Métodos Numéricos para Engenharia

MÓDULO 7– ÁLGEBRA LINEAR NUMÉRICA - COFATORES – CRAMER - GAUSS

PROFESSOR LUCIANO NEVES DA FONSECA

Sistemas Lineares

A resolução de sistemas de equações lineares aparece em quase todos os problemas de engenharia.

Problemas de ajuste de dados, minimização e otimização de funções, problemas inversos, soluções de equações diferenciais pelo método diferenças finitas entre outros.

Neste último são geradas matrizes esparsas de ordem alta.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 & (I) \\ -1x_1 + 2x_2 = 2 & (II) \end{cases}$$

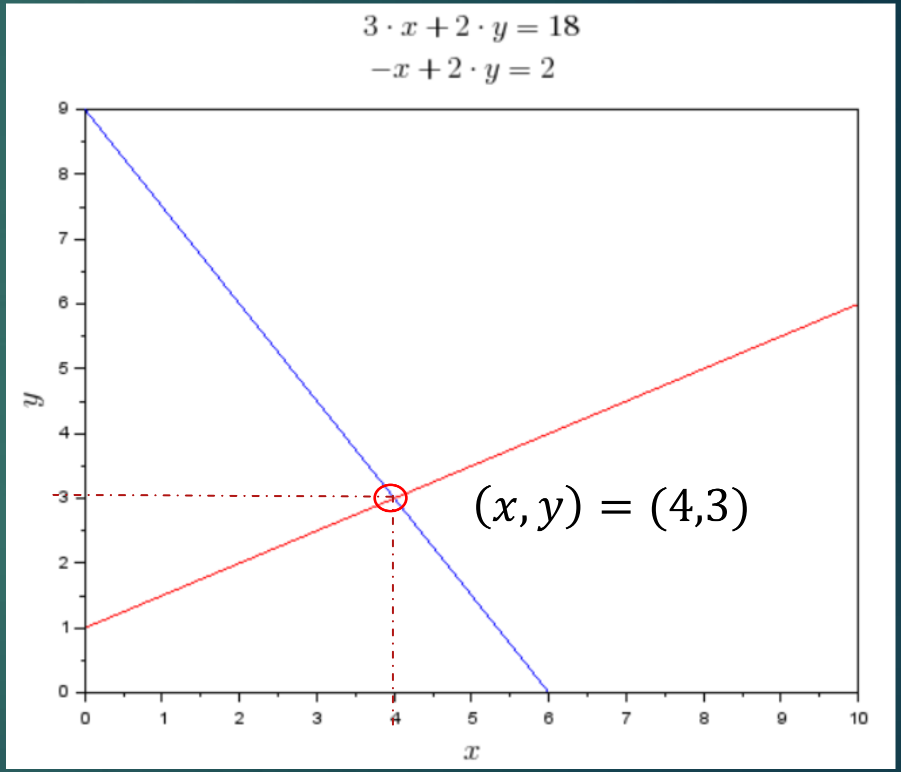
$$(I) - (II)$$

$$4x_1 = 16 \quad \Rightarrow x_1 = 4 \qquad (III)$$

$$(III)\ em\ (II)$$

$$-1(4) + 2x_2 = 2 \quad \Rightarrow x_2 = 3$$

Solução $(x_1, x_2) = (4{,}3)$




```
--> plotimplicit("3*x+2*y=18",0:10,0:9,'b')

--> plotimplicit("-x+2*y=2",0:10,0:9,'r')
```

Resolução de Sistemas Diretamente pela Representação Matricial

Sistema 2x2

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 & (I) \\ -1x_1 + 2x_2 = 2 & (II) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 18 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

$$(A^{-1}A)x = A^{-1}b$$

$$A^{-1}A = I$$

$$x = A^{-1}b$$

$$x = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

```
--> A=[[3,2];[-1,2]]
   3.    2.
  -1.    2.
--> b=[18;2]

   18.
   2.

--> det(A)

   8.

--> Ai=inv(A)
   0.25    -0.25
   0.125    0.375

--> x=inv(A)*b

   4.
   3.
```

