

张量局部 Fisher 判别分析的人脸识别

郑建伟¹ 王万良¹ 姚晓敏¹ 石海燕¹

摘要 子空间特征提取是人脸识别中的关键技术之一, 结合局部 Fisher 判别分析技术和张量子空间分析技术的优点, 本文提出了一种新的张量局部 Fisher 判别分析 (Tensor local Fisher discriminant analysis, TLFDA) 子空间降维技术. 首先, 通过对局部 Fisher 判别技术进行分析, 调整了其类间散度目标泛函, 使算法的识别性能更高且时间复杂度更低; 其次, 引入张量型降维技术对输入数据进行双边投影变换而非单边投影, 获得了更高的数据压缩率; 最后, 采用迭代更新的方法计算最优的变换矩阵. 通过 ORL 和 PIE 两个人脸库验证了所提算法的有效性.

关键词 人脸识别, Fisher 判别分析, 维数约简, 局部结构保持, 判别信息

引用格式 郑建伟, 王万良, 姚晓敏, 石海燕. 张量局部 Fisher 判别分析的人脸识别. 自动化学报, 2012, 38(9): 1485–1495

DOI 10.3724/SP.J.1004.2012.01485

Face Recognition Using Tensor Local Fisher Discriminant Analysis

ZHENG Jian-Wei¹ WANG Wan-Liang¹ YAO Xiao-Ming¹ SHI Hai-Yan¹

Abstract One of the key issues of face recognition is to extract the subspace features of face images. A new subspace dimensionality reduction method is proposed named as tensor local Fisher discriminant analysis (TLFDA), which benefits from two techniques, i.e., tensor based method and local Fisher discriminant analysis. Firstly, local Fisher discriminant analysis is improved for better recognition performance and reduced time complexity. Secondly, tensor based method employs two-sided transformation rather than single-sided one, and yields a higher compression ratio. Finally, TLFDA uses an iterative procedure to calculate the optimal solution of two transformation matrices. Experiment results on the ORL and PIE face databases show the effectiveness of the proposed method.

Key words Face recognition, Fisher discriminant analysis, dimensionality reduction, local structure preservation, discriminant information

Citation Zheng Jian-Wei, Wang Wan-Liang, Yao Xiao-Ming, Shi Hai-Yan. Face recognition using tensor local Fisher discriminant analysis. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(9): 1485–1495

有监督的特征提取已经在机器视觉和模式鉴别领域获得了极大的成功, 其中应用最为广泛的是子空间分析算法. 针对应用对象的不同, 这些算法可以概括地分成三类, 即向量型数据降维分析、矩阵型数据降维分析和张量型数据降维分析. 面向分类的子空间分析基本思想是将高维空间 (特征空间) 中的数据投影至低维子空间 (投影空间), 使投影后的数据能够具有更紧凑的类内分布特性和尽量清晰的类间判别散度.

早期的子空间分析算法主要以向量型数据降维为主. 以人脸识别应用为例, 向量型算法首先需要将二维图像转变成一维向量, 然后再进行降维分析. 典

型的算法包括线性 Fisher 判别 (Linear Fisher discriminant analysis, LFD)^[1] 和局部保持投影 (Locality preserving projection, LPP)^[2]. LFD 通过引入类别信息计算最佳投影方向, 在最大化数据类间散度的同时保证数据类内散度的最小化. LPP 则是以在投影空间中尽量保持原高维数据的局部近邻分布结构为宗旨进行降维分析. 上述两种算法中, LFD 仅仅能够挖掘数据的全局欧氏分布结构, 而 LPP 则只能挖掘数据的局部流形分布, Sugiyama^[3] 结合 LFD 和 LPP 的优点, 提出了局部 Fisher 判别分析 (Local Fisher discriminant analysis, LFDA), 能够在多簇分布和类间交叉的数据中获得更好的判别性能. Yan 等^[4] 通过引入谱图理论, 在类间判别和类内保持的基本思想下, 构建了统一的向量型数据降维框架并提出了边缘 Fisher 分析算法 (Marginal Fisher analysis, MFA). 在此框架下, 已有不少更新的算法提出, 包括局部 Spline 判别投影^[5]、稀疏嵌入分析^[6] 和正则化局部保持判别分析^[7] 等.

在应用于人脸识别时, 向量型数据降维技术存在着固有的缺陷: 二维图像转变成一维向量会导致数据空间信息的损失; 一维向量的维数过高导致计算

收稿日期 2011-07-04 录用日期 2012-02-20
Manuscript received July 4, 2011; accepted February 20, 2012
国家自然科学基金 (61070043), 浙江工业大学自然科学基金 (2011XY020) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61070043) and Natural Science Foundation of Zhejiang University of Technology (2011XY020)
本文责任编辑 封举富
Recommended by Associate Editor FENG Ju-Fu
1. 浙江工业大学计算机学院 杭州 310023
1. School of Computer, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023

量过高;类内散度矩阵往往具有奇异性等等。基于此,一些研究者提出直接以矩阵形式表达人脸图像数据进行子空间分析。Li 等^[8]提出以图像矩阵表达来扩展 LFD 至二维 LFD (2 dimensional LFD, 2DLFD), Yu^[9]将 LPP 扩展至 2DLPP,其中直接通过矩阵图像数据进行样本局部结构的构建。李乐等^[10]则采用局部流形保持的非负矩阵分解进行二维的人脸图像投影分类。实验结果表明,矩阵型数据降维算法在性能上优于向量型算法,且不易出现类内散度矩阵的奇异性。

上述 2D 子空间分析算法只对原始图像数据进行了单边降维变换,其缺点是投影后的数据仍具有较多冗余的特征系数。近来,不少研究者提出了张量的子空间分析技术^[11], He 等^[12]提出了张量子空间分析 (Tensor subspace analysis, TSA),通过双边变换进行样本数据的局部特征保持投影。Wang 等^[13]提出了双边 2DLFD (Bilateral 2DLFD, B2DLFD),实际上是一种张量 LFD (Tensor LFD, TLFD)。Yan 等^[4]则将 MFA 扩展成张量 MFA (Tensor MFA, TMFA)。此外, Zhang 等^[14]直接对 LFDA 进行了张量型扩展,虽然算法性能得到了一定的提升,但由于没有改进类内类间散度矩阵的结构,因此其计算量较大,不适于大样本场合。

本文采用张量子空间分析进行人脸识别应用,结合 LFDA 和 TSA 两种算法的优点,提出了一种新的张量局部 Fisher 判别分析 (Tensor local Fisher discriminant analysis, TLFDA) 算法,其优点包括:通过类间相似度提升了算法判别性能;通过张量表达获得了更高的数据降维能力,保持了更多的数据空间信息;样本的局部分布结构仍然得以保持。

本文其余部分的结构组织如下:第 1 节给出了子空间分析方法定义并简述了相关的 LFDA 算法和 TSA 算法;第 2 节提出了 TLFDA 算法并进行了复杂度分析;第 3 节通过 ORL 和 PIE 两个人脸图像库进行了算法最优参数确定和性能对比;第 4 节对本文的工作进行了总结并给出了后续工作展望。

1 相关工作

1.1 子空间分析相关定义

在基于张量的子空间分析中,给定 N 个训练数据,样本集合表达为

$$X = \{X_1^1, X_2^1, \dots, X_{N_1}^1, X_1^2, X_2^2, \dots, X_{N_2}^2, \dots, X_1^C, X_2^C, \dots, X_{N_C}^C\} \quad (1)$$

其中, $X_i^c \in \mathbf{R}^{I_1 \times I_2}$ 表示第 c 类数据中的第 i 个样本, C 是样本类别总数, N_c 是第 c 类数据的训练样本数,且满足 $N = N_1 + N_2 + \dots + N_C$ 。如果训练

