1)

משפט: ש $H(P) \leq E(c,P)$

כאשר $E(c,P)$ הוא אורך מילון ממוצע של מילון של קידוד.

ו $H(P)$ היא האנטרופיה.

הוכחה: $H(P) - E(c,P) \leq 0$ (נראה שנכון)

נציב מהגדרות של האנטרופיה: $H(P) = -\sum_{i=1}^{n} P_i \log_2 P_i$

$E(c,p) = \sum_{i=1}^{h} P_i |c_i|$ נציב מהגדרות של אורך מילון ממוצע של הקידוד

כאשר

$$-\sum_{i=1}^{n} P_i \log_2 P_i - \sum_{i=1}^{n} P_i (-\log_2 k_i) \overset{\text{שווה ל}}{=}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \left(\log_2 k_i - \log_2 P_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot \log_2 \frac{k_i}{P_i}$$

לפי $\log_a b = \dfrac{\log_x b}{\log_x a}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ell n 2} \cdot \ln \frac{k_i}{P_i}$$

לפי $\ln(x) \leq x-1$ לכל x נקבל (וגם בסימן שווה מתקיים):

$$\frac{1}{\ell n 2} \sum_{i=1}^{n} P_i \left(\frac{k_i}{P_i} - 1\right) \leq 0 = \frac{1}{\ell n 2} \sum_{i=0}^{n} k_i - P_i \leq 0$$

$$\frac{1}{\ell n 2} \left(\sum_{i=0}^{n} k_i - \sum_{i=0}^{n} P_i\right) \leq 0$$

$$\text{Kraft}(c) = \sum_{i=1}^{n} 2^{-c_i} \leq 1 \qquad \text{וזר}$$

ידוע שהמשתנים הם $\sum_{i=0}^{n} P_i = 1$

$$\Leftarrow$$

$$\frac{1}{\ell n2} \left(\underbrace{\sum_{i=0}^{n} 2^{-|c_i|}}_{\leq 1} - \underbrace{\sum_{i=0}^{n} P_i}_{\overset{||}{1}} \right) \leq 0$$

נכון

$$\frac{1}{\ell u2} \left(\approx 1 - 1 \right) \leq 0$$

נכון

נכון כדאי יוצא ביטוי אדוקים.

אזי

כ כהו קודד גרא... אש"נ ... קוף חסר ...

הוכחה:

$\Leftarrow$ (נניח השלם כי הוא קוד חד־...)

(שדר $z = c(x)$ ...)

(z הוא קידוד ... z)

(שדר x ...)

$z' = c(x')$ ...

ולכן x ...

וכן ... על x' ... (x', x) ...

$\Rightarrow$ ... $c(a_i)$ ... $c(a_j)$ ...

$x = a_i$ ...

$x' = a_j$ ...

מש"ל

(נתון) קוד c הוא קידוד זה אם זה אפשר לבנות עץ בינארי

הטבה c: אם קוד c הוא עץ זה אם עם האורכים $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-\ell_i} = 1$$

הוכחה:

(ניות ש-c היו עץ קוד זה היו על כל עלה של העץ מתאים אות) נחלוק על גודל אורך

על כל אות מתאים צלע אל צלע 0 או צלע 1 של הקוד

לפי הבנויה באורך של אות אורך זה כולו.

בסיס: עבור $n=1$ יש לנו רק עץ יחיד וחד גודל של עלה.

$$\sum_{i=1}^{n=1} 2^{-0} = 1$$

מקיים מספר אמירה.

עבור $n=2$ יש לנו רק עץ עם עלה אחד ושני עלים יש לנו עם 2 עלים ו-

$$\sum_{i=1}^{n=2} 2^{-\ell_i} = 2^{-1} + 2^{-1} = 1$$

מקיים מספר אמירה.

הנחת האינדוקציה: נניח שמתקיים אמירה עבור n-1 אורך זה אולי

$$\sum_{i=1}^{n-1} 2^{-\ell_i} = 1$$

צעד: נראה עבור n אורך n עלה זה כולו.

נניח על $\ell_i = \ell_j$ ולמקורי שנים שני צמים שנם עם אותו אב מי שנם

אצל c $\ell_i = k$ ואחרי יש לנו אבא חדש כל צמים שנם ℓ ולהם יש אב 2 כולי אבל אותו

של אורך אבא כולו.

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-\ell_i} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} 2^{-k}\right) - 2^{-(k)} + 2 \cdot 2^{-(k+1)} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} 2^{-\ell_i} = \sum_{i=1}^{n-1} 2^{-k} = 1$$

$$\left(-2^{-(k)} + \frac{2}{2} \cdot 2^{-k} = 0\right)$$

לפי הנחת האינדוקציה.

מש"ל $\blacksquare$