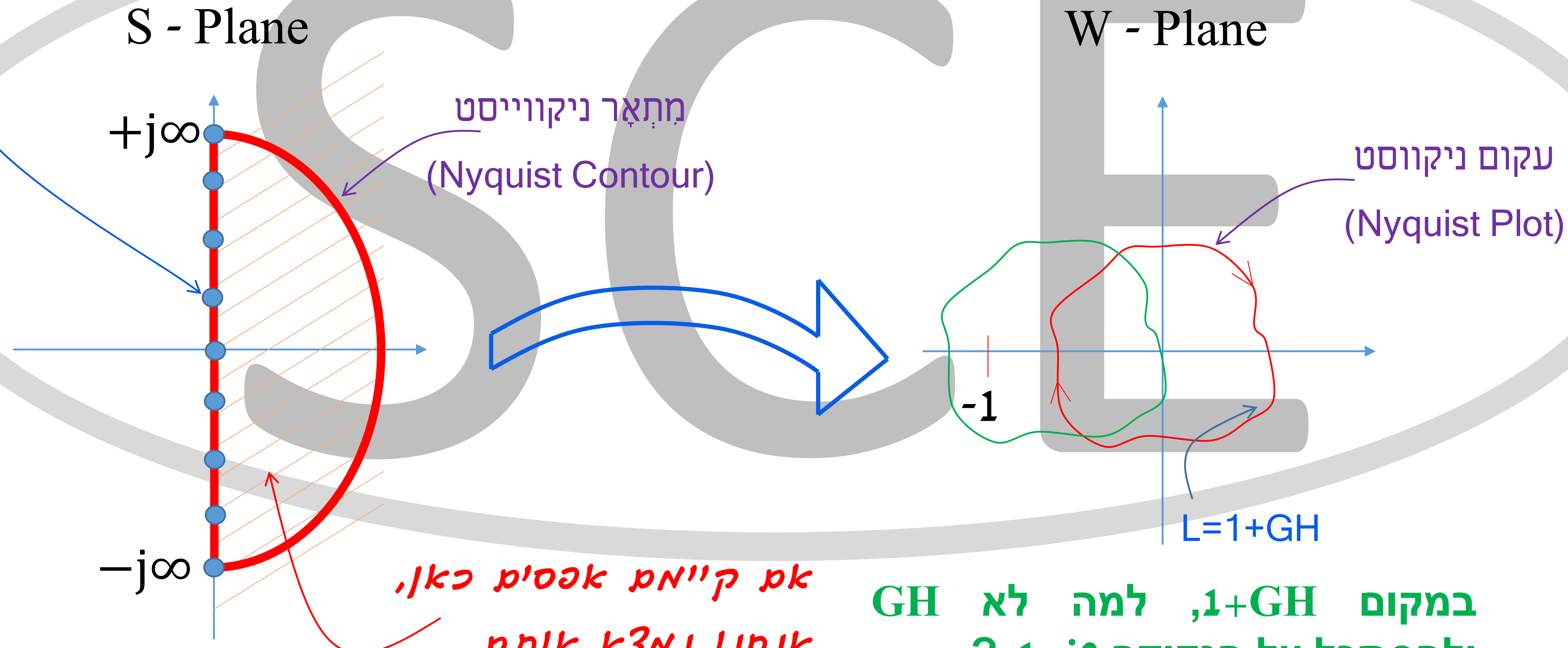
קיימם 2 קטבים יותר מאשר אפסים

שימוש ב- W-plane לבדיקת יציבות

האם יש אפסים במישור הימני עבור $L = 1 + GH$?

תזכורת: האפסים של $L(s)$ הם הקטבים של החוג הסגור $\frac{Y(s)}{R(s)}$.

כל נקודה נציב ב- L



במקום 1+GH, למה לא GH
ולהסתכל על הנקודה 1+j0-?

שלבים לבדיקת יציבות

1. האפסים של $L(s)$ הם הקטבים של החוג הסגור $\frac{Y(s)}{R(s)}$.
2. הקטבים של $L(s)$ הם הקטבים של החוג הפתוח $G(s)H(s)$.

1. ציירו את עקום ניקוויסט עבור החוג הפתוח GH.
2. סיפרו את כמות ההקפות סביב נקודה 1-, והכיוון שלהם.
3. מצאו כמה יותר קטבים או אפסים קיימים ב- RHP.

אבל, אם אנחנו רוצים לדעת במדויק כמה אפסים יש ב- RHP, אנחנו צריכים לדעת כמה קטבים יש ב- RHP.