集缺少样本类别信息,则式 (1) 表达为

$$X = \{X_1, X_2, \dots, X_N\} \quad (2)$$

相应的子空间变换即寻找最佳的投影矩阵 $U \in \mathbf{R}^{I_1 \times L_1}$ 和 $V \in \mathbf{R}^{I_2 \times L_2}$,将原数据投影至子空间:

$$Y_i = U^T X_i V \quad (3)$$

使得投影后的数据 $Y_i \in \mathbf{R}^{L_1 \times L_2}$ 具有最佳的类别判断能力,其中 $L_1 < I_1$ 和 $L_2 < I_2$ 是降维后的空间维数。

在基于向量的子空间分析中,数据 X_i^c 首先需要转换成向量形式 $\mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^{m \times 1}$,其中 $m = I_1 \times I_2$,样本集合表达为

$$X = \{\mathbf{x}_1^1, \mathbf{x}_2^1, \dots, \mathbf{x}_{N_1}^1, \mathbf{x}_1^2, \mathbf{x}_2^2, \dots, \mathbf{x}_{N_2}^2, \dots, \mathbf{x}_1^C, \mathbf{x}_2^C, \dots, \mathbf{x}_{N_C}^C\} \quad (4)$$

相应的子空间变换即寻找最佳的投影矩阵 $U \in \mathbf{R}^{m \times L_1}$,将原数据投影至子空间:

$$Y_i = U^T X_i \quad (5)$$

使得投影后的数据 $Y_i \in \mathbf{R}^{L_1 \times 1}$ 具有最佳的类别判断能力。

1.2 局部 Fisher 判别分析

FDA 是应用最为广泛的向量型维度约简技术之一,算法简单描述如下。定义 S_w 为类内散度矩阵, S_b 为类间散度矩阵:

$$S_w = \sum_{c=1}^C \sum_{i=1}^{N_c} \|\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_c\|^2 \quad (6)$$

$$S_b = \sum_{c=1}^C N_c \|\bar{\mathbf{x}}_c - \bar{\mathbf{x}}\|^2 \quad (7)$$

其中, $\|\mathbf{x}\|^2$ 代表 \mathbf{x} 的欧氏范数, $\bar{\mathbf{x}}_c = \sum_{i=1}^{N_c} \mathbf{x}_i$ 是第 c 类数据的均值向量, $\bar{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i$ 是所有训练数据的均值向量。FDA 最佳投影矩阵可通过式 (8) 计算得到:

$$U_{\text{FDA}} = \arg \max_{U \in \mathbf{R}^{m \times L_1}} \left[\frac{\text{tr}(U^T S_b U)}{\text{tr}(U^T S_w U)} \right] \quad (8)$$

LFDA 由 FDA 改进得到,首先将 S_w 和 S_b 变形为^[3]

$$S_w = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N w_{ij}^w \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2 \quad (9)$$

$$S_b = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N w_{ij}^b \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2 \quad (10)$$

$$w_{ij}^w = \begin{cases} \frac{1}{N_c}, & \text{if } c(\mathbf{x}_i) = c(\mathbf{x}_j) \\ 0, & \text{if } c(\mathbf{x}_i) \neq c(\mathbf{x}_j) \end{cases} \quad (11)$$

$$w_{ij}^b = \begin{cases} \frac{1}{N} - \frac{1}{N_c}, & \text{if } c(\mathbf{x}_i) = c(\mathbf{x}_j) \\ \frac{1}{N}, & \text{if } c(\mathbf{x}_i) \neq c(\mathbf{x}_j) \end{cases} \quad (12)$$

其中, $c(\mathbf{x}_i)$ 表示样本 \mathbf{x}_i 所属的类别. 然后, 通过引入 LPP 的局部保持思想, 分别将 S_w 和 S_b 扩展成局部类内散度矩阵和局部类间散度矩阵, 即保持式 (9) 和式 (10) 形式不变, 调整 w_{ij}^w 和 w_{ij}^b 为

$$w_{ij}^w = \begin{cases} \frac{A_{ij}}{N_c}, & \text{if } c(\mathbf{x}_i) = c(\mathbf{x}_j) \\ 0, & \text{if } c(\mathbf{x}_i) \neq c(\mathbf{x}_j) \end{cases} \quad (13)$$

$$w_{ij}^b = \begin{cases} A_{ij} \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N_c} \right), & \text{if } c(\mathbf{x}_i) = c(\mathbf{x}_j) \\ \frac{1}{N}, & \text{if } c(\mathbf{x}_i) \neq c(\mathbf{x}_j) \end{cases} \quad (14)$$

其中, A_{ij} 表示样本 \mathbf{x}_i 和 \mathbf{x}_j 之间的相似度, 一般采用热核函数计算得到, 即:

$$A_{ij} = \exp \left(-\frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2}{t} \right) \quad (15)$$

其中, t 称为热核参数, 用于调整样本间的距离值. 最后, LFDA 的最佳投影矩阵求解仍然保持式 (8) 的形式不变. 经过上述调整后, LFDA 在继承 FDA 的全局欧氏判别能力的同时, 又融入了局部流形保持思想, 不仅获得了分类性能的提升, 而且能够更好地适应多种不同类型的训练样本, 包括多簇分布和具有类间交叉分布的各种数据.

1.3 张量子空间分析

TSA 是一种不考虑鉴别信息的张量型降维技术, 与 LPP 相似, TSA 旨在以保持数据局部结构为目标进行子空间挖掘. 根据图嵌入框架理论^[4], 可得相应的目标泛函为

$$\min_{U,V} \sum_{i,j=1}^N A_{ij} \|U^T X_i V - U^T X_j V\|_F^2 \quad (16)$$

其中, $\|X\|_F^2$ 指代矩阵 X 的 Frobenius 范数, A_{ij} 在此表示矩阵数据间的相似度, 形式与式 (15) 一致. 式 (16) 表示原训练数据中的近邻数据对在投影后仍能保持近邻特性. 此外, 为优化投影空间的全局离散

度, TSA 对训练样本的全局流形方差进行了最大化:

$$\max_{U,V} \sum_{i=1}^N D_{ii} \|U^T X_i V\|_F^2 \quad (17)$$

其中, $D_{ii} = \sum_{j=1}^N A_{ij}$. 通过简单的代数变换, 式 (16) 和式 (17) 整合得出的最终目标泛函为

$$\min_{U,V} \frac{\text{tr}[V^T (Du - Wu) V]}{\text{tr}(V^T Du V)} \quad (18)$$

$$\min_{U,V} \frac{\text{tr}[U^T (Dv - Wv) U]}{\text{tr}(U^T Dv U)} \quad (19)$$

其中,

$$Dv = \sum_{i=1}^N D_{ii} X_i V V^T X_i^T$$

$$Wv = \sum_{i,j=1}^N A_{ij} X_i V V^T X_j^T$$

$$Du = \sum_{i=1}^N D_{ii} X_i U U^T X_i^T$$

$$Wu = \sum_{i,j=1}^N A_{ij} X_i U U^T X_j^T$$

通过式 (18) 和式 (19), 当给定 V 时, 最优投影矩阵 U 可通过以下泛化特征值计算方式得到:

$$(Dv - Wv)u = \lambda Dvu \quad (20)$$

类似地, 当给定 U 时, 最优 V 矩阵的计算方式为

$$(Du - Wu)v = \lambda Duv \quad (21)$$

根据上述分析, 最终 U 和 V 可通过迭代交替的进行式 (20) 和式 (21) 的求解获得.

