תורת הקבוצות

יובל קפלן

סיכום הרצאות פרופ׳ ארז לפיד בקורס ״תורת הקבוצות״ (80200) באוניברסיטה העברית, 7–2006.

תוכן מחברת זו הוקלד ונערך על־ידי יובל קפלן. אין המרצה אחראי לכל טעות שנפלה בו. סודר באמצעות $\LaTeX\,2_\varepsilon$ ב־18 בנובמבר 2007.

עדכונים ותיקונים יופיעו ב־http://www.limsoup.net/. לתגובות, לתיקונים ובכל עניין אחר, אנא כתבו ל־yuvak@gmx.net.

סיכומים נוספים בסדרה:

2006–7	חשבון אינפיניטסימלי 1	אלגברה לינארית 1
	חשבון אינפיניטסימלי 2	אלגברה לינארית 2
	תורת הקבוצות	
2007–8	מבנים אלגבריים 1	תורת ההסתברות 1

תוכן עניינים

1 קבוצות ובנייתן 5

1.1 הגדרה 5

1.2 "בעיות" בתורת הקבוצות 5

1.3 בניות של קבוצות 6

2 יחסים ופונקציות 10

2.1 יחסים 10

2.2 פונקציות 12

2.3 בניות של פונקציות 13

2.4 בניות שקשורות לפונקציות 14

3 עוצמות 18

3.1 השוואת קבוצות 18

3.2 קבוצות סופיות 20

3.3 קבוצות אינסופיות 21

3.4 השערת הרצף 27

3.5 חשבון עוצמות 27

4 אקסיומת הבחירה 29

5 הלמה של צורן 30

5.1 יחסי סדר 30

5.2 הלמה של צורן 34

1 קבוצות ובנייתן

1.1 הגדרה

28.2.2007 מושג הקבוצה הוא המושג הבסיסי ביותר במתמטיקה, ולכן הוא קשה להגדרה; בשני הזרמים של תורת הקבוצות – הנאיבי והאקסיומטי (שבו יש אקסיומטיקה של הדרישות מקבוצות[1]) – אי־אפשר להגדיר קבוצה.

הגדרה (ניסיון). **קבוצה** היא אוסף של עצמים שונים. – לא ברור מהו "אוסף" או מהם "עצמים". קבוצה

באופן מעשי: $X = \{a,b,c\} = \{a,a,a,c,b,b\}$. $x \in X$ – העצם x **שייך** לקבוצה X; $x \notin X$ – העצם x **אינו שייך** לקבוצה X. עצמים יכולים להיות קבוצות בעצמם. קבוצות מתקבלות גם על־ידי תכונות: אם X קבוצה ו־$T(x)$ תכונה[2] שתלויה ב־$x \in X$, $\{x \in X : T(x)\}$ היא קבוצת איברי X המקיימים את התכונה $T(x)$.

קבוצות שימושיות: $\mathbb{N}$ – קבוצת המספרים הטבעיים ($\{1,2,3,\dots\}$, ויש אסכולה שטוענת ש־$0 \in \mathbb{N}$); $\mathbb{Q}$ – קבוצת המספרים הרציונאליים; $\mathbb{R}$ – קבוצת המספרים הממשיים; $\mathbb{C}$ – קבוצת המספרים המרוכבים.

כל טענה אפשר לנסח במונחי קבוצות; למשל, משפט פרמה ינוסח בלשון קבוצות באופן הבא:

$$\{(x,y,z,n) : x,y,z,n \in \mathbb{N},\ x,y,z > 0,\ n > 2,\ x^n + y^n = z^n\} = \varnothing$$

הגדרה. שתי קבוצות X, Y **שוות** אם הן מכילות בדיוק את אותם איברים; כלומר, לכל $x \in X$ מתקיים $x \in Y$, ולכל $x \in Y$ מתקיים $x \in X$. שוויון

הגדרה. קבוצה X **מוכלת** בקבוצה Y אם לכל $x \in X$ מתקיים $x \in Y$: $X \subseteq Y$. אם $X \subseteq Y$ אבל $X \neq Y$, נסמן $X \subsetneq Y$. אם קיים $x \in X$ כך ש־$x \neq Y$, $X \nsubseteq Y$ – X **לא מוכל** ב־Y. הכלה

יחס ההכלה טרנזיטיבי; כלומר, אם $X \subseteq Y$ ו־$Y \subseteq Z$ אז $X \subseteq Z$.

$X = Y$ אם"ם $X \subseteq Y$ ו־$Y \subseteq X$.

$x \in X \Longleftarrow \{x\} \subseteq X$.

1.2 בעיות בתורת הקבוצות

דוגמה. יהי n המספר הטבעי הקטן ביותר שלא ניתן להביע במאה אותיות בשפה העברית.

מספר המשפטים בני עד מאה אותיות בשפה העברית הוא סופי. לכן לא ניתן לתאר כל מספר טבעי על־ידי עד מאה אותיות, ולכן n כנ"ל קיים. מצד שני, n מתואר על־ידי המשפט לעיל, שהוא בן פחות ממאה אותיות. הבעיה, למעשה, היא בכך שהמשפט מתייחס לעצמו (הוא self referential) ואיננו מהווה תיאור אמיתי.

[1] המערכת האקסיומטית הסטנדרטית כיום היא אקסיומות צרמלו־פרנקל (ZFC, כאשר C מייצגת את אקסיומת הבחירה – Axiom of Choice). פרנקל היה בין הפרופסורים הראשונים באוניברסיטה העברית.

[2] אינטואיטיבית, תכונה היא ביטוי שמקבל ערך true או false.

פרדוקס ראסל

תיאור אחר, יותר מתמטי, של הבעיה: נסתכל על $Y = \{X : X \notin X\}$. האם $Y \in Y$? אם כן, לפי הגדרת Y נקבל $Y \notin Y$. מצד שני, אם $Y \notin Y$, לפי הגדרת Y נקבל $Y \in Y$. הבעיה היא ש־Y "גדולה מדי": סתירה מתקבלת מהר כשמדברים על "קבוצת כל הקבוצות". אחת הדרכים להתגבר על כך היא לקחת קבוצה U – ה"יקום"; כל העצמים שנדבר עליהם יהיו שייכים ל־U, וכל הקבוצות תהיינה תתי־קבוצות של U. זה יפתור את הבעיה, כי אז $Y = \{X \in U : x \notin X\}$ לא תהיה איבר ב־U (אם U לא תרשה זאת). (ב־ZF, אחת האקסיומות דורשת $X \notin X$ לכל X.)

1.3 בניות של קבוצות

1.3.1 הקבוצה הריקה

קבוצה ריקה

הגדרה. **קבוצה ריקה** היא קבוצה שלא מכילה אף איבר.

טענה 1: הקבוצה הריקה מוגדרת היטב (יחידה); כלומר, קיימת קבוצה ריקה, ואם X, Y לא מכילות אף איבר, $X = Y$. (מכאן, נוכל לסמן את הקבוצה הריקה $\varnothing$.)

הוכחה. אם X, Y לא מכילות אף איבר, אז כל איבר ב־X הוא איבר ב־Y וכל איבר ב־Y הוא איבר ב־X, באופן ריק. לכן $X = Y$. קיום ניתן להראות על־ידי רשימה ריקה ($\varnothing = \{\}$) או על־ידי תכונה ($\varnothing = \{x \in U \mid x \neq x\}$).

לכל קבוצה X, $\varnothing \subseteq X$.

1.3.2 איחוד וחיתוך קבוצות

איחוד

חיתוך

אם A, B קבוצות, נגדיר את **האיחוד** שלהן על־ידי $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$ ואת **החיתוך** על־ידי $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$.

תכונות:

1. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (קומוטטיביות)
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (אסוציאטיביות)
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (דיסטריביוטיביות)
4. $A \cap A = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$
5. $A \cup A = A$, $A \cup \varnothing = A$

הוכחה (2א'). נניח ש־$x \in (A \cup B) \cup C$. אז או $x \in A \cup B$ או $x \in C$. אם $A \in A \cup B$, או $x \in A$ ולכן $x \in A \cup (B \cup C)$ או $x \in B$ ולכן $x \in B \cup C$ ולכן $x \in A \cup (B \cup C)$. אם $x \in C$, אז $x \in B \cup C$ ולכן $x \in A \cup (B \cup C)$.

אם $A_1,\ldots,A_n$ קבוצות, $A_1\cup\ldots\cup A_n=\{x\in U\mid x\in A_1\vee\ldots\vee x\in A_n\}$, $A_1\cap\ldots\cap A_n=\{x\in U\mid x\in A_1\wedge\ldots\wedge x\in A_n\}$. תכונות דומות מתקיימות.

1.3.3 הפרש ומשלים

משלים

הפרש

אם A קבוצה, נגדיר את **המשלים** על־ידי $A^C=\{x\in U\mid x\notin A\}$. אם A, B קבוצות, נגדיר את **ההפרש** ביניהן על־ידי $A\setminus B=\{x\in A\mid x\notin B\}$.

תכונות:

1. $A\setminus A=\varnothing$
2. $A\cup A^C=U$
3. $A\setminus B=A\cap B^C$
4. $(A^C)^C=A$
5. $B^C\subseteq A^C \iff A\subseteq B$
6. $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$
7. $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$, $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$ (חוקי דה־מורגן)

חוקי דה־מורגן

1.3.4 קבוצת החזקה

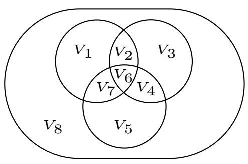
קבוצת החזקה

בהינתן A קבוצה, **קבוצת החזקה** מוגדרת כ־$P(A)=\{B\subseteq U : B\subseteq A\}$. אם ב־$A$ יש n איברים, מספר האיברים ב־$P(A)$ הוא 2^n.

בהינתן קבוצות $A_1,\ldots,A_n$ במצב כללי, כמה קבוצות ניתן לקבל על־ידי חיתוכים, איחודים ולקיחת הפרש?

עבור שתי קבוצות A, B, נוכל לקבל A, B, U, A^C, B^C, $\varnothing$, $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$, $(A\cup B)^C$, $(A\cap B)^C$, $(A\setminus B)^C$, $(B\setminus A)^C$, $(A\cap B)\cup(A\cup B)^C$.

עבור שלוש קבוצות, יש פירוק של U ל־8 ״חתיכות״ זרות, $V_1,\ldots,V_8$; מכל תת־קבוצה של $\{1,\ldots,8\}$ אפשר להרכיב קבוצה: למשל, $I=\{2,5,7\}$ – $V_1\cup V_5\cup V_7$. מספר הקבוצות הכולל הוא כמספר תתי־הקבוצות של $1,\ldots,8$ – כלומר, $2^8=256$.



באופן כללי, אם $A_1,\ldots,A_n$ במצב כללי, יש 2^n קבוצות $V_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n} = A_1^{\varepsilon_1}\cap\ldots\cap A_n^{\varepsilon_n}$ ($\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\in\{0,1\}$, $A_i^{\varepsilon_i}=\left\{\begin{smallmatrix} A_i & \varepsilon_i=0 \\ A_i^C & \varepsilon_i=1\end{smallmatrix}\right.$). האוסף $\{V_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}\}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\in\{0,1\}}$ מהווה פירוק של U לקבוצות זרות לא־ריקות. לכל $I\subseteq\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\in\{0,1\}\}$ אפשר להתאים קבוצה $W_I=\bigcup_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\in I}V_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}$. האוסף $\{W_I\}_{I\subseteq\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n|\varepsilon_i\in\{0,1\}\}}$ הוא קבוצת כל הקבוצות המתקבלות מ־$A_1,\ldots,A_n$ על־ידי חיתוכים, איחודים ומשלימים. $W_I\neq W_J$ אם $I\neq J$. מספר הקבוצות הכולל: 2^{2^n}.

1.3.5 איחודים וחיתוכים כלשהם

7.3.2007 בהינתן משפחה $\{A_\alpha:\alpha\in I\}$ של קבוצות – כלומר, I קבוצת אינדקסים ולכל $\alpha\in I$ A_α קבוצה – נסמן ב־$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$ את הקבוצה כך ש־$x\in\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$ אם ורק אם קיים $a\in I$ כך ש־$x\in A_\alpha$. למשל, אם $I=\{1,2\}$ אז $\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=A_1\cup A_2$. באופן דומה, החיתוך של המשפחה $\{A_\alpha:\alpha\in I\}$ – $\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$ – הוא הקבוצה כך ש־$x\in\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$ אם ורק אם לכל $a\in I$ $x\in A_\alpha$.

תכונות:

1. נניח $I=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}I_\gamma$, $\{X_\gamma:\gamma\in I\}$. אז מתקיים $\bigcup_{\alpha\in I}X_\alpha=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(\bigcup_{\alpha\in I_\gamma}X_\alpha)$ (אסוציאטיביות מוכללת)

הוכחה. צריך להוכיח ש־$x\in\bigcup_{\alpha\in I}X_\alpha$ אס"ם $x\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(\bigcup_{\alpha\in I_\gamma}X_\alpha)$.

($\Longleftarrow$) אם $x\in\bigcup_{\alpha\in I}X_\alpha$ אז קיים $\alpha\in I$ כך ש־$x\in X_\alpha$. קיים $\gamma\in\Gamma$ כך ש־$\alpha\in I_\gamma$, לכן $x\in\bigcup_{\alpha\in I_\gamma}X_\alpha$.

($\Longrightarrow$) אם $x\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(\bigcup_{\alpha\in I_\gamma}X_\alpha)$ אז קיים $\gamma\in\Gamma$ כך ש־$x\in\bigcup_{\alpha\in I_\gamma}X_\alpha$. לכן קיים $\alpha\in I_\gamma$ כך ש־$x\in X_\alpha$, ולכן $x\in\bigcup_{\alpha\in I}X_\alpha$.

באופן דומה, $\bigcap_{\alpha\in I}X_\alpha=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(\bigcap_{\alpha\in I_\gamma}X_\alpha)$.

2. $A\cap(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha)$, וכמו־כן $A\cup(\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I}(A\cup B_\alpha)$ (דיסטריביוטיביות מוכללת)

הוכחה. צריך להוכיח ש־$x\in A\cup(\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha)$ אס"ם $x\in\bigcap_{\alpha\in I}(A\cup B_\alpha)$.

אם $x\in A\cup(\bigcap B_\alpha)$ אז או $x\in A$ ולכן $x\in A\cup B_\alpha$ לכל α, ולכן $x\in\bigcap(A\cup B_\alpha)$ – או $x\in\bigcap B_\alpha$, ואז $x\in B_\alpha$ לכל $\alpha\in I$, לכן $x\in A\cup B_\alpha$ לכל α ולכן $x\in\bigcap_{\alpha\in I}(A\cup B_\alpha)$.

להיפך, אם $x\in\bigcap_{\alpha\in I}(A\cup B_\alpha)$ אז לכל $\alpha\in I$ $x\in A\cup B_\alpha$. אם $x\in A$, בוודאי $x\in A\cup(\bigcap B_\alpha)$; אחרת, $x\in B_\alpha$ לכל α, לכן $x\in\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha$ ולכן $x\in A\cup(\bigcap B_\alpha)$.

הגדרה. קבוצות A, B נקראות **זרות** אם $A\cap B=\varnothing$. באופן כללי יותר, משפחה $\{X_\alpha:\alpha\in I\}$ נקראת **זרה** אם לכל $\alpha\neq\beta\in I$ $X_\alpha\cap X_\beta=\varnothing$ (כלומר, X_α זרים בזוגות).