Sistema 3x3

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 & (I) \\ -1x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 & (II) \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 & (III) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

$$(A^{-1}A)x = A^{-1}b$$

$$A^{-1}A = I$$

$$x = A^{-1}b$$

$$x = \frac{-1}{49}\begin{bmatrix} -11 & 6 & -7 \\ 3 & -15 & -7 \\ -10 & 1 & 73 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 0.8163265 \\ 0.9591837 \\ 0.4693878 \end{bmatrix}$$

```
--> A=[[2,1,3];[-1,3,2];[3,1,-3]]
   2.    1.    3.
  -1.    3.    2.
   3.    1.   -3.
--> b=[4;3;2]
   4.
   3.
   2.
--> det(A)
  -49.
--> x=inv(A)*b
   0.8163265
   0.9591837
   0.4693878
```

Para resolver um sistema precisamos inverter a matriz característica A e multiplicar o resultado pelo vetor b

Inversa por Cofatores 2x2

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad detA = (3)(2) - (2)(-1) = 8$$

$$Cof(A) = \begin{bmatrix} (-1)^2(2) & (-1)^3(-1) \\ (-1)^3(2) & (-1)^4(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Adj(A) = Cof(A)' = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

```
--> A=[3,2;-1,2]
 A  =

   3.   2.
  -1.   2.

--> Ai = 1/det(A)  * Adjunta(A)
 Ai  =

   0.25    -0.25
   0.125    0.375
```

```
function Cof=Cofatores(A)
    [N,N]=size(A);
    for (col=1:N)
        for (lin=1:N)
            Dij([1:N-1], [1:N-1])=A([1:lin-1 lin+1:N], [1:col-1 col+1:N]);
            Cof(lin,col) = (-1)^(lin+col)*det_cofat(Dij);
        end
    end
end
```

```
function Adj=Adjunta(A)
    Cof=Cofatores(A)
    Adj=Cof';
endfunction
```

```
--> Cofatores(A)
 ans  =

   2.    1.
  -2.    3.
```

```
--> Adjunta(A)
 ans  =

   2.   -2.
   1.    3.
```

```
--> det(A)
 ans  =

   8.
```

```
--> inv(A)
 ans  =

   0.25    -0.25
   0.125    0.375
```

- Para calcularmos o elemento (i, j)da matriz de cofatores de A , calculamos o determinante da submatriz formada pela retirada da linha i e da coluna j da matriz A, e multiplicamos o resultado por $(-1)^{i+j}$
- Para o cálculo da inversa, primeiro calculamos a matriz adjunta, que é a transposta da matriz dos cofatores, e dividimos o resultado pelo determinante de A. Só dividimos pelo determinante na última operação, para evitarmos números fracionários.
- Se tivermos uma novo vetor ‘b’, só teremos que efetuar uma multiplicação por A^{-1} para encontrarmos uma nova solução

Inversa por Cofatores 2x2

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad detA = (3)(2) - (2)(-1) = 8$$

$$Cof(A) = \begin{bmatrix} (-1)^2(2) & (-1)^3(-1) \\ (-1)^3(2) & (-1)^4(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Adj(A) = Cof(A)' = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

```
--> A=[3,2;-1,2];

--> Ai=1/det(A)*Adjunta(A)
 Ai  =

   0.25    -0.25
   0.125    0.375
```

Inversa por Cofatores 3x3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad detA = -49$$

$$Cof(A) = \begin{bmatrix} (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} & (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} & (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$Cof(A) = \begin{bmatrix} -11 & 3 & -10 \\ 6 & -15 & 1 \\ -7 & -7 & 7 \end{bmatrix}$$

$$Adj(A) = Cof(A)' = \begin{bmatrix} -11 & 6 & -7 \\ 3 & -15 & -7 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A) = \frac{1}{-49} \begin{bmatrix} -11 & 6 & -7 \\ 3 & -15 & -7 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

```
--> A=[2,1,3;-1,3,2;3,1,-3];

--> Ai=1/det(A)*Adjunta(A)
 Ai  =

   0.2244898  -0.122449    0.1428571
  -0.0612245   0.3061224   0.1428571
   0.2040816  -0.0204082  -0.1428571
```

