מבוא לעיבוד ספרתי של תמונות

עבודה 2

מגישים:

איילה ראובן 314077033

ליאור עבדייב 206087611

שאלה 1- התמרת פוריה דו מימדית:

1.1.1 התבקשנו לכתוב את הפונקציות dip_fft2(I) שמבצעת התמרת פוריה דו מימדית לתמונה I בגודל MXN ואת הפונקציה dip_ifft2(FFT) שמבצעת התמרת פוריה דו מימדית ההופכית.

את ההתמרות חישבנו לפי החישובים הבאים:

התמרת פוריה דו מימדית בכתיב מטריציוני:

$$
\begin{aligned}
F(u+1,v+1)&\\
&=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} I(m+1,n+1)*e^{-2\pi i(\frac{um}{M}+\frac{vn}{N})}\\
&=\sum_{m=0}^{M-1} e^{-2\pi i\frac{um}{M}}\sum_{n=0}^{N-1} I(m+1,n+1)*e^{-2\pi i\frac{vn}{N}}\\
&=\sum_{m=0}^{M-1}[F_M]_{u,m}\sum_{n=0}^{N-1} I(m+1,n+1)*[F_N]_{v,n}=[F_M*I*F_N]_{u,v}
\end{aligned}
$$

כאשר:

$$F_M=exp\left(\frac{2\pi i}{M}*\begin{pmatrix}0*0 & \cdots & 0*(M-1)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (M-1)*0 & \cdots & (M-1)*(M-1)\end{pmatrix}\right)$$

$$F_N=exp\left(\frac{2\pi i}{N}*\begin{pmatrix}0*0 & \cdots & 0*(N-1)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (N-1)*0 & \cdots & (N-1)*(N-1)\end{pmatrix}\right)$$

ובאותה הדרך נקבל את ה**התמרה הדו מימדית ההופכית:**

$$
\begin{aligned}
I(m+1,n+1) &= \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u+1,v+1)*e^{2\pi i\left(\frac{um}{M}+\frac{vn}{N}\right)} \\
&= \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}e^{2\pi i\frac{um}{M}}\sum_{v=0}^{N-1}F(u+1,v+1)*e^{-2\pi i\frac{vn}{N}} \\
&= \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}[F_M]^*{}_{u,m}\sum_{v=0}^{N-1}F(u+1,v+1)*[F_N]^*{}_{v,n} \\
&= \frac{1}{MN}[F_M{}^* * I * F_N{}^*]_{m,n}
\end{aligned}
$$

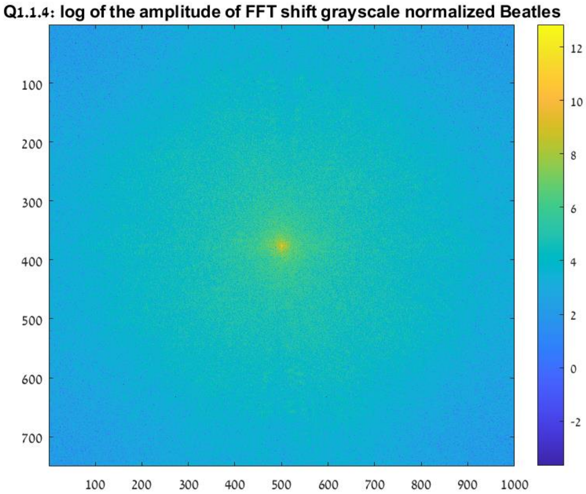
1.1.2 התבקשנו לכתוב את הפונקציה dip_fftshift(FFT) שמבצעת הזזה של תדרי האפס למרכז התמונה לפי התמונה הבאה:

ביצענו זאת באופן הבא- התחלה ביצענו הזזה ציקלית לעמודות התמונה כך שנקבל את ההתמרה סביב הראשית. לאחר מכן ביצענו הזזה ציקלית לשורות התמונה באותו האופן.

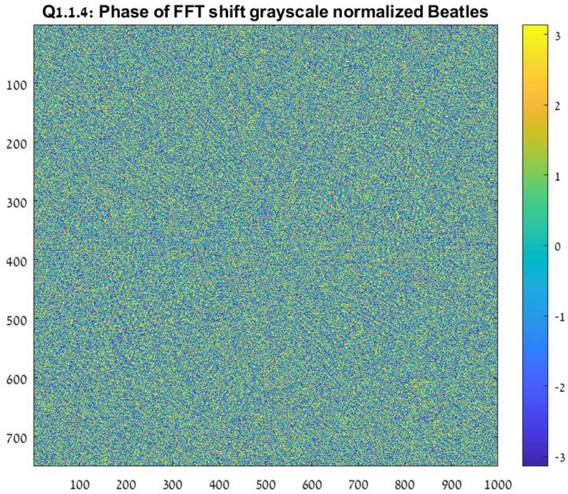
1.1.3 קראנו את התמונה של הביטלס, נרמלנו אותה והעברנו אותה לסקאלה של אפורים. התמונה שהתקבלה:

1.1.4 חישבנו את התמרת פוריה של התמונה וביצענו לה הזזה ציקלית ע"י הפונקציות שכתבנו בסעיפים הקודמים. הצגנו את ה-log של האמפליטודה בנפרד ואת הפאזה בנפרד.
התוצאה:

Q1.1.4: log of the amplitude of FFT shift grayscale normalized Beatles



Q1.1.4: Phase of FFT shift grayscale normalized Beatles



1.1.5 כעת שחזרנו את התמונה ע״י שימוש בפונקציה של ההתמרה ההופכית dip_ifft2(FFT). השווינו את התמונה שהתקבלה לתמונה המקורית. התוצאה:

Q1.1.5: Original Beatles Image

Q1.1.5: Reconstruct the Beatles Image

במבט ראשון התמונות נראות זהות לחלוטין. בנוסף חיסרנו את התמונות ע״י המטלב וקיבלנו שהשגיאה היא error = 8.0551e-08, כלומר זניחה מאוד ולכן התמונות זהות.