1.3.6 מכפלה קרטזית

בקבוצות אין חשיבות לסדר: $\{x,y\}=\{y,x\}$. כדי להגדיר **זוג סדור** כך ש־$(x,y)=(x',y')$ אס״ם $x=x'$, $y=y'$, נגדיר $(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}$. זוג סדור

למה 2: $(x,y)=(x',y')$ אס״ם $x=x'$, $y=y'$.

הוכחה. אם $x=x'$ ו־$y=y'$, אז $\{x\}=\{x'\}$ ו־$\{x,y\}=\{x',y'\}$ ולכן $(x,y)=(x',y')$.

מצד שני, אם $\{\{x\},\{x,y\}\}=\{\{x'\},\{x',y'\}\}$ אז $\{x\}\in\{\{x\},\{x,y\}\}$ ולכן מתקיים $\{x\}=\{x'\}$ או $\{x\}=\{x',y'\}$. במקרה הראשון, $x=x'$; במקרה השני, $x=x'$ (כי $\{x\}$ קבוצה בעלת איבר אחד). מכאן שמתקיים $\{\{x\},\{x,y\}\}=\{\{x\},\{x,y'\}\}$, לכן $\{x,y\}=\{x,y'\}$ ולכן $y=y'$.

בהינתן X, Y, $X\cdot Y=\{(x,y):x\in X,y\in Y\}$. מכפלה קרטזית

דוגמה. $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ – המישור האוקלידי; $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ – קבוצת הנקודות השריג במישור; $[a,b]\times[c,d]$ – מלבן במישור; $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0}$ – חצי המישור העליון; $\mathbb{R}_{>3}\times\mathbb{R}$ – חצי־מישור ימני.

כדי להגדיר מכפלה קרטזית סופית, נגדיר n־ייה סדורה כך ש־$(x_1,\dots,x_n)=(y_1,\dots,y_n)$ אס״ם $x_i=y_i$ לכל $i=1\dots n$, ואז יתקיים $X_1\times\ldots\times X_n=\{(x_1,\dots,x_n)\mid x_i\in X_i\}$.
יש לשים לב שטכנית, הקבוצות $X\times(Y\times Z)$, $(X\times Y)\times Z$ ו־$X\times Y\times Z$ אינן זהות.
תכונות:

1. $X\times(Y\cup Z)=(X\times Y)\cup(X\times Z)$
2. $X\times(Y\cap Z)=(X\times Y)\cap(X\times Z)$
3. $X\times Y=\varnothing \iff X=\varnothing$ או $Y=\varnothing$
4. אם $X'\subseteq X$, $Y'\subseteq Y$, אז $X'\times Y'\subseteq X\times Y$

2 יחסים ופונקציות

2.1 יחסים

2.1.1 הגדרה

יחס

הגדרה. **יחס** בין X ל־Y הוא תת־קבוצה של $X \times Y$. (אם $X = Y$, נאמר שהיחס הוא יחס **על** X.) אם $R \subseteq X \times Y$ יחס, נסמן xRy אם״ם $(x, y) \in R$.

תחום

הגדרה. **תחום** של יחס S: $X \supseteq D(S) = \{x \in X : \exists y \in Y : xSy\}$. אם $D(S) = X$, נאמר ש־S הוא יחס **מ**־X ל־Y.

טווח

הגדרה. **טווח** של יחס S: $Y \supseteq R(S) = \{y \in Y : \exists x \in X : xSy\}$. אם $R(S) = X$, נאמר ש־S הוא יחס בין X **על** Y.

דוגמה.

- $\{(x, x) : x \in X\} \subseteq X \times X$ == (אלכסון)
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \iff \exists z \in \mathbb{R}\; y - x = z^2\}$ =≥ (מתחת האלכסון)
- $R = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 :$ 7־מתחלק ב $m - n\}$
- $R = \{(A, B) \in P(\{1, \ldots, n\}) : A \subseteq B\}$
- $R = \{(m, A) \in \{1, \ldots, n\} \times P(\{1, \ldots, n\}) : m \in A\}$

2.1.2 יחסי שקילות

יחס רפלקסיבי

הגדרה. יחס R על X נקרא **יחס רפלקסיבי** אם, לכל $x \in X$, xRx.

יחס סימטרי

הגדרה. יחס R על X נקרא **יחס סימטרי** אם, לכל $x, y \in X$, $xRy \Leftrightarrow yRx$.

יחס טרנזיטיבי

הגדרה. יחס R על X נקרא **יחס טרנזיטיבי** אם, לכל $x, y, z \in X$, $xRy, yRz \Longrightarrow xRz$.

יחס שקילות

הגדרה. יחס R על X נקרא **יחס שקילות** אם הוא יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

דוגמה.

- יחס השוויון $R = \{(x, x) : x \in X\}$ הוא יחס שקילות.
- היחס המלא $R = X \times X$ הוא יחס שקילות.
- היחס הריק $R = \varnothing$ הוא סימטרי וטרניזיטיבי, אבל לא רפלקסיבי.
- היחס $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists z \in \mathbb{R}\; y - x = z^2\}$ =≥ טרנזיטיבי ורפלקסיבי, אבל לא סימטרי. (כנ״ל לגבי יחס ההכלה ב־$P(\{1, \ldots, n\})$.)

- היחס על $P(\{1,\dots,n\}) \setminus \{\varnothing\} = \{A \subseteq \{1,\dots,n\} : A \neq \varnothing\}$ המוגדר על־ידי $R = \{(A,B) : A \cap B \neq \varnothing\}$ רפלקסיבי וסימטרי, אך לא טרנזיטיבי. (אם $n \geq 4$, $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$, $C = \{3,4\}$, $A \cap B \neq \varnothing$ ו־$B \cap C \neq \varnothing$, אך $A \cap C = \varnothing$.)

- היחס $R = \{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : 7 \text{ מתחלק ב־} m-n\}$ הוא יחס שקילות.

  הוכחה. לכל $n \in \mathbb{Z}$, $n - n = 0$ מתחלק ב־7 (היחס רפלקסיבי.)

  אם $m - n$ מתחלק ב־7, כך גם $n - m = -(m-n)$ (היחס סימטרי.)

  אם $x - y = 7a$, $y - z = 7b$ אז $x - z = (x-y) + (y-z) = 7(a+b)$ (היחס טרנזיטיבי.)

הגדרה. אם R יחס שקילות על X, **מחלקת השקילות** של $x \in X$ כלשהו מוגדרת כקבוצה $T = [x] = \{y \in X : xRy\} \subseteq X$. מחלקת שקילות

הגדרה. קבוצה $T \subseteq P(X) \setminus \{\varnothing\}$ נקראת **חלוקה** של X אם מתקיימים (א) $\forall A \in T\ A \neq \varnothing$; (ב) $X = \bigcup T = \bigcup_{A \in T} A$; (ג) $\forall A,B \in T\ A \neq B \Longrightarrow A \cap B = \varnothing$. חלוקה

טענה 3: אם R יחס שקילות, אז $\{[x] : x \in X\}$ מהווה חלוקה של X.

הוכחה. $x \in [x]$, בגלל רפלקסיביות R; כלומר, כל $[x] \neq \varnothing$ – כל איבר ב־T הוא תת־קבוצה לא־ריקה של X.

צ"ל כי $[x] \cap [y] = \varnothing$ אם $[x] \neq [y]$. נניח בשלילה שיש $z \in [x] \cap [y]$ ונראה ש־$[x] = [y]$. אז xRz, yRz. בגלל הסימטריות, zRx. בגלל הטרנזיטיביות, $yRz \wedge zRx \Longrightarrow yRx$. כעת, $[x] \subseteq [y]$: אם $z \in [x]$ אז xRz; אם $yRx \wedge xRz$ אז yRz, לכן $z \in [y]$. באופן דומה, $[y] \subseteq [x]$.

$x \in [x] \Longleftarrow X = \bigcup [x]$.

14.3.2007 להיפך, בהינתן חלוקה T של X ניתן להגדיר יחס $R = \{(x,y) : \exists A \in T\ x,y \in A\}$:

טענה 4: R הוא יחס שקילות.

הוכחה. רפלקסיביות: $\forall x \in X\ \exists A \in T : x \in A$ (T מכסה את כל X). לכן xRx.

סימטריות: R סימטורי באופן ברור (שייכות לקבוצה היא ללא סדר).

טרנזיטיביות: נניח $xRy \wedge yRz$. אז קיימות $B, A \in T$ כך ש־$x,y \in A$, $y,z \in B$. לכן $xRz \Longleftarrow x,z \in A \Longleftarrow A = B \Longleftarrow A \cap B \neq \varnothing \Longleftarrow y \in A \cap B$.

ושוב, לכל $x \in A \in T$ ($x \in X$), $[x] = \{y \in X : \exists B \in T\ x,y \in B\} = A$: אם $B \in T$ כך ש־$x \in B$ אז $A = B$ (אחרת $A \cap B = \varnothing$). כלומר, כל מחלקת שקילות היא איבר בחלוקה, וכל איבר בחלוקה הוא מחלקת שקילות.

כל חלוקה מתקבלת על־ידי מחלקות שקילות של יחס שקילות וכל יחס שקילות מתקבל על־ידי חלוקה. נסמן את **המנה של X ע"י R** ב־$X/R = \{[x] : x \in X\}$ (זו החלוקה לפי יחס השקילות). מנה על־ידי יחס
אם שני איברים ב־X/R שווים, הם מחלקות שקילות של איברים שקולים ב־R.

דוגמה. מסתכלים ביחס השקילות $R = \{(m,n) \in \mathbb{Z} : \exists h \in Z m - n = 7h\}$. יש שבע מחלקות שקילות: $\mathbb{Z}/R = \{[0],[1],[2],[3],[4],[5],[6]\}$.

דוגמה (בניית השלמים מתוך הטבעיים). נסתכל על $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ונגדיר עליה יחס שקילות על־ידי $(a,b)\sim(c,d) \iff a+d=b+c$. ניתן לבדוק ש־$\sim$ הוא יחס שקילות, וניתן לחשוב על מחלקות השקילות בתור המספרים השלמים – $n = [(n+1,1)]$, $1-n = [(1,n)]$[3] לכל $n\in\mathbb{N}$.[4] (באותו אופן ניתן להגדיר את המספרים הרציונאליים מתוך המספרים השלמים או הטבעיים.)

2.2 פונקציות

פונקציה **הגדרה.** **פונקציה** f מ־X ל־Y היא יחס בין X ל־Y שמקיים $\forall x\in X\ \exists! y\in Y\ (x,y)\in f$. (אם $(x,y)\in f$, מסמנים $y=f(x)$.)

דוגמה. לכל קבוצה X יש $id_X : X\to X$ המוגדרת על־ידי $id_X = \{(x,x) : x\in X\}$; כלומר, $\forall x\in X\ id_X(x) = x$.

דוגמה. ל־X תת־קבוצה $A\subseteq X$ ניתן להגדיר פונקציה $\iota : A\to X$ כך ש־$\forall a\in A\ \iota(a) = a$ על־ידי $\iota = \{(a,a) : a\in A\}\subseteq A\times X$.

דוגמה (העתקת המנה). אם R יחס שקילות על X, העתקת המנה $f : X\to X/R$ מוגדרת על־ידי $f = \{(x,A) : x\in A\}\subseteq X\times X/R$. f היא פונקציה כי כל איבר נמצא במחלקת שקילות אחת ויחידה. (יכולנו להגדיר פונקציה דומה לכל חלוקה שהיא.)

להיפך, בהינתן פונקציה $f : X\to Y$, אפשר להגדיר יחס שקילות כך ש־$x_1\sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$. קל לבדוק שזה יחס שקילות ושכל יחס שקילות אפשר להגדיר על־ידי פונקציה (פונקצית המנה).

פונקציה על **הגדרה.** פונקציה $f : X\to Y$ נקראת **על** Y אם $\forall y\in Y\ \exists x\in X\ f(x) = y$.

פונקציה חד־חד ערכית **הגדרה.** פונקציה f נקראת **חד־חד ערכית** אם $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$ (או, באופן שקול, אם $\forall x_1\neq x_2\ f(x_1)\neq f(x_2)$).

התאמה **הגדרה.** פונקציה $f : X\to Y$ שהיא חד־חד ערכית ועל נקראת **התאמה** בין X ל־Y. X, Y
קבוצות שקולות נקראות **שקולות** אם קיימת התאמה ביניהן; אומרים של־X ול־Y יש אותה עוצמה.

תמורה **הגדרה.** **תמורה** (של X) היא התאמה מ־X לעצמו.[5]

דוגמה. $X = \{1,\dots,n\}$; מספר התמורות הוא $n!$.

[3] נעיר כי $[(1,n)] = [(1+k,n+k)]$, $[(n+1,1)] = [(n+k,k)]$ $\forall k\in\mathbb{N}$.

[4] למשל, $0 = 1-1 = \{[(1,1)],[(2,2)],\dots\}$, $2 = \{[(3,1)],[(4,2)],\dots\}$. למעשה, אוסף הזוגות הסדורים (a,b) כך ש־$a-b = z\in\mathbb{Z}$ מזוהה עם המספר z.

[5] מההגדרה ומטענות שמיד נוכיח נובע שאם f תמורה, גם f^{-1} תמורה; אם f, g תמורות, גם $g\circ f$ תמורה. כמו־כן, נעיר שפונקצית הזהות id_X היא תמורה.

2.3 בניות של פונקציות

2.3.1 הרכבת פונקציות

בהינתן יחס R בין X ל־Y ויחס S בין Y ל־Z, נגדיר את ההרכבה שלהם $S \circ R$ באופן הבא – $S \circ R = \{(x,z) \in X \times Z : \exists y \in Y \ (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\}$.

טענה 5: אם f פונקציה מ־X ל־Y, g פונקציה מ־Y ל־Z, אז $g \circ f$ היא פונקציה מ־X ל־Z.

הוכחה. קיום: לכל $x \in X$ קיים $y \in Y$ כך ש־$(x,y) \in f$, כי f פונקציה. קיים $z \in Z$ כך ש־$(y,z) \in g$, כי g פונקציה. לכן $(x,z) \in g \circ f$, לפי הגדרת ההרכבה.

יחידות: אם $(x_1,z_1),(x_2,z_2) \in g \circ f$, אז קיימים $y_1, y_2 \in Y$ עבורם $(x_1,y_1) \in f$, $(y_1,z_1) \in g$, $(x_2,y_2) \in f$, $(y_2,z_2) \in g$. אם $x_1 = x_2$, מכך ש־f פונקציה, גם $y_1 = y_2$ – ואז, מכך ש־g פונקציה, $z_1 = z_2$.

דוגמה. נניח $f : X \to Y$ פונקציה, $A \subseteq X$ תת־קבוצה. $\iota_A : A \to X$, $\iota_A(x) = x$ לכל $x \in A$, העתקת שיכון. $g = f\,|_A = f \circ \iota_A : A \to Y$ – **הצמצום** של f ל־A (צמצום של פונקציה) ($\forall x \in A \ f\,|_A(x) = f(x)$). אומרים ש־$f$ היא **הרחבה** של g. (הרחבה של פונקציה)

תכונות:

1. בהינתן $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$[6] (אסוציאטיביות)

   הוכחה. $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f))(x)$

2. אם $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ חח״ע, אז גם $g \circ f : X \to Z$ חח״ע.

3. אם $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ על, אז גם $g \circ f : X \to Z$ על.

מתכונות אלה נובע שאם $X \sim Y$ ו־$Z \sim Y$ אז גם $X \sim Z$ (כלומר, יש התאמה ביניהם).