- Para calcularmos o elemento (i, j)da matriz de cofatores de A , calculamos o determinante da submatriz formada pela retirada da linha i e da coluna j da matriz A, e multiplicamos o resultado por $(-1)^{i+j}$
- Para o cálculo da inversa, primeiro calculamos a matriz adjunta, que é a transposta da matriz dos cofatores, e dividimos o resultado pelo determinante de A. Só dividimos pelo determinante na última operação, para evitarmos números fracionários.
- Se tivermos uma novo vetor 'b', só teremos que efetuar uma multiplicação por A^{-1} para encontrarmos uma nova solução

Inversa por Cofatores- Sistema 4x4

Matriz Aumentada

$A\,x = b$

$$\begin{bmatrix} 2. & 1. & 3. & 5. \\ -1. & 3. & 2. & 7. \\ 3. & 1. & -3. & 2. \\ -4. & -2. & 1. & 5. \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4. \\ 3. \\ 2. \\ -3. \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2. & 1. & 3. & 5. \\ -1. & 3. & 2. & 7. \\ 3. & 1. & -3. & 2. \\ -4. & -2. & 1. & 5. \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 4. \\ 3. \\ 2. \\ -3. \end{bmatrix} \quad A_{aug} = \left[\begin{array}{cccc|c} 2. & 1. & 3. & 5. & 4. \\ -1. & 3. & 2. & 7. & 3. \\ 3. & 1. & -3. & 2. & 2. \\ -4. & -2. & 1. & 5. & -3. \end{array}\right]$$

$$Cof(A) = \begin{bmatrix} -104. & 92. & -92. & -28. \\ 69. & -148. & 15. & -7. \\ -49. & 28. & 105. & -49. \\ 27. & 104. & 29. & -49. \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{4,1} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1. & 3. & 5. \\ 3. & 2. & 7 \\ 1. & -3. & 2 \end{vmatrix} = 27$$

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} -104. & 69. & -49. & 27. \\ 92. & -148. & 28. & 104. \\ -92. & 15. & 105. & 29. \\ -28. & -7. & -49. & -49. \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{\det(A)} = 1/\det(A) \begin{bmatrix} -104. & 69. & -49. & 27. \\ 92. & -148. & 28. & 104. \\ -92. & 15. & 105. & 29. \\ -28. & -7. & -49. & -49. \end{bmatrix}$$

```
--> A=[2,1,3,5;-1,3,2,7;3,1,-3,2;-4,-2,1,5];

--> Ai=1/det(A)*Adjunta(A)
 Ai  =

   0.1954887  -0.1296992   0.0921053  -0.0507519
  -0.1729323   0.2781955  -0.0526316  -0.1954887
   0.1729323  -0.0281955  -0.1973684  -0.0545113
   0.0526316   0.0131579   0.0921053   0.0921053
```

Como calcular um determinante de A 4x4?

Determinante 2x2, 3x3 e 4x4

Podemos escolher qualquer linha. Nos exemplos abaixo utilizamos a primeira linha

2x2

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12}$$

$$\det(A) = a_{11}|a_{22}| - a_{12}|a_{21}|$$

3x3

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}$$

$$\det(A) = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

4x4

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\,\Delta_{13} + a_{14}\Delta_{14}$$

$$\det(A) = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{14}(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Algoritmo para o cálculo do Determinante por Cofatores

```
function d=det_cofat(A)
    [N,N]=size(A);
    if N==1 then
        d=A
        return
    end
    for (col=1:N)
        D([1:N-1], [1:N-1])=A([2:N], [1:col-1 col+1:N]);
        Cof(col) = (-1)^(1+col)*det_cofat(D);
    end
    d = A(1,1:N)*Cof
endfunction
```

O algoritmo é recursivo. No exemplo começamos com 1 matriz A 4x4 que é dividida em 4 matrizes 3x3 . Cada uma das matrizes 3x3 são divididas em 3 matrizes 2x2. Cada uma das matrizes 2x2 são divididas em 3 matrizes 1x1. O determinante de uma matriz 1x1 é trivial, sendo o próprio elemento da matriz. Uma vez que os determinantes 1x1 são avaliados o programa recursivo começa a retornar, calculando os determinantes 2x2 a partir dos determinantes 1x1, e então calculando os determinantes 3x3 a partir dos determinantes 2x2 e assim por diante..

