**מבני נתונים – אביב תשפ"א – תרגיל בית 1**

שמות הסטודנטים: ליאור בר, ליאור רסקין

מס' ת"ז (בהתאמה): 209163559, 316216977

שם הקורס: מבני נתונים 1

מס' הקורס: 234218

מס' תרגיל: 1 (יבש)

תאריך הגשה:

**שאלה 1:**

**סעיף 1: הטענה לא נכונה!**

**דוגמא נגדית:**  .

**מדובר בפונקציה מהטבעיים לממשיים החיוביים שעבור** , , לכל  *מתקיים:* **כלומר, .**

**אבל מצד שני,**  **כי** **היא פונקציה מונוטונית שואפת ל-0 ולכן לא קיים n טבעי ו – с עבורם**

**ולכן**  כלומר, .

**ולכן, מצאנו דוגמא נגדית והוכחנו שהיא נכונה וסותרת את הטענה.**

*סעיף 2: הטענה נכונה!*

*ההוכחה נובעת ישירות מהגדרת השאלה:*

***נתון כי******ובפרט חיובי ולכן לכל*** *k****,*** *.* ***כלומר נובע ישירות מההגדרה שעבור קבוע***  ***ולכל , בפרט עבור*** ***, מתקיימת המשוואה הנ"ל ולכן .***

*סעיף 3: הטענה לא נכונה!*

***ניעזר באותה דוגמא נגדית כמו בסעיף הראשון:***  **.**

ידוע כי **, בעוד שלכל** c**,** . **ולכן לכל** с>0, k>0 **שנבחר, ולכל** n **טבעי מספיק גדול ומהגדרת הגבול, נקבל כי:  *.***

*כלומר מצאנו דוגמא שבה לפי ההגדרה:*

*סעיף 4: הטענה לא נכונה!*

*דוגמא נגדית: .*

*נסביר:*  ***נוכיח כי*** ***ובכך נסתור את הטענה.***

***נניח בשלילה כי הטענה נכונה ולכן קיים n0 עבורו לכל n>n0 ולקבוע c>0 מסוים מקיים:***

***כעת נוציא מאגף שמאל את ונקבל:***

***נחלק את שני האגפים ב- ונקבל:***

***מתקיים כי ולכן בהכרח: . לפיכך מתקיים:***

***אבל, אם נסתכל על , הרי שנקבל סתירה לאי השוויון וזאת משום שבפרט .***

***כלומר, הגענו לסתירה ועל כן מצאנו דוגמא נגדית שעונה לדרישות השאלה כך ש:***

*סעיף 5:* *הטענה לא נכונה!*

*דוגמא נגדית: ,*

***נשים לב כי לכל , ועבור מתקיים:***

***ולכן לפי הגדרה מתקיים:*** ***.***

***אבל נשים לב כי עבור כל שנבחר, קיים כך ש:***

***ולכן ניתן להסיק עפ"י הגדרה כי: .***

*כלומר מצאנו דוגמא נגדית שסותרת את הטענה.*

*סעיף 6: הטענה לא נכונה!*

*דוגמא נגדית:*

*נסביר****: לכל ו- שנבחר מתקיים -***

***כלומר הוכחנו ש:***

*אבל מצד שני, כפי שנלמד בהרצאה ובתרגול,*

*ולכן מצאנו דוגמא נגדית שסותרת את הטענה.*

*סעיף 7: הטענה נכונה!*

הוכחה**: נתון כי וגם כי**  **ולכן נסיק כי:**

**לפי ההגדרות מתקיים:**

1. **קיימים** ו-**כך שלכל** **מתקיים** .
2. **קיימים** ו-**כך שלכל** **מתקיים** .
3. **קיימים** ו-**כך שלכל** **מתקיים** .
4. **קיימים** ו-**כך שלכל** **מתקיים** .