לכן,
$$P_c = P_o + N_{cw}$$

כאשר:

P_c : מספר קטבי החוג הסגור (פתרונות המשוואה האופיינית $1+L(s)=0$) הנמצאים בחצי המישור הימני הפתוח.

P_o : מספר הקטבים של תמסורת החוג $L(s)=G(s)H(s)$ בחצי המישור הימני הפתוח.

N_{cw} : מספר ההקפות שמקיף עקום נייקויסט השלם את הנקודה (1-), בכיוון השעון (CW).

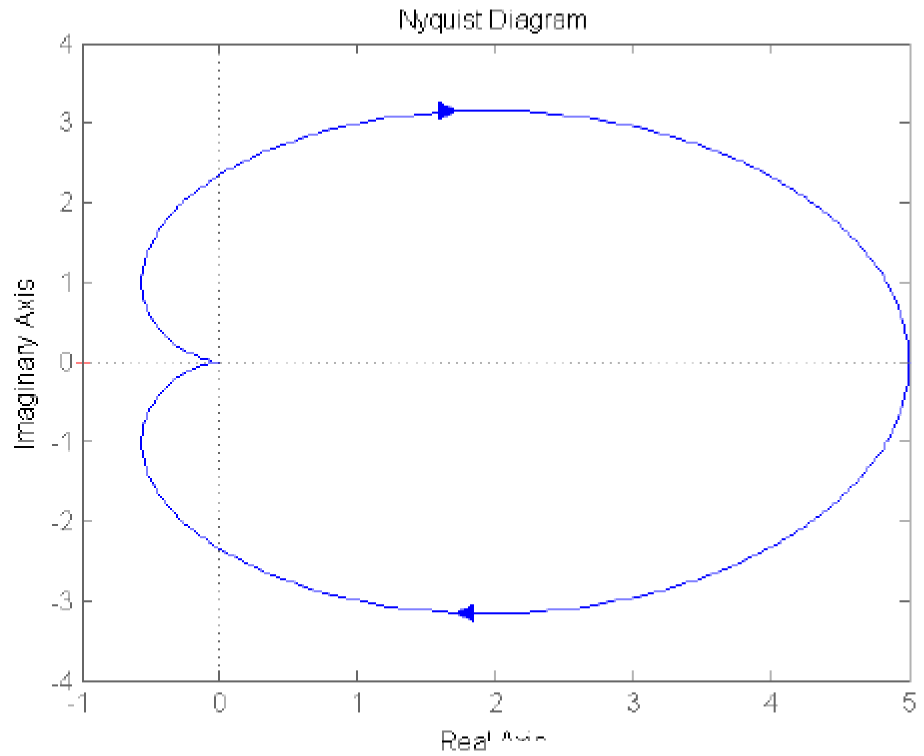
* הקפות נגד כיוון השעון נספרות מספר שלילי.

חוג סגור יציב כאשר: $P_c = 0$

Ziv Brand

דוגמה

$$\boxed{L(s) \equiv G(s)H(s)} = \frac{10}{(s+1)(s+2)}$$



$$P_0 = 0$$

$$N_{cw} = 0$$

$$P_c = P_0 + N_{cw} = 0$$

החוג הסגור יציב

כאשר:

P_c : מספר קטבי החוג הסגור (פתרונות המשוואה האופיינית $1+L(s)=0$) הנמצאים בחצי המישור הימני הפתוח.