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2. & 1. & 3. & 5. \\ -1. & 3. & 2. & 7. \\ 3. & 1. & -3. & 2. \\ -4. & -2. & 1. & 5. \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}(-1)^{1+1}\Delta_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}\Delta_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}\,\Delta_{13} + a_{14}(-1)^{1+4}\Delta_{14}$$

$$\det(A) = 2\begin{vmatrix} 3. & 2. & 7. \\ 1. & -3. & 2. \\ -2. & 1. & 5. \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1. & 2. & 7. \\ 3. & -3. & 2. \\ -4. & 1. & 5. \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1. & 3. & 7. \\ 3. & 1. & 2. \\ -4. & -2. & 5. \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -1. & 3. & 2. \\ 3. & 1. & -3. \\ -4. & -2. & 1. \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

```
--> A=[2,1,3,5;-1,3,2,7;3,1,-3,2;-4,-2,1,5]
 A  =

   2.    1.    3.    5.
  -1.    3.    2.    7.
   3.    1.   -3.    2.
  -4.   -2.    1.    5.

--> d=det_cofat(A)
 d  =

  -532.
```

Matriz Inversa por cofatores utilizando Determinante por Cofatores

```
function Ai=inv_cofat(A)
    Ai=(1/det_cofat(A))*Adjunta(A);
endfunction
```

$$A = \begin{bmatrix} 2. & 1. & 3. & 5. \\ -1. & 3. & 2. & 7. \\ 3. & 1. & -3. & 2. \\ -4. & -2. & 1. & 5. \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-532} \begin{bmatrix} -104. & 69. & -49. & 27. \\ 92. & -148. & 28. & 104. \\ -92. & 15. & 105. & 29. \\ -28. & -7. & -49. & -49. \end{bmatrix}$$

```
--> A=[2,1,3,5;-1,3,2,7;3,1,-3,2;-4,-2,1,5]
 A  =


   2.    1.    3.    5.
  -1.    3.    2.    7.
   3.    1.   -3.    2.
  -4.   -2.    1.    5.

--> Ai=inv_cofat(A)
 Ai  =


   0.1954887  -0.1296992   0.0921053  -0.0507519
  -0.1729323   0.2781955  -0.0526316  -0.1954887
   0.1729323  -0.0281955  -0.1973684  -0.0545113
   0.0526316   0.0131579   0.0921053   0.0921053
```

Uma vez calculado o determinante da Matriz Característica A, a inversa A^{-1} pode ser calculada diretamente através da transposta da matriz dos cofatores (Matriz Adjunta) , dividida pelo determinante.

Resolução do um Sistema $Ax = b$

$$x = A^{-1}\, b$$

$$A = \begin{bmatrix} 2. & 1. & 3. & 5. \\ -1. & 3. & 2. & 7. \\ 3. & 1. & -3. & 2. \\ -4. & -2. & 1. & 5. \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 4. \\ 3. \\ 2. \\ -3. \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-532}\begin{bmatrix} -104. & 69. & -49. & 27. \\ 92. & -148. & 28. & 104. \\ -92. & 15. & 105. & 29. \\ -28. & -7. & -49. & -49. \end{bmatrix}$$

$$x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 0.7293233 \\ 0.6240602 \\ 0.3759398 \\ 0.1578947 \end{bmatrix}$$

```
--> A=[2,1,3,5;-1,3,2,7;3,1,-3,2;-4,-2,1,5]
 A  =


   2.    1.    3.    5.
  -1.    3.    2.    7.
   3.    1.   -3.    2.
  -4.   -2.    1.    5.

--> b=[4;3;2;-3]
 b  =


   4.
   3.
   2.
  -3.

--> x=inv_cofat(A)*b
 x  =


   0.7293233
   0.6240602
   0.3759398
   0.1578947
```