2.3.2 הפונקציה ההופכית

בהינתן יחס R בין X ל־Y, ניתן להגדיר R° בין Y ל־X, $R^\circ = \{(y,x) \in Y \times X : (x,y) \in R\}$.

דוגמה. אם R יחס על X, $R = R^\circ$ אס״ם R סימטרי.

טענה 6: תהי $f : X \to Y$ פונקציה. אז f° היא פונקציה מ־Y ל־X אס״ם f חח״ע ועל.

הוכחה. $\forall y \in Y \ \exists x \in X \ (y,x) \in f^\circ \iff f$ היא על.

$\forall y \in Y, x_1, x_2 \in X \ (y,x_1),(y,x_2) \in f^\circ \Longrightarrow x_1 = x_2 \iff f$ חח״ע.

[6] $f_1 = f_2$ אס״ם $\forall x \in X \ f_1(x) = f_2(x)$.

אם $f : X \to Y$ התאמה, נסמן ב־$f^{-1} : Y \to X$ את הפונקציה f° המתאימה ליחס ההפוך.
נשים לב ש־$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$; כלומר, $\big((x,y) \in f \iff (y,x) \in f^{-1}\big)$.
תכונות:

1. אם $X \sim Y$ גם $Y \sim X$
2. אם $f : X \to Y$ היא התאמה, $f^{-1} \circ f = id_X$, $f \circ f^{-1} = id_Y$
3. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

הרבה פעמים יש שקילות "טבעית" בין קבוצות שונות. למשל: 21.3.2007

טענה 7: 1. $X \times Y \sim Y \times X$

2. $X \times Y \times Z \sim (X \times Y) \times Z \sim X \times (Y \times Z)$

הוכחה. 1. נגדיר $f : X \times Y \to Y \times X$ כך ש־$f((x,y)) = (y,x)$. כלומר, נגדיר $f = \{((x_1,y_1),(y_2,x_2)) : x_1,x_2 \in X, y_1,y_2 \in Y, y_2 = y_1, x_2 = x_1\}$. קל לבדוק שזו התאמה. הפונקציה ההפוכה לה היא $g : Y \times X \to X \times Y$ המוגדרת על־ידי $g(y,x) = (x,y)$.

2. ההתאמות הן $(x,y,z) \mapsto ((x,y),z) \mapsto (x,(y,z))$ ($x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$).

2.4 בניות שקשורות לפונקציות

2.4.1 אוסף הפונקציות

בהינתן קבוצות X, Y, מסמנים את אוסף הפונקציות מ־X ל־Y ב־$Y^X = \{f : X \to Y\} = \{f \subseteq X \times Y : \forall x \in X\ \exists! y \in Y\ (x,y) \in f\}$.

טענה 8: 1. $\varnothing^X = \varnothing$ (אם $X \neq \varnothing$ – אחרת, $\varnothing^\varnothing = \{\varnothing\}$)

2. $(X \times Y)^Z \sim X^Z \times Y^Z$

3. $(X^Y)^Z \sim X^{Y \times Z}$

הוכחה. 1. ברור.

2. נבנה $\Psi : X^Z \times Y^Z \to (X \times Y)^Z$ על־ידי $(f,g) \in X^Z \times Y^Z$ – כלומר, $f : Z \to X$, $g : Z \to Y$, $z \in Z$, $\Psi((f,g))(z) = (f(z), g(z))$. הגדרנו $\Psi(f,g) : Z \to X \times Y$, כלומר $\Psi : X^Z \times Y^Z \to (X \times Y)^Z$. צריך לבדוק ש־$\Psi$ היא חח"ע ועל.

נניח ש־$\Psi((f_1,g_1)) = \Psi((f_2,g_2))$. אז מתקיים $\Psi((f_1,g_1))(z) = \Psi((f_2,g_2))(z)$ לכל $z \in Z$; כלומר, $(f_1(z), g_1(z)) = (f_2(z), g_2(z))$. לכן, לכל z, $f_1(z) = f_2(z)$ ו־$g_1(z) = g_2(z)$. מכאן, $f_1 \equiv f_2$, $g_1 \equiv g_2$ – $(f_1,g_1) = (f_2,g_2)$.

נסתכל על ההעתקות $\pi_1 : X \times Y \to X$, $\pi_2 : X \times Y \to Y$ המוגדרות על־ידי $\pi_1((x,y)) = x$, $\pi_2((x,y)) = y$. בהינתן $F : Z \to X \times Y$, נסתכל על ההרכבות $f = \pi_1 \circ F : Z \to X$, $g = \pi_2 \circ F : Z \to Y$. נציב ונקבל $\Psi(f,g)(z) = (f(z),g(z)) = ((\pi_1 \circ F)(z), (\pi_2 \circ F)(z)) = F(z)$.[7] (כלומר, לכל איבר בטווח יש מקור; הפונקציה ההפוכה ל־Ψ היא $T : (X \times Y)^Z \to X^Z \times Y^Z$ המוגדרת על־ידי $T(F) = (\pi_1 \circ F, \pi_2 \circ F)$.)

3. צריך למצוא התאמה כך ש־$f : Z \to X^Y \mapsto h : Y \times Z \to X$. נסתכל על ההעתקות $h(y,z) = (f(z))(y)$ וההפוכה לה $(f(z))(y) = h(y,z)$. קל לראות שהפונקציות הן הפוכות.

2.4.2 מכפלה קרטזית כללית ואקסיומת הבחירה

מכפלה קרטזית כללית

בהינתן $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ קבוצה של קבוצות, המכפלה הקרטזית שלהן היא

$$\prod_{\alpha\in I} X_\alpha := \{f : I \to \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha : \forall \alpha \in I\ f(\alpha) \in X_\alpha\} \subseteq (\bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha)^I$$

כלומר, איברי $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ הם "רשימות" $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ כך ש־$x_\alpha \in X_\alpha$ הוא האיבר בקואורדינטה $\alpha \in I$.

דוגמה. $\prod_{i=1,2} X_i = \{f : \{1,2\} \to X_1 \cup X_2 : f(1) \in X_1, f(2) \in X_2\}$ (כאשר $I = \{1,2\}$). (זה מתאים ל־$X_1 \times X_2$.)

דוגמה. אם $X_\alpha = X$ לכל $\alpha \in I$, אז $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha = X^I$.

אקסיומת הבחירה

ברור שאם קיים $\alpha \in I$ כך ש־$X_\alpha = \varnothing$ אז $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha = \varnothing$. פחות ברור (אך אינטואיטיבי) שאם $I \neq \varnothing$, $X_\alpha \neq \varnothing$ לכל $\alpha \in I$, אז $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha \neq \varnothing$. העובדה הזו נקראת **אקסיומת הבחירה**.[8]

טענה 9: $(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha)^Z \sim \prod_{\alpha\in I}(X_\alpha^Z)$

הוכחה. ההתאמה היא $\Psi : (\prod_{\alpha\in I} X_\alpha)^Z \to \prod_{\alpha\in I}(X_\alpha^Z)$, $\Psi(f) : I \to \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha^Z$, $(\Psi(f)(\alpha))(z) = f(z)(\alpha) \in X_\alpha$ ($f(z) \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$). בניית הפונקציה ההפוכה – כתרגיל.

2.4.3 הטלות

$\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ קבוצות, $J \subseteq I$. אפשר להגדיר $Pr_J : \prod_{\alpha\in I} X_\alpha \to \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ על־ידי $Pr_J(f) = f|_J \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ ($f \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$).

[7] לכל $a \in X \times Y$, $a = (\pi_1(a), \pi_2(a))$.

[8] הכוונה לכך שצריך לבחור איבר מכל קבוצה על־מנת לקבל קבוצה. באקסיומטיקה מניחים קיום של איחודים, קבוצות חזקה וכו' – כאן דורשים שהקבוצה לא תהיה ריקה, וזה דבר שונה. מסתבר שנובעות מאקסיומת הבחירה מסקנות מפתיעות – כמו פרדוקס בנך־טרסקי.

ברור שאם $f : I \to \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha$ כך ש־$f(\alpha) \in X_\alpha$ לכל $\alpha \in I$, אז $g = f|_J$ (כלומר $g : J \to \bigcup_{\alpha\in J} X_\alpha$, $g(\alpha) \in X_\alpha$ לכל $\alpha \in J$. מאקסיומת הבחירה נובע ש־Pr_j הן על אם $\forall\alpha \in I\ X_\alpha \neq \varnothing$.

2.4.4 התמונה הישרה וההפוכה

בהינתן $f : X \to Y$, אפשר להסתכל על הטווח של f – כלומר, הקבוצה $\{f(x) : x \in X\} := \{y \in Y : \exists x \in X\ f(x) = y\}$. אם f על, הטווח הוא Y.

באופן כללי, לכל $A \subseteq X$, הטווח של $f|_A$ – התמונה של A על־ידי f – מסומן על־ידי $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$. למעשה, כך קיבלנו פונקציה $f : P(X) \to P(Y)$[9], שנקראת **התמונה הישרה** (או **התמונה**) של f. תמונה ישרה

תכונות:

1. $f(\varnothing) = \varnothing$
2. $f(\bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in I} f(X_\alpha)$ לכל $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ משפחת תתי־קבוצות של X
3. $f(\bigcap_{\alpha\in I} X_\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha\in I} f(X_\alpha)$ (שוויון אם f חח״ע)
4. $f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$ (שוויון אם f חח״ע)

בדומה, לכל פונקציה מוגדרת **התמונה ההפוכה** $f^{-1} : P(Y) \to P(X)$ על־ידי $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} \subseteq X$. אם f התאמה, התמונה הישרה וההפוכה של f^{-1} זהות לשל f. התמונה ההפוכה

תכונות:

1. $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$
2. $f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I} Y_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(Y_\alpha)$, $f^{-1}(Y) = X$
3. $f^{-1}(\bigcap_{\alpha\in I} Y_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in I} f^{-1}(Y_\alpha)$
4. $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$
5. $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ לכל $A \subseteq X$; $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ לכל $B \subseteq Y$

28.3.2007

טענה 10: התכונות הבאות של התאמות שקולות:

1. $f : X \to Y$ חח״ע
2. $f : P(X) \to P(Y)$ חח״ע
3. $f^{-1} : P(Y) \to P(X)$ על

[9] נעיר שזהו סימון זהה לפונקציה שונה.

4. $\forall A \; A = f^{-1}(f(A))$

5. לכל X → $g : Z \to X$, $f \circ g$ קבועה $\Longleftarrow$ g קבועה

הוכחה. (5$\Longleftarrow$1) אם $f \circ g$ קבועה, אז $\forall z, z' \in Z \; f(g(z)) = f(g(z'))$. בגלל ש-$f$ חח״ע, $g(z) = g(z') \Longleftarrow$ g קבועה.

(1$\Longleftarrow$5) אם f לא חח״ע, קיימים $x \neq x' \in X$ כך ש-$f(x) = f(x')$. נגדיר $g : \{0,1\} \to X$ ע״י $g(0) = x$, $g(1) = x'$, ואז $f \circ g(0) = f \circ g(1)$ אבל g לא קבועה.

(3,2$\Longleftarrow$4) ברור, כי $f^{-1} \circ f : P(X) \to P(X)$, $f^{-1} \circ f = id_{P(X)}$. זו פונקציה חח״ע, לכן f חח״ע ו-f^{-1} על.

(4$\Longleftarrow$1) תרגיל.

(1$\Longleftarrow$2) אם $x' \neq x$ כך ש-$f(x) = f(x')$, אז $f(\{x, x'\}) = \{f(x)\} = f(\{x\})$, לכן $f : P(X) \to P(Y)$ לא חח״ע.

(1$\Longleftarrow$3) אם $x' \neq x$ כך ש-$f(x) = f(x')$, $\{x\} = f^{-1}(B)$, אז $f(x) \in B$ ולכן $f(x') \in B$, ומכאן $x' \in f^{-1}(B)$. לכן נקבל $x = x'$ – סתירה. כלומר, x' לא נמצא בתמונה ההפוכה, ולכן היא לא על.

3 עוצמות

3.1 השוואת קבוצות

על־פי הגדרה, $X \sim Y$ (X שקולה ל־Y) אם קיימת התאמה $f : X \to Y$. היינו רוצים להגדיר התאמה $|\ |$ מקבוצת כל הקבוצות ל"עוצמות" כך ש־$X \sim Y \iff |Y| = |X|$.

מתי קיים אי־שוויון? למשל, מתי $|X| \le |Y|$? יש שתי הגדרות אפשריות:

1. קיימת תת־קבוצה $B \subseteq Y$ כך ש־$X \sim B$; כלומר, קיימת פונקציה חח"ע $f : X \to Y$.
2. קיימת פונקציה מ־Y ל־X שהיא על.

טענה 11: הגדרות אלה שקולות.

הוכחה. (2$\Longleftarrow$1) נניח כי $g : Y \to X$ על. נראה שקיימת f כך ש־$g \circ f = id_X$. נסתכל על $\prod_{x\in X} g^{-1}(\{x\}) \ne \varnothing$ (לפי אקסיומת הבחירה: g על, לכן לכל x $g^{-1}(\{x\}) \ne \varnothing$). נוכל לבחור $f \in \prod_{x\in X} g^{-1}(\{x\})$ – כלומר, פונקציה $f : X \to \bigcup_{x\in X} g^{-1}(\{x\}) = g^{-1}(\bigcup_{x\in X}\{x\}) = g^{-1}(X) \overset{g \text{ על}}{=} Y$ עבורה מתקיים $\forall x \in X\ f(x) \in g^{-1}(\{x\})$. אז $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$.

נעיר כי אם $X \sim X'$ ו־$Y \sim Y'$ אז $|X| \le |Y| \iff |X'| \le |Y'|$: אם יש התאמות $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$, בהינתן $\Phi : X \to Y$ חח"ע נוכל לבנות $g \circ \Phi \circ f^{-1} : X' \to Y'$ חח"ע, ולהיפך. כמו־כן, $|X| \le |Y| \le |Z| \Longleftarrow |X| \le |Z|$: אם $f : X \to Y$ ו־$g : Y \to Z$ חח"ע, הרכבתן $g \circ f : X \to Z$ חח"ע.

יש כמה שאלות שעולות מההגדרה:

1. האם אם $|X| \le |Y|$ ו־$|Y| \le |X|$ אז $|X| = |Y|$? (כן; ר' משפט קנטור־שרדר־ברנשטיין.)
2. האם, בהינתן X ו־Y, תמיד $|X| \le |Y|$ או $|Y| \le |X|$? (כן, בהינתן אקסיומת הבחירה.)
3. האם, בהינתן X, תמיד קיים Y כך ש־$|X| < |Y|$? (כן; ר' משפט קנטור).
4. האם קיימת מערכת נציגים לעוצמות? כלומר, האם קיימת "קבוצה" C כך שלכל קבוצה X קיים $A \in C$ יחיד כך ש־$|X| = |A|$? (כן, בהינתן אקסיומת הבחירה.)

משפט 12 (קנטור): $|X| < |P(X)|$

הוכחה. ברור ש־$|X| \le |P(X)|$: נוכל להגדיר $f : X \to P(X)$ על־ידי $f(x) = \{x\} \subseteq P(X)$, וזוהי פונקציה חח"ע.

נראה כי $|X| \ne |P(X)|$ – כלומר, נראה שלא קיימת $f : X \to P(X)$ על. נניח בשלילה שקיימת f כזו. נסתכל על $A = \{x \in X : x \notin f(x)\}$. מכיוון ש־$f$ על, $\exists x_0 \in X\ A = f(x_0)$. האם $x_0 \in A$? אם כן, לפי הגדרת A נקבל $x_0 \notin f(x_0) = A$ – סתירה. אם לא, לפי הגדרת A, $x_0 \notin A = f(x_0)$ ולכן $x \in A$ – סתירה. מכאן, f לא על.

