מטלה 2 – ליאור דניאל (ת.ז. 305257347)

1. לעץ בינארי מלא בעל n עלים יש $n-1$ צמתים פנימיים.

הוכחה: באינדוקציה על מספר העלים בעץ.

בסיס: עבור $n=1$ עלים בעץ יש $1-1=0$ צמתים פנימיים.
עבור $n=2$ עלים בעץ יש $2-1=1$ צמתים פנימיים.

צעד: נניח שעבור $n-1$ עלים הטענה מתקיימת ואכן יש $(n-1)-1$ צמתים פנימיים.
נוכיח כי עבור n מתקיים $n-1$ צמתים פנימיים.

נמחק מהעץ המלא שלנו 2 עלים שהם אחים (בנים של אותו אב) ובכך האב הופך להיות עלה, במצב כזה הגענו ל $n-1$ עלים ועבור הדוגמא הזו לפי ההנחה יש הטענה מתקיימת, אך אותו אב שהפך להיות עלה משמש כצומת פנימית בעץ שלנו לפני המחיקות ולכן עבור העץ שלנו עם n עלים אכן יש $n-1-1+1=n-1$ צמתים צמתים פנימיים. ז"א, $n-1-1$ לאחר מחיקת שני האחים (ואז הגענו לרמה הקודמת) ונוסיף 1 עבור האב שאצלנו משמש כצומת פנימית.

2. הוכחה:

$$H(p_1-\varepsilon, p_2+\varepsilon, \dots, p_n) = -[(p_1-\ \varepsilon)\log(p_1-\varepsilon)+(p_2+\varepsilon)\log(o_2+\varepsilon)+\cdots+p_n\log(p_n)$$

$$= -[(p_1-\varepsilon)\ \log(p_1-\varepsilon)+p_2+\varepsilon)\ \log(p_2+\varepsilon)+\cdots+p_n\log(p_n)]+(p_1)\ \log(p_1)-(p_1)\ \log(p_1)+(p_2)\log(p_2)-(p_2)\ \log(p_2)$$

$$= (p_1)\ \log(p_1)-(p_1-\ \varepsilon)\log(p_1-\varepsilon)+(p_2)\log(p_2)-(p_2+\varepsilon)\log(p_2+\varepsilon)-[\log(p_2+\varepsilon)-[(p_1)\ \log(p_1)+(p_2)\log(p_2)+\cdots+(p_n)\log(p_n)]$$

$$= H(p_1,\dots,p_n)$$

$$(p_1)\log(p_1)-(p_1)\log(p_1-\varepsilon)+\varepsilon\log(p_1-\varepsilon)+(p_2)\log(p_2)-(p_2)\log(p_2+\varepsilon)+H(p_1,\dots,p_n)$$

$$\varepsilon\log\left(\frac{p_1-\varepsilon}{p_2+\varepsilon}\right)+p_1\log(p_1)-p_1(\log(\mathrm{p}_1-\varepsilon))+p_2\log(p_2)-p_2(\log(p_2+\varepsilon))+H(p_1,\dots,p_n)$$

$$\geq \varepsilon\log\left(\frac{p_1-\varepsilon}{p_2+\varepsilon}\right)+p_1\log(p_1-\varepsilon)-p_1\log(p_1-\varepsilon)+p_2\log(p_2+\varepsilon)-p_2\log(p_2+\varepsilon)+H(p_1,\dots,p_n)$$

$$\varepsilon\log\left(\frac{p_1-\varepsilon}{p_2+\varepsilon}\right)+H(p_1,\dots,p_n)>H(p_1,\dots,p_n)\ \ \textit{because}\ \left(\varepsilon\log\left(\frac{p_1-\varepsilon}{p_2+\varepsilon}\right)\right)\ \textit{is greater than 0}$$

3. א. $Affix(g)=\{10,000,001,011,111,0100,1100,0101,1101\}$

ב. נניח בשלילה שקיימת קבוצה סופית A המכילה את כל הקודים האפיקסים.
ניצור קבוצה חדשה B המכילה זוגות סדורים, כך שכל זוג סדור מורכב מאיבר אחד ב-A, בתוספת ביט נוסף של 0 או 1.
בצורה זו אף איבר לא יהיה רישא \ סיפא של איבר אחר מכיוון שמשתמשים באותם איברים בתוספת 0 \ 1 ולכן יצרנו קבוצה אפיקסית באורך כפול מקבוצה A.

סתירה להנחה שקבוצת כל הקודים האפיקסים היא סופית.