Métodos Numéricos para Engenharia

MÓDULO 16 – ELEMENTOS FINITOS – PROBLEMAS DE CONTORNO

PROFESSOR LUCIANO NEVES DA FONSECA

Método das diferenças finitas em problemas de contorno

- Seja a seguinte equação diferencial referente a um problema de contorno, definido no domínio $t \in [a, b]$:

$$y'' - y' + ty = e^t(t^2 + 1) \qquad (i)$$

- A solução desta equação $y = f(t)$, além de satisfazer a equação diferencial listada acima no intervalo $t \in [a, b]$ deve também atender às condições iniciais e finais: $f(a) = y_0$ no início do intervalo e $f(b) = y_{n-1}$ no final do intervalo (daí a denominação problema de contorno)

Vamos então escolher o seguinte domínio e as seguintes condições iniciais:

Domínio $t \in [a, b]$,
Condições iniciais : $f(a) = y_o$ e $f(b) = y_{n-1}$

- Primeiro definimos uma malha de solução com n valor de x_i no intervalo [a,b], teremos que o espaçamento h da malha será

$$h = \frac{b-a}{n-1} \qquad b = a + nh$$

$$t_i = [a, a+h, a+2h, a+3h, a+4h, \ldots, b]$$

$$t_i = a + ih \qquad i = 0{:}\, n-1$$

- Após a solução da equação diferencial, teremos então n aproximações de $y_i = f(t_i)$ na malha de solução.
- Para tanto , partimos das seguintes diferenças finitas centradas

$$y(x) \cong y_i \qquad (ii)$$

$$y'(x) \cong \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \qquad (iii)$$

$$y''(x) \cong \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \qquad (iv)$$

$$t \cong t_i = a + ih \qquad (v)$$

Substituindo as diferenças finitas (ii), (iii), (iv) e (v) na equação diferencial (i) teremos:

$$y'' - y' + ty = e^t(t^2 + 1) \qquad (i)$$

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + t_i y_i = e^{t_i}(t_i^2 + 1)$$

Tirando o mínimo múltiplo comum, isto é, multiplicando ambos os lados por $2h^2$

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + t_i y_i = e^{t_i}(t_i^2 + 1)$$

$$2(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) - h(y_{i+1} - y_{i-1}) + 2h^2 t_i y_i = 2h^2\, e^{t_i}({t_i}^2 + 1)$$

- Rearranjando a equação e agrupando os termos teremos a seguinte equação de recorrência, para i=1:n-2 (excluímos y_o e $\mathrm{y_n}$ pois são dados do problema)

$$(2 + h)y_{i-1} + (2h^2 t_i - 4)y_i + (2 - h)y_{i+1} = 2h^2 e^{t_i}(t_i + 1)$$

- Notar que y_o e $\mathrm{y_n}$ não são incógnitas e sim dados do problema(condições iniciais e finais do problema de contorno), então modificaremos a primeira equação passando o termo em y_o para o outro lado da igualdade, e a última equação passando o termo em $\mathrm{y_{n-1}}$ para o outro lado da igualdade.

Com i=1 teremos:

$$(2h^2 t_1 - 4)y_1 + (2 - h)y_2 = 2h^2\, e^{t_1}({t_1}^2 + 1) - y_o(2 + h)$$

Com i=n-2 teremos:

$$(2 + h)y_{n-3} + (2h^2 t_{n-2} - 4)y_{n-2} = 2h^2\, e^{t_{n-2}}({t_{n-2}}^2 + 1) - \mathrm{y_{n-1}}(2 - \mathrm{h})$$

Malha de Soluções Com n=6

$$y'' - y' + ty = e^t(t^2+1)$$

$$h = \frac{b-a}{n-1} = \frac{3.0-2.0}{6-1} = 0.20$$

Domínio $t \in [2.0, 3.0]$

Condições iniciais : $y_0 = f(2.0) = 11.0$ e $y_{n-1} = f(3.0) = 19$

$$(2+h)y_{i-1} + (2h^2 t_i - 4)y_i + (2-h)y_{i+1} = 2h^2\, e^{t_i}({t_i}^2+1)$$

i	t(i)	y(i)
0	2.0	11
1	2.2	y1
2	2.4	y2
3	2.6	y3
4	2.8	y4
5	3.0	19

i=0

$$y_0 = 11$$

i=1

$$(2+0.2)y_0 + (2\,(0.2)^2(2.2)-4)y_1 + (2-0.2)y_2 = 2(0.2)^2 e^{2.2}(2.2^2+1)$$
$$(2.2)y_0 + (-3.824)y_1 + (1.8)y_2 = 4.2164863$$

i=2

$$(2+0.2)y_1 + (2\,(0.2)^2(2.4)-4)y_2 + (2-0.2)y_3 = 2(0.2)^2 e^{2.4}(2.4^2+1)$$
$$(2.2)y_1 + (-3.808)y_2 + (1.8)y_3 = 5.9613338$$

i=3

$$(2+0.2)y_2 + (2\,(0.2)^2(2.6)-4)y_3 + (2-0.2)y_4 = 2(0.2)^2 e^{2.6}(2.6^2+1)$$
$$(2.2)y_2 + (-3.792)y_3 + (1.8)y_4 = 8.3582886$$

i=4

$$(2+0.2)y_3 + (2\,(0.2)^2(2.8)-4)y_4 + (2-0.2)y_5 = 2(0.2)^2 e^{2.8}(2.8^2+1)$$
$$(2.2)y_3 + (-3.776)y_4 + (1.8)y_5 = 11.629654$$

i=5

$$y_5 = 19$$

$$\begin{cases} (1.0)y_0 = 11 \\ (2.2)y_0 + (-3.824)y_1 + (1.8)y_2 = 4.2164863 \\ (2.2)y_1 + (-3.808)y_2 + (1.8)y_3 = 5.9613338 \\ (2.2)y_2 + (-3.792)y_3 + (1.8)y_4 = 8.3582886 \\ (2.2)y_3 + (-3.776)y_4 + (1.8)y_5 = 11.629654 \\ (1.0)y_5 = 19 \end{cases}$$

i	t(i)	y(i)
0	2.0	11
1	2.2	y1
2	2.4	y2
3	2.6	y3
4	2.8	y4
5	3.0	19

$$\begin{bmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 2.2 & -3.824 & 1.8 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 2.2 & -3.808 & 1.8 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 2.2 & -3.792 & 1.8 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 2.2 & -3.776 & 1.8 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 1. \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 11 \\ y1 \\ y2 \\ y3 \\ y4 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11. \\ 4.2164863 \\ 5.9613338 \\ 8.3582886 \\ 11.629654 \\ 19. \end{bmatrix}$$

- O sistema acima pode ser resolvido por qualquer método.
- No entanto, notar que o sistema é tridiagonal, o que simplifica a sua resolução.