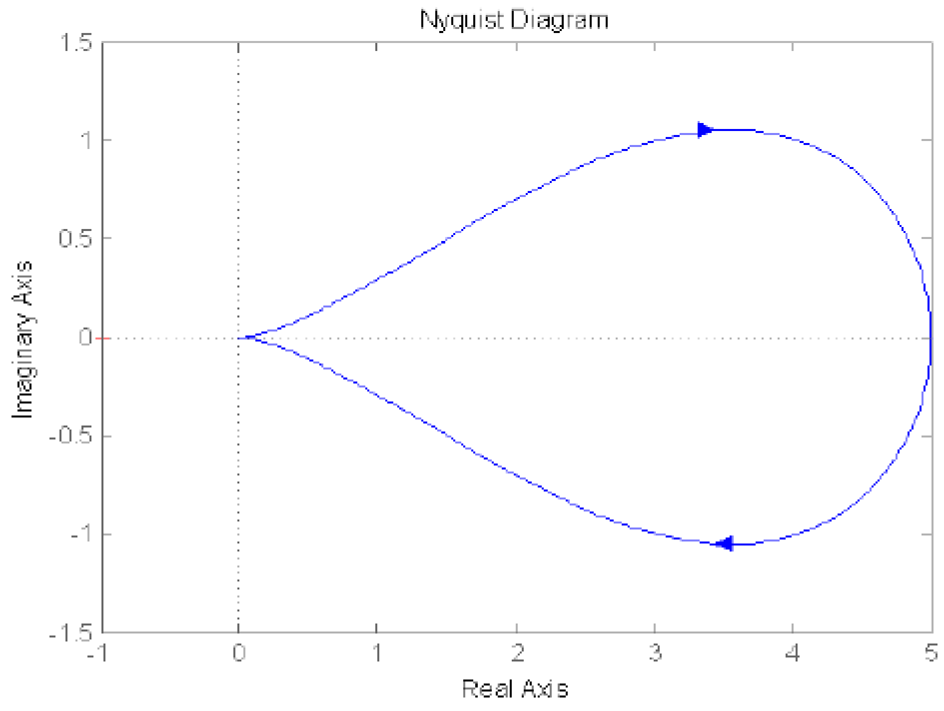
P_o : מספר הקטבים של תמסורת החוג $L(s)=G(s)H(s)$ בחצי המישור הימני הפתוח.

N_{cw} : מספר ההקפות שמקיף עקום נייקויסט השלם את הנקודה (-1), בכיוון השעון (CW).

* הקפות נגד כיוון השעון נספרות מספר שלילי.

דוגמה

$$L(s) \equiv G(s)H(s) = \frac{-10}{(s+1)(s-2)}$$



$$P_0 = 1$$

$$N_{cw} = 0$$

$$P_c = P_0 + N_{cw} = 1$$

החוג הסגור לא יציב

כאשר:

P_c : מספר קטבי החוג הסגור (פתרונות המשוואה האופיינית $1+L(s)=0$) הנמצאים בחצי המישור הימני הפתוח.

P_o : מספר הקטבים של תמסורת החוג $L(s)=G(s)H(s)$ בחצי המישור הימני הפתוח.

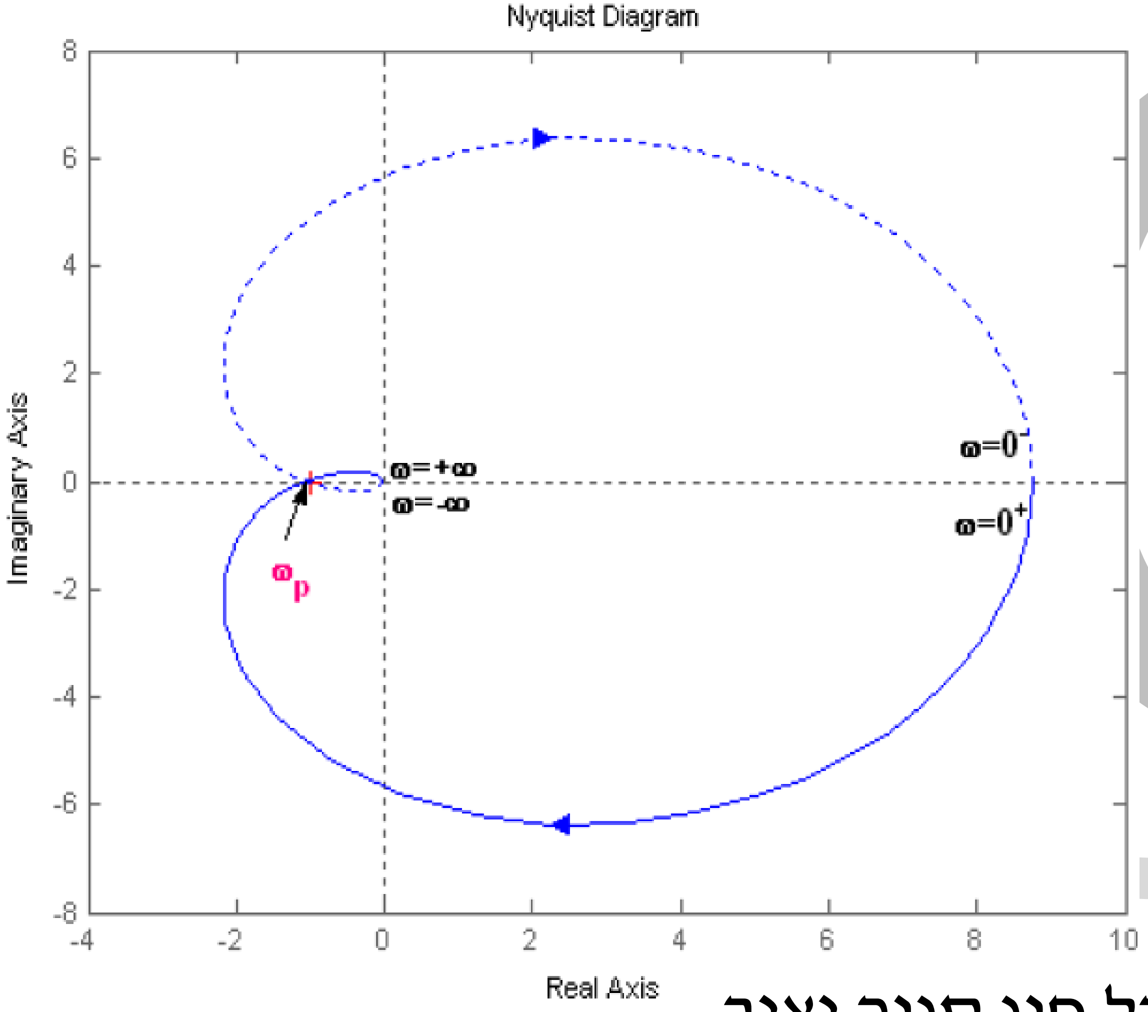
N_{cw} : מספר ההקפות שמקיף עקום נייקויסט השלם את הנקודה (-1), בכיוון השעון (CW).

