Métodos Numéricos para Engenharia

MÓDULO 11- MÍNIMOS QUADRADOS

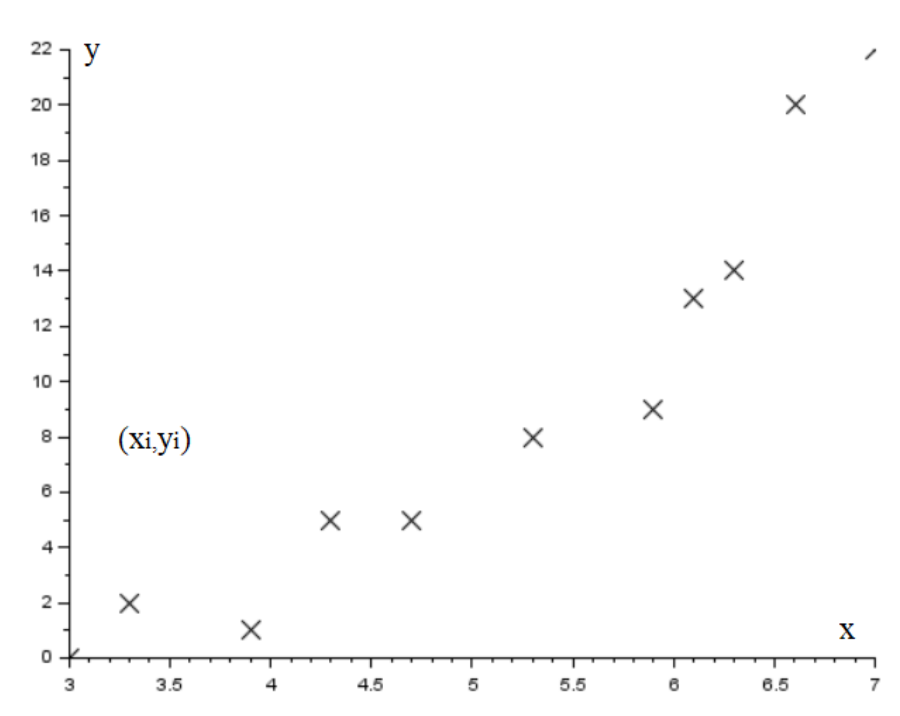
PROFESSOR LUCIANO NEVES DA FONSECA

Definições

- Na interpolação por polinômios por Vandermonde (e também por Newton e Lagrange) o polinômio interpolador passa exatamente por todos os N pontos de controle (x_i, y_i).
- Esta exigência pode ser um problema quando temos um número de pontos de controle N muito grande , pois a ordem do polinômio interpolador (N-1) será muito alta, o que pode causar instabilidade numérica.
- Além da instabilidade numérica, um polinômio de ordem muito alta pode oscilar (wiggling) ao passar por todos os pontos de controle, gerando um interpolação duvidosa, o exemplo a seguir ira discorrer sobre este problema
- Uma solução para este problema é se usar um polinômio de ordem menor M<N. Este polinômio interpolador de ordem menor não irá passar exatamente pelos pontos de controle, mas entre eles, assumindo um certo erro de interpolação entre os pontos de controle e o polinômio.
- O método dos mínimos quadrados oferece uma solução na qual o erro quadrático médio entre os pontos de controle e a interpolação sejam minimizados.

Exemplo: Ajustar um polinômio interpolador aos 11 postos de controle mostrados na tabela abaixo.

i	x_i	$f(x_i)$
0	3.00	0.00
1	3.30	2.00
2	3.90	1.00
3	4.30	5.00
4	4.70	5.00
5	5.30	8.00
6	5.90	9.00
7	6.10	13.00
8	6.30	14.00
9	6.60	20.00
10	7.00	22.00

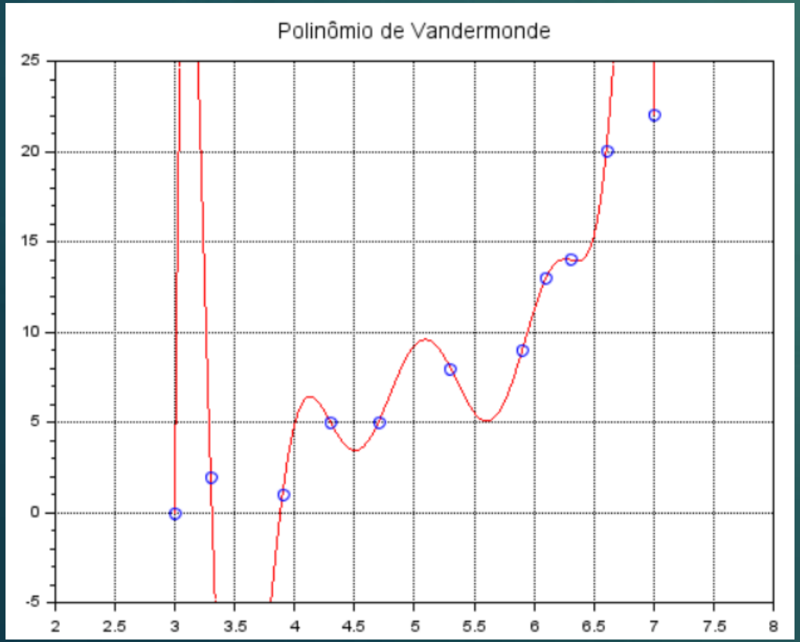



```
--> x=[3,3.3,3.9,4.3,4.7,5.3,5.9,6.1,6.3,6.6,7.0];
--> y=[0,2,1,5,5,8,9,13,14,20,22];
--> plot2d(x,y,-2)
```

Podemos passar um polinômio de Vandermonde de ordem 10 aos 11 pontos de controle. A matriz A será quadrada 10x10. Número de linhas é igual ao número de pontos de controle, número de colunas é igual ao número de coeficientes do polinômio (tamanho de u que é o vetor coeficientes).

$$A = \begin{bmatrix} 1. & 3.0 & 3.0^2 & 3.0^3 & 3.0^4 & 3.0^5 & 3.0^6 & 3.0^7 & 3.0^8 & 3.0^9 & 3.0^{10} \\ 1. & 3.3 & 3.3^2 & 3.3^3 & 3.3^4 & 3.3^5 & 3.3^6 & 3.3^7 & 3.3^8 & 3.3^9 & 3.3^{10} \\ 1. & 3.9 & 3.9^2 & 3.9^3 & 3.9^4 & 3.9^5 & 3.9^6 & 3.9^7 & 3.9^8 & 3.9^9 & 3.9^{10} \\ 1. & 4.3 & 4.3^2 & 4.3^3 & 4.3^4 & 4.3^5 & 4.3^6 & 4.3^7 & 4.3^8 & 4.3^9 & 4.3^{10} \\ 1. & 4.7 & 4.7^2 & 4.7^3 & 4.7^4 & 4.7^5 & 4.7^6 & 4.7^7 & 4.7^8 & 4.7^9 & 4.7^{10} \\ 1. & 5.3 & 5.3^2 & 5.3^3 & 5.3^4 & 5.3^5 & 5.3^6 & 5.3^7 & 5.3^8 & 5.3^9 & 5.3^{10} \\ 1. & 5.9 & 5.9^2 & 5.9^3 & 5.9^4 & 5.9^5 & 5.9^6 & 5.9^7 & 5.9^8 & 5.9^9 & 5.9^{10} \\ 1. & 6.1 & 6.1^2 & 6.1^3 & 6.1^4 & 6.1^5 & 6.1^6 & 6.1^7 & 6.1^8 & 6.1^9 & 6.1^{10} \\ 1. & 6.3 & 6.3^2 & 6.3^3 & 6.3^4 & 6.3^5 & 6.3^6 & 6.3^7 & 6.3^8 & 6.3^9 & 6.3^{10} \\ 1. & 6.6 & 6.6^2 & 6.6^3 & 6.6^4 & 6.6^5 & 6.6^6 & 6.6^7 & 6.6^8 & 6.6^9 & 6.6^{10} \\ 1. & 7.0 & 7.0^2 & 7.0^3 & 7.0^4 & 7.0^5 & 7.0^6 & 7.0^7 & 7.0^8 & 7.0^9 & 7.0^{10} \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 8 \\ 9 \\ 13 \\ 14 \\ 20 \\ 22 \end{bmatrix}$$

```
--> x=[3,3.3,3.9,4.3,4.7,5.3,5.9,6.1,6.3,6.6,7.0];

--> y=[0,2,1,5,5,8,9,13,14,20,22];

--> A=[x'^0,x'^1,x'^2,x'^3,x'^4,x'^5,x'^6,x'^7,x'^8,x'^9,x'^10];

--> u=inv_gauss(A)*y'
 u  =

  -26064673.
   55745991.
  -53147982.
   29750838.
  -10830617.
   2679881.9
  -456537.54
   52885.778
  -3987.7474
   176.77826
  -3.4994365

--> ps=poly(u,"s","coeff")
 ps  =

  -26064673 +55745991s -53147982s² +29750838s³ -10830617s⁴
   +2679881.9s⁵ -456537.54s⁶ +52885.778s⁷ -3987.7474s⁸
   +176.77826s⁹ -3.4994365s¹⁰
```