t_i	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
y_i	11.0	7.7445	5.3509	5.1664	8.9874	19.0

$$y'' - y' + xy = e^{t}(t^{2} + 1)$$

$$(2 + h)y_{i-1} + (2h^{2}t_{i} - 4)y_{i} + (2 - h)y_{i+1} = 2h^{2}\, e^{t_{i}}({t_{i}}^{2} + 1)$$

$$\begin{cases} e_{l} = 2 + h \\ e_{p} = 2h^{2}t_{i} - 4 \\ e_{u} = 2 - h \\ r = 2h^{2}e^{t_{i}}(t_{i}^{2} + 1) \end{cases}$$

```
function [t,y]=ElementosFinitos_a(a,b,ya,yb,n,fl,fp,fu,fr,prt)
    //(el)*y(i-1)+ (-ep)*y(i) + (eu)*y(i+1) = (r)
    i=1:n
    h=(b-a)/(n-1)
    t=[a+(i-1)*h]
    el= [feval(1:n-2,fl) 0]
    eu= [0 feval(2:n-1,fu)]
    ep= [1 feval(2:n-1,fp) 1]
    r=  [ya feval(2:n-1,fr) yb]
    y = tridiagonal(el,ep,eu,r)
    if (prt)
        if (n<20) then
            printf("   [A r]")
            disp([diag(eu,1)+diag(ep)+diag(el,-1) r'])
            printf("   [i x y]")
            disp([ t' y'])
        end
        plot(t,y,'b')
    end
endfunction
```

```
--> deff("y=fl(i)","y=2+h")

--> deff("y=fp(i)","y=2*h^2*t(i)-4")

--> deff("y=fu(i)","y=2-h")

--> deff("y=fr(i)","y=2*h^2.*exp(t(i)).*(t(i)^2+1)");
```

$$\begin{bmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 2.2 & -3.824 & 1.8 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 2.2 & -3.808 & 1.8 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 2.2 & -3.792 & 1.8 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 2.2 & -3.776 & 1.8 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 1. \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 11 \\ y1 \\ y2 \\ y3 \\ y4 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11. \\ 4.2164863 \\ 5.9613338 \\ 8.3582886 \\ 11.629654 \\ 19. \end{bmatrix}$$

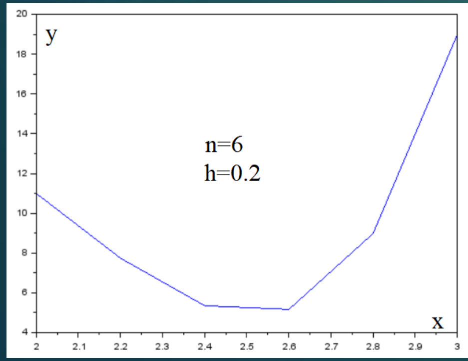
$$y'' - y' + xy = e^x(x^2+1)$$

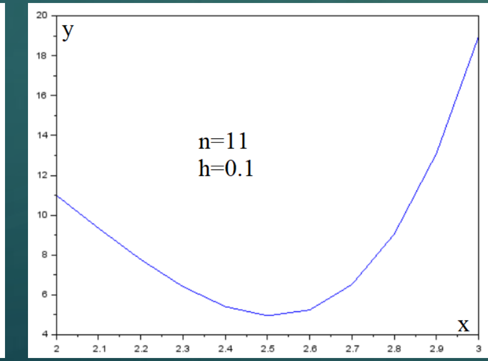
$$(2+h)y_{i-1} + (2h^2x_i - 4)y_i + (2-h)y_{i+1} = 2h^2\, e^{x_i}({x_i}^2+1)$$

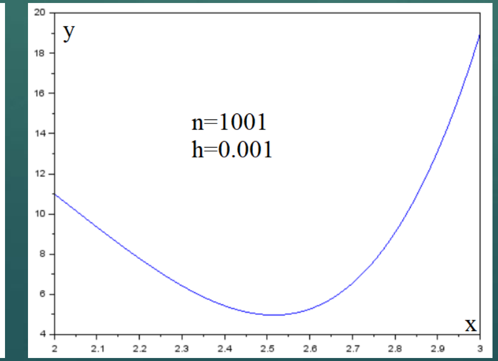
$x \in [2.0, 3.0]$
$f(2.0) = 11.0 \quad f(3.0) = 19$

```
--> deff("y=fl(i)","y=2+h")

--> deff("y=fp(i)","y=2*h^2*t(i)-4")

--> deff("y=fu(i)","y=2-h")

--> deff("y=fr(i)","y=2*h^2.*exp(t(i)).*(t(i)^2+1)");

--> [t,y]=ElementosFinitos_a(2,3,11,19,6,fl,fp,fu,fr,%t)
   [A r]
   1.     0.       0.       0.       0.       0.     11.
   2.2   -3.824    1.8      0.       0.       0.     4.216486307
   0.     2.2     -3.808    1.8      0.       0.     5.961333787
   0.     0.       2.2     -3.792    1.8      0.     8.358288572
   0.     0.       0.       2.2     -3.776    1.8    11.6296542
   0.     0.       0.       0.       0.       1.     19.
   [i x y]
   2.     11.
   2.2    7.744532792
   2.4    5.350877614
   2.6    5.166390887
   2.8    8.987395592
   3.     19.
```

```
--> [t,y]=ElementosFinitos_a(2,3,11,19,11,fl,fp,fu,fr,%t);
   [A r]
   1.    0.       0.       0.       0.       0.       0.       0.       0.       0.       0.    11.
   2.1  -3.958    1.9      0.       0.       0.       0.       0.       0.       0.       0.    0.88358
   0.    2.1     -3.956    1.9      0.       0.       0.       0.       0.       0.       0.    1.05412
   0.    0.       2.1     -3.954    1.9      0.       0.       0.       0.       0.       0.    1.25475
   0.    0.       0.       2.1     -3.952    1.9      0.       0.       0.       0.       0.    1.49033
   0.    0.       0.       0.       2.1     -3.95     1.9      0.       0.       0.       0.    1.76646
   0.    0.       0.       0.       0.       2.1     -3.948    1.9      0.       0.       0.    2.08957
   0.    0.       0.       0.       0.       0.       2.1     -3.946    1.9      0.       0.    2.46706
   0.    0.       0.       0.       0.       0.       0.       2.1     -3.944    1.9      0.    2.90741
   0.    0.       0.       0.       0.       0.       0.       0.       2.1     -3.942    1.9   3.42037
   0.    0.       0.       0.       0.       0.       0.       0.       0.       0.       1.    19.
   [i x y]
   2.    11.
   2.1   9.34464
   2.2   7.77351
   2.3   6.41178
   2.4   5.41187
   2.5   4.95438
   2.6   5.24807
   2.7   6.52881
   2.8   9.05726
   2.9   13.1151
   3.    19.
```








```
--> [t,y]=ElementosFinitos_a(2,3,11,19,1001,fl,fp,fu,fr,%t);
```