1.2 Transformation properties

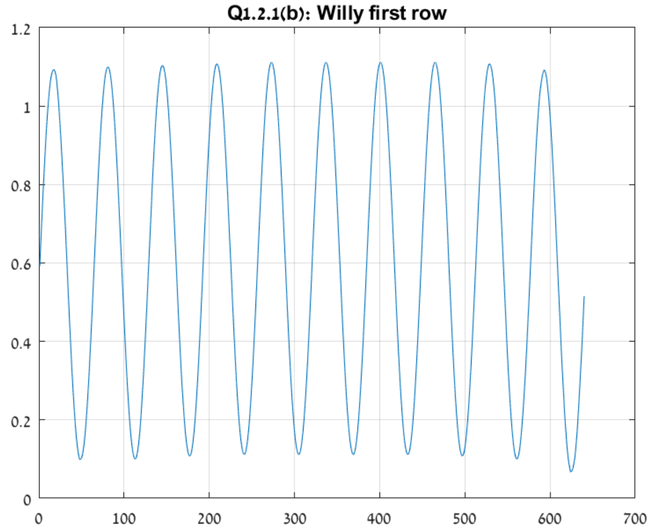
1.2.1 לשחרר את ווילי

(*a*) התבקשנו לטעון את הקובץ freewilly ולהציג את התמונה. התמונה שקיבלנו היא:

(*b*) כעת נתון שהסורגים בתמונה של ווילי נוצרו ע"י הוספת האות הסינוסי הבא לתמונה המקורית: $0.5 * \sin\left(\frac{2\pi f_x}{N} x\right)$ כאשר N מייצג את מספר העמודות של המטריצה.

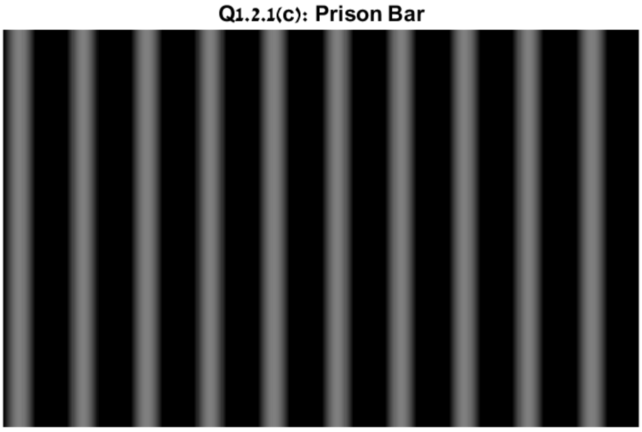
התבקשנו למצוא את התדר המרחבי של הסורגים בתמונה. לשם כך תחילה הדפסנו את הגרף של השורה הראשונה בתמונה כפונקציה של האינדקסים של עמודות התמונה.

התוצאה:

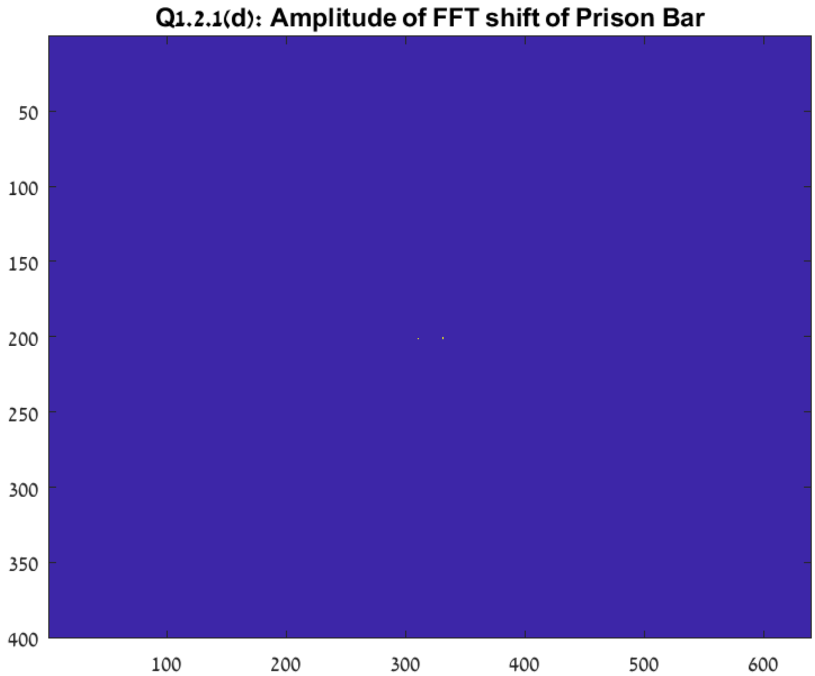


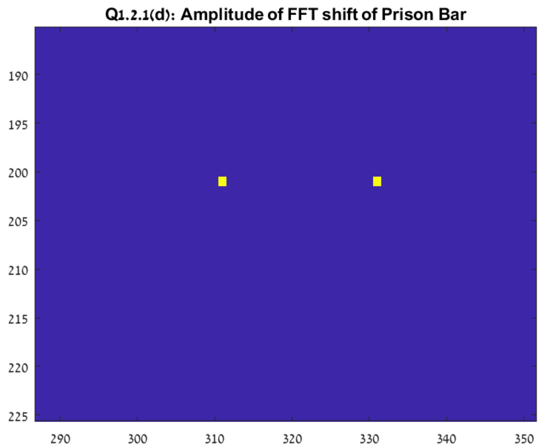
קיבלנו פונקציית סינוס עם הגבר של 0.6. ניתן לראות שאכן חוץ מהפסים השחורים השורה הראשונה בתמונה מורכבת מאותה הצבע. זהו ההגבר שקיבלנו בסינוס. ע"מ למצוא את f_x נמצא כמה פיקים מקסימליים מתקבלים במחזור, כלומר בתמונה. ע"י שימוש בפונקציה של מטלב *findpeaks* נקבל שיש 10 פיקים של סינוס ולכן קיבלנו ש$f_x = 10Hz$.