**מנתונים (1) ו-(4), נגדיר** *,* ***ולפיכך לכל******מתקיים:***

**מנתונים (2) ו-(3), נגדיר** *,* ***ולפיכך לכל******מתקיים:***

**לכן לפי הגדרה מתקיים וגם .**

**לכן לפי הגדרה מתקיים גם כן  *כנדרש.***

סעיף 8: הטענה נכונה!

נוכיח אותה: **נתון כי וגם כי**

**מחוקי לוגים נשים לב כי: וגם**

***ולכן,* קיימים** ו-**כך שלכל** **מתקיים:** .

**כמו כן,** **קיימים** ו-**כך שלכל** **מתקיים:** .

**לפיכך, נגדיר  *כך שלכל , ומאי-שוויון המשולש, מתקיים:***

**ולכן עפ"י ההגדרה:**

**שאלה 2 סעיף 1:**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| O |  | **(נתון)** |  |
|  |  |  |  |
| O |  |  |  |
| O |  |  |  |

הוכחות:

נראה כי:

**נראה כי לפי ההגדרה, קיים c>0, ו- n>n0 כך ש: *.***

***נבחר למשל, n0= 2 С=1 ונקבל כי לכל n>n0  מתקיים:.***

***ובכך הוכחנו שהטענה נכונה.***

נראה כי: .

**נראה כי לפי ההגדרה, קיים c>0, ו- n>n0 כך ש: .**

***למדנו בהרצאה כי בפרט עבור מתקיים: . לכן קיימים c',n0>0 כך שלכל n>n0 מתקיים:***

***נבחר למשל, c=2c' ונקבל כי לכל n>n0 מתקיים:***

***ובכך הוכחנו שהטענה נכונה.***

נראה כי:

**נראה כי לפי ההגדרה, קיים c>0, ו- n>n0 כך ש:**

***נבחר למשל, n0= 2 С=1 ונקבל, כי לכל n>n0 מתקיים:***

***ובכך הוכחנו שהטענה נכונה.***

נראה כי:

**נראה כי לפי ההגדרה, קיים C>0, ו- n>n0 כך ש:**

***נבחר למשל, n0= 4 С=1 ונקבל, כי לכל n>n0***

***הביטוי נכון עבור n>n0 כי . והביטוי*** ***נכון כי הוא שקול ל***

***וזה משהו שהוכחנו בכיתה. ובכך הוכחנו שהטענה נכונה.***

נראה כי:

**נראה כי לפי ההגדרה, קיים C>0, ו- n>n0 כך ש:**

***נבחר למשל, n0= 4 С=1 ונקבל, כפי שלמדנו בכיתה כי לכל n>n0***

***ובכך הוכחנו שהטענה נכונה.***

נראה כי:

**נראה כי לפי ההגדרה, קיים C>0, ו- n>n0 כך ש:**

***נבחר למשל, n0= 4 С=0.25 ונקבל, כפי שלמדנו בכיתה כי לכל n>n0***

***ובכך הוכחנו שהטענה נכונה.***

*הערה:* ***הביטוי*** ***נכון כי*** ***והוא הוכח בהרצאה.***

הטענה הזו הוכחה במפורש כבר בהרצאה:

נראה כי:

**ראינו כבר בהרצאה ש:**

**לכן, כי לפי ההגדרה, קיים C>0, ו- n>1כך ש:**

***והביטוי*** ***נכון כי הוא שקול ל וזה משהו שהוכחנו בהרצאה ובכך הוכחנו שהטענה נכונה.***

*הערה:* ***הביטוי*** ***נכון כי*** ***והוא הוכח בהרצאה.***

נראה כי:

**נראה כי לפי ההגדרה, קיים C>0, ו- n>n0 כך ש:**

***נבחר למשל, n0= 2 С=1 ונקבל, כי לכל n>n0***

***ובכך הוכחנו שהטענה נכונה.***

נראה כי:

**נראה כי לפי ההגדרה, קיים C>0, ו- n>n0 כך ש:**

***נשים לב שהוכחנו בכיתה שלכל***  *ובפרט מתקיים ש* ***.***

***כלומר* קיים C>0, ו- n>n0 *עבורם לכל n>n0***

***ובכך הוכחנו שהטענה נכונה.***

נראה כי:

**נראה כי לפי ההגדרה, קיים C>0, ו- n>n0 כך ש:**

***נבחר למשל, n0= 2 С=1 ונקבל, כי לכל n>n0***

***ובכך הוכחנו שהטענה נכונה.***

*שאלה 2 סעיף 2:*

***נראה כי:***

***נוכיח בעזרת הגדרת o ונראה שהגבול שואף ל-0.***

***נוכיח זאת בעזרת לופיטל:***

***ובכך השלמנו את ההוכחה.***

*שאלה 2 סעיף 3:*

***נתונה הפונקציה*** ***כך ש*** ***וצ"ל ש***

***ראשית נוכיח את טענת העזר הבאה ש*** *:*

***מהנתון ומהגדרת*** ***ידוע כי***

***ולכן מאריתמטיקה של גבולות:***

***כעת נכפיל את הביטוי ב- f(n) ונקבל שוב מאריתמטיקה של גבולות:***

*נציין כי הביטוי הזה מתקיים כי ו - ולכן ברור מחוקי גבולות כי*

***כעת נחזור להוכחה המרכזית ונוכיח אותה לפי הגדרת o:***

***כעת בעזרת טענת העזר שהוכחנו נקבל:***

*ובכך השלמנו את ההוכחה.*

שאלה 3 - סעיף 1:

**נוכיח כי הטענה נכונה עבור הפרמטר .**

**מתקיים: *, כאשר לכל מתקיים .***

***נשתמש בשיטת העץ הרקורסיבי:***

***נמשיך בשיטה הזאת לכל רמה נוספת. מתקיים כי בכל רמה של העץ, סכום הצמתים הוא (וזאת בעקבות בחירת הפרמטר).***

***נשים לב שהרמה האחרונה עבור כל אחד מן הצמתים בשרטוט יכולה להיות שונה. נסתכל על מקרי הקצה בדומה לדוגמא בתרגול. הרמה המקסימלית i תהיה כאשר יתקיים: , כלומר יתקיים .***

***באופן דומה, עבור הרמה המינימלית j מתקיים: , כלומר יתקיים .***

***לכן, כמו שנלמד בתרגול מתקיים: .***

***לפיכך מתקיים: (כלומר מצאנו גם את החסם האסימפטוטי ההדוק הנדרש בשאלה).***

***מהגדרת הגבול מתקיים: .***

***לכן לפי הגדרה מתקיים כנדרש: .***

***כעת נוכיח כי פרמטר זה הוא המינימלי. לשם כך נניח בשלילה כי הטענה מתקיימת גם עבור .***

***נבנה באותו האופן בדיוק את העץ הרקורסיבי. נשים לב כי כעת בכל רמה של העץ, סכום הצמתים משתנה ושווה בערכו ל- .***

***סה"כ סכום הרמות מהווה סדרה הנדסית כאשר ברמה ה-i סכום הצמתים הוא: .***

***נשים לב כי מדובר באותן רמות עץ מינימלית ומקסימלית. כמו כן האיבר הראשון בסדרה הוא וההפרש בסדרה הוא . כאן ההבדל הגדול – ההפרש קטן מ-1 בעקבות ההגבלה על הפרמטר ולפיכך מתקיים:***

***נשים לב כי הגורם הימני מהווה סקלר ולכן כפי שראינו בהרצאה: . מצאנו סתירה להנחת השלילה ולפיכך סיימנו.***

שאלה 3 - סעיף 2:

* ***נתון: .***

***נוכיח כי מתקיים: .***

***נשתמש במשפט המאסטר. מתקיים: .***

***כמו כן, עבור מתקיים:*** *,* ***זאת משום* שקיימים** ו-**כך שלכל** **מתקיים:**

***בנוסף* קיימים** ו-**כך שלכל** **מתקיים:**

***לכן לפי משפט המאסטר מתקיים: .***

***אך נשים לב כי* קיימים** ו-**כך שלכל** **מתקיים:**

***כמו כן,* קיימים** ו-**כך שלכל** **מתקיים:**

***לכן לפי הגדרה מתקיים: וגם ,***

***כלומר מתקיים: .***

***מסקנה:***

* ***נתון: .***

***נסמן: . כעת מתקיים: .***

***ראינו בהרצאה כי מתקיים: .***

***נציב חזרה ונקבל: .***

* ***נתון: .***

***נסמן: , ולפיכך מתקיים: . נגדיר נוסחת נסיגה חדשה:***

***נשתמש במשפט המאסטר. נסמן: .***

***נשים לב כי עבור מתקיים:*** *,* ***זאת משום* שקיימים** ו-**כך שלכל** **מתקיים: *.***

***כמו כן,* קיימים** ו-**כך שלכל** **מתקיים:**

***לכן לפי משפט המאסטר מתקיים: .***

***נציב חזרה ונקבל: .***

* ***נתון: .***

***נשתמש במשפט המאסטר. מתקיים: .***

***כמו כן, עבור מתקיים:*** *,* ***זאת משום* שקיימים** ו-**כך שלכל** **מתקיים (נעזר במשפט 2.2 מדף הנוסחאות שנלמד בהרצאה):**

***לכן לפי משפט המאסטר מתקיים: .***

* ***נתון: .***

***נחלק את נוסחת הנסיגה ב- ונקבל:***

***נסמן: . לפיכך מתקיים: .***

***נסמן: , ולפיכך מתקיים: . נגדיר נוסחת נסיגה חדשה:***

***נשתמש במשפט המאסטר. נסמן: .***

***נשים לב כי מתקיים:*** *,* ***זאת משום* שקיימים** ו-**כך שלכל** **מתקיים: *.***

***נשים לב כי מתקיים:*** *,* ***זאת משום* שקיימים** ו-**כך שלכל** **מתקיים: *.***

***לכן לפי הגדרה מתקיים: .***

***לפי משפט המאסטר מתקיים: .***

***נשתמש בסימונים ונקבל:***

***מסקנה:***

*שאלה 4:*

*מבנה הנתונים יכיל את המידע הבא:*

*1) מערך בשם* **countries*: המערך יהיה בגודל*** *N* ***ככה שכל אינדקס מייצג מדינה. כל תא במערך יכיל* Struct *בשם* country. *השדה יכיל שלוש תכונות. הראשונה תהיה* days, *והיא תייצג את מספר הימים שיש למדינה הספציפית עד לבחירות הבאות. התכונה השנייה תכיל את Di כפי שהוגדר בשאלה, והשלישית תכיל אוביקט מסוג של רשימה מקושרת דו-כיוונית שמצביע לשדות* country *אחרים כאלה מאותו הסוג.***

*2) מערך בשם* **Days: *מערך שיהיה בגודל* D *שמכיל בתוכו גם הוא אוביקט מסוג של רשימה מקושרת דו-כיוונית שמצביע לשדות* country *אחרים כאלה מאותו הסוג*. *כל אינדקס במערך, מייצג מספר ימים עד* D-1 *שהוא המקסימלי. ככה שבכל תא, יהיה מצביע שדרכו אפשר יהיה לעבור על כל המדינות שיש בהן בחירות באותו היום.***

*3) משתנה בשם* **day: *מייצג את היום שבו אנחנו נמצאים כרגע מאז תחילת הפעלת המערכת. (בעצם מונה).***

*4) משתנה בשם***cycles: *בגלל שהמערכת שלנו מחזורית, כלומר אחרי Di ימים בכל מדינה* i *ספירת הימים עד הבחירות הבאות מתאפסת, ניצור משתנה שיעזור לנו לעקוב אחרי מספר המחזורים שלנו במערכת למען החישוב. (נסביר על המשתנה ושימושו יותר בזמן המימוש).***