דוגמה. נגדיר $F : P(X) \to \{0,1\}^X$ על־ידי $F(A) = X_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$. עבור $X = \mathbb{N}$, $P(\mathbb{N}) \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}} =_{\text{סדרות של אפסים ואחדים}}$. נניח שיש לנו סדרה של סדרות של אפסים ואחדים, $f(n) = \varepsilon_1^n, \varepsilon_2^n, \ldots$. נגדיר סדרה $x = \hat{\varepsilon}_1^1, \hat{\varepsilon}_2^2, \ldots$ כאשר $\hat{\varepsilon}_n^n = 1 - \varepsilon_n^n$. וכך $x \neq f(n)$ לכל n, כי אין סדרה שאיבריה זהים. לכן f לא על – מצאנו איבר שלא בתמונה (כמו קודם, למעשה בנינו אותה קבוצה).

באותו אופן אפשר להוכיח ש־$|\mathbb{N}| < |[0,1]|$.

משפט 13 (קנטור־שרדר־ברנשטיין): אם $|X| \leq |Y|$ ו־$|Y| \leq |X|$ אז $|X| = |Y|$.

18.4.2007 **הוכחה.** תהיינה $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ חח״ע. בהינתן $A \subseteq X$ כך ש־$g(Y \setminus f(A)) = X \setminus A$, נגדיר $h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ (g\,|_{Y \setminus f(A)})^{-1}(x) & x \notin A \end{cases}$. קל לראות ש־$h$ חח״ע ועל, ואז $|X| = |Y|$.

נותר למצוא A כזאת. נגדיר $\Phi : P(X) \to P(X)$ על־ידי $\Phi(A) = X \setminus g(Y \setminus f(A))$. אנו בעצם מחפשים נקודת־שבת של Φ ($A \subseteq X$ כך ש־$\Phi(A) = A$ – כלומר, $A = X \setminus g(Y \setminus f(A))$, תנאי ששקול לכך ש־$g(Y \setminus f(A)) = X \setminus A$).

נשים לב ש־Φ מונוטונית: $\Phi(A) \subseteq \Phi(B)$ אם $A \subseteq B$.

למה 1.13: לכל פונקציה מונוטונית $\Phi : P(X) \to P(X)$ קיימת נקודת שבת $D \in P(X)$.

הוכחה. נגדיר $B = \{A \in P(X) : A \subseteq \Phi(A)\} \subseteq P(X)$ ($B \neq \varnothing$ כי $\varnothing \in B$), ונגדיר $D = \bigcup B = \bigcup\{A : A \subseteq \Phi(A)\} = \{x \in X : \exists A \subseteq X \; x \in A \subseteq \Phi(A)\} \subseteq X$.

נראה שזו נקודת שבת.

($\subseteq$) נראה שלכל $A \in B$ מתקיים $A \subseteq \Phi(D)$. אם $A \in B$ אז $A \subseteq \Phi(A)$ וגם $A \subseteq D$. לכן, ממונוטוניות Φ, $A \subseteq \Phi(A) \subseteq \Phi(D)$. לכן $D \subseteq \Phi(D)$.

($\supseteq$) מכיוון ש־$D \subseteq \Phi(D)$, מתקיים $D \in B$. ממונוטוניות Φ, $\Phi(D) \subseteq \Phi(\Phi(D))$ ולכן $\Phi(D) \in B$. אז $\Phi(D) \subseteq D$.

בסך־הכל קיבלנו ש־$\Phi(D) = D$, כנדרש.[10]

לכן קיימת A כך ש־$g(Y \setminus f(A)) = X \setminus A$. □

מסקנה 14: בהינתן X, Y קבוצות, מתקיימת לכל היותר אחת משלוש האפשרויות הבאות: $|X| = |Y|$; $|X| < |Y|$; $|X| > |Y|$.

הוכחה. לפי הגדרה, לא ייתכן ששוויון מתקיים יחד עם אחד מאי־השוויונים. נניח בשלילה ש־$|X| < |Y|$ וגם $|X| > |Y|$; אז $|X| \leq |Y|$ וגם $|X| \geq |Y|$, ומהמשפט נקבל $|X| = |Y|$, בסתירה לכך שמתקיים אי־שוויון.[11]

---

[10] בדיעבד, גילינו ש־$D \in B$; כלומר, יכולנו לבחור את הקבוצה המקסימלית מתוך B, במקום האיחוד. אבל לא ידענו זאת מראש.

[11] בהמשך נראה שבדיוק אחת מהאפשרויות מתקיימת: כלומר, $|X| \leq |Y|$ או $|X| \geq |Y|$.

דוגמה. 1. $[0,1] \sim [a,b]$ ($a<b$), על־ידי העתקה $x \mapsto \frac{x-a}{b-a}$.

2. קבוצת הטבעיים שקולה לקבוצת הטבעיים הזוגיים: $n \mapsto 2n$.

3. $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$: $x \mapsto \tan x$.

4. $(0,\infty) \sim \mathbb{R}$: $x \mapsto \log x$.

3.2 קבוצות סופיות

קבוצה סופית

הגדרה. נגדיר $\mathbb{N}_n = \{1,\ldots,n\}$ לכל $n \in \mathbb{N}$. קבוצה A נקראת **סופית** אם קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$A \sim \mathbb{N}_n$.

טענה 15: $\mathbb{N}_n$ אינה שקולה לתת־קבוצה חלקית־ממש של עצמה.

הוכחה. אחרת, קיימת $f : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$ חח״ע ולא על. נראה באינדוקציה שאם $f : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$ חח״ע אז היא על.

עבור $n=1$, f היא בהכרח פונקציית הזהות. כעת, נניח שהטענה מתקיימת עבור $n-1$. עבור n, תהי $f : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$ חח״ע. אם $f(n) = n$, מכיוון ש־f חח״ע, $f|_{\mathbb{N}_{n-1}} : \mathbb{N}_{n-1} \to \mathbb{N}_{n-1}$, ומהנחת האינדוקציה, הצמצום הוא על. אחרת, $f(n) = k < n$. נגדיר $t : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$ על־ידי $t(i) = \begin{cases} i & i \neq k,n \\ n & i = k \\ k & i = n \end{cases}$. $t \circ t = id_{\mathbb{N}_n}$, לכן t חח״ע ועל. נגדיר $g = t \circ f$. g חח״ע כך ש־$g(n) = t(k) = n$. אז לפי המקרה הקודם, g היא על, ולכן $f = t \circ g$ היא על.

כמו־כן, כל פונקציה $f : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$ על היא חח״ע: נגדיר פונקציה $g : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$ על־ידי $g(i) = \min_{f(j)=i} j$. ברור ש־g חח״ע, כי $f \circ g = id_{\mathbb{N}_n}$. מהטענה הקודמת נובע ש־$g$ על, ולכן g^{-1} $f = f \circ g \circ g^{-1} = (f \circ g) \circ g^{-1} = id_{\mathbb{N}_n} \circ g^{-1} = g^{-1}$. אז גם $f = g^{-1}$ חח״ע.

מסקנה 16: קבוצה סופית אינה שקולה לתת־קבוצה חלקית־ממש של עצמה.

הוכחה. הטענה שקולה לכך שאם A סופית, $f : A \to A$ חח״ע אז f על. אם $g : \mathbb{N}_n \to A$ חח״ע ועל, אז $g^{-1} \circ f \circ g$ חח״ע. לפי הטענה הקודמת, היא גם על, לכן $f = g \circ (g^{-1} \circ f \circ g) \circ g^{-1}$ על. באותו אופן, אם A סופית ו־$f : A \to A$ על, f חח״ע.

מסקנה 17: אם $\mathbb{N}_n \sim \mathbb{N}_m$ אז $n = m$.

הוכחה. אחרת, אם למשל $m < n$, אז $\mathbb{N}_n \sim \mathbb{N}_m \subsetneq \mathbb{N}_n$, בסתירה לטענה הקודמת.

טענה 18: כל תת־קבוצה של $\mathbb{N}_n$ היא סופית.

הוכחה. באינדוקציה על n. עבור $n=1$, תת־קבוצה של $\mathbb{N}_1$ היא $\varnothing$[12] או $\mathbb{N}_1$ – שתיהן סופיות. כעת, נניח שהטענה מתקיימת עבור $n-1$. עבור n, תהי $J \subseteq \mathbb{N}_n$. אם $n \notin J$ אז $J \subseteq \mathbb{N}_{n-1}$, ולפי הנחת האינדוקציה, J סופית. אחרת, $n \in J$ ו־$J \setminus \{n\} \subseteq \mathbb{N}_{n-1}$. לפי הנחת האינדוקציה, $J \setminus \{n\} \sim \mathbb{N}_m$ סופית. אז $J \sim \mathbb{N}_{m+1}$, על־ידי העתקה $x \mapsto \begin{cases} f(x) & x \neq n \\ m+1 & x = n \end{cases}$ (כאשר $f : J \setminus \{n\} \to \mathbb{N}_m$ חח״ע ועל).

מסקנה 19: תת־קבוצה של קבוצה סופית היא סופית.

הוכחה. אם A סופית, קיימת $f : A \to \mathbb{N}_n$ שקילות. עבור $B \subseteq A$, $f(B) \subseteq \mathbb{N}_n$. לפי הטענה, $f(B)$ סופית. $B \sim f(B)$, לכן B סופית (יחס השקילות טרנזיטיבי).

טענה 20: אם A, B סופיות, אז $A \cup B$, $A \cap B$ סופיות.

הוכחה. $A \cap B \subseteq A \Longleftarrow A \cap B$ סופית.

$A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ ו־$A \cap (B \setminus A) = \varnothing$. אז אפשר להניח, בלי הגבלת הכלליות, ש־$A \cap B = \varnothing$. במקרה זה, $A \sim \mathbb{N}_n$, $B \sim \mathbb{N}_m$ עם שקילויות f, g בהתאמה. אז $A \cup B \sim \mathbb{N}_{n+m}$ על־ידי שקילות h, כאשר $h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x)+n & x \in B \end{cases}$.

טענה 21:
1. איחוד סופי של קבוצות סופיות הוא סופי.
2. מכפלה קרטזית סופית של קבוצות סופיות היא סופית.
3. קבוצת החזקה של קבוצה סופית היא סופית.

הוכחה.
1. באינדוקציה.
2. באינדוקציה. מספיק להראות עבור $A \times B$: עבור קבוצות סופיות $A \sim \mathbb{N}_n$, $B \sim \mathbb{N}_m$, מתקיים $A \times B \sim \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m \sim \mathbb{N}_{n+m}$.
3. $A \sim \mathbb{N}_n$ אז $P(A) \sim P(\mathbb{N}_n) \sim \mathbb{N}_{2^n}$.

3.3 קבוצות אינסופיות

הגדרה. קבוצה A היא **אינסופית** אם היא לא סופית; כלומר, לכל $n \in \mathbb{N}$, $A \nsim \mathbb{N}_n$.[13] קבוצה אינסופית

דוגמה. $\mathbb{N}$ היא אינסופית: היא שקולה לתת־קבוצה חלקית־ממש שלה – למשל, הטבעיים הזוגיים (בסתירה לטענה קודמת).

[12] $\varnothing = \mathbb{N}_0$ סופית.

[13] אם A סופית, $A \sim \mathbb{N}_n$ עבור n יחיד, ונוכל לסמן $|A| = |\mathbb{N}_n| = n$ – מספר האיברים ב־A.

טענה 22: אם X אינסופית אז $|X| \geq |\mathbb{N}|$. כלומר, קיימת $f : \mathbb{N} \to X$ חח״ע.

הוכחה. נבנה באינדוקציה סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ של איברים שונים ב־X.

עבור $n = 1$: $X \neq \varnothing$, אז קיים $a_1 \in X$.

אם $a_1, \ldots, a_{n-1}$ הוגדרו ושונים אחד מהשני, $X \neq \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ (כי אחרת X סופית). לכן קיים $a_n \in X \setminus \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$.

במילים אחרות, $\mathbb{N}$ היא הקבוצה האינסופית הקטנה ביותר, עד־כדי שקילות.

מסקנה 23: X סופית $\iff$ X לא שקולה לתת־קבוצה־ממש של עצמה.

הוכחה. ($\Longleftarrow$) זו מסקנה 16.

($\Longrightarrow$) נניח בשלילה ש־X אינסופית. תהי $f : \mathbb{N} \to X$ חח״ע. נסמן $A = f(\mathbb{N})$, ונגדיר $g : X \to X$ על־ידי $g(x) = \begin{cases} x & x \notin A \\ f(n+1) & x = f(n) \end{cases}$. g חח״ע, אבל g לא על, כי $f(1)$ לא מתקבל. אז $X \sim X \setminus \{f(1)\}$, בסתירה לכך ש־$X$ אינה שקולה לתת־קבוצה חלקית־ממש שלה.

לסיכום: 25.4.2007

1. כל תת־קבוצה של קבוצה סופית היא סופית.
2. (שקול ל־1) כל קבוצה שמכילה קבוצה אינסופית היא אינסופית.
3. $\mathbb{N}$ אינסופית.
4. בכל קבוצה אינסופית קיימת סדרה אינסופית של איברים שונים $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

הגדרה. קבוצה X תיקרא **בת־מניה** אם $|X| = |\mathbb{N}|$. קבוצה בת־מניה

מסתכלים על שקילות קבוצות כעל יחס שקילות על ״קבוצת כל הקבוצות״; מקלחות השקילות נקראות **עוצמות** (קרדינלים). מסמנים $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$. אז קבוצה היא בת־מניה $\iff$ עוצמתה $\aleph_0$. עוצמה

טענה 24:
1. אם X בת־מניה, $Y \subseteq X$ אינסופית, אז Y בת־מניה.
2. אם X אינסופית וכל $Y \subseteq X$ אינסופית שקולה ל־X, אז X בת־מניה.

הוכחה. למעשה, טענות אלה ממחישות את זה שהקבוצות בנות־המניה הן הקבוצות האינסופיות הקטנות ביותר.

1. $|Y| \leq |X| = \aleph_0$. מצד שני, Y אינסופית אז $|Y| \geq \aleph_0$. לכן, ממשפט קנטור־ברנשטיין, $|Y| = \aleph_0$ – כלומר, Y בת־מניה.
2. מכיוון ש־X אינסופית, קיימת סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ של איברים שונים. כלומר, יש $Y \subseteq X$ בת־מניה. לפי ההנחה, $|X| = |Y|$, ולכן X בת־מניה.

טענה 25: אם A ו־B בנות־מניה, אז גם $A \cup B$ בת־מניה.

הוכחה. $A \cup B$ אינסופית, ולכן $|A \cup B| \geq \aleph_0$. מצד שני, נראה ש־$|A \cup B| \leq \aleph_0$ – כלומר, שקיימת $f : \mathbb{N} \to A \cup B$ על: נניח ש־$f_1 : \mathbb{N} \to A$, $f_2 : \mathbb{N} \to B$ התאמות. נגדיר $f(n) = \begin{cases} f_1(n) & n = 2m \\ f_2(n) & n = 2m+1 \end{cases}$. f מוגדרת היטב והיא על. לכן, ממשפט קנטור־ברנשטיין, $|A \cup B| = \aleph_0$.

טענה 26: אם $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של קבוצות בנות־מניה, אז $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ גם בת־מניה.