$$\boxed{\begin{array}{l} u = A^{-1}y \\ u \text{ é o vetor de coeficientes} \end{array}}$$

$$p_{10}(x) = -26064689 + 55746026x - 53148015x^2 + 29750856x^3 - 10830624x^4 + 2679883.5x^5 - 456537.82x^6 + 52885.81x^7 - 3987.7498x^8 + 176.77837x^9 - 3.4994386x^{10}$$

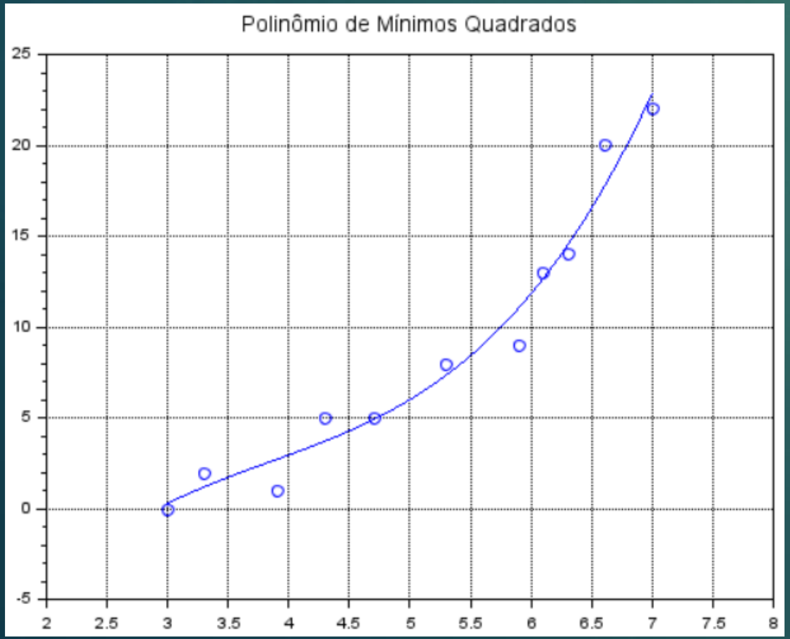
Notar que o polinômio interpolador de ordem 10 passa pelos 11 pontos de controle, no entanto há oscilações (wiggling) que comprometem o resultado. A interpolação não é feita de maneira adequada.

Podemos também passar um polinômio de MQ de ordem 3 entre os 11 pontos de controle. A matriz A será retangular 10x4. Número de linhas é igual ao número de pontos de controle, número de colunas é igual ao número de coeficientes do polinômio (tamanho de coef).

$$A = \begin{bmatrix} 1. & 3.0 & 3.0^2 & 3.0^3 \\ 1. & 3.3 & 3.3^2 & 3.3^3 \\ 1. & 3.9 & 3.9^2 & 3.9^3 \\ 1. & 4.3 & 4.3^2 & 4.3^3 \\ 1. & 4.7 & 4.7^2 & 4.7^3 \\ 1. & 5.3 & 5.3^2 & 5.3^3 \\ 1. & 5.9 & 5.9^2 & 5.9^3 \\ 1. & 6.1 & 6.1^2 & 6.1^3 \\ 1. & 6.3 & 6.3^2 & 6.3^3 \\ 1. & 6.6 & 6.6^2 & 6.6^3 \\ 1. & 7.0 & 7.0^2 & 7.0^3 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 8 \\ 9 \\ 13 \\ 14 \\ 20 \\ 22 \end{bmatrix}$$

```
--> x=[3,3.3,3.9,4.3,4.7,5.3,5.9,6.1,6.3,6.6,7.0];

--> y=[0,2,1,5,5,8,9,13,14,20,22];

--> A=[x'^0,x'^1,x'^2,x'^3];

--> u=inv_gauss(A'*A)*A'*y'
 u  =

  -29.666755
   20.296888
  -4.6476658
   0.4030047

--> pm=poly(u,"s","coeff")
 pm  =

  -29.666755 +20.296888s -4.6476658s² +0.4030047s³
```



$$\boxed{\begin{array}{l} u = (A^t A)^{-1} A^t\, y \\ u \text{ é o vetor de coeficientes} \end{array}}$$

Como A é retangular, não podemos calcular a sua inversa A^{-1} , mas sim a sua pseudo-inversa $(A^t A)^{-1} A^t$.

$$p_3(x) = -29.666755 + 20.296888x - 4.6476658x^2 + 0.4030047x^3$$

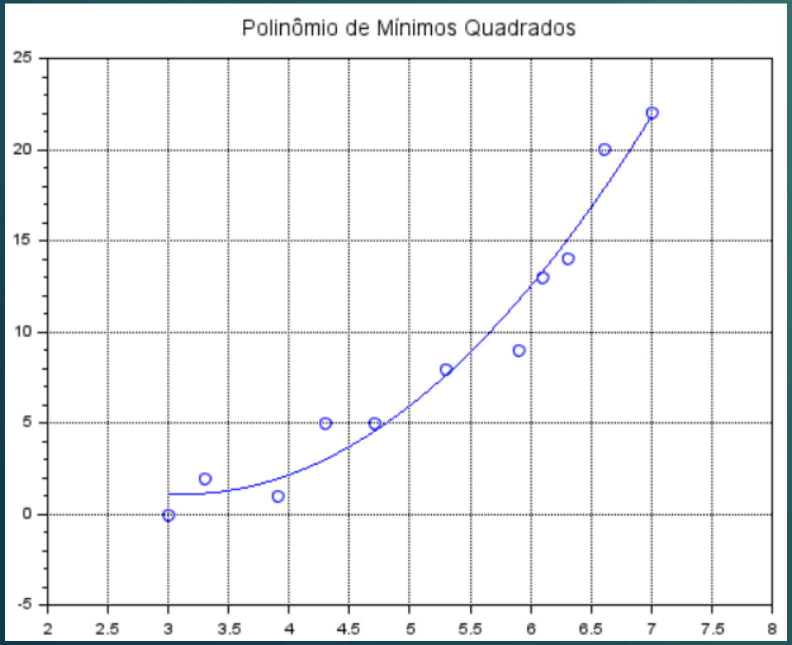
Notar que o polinômio interpolador de ordem 3 passa entre os 11 pontos de controle.

Podemos também passar um polinômio de MQ de ordem 2 entre os 11 pontos de controle. A matriz A será retangular 10x3. Número de linhas é igual ao número de pontos de controle, número de colunas é igual ao número de coeficientes do polinômio (tamanho de coef).

$$A = \begin{bmatrix} 1. & 3.0 & 3.0^2 \\ 1. & 3.3 & 3.3^2 \\ 1. & 3.9 & 3.9^2 \\ 1. & 4.3 & 4.3^2 \\ 1. & 4.7 & 4.7^2 \\ 1. & 5.3 & 5.3^2 \\ 1. & 5.9 & 5.9^2 \\ 1. & 6.1 & 6.1^2 \\ 1. & 6.3 & 6.3^2 \\ 1. & 6.6 & 6.6^2 \\ 1. & 7.0 & 7.0^2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 8 \\ 9 \\ 13 \\ 14 \\ 20 \\ 22 \end{bmatrix}$$

```
--> x=[3,3.3,3.9,4.3,4.7,5.3,5.9,6.1,6.3,6.6,7.0];

--> y=[0,2,1,5,5,8,9,13,14,20,22];

--> A=[x'^0,x'^1,x'^2];

--> u=inv_gauss(A'*A)*A'*y'
 u  =

   14.576664
  -8.6372239
   1.3822754

--> pm=poly(u,"s","coeff")
 pm  =

  14.576664 -8.6372239s +1.3822754s²
```



$$\boxed{\begin{array}{l} u = (A^t A)^{-1} A^t\, y \\ u \text{ é o vetor de coeficientes} \end{array}}$$

Como A é retangular, não podemos calcular a sua inversa A^{-1} , mas sim a sua pseudo-inversa $(A^t A)^{-1} A^t$.