2 张量局部 Fisher 判别分析

2.1 问题描述

对比 FDA 算法, 上一节所述的 LFDA 虽然获得了性能的提升, 但仍然存在几个明显的缺陷:

1) 经过调整后, LFDA 中的 S_w 和 S_b 都需要 $2N$ 次叠加计算得到, 其中 S_w 在 FDA 中是通过 N 次叠加计算得到, 考虑到 S_w 矩阵中包含大量的零元素, 因此其计算复杂度并未显著增加. 然而, FDA 的 S_b 仅需要 C 次加和即可获取, 其中 $C \ll 2N$. 并且 S_b 并非稀疏矩阵, 因此, 随着训练样本的增加, 在 LFDA 中 S_b 的计算量很大.

2) 通过式 (13) 和式 (14) 可见, LFDA 的主要思想是在 FDA 的基础上引入类内近邻数据相似度因子 A_{ij} , 然而, LFDA 并未考虑类间数据的近邻关系. 因此, 算法性能仍有提升空间.

3) LFDA 是一种向量型数据降维技术, 在向量化过程中会导致数据空间信息的损失, 有必要将之扩展为张量型降维算法.

针对缺陷 1) 和缺陷 2), 通过引入 2DLPP 的思想^[9], 可将 LFDA 中的 S_b 进一步调整为

$$S_b = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^C A_{ij} \|\bar{\mathbf{x}}_i - \bar{\mathbf{x}}_j\|^2 \quad (22)$$

即以各类数据的中心作为类间散度矩阵构建的基础, 其加和次数为 $2C$, 计算量远小于 LFDA 中的相应操作. 而且, 不同类别的数据中心相似度也已通过 A_{ij} 进行反映, 类内近邻关系则仍然通过 S_w 构建.

针对缺陷 3), 可通过 TSA 的形式将 LFDA 扩展成张量型算法. 本文主要面向人脸识别应用, 因此采用二阶张量进行相应操作. 首先依式 (3) 和式 (9) 构建张量类内近邻保持的目标子泛函:

$$\min \sum_{i,j=1}^N w_{ij}^w \|Y_i - Y_j\|_F^2 \quad (23)$$

类似地, 通过式 (3) 和式 (22) 构建张量类间散度最大的目标子泛函:

$$\max \sum_{i,j=1}^C A_{ij} \|\bar{Y}_i - \bar{Y}_j\|_F^2 \quad (24)$$

依据矩阵乘性规则^[15], 整合上述式 (23) 和式 (24) 两个规划问题后可得最终的目标泛函为

$$\max \frac{\sum_{i,j=1}^C A_{ij} \|\bar{Y}_i - \bar{Y}_j\|_F^2}{\sum_{i,j=1}^N w_{ij}^w \|Y_i - Y_j\|_F^2} \quad (25)$$

2.2 最佳投影矩阵求解

引入式 (3) 二阶张量投影方式, 目标泛函 (25) 转变为

$$\max \frac{\sum_{i,j=1}^C A_{ij} \|U^T \bar{X}_i V - U^T \bar{X}_j V\|_F^2}{\sum_{i,j=1}^N w_{ij}^w \|U^T X_i V - U^T X_j V\|_F^2} \quad (26)$$

通过最大化式 (26), 可以解得 U 和 V 两个最优投影矩阵. 首先, 在给定 U 的前提下, 式 (26) 的分母部分可以变形为

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^N w_{ij}^w \|Z_i V - Z_j V\|_F^2 = \\ & \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N w_{ij}^w \text{tr}((Z_i V - Z_j V)^T (Z_i V - Z_j V)) = \\ & \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ V^T \left[\sum_{i,j=1}^N w_{ij}^w (Z_i - Z_j)^T (Z_i - Z_j) \right] V \right\} = \\ & \text{tr} \left\{ V^T \left\{ \sum_{i,j=1}^N [(Z_i)^T Z_i - (Z_i)^T Z_j] w_{ij}^w \right\} V \right\} = \\ & \text{tr} \left\{ V^T \left[\sum_{i=1}^N (Z_i)^T Z_i \sum_{j=1}^N w_{ij}^w - \sum_{i,j=1}^N (Z_i)^T Z_j \times w_{ij}^w \right] V \right\} = \\ & \text{tr} \left\{ V^T [P_U^w [(D - W) \otimes I_{L1}] \times P_U^{wT}] V \right\} = \\ & \text{tr}(V^T S_U^w V) \end{aligned} \quad (27)$$

其中为简化代数运算以 Z_i 代替 $U^T X_i$, 运算符号 \otimes 指代矩阵克罗内克积, W 是样本近邻相似度矩阵, 其元素由 w_{ij}^w 组成, $S_U^w = P_U^w [(D - W) \otimes I_{L1}] P_U^{wT}$, P_U^w 和对角矩阵 D 分别定义为

$$P_U^w = [(U^T X_1)^T, (U^T X_2)^T, \dots, (U^T X_N)^T] \quad (28)$$

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & & & \\ & D_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_{NN} \end{bmatrix} \quad (29)$$

类似地, 式 (26) 的分子部分可以变形为

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^C A_{ij} \|\bar{Z}_i V - \bar{Z}_j V\|_F^2 = \\ & \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^C \text{tr}[(\bar{Z}_i V - \bar{Z}_j V)^T (\bar{Z}_i V - \bar{Z}_j V)] A_{ij} = \\ & \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^C \text{tr}[V^T (\bar{Z}_i - \bar{Z}_j)^T (\bar{Z}_i - \bar{Z}_j) V] A_{ij} = \\ & \text{tr} \left\{ \sum_{i,j=1}^C V^T [(\bar{Z}_i)^T \bar{Z}_i - (\bar{Z}_i)^T \bar{Z}_j] V A_{ij} \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{tr} \left\{ \sum_{i=1}^C V^T [(\bar{Z}_i)^T \bar{Z}_i \sum_{j=1}^C A_{ij} - \right. \\ & \left. \sum_{i,j=1}^C (\bar{Z}_i)^T \times \bar{Z}_j A_{ij}] V \right\} = \\ & \text{tr} \left\{ V^T P_U^b [(B-A) \otimes I_{L_1}] \times P_U^{bT} V \right\} = \\ & \text{tr}(V^T S_U^b V) \end{aligned} \quad (30)$$

其中, \bar{Z}_i 代替 $U^T \bar{X}_i$, A 是类别中心的近邻相似度矩阵, 其元素由 A_{ij} 组成, $S_U^b = P_U^b [(B-A) \otimes I_{L_1}] P_U^{bT}$, P_U^b 和对角矩阵 B 分别定义为

$$P_U^b = [(U^T \bar{X}_1)^T, (U^T \bar{X}_2)^T, \dots, (U^T \bar{X}_C)^T] \quad (31)$$

$$B = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^C A_{1i} & & & \\ & \sum_{i=1}^C A_{2i} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{i=1}^C A_{Ci} \end{bmatrix} \quad (32)$$

综合上述分析, 当给定 U 时, 式 (26) 可以转变为针对 V 的目标泛函:

$$\max_V \frac{\text{tr}(V^T S_U^b V)}{\text{tr}(V^T S_U^w V)} \quad (33)$$

其中, V 可通过求解如下泛化特征值问题获得:

$$S_U^b V = \lambda S_U^w V \quad (34)$$

相应解 $V = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{L_2}]$ 是由式 (34) 求得的最大 L_2 个特征值所对应的特征向量组成. 同理, 在给定 V 的前提下, 式 (26) 可转变为针对 U 的目标泛函:

$$\max_U \frac{\text{tr}(U^T S_V^b U)}{\text{tr}(U^T S_V^w U)} \quad (35)$$

其中, $S_V^w = P_V^w [(D-W) \otimes I_{L_1}] P_V^{wT}$, $S_V^b = P_V^b [(B-A) \otimes I_{L_1}] P_V^{bT}$, P_V^w 和 P_V^b 分别定义为

$$P_V^w = [X_1 V, X_2 V, \dots, X_N V] \quad (36)$$

$$P_V^b = [\bar{X}_1 V, \bar{X}_2 V, \dots, \bar{X}_C V] \quad (37)$$

式 (35) 的具体推导和求解过程基本与给定 U 为前提时一致, 在此不予赘述.

