**מבני נתונים – אביב תשפ"א – תרגיל בית 1**

שמות הסטודנטים: ליאור בר, ליאור רסקין

מס' ת"ז (בהתאמה): 209163559, 316216977

שם הקורס: מבני נתונים 1

מס' הקורס: 234218

מס' תרגיל: 1 (יבש)

תאריך הגשה:

**שאלה 1:**

**סעיף 1: הטענה לא נכונה!**

**דוגמא נגדית:**  .

**מדובר בפונקציה מהטבעיים לממשיים החיוביים שעבור** , , לכל  *מתקיים:* **כלומר, .**

**אבל מצד שני,**  **כי** **היא פונקציה מונוטונית שואפת ל-0 ולכן לא קיים n טבעי ו – с עבורם**

**ולכן**  כלומר, .

**ולכן, מצאנו דוגמא נגדית והוכחנו שהיא נכונה וסותרת את הטענה.**

*סעיף 2: הטענה נכונה!*

*ההוכחה נובעת ישירות מהגדרת השאלה:*

***נתון כי******ובפרט חיובי ולכן לכל*** *k****,*** *.* ***כלומר נובע ישירות מההגדרה שעבור קבוע***  ***ולכל , בפרט עבור*** ***, מתקיימת המשוואה הנ"ל ולכן .***

*סעיף 3: הטענה לא נכונה!*

***ניעזר באותה דוגמא נגדית כמו בסעיף הראשון:***  **.**

ידוע כי **, בעוד שלכל** c**,** . **ולכן לכל** с>0, k>0 **שנבחר, ולכל** n **טבעי מספיק גדול ומהגדרת הגבול, נקבל כי:  *.***

*כלומר מצאנו דוגמא שבה לפי ההגדרה:*

*סעיף 4: הטענה לא נכונה!*

*דוגמא נגדית: .*

*נסביר:*  ***נוכיח כי*** ***ובכך נסתור את הטענה.***

***נניח בשלילה כי הטענה נכונה ולכן קיים n0 עבורו לכל n>n0 ולקבוע c>0 מסוים מקיים:***

***כעת נוציא מאגף שמאל את ונקבל:***

***נחלק את שני האגפים ב- ונקבל:***

***מתקיים כי ולכן בהכרח: . לפיכך מתקיים:***

***אבל, אם נסתכל על , הרי שנקבל סתירה לאי השוויון וזאת משום שבפרט .***

***כלומר, הגענו לסתירה ועל כן מצאנו דוגמא נגדית שעונה לדרישות השאלה כך ש:***

*סעיף 5:* *הטענה לא נכונה!*

*דוגמא נגדית: ,*

***נשים לב כי לכל , ועבור מתקיים:***

***ולכן לפי הגדרה מתקיים:*** ***.***

***אבל נשים לב כי עבור כל שנבחר, קיים כך ש:***

***ולכן ניתן להסיק עפ"י הגדרה כי: .***

*כלומר מצאנו דוגמא נגדית שסותרת את הטענה.*

*סעיף 6: הטענה לא נכונה!*

*דוגמא נגדית:*

*נסביר****: לכל ו- שנבחר מתקיים -***

***כלומר הוכחנו ש:***

*אבל מצד שני, כפי שנלמד בהרצאה ובתרגול,*

*ולכן מצאנו דוגמא נגדית שסותרת את הטענה.*

*סעיף 7: הטענה נכונה!*

הוכחה**: נתון כי וגם כי**  **ולכן נסיק כי:**

**לפי ההגדרות מתקיים:**

1. **קיימים** ו-**כך שלכל** **מתקיים** .
2. **קיימים** ו-**כך שלכל** **מתקיים** .
3. **קיימים** ו-**כך שלכל** **מתקיים** .
4. **קיימים** ו-**כך שלכל** **מתקיים** .

**מנתונים (1) ו-(4), נגדיר** *,* ***ולפיכך לכל******מתקיים:***

**מנתונים (2) ו-(3), נגדיר** *,* ***ולפיכך לכל******מתקיים:***

**לכן לפי הגדרה מתקיים וגם .**

**לכן לפי הגדרה מתקיים גם כן  *כנדרש.***

סעיף 8: הטענה נכונה!

נוכיח אותה: **נתון כי וגם כי**

**מחוקי לוגים נשים לב כי: וגם**

***ולכן,* קיימים** ו-**כך שלכל** **מתקיים:** .

**כמו כן,** **קיימים** ו-**כך שלכל** **מתקיים:** .

**לפיכך, נגדיר  *כך שלכל , ומאי-שוויון המשולש, מתקיים:***

**ולכן עפ"י ההגדרה:**

**שאלה 2 סעיף 1:**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| O |  | **(נתון)** |  |
|  |  |  |  |
| O |  |  |  |
| O |  |  |  |

הוכחות:

נראה כי:

**נראה כי לפי ההגדרה, קיים c>0, ו- n>n0 כך ש: *.***

***נבחר למשל, n0= 2 С=1 ונקבל כי לכל n>n0  מתקיים:.***

***ובכך הוכחנו שהטענה נכונה.***

נראה כי: .