* הקפות נגד כיוון השעון נספרות מספר שלילי.

דוגמה

$$L(s) = G(s)H(s) = \frac{70}{(s+2)^3} \rightarrow P_0 = 0$$

לבדיקת N_{cw} נמצא את ω_p



$$\measuredangle L(j\omega_p) = -3\tan^{-1}\frac{\omega_p}{2} = -180^0$$

$$\omega_p / 2 = \tan 60^0 \qquad \omega_p = 2\sqrt{3}$$

$$|L(j\omega_p)| = 70 \big/ (12+4)^{\frac{3}{2}} = 1.094 > 1$$

לכן, יש שתי הקפות עם כיוון השעון,

$N_{cw} = 2$.

מכאן: $P_c = P_o + N_{cw} = 2$

החוג הסגור לא יציב

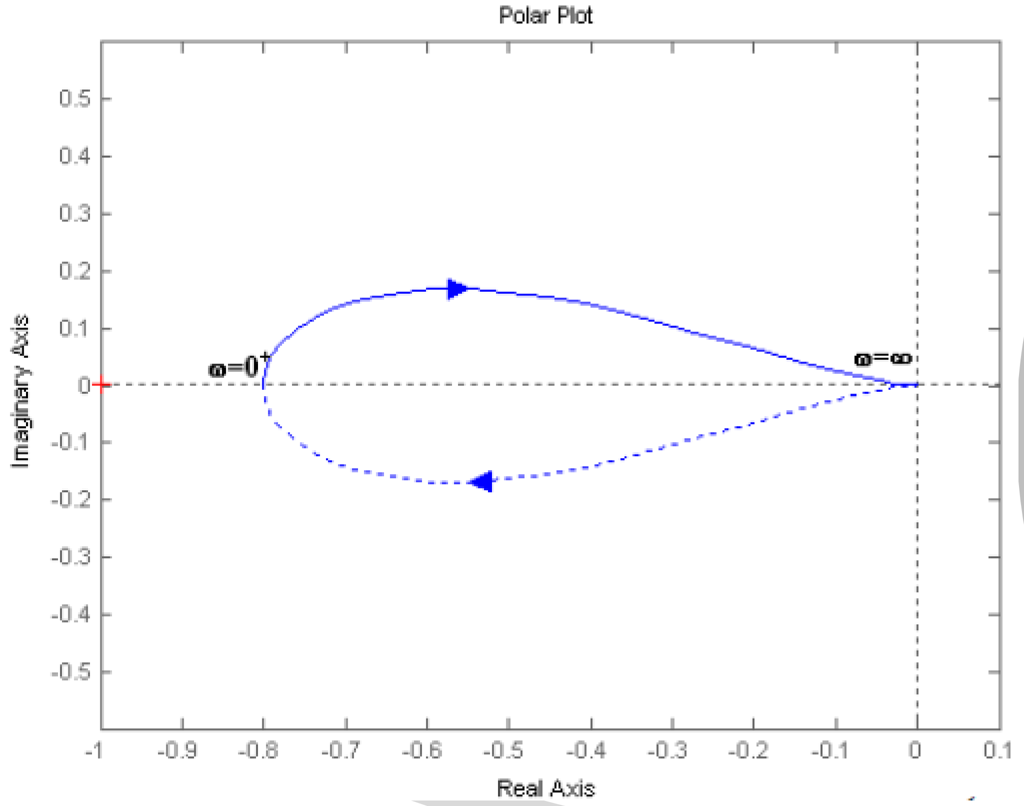
אם נוריד את הגבר החוג פי 1/1.094 (לפחות) יתקבל חוג סגור יציב