根据上述分析可知, TLFDA 的最佳投影矩阵求解是 U 和 V 迭代更新的过程, 具体算法描述如算法 1 所示.

算法 1. TLFDA 算法

输入. 带类别信息的 N 个训练样本 X , 子空间的维数 L_1, L_2 以及最大迭代次数 Itr_{\max} .

输出. 投影矩阵 U 和 V .

初始化 U 为单位矩阵, 计算各类数据的平均向量, 计算各类数据间的相似度矩阵 A 和 W , 以及相应的 D 和 B .

for $t = 1$ **to** Itr_{\max}

 计算 S_U^b 和 S_U^w , 依式 (34) 计算最佳的 V ;

 计算 S_V^b 和 S_V^w , 依式 (35) 计算最佳的 U .

end for

2.3 特征提取及分类

根据求得的 U 和 V , 任意原输入样本可依式 (3) 投影至子空间, 如输入测试样本为 X_{test} , 其对应的投影空间数据为 $Y_{\text{test}} = U^T X_{\text{test}} V$.

本文采用最近邻法进行最后的数据类别判定, 其中的相似性测度采用欧氏距离:

$$d(Y_{\text{test}}, Y_i^c) = \|Y_{\text{test}} - Y_i^c\|_F^2 \quad (38)$$

如果 Y_{test} 与 Y_i^c 之间的距离为最小, 而 Y_i^c 隶属于第 c 类, 则 X_{test} 的类别被判定为 c .

2.4 时间复杂度分析

张量型算法需要进行迭代求解, 每一次迭代中, TLFDA 计算 S_U^b , S_U^w , S_V^b 和 S_V^w 分别消耗 $O\{C^2 L_1^2 (I_1 + 1)\}$, $O\{N^2 L_1^2 (I_1 + 1)\}$, $O\{C^2 L_2^2 (I_2 + 1)\}$ 和 $O\{N^2 L_2^2 (I_2 + 1)\}$ 的时间复杂度, 而两次特征分解分别需要用时 $O(I_1^3)$ 和 $O(I_2^3)$. 如果统一将 L_1, L_2, I_1, I_2 表达为 I , 则 TLFDA 的完整时间复杂度可以表达为 $O\{Itr_{\max}(C^2 + N^2)I^3\}$.

LFDA 计算 S_w 和 S_b 需要 $O(m^2 N)$ 的时间复杂度, 特征分解则需要 $O(m^3)$ 的计算用时, 因此最终的时间复杂度为 $O\{m^2(N+m)\}$. 虽然 LFDA 不需要通过迭代操作进行最优矩阵求解, 但由于 $m = I_1 \times I_2$, 并且当应用于人脸识别时, $N \ll m$ 是一个普遍存在的现象 (小样本问题), 因此, 总体来说 LFDA 的计算用时要远远高于 TLFDA.

3 实验与分析

3.1 数据集和实验配置

分别采用 ORL 和 PIE 两个经典的人脸数据库验证本文所提张量投影算法的性能.

ORL 人脸库 (<http://www.cam-orl.co.uk>) 包括 40 人共 400 张人脸灰度图像, 根据眼睛的位置配准图像, 使得所有图像的左眼中心和右眼中心都重合, 然后将图像裁剪且缩放为 32 像素 \times 32 像素. 图 1 是 ORL 人脸库的部分人脸样例.



图 1 ORL 人脸库部分样本示例

Fig. 1 Sample images from ORL database

PIE 人脸数据库 (<http://www.zjucadcg.cn/dengcai/Data>) 包含 68 人的 41 368 张人脸图像, 其中包括 13 个姿态变化和 43 个光照变化. 本文选取了其中 11 560 幅正面、光照各异的图像用于实验测试, 并将所有图像都调整至 32 像素 \times 32 像素, 每像素的灰度值在 0~255 范围之内, 个别图像样例如图 2 所示.



图 2 PIE 人脸库部分样本示例

Fig. 2 Sample images from PIE database

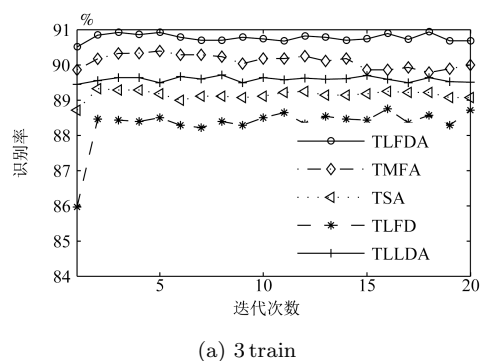
在具体实验过程中, 本文同时实现了 TLFDA、TLLDA、TSA、TLFD、TMFA 以及它们各自的向量型版本 LFDA、LPP、LFD 和 MFA 进行了对比

测试. 实验中热核函数的参数 t 取所有训练样本间距离的平均值. TMFA 与 MFA 需要构建类内近邻图和类间近邻图, 实验中采用类内近邻数为 $\min(5, wnc)$, 类间近邻数为 $\min(400, bnc)$, 其中 wnc 和 bnc 分别为同类训练总数和异类训练总数. TSA 和 LPP 也需要通过 k 近邻算法构建局部邻域图. 实验中采用近邻数为 $\min(10, wnc)$. 所有实验均在一台 Intel Core2 CPU 1.8 GHz 的 PC 机上进行, 操作系统为 Windows XP, 各算法都采用 Matlab 7.1 实现.

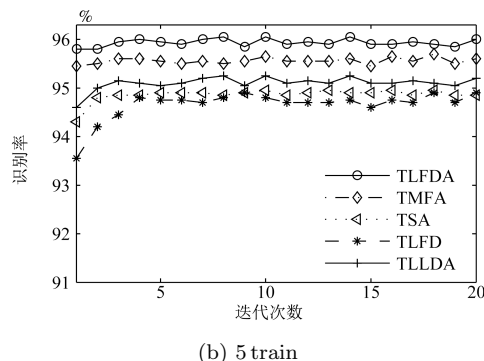
3.2 最佳迭代次数选择

张量型数据降维算法包括 TLFDA, TLLDA, TSA, TLFD 和 TMFA 都需要对 U 和 V 进行迭代更新操作以获得最佳的投影结果, 因此有必要确认最佳的迭代次数, 使得在获得理想效果的同时又不至于浪费冗余的计算量. 在 ORL 库中, 随机选择每个对象的 3 幅人脸图作为训练样本, 余下的数据都作为测试样本, 标记为 3 train, 同理可得到 5 train 的训练样本和测试样本. 类似地, 在 PIE 人脸库中, 选取 10 train 和 20 train 两种实验方式进行最佳迭代次数确定.