הוכחה. תהיינה $f_n : \mathbb{N} \to A_n$ התאמות. הראינו בתרגיל שקיימת התאמה $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$; כלומר, יש $g(n) = (g_1(n), g_2(n))$, כאשר $g_1, g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ולכל זוג $(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$n_1 = g_1(n)$, $n_2 = g_2(n)$. אז נגדיר $f(n) = f_{g_1(n)}(g_2(n))$. קיבלנו פונקציה $f : \mathbb{N} \to \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

f על: אם $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, קיים $n_1 \in \mathbb{N}$ כך ש־$x \in A_{n_1}$. מכיוון ש־f_{n_1} על, קיים $n_2 \in \mathbb{N}$ כך ש־$x = f_{n_1}(n_2)$. מתכונות g, קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$g_1(n) = n_1$ ו־$g_2(n) = n_2$, ואז $f(n) = f_{g_1(n)}(g_2(n)) = f_{n_1}(n_2) = x$.

טענה 27: אם A_n סופיות, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ בת־מניה או סופית.

הוכחה. נניח $|A_n| = k_n \geq 1$ (אפשר להתעלם מקבוצות ריקות). נניח ש־$g_n : \mathbb{N}_{k_n} \to A_n$ התאמה. נסמן $m_n = k_1 + \ldots + k_n = \sum_{i=1}^{n} k_i$. כל $x \in \mathbb{N}$ ניתן להציג באופן יחיד על־ידי $x = m_n + k$ כך ש־$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ו־$0 \leq k < k_{n+1}$.[14]

נגדיר $g(x) = \begin{cases} g_{n+1}(k+1) & x = m_n + k,\ 0 \leq k < k_{n+1} \end{cases}$. הפונקציה g היא על, כי $g_n(k) = g(m_{n-1} + k - 1)$ ($1 \leq k \leq m_n$).[15]

לסיכום, אם A היא קבוצה סופית או בת־מניה של קבוצות סופיות או בנות־מניה, $\bigcup A$ סופי או בן־מניה: $|A| \leq \aleph_0$, אז יש $f : \mathbb{N} \to A$ על. $\bigcup A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(n)$; ומהטענה הקודמת, $\bigcup_{n=1}^{\infty} f(n)$ סופית או בת־מניה.

טענה 28: אם A קבוצה של מרווחים (קטעים פתוחים) ב־$\mathbb{R}$ שהם זרים בזוגות, A סופית או בת־מניה.

הוכחה. נגדיר $f : \mathbb{Q} \to A \cup \{x_0\}$ על־ידי $f(x) = \begin{cases} X & x \in X \in A \\ x_0 & x \notin \bigcup A \end{cases}$. f היא על, כי בכל רווח A קיים מספר רציונאלי ($\mathbb{Q}$ מצפיפות ב־$\mathbb{R}$) $\Longleftarrow |A| \leq |A \cup \{x_0\}| \leq |\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

מסקנה 29: אם $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית, קבוצת נקודות אי הרציפות שלה X היא סופית או בת־מניה.

[14] נבחר את ה־n המקסימלי עבורו $m_n \leq x$, ואז $x - m_n < k_{n+1}$ – אחרת $m_{n+1} \leq x$, בסתירה למקסימליות n.
[15] למעשה, g עוברת על הסדרות הסופיות לפי הסדר.

הוכחה. $X = X_1 \cup X_2$, כאשר מגדירים $X_1 = \{x \in X : \lim_{y\to x^+} f(y) > f(x)\}$ ו־$X_2 = \{x \in X : \lim_{y\to x^-} f(y) < f(x)\}$.

נסתכל על $A = \{(f(x-0), f(x)) : x \in X_2\} \cup \{(f(x), f(x+0)) : x \in X_1\}$.[16] זוהי קבוצה של מרווחים זרים בזוגות: אם, בלי הגבלת הכלליות, $x_1 < x_2$ ו־$f(x_1) < y < f(x_1+0)$, $f(x_2) < y < f(x_2+0)$, ממונוטוניות f נקבל $y < f(x_1+0) \le f(x_2) < y$; ובאופן דומה, לא ייתכן $f(x_1-0) < y < f(x_1)$ ו־$f(x_2-0) < y < f(x_2)$ או $f(x_1-0) < y < f(x_1)$ ו־$f(x_2) < y < f(x_2+0)$. אז מהמסקנה, A בת־מניה; לכן גם X בת־מניה.

דרך אחרת: נסמן $A = \{(f(x-0), f(x+0)) : x \in \mathbb{R}\}$. זהו אוסף מרווחים זרים בזוגות, כי אם $f(x_1-0) < y < f(x_1+0)$ ו־$f(x_2-0) < y < f(x_2+0)$ עבור $x_1 < x_2$, אז ממונוטוניות $y < f(x_1+0) \le f(x_2-0) < y$ – סתירה. לכן A סופית או בת־מניה, ולכן קבוצת נקודות אי־הרציפות של f, $\{x \in \mathbb{R} : f(x-0) < f(x+0)\}$, היא קבוצה סופית או בת־מניה.

עם זאת, יש פונקציות מונוטוניות שקבוצות נקודות אי־הגזירות שלהן אינה בת־מניה.

אם A, B בנות־מניה, גם $A \times B$ בת־מניה. אם $f : \mathbb{N} \to A$, $g : \mathbb{N} \to B$ התאמות, נגדיר $f \times g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A \times B$ על־ידי $(f \times g)(m,n) = (f(m), g(n))$. זוהי התאמה. לכן $|A \times B| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$. כעת ניתן להמשיך באינדוקציה: אם $A_1, \ldots, A_n$ בנות־מניה, אז $A_1 \times \ldots \times A_n$ בת־מניה.

עם זאת, מכפלה בת־מניה אינה בהכרח בת־מניה: $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \prod_{n=1}^{\infty} \{0,1\}$ – קבוצת הסדרות של ספרות בינאריות – שקולה ל־$P(\mathbb{N})$; לפי משפט קנטור, $|P(\mathbb{N})| > \aleph_0$, ולכן קבוצה זו אינה בת־מניה.

טענה 30: קבוצת תתי־הקבוצות הסופיות של קבוצה בת־מניה היא בת־מניה.

הוכחה. נגדיר $P_f(X) = \{A \subseteq X : |A| < \aleph_0\}$. כלומר, $P_f(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(X)$, כאשר $P_n(X) = \{A \subseteq X : |A| = n\}$. מספיק להוכיח ש־$P_n$ בת־מניה. נגדיר התאמה מ־X^n ל־$P_{\le n}(X) = \bigcup_{1 \le k \le n} P_n(X)$ כך ש־$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \{x_1, \ldots, x_n\}$. X^n היא מכפלה סופית של קבוצות בנות־מניה, לכן בת־מניה; לכן $P_n(X)$ בת־מניה.

מספר אלגברי

הגדרה. מספר X נקרא **מספר אלגברי** אם קיימים מספרים רציונאלים $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$ כך ש־$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$.

דוגמה. $\sqrt{2}$ הוא מספר אלגברי – זהו פתרון של $x^2 - 2 = 0$. לכן לא כל מספר אלגברי הוא רציונאלי.

טענה 31: קבוצת המספרים האלגבריים היא בת־מניה.

[16] הכוונה היא ל־$f(x-0) = \lim_{y\to x^-} f(y)$, ובאופן דומה עבור $f(x+0)$.

הוכחה. לכל $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{Q}$, קבוצת הפתרונות של הפולינום $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ כך ש־$a_1,\dots,a_n \in \mathbb{Q}$ סופית. לכן קבוצת המספרים האלגבריים

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{a_1,\dots,a_n\in\mathbb{Q}} \{x \in \mathbb{R} : x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0\}$$

היא איחוד בן־מניה של איחוד בן־מניה של קבוצות סופיות, שהוא בן־מניה.

2.5.2007

טענה 32: $C_2 \sim \mathbb{N}$, כאשר C_2 היא קבוצת הסדרות העולות ב־$\mathbb{N}$.

הוכחה. $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mapsto g(n) = \sum_{i=1}^{n} f(i)$

$$g \in C_2 \mapsto f(n) = \begin{cases} g(1) & n = 1 \\ g(n) - g(n-1) & n > 1 \end{cases}$$

טענה 33: $\mathbb{R}$ אינה בת־מניה.

הוכחה. נוכיח ש־$\mathbb{R} \sim \{0,2\}^{\mathbb{N}}$. נגדיר $F((\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{3^n}$. הפונקציה F היא חח״ע: אם $\varepsilon_n, \delta_n \in \{0,1,2\}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{3^n}$ אם ורק אם $\varepsilon_n = \delta_n$ לכל n, או שקיים m כך שעבור $n < m$ $\varepsilon_n = \delta_n$, ו־$\varepsilon_n = 2, \delta_n = 0$ $\forall n > m$, $\delta_m = \varepsilon_m + 1$. במקרה זה, $\delta_m = 1$ או $\varepsilon_m = 1$ – לכן השמטנו את הערך 1.[17] בפרט, $\aleph_0 < |\{0,2\}^{\mathbb{N}}| \le |\mathbb{R}|$. לכן $\mathbb{R}$ אינה בת־מניה.

התמונה של F כפי שהגודרה בהוכחה הקודמת היא קבוצת המספרים הממשיים ב־$[0,1]$ שעבורם קיים פיתוח (לפי בסיס 3) ללא הספרה 1 – זוהי **קבוצת קנטור**: היא מתקבלת אם מכל קטע מורידים את השליש האמצעי. קבוצת קנטור

נסמן ב־C_n את הקבוצה שנשארת לאחר n איטרציות. C_n היא איחוד זר של 2^n קטעים סגורים באורך $\frac{1}{3^n}$. C_{n+1} מתקבלת על־ידי ניתוק השליש האמצעי מכל קטע ב־C_n, ומתקבלת $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ – קבוצת קנטור. המידה של C_n היא $(\frac{2}{3})^n$, והמידה של C היא אפס (כי $(\frac{2}{3})^n) \to 0$).

ניתן לבנות פונקציה רציפה ומונוטונית $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ כך שקבוצת הנקודות בה g אינה גזירה היא קבוצת קנטור. פונקציה זו נקראת **פונקציית קנטור**. פונקציית קנטור

נסמן $\aleph = |\mathbb{R}|$ – **עוצמת הרצף**. עוצמת הרצף

טענה 34: קבוצת הסדרות של מספרים ממשיים, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, היא מעוצמת הרצף.

הוכחה. הראינו ש־$\mathbb{R} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. לכן מספיק להראות ש־$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim (\{0,1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$.

הראינו ש־$(\{0,1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, אבל $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ ולכן $\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, ו־$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$. לכן $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$.

טענה 35: קבוצת הפונקציות הממשיות הרציפות C היא מעוצמת הרצף.

[17] בעצם מדובר על ייצוג, בבסיס 3, כ־$\cdots 1222 \cdots\cdots .$ ו־$\cdots 2000 \cdots\cdots .$

הוכחה. נגדיר $R : C \to \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ על־ידי $R(f) = f \mid_{\mathbb{Q}}$. R חח״ע, כי אם $R(f_1) = R(f_2)$, כלומר $f_1 \mid_{\mathbb{Q}} = f_2 \mid_{\mathbb{Q}}$, אז $(f_1 - f_2) \mid_{\mathbb{Q}} = 0$. זוהי פונקציה רציפה שהצמצום שלה לקבוצה צפופה הוא 0, ולכן $f_2 - f_1 \equiv 0$ - כלומר, $f_1 = f_2$. אז $|C| < |\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| = |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = \aleph$.

הכיוון השני ברור.

משפט 36: נניח ש־$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות ב־$[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. ל־$\{x_n\}$ ול־$\{y_n\}$ יש אותן נקודות הצטברות אס״ם קיימת פרמוטציה $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ כך ש־$x_n - y_{\pi(n)} \to 0$.

הוכחה. ($\Longleftarrow$) תהי x נקודת הצטברות של $\{x_n\}$ - כלומר, לכל $\varepsilon > 0$ קיים n כך ש־$|x_n - x| < \varepsilon$.

יהי $\varepsilon > 0$ ויהי N כך ש־$|x_n - y_{\pi(n)}| < \frac{\varepsilon}{2}$ לכל $n > N$. קיים $n > N$ כך ש־$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. אז $|y_{\pi(n)} - x| < \varepsilon$, ו־$x$ נקודת הצטברות של $\{y_{\pi(n)}\}$.

באופן סימטרי, כל נקודת הצטברות של $\{y_n\}$ היא נקודת הצטברות של $\{x_n\}$.

($\Longrightarrow$) נראה שקיימת $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ מונוטונית עולה כך ש־$x_n - y_{\sigma(n)} \to 0$. זה מספיק כי מסימטריה נוכל למצוא $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ מונוטונית עולה כך ש־$y_n - x_{\tau(n)} \to 0$, ואז קיימת $M \subseteq \mathbb{N}$ כך ש־$\tau(\mathbb{N} \setminus \sigma(M)) = \mathbb{N} \setminus M$ (לפי משפט ההשוואה). נגדיר $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ על־ידי $\pi(n) = \begin{cases} \sigma(n) & n \in M \\ \tau^{-1}(n) & n \notin M \end{cases}$, ונקבל π חח״ע ועל. נשים לב ש־$x_n - y_{\pi(n)} \to 0$, כי $x_n - y_{\sigma(n)} \to 0$ לכל n (ובפרט עבור $n \in M$) ו־$x_n - y_{\tau^{-1}(n)} \to 0$ עבור $n \in M$. כלומר, שתי תתי הסדרות שואפות לאפס, לכן הסדרה כולה שואפת לאפס. לכן π כנדרש.

נותר להראות שקיימת σ כנ״ל. נגדיר כזו באינדוקציה. נגדיר $\sigma(1) = 1$. אם $\sigma(1) < \ldots < \sigma(k)$ הוגדרו, נגדיר $\sigma(k+1)$ כך שיתקיים

$$|x_{k+1} - y_{\sigma(k+1)}| < \inf_{i > \sigma(k)} |x_{k+1} - y_i| + \frac{1}{k}$$

נראה ש־$x_n - y_{\sigma(n)} \to 0$: נניח בשלילה שקיים $\varepsilon > 0$ כך שקיימת סדרה $k_1 < k_2 < \ldots$ כך ש־$|x_{k_i} - y_{\sigma(k_i)}| \geq \varepsilon$. עבור $k_i > \frac{2}{\varepsilon}$, לכל $j > \sigma(k_i)$

$$\varepsilon \leq |x_{k_i} - y_{\sigma(k_i)}| < |x_{k_i} - y_j| + \frac{1}{k_j} < |x_{k_i} - y_j| + \frac{\varepsilon}{2}$$

ולכן $|x_{k_i} - y_j| \geq \frac{\varepsilon}{2}$.

נניח, בלי הגבלת הכלליות, $x_{k_i} \to x$.[18] נראה שלא קיימת תת־סדרה של y שמתכנסת ל־x, בסתירה להנחה. קיים n גדול כרצוננו כך ש־$|x_{k_n} - x| < \frac{\varepsilon}{4}$. אז עבור כל $j \geq \sigma(k_n)$ מתקיים $|x - y_j| \geq |x_{k_n} - y_j| - |x_{k_n} - x| > \frac{\varepsilon}{4}$. לכן x לא נקודת־גבול של $\{y_n\}$. $\square$

[18] קיימת תת־סדרה מתכנסת של $\{x_{k_i}\}$ ש־x הוא הגבול שלה; נעבור אליה במקרה הצורך.