‏(*c* התבקשנו ליצור תמונה של סורגי הכלא. התוצאה היא :



‏(*d* התבקשנו לבצע התמרת פוריה דו ממדית לתמונת הסורגים ולהציג את האמפליטודה שלה. התוצאה בעמוד הבא :





הסבר התוצאות: קיבלנו שהתמרת פוריה של סורגי הכלא היא שתי נקודות במישור התדר- כלומר 2 דלתאות. אנחנו יודעים שדלתאות הן התמרת פוריה של סינוס לכן התוצאות תואמות את הציפיות ואכן הסוגים מתנהגים כמו אות סינוסי (ללא ההגבר מכיוון שההגבר בתמונה בסעיף (b נובע מהרקע של השמיים). התבקשנו לכתוב הוכחה מתמטית. ההוכחה:

נפתח את האות שלנו:

$$prison\ bar = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi f_x}{N}x\right) = \frac{1}{4i}\left(e^{\frac{2\pi i f_x}{N}x} - e^{-\frac{2\pi i f_x}{N}x}\right)$$

כעת נבצע על האות התמרת פוריה דו ממדית:

$$\begin{aligned}DFT\{prison\ bar\} &= DFT\left\{\frac{1}{4i}\left(e^{\frac{2\pi i f_x}{N}x} - e^{-\frac{2\pi i f_x}{N}x}\right)\right\}\\ &= \frac{1}{4i}\left(DFT\left\{e^{\frac{2\pi i f_x}{N}x}\right\} - DFT\left\{e^{-\frac{2\pi i f_x}{N}x}\right\}\right)\end{aligned}$$

נבדוק מהי התמרת פוריה דו ממדית של אקספוננט:

$$\begin{aligned}DFT\left\{e^{\frac{2\pi i f_x}{N}x}\right\} &= \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i f_x}{N}m} e^{-2\pi i\left(\frac{um}{M}+\frac{vn}{N}\right)} = \sum_{m=0}^{M-1} e^{\frac{2\pi i\left(f_x-\frac{u}{M}N\right)}{N}m} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i\left(\frac{vn}{N}\right)}\\ &= M\cdot N\cdot\delta(v)\cdot\delta(u-f_x)\end{aligned}$$

וקיבלנו שהתמרת פוריה של אקספוננט היא מכפלה של שתי על שני צירים שונים- כלומר קיבלנו שההתמרה של אקספוננט היא דלתא בנקודה $(f_x, 0)$. באותו האופן נקבל שהתמרת פוריה של האקספוננט השני בביטוי תהיה דלתא בנקודה $(-f_x, 0)$.

קיבלנו שהתמרת פוריה של אקספוננט היא מכפלה של דלתא על ציר הy, מכאן שהתמרת פוריה של האות שלנו היא שתי דלתאות על ציר הy מכיוון שיש לנו שני אקספוננטים. ואכן קיבלנו שתי נקודות על ציר הy כמו שציפינו לראות.

(e) התבקשנו לשחרר את ווילי ע"י כתיבת הפונקציה Free_Willy(Willy). על מנת לשחרר את ווילי דרך מישור התדר נרצה לבצע התמרת פוריה לתמונה המקורית, להחסיר את התמונה הנפרדת של הסורגים במישור התדר (כלומר שתי הדלתאות), ולבצע התמרת פוריה הופכית.
(בפועל במטלב את החיסור ביצענו על התמונה המקורית לא במישור התדר מכיוון שידוע לנו האות של הסורגים במישור התמונה.) התוצאה:

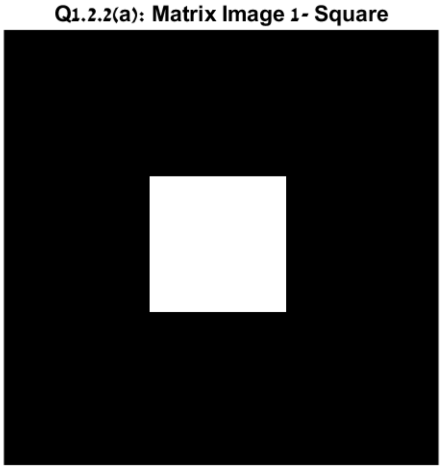
Free Willy

ניתן לראות שאכן קיבלנו תמונה של ווילי משוחרר ללא הסורגים.

1.2.2 Scaling, translation and seperability

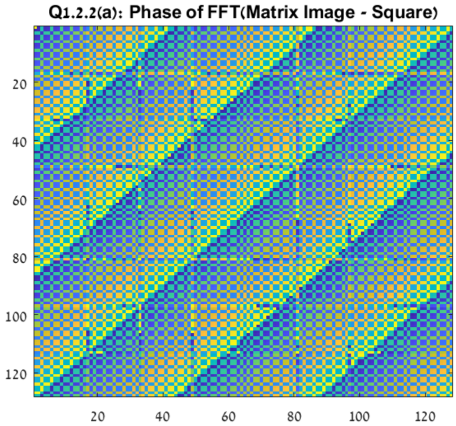
(a) התבקשנו לייצר תמונה שחורה שבמרכזה ריבוע לבן. ביצענו לתמונה התמרת פוריה דו ממדית כמו שהתבקשנו. התמונה:

Q1.2.2(a): Matrix Image 1- Square

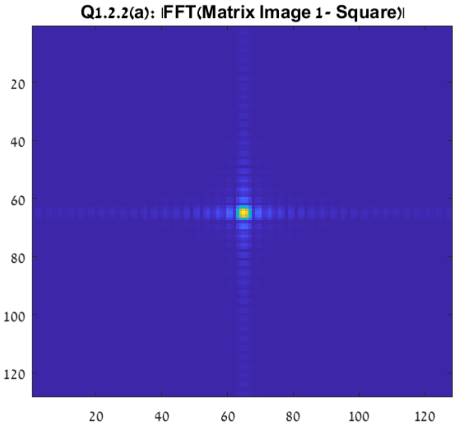


התמרת פוריה של התמונה (אמפליטודה ופאזה):

Q1.2.2(a): Phase of FFT(Matrix Image - Square)



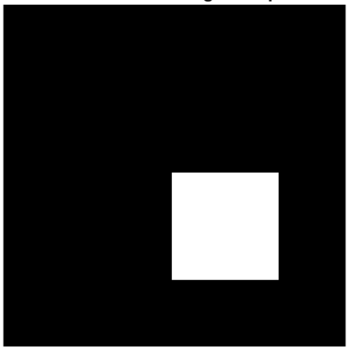
Q1.2.2(a): |FFT(Matrix Image 1- Square)|



הסבר: ביצענו התמרת פוריה לריבוע. נתסכל על ריבוע בדו ממד כמקביל לחלון בחד ממד, לכן נצפה לקבל לאחר ההתמרה *sinc* בתדר. ואכן אפשר לראות שרוב האנרגיה שלנו מרוכזת בתדרים הנמוכים (במרכז התמונה של האמפליטודה) ודועכת בצורה מחזורית ככל שהתדרים עולים. כלומר, ההתמרה שלנו אכן מתנהגת כמו *sinc* ולכן אפשר להגיד שקיבלנו *sinc* בתדר כמצופה.