Regra de Cramer

- Cada incógnita pode ser expressa pela fração de dois determinantes.
- O denominador D é o determinante característico do sistema, que é formado pelos coeficientes da equação (matriz A)
- O numerador D_i é obtido a partir da matriz A, trocando-se a coluna de coeficientes referente à incógnita x_i que se quer avaliar, pelo vetor de constantes (vetor b)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & b_3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1/D \\ D_2/D \\ D_3/D \end{bmatrix}$$

Exemplo, seja o sistema de equações descrito pela matriz aumentada abaixo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -49$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -40$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -47$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -23$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1/D \\ D_2/D \\ D_3/D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-40)/(-49) \\ (-47)/(-49) \\ (-23)/(-49) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8163265 \\ 0.9591837 \\ 0.4693878 \end{bmatrix}$$

```
function x=Cramer(A,b,prt)
    [N N]=size(A);
    C=[A b];
    D=det_cofat(A)
    if (prt)
        printf("Matriz Aumentada [C=A|b] det(A)=%f",D)
        disp(C)
    end
    for(k=1:N)
        Ak=A;
        Ak(:,k)=b //substitui coluna k por vetor b
        Dk=det_cofat(Ak)
        x(k)=Dk/D
        if (prt)
            printf("Matriz A%d   det(A%ld)=%f",k,k,Dk)
            disp(Ak)
            printf("x(%d)=%f/%f=%f\n",k,Dk,D,x(k))
        end
    end
endfunction
```

```
--> x=Cramer(A,b,%f)
 x  =

   0.8163265
   0.9591837
   0.4693878
```

```
--> A=[2,1,3;-1,3,2;3,1,-3];

--> b=[4;3;2];

--> x=Cramer(A,b,%t)
Matriz Aumentada [C=A|b] det(A)=-49.000000
   2.    1.    3.    4.
  -1.    3.    2.    3.
   3.    1.   -3.    2.
Matriz A1   det(A1)=-40.000000
   4.    1.    3.
   3.    3.    2.
   2.    1.   -3.
x(1)=-40.000000/-49.000000=0.816327
Matriz A2   det(A2)=-47.000000
   2.    4.    3.
  -1.    3.    2.
   3.    2.   -3.
x(2)=-47.000000/-49.000000=0.959184
Matriz A3   det(A3)=-23.000000
   2.    1.    4.
  -1.    3.    3.
   3.    1.    2.
x(3)=-23.000000/-49.000000=0.469388
 x  =

   0.8163265
   0.9591837
   0.4693878
```

Eliminação de variáveis

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & | & b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + & a_{12}\,x_2 = & b_1 & (I) \\ a_{21}\,x_1 + & a_{22}\,x_2 = & b_2 & (II) \end{cases}$$

$$a_{21}(I) \quad e \quad a_{11}(II)$$

$$\begin{cases} a_{21}a_{11}\,x_1 + & a_{21}a_{12}\,x_2 = & a_{21}b_1 & (III) \\ a_{11}a_{21}\,x_1 + & a_{11}a_{22}\,x_2 = & a_{11}b_2 & (IV) \end{cases}$$

$$(IV) \; - (III)$$

$$a_{11}a_{22}\,x_2 - a_{21}a_{12}\,x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

$$a_{22}(I) \quad e \quad a_{12}(II)$$

$$\begin{cases} a_{22}a_{11}\,x_1 + & a_{22}a_{12}\,x_2 = & a_{22}b_1 & (V) \\ \boldsymbol{a_{12}a_{21}\,x_1} + & \boldsymbol{a_{12}a_{22}\,x_2} = & \boldsymbol{a_{12}b_2} & (\boldsymbol{VI}) \end{cases}$$

$$(VI) \; - (V)$$

$$a_{12}a_{21}\,x_1 - \quad a_{22}a_{11}\,x_1 = a_{12}b_2 - a_{22}b_1$$

$$x_1 = \frac{a_{12}b_2 - a_{22}b_1}{a_{22}a_{11} - a_{22}a_{11}}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \\ \\ \dfrac{a_{12}b_2 - a_{22}b_1}{a_{22}a_{11} - a_{22}a_{11}} \end{bmatrix}$$