3.4 השערת הרצף

השערת הרצף

האם קיימת עוצמה בין $\aleph_0$ ל־$\aleph$? על־פי **השערת הרצף**, לא. כלומר, כל קבוצה אינסופית שאינה בת־מניה מכילה עותק חח״ע של $\mathbb{N}$ – $\aleph_0$ היא העוצמה האינסופית הקטנה ביותר.

בניסוח כללי יותר (**השערת הרצף הכללית**): אם Y קבוצה כך ש־$|X| < |Y|$, מתקיים $|P(X)| \geq |Y|$.[19] בפרט, כל קבוצה אינסופית שאינה בת־מניה היא מעוצמת הרצף לפחות.

גדל (Gödel), בשנות ה־30–20, הוכיח שאם תורת הקבוצות קונסיסטנטית, קיים מודל לתורת הקבוצות בו השערת הרצף הכללית נכונה. לעומת זאת, כהן (Cohen), בשנות ה־60, הוכיח שאם תורת הקבוצות קונסיסטנטית, אז קיים מודל שבו השערת הרצף אינה מתקיימת – כלומר, קיימת עוצמה $\aleph_1$ כך ש־$\aleph_0 < \aleph_1 < 2^{\aleph_0}$.

3.5 חשבון עוצמות

3.5.1 חיבור עוצמות

9.5.2007 אם κ, λ עוצמות, $|X| = \kappa$, $|Y| = \lambda$, היינו רוצים שיתקיים $|X \cup Y| = \lambda + \kappa$, כאשר X, Y זרות. חיבור עוצמות

זה מוגדר היטב, כי תמיד קיימות X, Y זרות כנ״ל (כי $X \times \{0\}$ ו־$Y \times \{1\}$ זרות ובעלות אותה עוצמה כמו X ו־Y), ואם $|X| = |X'|$, $|Y| = |Y'|$ כאשר X, Y זרות ו־X', Y' זרות, אז $|X \cup Y| = |X' \cup Y'|$: אם $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ התאמות, נגדיר $h : X \cup Y \to X' \cup Y'$ על־ידי $h(z) = \begin{cases} f(z) & z \in X \\ g(z) & z \in Y \end{cases}$.

עבור עוצמות סופיות, החיבור הוא הפעולה הרגילה של החיבור. אולם לגבי קבוצות אינסופיות אין זה כך: $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ (כלומר, איחוד קבוצות בנות־מניה הוא בן־מניה), וכן $\aleph + \aleph_0 = \aleph$. כלומר, עבור עוצמות אינסופיות, $\lambda + \lambda = \lambda$: לכן, עבור λ אינסופית, $\lambda + \kappa = \max(\lambda, \kappa)$.

תכונות החיבור:

1. $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$
2. $(\lambda + \kappa) + \gamma = \lambda + (\kappa + \gamma)$
3. $\lambda_1 \leq \lambda_2$, $\kappa_1 \leq \kappa_2 \Longleftarrow \lambda_1 + \kappa_1 \leq \lambda_2 + \kappa_2$
4. $\lambda + 0 = \lambda$ ($0 = |\varnothing|$)

ההוכחה נובעת מיידית מתכונות האיחוד.

באופן כללי, אפשר להגדיר את הסכום $\sum_{i \in I} \kappa_i$ עבור משפחה $\{\kappa_i\}_{i \in I}$ של עוצמות באופן הבא: $\sum_{i \in I} |\kappa_i| = |\bigcup_{i \in I} (\kappa_i \times \{i\})|$. למשל, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \aleph_0 = \aleph_0$ (על־פי טענה 26).

[19] נזכיר כי משפט קנטור מוכיח ש־$|X| < |P(X)| = |2^X|$.

לגבי חיסור, לא ברור, למשל, מהו $\aleph_0 \setminus \aleph_0$; מתקיים $\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} = \varnothing$, אך $\mathbb{N} \setminus (\mathbb{N} \setminus \{1\}) = \{1\}$ ו־$\mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}$ זו קבוצת הטבעיים אי־זוגיים. לכן פעולת החיסור לא מוגדרת היטב. לעומת זאת, אם $|X| > |Y|$ ו־$|X| \geq \aleph_0$, אז $|X \setminus Y| = |X|$.

3.5.2 כפל עוצמות

כפל עוצמות

אם $|X| = \lambda$, $|Y| = \kappa$, נגדיר $\lambda \times \kappa = |X \times Y|$.

זה מוגדר היטב, כי אם $|X| = |X'|$, $|Y| = |Y'|$, $|X \times Y| = |X' \times Y'|$: אם $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ התאמות, הפונקציה $f \times g : X \times Y \to X' \times Y'$ המוגדרת על־ידי $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(x))$ היא התאמה.

עבור עוצמות סופיות, זה משקף את פעולת הכפל הרגילה. אך $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$, $\aleph \times \aleph = \aleph$. כלומר, באופן כללי, עבור λ אינסופית, $\lambda \times \kappa = \max(\lambda, \kappa)$.

עוצמה של משפחה מוגדרת על־ידי $|\prod x_i| = \prod_{i\in I} |x_i|$. למשל, אם $|x_i| = \lambda$ לכל $i \in I$ ו־$|I| = \kappa$, $\prod_\kappa \lambda = \lambda^\kappa$.

תכונות דומות לתכונות החיבור מתקיימות עבור הכפל:

1. $\lambda \times \kappa = \kappa \times \lambda$
2. $(\lambda \times \kappa) \times \gamma = \lambda \times (\kappa \times \gamma)$
3. $\lambda \times 1 = \lambda$ ($|\{\varnothing\}| = 1$)
4. $\lambda_1 \leq \lambda_2$, $\kappa_1 \leq \kappa_2 \Longleftarrow \lambda_1 \times \kappa_1 \leq \lambda_2 \times \kappa_2$
5. $\lambda \times (\kappa_1 + \kappa_2) = \lambda \times \kappa_1 + \lambda \times \kappa_2$
6. $\lambda \times \sum_{i\in I} \kappa_i = \sum_{i\in I} \lambda \times \kappa_i$
7. $\lambda^{\kappa_1+\kappa_2} = \lambda^{\kappa_1} \times \lambda^{\kappa_2}$
8. $\lambda^{\kappa_1\times\kappa_2} = (\lambda^{\kappa_1})^{\kappa_2}$ ($(\prod_{i\in I} \lambda_i)^\kappa = \prod \lambda_i^\kappa$)
9. $(\lambda_1 + \lambda_2)^\kappa = \lambda_1^\kappa + \lambda_2^\kappa$
10. $|X^Y| = |X|^{|Y|}$

ההוכחה נובעת מיידית מתכונות המכפלה הקרטזית.

דוגמה.
- קב׳ הסדרות הממשיות: $|\mathbb{R}^\mathbb{N}| = \aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\times\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$
- קב׳ הסדרות הטבעיות: $2^{\aleph_0} \leq |\mathbb{N}^\mathbb{N}| = \aleph_0^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} \Longleftarrow \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$
- קב׳ הפונקציות הממשיות: $|\mathbb{R}^\mathbb{R}| = \aleph^\aleph = (2^{\aleph_0})^\aleph = 2^{\aleph_0\times\aleph} = 2^\aleph$ (קב׳ הפונקציות הממשיות הרציפות: $\aleph < 2^\aleph$, על־פי טענה 35)

4 אקסיומת הבחירה

קיימים מספר ניסוחים שקולים לאקסיומת הבחירה: אקסיומת הבחירה

1. לכל קבוצה $X \neq \varnothing$ קיימת פונקציה $f : P(X) \setminus \{\varnothing\} \to X$ כך שלכל $\varnothing = A \subseteq X$ מתקיים $F(A) \in A$. (פונקציה כזו נקראת **פונקציית בחירה** של X.)
2. לכל קבוצה $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של קבוצות לא־ריקות קיימת $f : I \to \bigcup A_\alpha$ כך ש־$f(\alpha) \in A_\alpha$ לכל $\alpha \in I$.
3. $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha \neq \varnothing$ עבור משפחה $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של קבוצות לא־ריקות.
4. לכל יחס R בין X ל־Y יש תת־יחס עם אותו תחום שהוא פונקציה.
5. לכל משפחה $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של קבוצות זרות־הדדית ולא־ריקות קיימת קבוצה B כך שלכל $\alpha \in I$ מתקיים $|B \cap A_\alpha| = 1$. (כלומר, לכל יחס שקילות יש קבוצת נציגים.)
6. לכל $f : X \to Y$ חח"ע קיימת $g : Y \to X$ כך ש־$g \circ f = id_X$.
7. לכל $f : X \to Y$ על קיימת $g : Y \to X$ כך ש־$f \circ g = id_Y$.

הוכחה. בקצרה:

(1 $\Leftarrow$ 2) ניקח $X = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$, F פונקציית בחירה של X. $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq P(X) \setminus \{\varnothing\}$, לכן $f = F|_{\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}} : \{A_\alpha\}_{\alpha\in I} \to X$ מקיימת $f(A_\alpha) = F(A_\alpha) \in A_\alpha$.

(2 $\Leftrightarrow$ 3) לפי הגדרה.

(3 $\Leftarrow$ 4) נגדיר $A_x = \{y \in Y : xRy\}$. נסמן ב־D את התחום: $D = \{x \in X : A_x \neq \varnothing\}$. נסתכל על $\{A_x\}_{x\in D}$. $\prod_{x\in D} A_x \neq \varnothing$; כלומר, קיימת $f : D \to \bigcup_{x\in D} A_x \subseteq Y$ כך ש־$f(x) \in A_x$; כלומר, $xRf(x)$. לכן $f \subseteq R$.

(4 $\Leftarrow$ 5) יהי R היחס בין I ל־$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ המוגדר על־ידי $\alpha R x$ אם $x \in A_x$. כלומר, היחס הוא $R = \{(\alpha, x) : \alpha \in I, x \in A_\alpha\}$. התחום הוא $D(R) = I$, כי $A_\alpha \neq \varnothing$ לכל $\alpha \in I$. תהי $R \subseteq f$. כלומר, $f(\alpha) \in A_\alpha$ לכל $\alpha \in I$. נסמן $B = f(I)$. אז $B \cap A_\alpha = \{f(\alpha)\}$: $\supseteq$ ברור; מצד שני, אם $f(\beta) \in B \cap A_\alpha$ עבור $\alpha \neq \beta$, אז $f(\beta) \in A_\beta \cap A_\alpha = \varnothing$.

(5 $\Leftarrow$ 1) בהינתן X, נסתכל על $\{A \times \{A\}\}_{A\in P(X)\setminus\{\varnothing\}}$. זוהי קבוצה של קבוצות זרות ולא־ריקות. תהי B קבוצת נציגים; כלומר, $|B \cap (A \times \{A\})| = 1$. נגדיר $F : P(X) \setminus \{\varnothing\} \to X$ על־ידי $\{(F(A), A)\} = B \cap (A \times \{A\})$. כלומר, $F = \{(A, x) : (x, A) \in B\}$. $F \subseteq (P(X) \setminus \{\varnothing\}) \times X$ היא אכן פונקציה, מכיוון ש־$|B \cap (A \times \{A\})| = 1$.

5 הלמה של צורן

5.1 יחסי סדר

5.1.1 סדר חלקי

יחס־סדר חלקי

הגדרה. R נקרא **יחס־סדר חלקי** אם R הוא יחס על X כך ש־

1. (רפלקסיביות) xRx לכל $x \in X$;
2. (אנטי־סימטריות) xRy ו־$yRx \Longleftarrow x = y$;
3. (טרנזיטיביות) $xRy \wedge yRz \Longrightarrow xRz$ לכל $x, y, z \in X$.

דוגמה.
- $\leq$ על $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$.
- $m \mid n$ על $\mathbb{N}$: קיים $l \in \mathbb{N}$ כך ש־$m = l \cdot n$.
- $A \subseteq B$ על $P(X)$.
- יחס ההרחבה של פונקציות מתתי־קבוצות של A לקבוצה Z הוא יחס־סדר חלקי (על הקבוצה $X = \{(f, B) : B \subseteq A, f : B \to Z\}$ נגדיר ש־(f_2, B_2) מרחיבה את (f_1, B_1) אם $B_1 \subseteq B_2$ ו־$f_2 |_{B_1} = f_1$).

קבוצה סדורה־חלקית

הגדרה. קבוצה עם יחס־סדר חלקי ($\leq$) נקראת **קבוצה סדורה־חלקית**.

5.1.2 סדר טוב

הגדרה. איברים x, y בקבוצה סדורה־חלקית $(X, \leq)$ נקראים **ניתנים להשוואה** אם $x \leq y$ או $y \leq x$. 30.5.2007

קבוצה סדורה־לינארית

הגדרה. קבוצה סדורה־חלקית נקראת **קבוצה סדורה־לינארית** אם כל שני איברים בה ניתנים להשוואה. (במקרה זה, יחס הסדר נקרא **יחס־סדר לינארי**.)

דוגמה. מהדוגמה הקודמת, היחס $\leq$ על $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ הוא יחס־סדר לינארי; השאר לא.

יחס־סדר מושרה

הגדרה. אם $(X, \leq)$ קבוצה סדורה־חלקית ו־$Y \subseteq X$, **יחס־הסדר המושרה** של Y הוא היחס המוגדר על־ידי $y_1 \leq y_2$ ב־$Y \iff y_1 \leq y_2$ ב־X.[20]

שרשרת

הגדרה. **שרשרת** בקבוצה סדורה־חלקית $(X, \leq)$ היא תת־קבוצה $Y \subseteq X$ כך שהיחס המושרה על Y הוא יחס־סדר לינארי.

[20] תכונות יחס־הסדר החלקי נשמרות, לכן זהו יחס־סדר חלקי של Y.

דוגמה.
- אם X קבוצה סדורה־לינארית, כל תת־קבוצה של X היא שרשרת.
- הקבוצה $\{5^n\}_{n=0}^{\infty} = \{1, 5, 25, \dots\}$ היא שרשרת עם יחס־הסדר $m \mid n$.

איבר ראשון

הגדרה. איבר ראשון בקבוצה סדורה־חלקית $(X, \leq)$ הוא איבר $x_0 \in X$ כך שלכל $x \in X$, $x_0 \leq x$.

איבר ראשון יחיד, אם קיים[21]: אם x_0 ו־x_0' איברים ראשונים, $x_0 \leq x_0'$ ו־$x_0' \leq x_0$; אז מאנטי־סימטריות, $x_0 = x_0'$.

איבר אחרון

איבר אחרון מוגדר באופן דומה.

איבר מינימלי

הגדרה. איבר מינימלי בקבוצה סדורה־חלקית $(X, \leq)$ הוא איבר $x_0 \in X$ כך שלכל $x \in X$, אם $x \leq x_0$ אז $x = x_0$.

ברור שאיבר ראשון הוא איבר מינימלי; בקבוצה סדורה־לינארית, איבר מינימלי הוא איבר ראשון, ולכן יחיד, אם קיים.

דוגמה. בקבוצה $\mathbb{N}$ עם יחס־הסדר $m \mid n$, 1 הוא איבר ראשון. ב־$X = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ עם יחס־הסדר המושרה אין איבר ראשון, אבל כל המספרים הראשוניים הם איברים מינימליים.

איבר מקסימלי

איבר מקסימלי מוגדר באופן דומה.

חסם מלעיל (ממש)

הגדרה. חסם מלעיל של תת־קבוצה $Y \subseteq X$ בקבוצה סדורה־חלקית $(X, \leq)$ הוא איבר $x_0 \in X$ כך שלכל $y \in Y$, $y \leq x_0$. אם $y < x_0$ לכל $y \in Y$, x_0 הוא **חסם מלעיל ממש**.

