

機器人學 project 2

0760037 林政碩

一、界面說明

開發平台：Matlab

如何執行：

- (1) 打開project2_cartesian.m(卡式座標軌跡規劃)或project2_joint.m(軸座標軌跡規劃)。
- (2) 按下執行。

二、程式架構說明

• 卡式座標軌跡規劃：

1. 找到加速度的點 A_p ，並算出B到 A_p 及B到C的運動矩陣，他們的參數值則分別是 ΔB 及 ΔC 。
2. 套用公式算出每一個時間點的位置、速度及加速度。
3. 畫圖。

在 calD1.m 函式中，輸入起點位置的矩陣及終點位置的矩陣，會算出運動矩陣 D 的六個參數： $x, y, z, \phi, \theta, \phi$ 。給定一個 r ($0 \leq r \leq 1$)，將 r 及六個參數代到 calDr.m 函式中，則可以計算出在此位置的運動矩陣 D 的值。

• 軸座標軌跡規劃：

1. 利用逆向運動學(backward_kinematic.m 第一次專題結果)，算出A、B、C三點的六軸角度

$$\begin{aligned}\theta A &= [78.6901 \quad -21.9802 \quad -30.5766 \quad 52.5567 \quad 168.6901 \quad 0] \\ \theta B &= [45.0000 \quad 12.2384 \quad -88.9084 \quad 76.6700 \quad 135.0000 \quad 90.0000] \\ \theta C &= [-140.1944 \quad 2.1035 \quad -87.5413 \quad 85.4378 \quad 39.8056 \quad 90.0000]\end{aligned}$$

2. 找到準備加速度時各軸的角度 θ_{Ap} ，並可計算出 ΔB 及 ΔC 。
3. 套用公式算出每一個時間點的位置、速度及加速度。
4. 畫圖。

在 forward_kinematic.m 函式中(第一次專題結果)，給予六軸的角度，算出對應的座標矩陣。

三、數學運算說明

在作業 4 中，我們已經證明了在六個邊界條件下，利用四次多項式所求得的位置、速度以及加速度如下；

$$q = \left[(\Delta C \frac{t_{acc}}{T_1} + \Delta B)(2 - h)h^2 - 2\Delta B \right] h + B + \Delta B$$

$$\dot{q} = \left[(\Delta C \frac{t_{acc}}{T_1} + \Delta B)(1.5 - h)2h^2 - \Delta B \right] \frac{1}{t_{acc}}$$

$$\ddot{q} = (\Delta C \frac{t_{acc}}{T_1} + \Delta B)(1 - h) \frac{3h}{t_{acc}^2}$$

在 $-t_{acc} \leq t \leq t_{acc}$ 時， $h = t + t_{acc}/2t_{acc}$ 。而當 $t \geq t_{acc}$ 後，位置、速度、加速度簡化為：

$$q = \Delta C h + B$$

$$\dot{q} = \frac{\Delta C}{T_1}$$

$$\ddot{q} = 0$$

$$h = \frac{t}{T_1}$$

• 卡式座標軌跡規劃

定義一個運動矩陣D使得運動過程中末端點座標T可由下列方法求得：

$$T = POS1 \times D(r), 0 \leq (r = t/T) \leq 1, 0 \leq t \leq T$$

已知 $r = 1$ 時 $T = POS2$ ，則

$$D(1) = POS1^{-1} \times POS2 = \begin{bmatrix} n_1 \cdot n_2 & n_1 \cdot o_2 & n_1 \cdot a_2 & n_1 \cdot (p_2 - p_1) \\ o_1 \cdot n_2 & o_1 \cdot o_2 & o_1 \cdot a_2 & o_1 \cdot (p_2 - p_1) \\ a_1 \cdot n_2 & a_1 \cdot o_2 & a_1 \cdot a_2 & a_1 \cdot (p_2 - p_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