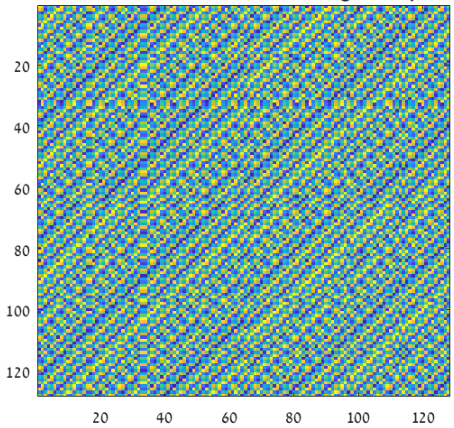
(b) כעת התבקשנו לייצר תמונה כמו בסעיף הקודם, אך הפעם הריבוע שלנו מוזז מהמרכז. התמונה:

Q1.2.2(b): Matrix Image 2 - Square

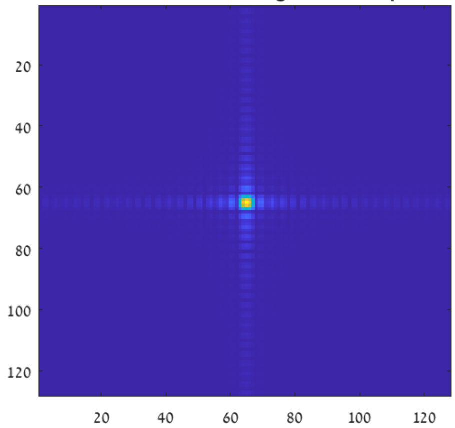


התמרת פוריה דו ממדית של התמונה :

Q1.2.2(b): Phase of FFT(Matrix Image 2- Square)

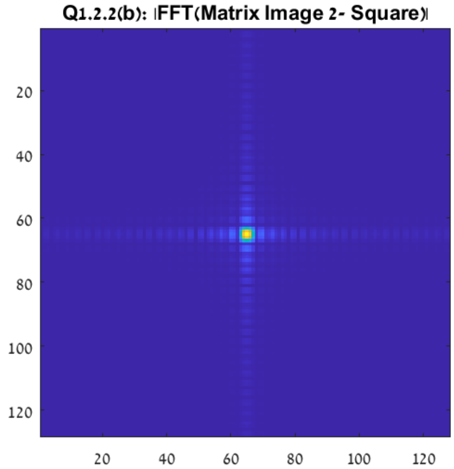


Q1.2.2(b): |FFT(Matrix Image 2- Side Square)|

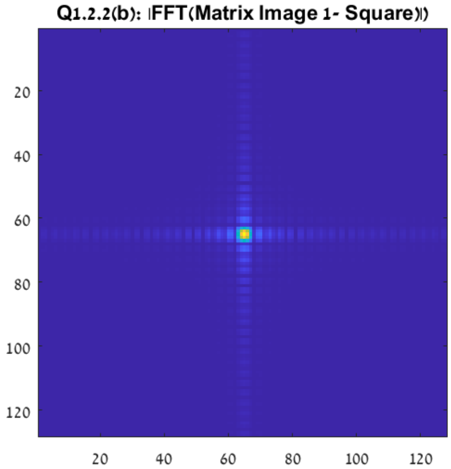


הסבר : גם התמונה החדשה מורכבת מריבוע (חלון) לכן נצפה לקבל שההתמרה שלה היא *sinc*. נשים לב שתמונת האמפליטודה של ההתמרה של הריבוע החדש יצאה זהה לשל הריבוע הקודם. אך תמונת הפאזה יצאה שונה הפעם. זו התוצאה שציפינו לקבל מכיוון שהתמונה החדשה שלנו זהה לתמונה הקודמת רק מוזזת במישור התמונה, ומכיוון שהזזה באה לידי ביטוי בפאזה (מכפילים באקספוננט- כלומר מסיטים את הפאזה), נקבל שינוי רק בפאזה של ההתמרה של התמונה החדשה. נציג את האמפליטודה של ההתמרות של שני הסעיפים אחת ליד השני כדי לוודא שאכן הן יצאו זהות :

Q1.2.2(b): |FFT(Matrix Image 2- Square)|



Q1.2.2(b): |FFT(Matrix Image 1- Square)|)



נשים לב שהן אכן זהות. נראה זאת מתמטית :

$$DFT\{F(m-k_1,n-k_2\} = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} F(((m-k_1))_M,((n-k_2))_N)\cdot e^{-2\pi i\left(\frac{um}{M}+\frac{vn}{N}\right)}$$

$$= \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} F(m,n)\cdot e^{-2\pi i\left(\frac{u(m-k_1)}{M}+\frac{v(n-k_2)}{N}\right)}$$

$$= DFT\{F(m,n)\}\cdot e^{-\frac{2\pi\tilde{m}}{M}}\cdot e^{-\frac{2\pi i\tilde{n}}{N}}$$

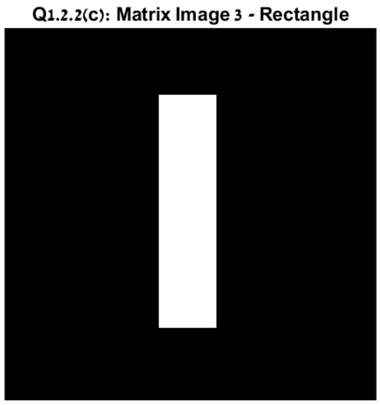
כשהזזנו במישור התמונה בשני הצירים קיבלנו מכפלה בתדר בשני אקספוננטים. לכן האמפליטודה של ההתמרה אכם נשארת זהה :

$$\left|DFT\{F(m,n)\}\cdot e^{-\frac{2\pi\tilde{m}}{M}}\cdot e^{-\frac{2\pi i\tilde{n}}{N}}\right| = |DFT\{F(m,n)\}|$$

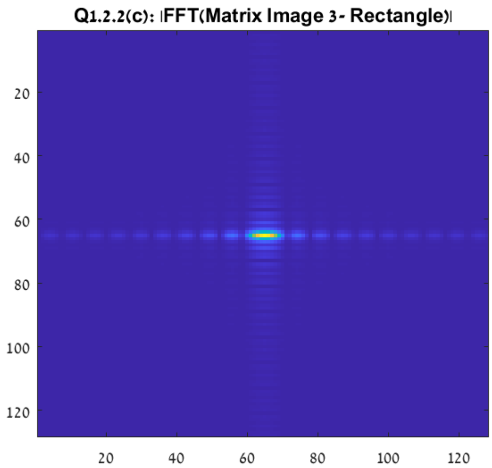
והשינוי בא לידי ביטוי בהסתה של הפאזה.