$p_2(x) = 14.576664 - 8.6372239x + 1.3822754x^2$

Notar que o polinômio interpolador de ordem 2 passa entre os 11 pontos de controle.

Cálculo detalhado para o ajuste um polinômios de ordem 2, $p_2(x)$, que passa “entre os 11 pontos” de controle (x_i, y_i) abaixo:

i	x_i	$f(x_i)$
0	3.00	0.00
1	3.30	2.00
2	3.90	1.00
3	4.30	5.00
4	4.70	5.00
5	5.30	8.00
6	5.90	9.00
7	6.10	13.00
8	6.30	14.00
9	6.60	20.00
10	7.00	22.00

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3.0 & 3.3 & 3.9 & 4.3 & 4.7 & 5.3 & 5.9 & 6.1 & 6.3 & 6.6 & 7.0 \\ 9.00 & 10.89 & 15.21 & 18.49 & 22.09 & 28.09 & 34.81 & 37.21 & 39.69 & 43.56 & 49.00 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 8 \\ 9 \\ 13 \\ 14 \\ 20 \\ 22 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1. & 3.0 & 9.00 \\ 1. & 3.3 & 10.89 \\ 1. & 3.9 & 15.21 \\ 1. & 4.3 & 18.49 \\ 1. & 4.7 & 22.09 \\ 1. & 5.3 & 28.09 \\ 1. & 5.9 & 34.81 \\ 1. & 6.1 & 37.21 \\ 1. & 6.3 & 39.69 \\ 1. & 6.6 & 43.56 \\ 1. & 7.0 & 49.00 \end{bmatrix}$$

$$A^t A = \begin{bmatrix} 11.00 & 56.400 & 308.040 \\ 56.40 & 308.040 & 1767.366 \\ 308.04 & 1767.366 & 10519.922 \end{bmatrix}$$

$$(A^t A)^{-1} = \begin{bmatrix} 27.337747 & -11.429266 & 1.1196449 \\ -11.429266 & 4.8682401 & -0.4832061 \\ 1.1196449 & -0.4832061 & 0.0484896 \end{bmatrix}$$

$$(A^t y) = \begin{bmatrix} 99.00 \\ 604.50 \\ 3766.49 \end{bmatrix}$$

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$u = \begin{bmatrix} a_o \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{u = (A^t A)^{-1} A^t y}$$

$$u = (A^t A)^{-1} A^t y = \begin{bmatrix} 14.576664 \\ -8.6372239 \\ 1.3822754 \end{bmatrix}$$

$$p_2(x) = 14.576664 - 8.6372239x + 1.3822754x^2$$

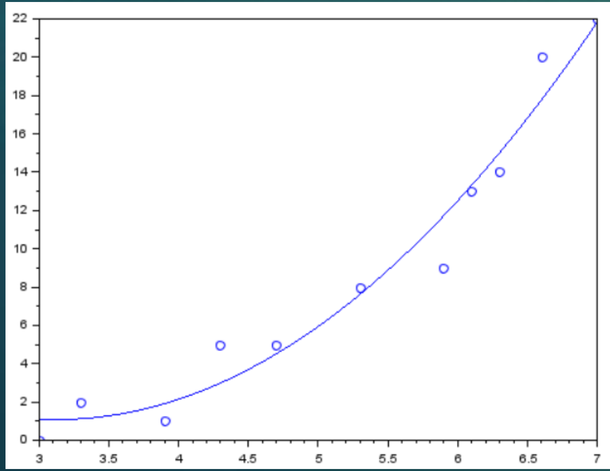
```
function [u,A]=PolinomioMQ(x,y,ordem)
    A=(x.^0)';
    for(k=1:ordem)
        A=[A, (x.^k)']
    end
    u=EliminacaoGauss((A'*A),(A'*y'),%f)
endfunction
```

```
function [u,A]=PolinomioVandermonde(x,y)
    A=(x.^0)';
    for(k=1:length(x)-1)
        A=[A, (x.^k)']
    end
    u=EliminacaoGauss(A,y',%f);
endfunction
```

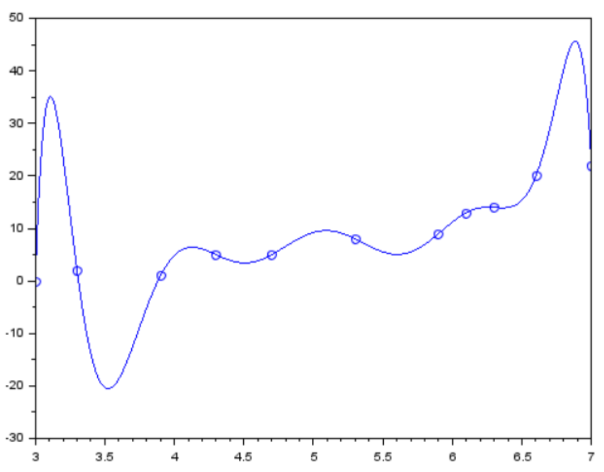
```
--> x=[3,3.3,3.9,4.3,4.7,5.3,5.9,6.1,6.3,6.6,7];
--> y=[0,2,1,5,5,8,9,13,14,20,22];
--> xp=linspace(min(x),max(x),1000);
```

```
--> u=PolinomioMQ(x,y,2)

  14.57666393
 -8.637223875
  1.382275429
```

```
--> u=PolinomioVandermonde(x,y)
  -26064689.44
   55746026.09
  -53148014.99
   29750856.30
  -10830623.89
   2679883.543
  -456537.8185
   52885.80973
  -3987.749775
   176.7783706
  -3.499438614
```

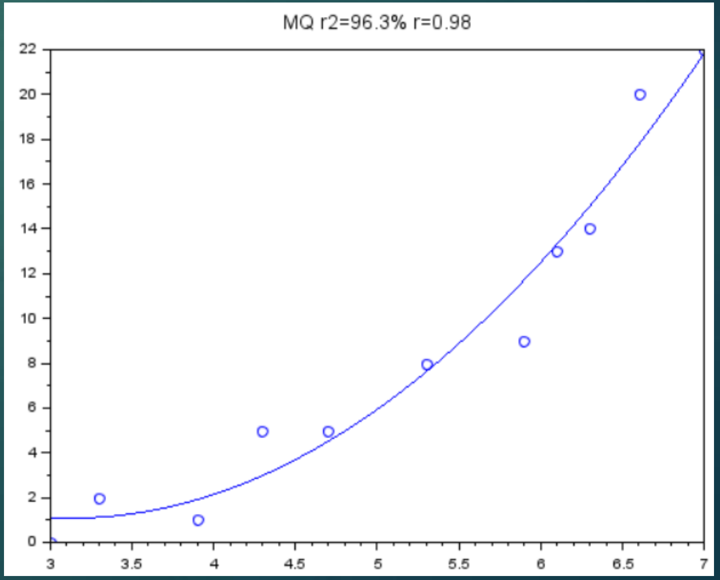



```
--> ps=poly(u,'s','coeff');

--> plot(xp,horner(ps,xp))

--> scatter(x,y)
```



```
function Plot_PolinomioMQ(x,y,ordem)
    [u,A]=PolinomioMQ(x,y,ordem)
    printf("Matriz Aumentada [(A''A)|(A''y))]")
    disp([(A'*A) , (A'*y')])
    printf("Coeficientes u=inv(A''A)*(A''y))")
    disp(u)
    printf("Polinômio Mínimos Quadradros ordem %d",ordem);
    St = sum( (y-mean(y))^2 ); //goodness of fitness
    Sr = sum( (y'-A*u)^2 );
    r2= abs(St-Sr)/St
    str=sprintf("MQ r2=%.1f%%\t r=%.2f\n",r2*100,sqrt(r2));
    disp(str)
    pm=poly(u,'s','coeff')
    disp(pm)
    xp=linspace(min(x),max(x),1000);
    yp=horner(pm,xp)
    plot(xp,yp,'b')
    scatter(x,y)
    xtitle(str);
endfunction
```

```
--> x=[3,3.3,3.9,4.3,4.7,5.3,5.9,6.1,6.3,6.6,7];

--> y=[0,2,1,5,5,8,9,13,14,20,22];

--> Plot_PolinomioMQ(x,y,2)
Matriz Aumentada [(A'A)|(A'y))]
   11.        56.4        308.04        99.
   56.4       308.04      1767.366      604.5
   308.04     1767.366    10519.9224    3766.49
Coeficientes u=inv(A'A)*(A'y))
   14.57666393
  -8.637223875
   1.382275429
Polinômio Mínimos Quadradros ordem 2
  "MQ r2=96.3%    r=0.98"

  14.57666393 -8.637223875s +1.382275429s²
```