图 3 和图 4 分别是 ORL 和 PIE 中随迭代次数



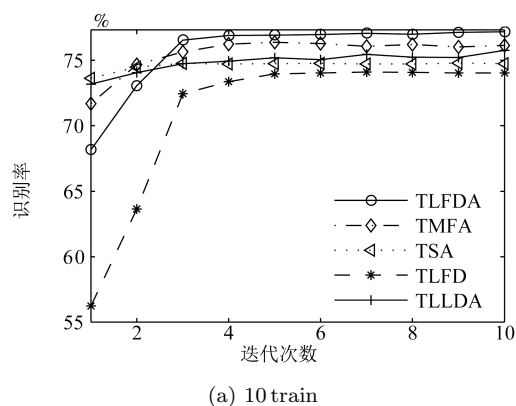
(a) 3 train



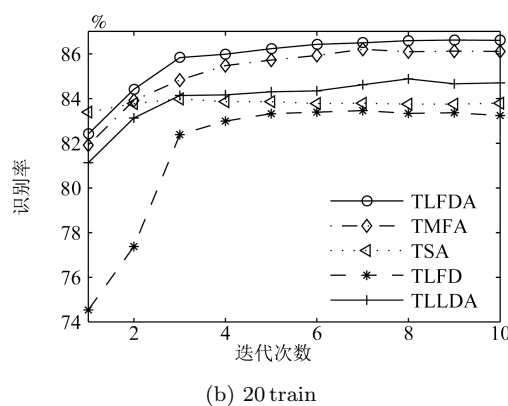
(b) 5 train

图 3 ORL 人脸库中不同迭代次数下的识别率变化

Fig. 3 The recognition rate on ORL under increasing iteration number



(a) 10 train



(b) 20 train

图 4 PIE 人脸库中不同迭代次数下的识别率变化

Fig. 4 The recognition rate on PIE under increasing iteration number

变化的人脸识别效果图, 其中所有数据都是通过 30 次随机样本选择实验并取平均值的结果, 各算法的投影维数选择统一为 $L_1 = L_2 = 10$. 从中可见, 张量式数据降维算法并不需要繁多的迭代操作, 一般只需要进行 3 次以上 U 和 V 的更新过程就可获得近似最优的识别结果, 其中在 ORL 3train 的实验中, TLFDA 仅仅通过两次迭代就达到了近似最优的识别率, 而在 PIE 20train 实验中, 五种张量型算法都在三次迭代后达到了最高的识别精度. 因此, 后续实验中, 统一将各张量型算法的迭代次数取为 3.

3.3 最优投影维度分析

针对不同的人脸数据集, 各种投影算法的最佳子空间维数是各异的. 本节主要分析在 ORL 和 PIE 中, 五种张量型算法和相应向量型算法的最佳低维维数选择. 图 5 是不同维数选取下, ORL 3train 和 5train 的相应识别效果. 图 6 则是 PIE 的 10train 和 20train 相应识别率. 与向量型算法不同, 张量型算法将数据降至 $L_1 \times L_2$, 为方便实验操作, 本文采用 $L_1 = L_2$ 的实验策略, 并在图中统一表达为 L . 此外, 考虑到张量型算法和向量型算法的子空间维数差异较大, 本文将两类算法的实验结果分开表示, 其中张量型算法以 T 为前缀进行标注, 而向量型算法以 V 为前缀进行标注.

从图 5 和图 6 可见, 几种张量型算法的子空间最佳维数较为集中, 无论是 ORL 还是 PIE 人脸库, 当降维至 $L_1 = L_2 \in [9, 13]$, 各张量算法都达到或近似达到了最高识别率. 相反, 向量型算法的子空间维数变化较大, 表 1 给出了所有算法所能达到的最高识别率以及相应的子空间维数 (括号中的数字). 很明显, 与张量型算法子空间维数较为集中的情形不同, 不同向量型算法的子空间最佳维数差异很大, 其中 LFD 算法受类间散度矩阵秩的影响, 其最佳维数一般为 $C - 1$. 因此, 在 ORL 和 PIE 中分别是 39 和 67. LFDA 从 LFD 演化而来, 其 ORL 和 PIE 的识别率也是在子空间维数达到约 38 后开始近似达到最优. 而 MFA 和 LPP 两个降维技术则需要更高的投影维数才能获得更佳识别率, 一般需要子空间维数达到 70 以上.

3.4 算法求解效率分析

本节主要将 TLFDA 与 TSA、TLLDA、MFA 和 LFDA 进行算法求解效率对比, TSA 的时间复杂度是 $O\{Itr_{\max}[\hat{F}_1^3 + \hat{F}_2^3 + N^2(I_1 \times I_2)^{3/2}]\}^{[16]}$, 每次迭代都需要计算 D_V , W_V , D_U 和 W_U 四个矩阵, 分别需要 $O(NL_1\hat{F}_1^2)$, $O(N^2L_1\hat{F}_1^2)$, $O(NL_2\hat{F}_2^2)$ 和 $O(N^2L_2\hat{F}_2^2)$ 的时间复杂度. 在实际应用过程中, 往往满足 $N \gg C$, $I_1 > L_1$ 且 $I_2 > L_2$. 因此, TSA 的计算