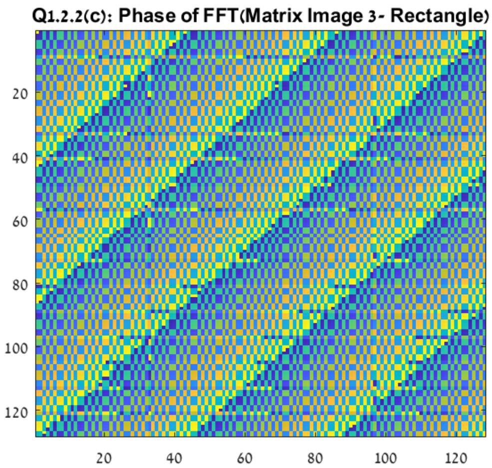
(c) כעת יצרנו תמונה שחורה שבמרכזה מלבן לבן. התבקשנו להציג את התמונה ואת ההתמרת פוריה הדו ממדית שלה :

התמונה בעמוד הבא :



התמרת פוריה הדו ממדית :



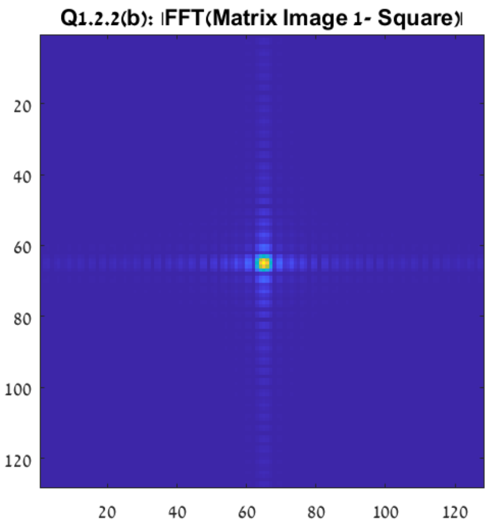


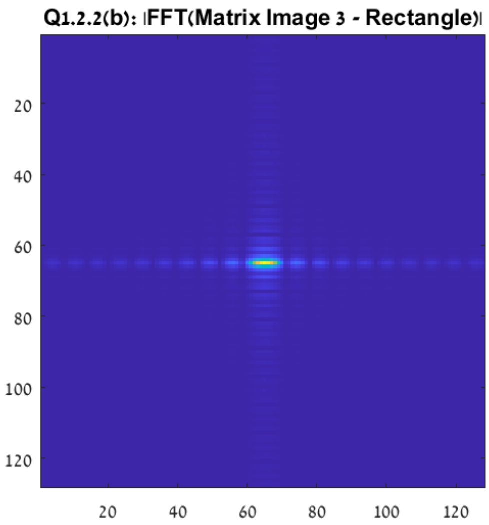
גם מלבן הוא סוג של חלון, לכן נצפה לקבל שהתמרת פוריה של המבלן היא *sinc*.

מהתבוננות באמפליטודה ניתן לראות שגם במקרה הזה רוב האנרגיה מרוכזת בתדרים

הנמוכים (במרכז התמונה) ודועכת ככל שהתדרים גדלים בצורה מחזורית, כמו שציפינו לקבל.

נשווה בין האמפליטודה של המלבן לאמפליטודה של הריבוע. התוצאות:





בשני המקרים קיבלנו $sinc$, אך ה$sinc$-ים שקיבלנו שונים. מכיוון שהקטנו את רוחב החלון והגדלנו את הגובה שלו, ציפינו לקבל כיווץ והרחבה בשני הצירים של ה$sinc$. ואכן קיבלנו את המצופה בקשר הפוך: ציר ה x של ההתמרה מורחב יותר וציר הy של ההתמרה מכווץ יותר.

(d) נשאלנו כיצד לייצג את המטריצה מהסעיף הקודם בתור מכפלה של שני וקטורים חד ממדיים. הפתרון: נרצה לייצג את המלבן הדו ממדי הבא:

$$rec(x,y) = \begin{cases} 1, & x \in [24:103], y \in [54:73] \\ 0, & else \end{cases}$$

לכן נייצר שני וקטורים מממד 128×1 כך שכל אחד ייצג ציר אחר:

$$v_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [24:103] \\ 0, & else \end{cases}$$

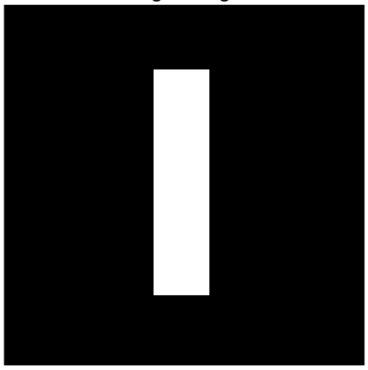
$$v_2(y) = \begin{cases} 1, & y \in [54:73] \\ 0, & else \end{cases}$$

ונקבל שמתקיים :

$$rec(x, y) = v_1(x) \cdot v_2(y)^T$$

התוצאה :

Q1.2.2(d): Rectangle using two 1D vectors



כלומר הצלחנו לייצג את המלבן הנדרש ע״י הכפלה של שני וקטורים חד ממדים.

e) כעת אנחנו מעוניינים לחשב התמרה דו ממדית ע״י שימוש בהתמרה חד ממדית על שני הווקטורים הנפרדים מהסעיף הקודם. התבקשנו לכתוב את הפונקציה sep_fft2(v1,v2) שמקבלת שני וקטורים חד ממדיים ומחזירות התמרת פוריה דו ממדית. הפעלנו את הפונקציה על הווקטורים מסעיף קודם והשווינו את התוצאות עם התוצאות של סעיף (c).