而假設此運動矩陣是由一個平移及兩個旋轉所組成，則

$$D(r) = \begin{bmatrix} ? & -S(r\phi)[S\psi^2 V(r\theta) + C(r\theta)] + C(r\phi)[-S\psi C\psi V(r\theta)] \\ ? & -S(r\phi)[-S\psi C\psi V(r\theta)] + C(r\phi)[C^2\psi V(r\theta) + C(r\theta)] \\ ? & -S(r\phi)[-C\psi S(r\theta)] + C(r\phi)[-S\psi S(r\theta)] \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\psi S(r\theta) & rx \\ S\psi S(r\theta) & ry \\ C(r\theta) & rz \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第一行的值可由第二行對第三行做外積而得。代入 $r = 1$ ，比較兩個矩陣後，可以求得：

$$x = n_1 \cdot (p_2 - p_1)$$

$$y = o_1 \cdot (p_2 - p_1)$$

$$z = a_1 \cdot (p_2 - p_1)$$

$$\psi = \tan^{-1} \frac{o_1 \cdot a_2}{n_1 \cdot a_2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{(n_1 \cdot a_2)^2 + (o_1 \cdot a_2)^2}}{a_1 \cdot a_2}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{-S\psi C\psi V\theta(n_1 \cdot n_2) + (C\psi^2 V\theta + C\theta)(o_1 \cdot n_2) - S\psi S\theta(a_1 \cdot n_2)}{-S\psi C\psi V\theta(n_1 \cdot o_2) + (C\psi^2 V\theta + C\theta)(o_1 \cdot o_2) - S\psi S\theta(a_1 \cdot o_2)}$$

POS1 代入 A 點，POS2 代入 B 點， $r = \frac{t_{acc}}{T_1}$ ，即可求出 $D(r)$ ， $A_p = A * D(r)$ 。

POS1 代入 B 點，POS2 代入 A_p 點，即可求出 ΔB ，POS1 代入 B 點，POS2 代入 C 點，即可求出 ΔC ，用這些值代入最上面的式子，即可求出 x, y, z 在各個時間點的位置、速度及加速度。