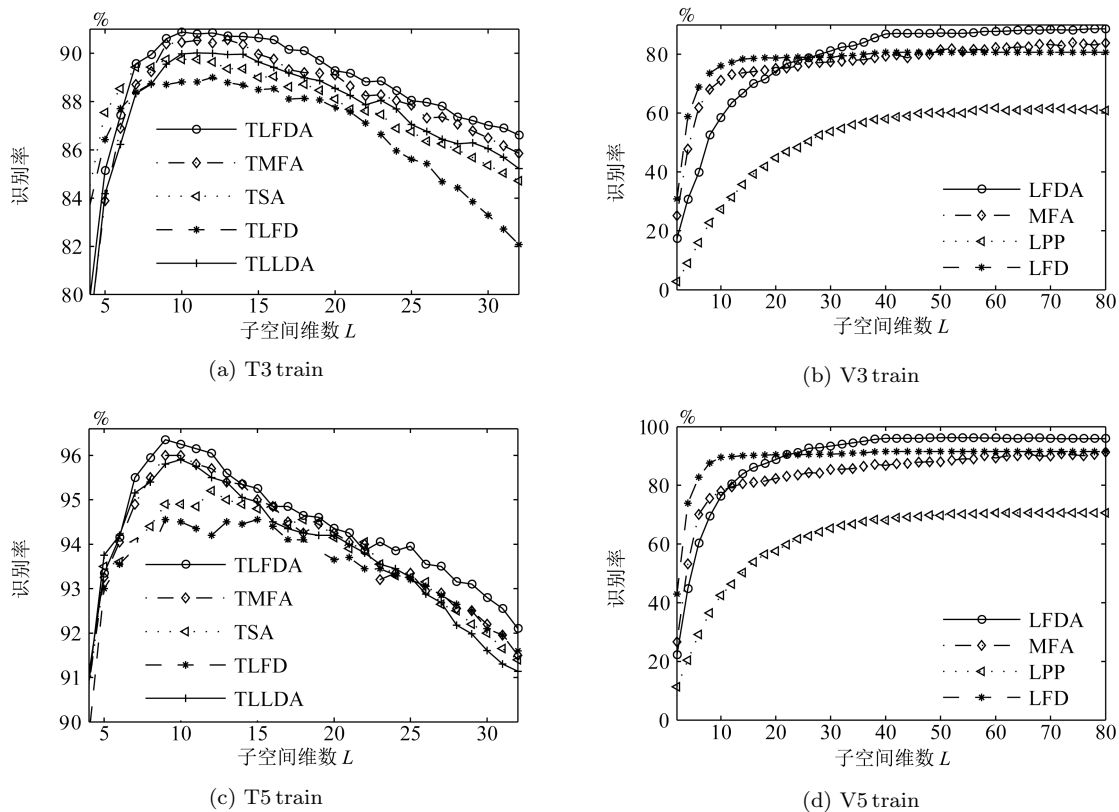


图 5 ORL 人脸库中不同子空间维数下的识别率变化

Fig. 5 The recognition rate on ORL under different reduced dimensionality

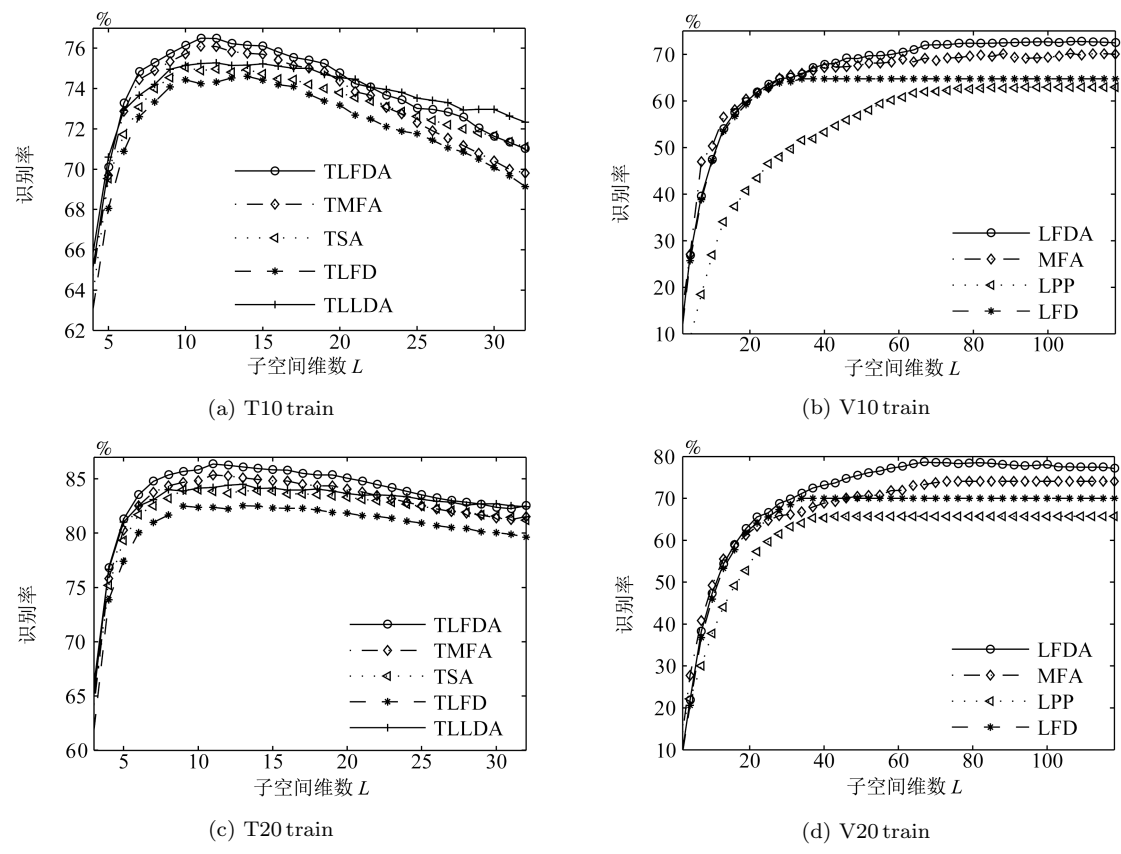


图 6 PIE 人脸库中不同子空间维数下的识别率变化

Fig. 6 The recognition rate on PIE under different reduced dimensionality

表 1 各种投影算法在 ORL 和 PIE 人脸库中取得的最佳识别率及相应维度

Table 1 Best recognition rate and subspace dimensionality of eight algorithms on ORL and PIE database

Algorithm	ORL 3 train	ORL 5 train	PIE 10 train	PIE 20 train
TLFDA	0.9089 (10)	0.9635 (9)	0.7650 (11)	0.8636 (11)
TLLDA	0.9002 (11)	0.9590 (10)	0.7528 (12)	0.8450 (12)
LFDA	0.8864 (68)	0.9625 (54)	0.7277 (68)	0.7868 (69)
TMFA	0.9057 (13)	0.9600 (9)	0.7610 (11)	0.8536 (11)
MFA	0.8396 (74)	0.9125 (80)	0.7023 (108)	0.7403 (75)
TSA	0.8976 (10)	0.9520 (12)	0.7506 (10)	0.8401 (9)
LPP	0.6173 (78)	0.7065 (59)	0.6298 (96)	0.6571 (105)
TLFD	0.8900 (12)	0.9455 (9)	0.7460 (14)	0.8252 (13)
LFD	0.8063 (39)	0.9155 (39)	0.6478 (67)	0.6998 (67)

代价高于 TLFDA. 相应的, TLLDA 的每次迭代都需要计算 $F_v^{(wc)}, H_v^{(wc)}, F_v^{(bc)}, H_v^{(bc)}$ 和 $F_u^{(wc)}, H_u^{(wc)}, F_u^{(bc)}, H_u^{(bc)}$ 八个矩阵^[14], 其中前四个矩阵 (或后四个矩阵) 的时间复杂度与 TSA 算法中的 D_V, W_V, D_U 和 W_U 基本一致, 因此 TLLDA 的总体运算量达到 TSA 的两倍以上. 图 7 和图 8 分别是五种算法在 ORL 和 PIE 中的求解时间对比. 依据上节子空间维数选择实验, 在 ORL 中, TLFDA、TLLDA 和 TSA 的子空间维数统一选为 $L_1 = L_2 = 9$, LFDA 和 MFA 的计算量主要是由原训练数据维数决定, 子空间维数并非决定因素, 实验中选择使识别率近似

最优的 $L_1 = 70$. 在 PIE 实验中, TLFDA、TLLDA 和 TSA 的子空间维数统一选为 $L_1 = L_2 = 10$, LFDA 和 MFA 中仍然采取 $L_1 = 70$. 向量型算法的计算量主要取决于原始样本维度, 受样本数据量的影响较小, 图 7 和图 8 所示实验结果也验证了该理论, 不管是 ORL 还是 PIE, LFDA 和 MFA 两者的运算时间较为相近, 且随着输入样本量的变化, 其运算量变化较小. 于此不同, 张量型算法的计算量更多取决于输入样本数量. 在 ORL 数据库中, 样本类别为 40, 而每类训练数最多是 8, 其训练总数最多是 320 个样本, 远小于向量型输入

维数的 1024, 因此在 ORL 中张量型算法的计算量明显低于向量型算法, 例如在 ORL 4train 实验中, LFDA 和 MFA 的训练时间分别为 17.9s 和 17.3s, 而张量型算法中耗时最长的 TLLDA 算法也仅需要 0.94s 的时间. 然而, 在 PIE 数据库中, 样本类别为 68, 则每类样本个数取 20 时, 训练总数即达到了 1360, 高于输入样本维度的 1024, 随着训练数的进一步增加, 张量型算法的求解效率明显低于向量型算法, 例如在 PIE 50train 实验中, TLFDA 和 LFDA 的训练时间分别为 63.87s 和 25.52s. 此外, 几个张量型算法的求解对比中, TLLDA 算法计算耗时最多, 尤其在 PIE 数据库中, 当选择训练样本数为每类 100 个时, 其训练时间达到了 474.9s. 而 TSA 也较 TLFDA 算法的计算效率更差, 在 ORL 中, 由于 N 值较小, 使得 LFDA 和 TSA 的计算用时基本一致, 但仍能看出 TSA 需要比 TLFDA 花费更多的求解时间, 在 6train 实验中, TLFDA 的求解用时为 0.50s, 而 TSA 则需要 0.71 的计算用时, 较 TLFDA 高出 42%. 而在 PIE 中, 随着训练数据量的增加, TSA 和 TLFDA 的求解时间差异则更为明显, 在 100train 实验中, TLFDA 算法的求解时间

为 250.4s, 而 TSA 则需要 287.5s, 较 TLFDA 高出 14.8%, 符合文中的算法复杂度分析结果.

3.5 各类降维算法性能对比

本节将 TLFDA、TLLDA、LFDA、TMFA、MFA、TSA、LPP、TLFD 和 LFD 进行综合的识别性能对比, 数据库仍然采用 ORL 和 PIE 两个人脸库, 实验结果如图 9 所示.

在 ORL 库中, 根据图 5 和表 2 实验分析结果, 统一将张量型算法投影至 $L_1 = L_2 = 9$, 而向量型算法就依据各自的最优识别率选择不同的子空间维数, 其中 LFDA 为 60, MFA 为 80, LPP 为 70, LFD 为 39, 图 9(a) 是识别率随训练样本数变化的曲线图, 表 2 给出了具体的数值对比, 加粗部分是最高识别率值.