*מימוש לפונקציות השונות:*

**Init(N,D)-**

* ***ניצור את המערך* countries *ונאתחל אותו בשדות של* country *בשיטה שנלמדה בהרצאה בסיבוכיות***O(1). ***כך שבכל* days*ו Di נשים 0 והרשימות המקושרות יהיו ריקות.***
* ***ניצור את המערך* Days *ונאתחל את המצבעים שלו ל*null- *בשיטה שנלמדה בהרצאה בסיבוכיות***O(1).
* ***ניצור ונאתחל את* day  *להיות 0.***
* ***ניצור ונאתחל את* cycles *להיות 0.***

**Insert(i,Di , days)**

* ***נבדוק תחילת שהתא ה-*i *פנוי (השדות שווים ל-0), ואם לא פנוי נזרוק חריגה.***
* ***אם המקום פנוי, נמלא את השדות בערכים המתאימים באותו האינדקס ב-* days *וב-* Di.**
* ***לאחר מכן, נפעל בצורה הבאה:***

*נלך לתא ה-* **days -1 *במערך* Days, *נבדוק אם קיים בו מצביע כלשהוא שונה מ-* null. *אם לא, נדאג עכשיו שהתא ה-* days -1 *יצביע לתא ה-*i *במערך* countries *ובכך בעצם התחלנו רשימה המקושרת של מדינות שהבחירות שלהן יהיו בעוד* days *ימים.***

***אם כבר קיים מצביע כלשהו בתא ה-* days -1, *נדאג שהמדינה במקום ה-*i *תצביע עכשיו למקום שאליו מצביע התא* days -1 *ולאחר מכן נעביר את כתובת המצביע ב-*****days -1 *כך שיצביע לתא ה-*i. *בעצם, דאגנו להוסיף איבר לרשימה המקושרת הדו-כיוונית שלנו למדינות שבהם יום הבחירות יהיה בעוד* days *ימים.***

*והנה המחשה בציור(השורה הראשונה בכל מערך כמובן לא תהיה במבנה נתונים עצמו וזה פשוט להמחשה כדי להבין מה כל עמודה מייצגת. כך גם לגבי העמודה הראשונה במערך* ***countries,*** *שהיא כאן רק כדי לעקוב אחרי מספר האינדקס של התא במערך):*

***בדוגמא זו,***N=5,D=7:

**countries:**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***list*** | ***Di*** | ***days*** | ***i*** |
|  |  |  |  |
|  | *5* | *2* | *3* |
|  | *5* | ***3*** | *2* |
|  | *7* | *7* | *1* |
|  | *4* | ***3*** | *0* |

**Days:**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***6*** | ***5*** | ***4*** | ***3*** | ***2*** | ***1*** | ***0*** |
|  |  |  |  |  |  |  |

**day = 1, cycles = 0**

***ככה ייראה מבנה הנתונים אחרי אתחול והכנסת מידע על כל האינדקסים של המדינות שלנו.***

*נשים לב שהיעילות היא* **O(1), *שכן בכל פעם אנחנו עוברים על אינדקס 1 בהתאם למיקומו במערך וגם בהכנסת האיבר לרשימה, אנחנו פשוט מכניסים אותה מיד אחרי ראש הרשימה ככה שאנחנו לא צריכים לעבור בכל פעם על כל איברי הרשימה. ולכן, מספר הפעולות שלנו הוא קבוע וידוע מראש.***

**ElectionsToday()**

* **ראשית, נקדם את day *באחד. ונבדוק גם אם* day-cycle\*D *גדול מ-*D, *אז* *נגדיל את* cycle *באחד. בדרך הזאת, אנחנו בעצם דואגים לעבור על מערך ה* Days *שלנו בצורה מחזורית בכפולות של* D *ימים. כלומר, בכל* D *ימים שעברו, נתחיל שוב להסתכל על המערך מהתא הראשון.***
* ***כעת, נפנה לתא ה-* day-cycle\*D-1 *במערך* Days. *אם הוא ריק, נסיים את הפעולה ואם לא,* *ונתחיל לעבור על כל איבר ברשימת המצביעים שלנו שמתחילים מהתא הזה ולהדפיס אותם כנדרש. בנוסף, כל איבר שנדפיס, ננתק אותו מהאיבר הקודם שהצביע עליו ברשימה, נשנה בו את השדה* days *להיות שווה ל-*Di+day- cycle\*D , *ונדאג להכניס אותו לרשימת המדינות החדשה בהתאם לערך החדש שיצא לו ב-* days*בשיטה שבה פעלנו בפעולה* Insert *בסופה*.**