**נראה כי לפי ההגדרה, קיים c>0, ו- n>n0 כך ש: .**

***למדנו בהרצאה כי בפרט עבור מתקיים: . לכן קיימים c',n0>0 כך שלכל n>n0 מתקיים:***

***נבחר למשל, c=2c' ונקבל כי לכל n>n0 מתקיים:***

***ובכך הוכחנו שהטענה נכונה.***

נראה כי:

**נראה כי לפי ההגדרה, קיים c>0, ו- n>n0 כך ש:**

***נבחר למשל, n0= 2 С=1 ונקבל, כי לכל n>n0 מתקיים:***

***ובכך הוכחנו שהטענה נכונה.***

נראה כי:

**נראה כי לפי ההגדרה, קיים C>0, ו- n>n0 כך ש:**

***נבחר למשל, n0= 4 С=1 ונקבל, כי לכל n>n0***

***הביטוי נכון עבור n>n0 כי . והביטוי*** ***נכון כי הוא שקול ל***

***וזה משהו שהוכחנו בכיתה. ובכך הוכחנו שהטענה נכונה.***

נראה כי:

**נראה כי לפי ההגדרה, קיים C>0, ו- n>n0 כך ש:**

***נבחר למשל, n0= 4 С=1 ונקבל, כפי שלמדנו בכיתה כי לכל n>n0***

***ובכך הוכחנו שהטענה נכונה.***

נראה כי:

**נראה כי לפי ההגדרה, קיים C>0, ו- n>n0 כך ש:**

***נבחר למשל, n0= 4 С=0.25 ונקבל, כפי שלמדנו בכיתה כי לכל n>n0***

***ובכך הוכחנו שהטענה נכונה.***

*הערה:* ***הביטוי*** ***נכון כי*** ***והוא הוכח בהרצאה.***

הטענה הזו הוכחה במפורש כבר בהרצאה:

נראה כי:

**ראינו כבר בהרצאה ש:**

**לכן, כי לפי ההגדרה, קיים C>0, ו- n>1כך ש:**

***והביטוי*** ***נכון כי הוא שקול ל וזה משהו שהוכחנו בהרצאה ובכך הוכחנו שהטענה נכונה.***

*הערה:* ***הביטוי*** ***נכון כי*** ***והוא הוכח בהרצאה.***

נראה כי:

**נראה כי לפי ההגדרה, קיים C>0, ו- n>n0 כך ש:**

***נבחר למשל, n0= 2 С=1 ונקבל, כי לכל n>n0***

***ובכך הוכחנו שהטענה נכונה.***

נראה כי:

**נראה כי לפי ההגדרה, קיים C>0, ו- n>n0 כך ש:**

***נשים לב שהוכחנו בכיתה שלכל***  *ובפרט מתקיים ש* ***.***

***כלומר* קיים C>0, ו- n>n0 *עבורם לכל n>n0***

***ובכך הוכחנו שהטענה נכונה.***

נראה כי:

**נראה כי לפי ההגדרה, קיים C>0, ו- n>n0 כך ש:**

***נבחר למשל, n0= 2 С=1 ונקבל, כי לכל n>n0***

***ובכך הוכחנו שהטענה נכונה.***

*שאלה 2 סעיף 2:*

***נראה כי:***

***נוכיח בעזרת הגדרת o ונראה שהגבול שואף ל-0.***

***נוכיח זאת בעזרת לופיטל:***

***ובכך השלמנו את ההוכחה.***

*שאלה 2 סעיף 3:*

***נתונה הפונקציה*** ***כך ש*** ***וצ"ל ש***

***ראשית נוכיח את טענת העזר הבאה ש*** *:*

***מהנתון ומהגדרת*** ***ידוע כי***

***ולכן מאריתמטיקה של גבולות:***

***כעת נכפיל את הביטוי ב- f(n) ונקבל שוב מאריתמטיקה של גבולות:***

*נציין כי הביטוי הזה מתקיים כי ו - ולכן ברור מחוקי גבולות כי*

***כעת נחזור להוכחה המרכזית ונוכיח אותה לפי הגדרת o:***

***כעת בעזרת טענת העזר שהוכחנו נקבל:***

*ובכך השלמנו את ההוכחה.*

שאלה 3 - סעיף 1:

**נוכיח כי הטענה נכונה עבור הפרמטר .**

**מתקיים: *, כאשר לכל מתקיים .***

***נשתמש בשיטת העץ הרקורסיבי:***

***נמשיך בשיטה הזאת לכל רמה נוספת. מתקיים כי בכל רמה של העץ, סכום הצמתים הוא (וזאת בעקבות בחירת הפרמטר).***

***נשים לב שהרמה האחרונה עבור כל אחד מן הצמתים בשרטוט יכולה להיות שונה. נסתכל על מקרי הקצה בדומה לדוגמא בתרגול. הרמה המקסימלית i תהיה כאשר יתקיים: , כלומר יתקיים .***

***באופן דומה, עבור הרמה המינימלית j מתקיים: , כלומר יתקיים .***

***לכן, כמו שנלמד בתרגול מתקיים: .***

***לפיכך מתקיים: (כלומר מצאנו גם את החסם האסימפטוטי ההדוק הנדרש בשאלה).***

***מהגדרת הגבול מתקיים: .***

***לכן לפי הגדרה מתקיים כנדרש: .***

***כעת נוכיח כי פרמטר זה הוא המינימלי. לשם כך נניח בשלילה כי הטענה מתקיימת גם עבור .***

***נבנה באותו האופן בדיוק את העץ הרקורסיבי. נשים לב כי כעת בכל רמה של העץ, סכום הצמתים משתנה ושווה בערכו ל- .***

***סה"כ סכום הרמות מהווה סדרה הנדסית כאשר ברמה ה-i סכום הצמתים הוא: .***

***נשים לב כי מדובר באותן רמות עץ מינימלית ומקסימלית. כמו כן האיבר הראשון בסדרה הוא וההפרש בסדרה הוא . כאן ההבדל הגדול – ההפרש קטן מ-1 בעקבות ההגבלה על הפרמטר ולפיכך מתקיים:***

***נשים לב כי הגורם הימני מהווה סקלר ולכן כפי שראינו בהרצאה: . מצאנו סתירה להנחת השלילה ולפיכך סיימנו.***

שאלה 3 - סעיף 2:

* ***נתון: .***

***נוכיח כי מתקיים: .***

***נשתמש במשפט המאסטר. מתקיים: .***

***כמו כן, עבור מתקיים:*** *,* ***זאת משום* שקיימים** ו-**כך שלכל** **מתקיים:**

***בנוסף* קיימים** ו-**כך שלכל** **מתקיים:**

***לכן לפי משפט המאסטר מתקיים: .***

***אך נשים לב כי* קיימים** ו-**כך שלכל** **מתקיים:**

***כמו כן,* קיימים** ו-**כך שלכל** **מתקיים:**

***לכן לפי הגדרה מתקיים: וגם ,***

***כלומר מתקיים: .***

***מסקנה:***

* ***נתון: .***

***נסמן: . כעת מתקיים: .***

***ראינו בהרצאה כי מתקיים: .***

***נציב חזרה ונקבל: .***

* ***נתון: .***

***נסמן: , ולפיכך מתקיים: . נגדיר נוסחת נסיגה חדשה:***

***נשתמש במשפט המאסטר. נסמן: .***

***נשים לב כי עבור מתקיים:*** *,* ***זאת משום* שקיימים** ו-**כך שלכל** **מתקיים: *.***

***כמו כן,* קיימים** ו-**כך שלכל** **מתקיים:**

***לכן לפי משפט המאסטר מתקיים: .***

***נציב חזרה ונקבל: .***

* ***נתון: .***

***נשתמש במשפט המאסטר. מתקיים: .***

***כמו כן, עבור מתקיים:*** *,* ***זאת משום* שקיימים** ו-**כך שלכל** **מתקיים (נעזר במשפט 2.2 מדף הנוסחאות שנלמד בהרצאה):**

***לכן לפי משפט המאסטר מתקיים: .***

* ***נתון: .***

***נחלק את נוסחת הנסיגה ב- ונקבל:***

***נסמן: . לפיכך מתקיים: .***

***נסמן: , ולפיכך מתקיים: . נגדיר נוסחת נסיגה חדשה:***

***נשתמש במשפט המאסטר. נסמן: .***

***נשים לב כי מתקיים:*** *,* ***זאת משום* שקיימים** ו-**כך שלכל** **מתקיים: *.***

***נשים לב כי מתקיים:*** *,* ***זאת משום* שקיימים** ו-**כך שלכל** **מתקיים: *.***

***לכן לפי הגדרה מתקיים: .***

***לפי משפט המאסטר מתקיים: .***

***נשתמש בסימונים ונקבל:***

***מסקנה:***