从表 2 可见, 除 2train 实验之外, 其他各个实验中, TLFDA 都达到了最高的识别率. 在 2train 实验中, TLFD 的识别率达到了最高的 78.5%, 这主要是由于 TLFDA、TMFA 和 TSA 都需要类内近邻结构进行最终目标泛函的构建, 而每类两个样本用于训练时, 近邻数据过少, 不足以反映数据类内分布特性所致. 在所有结果中, 张量型算法都较相应的向量型算法效果更优, 例如 TLFDA 在不同训练数时识别率都较 LFDA 高 1% 左右, 与文中理论分析结论一致. 其余算法中, TMFA 的识别性能与 TLFDA 最为接近, 其中 5train 实验中两者识别率基本达到一致, 两者都兼顾考虑了数据分布的类内近邻和类间近邻结构. TSA 虽然考虑了全局散度最大化, 但其近邻保持过程中却并未引入类别信息, 而 LFD 虽然充分考虑了数据类别信息, 却忽略了样本近邻结构, 导致 TSA 和 TLFD 两者较上述 TLFDA 和 TMFA 两种算法性能略差. 所有算法中, 性能最差的是 LPP 降维技术, 在训练数据量较为充裕的 8train 实验中也只达到了 77.6% 的识别率, 进一步验证了类别信息对判别性能的重要性.

在 PIE 库中, 根据图 6 和表 1 实验分析结果, 统一将张量型算法投影至 $L_1 = L_2 = 11$, 向量型算法仍然依据各自的最优识别率选择不同的子空间维数, 其中 LFDA 为 68, MFA 为 80, LPP 为 90, LFD 为 67, 图 9(b) 是识别率随训练样本变化的曲线图, 表 3 给出了相应的数值对比, 加粗部分是最高识别率值.

从表 3 可见, 与 ORL 数据库相似, TLFDA 仅在最小训练数即 5train 时识别率没有达到最优, 较 TSA 低了 0.27%, 其他所有训练集中都达到了最高的识别率, 并且向量型算法也明显较张量型算法识别率更低, 其中识别效果最差的仍然是 LPP 算法, 再一次验证了张量型数据表达和类别信息对判别性能的重要性.

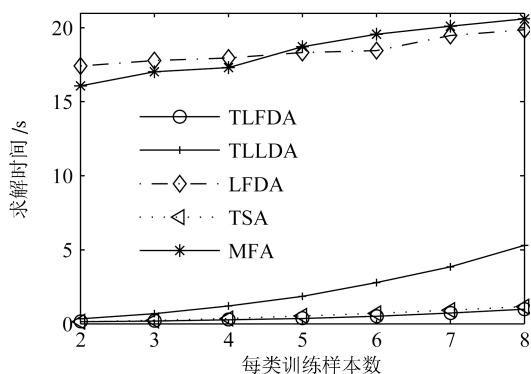


图 7 几种算法在 ORL 人脸库中求解时间对比

Fig. 7 Comparison of five algorithms with respect to time on ORL database

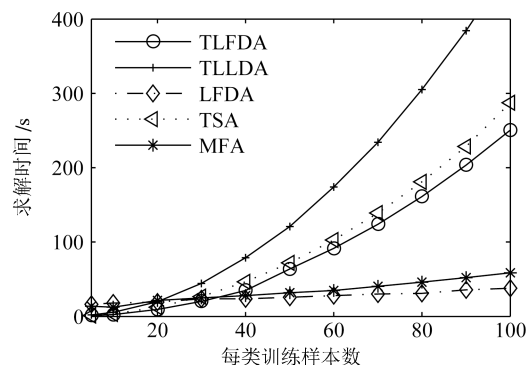


图 8 几种算法在 PIE 人脸库中求解时间对比

Fig. 8 Comparison of five algorithms with respect to time on PIE database

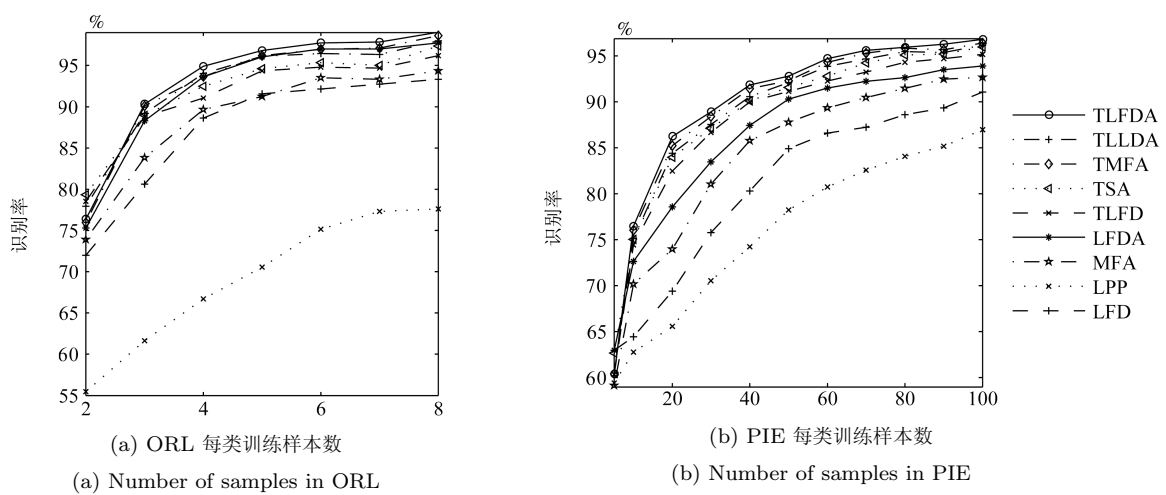


图 9 各种算法在 ORL 及 PIE 中识别率对比
Fig. 9 Comparison of recognition rate on ORL and PIE database

表 2 各种投影算法在 ORL 人脸库中不同训练样本数下的识别率对比

Table 2 Comparison of recognition rate under different training numbers on ORL database

训练数	TLFDA	TLLDA	LFDA	TMFA	MFA	TSA	LPP	TLFD	LFD
2 train	0.7636	0.7794	0.7531	0.7594	0.7391	0.7832	0.5546	0.7853	0.7199
3 train	0.9031	0.8918	0.8829	0.9010	0.8382	0.8895	0.6163	0.8879	0.8063
4 train	0.9492	0.9404	0.9363	0.9367	0.8967	0.9247	0.6670	0.9104	0.8863
5 train	0.9682	0.9610	0.9605	0.9672	0.9125	0.9460	0.7055	0.9435	0.9155
6 train	0.9772	0.9644	0.9700	0.9696	0.9350	0.9535	0.7516	0.9480	0.9216
7 train	0.9784	0.9633	0.9702	0.9712	0.9333	0.9502	0.7733	0.9467	0.9272
8 train	0.9901	0.9800	0.9775	0.9862	0.9437	0.9735	0.7760	0.9618	0.9331

表 3 各种投影算法在 PIE 人脸库中不同训练样本数下的识别率对比

Table 3 Comparison of recognition rate under different training numbers on PIE database