Soma dos Resíduos

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - A\,u)^2$$

$$S_t = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

Coeficiente de Determinação

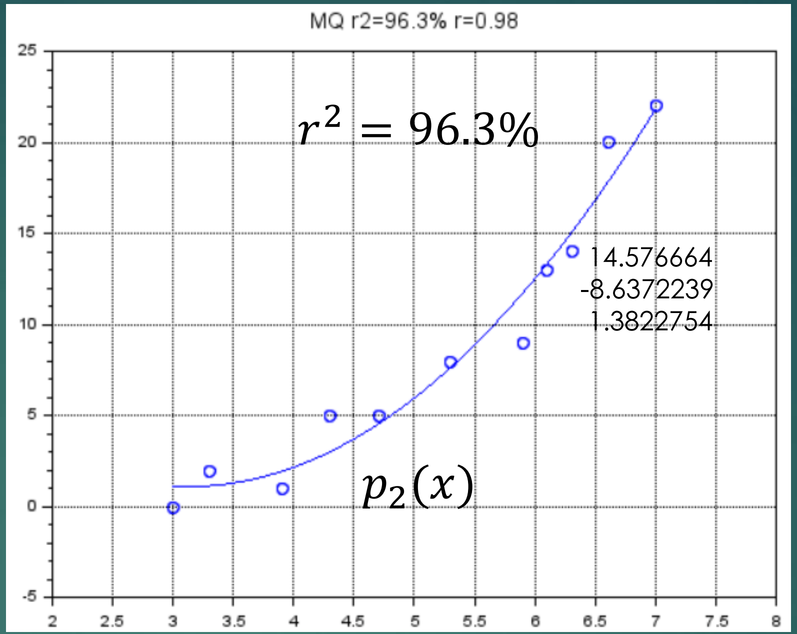
$$r^2 = \frac{|S_t - S_r|}{S_t}$$

Coeficiente de Correlação

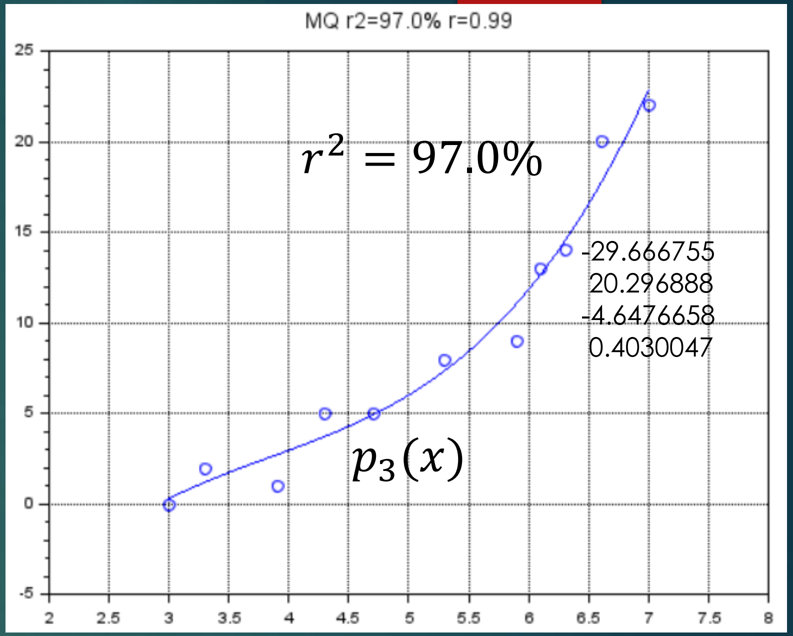
$$r = \sqrt{\frac{|S_t - S_r|}{S_t}}$$

```
--> x=[3,3.3,3.9,4.3,4.7,5.3,5.9,6.1,6.3,6.6,7.0];

--> y=[0,2,1,5,5,8,9,13,14,20,22];

--> Plot_PolinomioMQ(x,y,2);
Matriz Aumentada [(A'A)|(A'y))]
   11.       56.4       308.04       99.
   56.4      308.04     1767.366     604.5
   308.04    1767.366   10519.922    3766.49
Coeficientes u=inv(A'A)*(A'y))
   14.576664
  -8.6372239
   1.3822754
Polinômio Mínimos Quadradros ordem 2
  "MQ r2=96.3%   r=0.98"

  14.576664 -8.6372239s +1.3822754s²
```