דוגמה

$$L(s)=\frac{1.6k}{(s-2)(s+1)} \Rightarrow P_0=1$$

לבדיקת N_{cw} :

$$\measuredangle L(j\omega)=-180^0+\tan^{-1}\omega/2-\tan^{-1}\omega$$



עבור: $(\omega:0^+\to\infty)$ ועבור $k=1$

$$L(0)=-0.8=0.8\measuredangle-180^0$$

$$L(\infty)=0\measuredangle-180^0$$

לכן, אין הקפות עם כיוון השעון, $N_{cw}=0$.

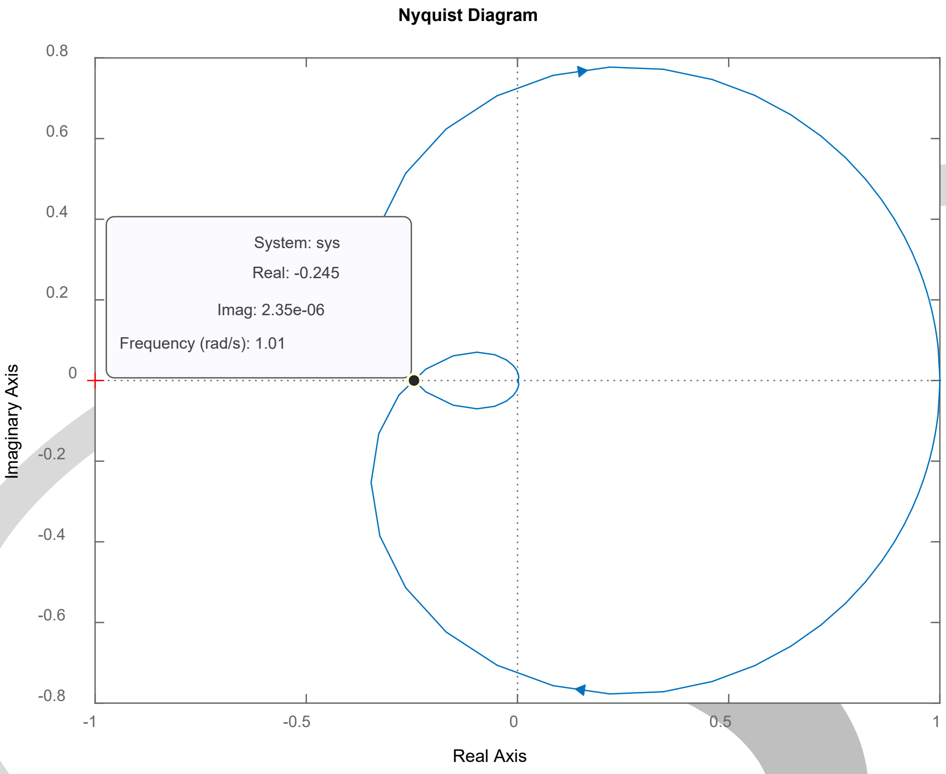
מכאן: $P_c=P_o+N_{cw}=1$

החוג הסגור לא יציב

אם k>1.25 נקבל הקפה אחת של (-1,0) עם כיוון השעון, נקבל $P_c=1+1=2$ המסקנה

החוג הסגור לא יציב, לא ניתן לייצב את החוג הסגור עם בקר P ‏(k>0).