训练数	TLFDA	TLLDA	LFDA	TMFA	MFA	TSA	LPP	TLFD	LFD
5 train	0.6243	0.6053	0.6267	0.6043	0.5914	0.6270	0.5943	0.6035	0.6266
10 train	0.7648	0.7516	0.7264	0.7606	0.7018	0.7506	0.6279	0.7446	0.6444
20 train	0.8625	0.8442	0.7857	0.8525	0.7400	0.8400	0.6558	0.8247	0.6943
30 train	0.8893	0.8754	0.8349	0.8843	0.8106	0.8712	0.7056	0.8668	0.7578
40 train	0.9186	0.9057	0.8745	0.9146	0.8577	0.9010	0.7425	0.9000	0.8033
50 train	0.9282	0.9211	0.9032	0.9232	0.8778	0.9159	0.7824	0.9115	0.8493
60 train	0.9472	0.9389	0.9151	0.9432	0.8936	0.9281	0.8075	0.9229	0.8661
70 train	0.9563	0.9468	0.9226	0.9533	0.9047	0.9426	0.8259	0.9326	0.8725
80 train	0.9594	0.9549	0.9265	0.9584	0.9145	0.9511	0.8408	0.9431	0.8861
90 train	0.9630	0.9539	0.9352	0.9570	0.9248	0.9523	0.8518	0.9472	0.8936
100 train	0.9682	0.9617	0.9391	0.9642	0.9267	0.9600	0.8697	0.9517	0.9107

3.6 综合分析

通过上述一系列实验过程, 值得强调如下几点:

- 1) 张量型数据降维技术需要经过迭代训练过程, 但并不需要过多的迭代次数, 一般在 3 次迭代后即可达到近似最优的识别效率.
- 2) 在输入样本量较少时, 张量型算法的求解效率远高于向量型算法, 这主要是由于后者的计算量主要取决于原输入数据的维度所致. 随着训练样本

数量的增加, 尤其在 $N > m$ 时, 向量型算法的训练时间更短, 考虑到人脸识别应用中更多的是小样本场合, 因此, 张量型算法的运行方式更为有效.

- 3) 对比向量型算法, 张量型算法具有更高的识别性能、更小的计算量以及更易选择的子空间维数.
- 4) 缺少类别信息, LPP 并不适合于分类识别任务, 虽然 TSA 的分子目标泛函并未考虑类别信息, 但其分母目标泛函却用于最大化样本散度. 因此

TSA 的识别性能较 LPP 有质的提升, 说明了鉴别信息在面向分类的子空间降维技术中的重要性。

5) TLLDA 直接将 LFDA 进行张量化扩展, 但缺少类间相似度的考虑, 因此其性能仍有提升空间; 并且, TLLDA 直接对各样本进行相似度计算, 导致其运算量过大, 不适于大样本应用场合。

4 总结

结合 LFDA 和 TSA 两种经典子空间降维技术的优势, 本文提出了张量的局部 Fisher 判别分析 (TLFDA)。依据 TSA, TLFDA 采用张量降维技术, 即对原输入数据进行双边降维变换, 而非单边降维变换。依据 LFDA, TLFDA 以类间散度最大和类内散度最小为目标, 同时考虑同类和异类数据的近邻结构, 并为减少计算量将各类中心代替各数据进行类间散度最大化。通过理论分析, TLFDA 较 TLLDA、TSA 和 LFDA 具有更低的计算时间复杂度。在 ORL 和 PIE 两组人脸库实验结果中显示了张量局部 Fisher 判别分析技术的有效性。

后续工作将重点围绕 TLFDA 可挖掘的潜力, 首先是多次迭代无法获得稳定解, 需要改进求解方法, 不仅方便迭代次数的选择, 也能够得到收敛的投影矩阵。其次, TLFDA 的计算量依赖于训练样本数量 N , 期望能够通过增量式求解策略进行改进。最后, 本文 TLFDA 主要采用二阶张量, 有必要进行更高阶的扩展, 使得算法能够满足更多任务需求。

References

- 1 Belhumeur P N, Hespanha J P, Kriegman D J. Eigenfaces vs. Fisherfaces: recognition using class specific linear projection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1997, **19**(7): 711–720
- 2 He X F, Yan S C, Hu Y X, Niyogi P, Zhang H J. Face recognition using Laplacianfaces. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2005, **27**(3): 328–340
- 3 Sugiyama M. Dimensionality reduction of multimodal labeled data by local Fisher discriminant analysis. *Journal of Machine Learning Research*, 2007, **8**(1): 1027–1061
- 4 Yan S C, Xu D, Zhang B Y, Zhang H J, Yang Q, Lin S. Graph embedding and extensions: a general framework for dimensionality reduction. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2007, **29**(1): 40–51
- 5 Lei Y K, Ding Z G, Hu R X, Zhang S W, Jia W. Orthogonal local spline discriminant projection with application to face recognition. *Pattern Recognition Letters*, 2011, **23**(4): 615–625
- 6 Yan De-Qin, Liu Sheng-Lan, Li Yan-Yan. An embedding dimension reduction algorithm based on sparse analysis. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(11): 1306–1312
(闫德勤, 刘胜蓝, 李燕燕. 一种基于稀疏嵌入分析的降维方法. *自动化学报*, 2011, **37**(11): 1306–1312)
- 7 Gu X H, Gong W G, Yang L P. Regularized locality preserving discriminant analysis for face recognition. *Neurocomputing*, 2011, **74**(17): 3036–3042
- 8 Li M, Yuan B Z. 2D-LDA: a statistical linear discriminant analysis for image matrix. *Pattern Recognition Letters*, 2005, **26**(5): 527–532

- 9 Yu W W. Two-dimensional discriminant locality preserving projections for face recognition. *Pattern Recognition Letters*, 2009, **30**(15): 1378–1383
- 10 Li Le, Zhang Yu-Jin. Linear projection-based non-negative matrix factorization. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(1): 23–39
(李乐, 章毓晋. 基于线性投影结构的非负矩阵分解. *自动化学报*, 2010, **36**(1): 23–39)
- 11 Tang Ke-Wei, Liu Ri-Sheng, Du Hui, Su Zhi-Xun. A novel dimensionality reduction method based on tensor and lorentzian geometry. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(9): 1151–1156
(唐科威, 刘日升, 杜慧, 苏志勋. 一种基于张量和洛伦兹几何的降维方法. *自动化学报*, 2011, **37**(9): 1151–1156)
- 12 He X F, Cai D, Niyogi P. *Tensor Subspace Analysis*. California: MIT Press, 2006. 499–507
- 13 Wang J G, Sung E, Yau W Y. Incremental two-dimensional linear discriminant analysis with applications to face recognition. *Network and Computer Applications*, 2010, **33**(3): 314–322
- 14 Zhang Z, Chow W S. Tensor locally linear discriminative analysis. *IEEE Signal Processing Letters*, 2011, **18**(11): 643–646
- 15 Eschenauer H, Koski J, Osyczka A. *Multicriteria Design Optimization*. Berlin: Springer-Verlag, 1990. 88–92
- 16 Guan Z Y, Wang C, Chen Z G, Bu J J, Chen C. Efficient face recognition using tensor subspace regression. *Neurocomputing*, 2010, **73**(13–15): 2744–2753



郑建伟 博士, 浙江工业大学讲师。主要研究方向为机器学习与特征提取。本文通信作者。E-mail: zjw@zjut.edu.cn
(ZHENG Jian-Wei Ph.D., lecturer at Zhejiang University of Technology. His research interest covers machine learning and feature extraction. Corresponding author of this paper.)



王万良 浙江工业大学教授。主要研究方向为智能算法和网络控制。E-mail: wwl@zjut.edu.cn
(WANG Wan-Liang Professor at Zhejiang University of Technology. His research interest covers intelligent algorithms and network control.)



姚晓敏 浙江工业大学硕士研究生。主要研究方向为智能算法和网络控制。E-mail: yaoxm@zjut.edu.cn
(YAO Xiao-Ming Master student at Zhejiang University of Technology. His research interest covers intelligent algorithms and network control.)



石海燕 浙江工业大学博士研究生。主要研究方向为智能算法和机器学习。E-mail: csshy@usx.edu.cn
(SHI Hai-Yan Ph.D. candidate at Zhejiang University of Technology. Her research interest covers intelligent algorithms and machine learning.)