Método das diferenças em problemas de contorno
Exemplo 2

- Seja a seguinte equação diferencial

$$y'' - 0.01\,y = -0.2 \qquad (i)$$

Domínio $t \in [-2,10]$,
Condições inicial e final : $f(-2) = 1$ e $f(10) = 5$

Para discretizarmos (i) usamos as seguintes diferenças finitas centradas:

$$y(x) \cong y_i \qquad (ii)$$

$$y'(x) \cong \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \qquad (iii)$$

$$y''(x) \cong \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \qquad (iv)$$

$$t \cong t_i = a + ih \qquad (v)$$

Substituindo as diferenças finitas (ii), (iii), (iv) e (v) na equação diferencial (i) teremos:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - 0.01\mathrm{y_i} = -0.2$$

$$-y_{i-1} + (2 + 0.01h^2)y_i - y_{i+1} = 0.2\mathrm{h}^2 \qquad \begin{cases} e_l = -1 \\ e_p = 2 + 0.01h^2 \\ e_u = -1 \\ r = 0.2h^2 \end{cases}$$

$$y'' - 0.01\, y = -0.2$$

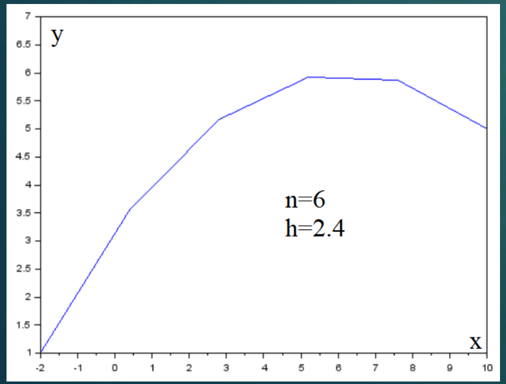
$$-y_{i-1} + (2 + 0.01h^2)y_i - y_{i+1} = 0.2\mathrm{h}^2$$

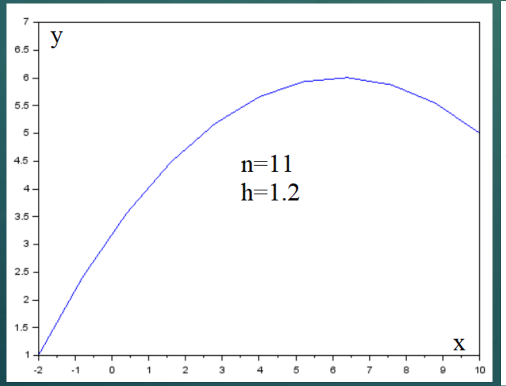
$t \in [-2,10]$,
$f(-2) = 1 \quad f(10) = 5$

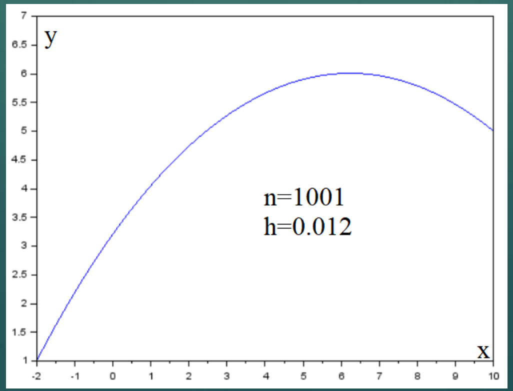
$$\begin{cases} e_l = -1 \\ e_p = 2 + 0.01h^2 \\ e_u = -1 \\ r = 0.2h^2 \end{cases}$$

```
--> deff("y=fl(i)","y=-1")

--> deff("y=fp(i)","y=2+0.01*h^2")

--> deff("y=fu(i)","y=-1")

--> deff("y=fr(i)","y=0.2*h^2");

--> [t,y]=ElementosFinitos_a(-2,10,1,5,6,fl,fp,fu,fr,%t);
  [A r]
  1.   0.       0.       0.       0.       0.   1.
 -1.   2.0576  -1.       0.       0.       0.   1.152
  0.  -1.       2.0576  -1.       0.       0.   1.152
  0.   0.      -1.       2.0576  -1.       0.   1.152
  0.   0.       0.      -1.       2.0576  -1.   1.152
  0.   0.       0.       0.       0.       1.   5.
  [i x y]
 -2.    1.
  0.4   3.55739
  2.8   5.16769
  5.2   5.92364
  7.6   5.8688
  10.   5.
```

```
--> [t,y]=ElementosFinitos_a(-2,10,1,5,11,fl,fp,fu,fr,%t);
  [A r]
  1.   0.       0.       0.       0.       0.       0.       0.       0.       0.       0.   1.
 -1.   2.0144  -1.       0.       0.       0.       0.       0.       0.       0.       0.   0.288
  0.  -1.       2.0144  -1.       0.       0.       0.       0.       0.       0.       0.   0.288
  0.   0.      -1.       2.0144  -1.       0.       0.       0.       0.       0.       0.   0.288
  0.   0.       0.      -1.       2.0144  -1.       0.       0.       0.       0.       0.   0.288
  0.   0.       0.       0.      -1.       2.0144  -1.       0.       0.       0.       0.   0.288
  0.   0.       0.       0.       0.      -1.       2.0144  -1.       0.       0.       0.   0.288
  0.   0.       0.       0.       0.       0.      -1.       2.0144  -1.       0.       0.   0.288
  0.   0.       0.       0.       0.       0.       0.      -1.       2.0144  -1.       0.   0.288
  0.   0.       0.       0.       0.       0.       0.       0.      -1.       2.0144  -1.   0.288
  0.   0.       0.       0.       0.       0.       0.       0.       0.       0.       1.   5.
  [i x y]
 -2.    1.
 -0.8   2.40813
  0.4   3.56294
  1.6   4.48106
  2.8   5.1757
  4.    5.65687
  5.2   5.9315
  6.4   6.00355
  7.6   5.87404
  8.8   5.54113
  10.   5.
```








```
--> [t,y]=ElementosFinitos_a(-2,10,1,5,1001,fl,fp,fu,fr,%t);
```

Método das diferenças em problemas de contorno
Exemplo 3

- Seja a seguinte equação diferencial

$$y'' - 7\,y' + 12y = cos\left(\frac{t}{20}\right) \qquad (i)$$

Domínio $t \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$,

Condições inicial e final : $f(0) = 0.11$ e $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$

Para discretizarmos (i) usamos as seguintes diferenças finitas centradas:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - 7\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\mathrm{h}} + 12\mathrm{y_i} = \cos\left(\frac{\mathrm{t_i}}{20}\right)$$