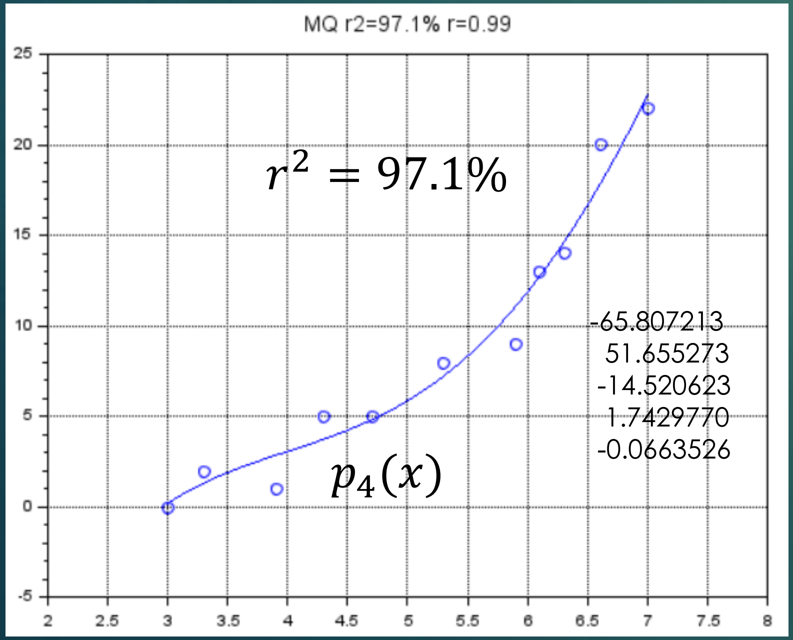
```
--> Plot_PolinomioMQ(x,y,2);
```



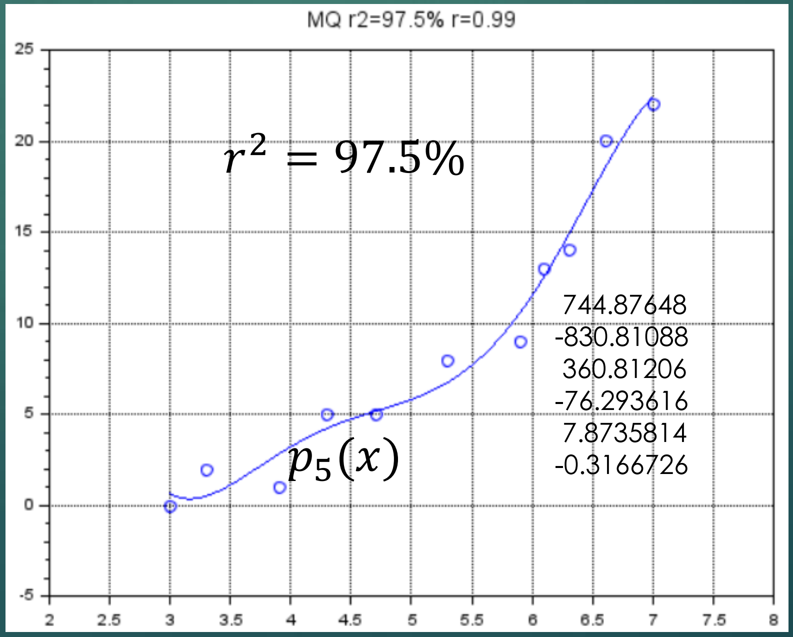

```
--> Plot_PolinomioMQ(x,y,3);
```



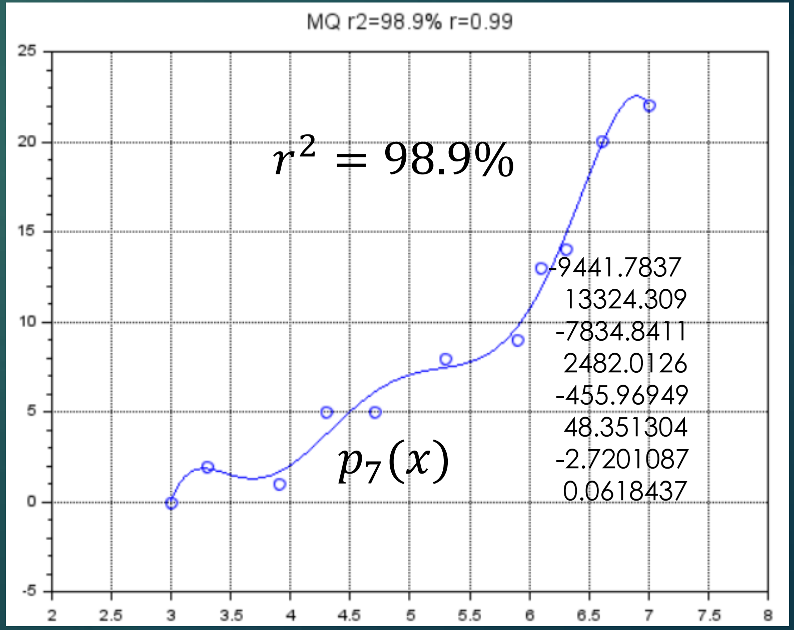

```
--> Plot_PolinomioMQ(x,y,4);
```




```
--> Plot_PolinomioMQ(x,y,5);
```




```
--> Plot_PolinomioMQ(x,y,7);
```



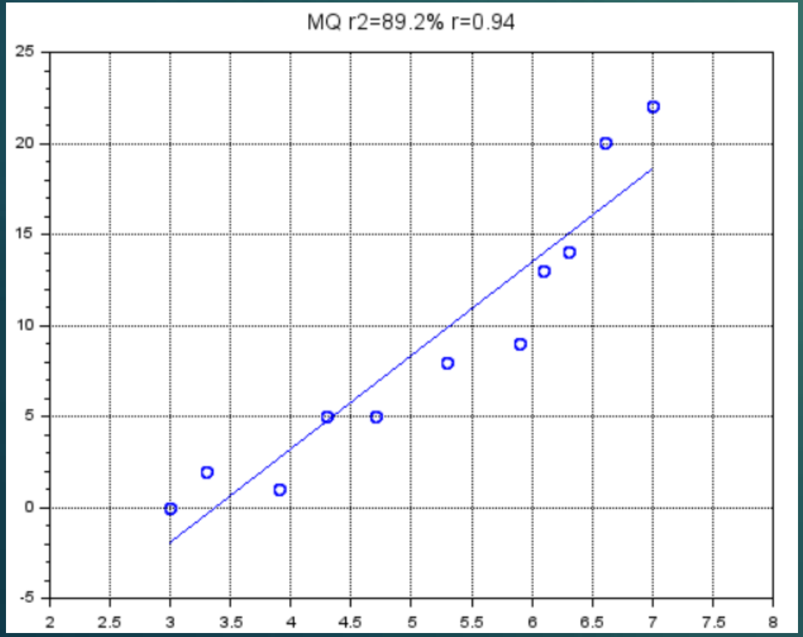
Podemos inclusive passar um polinômio de MQ de ordem 1 (reta)entre os 11 pontos de controle. A matriz A será retangular 10x2. Número de linhas é igual ao número de pontos de controle, número de colunas é igual ao número de coeficientes do polinômio (tamanho de coef).

$$A = \begin{bmatrix} 1. & 3.0 \\ 1. & 3.3 \\ 1. & 3.9 \\ 1. & 4.3 \\ 1. & 4.7 \\ 1. & 5.3 \\ 1. & 5.9 \\ 1. & 6.1 \\ 1. & 6.3 \\ 1. & 6.6 \\ 1. & 7.0 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 8 \\ 9 \\ 13 \\ 14 \\ 20 \\ 22 \end{bmatrix}$$

```
--> x=[3,3.3,3.9,4.3,4.7,5.3,5.9,6.1,6.3,6.6,7];
--> y=[0,2,1,5,5,8,9,13,14,20,22];
```

```
--> Plot_PolinomioMQ(x,y,1)
Matriz Aumentada [(A'A)|(A'y))]
   11.      56.4      99.
   56.4    308.04    604.5
Coeficientes u=inv(A'A)*(A'y))
  -17.340659
   5.1373626
Polinômio Mínimos Quadradros ordem 1
  "MQ r2=89.2%   r=0.94"

  -17.340659 +5.1373626s
```

```
--> u=PolinomioMQ(x,y,1)
  -17.340659
   5.1373626

--> pm=poly(u,"s","coeff")
  -17.340659 +5.1373626s

--> xp=linspace(min(x),max(x),1000);

--> plot(xp,horner(pm,xp),'r')

--> scatter(x,y)
```



$$\boxed{u = (A^t A)^{-1} A^t\, y}$$

Já que A é retangular, não podemos calcular a sua inversa A^{-1} , mas sim a sua pseudo-inversa $(A^t A)^{-1} A^t$.

$$p_2(x) = -17.340659\ + 5.1373626x$$

Notar que o polinômio interpolador de ordem 1 passa entre os 11 pontos de controle.

Os polinômios MQ de 1ª Ordem podem ser utilizados na Linearização de Regressões não-lineares

1) $y = \alpha e^{\beta x} \Rightarrow \ln(y) = \ln\left(\alpha e^{\beta x}\right) = \ln\alpha + \beta x$ $\quad$ $\boxed{\begin{array}{l} y_l = \ln(y) \\ x_l = x \\ y_l = a_o + a_1 x_l \end{array}}$ $\quad$ $\begin{array}{l} \alpha = e^{a_o} \\ \beta = a_1 \end{array}$

2) $y = \alpha x^{\beta} \Rightarrow \log(y) = \log\left(\alpha x^{\beta}\right) = \log\alpha + \beta log(x)$ $\quad$ $\boxed{\begin{array}{l} y_l = \log(y) \\ x_l = \log(x) \\ y_l = a_o + a_1 x_l \end{array}}$ $\quad$ $\begin{array}{l} \alpha = 10^{a_0} \\ \beta = a_1 \end{array}$

3) $y = \dfrac{\alpha x}{x+\beta} \Rightarrow \dfrac{1}{y} = \dfrac{x+\beta}{\alpha x} = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{\beta}{\alpha}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $\quad$ $\boxed{\begin{array}{l} y_l = 1/y \\ x_l = 1/\mathrm{x} \\ y_l = a_o + a_1 x_l \end{array}}$ $\quad$ $\begin{array}{l} \alpha = 1/a_o \\ \beta = a_1/a_o \end{array}$