• 軸座標軌跡規劃

在軸坐標系中，加速度點的六軸角度可以簡單的由 θ_A 和 θ_B 的值做內插求得，即：

$$\theta_{Ap} = \frac{t_{acc}}{T_1}(\theta_B - \theta_A) + \theta_A$$

算出 θ_{Ap} 則可以直接求出 ΔB 及 ΔC ：

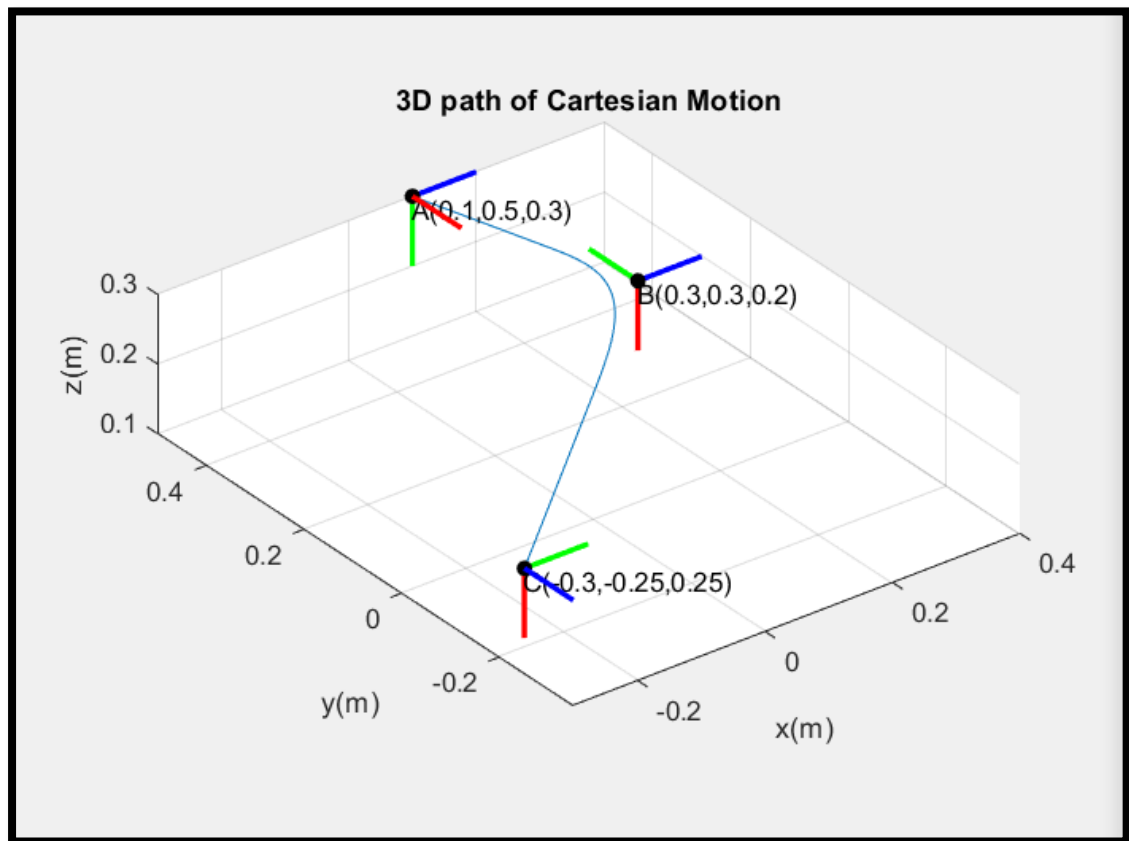
$$\Delta B = \theta_{Ap} - \theta_B$$

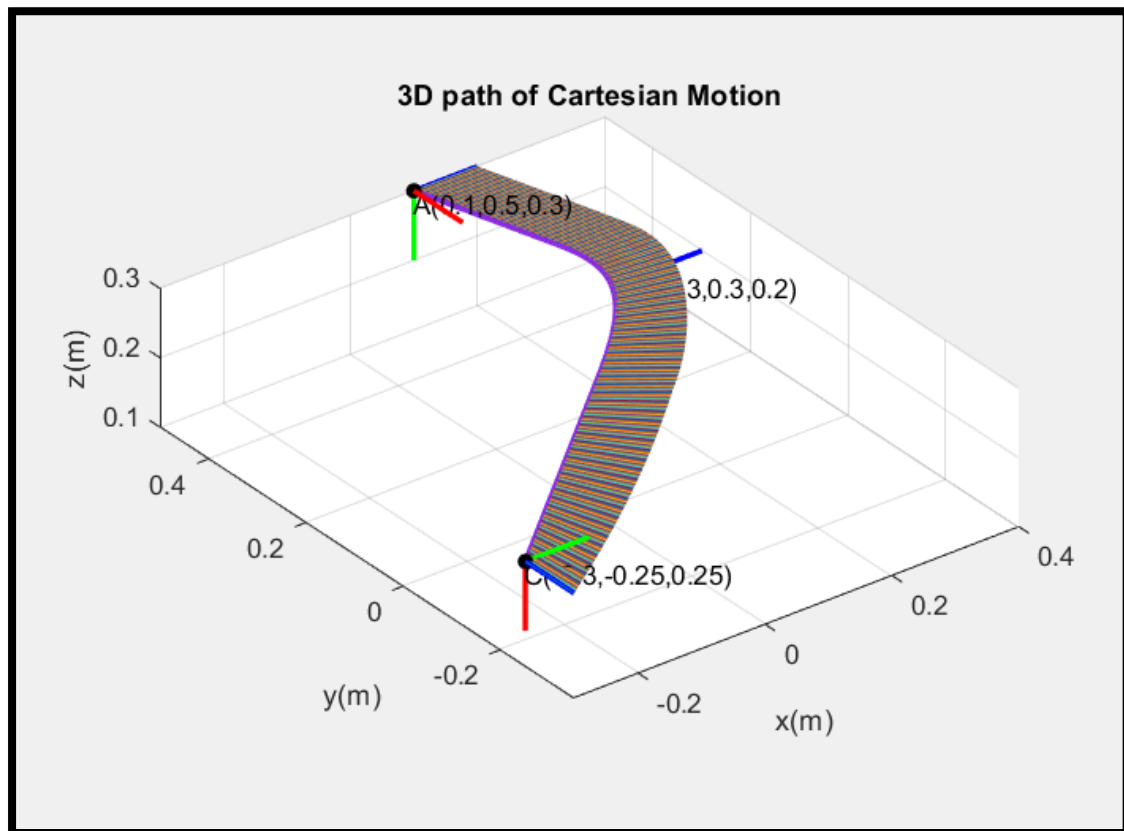
$$\Delta C = \theta_C - \theta_B$$

代入最上面的式子，及可求出運動時 $\theta_1 \sim \theta_6$ 在各個時間點的角度、角速度及角加速度值。