*דוגמא קצרה:*

***נניח כי cycle = 0 , D =7 וקראנו לפעולה* ElectionsToday() *ככה שאחרי שהעלנו את day באחד נקבל כי day = 8.***

***מאחר ו* D< day-cycle\*D, *נעלה את* cycle *באחד כך ש-* .cycle = 1 *כלומר, השלמנו מחזור אחד של D ימים.***

***כעת, נפנה לתא ה-* day-cycle\*D-*1 שזה התא הראשון במערך ששקול ליום הראשון במחזור הימים השני שלנו. (או היום השמיני בעצם). ונסתכל ברשימה המקושרת שלו, בדיוק בכמה מדינות יש בחירות באותו היום.***

***וכשנעשה את זה, נדאג לחדש את מספר הימים של כל אחת מהמדינות עד הבחירות הבאות בהתאם* לDi** של אותה המדינה.

ככה שאם למשל באחת המדינות **DI =5**, אנחנו רוצים שבעוד ***day+5 ימים נגיע שוב לאותה המדינה נשנה את השדה days באותה מדינה להיות* Di+day- cycle\*D, שזה שווה ל-6*. ובגלל שאנחנו עוברים על המערך* Days *באופן מחזורי, נקבל שבעוד 5 ימים, נהיה ביום ה-13 שזה שקול ל-* day-cycle\*D-1. *כלומר, לאינדקס חמש וליום השישי במחזור הראשון שלנו.***

*בצורה הזו תמיד נוכל להמשיך לפעול באופן שיטתי ולרוץ ולעדכן את הערכים שלנו במדינות שבהן נעשו הבחירות ביום הרלוונטי ביעילות של* **O(k) ,** *כש-***k** *הוא בעצם גודל הרשימה של המדינות שבהן יש בחירות באותו היום. ובפעולה זו, אנחנו עוברים בכל פעם רק על אותן המדינות ומעדכנים את כל המידע שלהן ומזינים אותן מחדש ברשימות מדינות חדשות מתאימות במספר קבוע של פעולות.*

**PreDateElections(i, days\_to\_change)**

* ***אם המערך במקום* *ה-*i *ריק או מספר הימים בו התבקשנו להחזיר את הבחירות לאחור גדול מהשדה* days, *נחזיר הודעות על כך בהתאם ולא נעשה כלום.***
* ***במידה וזה לא המצב, נדאג לשנות את השדה* days *בהתאם, ובנוסף נעדכן את הרשימה המקושרת הדו כיוונית שבה נמצא התא* i, *כך שנוודא שהאיבר הקודם שמצביע על התא שלנו, יצביע כעת ישירות לתא הבא שעליו התא שלנו מצביע כרגע.(כלומר נמחק אותו מהרשימה נוכחית שבה הוא נמצא, כי מספר הימים של אותו התא עד הבחירות השתנה). בנוסף, נפנה כמו מקודם לאינדקס ה-* days -1*החדש שנוצר בעקבות השינוי במערך* Days, *ונדאג כמו מקודם בפעולת ה-* Insert*לשלב אותו ברשימת המדינות החדשה של כל המדינות שמתחילות מאותו האינדקס* days -1 *במערך* Days.**

*הסיבוכיות פה היא* **O(1)** *, שכן אנחנו ניגשים ישירות לאינדקס ה***-i** *ועושים מספר קבוע של פעולות בלבד.*

*סיבוכיות המקום היא* **O(N+D)** *כפי שהתבקש שכן יצרנו שני מערכים, אחד בגודל* **N***, ואחד בגודל* **D***.*