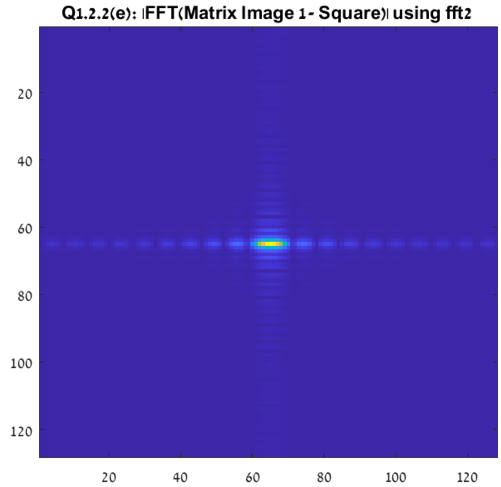
תחילה נסביר מתמטית איך ביצענו את ההתמרה :

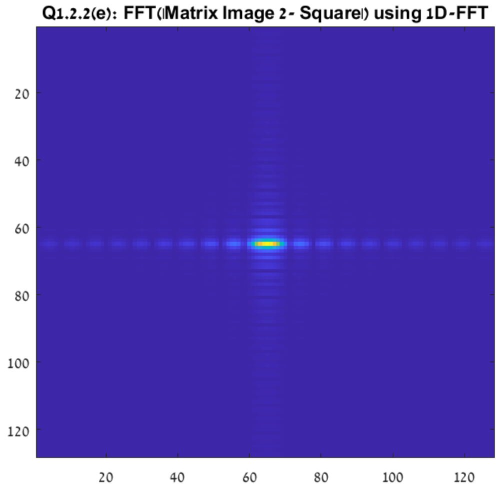
בסעיף 1.1.1 ראינו שהתמרת פוריה דו ממדית בכתיב מטריציוני מקיימת $F_M \cdot I \cdot F_N$ כאשר I זוהי התמונה שלנו ו-F_M ו-F_N הן מטריצות האקספוננט המרוכב בממד המתאים.

כעת מתקיים :

$$F_M \cdot I \cdot F_N = F_M \cdot v_1 \cdot {v_2}^T \cdot F_N = (F_M * v_1) * (F_N * v_2)^T$$

כלומר על מנת לבצע התמרת פוריה דו ממדית נרצה לבצע FFT על כל אחד מהווקטורים בנפרד ואז להכפיל את התוצאות כפי שמצאנו.
הפונקציה שכתבנו מבצעת FFT בכתיב מטריציוני לכל אחד מהווקטורים ולאחר מכן מכפילה את התוצאות.
הפעלנו את הפונקציה שכתבנו על הווקטורים שמצאנו בסעיף הקודם והשווינו את התוצאה עם התוצאה של סעיף (c). התוצאה בעמוד הבא :





במבט ראשון התמונות נראות זהות לחלוטין. בנוסף חיסרנו את התמונות ע״י המטלב וקיבלנו שהשגיאה היא error = 1.703954939742089e-09, כלומר זניחה מאוד ולכן התמונות זהות.

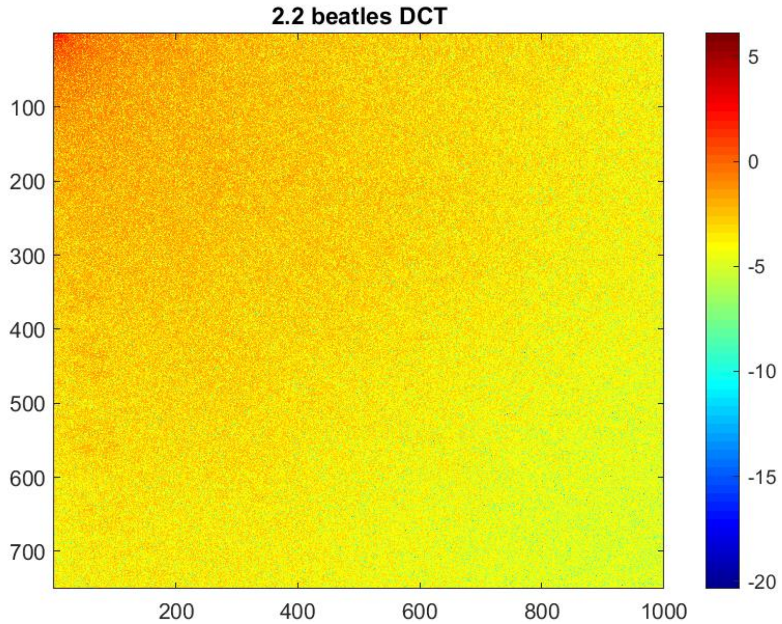
שאלה 2 - Discrete Cosine Transform

.2.1

בוצע בשאלה 1.1.3.

.2.2

ביצענו התמרת DCT כפי שהתבקשנו לעשות וקיבלנו את הפלט הבא:

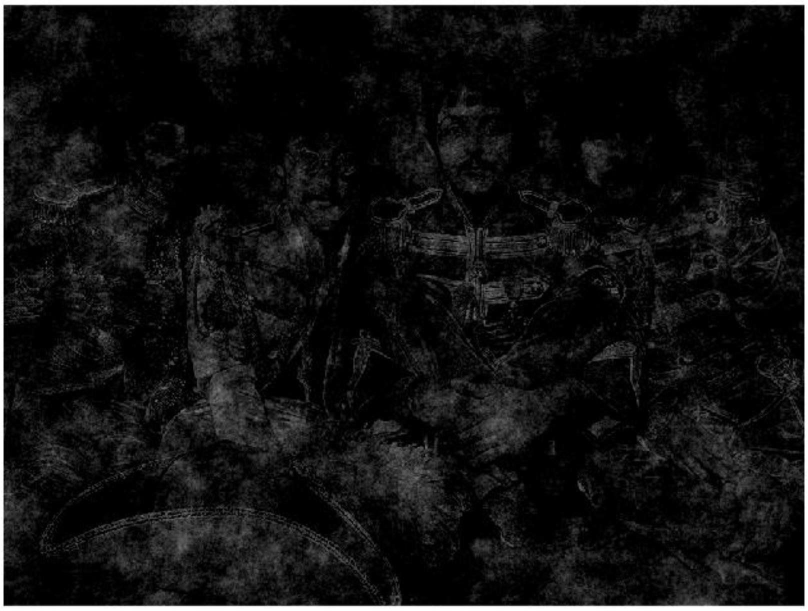


ניתן לראות שרוב המידע נמצא בתדרים הנמוכים.