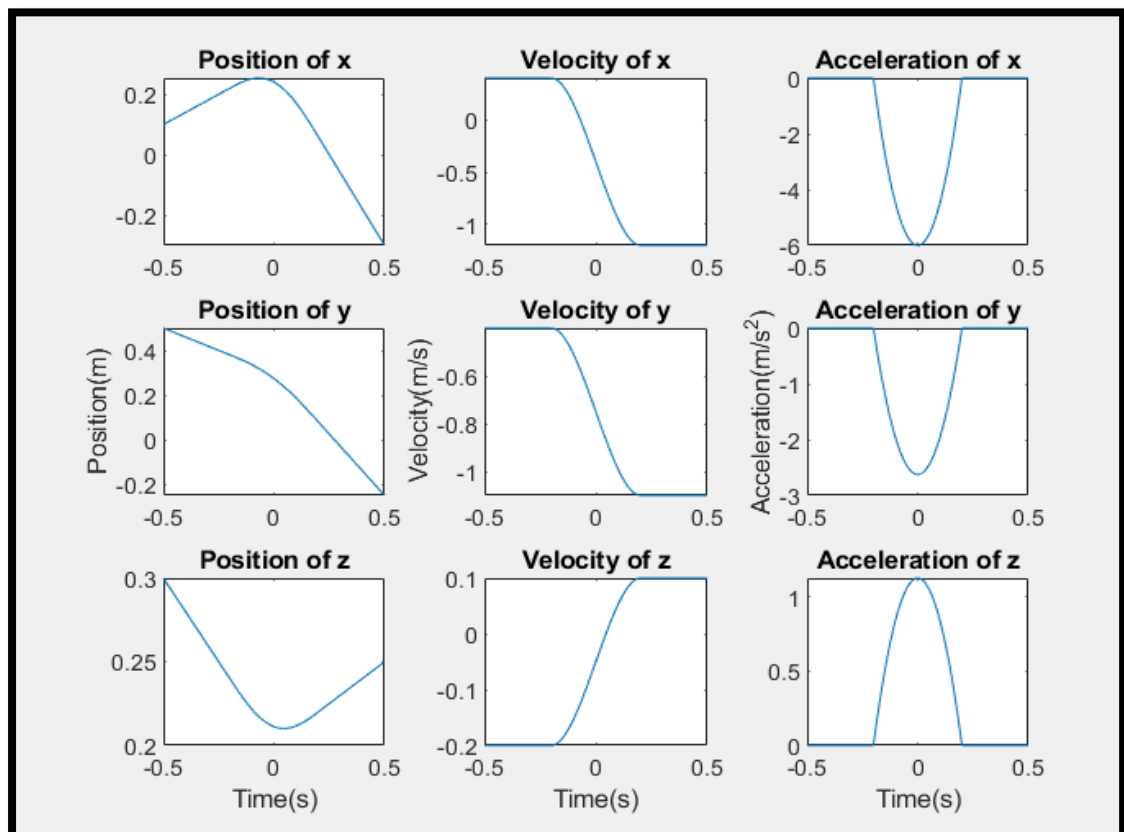
四、軌跡規劃結果圖

• 卡式座標軌跡規劃圖

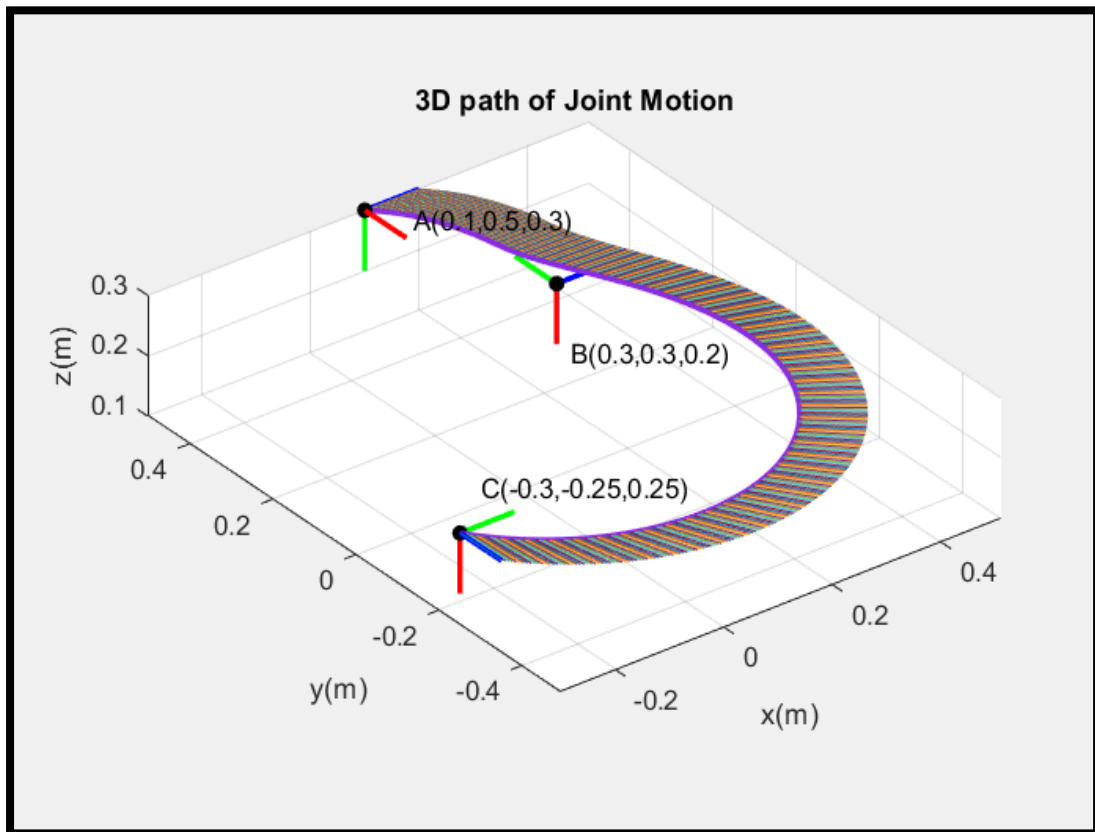
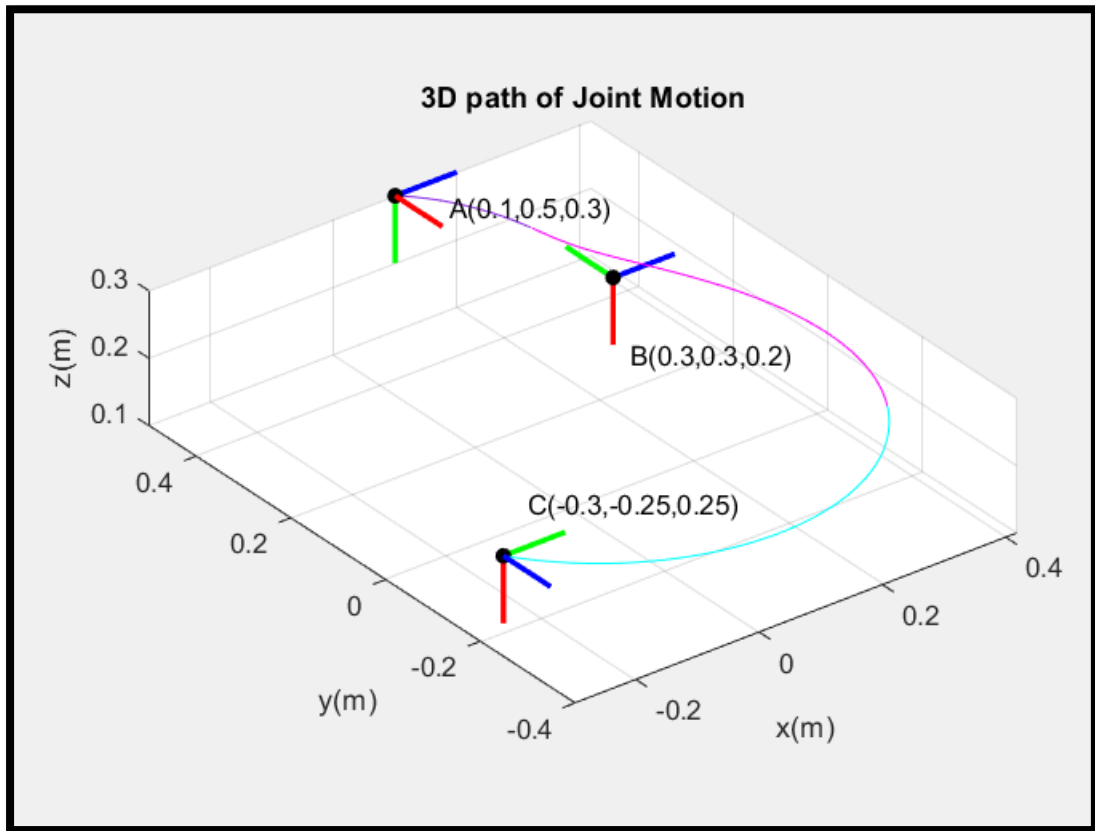