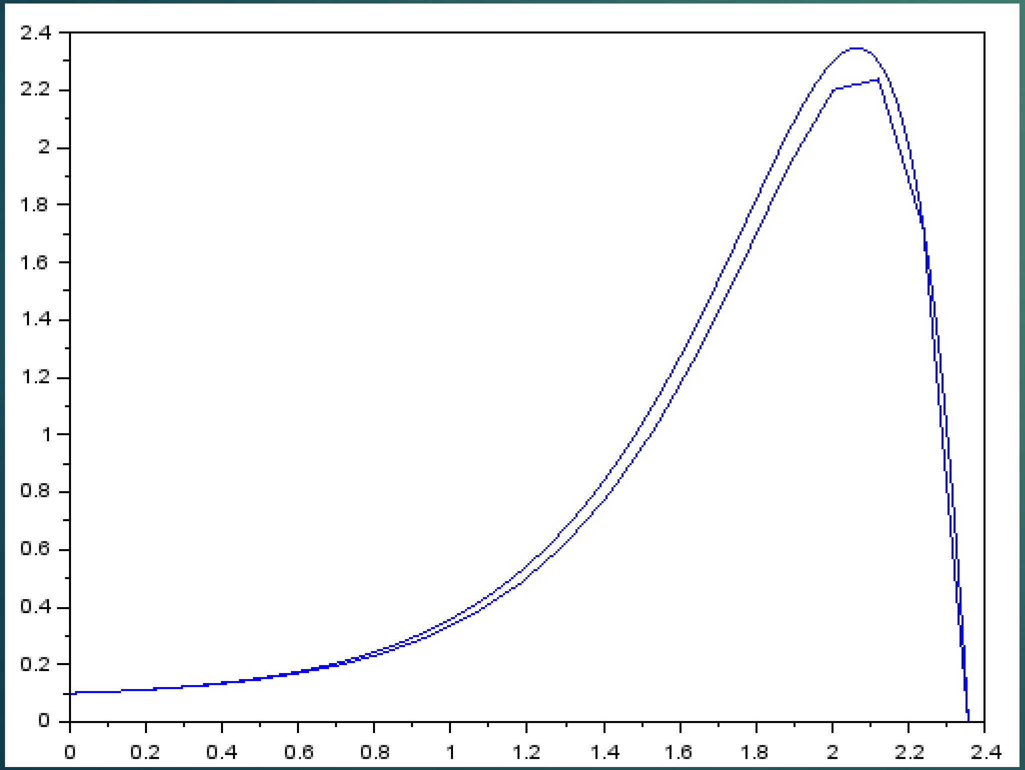
Tirando do mínimo múltiplo comum e rearranjando, teremos:

$$(2 + 7h)y_{i-1} + (24h^2 - 4)y_i + (2 - 7\mathrm{h})y_{i+1} = 2\mathrm{h}^2\cos\left(\frac{t_i}{20}\right)$$

$$\begin{cases} e_l = 2 + 7h \\ e_p = 24h^2 - 4 \\ e_u = 2 - 7\mathrm{h} \\ r = 2\mathrm{h}^2\cos\left(\frac{t_i}{20}\right) \end{cases}$$

```
--> deff("y=fl(i)","y=2+7*h")

--> deff("y=fp(i)","y=24*h^2-4")

--> deff("y=fu(i)","y=2-7*h")

--> deff("y=fr(i)","y=2*h^2*cos(t(i)/20)");

--> [t,y]=ElementosFinitos_a(0,3*%pi/4,0.1,0,21,fl,fp,fu,fr,%t);
```

```
--> [t,y]=ElementosFinitos_a(0,3*%pi/4,0.1,0,1001,fl,fp,fu,fr,%t);
```



$$(2+7h)y_{i-1}+(24h^2-4)y_i+(2-7\text{h})y_{i+1}=2\text{h}^2\cos\left(\frac{t_i}{20}\right)$$

Domínio $t \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$,

Condições iniciais : $f(0)=0.1$ e $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=0$

$$\begin{cases} e_l = 2+7h \\ e_p = 24h^2-4 \\ e_u = 2-7\text{h} \\ r = 2\text{h}^2\cos\left(\frac{t_i}{20}\right) \end{cases}$$

Conteúdo Adicional:

Método das diferenças em problemas de contorno
Contornos Definidos por Derivadas (Conteúdo Opcional)

- Seja a seguinte equação diferencial referente a um problema de contorno, definido no domínio $x \in [a, b]$:

$$y'' - y' + ty = e^t(t^2 + 1) \qquad (i)$$

- A solução desta equação $y = f(t)$, além de satisfazer e equação diferencial listada acima no intervalo $t \in [a, b]$ deve também atender às condições iniciais $f(a) = \alpha$ no início do intervalo e $f'(b) = \beta$ no final do intervalo, ou $f'(a) = \alpha$ no início do intervalo e $f(b) = \beta$, ou $f'(a) = \alpha$ no início do intervalo e $f'(b) = \beta$.

Vamos então escolher o seguinte domínio e as seguintes condições inicial e final:

Domínio $x \in [a,\ b]$
Condições iniciais : $f(a) = \alpha \quad f(b) = \beta$
ou $f(a) = \alpha \quad f'(b) = \beta$
ou $f'(a) = \alpha$ e $f(b) = \beta$
ou $f'(a) = \alpha$ e $f'(b) = \beta$

- Preparamos da mesma maneira a equação de recorrência, agora para i=1:n-2

$$(2+h)y_{i-1} + (2h^2t_i - 4)y_i + (2-h)y_{i+1} = 2h^2e^{t_i}(t_i+1) \qquad i = 1{:}\,n-2$$

$$e_l(i)y_{i-1} + e_p(i)\,y_i + e_u(i)y_{i+1} = r(i) \qquad i = 1{:}\,n-2$$

- Ao montar o sistema de equações, deveremos acrescentar duas incógnitas, uma no início outra no final do sistema, pois y_o e y_{n-1} podem ser incógnitas. Se especificarmos y'_o, y_o será uma incógnita. Se especificarmos y'_{n-1}, y_{n-1} será uma incógnita e se especificarmos y'_o e y'_{n-1}, tanto y_o quanto y_{n-1} serão incógnitas.

Caso 1 - Condições de Contorno $y_o = \alpha$ e $\mathrm{y}_n = \beta$

$i = 0$ $\quad y_0 - \alpha = 0$

$i = n-1$ $\quad \mathrm{y}_{n-1} - \beta = 0$

Caso 2 - Condições de Contorno $y'_o = \alpha$ e $\mathrm{y}_n = \beta$

$i = 0$ $\quad e_p(0)\,y_0 + (e_u(0) + e_l(0))y_1 = r(0) + 2\alpha e_l(0)h$

$i = n-1$ $\quad \mathrm{y}_{n-1} - \beta = 0$

Caso 3 - Condições de Contorno $y_o = \alpha$ e $\mathrm{y}'_n = \beta$

$i = 0$ $\quad y_0 - \alpha = 0$

$i = n-1$ $\quad (e_l(n-1) + e_u(n-1))y_{n-2} + e_p(n-1)\,y_{n-1} = r(n-1) - 2\beta h e_u(n-1)$

Caso 4 - Condições de Contorno $y'_o = \alpha$ e $\mathrm{y}'_n = \beta$

$i = 0$ $\quad e_p(0)\,y_0 + (e_u(0) + e_l(0))y_1 = r(0) + 2\alpha e_l(0)h$

$i = n-1$ $\quad (e_l(n-1) + e_u(n-1))y_{n-2} + e_p(n-1)\,y_{n-1} = r(n-1) - 2\beta h e_u(n-1)$

Para os 4 casos:

$i = 1{:}\,n-2$

$e_l(i)y_{i-1} + e_p(i)\,y_i + e_u(i)y_{i+1} = r(i)$

Dedução 1ª equação $y'_o = \alpha$

$$y'_o = \alpha \qquad (i)$$

$$y'_o \cong \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} \qquad (ii)$$