Eliminação de Gauss

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right] \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22}' & a_{23}' & b_2' \\ 0 & 0 & a_{33}'' & b_3'' \end{array}\right] \Rightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{b_1 - a_{12}\, x_2 - a_{13}\, x_3}{a_{11}} \\ \dfrac{b_2' - a_{23}'\, x_3}{a_{22}'} \\ \dfrac{b_3''}{a_{33}''} \end{bmatrix}$$

Eliminação Progressiva

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22}' & a_{23}' & b_2' \\ 0 & a_{32}' & a_{33}' & b_3' \end{array}\right] \begin{array}{c} (I) \\ (II') = (II) - (I)\dfrac{a_{21}}{a_{11}} \\ (III') = (III) - (I)\dfrac{a_{31}}{a_{11}} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22}' & a_{23}' & b_2' \\ 0 & 0 & a_{33}'' & b_3'' \end{array}\right] \begin{array}{c} (I) \\ (II') \\ (III'') = (III') - (II')\dfrac{a_{32}'}{a_{22}'} \end{array}$$

Substituição Regressiva

(III')

$$a_{33}''\, x_3 = b_3''$$

$$x_3 = \frac{b_3''}{a_{33}''} \quad (IV)$$

(IV) em (II')

$$a_{22}'\, x_2 + a_{23}'\, x_3 = \mathrm{b}_2'$$

$$x_2 = \frac{\mathrm{b}_2' - a_{23}'\, x_3}{a_{22}'} \quad (V)$$

(V) e (IV) em (I)

$$a_{11}x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 = \mathrm{b}_1$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}\, x_2 - a_{13}\, x_3}{a_{11}}$$

Eliminação Progressiva

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 12 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}$$

Eliminação Progressiva

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 3.5 & 0.5 & 11.5 \\ 0 & -0.5 & 1.5 & 1.5 \end{array}\right] \begin{array}{c} (I) \\ (IV) = (II) - (I)\dfrac{(-1)}{2} \\ (V) = (III) - (I)\dfrac{3}{2} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 3.5 & 0.5 & 11.5 \\ 0 & 0 & 11/7 & 22/7 \end{array}\right] \begin{array}{c} (I) \\ (IV) \\ (VI) = (V) - (IV)\dfrac{(-0.5)}{3.5} \end{array}$$

```
function [C,m]=EliminarLinha(lin,p,C,prt)
    [N,M]=size(C)
    m=C(lin,p)/C(p,p);
    C(lin,p:M)=C(lin,p:M)-m*C(p,p:M);
    if (prt)
        printf("(L%d)=(L%d)-(%f)/(%f)*L(%d)",lin,lin,C(lin,p),C(p,p),p)
        if lin<N then printf("\n") end
    end
endfunction
```

```
--> A=[2,1,-3;-1,3,2;3,1,-3];

--> b=[-1;12;0];

--> C=[A,b]
 C  =

   2.   1.  -3.  -1.
  -1.   3.   2.   12.
   3.   1.  -3.   0.
```

```
--> C=EliminarLinha(2,1,C,%f)
 C  =

   2.   1.    -3.   -1.
   0.   3.5   0.5   11.5
   3.   1.    -3.   0.

--> C=EliminarLinha(3,1,C,%f)
 C  =

   2.   1.    -3.   -1.
   0.   3.5   0.5   11.5
   0.  -0.5   1.5   1.5

--> C=EliminarLinha(3,2,C,%f)
 C  =

   2.   1.    -3.          -1.
   0.   3.5   0.5          11.5
   0.   0.    1.5714286    3.1428571
```

Substituição Regressiva

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 12 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 3.5 & 0.5 & 11.5 \\ 0 & 0 & 11/7 & 22/7 \end{array}\right]$$