לא בהכרח קיים חסם מלעיל.

חסם מלרע (ממש)

חסם מלרע (ממש) מוגדר באופן דומה.

חסם עליון

הגדרה. חסם עליון של Y הוא איבר $x_0 \in X$ שמהווה חסם מלעיל כך שלכל חסם מלעיל x של Y מתקיים $x_0 \leq X$.

חסם עליון יחיד, אם קיים.

חסם תחתון

חסם תחתון מוגדר באופן דומה.

הגדרה. עוקב מיידי של איבר x_0 בבקבוצה סדורה־חלקית $(X, \leq)$ הוא איבר $x_1 \in X$ כך ש־$x_0 < x_1$ ולכל $x_0 < y$ מתקיים $x_1 \leq y$.

עוקב מיידי יחד, אם קיים.

קבוצה סדורה־היטב

הגדרה. קבוצה סדורה־היטב היא קבוצה סדורה־חלקית כך שלכל תת־קבוצה לא־ריקה יש איבר ראשון, ביחס הסדר המושרה.

[21] לא חייב להיות קיים איבר כזה, אפילו בקבוצה סדורה־לינארית – למשל, ב־$\mathbb{Z}$.

דוגמה. $\mathbb{N}$ עם יחס־הסדר הרגיל. גם $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ($n < \infty$ לכל $n \in \mathbb{N}$) סדורה היטב: אם $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{N}^*$, אז או $A \cap \mathbb{N} \neq \varnothing$ והאיבר הראשון של $A \cap \mathbb{N}$ הוא האיבר הראשון של A, או $A = \{\infty\}$ ו־∞ הוא האיבר הראשון של A.

האם קיימת קבוצה סדורה־היטב שאינה בת־מניה? כן, בהינתן אקסיומת הבחירה.

דוגמה. ב־$(P(X), \subseteq)$, $\varnothing$ הוא איבר ראשון. אך אם $|X| > 1$, ב־$(P(X) \setminus \{\varnothing\}, \subseteq)$ אין איבר ראשון, ולכל $x \in X$, $\{x\}$ איבר מינימלי.

קבוצה סדורה־היטב היא קבוצה סדורה־לינארית: אם $(X, \leq)$ קבוצה סדורה־היטב, לכל $x, y \in X$, ל־$\{x, y\}$ יש איבר ראשון, לכן או $x \leq y$ או $y \leq x$. ההיפך אינו נכון – למשל, $X = [0,1]$ קבוצה סדורה־לינארית; לכל תת־קבוצה יש חסם תחתון, אך הוא אינו בהכרח שייך אליה. לדוגמה, ל־$A = \{x : x > \frac{1}{2}\} \subseteq X$ אין איבר ראשון.

רישא

הגדרה. **הרישא** של $x \in X$ בקבוצה סדורה־חלקית $(X, \leq)$ היא $S(x) = \{y \in X : y < x\}$. ($x$ מהווה חסם עליון ל־$S(x)$.)

פונקציה שומרת־סדר

קבוצות איזומורפיות

הגדרה. אם $(X, \leq_X)$, $(Y, \leq_Y)$ קבוצות סדורות־חלקית, פונקציה $f : X \to Y$ נקראת **שומרת סדר** אם $x_1 \leq_X x_2 \Longleftarrow f(x_1) \leq_Y f(x_2)$. אם בין $(X, \leq_X)$, $(Y, \leq_Y)$ יש $f : X \to Y$ שומרת־סדר חח״ע ועל וגם $f^{-1} : Y \to X$ שומרת סדר, הן נקראות **איזומורפיות**.

בין קבוצות סדורה־לינארית, מספיק לדרוש ש־$f : X \to Y$ שומרת־סדר חח״ע ועל: אם $y_1 \leq y_2$ ב־Y, אז $x_1 = f^{-1}(y_1) \leq f^{-1}(y_2) = x_2$ ב־X: אחרת, $x_2 \leq x_1$ (מכך ש־X סדורה לינארית, איברים אלה ניתנים להשוואה), ולכן $y_2 = f(x_2) \leq f(x_1) = y_1 \Longleftarrow y_1 = y_2 \Longleftarrow$ $x_1 = x_2$.

טענה 37: אם $(X, \leq)$ קבוצה סדורה־היטב ו־$f : X \to X$ שומרת־סדר חח״ע, אז $f(x) \geq x$ לכל $x \in X$.

הוכחה. נניח בשלילה שלא. נגדיר $\varnothing \neq X_0 = \{x \in X_0 : f(x) < x\}$. יהי x_0 האיבר הראשון של X_0. לכל $y < x_0$, $f(y) \geq y$. $f(x_0) < x_0$, לכן בפרט $f(f(x_0)) \geq f(x_0)$. אך f שומרת סדר, לכן $f(f(x_0)) < f(x_0) \Longleftarrow f(x_0) < x_0$ – סתירה.

מסקנה 38: אם $(X, \leq)$, $(Y, \leq)$ קבוצות סדורות־היטב איזומורפיות, האיזומורפיזם ביניהן יחיד.

הוכחה. אם $f_1, f_2 : X \to Y$ איזומורפיזמים, $f_2^{-1} \circ f_1 : X \to X$ שומרת־סדר חח״ע ועל. מהטענה, $f_2^{-1} \circ f_1(x) \geq x$ לכל $x \in X$, ולכן $f_1(x) \geq f_2(x)$ לכל $x \in X$. באופן סימטרי, $f_2(x) \geq f_1(x)$ לכל $x \in X$. אז $f_1 \equiv f_2$.

מסקנה 39: אם $(X, \leq)$ קבוצה סדורה־היטב ו־$x_0 \in X$, אז $S(x_0)$ אינה איזומורפית ל־X.[22]

[22] אבל קבוצה סדורה־היטב יכולה להיות איזומורפית לתת־קבוצה חלקית־ממש שלה: למשל, $\mathbb{N}$ איזומורפית ל־$2\mathbb{N}$.

הוכחה. אחרת קיימת $f : X \to S(x_0)$ חח״ע (ועל) שומרת־סדר. מהטענה, $f(x_0) \ge x_0$; לכן $f(x_0) \notin S(x_0)$, בסתירה.

מסקנה 40: שתי רישות שונות בקבוצה סדורה־היטב $(X, \le)$ אינן איזומורפיות.

הוכחה. עבור שתי רישות $S(x_1)$, $S(x_2)$, נניח בלי הגבלת הכלליות $x_1 < x_2$. אז $S(x_1)$ היא רישא ב־$S(x_2)$; $S(x_2)$ קבוצה סדורה־היטב,[23] לכן לפי המסקנה הקודמת $S(x_1) \nsim S(x_2)$.

משפט 41: כל שתי קבוצות סדורות־היטב $(X, \le_X)$, $(Y, \le_Y)$ ניתנות להשוואה. כלומר, בדיוק 6.6.2007
אחת משלוש האפשרויות הבאות מתקיימת: (א) $X \sim Y$; (ב) קיים $x_0 \in X$ כך ש־$Y \sim S_X(x_0)$; (ג) קיים $y_0 \in Y$ כך ש־$X \sim S_Y(y_0)$.

הוכחה. ממסקנה 39, לא ייתכן שאפשרות א׳ מתקיימת יחד עם אפשרות ב׳ או ג׳.

נניח שאפשרויות ב׳ וג׳ מתקיימות. אם $f : Y \to S_X(x_0)$ איזומורפיזם, אז הצמצום $f\,|_{S_Y(y_0)}\colon S_Y(y_0) \to S_X(f(x_0))$ איזומורפיזם (כתרגיל). על־ידי הרכבה, נקבל איזומורפיזם בין X לרישא שלו – בסתירה למסקנה 39. נותר להראות שאחת האפשרויות מתקיימת.

נסתכל על $X_0 = \{x \in X : \exists y \in Y : S_X(x) \sim S_Y(y)\}$. נגדיר פונקציה $f : X_0 \to Y$ על־ידי $y = f(x)$ אם $S_X(x) \sim S_Y(y)$. מכיוון ששתי רישות שונות אינן איזומורפיות, זוהי פונקציה. נראה ש־$f(X_0)$ רישא של Y, או $f(X_0) = Y$ ו־X_0 רישא של X או $X_0 = X$.

למה 1.41: תת־קבוצה $A \subsetneq X$ של קבוצה סדורה־היטב היא רישא $\iff$ לכל $x \in A$ ולכל $y \in X$ כך ש־$y < x$ מתקיים $y \in A$.

הוכחה. ($\Leftarrow$) ברור.

($\Rightarrow$) נגדיר $x_0 = \min(X \setminus A)$, ואז $A = S_X(x_0)$. אם $y < x_0$, $y \in A$; אחרת, $y \in X \setminus A$, בסתירה למינימליות x_0. מצד שני, אם $y \in A$ ו־$y \ge x_0$, מההנחה נקבל $x_0 \in A$, בסתירה להגדרת x_0. לכן $y < x_0$, כלומר $y \in S_X(x_0)$. □

נראה שאם $x_1 \in X_0$ ו־$x < x_1$ אז $x \in X_0$. אם $g : S_X(x_1) \to S_Y(y)$ איזומורפיזם, אז $g\,|_{S_X(y)}\colon S_X(x) \to S_Y(g(x))$ איזומורפיזם, ולכן $x \in X_0$. מהלמה, $X_0 = X$ או $X_0 = S_X(x)$; באותו אופן, אם $y \in f(x_0)$ ו־$y_1 < y$ אז $y_1 \in f(X_0)$ (אם $y = f(x)$, $x \in X_0$ אז $g : S_X(x) \to S_Y(y)$ איזומורפיזם, $g\,|_{g_X(g^{-1}(y_1))}\colon S_X g^{-1}(y_1)) \to S_Y(y_1)$ איזומורפיזם, ולכן $y_1 = f(g^{-1}(y_1)) \in f(X_0)$). לכן או ש־$f(X_0) = Y$ או שקיים $y_0 \in Y$ כך ש־$f(X_0) = S_Y(y_0)$. נראה ש־$f : X_0 \to f(X_0)$ איזומורפיזם. יודעים ש־f שומרת־סדר ועל. אם $X_0 = X$ אז X איזומורפית לרישא של Y או ל־Y, כי היא איזומורפית ל־$f(X_0)$. אם $f(X_0) = Y$, Y איזומורפית ל־X_0, שהיא או X או רישא של X.

האפשרות הנוספת היא $X_0 = S_X(x_0)$, $Y_0 = f(X_0) = S_Y(y_0)$ עבור $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$.
נגדיר $g : X_0 \cup \{x_0\} \to Y_0 \cup \{y_0\}$ על־ידי $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ y_0 & x = x_0 \end{cases}$. אז g איזומורפיזם. או

[23] כל תת־קבוצה של קבוצה סדורה־היטב היא קבוצה סדורה־היטב ביחס המושרה.

ש־$Y = Y_0 \cup \{y_0\}$ או ש־$Y_0 \cup \{y_0\}$ רישא ב־Y, או ש־$X = X_0 \cup \{x_0\}$ או ש־$X_0 \cup \{x_0\}$ רישא ב־X.

אם $S_Y(y_1) = Y_0 \cup \{y_0\}$ ו־$S_X(x_1) = X_0 \cup \{x_0\}$, אז $S_X(x_1) \sim S_Y(y_1)$ ולכן $x_1 \in X_0$ $\Longleftarrow$ סתירה לכך ש־$x_1 > x_0 \notin X_0$. לכן או ש־$X = X_0 \cup \{x_0\}$ והיא איזומורפית ל־$Y_0 \cup \{y_0\}$, או ש־$Y = Y_0 \cup \{y_0\}$ והיא איזומורפית ל־$X_0 \cup \{x_0\}$.

5.2 הלמה של צורן

הלמה של צורן

הלמה של צורן. תהי $(X, \leq)$ קבוצה סדורה־חלקית שאינה ריקה. אם לכל שרשרת קיים חסם מלעיל ב־X, אז ל־X קיים איבר מקסימלי.

משפט 42: הלמה של צורן שקולה לאקסיומת הבחירה.

הוכחה. ($\Leftarrow$) תהי X קבוצה לא־ריקה. נסתכל על F, קבוצת הזוגות (A, f) כך ש־$A \subseteq X$ ו־f היא פונקציית בחירה של A – כלומר, $f : P(A) \setminus \{\varnothing\} \to A$ כך ש־$f(B) \in B$ לכל $B \in P(X) \setminus \{\varnothing\}$. נגדיר על F סדר חלקי על־ידי $(A_1, f_1) \leq (A_2, f_2)$ אם $A_1 \subseteq A_2$, $F_2(B) = F_1(B \cap A_1)$ לכל $B \subseteq A_2$ כך ש־$B \cap A_1 \neq \varnothing$. קל לראות שזה סדר חלקי. $F \neq \varnothing$, מכיוון ש־$(\varnothing, f_0) \in F$ ($f_0 : \varnothing \to \varnothing$).[24]

נראה שלכל שרשרת יש חסם מלעיל. נניח ש־$\{(A_\alpha, f_\alpha) : \alpha \in I\}$ היא שרשרת; נגדיר $B = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, $f : P(B) \setminus \{\varnothing\} \to B$ על־ידי $f(A) = f_\alpha(A \cap A_\alpha) \in A \cap A_\alpha \subseteq A$ ($\varnothing \neq A \subseteq B$, $A \cap A_\alpha \neq \varnothing$) – זה מוגדר היטב כי קיים α כך ש־$A \cap A_\alpha \neq \varnothing$, ואם $A_\alpha \cap A, A_\beta \cap A \neq \varnothing$ בה״כ מתקיים $(A_\alpha, f_\alpha) \leq (A_\beta, f_\beta)$ (אלו איברי שרשרת) ואז $f_\alpha(A_\alpha \cap A) = f_\beta(A_\beta \cap A)$ ($\varnothing \neq A_\alpha \cap A \subseteq A_\beta \cap A$). לכן $(B, f) \in F$.

נבדוק ש־$(A_\alpha, f_\alpha) \leq (B, f)$. ראשית, $A_\alpha \subseteq B$. אם $C \subseteq B$, $C \cap A_\alpha \neq \varnothing$ אז לפי הגדרה, $f(C) = f_\alpha(C \cap A_\alpha)$. (למעשה, (B, f) הוא חסם עליון של השרשרת.) כעת, מהלמה של צורן, קיים איבר מקסימלי (A_0, f_0) ב־F. נראה ש־$A_0 = X$: אחרת, קיים $x_0 \in X \setminus A_0$; נגדיר $(A, f) \in F$ על־ידי $A = A_0 \cup x_0$,
$$f(B) = \begin{cases} f_0(B \cap A_0) & B \neq \{x_0\} \\ x_0 & B = \{x_0\} \end{cases}$$
לכל $\varnothing \neq B \subseteq A$. ברור ש־$(A_0, f_0) < (A, f)$, בסתירה למקסימליות (A_0, f_0).

($\Rightarrow$) תהי $(X, \leq)$ קבוצה סדורה־חלקית. נסתכל על C – קבוצת כל השרשראות ב־X. $\varnothing \in C$. נניח בשלילה שלא קיים איבר מקסימלי אבל לכל שרשרת יש חסם מלעיל. כלומר, לכל שרשרת c יש חסם מלעיל ממש.

לכל $c \in C$ נתסכל על קבוצת החסמים־מלעיל־ממש $A_c = \{x \in X : \forall y \in C\ x > y\}$. מאקסיומת הבחירה, יש פונקציה $f : C \to X$ כך ש־$f(c) > y$ לכל $y \in c$. המטרה היא להגדיר שרשרת באמצעות f.