Substituindo (i) em (ii) e isolando y_{-1}, teremos

$$y_{-1} \cong \mathrm{y}_1 - 2\mathrm{h}\alpha \qquad (iii)$$

Mas, $e_l(i)y_{i-1} + e_p(i)\, y_i + e_u(i)y_{i+1} = r(i)$

Com $i = 0$ tempos

$$e_l(0)y_{-1} + e_p(0)\, y_0 + e_u(0)y_1 = r(0) \qquad (iv)$$

Substituindo (iii) em (iv) teremos

$$e_l(0)(\mathrm{y}_1 - 2\mathrm{h}\alpha\ ) + e_p(0)\, y_0 + e_u(0)y_1 = r(0)$$

$$\boxed{e_p(0)\, y_0 + (e_u(0) + e_l(0))y_1 = r(0) + 2\alpha e_l(0)h}$$

Dedução última equação $y'_{n-1} = \beta$

$$y'_{n-1} = \beta \qquad (i)$$

$$y'_{n-1} \cong \frac{y_n - y_{n-2}}{2h} \qquad (ii)$$

Substituindo (i) em (ii) e isolando y_n, teremos

$$y_n \cong y_{n-2} + 2h\beta \qquad (iii)$$

Mas, $e_l(i)y_{i-1} + e_p(i)\, y_i + e_u(i)y_{i+1} = r(i)$

Com $i = n - 1$ teremos

$$e_l(n-1)y_{n-2} + e_p(n-1)\, y_{n-1} + e_u(n-1)y_n = r(n-1) \qquad (iv)$$

Substituindo (iii) em (iv) teremos

$$e_l(n-1)y_{n-2} + e_p(n-1)\, y_{n-1} + e_u(n-1)(y_{n-2} + 2h\beta) = r(n-1)$$

$$\boxed{(e_l(n-1) + e_u(n-1))y_{n-2} + e_p(n-1)\, y_{n-1} = r(n-1) - 2\beta h e_u(n-1)}$$

Algoritmo com n equações, e n incógnitas

```
function [t,y]=ElementosFinitos(a,b,ya,yb,n,fl,fp,fu,fr,tipo,prt)
    i=1:n
    h=(b-a)/(n-1)
    t=[a+(i-1)*h]
    if tipo==1 then  // ya e yb
        el= [feval(1:n-2,fl) 0]
        eu= [0 feval(2:n-1,fu)]
        ep= [1 feval(2:n-1,fp) 1]
        r=  [ya feval(2:n-1,fr) yb]
    elseif tipo==2 then  // ya e dyb
        eu= [0 feval(2:n-1,fu)]
        el= feval(1:n-1,fl)
        el(n-1)=el(n-1)+eu(n-1)
        ep= [1 feval(2:n,fp)]
        r=  [ya feval(2:n,fr)]
        r(n)=r(n)-2*yb*h*eu(n-1)
    elseif tipo==3 then   // dya e yb
         el= [feval(1:n-2,fl) 0]
         eu= feval(1:n-1,fu)
         eu(1)=eu(1)+el(1)
         ep= [feval(1:n-1,fp) 1]
         r=  [feval(1:n-1,fr) yb]
         r(1)=r(1)+2*ya*h*el(1)
    elseif tipo==4   //dya e dyb
         el= feval(1:n-1,fl)
         eu= feval(1:n-1,fu)
         el(n-1)=el(n-1)+eu(n-1)
         eu(1)=eu(1)+el(1)
         ep= feval(1:n,fp)
         r=  feval(1:n,fr)
         r(1)=r(1)+2*ya*h*el(1)
         r(n)=r(n)-2*yb*h*eu(n-1)
    end
    y = tridiagonal(el,ep,eu,r)
```

$$e_l(i)y_{i-1} + e_p(i)\, y_i + e_u(i)y_{i+1} = r(i)$$

```
--> deff("y=fl(i)","y=2+h")

--> deff("y=fp(i)","y=2*h^2*t(i)-4")

--> deff("y=fu(i)","y=2-h")

--> deff("y=fr(i)","y=2*h^2.*exp(t(i)).*(t(i)^2+1)");
```

```
    if (prt)
        if (n<20) then
            printf("   [A r]")
            disp([diag(eu,1)+diag(ep)+diag(el,-1) r'])
            printf("   [i x y]")
            disp([[0:n-1]' t' y'])
        end
        plot(t,y,'b')
        printf("h=%.3f\n",h);
        printf("y(%.3f)=%.3f dy(%.3f)=%.3f\n",...
          t(1),y(1),t(1),(-y(3)+4*y(2)-3*y(1))/(2*h));
        printf("y(%.3f)=%.3f dy(%.3f)=%.3f\n",...
          t(n),y(n),t(n),(3*y(n)-4*y(n-1)+y(n-2))/(2*h));
    end
endfunction
```

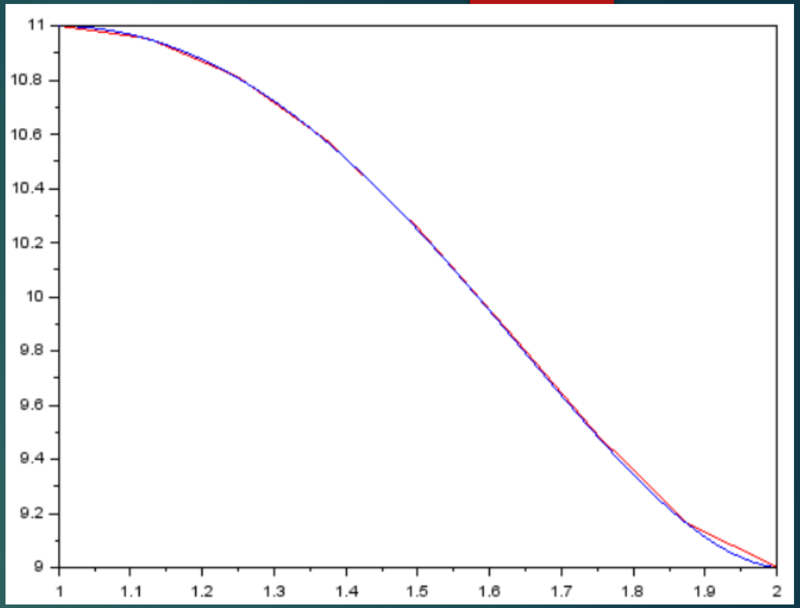
Tipo 1

$t \in [1.0, 2.0]$, $f(1.0) = 11.0$, $f(2.0) = 9$ n=9

$$y'' - y' + xy = e^t(t^2 + 1)$$

$$(2 + h)y_{i-1} + (2h^2 t_i - 4)y_i + (2 - h)y_{i+1} = 2h^2\, e^{t_i}({t_i}^2 + 1)$$