.2.3

איפסנו בצורה רנדומלית 50% מהערכים בהתמרה ולאחר מכן ביצענו התמרה הפוכה IDCT וקיבלנו את התמונה הבאה:

2.3 IDCT with 50% zeros



ניתן לראות שהשינוי השפיע משמעותית על התמונה והיא שונה משמעותית מהתמונה המקורית.

.2.4

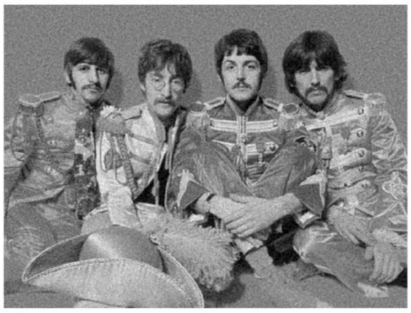
בסעיף זה איפסנו את 50% הערכים המוחלטים הקטנים וקיבלנו את הפלט הבא :

2.4 IDCT with 50% smallest

ניתן לראות שקיבלנו תמונה באיכות טובה בתוספת רעש זניח שלא קיים בתמונה המקורית.
הצלחנו לקבל תמונה באיכות טובה למרות שנפטרנו מחלק גדול מהמידע.

.2.5

נאפס את הטווחים עבור ערכי a שונים ונקבל את הפלטים הבאים :



ניתן לראות שעבור $a \leq 0.2$ התמונה באיכות יחסית טובה עם רעש זניח, עבור $0.3 \leq a \leq 0.4$ התמונה עדיין באיכות טובה אבל כבר הרעש מתחיל מעט להפריע. עבור 0.5 הרעש כבר חזק.

כמובן שאין תשובה חד משמעית אילו ערכי a אנו רוצים מכיוון שזה מאוד תלוי מה רמת האיכות הנדרשת, אבל ערך המקסימלי שהייתי מגדיר על מנת שהתמונה תהיה ברורה עם רעש לא משמעותי מידי הוא a=0.4.

עבור ערך זה איפסנו 98.55% מהאלמנטים של dct.

.2.6

בתחילת השאלה ביצענו התמרת DCT וראינו שרוב המידע מצוי בתדרים הנמוכים לכן בהתחלה כשביצענו איפוס לערכים בצורה רנדומלית לא נתנו עדיפות לערכים אלה וכך קרה שאיפסנו ערכים בעלי רמת השפעה גדולה על התמונה.

לאחר מכן איפסנו 50% מהערכים הנמוכים כך שנתנו עדיפות לערכים בעלי ההשפעה ונפטרנו מהערכים שההשפעה שלהם הייתה יותר זניחה וכך שיפרנו משמעותית את איכות הדחיסה למרות שנפטרנו מאותה כמות של ערכים.

בסעיף 2.5 בדקנו את הדחיסה עבור ערכי a שונים. החציון של מטריצת הDCT הוא 0.0365 ובסעיף זה הערך המינימלי שלנו הוא 0.05 מה שמסביר את העובדה שאיכות התמונות בסעיף זה מלכתחילה פחות טובות מהאיכות בסעיף 2.4.

שאלה 3 - Wavelet Transform

3.1

נציג את התמונה ב grayscale אחרי נרמול:

.3.2

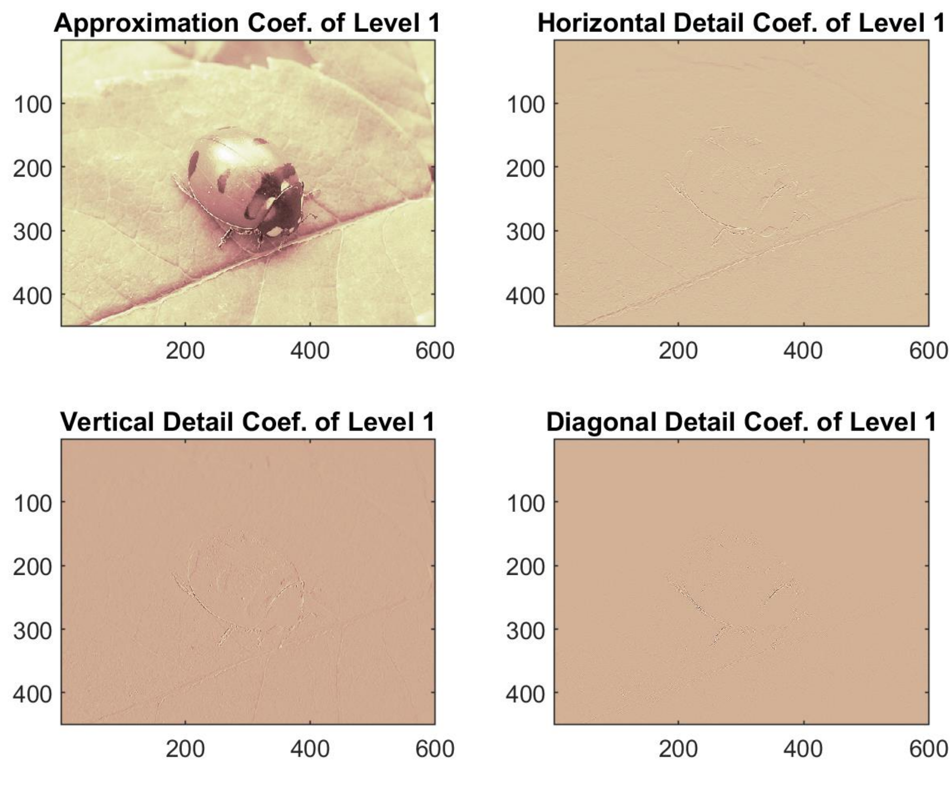
ביצענו פירוק wavelet ברמה 3 באמצעות שימוש בפונקציית המטלב wavedec2(), והשתמשנו ב
“haar”.

