מטלה 1 – ליאור דניאל (ת.ז. 305257347)

1) הוכיחו:
$H(P) \le E(C,P)$ כאשר $E(C,P)$ הינו האורך הממוצע של מילת הקוד ו- $H(P)$ הינו האנטרופיה.

הוכחה:
נניח בשלילה שקיים קידוד c עם אורך מילה ממוצעת נמוך מהאנטרופיה,
כלומר מתקיים ש

$$H(P) - E(C,P) = -\sum p_i \log p_i - \sum p_i |c_i| = \sum p_i \left(\log\frac{1}{p_i} - |c_i|\right) =$$

$$\sum p_i (\log\frac{1}{}p_i - \log 2^{c_i}) = \sum p_i (\log\frac{1}{p_i} - \log 2^{|c_i|}) = \sum p_i (\log\frac{1}{p_i} + \log 2^{-|c_i|})$$

הכנסת מינוס ללוג, איחוד סיגמות וחוקי לוגים

$$\sum p_i (\log\frac{2^{-|c_i|}}{p_i}) \le \sum p_i \left(\frac{2^{-|c_i|}}{p_i} - 1\right) = \sum \frac{p_i 2^{-|c_i|}}{p_i} - p_i = \sum 2^{-|c_i|} - \sum p_i \le 1 - 1 = 0$$

לפי קראפט $k(c) \le 1$
לכן סה"כ $H(P) - E(C,P) \le 0$ בסתירה להנחה ולכן לא קיים קוד כזה.

2) הוכח:
c הוא קוד מיידי אמ"מ c הוא קוד חסר רישות.

נניח בשלילה ש-c הוא קוד לא מיידי.
נגדיר $z = c(x)$ להיות קידוד פרפיקסי של קידוד $z' = c(x')$.
נגדיר את x להיות מילת קוד הכי קצרה. בנוסף, x' לא רישא של x' מכיוון ש-c חסר רישות.
לכן האות הראשונה של x לא יכולה להיות זהה לאות הראשונה של x', אחרת יכולנו להוריד אותה ולקבל מילה קצרה יותר.
זה אומר ש-x ו-x' שונים, אבל אחד הקידודים חייב להיות רישא של השני וזו סתירה להנחה. לכן c הוא קוד מיידי.
אם הקוד $c(a_i)$ הוא פרפיקס של מילת הקוד $c(a_j)$ אז הקידוד של סדר הפעולות $x = a_i$ הוא הרישא של קידוד $x' = a_j$
וכך הקוד הוא אינו מידי וזה סתירה לנתון. לכן c הוא קוד חסר רישות אמ"מ הוא קוד מיידי.

3) נתון קוד c עם מילות קוד באורכים $l_1, l_2, \dots, l_n$.
הוכח כי אם c קוד שלם אז $\sum_{i=1}^{n} 2^{-l_i} = 1$.

הוכחה:
נניח ש-c קוד שלם ולכן קיים עבורו עץ מלא.
נוכיח באינדוקציה:
בסיס:

- עבור $n = 1$ יש עץ בעל קודקוד יחיד בלי בנים.
  לכן $\sum_{i=1}^{n} 2^{-l_i} = 2^{-0} = 1$ והטענה מתקיימת.
- עבור $n = 2$ יש עץ בעל קודקוד עם 2 בנים
- לכן $\sum_{i=1}^{n} 2^{-l_i} = 2^{-1} + 2^{-1} = 1$ והטענה מתקיימת.

הנחת האינדוקציה: נניח שהטענה מתקיימת עבור $n-1$ מילות קוד $\sum_{i=1}^{n} 2^{-l_i} = 1$
צעד: נניח עבור n מילות קוד.
נגדיר $l_i = k$ ונבחר k כלשהו שהוא עלה ונוסיף לו 2 עלים כדי שישאר עץ מלא. כך האב הופך לצומת והעלים לבנים שלו.
לכן

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-l_i} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} 2^{-k}\right) - 2^{-(k)} + 2 * 2^{-(k+1)} = 1$$

הוספת 2 הבנים והורדת האבא