$$e_l(i)y_{i-1} + e_p(i)\, y_i + e_u(i)y_{i+1} = r(i)$$




```
--> deff("y=fl(i)","y=2+h")

--> deff("y=fp(i)","y=2*h^2*t(i)-4")

--> deff("y=fu(i)","y=2-h")

--> deff("y=fr(i)","y=2*h^2.*exp(t(i)).*(t(i)^2+1)");
```

```
--> [t,y]=ElementosFinitos(1,2,11,9,9,fl,fp,fu,fr,1,%t);
  [A r]
   1.      0.        0.        0.        0.        0.        0.        0.        0.     11.
   2.125  -3.96484   1.875     0.        0.        0.        0.        0.        0.     0.21808
   0.      2.125    -3.96094   1.875     0.        0.        0.        0.        0.     0.2795
   0.      0.        2.125    -3.95703   1.875     0.        0.        0.        0.     0.35727
   0.      0.        0.        2.125    -3.95312   1.875     0.        0.        0.     0.45517
   0.      0.        0.        0.        2.125    -3.94922   1.875     0.        0.     0.57777
   0.      0.        0.        0.        0.        2.125    -3.94531   1.875     0.     0.73056
   0.      0.        0.        0.        0.        0.        2.125    -3.94141   1.875  0.92017
   0.      0.        0.        0.        0.        0.        0.        0.        1.     9.
  [i x y]
   0.   1.      11.
   1.   1.125   10.9532
   2.   1.25    10.811
   3.   1.375   10.5738
   4.   1.5     10.2531
   5.   1.625   9.87612
   6.   1.75    9.48954
   7.   1.875   9.16427
   8.   2.      9.
h=0.125
y(1.000)=11.000 dy(1.000)=0.007
y(2.000)=9.000 dy(2.000)=-0.670
```

```
--> [t,y]=ElementosFinitos_a(1,2,11,9,9,fl,fp,fu,fr,%t);
  [A r]
   1.      0.        0.        0.        0.        0.        0.        0.        0.     11.
   2.125  -3.96484   1.875     0.        0.        0.        0.        0.        0.     0.21808
   0.      2.125    -3.96094   1.875     0.        0.        0.        0.        0.     0.2795
   0.      0.        2.125    -3.95703   1.875     0.        0.        0.        0.     0.35727
   0.      0.        0.        2.125    -3.95312   1.875     0.        0.        0.     0.45517
   0.      0.        0.        0.        2.125    -3.94922   1.875     0.        0.     0.57777
   0.      0.        0.        0.        0.        2.125    -3.94531   1.875     0.     0.73056
   0.      0.        0.        0.        0.        0.        2.125    -3.94141   1.875  0.92017
   0.      0.        0.        0.        0.        0.        0.        0.        1.     9.
  [i x y]
   1.      11.
   1.125   10.9532
   1.25    10.811
   1.375   10.5738
   1.5     10.2531
   1.625   9.87612
   1.75    9.48954
   1.875   9.16427
   2.      9.
```

```
--> [t,y]=ElementosFinitos(1,2,11,9,1001,fl,fp,fu,fr,1,%t);
h=0.001
y(1.000)=11.000 dy(1.000)=-0.034
y(2.000)=9.000 dy(2.000)=-0.312
```

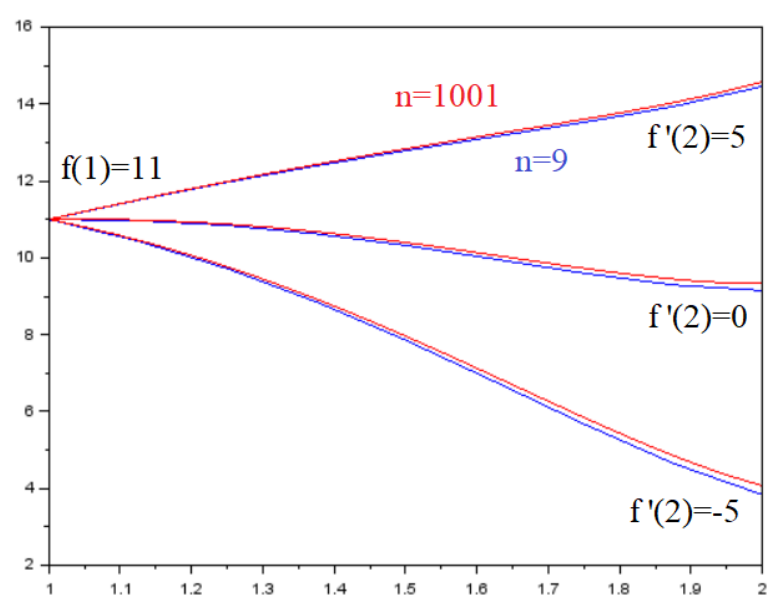
$y'' - y' + xy = e^t(t^2 + 1)$ $t \in [1.0, 2.0]$, $f(1.0) = 11.0$, $f'(2.0) = [-5, 0, 5]$ n=[9, 1001]

```
--> [t,y]=ElementosFinitos(1,2,11,-5,9,fl,fp,fu,fr,2,%t);
   [A r]
   1.       0.         0.         0.         0.         0.         0.         0.         0.         11.
   2.125   -3.96484    1.875      0.         0.         0.         0.         0.         0.         0.21808
   0.       2.125     -3.96094    1.875      0.         0.         0.         0.         0.         0.2795
   0.       0.         2.125     -3.95703    1.875      0.         0.         0.         0.         0.35727
   0.       0.         0.         2.125     -3.95312    1.875      0.         0.         0.         0.45517
   0.       0.         0.         0.         2.125     -3.94922    1.875      0.         0.         0.57777
   0.       0.         0.         0.         0.         2.125     -3.94531    1.875      0.         0.73056
   0.       0.         0.         0.         0.         0.         2.125     -3.94141    1.875      0.92017
   0.       0.         0.         0.         0.         0.         0.         4.        -3.9375     3.49829
   [i x y]
   0.   1.      11.
   1.   1.125   10.4365
   2.   1.25    9.71842
   3.   1.375   8.85124
   4.   1.5     7.85613
   5.   1.625   6.7747
   6.   1.75    5.67374
   7.   1.875   4.65013
   8.   2.      3.83549
h=0.125
y(1.000)=11.000 dy(1.000)=-3.890
y(2.000)=3.835 dy(2.000)=-5.681

--> [t,y]=ElementosFinitos(1,2,11,-5,1001,fl,fp,fu,fr,2,%t);
h=0.001
y(1.000)=11.000 dy(1.000)=-3.749
y(2.000)=4.075 dy(2.000)=-5.000
```

```
--> [t,y]=ElementosFinitos(1,2,11,5,9,fl,fp,fu,fr,2,%t);
   [A r]
   1.       0.         0.         0.         0.         0.         0.         0.         0.         11.
   2.125   -3.96484    1.875      0.         0.         0.         0.         0.         0.         0.21808
   0.       2.125     -3.96094    1.875      0.         0.         0.         0.         0.         0.2795
   0.       0.         2.125     -3.95703    1.875      0.         0.         0.         0.         0.35727
   0.       0.         0.         2.125     -3.95312    1.875      0.         0.         0.         0.45517
   0.       0.         0.         0.         2.125     -3.94922    1.875      0.         0.         0.57777
   0.       0.         0.         0.         0.         2.125     -3.94531    1.875      0.         0.73056
   0.       0.         0.         0.         0.         0.         2.125     -3.94141    1.875      0.92017
   0.       0.         0.         0.         0.         0.         0.         4.        -3.9375    -1.18921
   [i x y]
   0.   1.      11.
   1.   1.125   11.4994
   2.   1.25    11.966
   3.   1.375   12.3946
   4.   1.5     12.7869
   5.   1.625   13.1546
   6.   1.75    13.5231
   7.   1.875   13.936
   8.   2.      14.4593
h=0.125
y(1.000)=11.000 dy(1.000)=4.126
y(2.000)=14.459 dy(2.000)=4.627

--> [t,y]=ElementosFinitos(1,2,11,5,1001,fl,fp,fu,fr,2,%t);
h=0.001
y(1.000)=11.000 dy(1.000)=4.174
y(2.000)=14.580 dy(2.000)=5.000
```