4) $y = \dfrac{\beta}{x+\alpha} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{y}\right) = \left(\dfrac{x+\alpha}{\beta}\right) \Rightarrow \left(\dfrac{1}{y}\right) = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right) + \left(\dfrac{1}{\beta}\right)(x)$ $\quad$ $\boxed{\begin{array}{l} y_l = 1/y \\ x_l = \mathrm{x} \\ y_l = \alpha + \beta x_l \end{array}}$ $\quad$ $\begin{array}{l} \alpha = \boldsymbol{a_o/a_1} \\ \beta = 1/\boldsymbol{a_1} \end{array}$

5) $y = \alpha + \dfrac{\beta}{x} \Rightarrow\Rightarrow (y) = (\alpha) + (\beta)\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $\quad$ $\boxed{\begin{array}{l} y_l = y \\ x_l = 1/x \\ y_l = \alpha + \beta x_l \end{array}}$ $\quad$ $\begin{array}{l} \alpha = a_o \\ \beta = a_1 \end{array}$

6) $y = \alpha + \beta x^n \Rightarrow\Rightarrow (y) = (\alpha) + (\beta)(x^n)$ $\quad$ $\boxed{\begin{array}{l} y_l = y \\ x_l = \mathrm{x}^{\mathrm{n}} \\ y_l = \alpha + \beta x_l \end{array}}$ $\quad$ $\begin{array}{l} \alpha = a_0 \\ \beta = a_1 \end{array}$

Regressão Não Linear		Linearização		Regressão Linear $\boldsymbol{y_l = a_o + a_1 x_l}$	α	β
$y = \alpha e^{\beta x}$		$MQL\big(x, ln(y)\big)$		$\ln(y) = \ln\alpha + (\beta)\ (x)$	$\alpha = e^{\boldsymbol{a_o}}$	$\beta = \boldsymbol{a_1}$
$y = \alpha x^{\beta}$		$MQL\big(\log(x), log(y)\big)$		$\log(y) = \log\alpha + (\beta)\ log(x)$	$\alpha = 10^{\boldsymbol{a_o}}$	$\beta = \boldsymbol{a_1}$
$y = \dfrac{\alpha x}{x+\beta}$		$MQL(1./x, 1./y)$		$\left(\dfrac{1}{y}\right) = \left(\dfrac{1}{\alpha}\right) + \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)\left(\dfrac{1}{x}\right)$	$\alpha = 1/\boldsymbol{a_o}$	$\beta = \boldsymbol{a_1}/\boldsymbol{a_o}$
$y = \dfrac{\beta}{x+\alpha}$		$MQL(x, 1./y)$		$\left(\dfrac{1}{y}\right) = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right) + \left(\dfrac{1}{\beta}\right)(x)$	$\alpha = \boldsymbol{a_o}/\boldsymbol{a_1}$	$\beta = 1/\boldsymbol{a_1}$
$y = \alpha + \dfrac{\beta}{x}$		$MQL(1./x, y)$		$(y) = (\alpha) + \beta\left(\dfrac{1}{x}\right)$	$\alpha = \boldsymbol{a_o}$	$\beta = \boldsymbol{a_1}$
$y = \alpha + \beta x^n$		$MQL(x^n, y)$		$(y) = (\alpha) + (\beta)(x^n)$	$\alpha = \boldsymbol{a_o}$	$\beta = \boldsymbol{a_1}$
$y^m = \alpha + \beta x^n$		$MQL(x^n, y^m)$		$(y^m) = (\alpha) + (\beta)(x^n)$	$\alpha = \boldsymbol{a_o}$	$\beta = \boldsymbol{a_1}$
$f(y) = \alpha + \beta g(x)$ (1)		$MQL\big(g(x), f(y)\big)$		$f(y) = (\alpha) + (\beta)\ g(x)$	$\alpha = \boldsymbol{a_o}$	$\beta = \boldsymbol{a_1}$

(1) Onde $f(y)$ indica uma função qualquer da variável real y e $g(x)$ uma função qualquer da variável real x

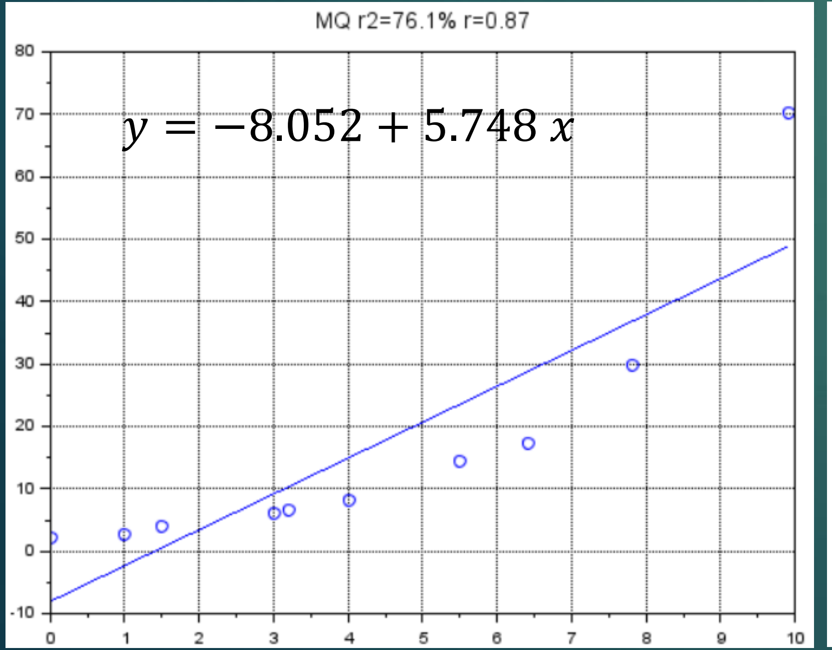
Exemplo 1 Ajuste da função $y = \alpha\, e^{\beta x}$

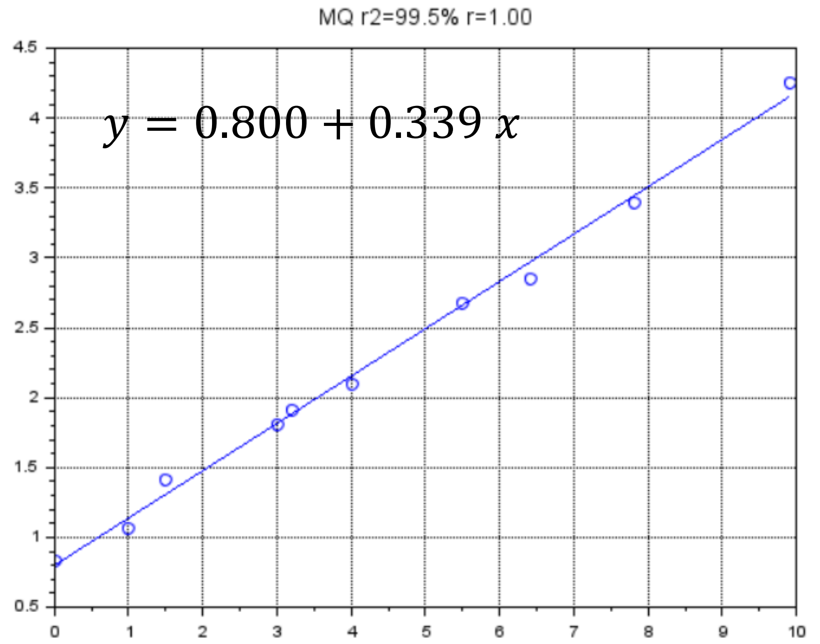
```
--> x=[0,1,1.5,3,3.2,4,5.5,6.4,7.8,9.9];

--> y=[2.3,2.9,4.1,6.1,6.8,8.2,14.6,17.3,30.0,70.3];
```