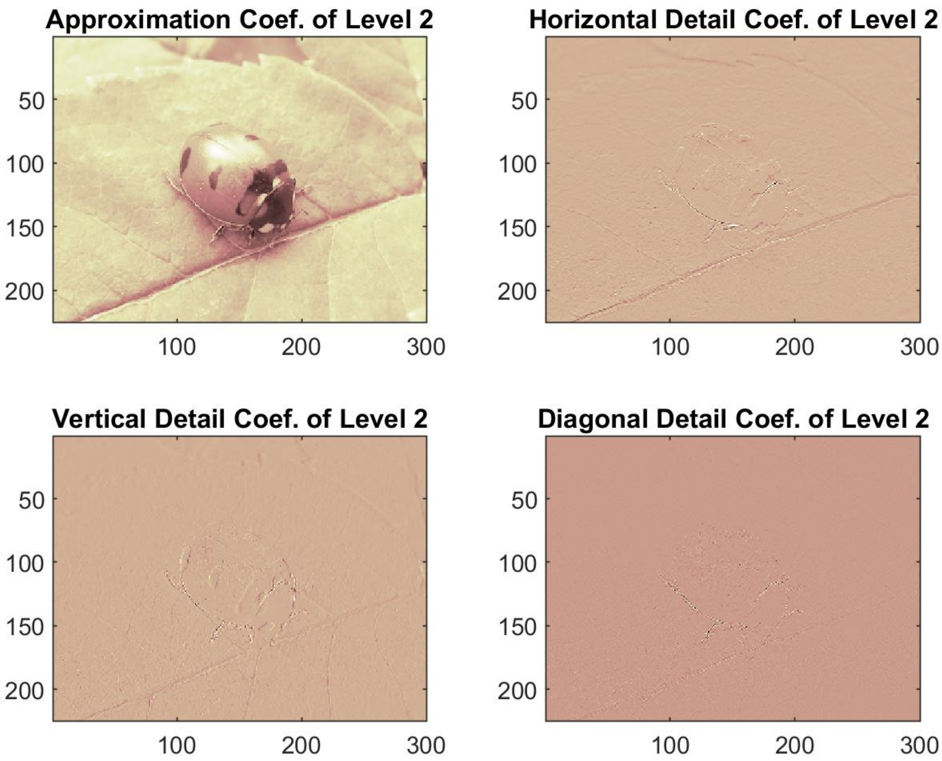
.3.3

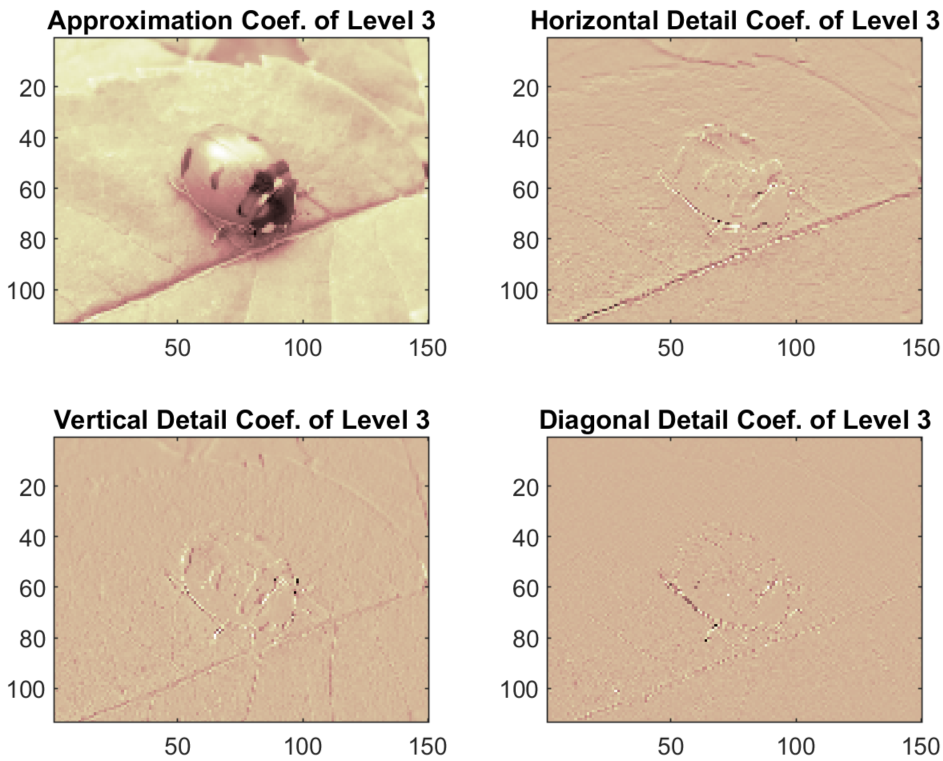
השתמשנו בפונקציות detcoef, appcoef על מנת למצוא את מקדמי הdetail וה-Approximation לרמות
1-3.

.3.4

במוצא קיבלנו את הפלטים הבאים עבור כל אחת מהרמות 1-3 :




Approximation Coef. of Level 2
Horizontal Detail Coef. of Level 2
Vertical Detail Coef. of Level 2
Diagonal Detail Coef. of Level 2


Approximation Coef. of Level 3
Horizontal Detail Coef. of Level 3
Vertical Detail Coef. of Level 3
Diagonal Detail Coef. of Level 3

.3.5

נסביר את התוצאות שקיבלנו אבל ראשית נסביר את המשמעות של כל מקדם עבור על רמה :

– A – Approximation

התמונה המכילה את ערכי התדר הנמוכים בשורות והעמודות (בעצם את רוב המידע של התמונה).

מתקבלת ע"י LPF על השורות והעמודות.

לעומת זאת יש את מקדם הdetail שמורכב מ3 המקדמים הבאים:

– H - horizontal

פירוק אורכי – HPF על העמודות ו LPF על השורות

V – Vertical

פירוק אנכי – HPF על השורות וLPF על העמודות

D – Diagonal.

פירוק אלכסוני – HPF על השורות והעמודות

אנו רואים שעבור כל רמה רוב המידע נמצא בתמונת ה - Aproximation, מה שהגיוני כי היא מכילה את המוצא של התדרים הנמוכים. עם זאת, אנו רואים שככל שרמת הפירוק עולה תמונת ה – Aproximation מעט מאבדת את הפוקוס שלה ולעומת זאת מתווסף מידע למקדמי ה – Details וככל שהרמה עולה ניתן לזהות בהן יותר מרכיבים מהתמונה.

ניתן לראות זאת בבירור עבור מקדם Diagonal שברמה הראשונה לא רואים בו מידע בכלל ולעומת זאת ברמה השלישית מזהים חלקים מהחיפושית.