Tipo 2

```
--> [t,y]=ElementosFinitos(1,2,11,0,9,fl,fp,fu,fr,2,%t);
   [A r]
   1.       0.         0.         0.         0.         0.         0.         0.         0.         11.
   2.125   -3.96484    1.875      0.         0.         0.         0.         0.         0.         0.21808
   0.       2.125     -3.96094    1.875      0.         0.         0.         0.         0.         0.2795
   0.       0.         2.125     -3.95703    1.875      0.         0.         0.         0.         0.35727
   0.       0.         0.         2.125     -3.95312    1.875      0.         0.         0.         0.45517
   0.       0.         0.         0.         2.125     -3.94922    1.875      0.         0.         0.57777
   0.       0.         0.         0.         0.         2.125     -3.94531    1.875      0.         0.73056
   0.       0.         0.         0.         0.         0.         2.125     -3.94141    1.875      0.92017
   0.       0.         0.         0.         0.         0.         0.         4.        -3.9375     1.15454
   [i x y]
   0.   1.      11.
   1.   1.125   10.9679
   2.   1.25    10.8422
   3.   1.375   10.6229
   4.   1.5     10.3215
   5.   1.625   9.96463
   6.   1.75    9.59843
   7.   1.875   9.29308
   8.   2.      9.14737
h=0.125
y(1.000)=11.000 dy(1.000)=0.118
y(2.000)=9.147 dy(2.000)=-0.527

--> [t,y]=ElementosFinitos(1,2,11,0,1001,fl,fp,fu,fr,2,%t);
h=0.001
y(1.000)=11.000 dy(1.000)=0.213
y(2.000)=9.327 dy(2.000)=-0.000
```



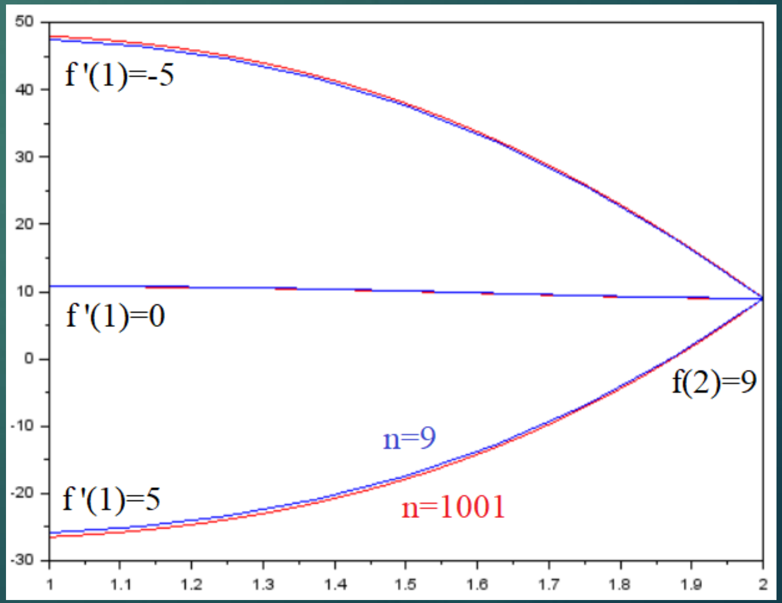
$y'' - y' + xy = e^t(t^2+1)$ $\quad t \in [1.0, 2.0]$, $f'(1.0) = [-5, 0, 5]$, $f(2.0)$=9 n=[9, 1001]

```
--> [t,y]=ElementosFinitos(1,2,-5,9,9,fl,fp,fu,fr,3,%t);
  [A r]
 -3.96875  4.        0.        0.        0.        0.        0.        0.        0.     -2.48636
  2.125   -3.96484   1.875     0.        0.        0.        0.        0.        0.      0.21808
  0.       2.125    -3.96094   1.875     0.        0.        0.        0.        0.      0.2795
  0.       0.        2.125    -3.95703   1.875     0.        0.        0.        0.      0.35727
  0.       0.        0.        2.125    -3.95312   1.875     0.        0.        0.      0.45517
  0.       0.        0.        0.        2.125    -3.94922   1.875     0.        0.      0.57777
  0.       0.        0.        0.        0.        2.125    -3.94531   1.875     0.      0.73056
  0.       0.        0.        0.        0.        0.        2.125    -3.94141   1.875   0.92017
  0.       0.        0.        0.        0.        0.        0.        0.        1.      9.
  [i x y]
  0.   1.      47.4686
  1.   1.125   46.4762
  2.   1.25    44.5963
  3.   1.375   41.6857
  4.   1.5     37.6224
  5.   1.625   32.3194
  6.   1.75    25.7422
  7.   1.875   17.9268
  8.   2.      9.
h=0.125
y(1.000)=47.469 dy(1.000)=-4.390
y(2.000)=9.000 dy(2.000)=-75.861

--> [t,y]=ElementosFinitos(1,2,-5,9,1001,fl,fp,fu,fr,3,%t);
h=0.001
y(1.000)=47.951 dy(1.000)=-5.000
y(2.000)=9.000 dy(2.000)=-76.064
```

```
--> [t,y]=ElementosFinitos(1,2,0,9,9,fl,fp,fu,fr,3,%t);
  [A r]
 -3.96875  4.        0.        0.        0.        0.        0.        0.        0.      0.16989
  2.125   -3.96484   1.875     0.        0.        0.        0.        0.        0.      0.21808
  0.       2.125    -3.96094   1.875     0.        0.        0.        0.        0.      0.2795
  0.       0.        2.125    -3.95703   1.875     0.        0.        0.        0.      0.35727
  0.       0.        0.        2.125    -3.95312   1.875     0.        0.        0.      0.45517
  0.       0.        0.        0.        2.125    -3.94922   1.875     0.        0.      0.57777
  0.       0.        0.        0.        0.        2.125    -3.94531   1.875     0.      0.73056
  0.       0.        0.        0.        0.        0.        2.125    -3.94141   1.875   0.92017
  0.       0.        0.        0.        0.        0.        0.        0.        1.      9.
  [i x y]
  0.   1.      10.814
  1.   1.125   10.772
  2.   1.25    10.6387
  3.   1.375   10.4151
  4.   1.5     10.1135
  5.   1.625   9.76165
  6.   1.75    9.40664
  7.   1.875   9.11957
  8.   2.      9.
h=0.125
y(1.000)=10.814 dy(1.000)=0.029
y(2.000)=9.000 dy(2.000)=-0.287

--> [t,y]=ElementosFinitos(1,2,0,9,1001,fl,fp,fu,fr,3,%t);
h=0.001
y(1.000)=10.745 dy(1.000)=0.000
y(2.000)=9.000 dy(2.000)=0.210
```