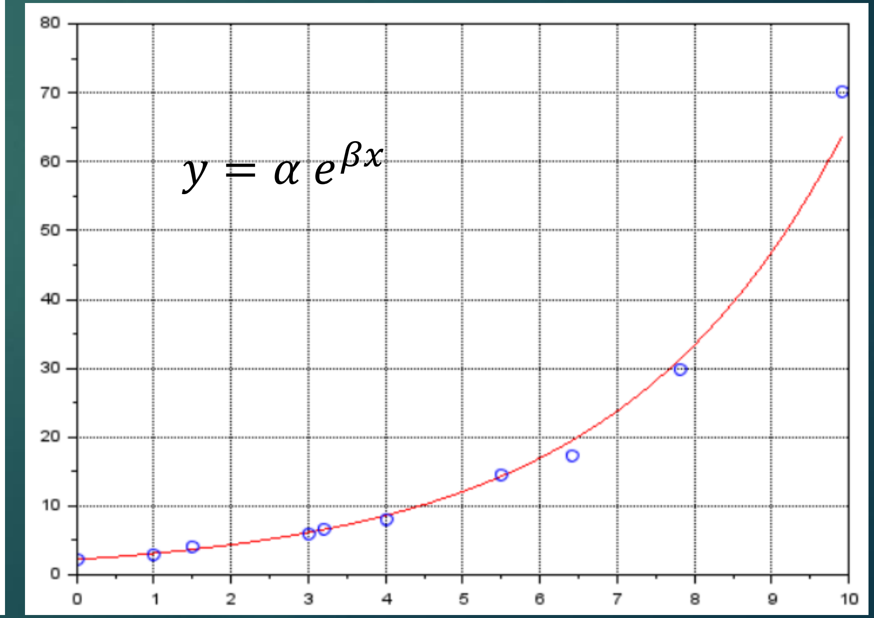
```
--> Plot_PolinomioMQ(x,y,1);
Matriz Aumentada [(A'A)|(A'y))]
   10.     42.3     162.6
   42.3    268.6    1203.
Coeficientes u=inv(A'A)*(A'y))
  -8.052
   5.748
Polinômio Mínimos Quadradros ordem 1
  "MQ r2=76.1%   r=0.87"

  -8.052 +5.748s
```

```
--> Plot_PolinomioMQ(x,log(y),1);
Matriz Aumentada [(A'A)|(A'y))]
   10.     42.3     22.32
   42.3    268.6    124.8
Coeficientes u=inv(A'A)*(A'y))
   0.800
   0.339
Polinômio Mínimos Quadradros ordem 1
  "MQ r2=99.5%   r=1.00"

  0.8 +0.339s
```

```
--> u=PolinomioMQ(x,log(y),1)
   0.7999001
   0.3386442

--> a=exp(u(1))
   2.2253187

--> b=u(2)
   0.3386442

--> deff('y=f(x)','y=a*exp(b*x)');

--> xp=linspace(min(x),max(x),1000);

--> plot(xp,f(xp),'r')

--> scatter(x,y)
```







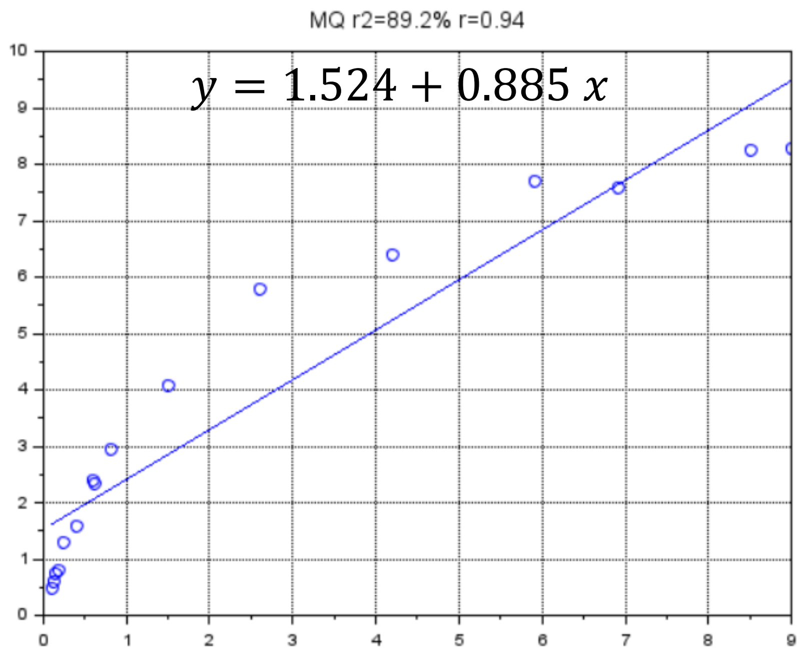
Exemplo 2 = ajuste da função $y = \frac{\alpha x}{x+\beta}$

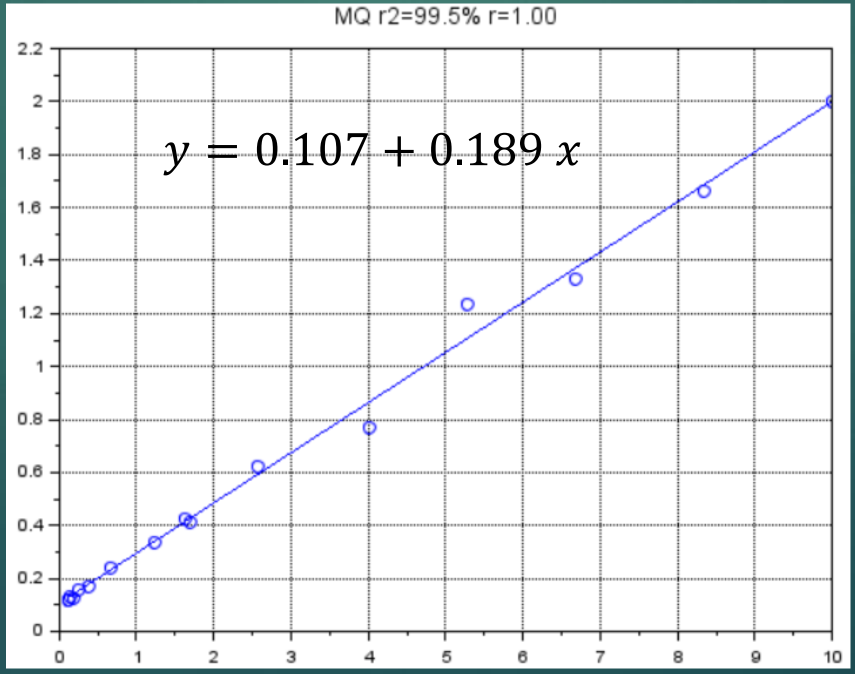
```
--> x=[0.1,0.12,0.15,0.19,0.25,0.39,0.59,0.62,0.82,1.5,2.6,4.2,5.9,6.9,8.5,9];

--> y=[0.5,0.6,0.75,0.81,1.3,1.6,2.4,2.35,2.95,4.1,5.8,6.4,7.7,7.6,,8.25,8.3];
```

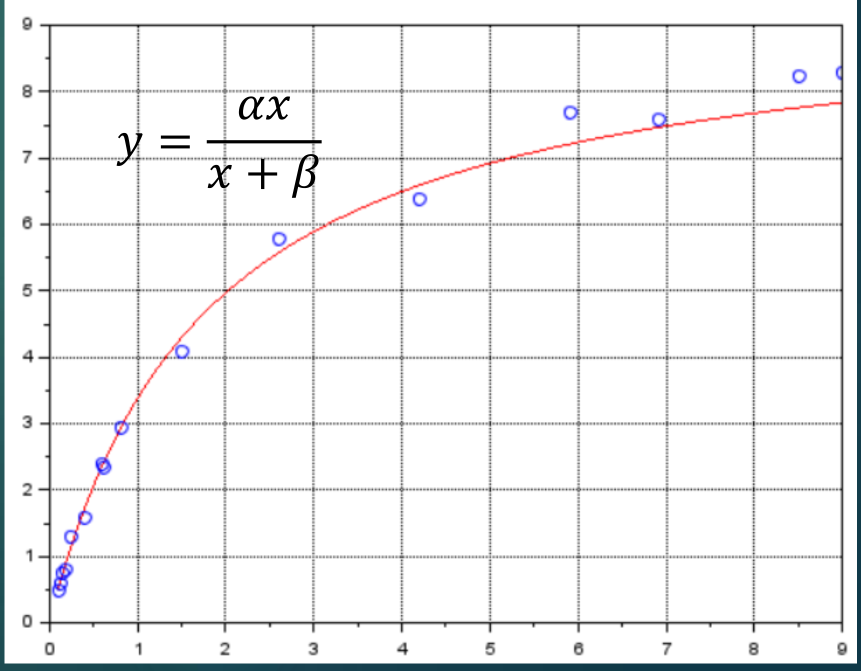
```
--> Plot_PolinomioMQ(x,y,1)
Matriz Aumentada [(A'A)|(A'y))]
   16.       41.83        61.41
   41.83    264.0225     297.4344
Coeficientes u=inv(A'A)*(A'y))
   1.5242560
   0.8850563
Polinômio Mínimos Quadradros ordem 1
pm=
  1.524256 +0.8850563s
r2=89.2%          r=0.945
```

```
--> Plot_PolinomioMQ(1./x,1./y,1)
Matriz Aumentada [(A'A)|(A'y))]
   16.          43.187146    9.8856897
   43.187146    271.85073    56.095787
Coeficientes u=inv(A'A)*(A'y))
   0.1065876
   0.1894149
Polinômio Mínimos Quadradros ordem 1
pm=
  0.1065876 +0.1894149s
r2=99.5%          r=0.997
```

```
--> u=PolinomioMQ(1./x,1./y,1)
   0.1065876
   0.1894149

--> a=1/u(1)
   9.3819533

--> b=u(2)/u(1)

   1.7770815
--> deff('y=f(x)','y=a*x./(x+b)');

--> xp=linspace(min(x),max(x),1000);

--> plot(xp,f(xp),'r')

--> scatter(x,y)
```