דוגמה



$$L(s)=\frac{1}{(s+1)^4}$$

הניקויסט אינו מקיף את (-1,0)

כשנעים מ $\omega=0^+$ ל $\omega=\infty$

⇓

הח"ס יציב

$$P_0=0, N_{cw}=0 \Rightarrow P_c=0$$

עבור $KL(s)$, אם $K>\frac{1}{0.245}>4.08$,

החוג הסגור יהיה לא יציב

כאשר:

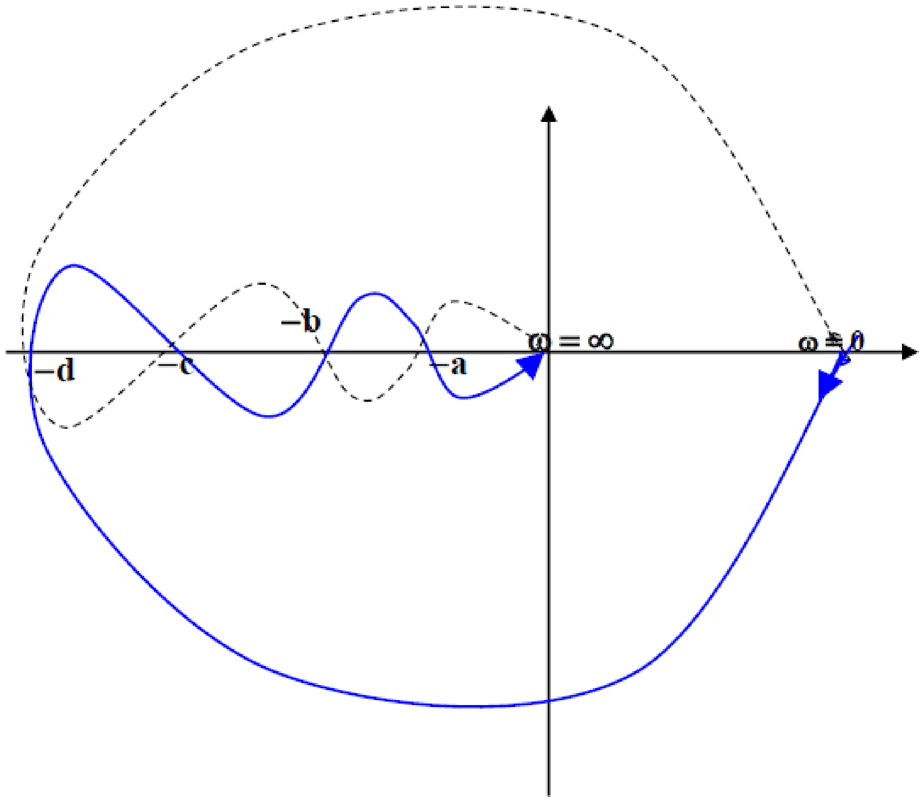
P_c : מספר קטבי החוג הסגור (פתרונות המשוואה האופיינית $1+L(s)=0$) הנמצאים בחצי המישור הימני הפתוח.

P_0 : מספר הקטבים של תמסורת החוג $L(s)=G(s)H(s)$ בחצי המישור הימני הפתוח.

N_{cw} : מספר ההקפות שמקיף עקום נייקויסט השלם את הנקודה (-1), בכיוון השעון (CW).

* הקפות נגד כיוון השעון נספרות מספר שלילי.

יציבות מותנית (conditional stability)



נתון תאור פולרי של $L(j\omega)$ יציב.

החוג הסגור עם $KL(s)$ יהיה יציב

עבור כל ה K ים המקיימים:

$$-1/K < -d$$

$$-c < -1/K < -b$$

$$-a < -1/K < 0$$

בד"כ הורדת הגברים במערכות יציבות בחוג פתוח מביאה ליציבות החוג הסגור. במערכות עם יציבות מותנית אין זה כך בהכרח – בדוגמה לעיל הח"ס לא יציב למשל עבור $1/b < K < 1/a$ אבל הגדלת ההגבר ל $K > 1/a$ מיצבת את החוג הסגור.

תרגיל

נתונה פונקציית התמסורת של החוג הפתוח הבאה: $G(s)H(s) = \frac{(s-2+i2)(s-2-i2)}{(s+1)(s+4)}$

I. הציגו גרף רוט-לוקוס של המערכת, מה ערכו של הגבר פורפוציונאלי בה מערכת החוג הסגור יוצאת מיציבות?

II. עשו שימוש בדיאגרמת נייקאויסיט התומכת בקריטריון היציבות שהוצג בסעיף הקודם.

III. עשו שימוש בדיאגרמת בודה למציאת ה- GM וה- PM, הראו שה- GM שווה לערכו של ההגבר המרבי שהתקבל בסעיפים הקודמים.

IV. הציגו את תגובת מערכת החוג הסגור לכניסת הלם עבור הגברי בקר בתחום היציב והלא יציב.