Tipo 3

```
--> [t,y]=ElementosFinitos(1,2,5,9,9,fl,fp,fu,fr,3,%t);
  [A r]
 -3.96875  4.        0.        0.        0.        0.        0.        0.        0.      2.82614
  2.125   -3.96484   1.875     0.        0.        0.        0.        0.        0.      0.21808
  0.       2.125    -3.96094   1.875     0.        0.        0.        0.        0.      0.2795
  0.       0.        2.125    -3.95703   1.875     0.        0.        0.        0.      0.35727
  0.       0.        0.        2.125    -3.95312   1.875     0.        0.        0.      0.45517
  0.       0.        0.        0.        2.125    -3.94922   1.875     0.        0.      0.57777
  0.       0.        0.        0.        0.        2.125    -3.94531   1.875     0.      0.73056
  0.       0.        0.        0.        0.        0.        2.125    -3.94141   1.875   0.92017
  0.       0.        0.        0.        0.        0.        0.        0.        1.      9.
  [i x y]
  0.   1.     -25.8406
  1.   1.125  -24.9322
  2.   1.25   -23.3189
  3.   1.375  -20.8556
  4.   1.5    -17.3953
  5.   1.625  -12.7961
  6.   1.75   -6.9289
  7.   1.875   0.3123
  8.   2.      9.
h=0.125
y(1.000)=-25.841 dy(1.000)=4.448
y(2.000)=9.000 dy(2.000)=75.288

--> [t,y]=ElementosFinitos(1,2,5,9,1001,fl,fp,fu,fr,3,%t);
h=0.001
y(1.000)=-26.460 dy(1.000)=5.000
y(2.000)=9.000 dy(2.000)=76.485
```

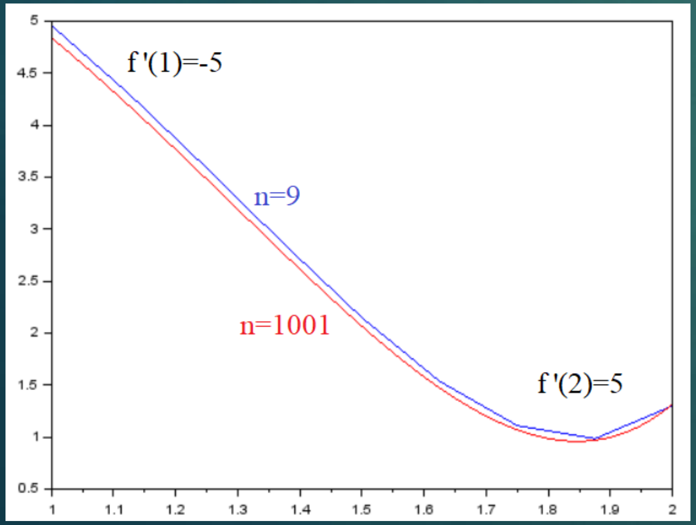


$$y'' - y' + xy = e^t(t^2 + 1)$$

$t \in [1.0, 2.0]$, $f'(1.0) = [-5, 5]$, $f'(1.0) = [5, -5,]$, n=[9, 1001]

```
--> [t,y]=ElementosFinitos(1,2,-5,5,9,fl,fp,fu,fr,4,%t);
  [A r]
 -3.96875   4.         0.         0.         0.         0.         0.         0.         0.        -2.48636
  2.125    -3.96484    1.875      0.         0.         0.         0.         0.         0.         0.21808
  0.        2.125     -3.96094    1.875      0.         0.         0.         0.         0.         0.2795
  0.        0.         2.125     -3.95703    1.875      0.         0.         0.         0.         0.35727
  0.        0.         0.         2.125     -3.95312    1.875      0.         0.         0.         0.45517
  0.        0.         0.         0.         2.125     -3.94922    1.875      0.         0.         0.57777
  0.        0.         0.         0.         0.         2.125     -3.94531    1.875      0.         0.73056
  0.        0.         0.         0.         0.         0.         2.125     -3.94141    1.875      0.92017
  0.        0.         0.         0.         0.         0.         0.         4.        -3.9375    -1.18921
  [i x y]
  0.   1.      4.95998
  1.   1.125   4.29964
  2.   1.25    3.58695
  3.   1.375   2.85357
  4.   1.5     2.14756
  5.   1.625   1.53648
  6.   1.75    1.11045
  7.   1.875   0.98487
  8.   2.      1.30252
h=0.125
y(1.000)=4.960 dy(1.000)=-5.073
y(2.000)=1.303 dy(2.000)=4.314

--> [t,y]=ElementosFinitos(1,2,-5,5,1001,fl,fp,fu,fr,4,%t);
h=0.001
y(1.000)=4.842 dy(1.000)=-5.000
y(2.000)=1.319 dy(2.000)=5.000
```

```
--> [t,y]=ElementosFinitos(1,2,5,-5,9,fl,fp,fu,fr,4,%t);
  [A r]
 -3.96875   4.         0.         0.         0.         0.         0.         0.         0.         2.82614
  2.125    -3.96484    1.875      0.         0.         0.         0.         0.         0.         0.21808
  0.        2.125     -3.96094    1.875      0.         0.         0.         0.         0.         0.2795
  0.        0.         2.125     -3.95703    1.875      0.         0.         0.         0.         0.35727
  0.        0.         0.         2.125     -3.95312    1.875      0.         0.         0.         0.45517
  0.        0.         0.         0.         2.125     -3.94922    1.875      0.         0.         0.57777
  0.        0.         0.         0.         0.         2.125     -3.94531    1.875      0.         0.73056
  0.        0.         0.         0.         0.         0.         2.125     -3.94141    1.875      0.92017
  0.        0.         0.         0.         0.         0.         0.         4.        -3.9375     3.49829
  [i x y]
  0.   1.      16.9262
  1.   1.125   17.5005
  2.   1.25    17.9395
  3.   1.375   18.2124
  4.   1.5     18.2949
  5.   1.625   18.1738
  6.   1.75    17.8524
  7.   1.875   17.3572
  8.   2.      16.7442
h=0.125
y(1.000)=16.926 dy(1.000)=5.135
y(2.000)=16.744 dy(2.000)=-5.374

--> [t,y]=ElementosFinitos(1,2,5,-5,1001,fl,fp,fu,fr,4,%t);
h=0.001
y(1.000)=16.872 dy(1.000)=5.000
y(2.000)=16.721 dy(2.000)=-5.000
```



Tipo 4