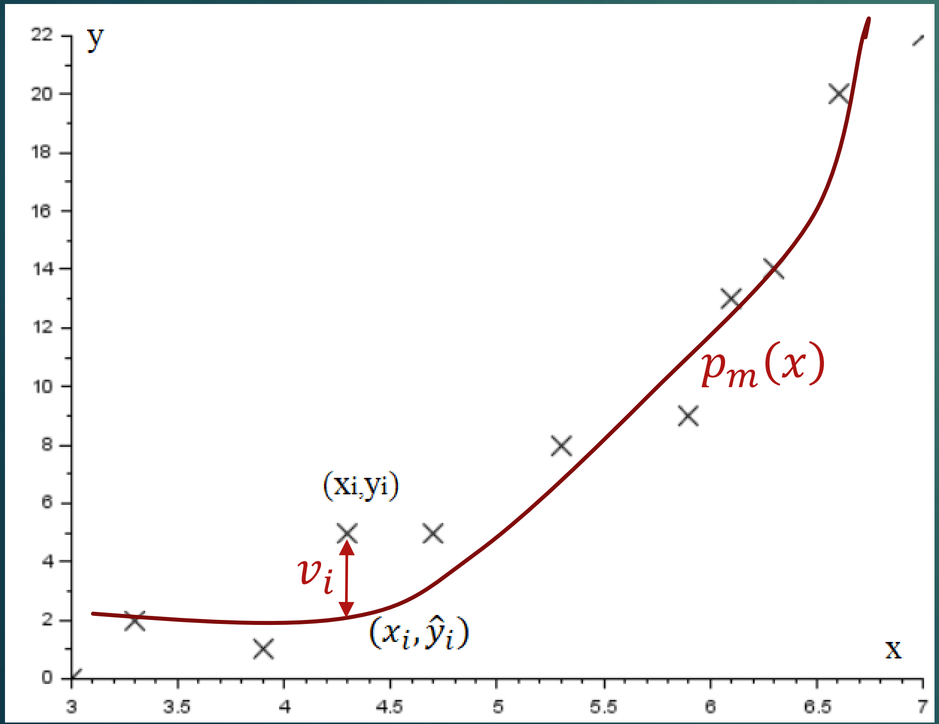






Conteúdo Opcional
Dedução da Fórmula de Mínimos Quadrados (Pseudo-Inversa)

- Vamos agora ajustar um polinômios de $p_m(x)$, com coeficiente u, de ordem M<N, que passa "entre os pontos" de controle (x_i, y_i)
- Haverá uma discrepância "v_i" entre o ponto de controle (x_i, y_i) e o ponto ajustado no polinômio $(x_i, \hat{y}_i)$, onde $\hat{y}_i = p_m(x_i)$
- A discrepância pode ser positiva se (x_i, y_i) estiver acima de $(x_i, \hat{y}_i)$, e negativa se (x_i, y_i) estiver abaixo de $(x_i, \hat{y}_i)$
- Vamos definir então a discrepância total Φ como sendo a soma do quadrado de todas as discrepâncias v_i



$\hat{y} = Au$ — Onde $\hat{y}$ são os pontos ajustados em $p_m(x)$ com discrepância

$y = \hat{y} + v = Au + v$ — O valor exato y é o valor ajustado $\hat{y}$ mais a discrepância v

$v = y - \hat{y} = y - Au$ — v é a discrepância (erro) de estimação

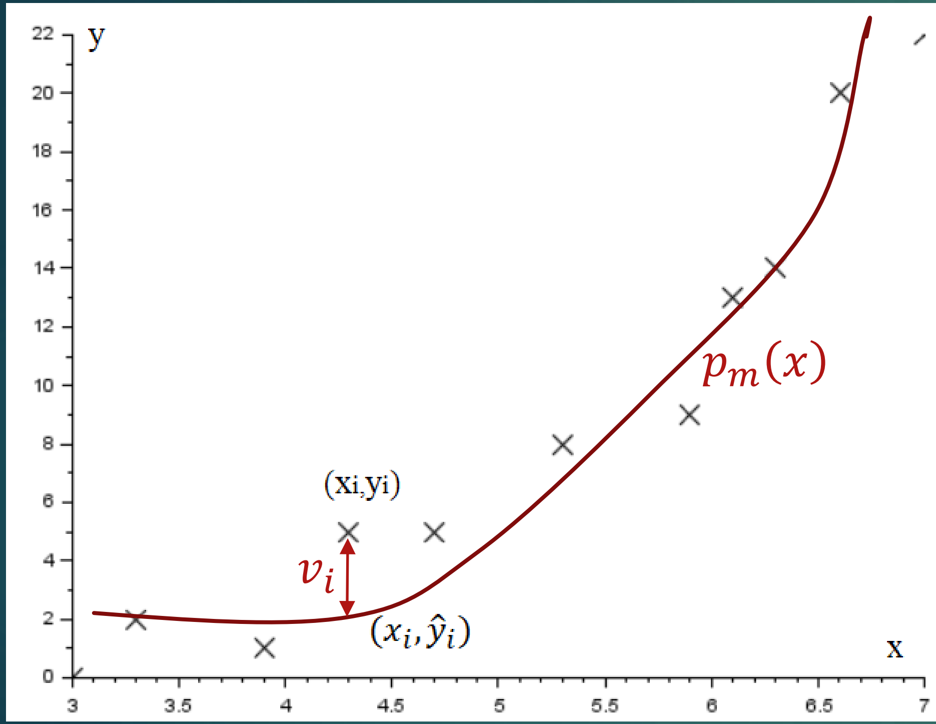
$$\Phi = \sum_{i=0}^{N} v_i^2 = v^t v$$ soma dos quadrados da discrepâncias

$$\Phi = v^t v = (y - Au)^t (y - Au)$$

Forma quadrática

$$\Phi = (y^t - u^t A^t)(y - Au) = y^t y - y^t A u - u^t A^t y + u^t A^t A u$$

$$\Phi = y^t y - 2 y^t A u + u^t A^t A u$$ Matrizes simétricas



$v = y - \hat{y} = y - Au$ $\quad v$ é a discrepância (erro) de estimação

$$\Phi = \sum_{i=0}^{N} v_i^2 = v^t v$$

soma dos quadrados da discrepâncias

$$\Phi = y^t y - 2y^t Au + u^t A^t Au$$

$$\frac{d\Phi}{du} = 0$$

Minimizar a soma dos quadrados da discrepâncias, em relação ao coeficiente u de $p_m(x)$ (que são as incógnitas)

$$0 - 2y^t A + 2u^t A^t A = 0$$

$$2y^t A = 2u^t A^t A$$

$$(A^t A)u = A^t y$$

$$\boxed{u = (A^t A)^{-1} A^t y}$$