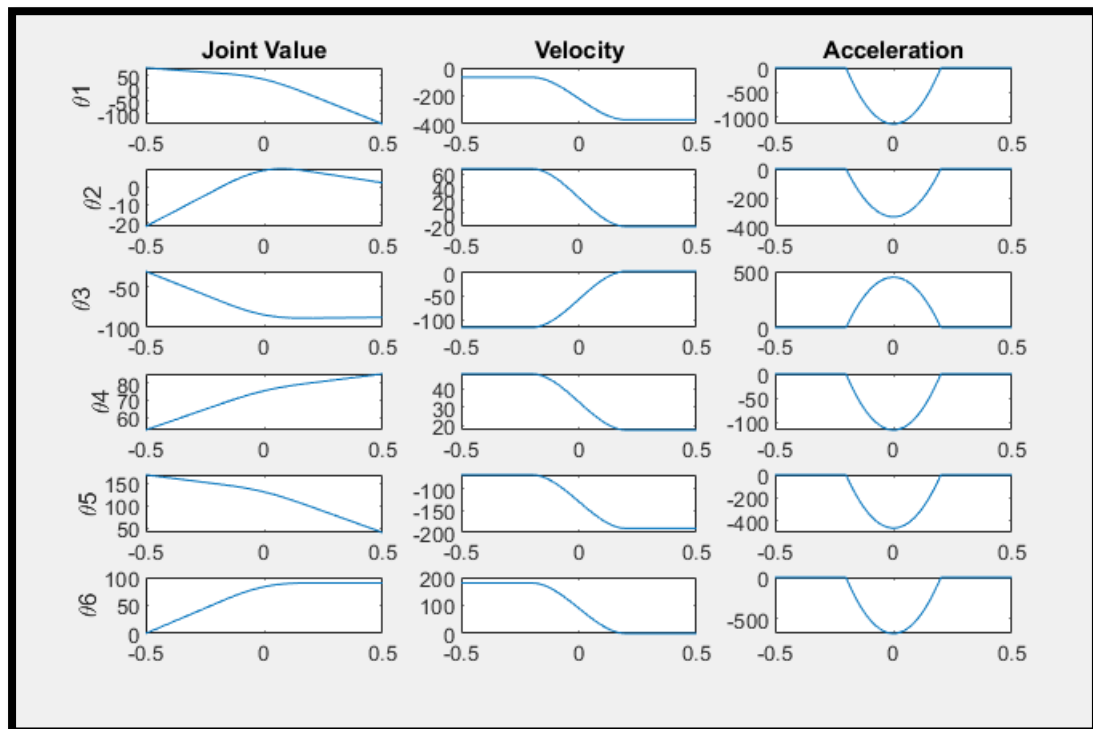
- 末端點(x, y, z)位置、速度、加速度之變化圖



• 軸座標軌跡規劃曲線圖



- 六軸角度、角速度、角加速度變化



五、卡式座標及軸座標軌跡規劃的優缺點

- 卡式座標：

優點：路徑會是直線較為簡單。

缺點：需要計算反向運動學，計算複雜，且會有奇異點發生。

- 軸座標：

優點：計算較為簡單，不會有奇異點的問題。

缺點：路徑會彎彎曲曲的較為複雜。