[24]קיימת (ויחידה) פונקציה $\varnothing \to \varnothing$. כאן גם יכולנו להסתכל על קבוצה שבה איבר בודד.

נאמר שקבוצה A קונפורמית (ביחס ל־f) אם היא סדורה היטב (ובפרט $A \in C$) כך שלכל $x \in A$ ($S_A(x) = \{y \in A : y < x\}$) $f(S_A(x)) = x$.

נראה שקיימת קבוצה קונפורמית מקסימלית A_0; נקבל סתירה, כי $A = A_0 \cup \{f(A_0)\}$ קבוצה קונפורמית יותר גדולה (כי $S_A(f(A_0)) = A_0$, אבל $f(A_0)$ גדול מכל האיברים): נראה שהקבוצות הקונפורמיות מהוות שרשרת ביחס ליחס של רישא ($C_1 \le C_2$ אם C_1 רישא של C_2). כלומר, אם C_1, C_2 קונפורמיות, נראה שאחת היא רישא של השנייה. נקבל שאיחוד הקבוצות הקונפורמיות ב־C קבוצה סדורה־היטב. קל להראות שזוהי קבוצה קונפורמית, והיא מקסימלית.

טענה 43: הלמה של צורן $\Longleftarrow$ משפט השוואת עוצמות (אם X, Y קבוצות, או $|X| \le |Y|$ או $|Y| \le |X|$).

הוכחה. נסתכל על הקבוצה $F = \{(A,f) : A \subseteq X, f : A \to Y \text{ חח״ע}\}$ עם יחס ההרחבה ($(A_1,f_1) \le (A_2,f_2)$ אם $A_1 \subseteq A_2$ ו־$f_2|_{A_1} = f_1$). זוהי קבוצה סדורה־חלקית.

אם $(A_\alpha, f_\alpha)_{\alpha\in I}$ שרשרת, נגדיר $A = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$, $f : A \to Y$ על־ידי $f(x) = f_\alpha(x)$ כאשר $x \in A_\alpha$. f מוגדרת היטב כי קיים α כך ש־$x \in A_\alpha$, ואם $x \in A_\alpha, A_\beta$ בה״כ $(A_\alpha, f_\alpha) \le (A_\beta, f_\beta)$ (כי זו שרשרת) ולכן $f_\beta|_{A_\alpha} = f_\alpha$, ולכן $f_\beta(x) = f_\alpha(x)$. כמו־כן, f חח״ע על A, כי אם $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \in A_\alpha$, $x_2 \in A_\beta$, בה״כ $(A_\alpha, f_\alpha) \le (A_\beta, f_\beta)$ ולכן $x_1 \in A_\beta$ ו־$f(x_1) = f_\beta(x_1) \ne f_\beta(x_2) = f(x_2)$.

הראינו $(A,f) \in F$. ברור ש־$(A_\alpha, f_\alpha) \le (A,f)$ לכל α, לכן, מהלמה של צורן, קיים איבר מקסימלי (A_0, f_0). אפשרות אחת: $X = A_0$, ואז $|X| \le |Y|$. אחרת, $A_0 \subsetneq X$, ואז f_0 על: קיים $x_0 \in X \setminus A_0$; אם f_0 לא על, נבחר $y_0 \in Y \setminus f_0(A_0)$, ונרחיב את f_0 ל־$f_1 : A_0 \cup \{x_0\} \to Y$ על־ידי $f_1(x) = \begin{cases} f_0(x) & x \ne x_0 \\ y_0 & x = x_0 \end{cases}$. f_1 חח״ע, ו־$(A_0, f_0) \le (A_0 \cup \{x_0\}, f_1)$, בסתירה למקסימליות (A_0, f_0). לכן $f_0 : A_0 \to Y$ על $\Longleftarrow$ $|Y| \le |X|$.

משפט 44 (הסדר הטוב): אקסיומת הבחירה (= הלמה של צורן) $\Longleftarrow$ לכל קבוצה X קיים סדר טוב. 13.6.2007

הוכחה. נסתכל על קבוצת כל הזוגות (A,R) כך ש־$A \in P(X)$ ו־R סדר טוב על A, עם יחס הסדר $(A_1,R_1) \le (A_2,R_2)$ אז או ש־$(A_1,R_1) = (A_2,R_2)$ או ש־(A_1,R_1) רישא של (A_2,R_2) ($A_1 \subseteq A_2$, $R_1 \subseteq R_2$ – למעשה, $R_2 \cap (A_1 \times A_1) \in R_1$). $(\varnothing, \varnothing)$ היא דוגמה לאיבר כזה, וכן $(\{x\}, \{(x,x)\})$ עבור $x \in X$. קל לראות שזו קבוצה סדורה־חלקית.

נניח ש־$(A_\alpha, R_\alpha)_{\alpha\in I}$ שרשרת, ונראה ש־$(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha, \bigcup_{\alpha\in I} R_\alpha)$ חסם מלעיל.

למה $(\bigcup A_\alpha, \bigcup R_\alpha)$ קבוצה סדורה־חלקית?

- רפלקסיביות – אם $x \in \bigcup A_\alpha$, קיים $\alpha \in I$ כך ש־$x \in A_\alpha$. R_α יחס־סדר חלקי, לכן $(x,x) \in \bigcup R_\alpha \Longleftarrow (x,x) \in R_\alpha$.

- סימטריות – אם $(x,y),(y,x)\in\bigcup R_\alpha$, קיימים α,β כך ש־$(x,y)\in R_\alpha$, $(y,x)\in R_\beta$. בה"כ, $(A_\alpha,R_\alpha)\le(A_\beta,R_\beta)$, ולכן $R_\alpha\subseteq R_\beta$. אז $(x,y),(y,x)\in R_\beta \Longleftarrow x=y$.

- טרנזיטיביות – אם $(x,y),(y,z)\in\bigcup R_\alpha$, יש α,β כך ש־$(x,y)\in R_\alpha$, $(y,x)\in R_\beta$. בה"כ, $(A_\alpha,R_\alpha)\le(A_\beta,R_\beta)$. אז $(x,y),(y,z)\in R_\beta$, ובגלל ש־R_β יחס־סדר חלקי, $(x,z)\in R_\beta \Longleftarrow (x,z)\in\bigcup R_\alpha$.

למה $(\bigcup A_\alpha,\bigcup R_\alpha)$ קבוצה סדורה־לינארית? אם $x,y\in\bigcup A_\alpha$, יש α,β כך ש־$x\in R_\alpha$, $y\in R_\beta$. בה"כ, $(A_\alpha,R_\alpha)\le(A_\beta,R_\beta)$, ואז $x,y\in A_\beta$. כיוון ש־(A_β,R_β) סדורה לינארית $(x,y)\in R_\beta$ או $(y,x)\in R_\beta$, ואז $(x,y)\in\bigcup R_\alpha$ או $(y,x)\in\bigcup R_\alpha$.

למה $(\bigcup A_\alpha,\bigcup R_\alpha)$ קבוצה סדורה־היטב? נניח ש־$\varnothing\neq Y\subseteq\bigcup A_\alpha$. אז קיים α כך ש־$Y\cap A_\alpha\neq\varnothing$. יהי y_0 האיבר המינימלי (ביחס ל־R_α) של $Y\cap A_\alpha$; נראה ש־y_0 האיבר המינימלי של Y ביחס ל־$\bigcup R_\alpha$. אחרת, קיים $y_0\neq y\in Y$ כך ש־$(y,y_0)\in\bigcup R_\alpha$ (כי הקבוצה סדורה לינארית). אז קיים β כך ש־$(y,y_0)\in R_\beta$. אם $(A_\alpha,R_\alpha)\le(A_\beta,R_\beta)$, קיים $z\in A_\beta$ כך ש־$A_\alpha=\{x\in A_\beta:(x,z)\in R_\beta\}$. $y_0\in A_\alpha$, אז $(y,y_0),(y_0,z)\in R_\beta$. לכן $(y,z)\in R_\beta$, ולכן $y\in A_\alpha$. $(y,y_0)\in(A_\alpha\times A_\alpha)\cap R_\beta=R_\alpha$, לכן $y\in A_\alpha\cap Y$, בסתירה למינימליות y_0 ב־$A_\alpha\cap Y$ (ביחס ל־R_α). אחרת, $(A_\beta,R_\beta)\le(A_\alpha,R_\alpha)$, ואז $(y,y_0)\in R_\alpha$ $y\in A_\alpha\cap Y \Longleftarrow$, בסתירה למינימליות y_0.

למה $(\bigcup A_\alpha,\bigcup R_\alpha)$ חסם מלעיל? אם לכל α $(A_\alpha,R_\alpha)\le(A_\beta,R_\beta)$, אז $A_\beta=\bigcup A_\alpha$, $R_\beta=\bigcup R_\alpha$ – כלומר, $(A_\beta,R_\beta)=(\bigcup A_\alpha,\bigcup R_\alpha)$. אחרת, קיים α כך ש־(A_β,R_β) רישא של (A_α,R_α). אז קיים $z\in A_\alpha$ כך ש־$A_\beta=\{x\in A_\alpha:(x,z)\in R_\alpha\}$. נראה שמתקיים $A_\beta=\{x\in\bigcup_\gamma A_\gamma:(x,z)\in\bigcup_\gamma R_\gamma\}$. $\subseteq$ – ברור. מצד שני, אם $(x,z)\in R_\gamma$, או $(A_\gamma,R_\gamma)\le(A_\alpha,R_\alpha)$ ואז $(x,z)\in R_\alpha$ ואז $x\in A_\beta$, או $(A_\alpha,R_\alpha)\le(A_\gamma,R_\gamma)$ ואז $(x,z)\in R_\gamma$ ו־$z\in A_\alpha$ ולכן, כמו קודם, $(x,z)\in R_\alpha$ ו־$x\in A_\beta$.

תנאי הלמה של צורן מתקיימים, לכן יש איבר מקסימלי (A_0,R_0). אם $A_0=X$, R_0 סדר טוב על X: ואכן, אם $A_0\subsetneq X$, קיים $x_0\in X\setminus A_0$; נגדיר $(A_0\cup\{x_0\},R_0\cup\{(x,x_0):x\in A_0\})$. קל לראות שזוהי קבוצה סדורה־היטב, ו־(A_0,R_0) היא הרישא שלה שמוגדרת על־ידי x_0 – בסתירה למקסימליות (A_0,R_0).

גם הכיוון השני נכון: בהינתן X, סדר טוב $\le$ מגדיר פונקציית בחירה $f:P(X)\setminus\{\varnothing\}\to X$ על־ידי $f(A)=\min(A)$.

בנוסף, משפט הסדר הטוב גורר את משפט ההשוואה מיידית: אם X, Y קבוצות סדורות־היטב, אז או ש־X איזומורפית לרישא של Y, או ש־Y איזומורפית לרישא של X, או ש־X ו־Y איזומורפיות.

טענה 45: אם X אינסופית, $|X\times\{0,1\}|=|X|$.

הוכחה. נסתכל על Z קבוצת כל הזוגות (A,f) כך ש־$A\subseteq X$, $f:A\times\{0,1\}\to A$ שקילות,

עם יחס־הסדר החלקי $(A_1,f_1)\le(A_2,f_2)$ אם $A_1\le A_2$ ו־$f_2|_{A_1\times\{0,1\}}\equiv f_1$. $X\neq\varnothing$, כי X אינסופית ולכן יש לה תת־סדרה $A=\{x_n\}_{n=1}^\infty$, וקיימת $f:A\times\{0,1\}\to A$ שקילות.

נראה שאם $(A_\alpha,f_\alpha)_{a\in I}$ שרשרת אז $(\bigcup A_\alpha,\bigcup f_\alpha)$ חסם מלעיל שלה. $\bigcup f_\alpha$ זו הפונקציה $F:\bigcup A_\alpha\times\{0,1\}\to\bigcup A_\alpha$ המוגדרת על־ידי $F(x,\varepsilon)=f_\alpha(x,\varepsilon)$ אם $x\in A_\alpha$. זה מוגדר היטב בגלל ש־(A_α,f_α) שרשרת (אם $x\in A_\alpha\cap A_\beta$ בה"כ $(A_\alpha,f_\alpha)\le(A_\beta,f_\beta)$ ו־$f_\alpha(x,\varepsilon)=f_\beta(x,\varepsilon)$). F היא חח"ע ועל (בדיקה כתרגיל).

כעת, מהלמה של צורן, קיים איבר מקסימלי $(A_0,f_0)\in Z$. נראה ש־$X\setminus A_0$ סופית; אחרת, קיימת סדרה אינסופית $A_1\subseteq X\setminus A_0$. נבחר שקילות $f_1:A_1\times\{0,1\}\to A_1$, וניקח $f:(A_0\cup A_1)\times\{0,1\}\to A_0\cup A_1$ על־ידי $f(x,\varepsilon)=\begin{cases}f_0(x,\varepsilon) & x\in A_0\\ f_1(x,\varepsilon) & x\in A_1\end{cases}$. אז $Z\ni(A_0\cup A_1,f)\ge(A_0,f_0)$, בסתירה למקסימליות (A_0,f_0). כיוון ש־$X\setminus A_0$ סופית, $|X|=|A_0|$ (הוכחה כתרגיל). אז $|X\times\{0,1\}|=|A_0\times\{0,1\}|=|A_0|=|X|$.

מסקנה 46: אם X, Y קבוצות, $|Y|<|X|$, $|X|$ אינסופית, אז $|X\setminus Y|=|X|$.

הוכחה. $|X\setminus Y|\le|X|$. מצד שני, $|X|=|X\setminus Y|+|Y|=\max(|X\setminus Y|,|Y|)$. לכן $|X\setminus Y|=|X|$, כי $|Y|<|X|$.

טענה 47: אם X אינסופית, $|X\times X|=|X|$.

הוכחה. נגדיר $Z=\{(A,f):A\subseteq X$ אינסופית, $f:A\times A\to A$ שקילות$\}$ עם הסדר $(A_1,f_1)\le(A_2,f_2)$ אם $f_2|_{A_1\times A_1}\equiv f_1$. $Z\neq\varnothing$ כי X אינסופית. תנאי הלמה של צורן מתקיימים עבור Z (כתרגיל). נניח ש־$(A_0,f_0)\in Z$ מקסימלי. נראה ש־$|X|=|A_0|$, וסיימנו.

אחרת, $|A_0|<|X|$. אז $|X\setminus A_0|=|X|\ge|A_0|$, מהמסקנה. קיימת תת־קבוצה $A\subseteq X\setminus A_0$ שקולה ל־A_0. נבנה שקילות $F:(A_0\cup A)\times(A_0\cup A)\to A_0\cup A$ כך ש־$F|_{A_0\times A_0}\equiv f_0$. כלומר, נרצה שקילות $A_0\times A\cup A\times A_0\cup A\times A$ עם A.[25] אם קיימת כזו, מתקיים, מכיוון שזהו איחוד זר ו־A_0 אינסופית, f_0 שקילות:

$$\begin{aligned}|A_0\times A\cup A\times A_0\cup A\times A| &= |A_0\times A|+|A\times A_0|+|A\times A|\\ &= |A_0\times A_0|+|A_0\times A_0|+|A_0\times A_0|\\ &= |A_0|+|A_0|+|A_0|=|A_0|=|A|\end{aligned}$$

אז $Z\ni(A_0\cup A_1,F)>(A_0,f_0)$, בסתירה למקסימליות.

[25] כי $(A_0\cup A)\times(A_0\cup A)=A_0\times A_0\times[A_0\times A\cup A\times A_0\cup A\times A]$.