Substituição Regressiva

$$x_3 = \frac{22/7}{11/7} = 2 \quad (VI)$$

(VI) em (IV)

$$3.5\, x_2 + 0.5(2) = 11.5$$

$$x_2 = \frac{10.5}{3.5} = 3 \qquad (VII)$$

(VI) e (VII) em (I)

$$2x_1 + 1(3) - 3(2) = -1$$

$$x_1 = \frac{2}{2} = 1$$

```
function y=SubstituicaoRegressiva(A,b,prt)
  [N,N]=size(A)
  y(N)=b(N)/A(N,N);
  if (prt)  printf("Substituição regressiva\nx(%d)=%f\n",N,y(N)); end
  for lin=N-1:-1:1
      y(lin)=(b(lin)-A(lin,lin+1:N)*y(lin+1:N))/A(lin,lin);
      if (prt) printf("y(%d)=%f\n",lin,y(lin)) end
   end
endfunction
```

```
--> C
 C  =


   2.   1.   -3.           -1.
   0.   3.5   0.5           11.5
   0.   0.    1.5714286    3.1428571

--> A_e = C(:,1:M-1)
 A_e  =


   2.   1.   -3.
   0.   3.5   0.5
   0.   0.    1.5714286

--> b_e=C(:,M)
 b_e  =


  -1.
   11.5
   3.1428571
```

```
--> x=SubstituicaoRegressiva(A_e,b_e,%t)
Substituição regressiva
x(3)=2.000000
x(2)=3.000000
x(1)=1.000000
 x  =


   1.
   3.
   2.
```

Eliminação de Gauss sem Pivotamento

```
function x=EliminacaoGauss_SemPivot(A,b,prt)// sem pivotamento
    [N N]=size(A);
   C=[A b];
   if(prt)
       printf("Matriz Aumentada [C=A|b]")
       disp(C)
   end
   for p=1:N-1
       if C(p,p) == 0 then break; end
       for lin=p+1:N   //eliminação progressiva
           C=EliminarLinha(lin,p,C,prt)
       end
       if (prt)
           printf("Eliminando coluna %d com Pivô %f\n",p,C(p,p))
           disp(C)
       end
    end
    if C(p,p)<>0
         x=SubstituicaoRegressiva(C(:,1:N),C(:,N+1))
    else
       printf("Não há solução única pois matriz A é singular\n")
       x(1:N)=%inf
    end
endfunction
```

```
--> A=[2,1,-3;-1,3,2;3,1,-3];

--> b=[-1;12;0];

--> x=EliminacaoGauss_SemPivot(A,b,%f)
 x  =

   1.
   3.
   2.
```

```
--> x=EliminacaoGauss_SemPivot(A,b,%t);
Matriz Aumentada [C=A|b]
   2.    1.  -3.  -1.
  -1.    3.   2.   12.
   3.    1.  -3.   0.
(L2)=(L2)-(-1.000000)/(2.000000)*L(1)
(L3)=(L3)-(3.000000)/(2.000000)*L(1)
Eliminando coluna 1 com Pivô 2.000000

   2.    1.   -3.    -1.
   0.    3.5   0.5    11.5
   0.   -0.5   1.5    1.5
(L3)=(L3)-(-0.500000)/(3.500000)*L(2)
Eliminando coluna 2 com Pivô 3.500000

   2.    1.   -3.           -1.
   0.    3.5   0.5           11.5
   0.    0.    1.5714286    3.1428571
Substituição regressiva
x(3)=2.000000
x(2)=3.000000
x(1)=1.000000
```

Exemplo 2, sistema 4x4

```
--> A=[2,1,3,5;-1,3,2,7;3,1,-3,2;-4,-2,1,5]
 A  =


   2.    1.    3.    5.
  -1.    3.    2.    7.
   3.    1.   -3.    2.
  -4.   -2.    1.    5.

--> b=[4;3;2;-3];

--> x=EliminacaoGauss_SemPivot(A,b,%f)
 x  =

   0.7293233
   0.6240602
   0.3759398
   0.1578947
```

```
--> x=EliminacaoGauss_SemPivot(A,b,%t)
Matriz Aumentada [C=A|b]
   2.    1.    3.    5.    4.
  -1.    3.    2.    7.    3.
   3.    1.   -3.    2.    2.
  -4.   -2.    1.    5.   -3.
(L2)=(L2)-(-1.000000)/(2.000000)*L(1)
(L3)=(L3)-(3.000000)/(2.000000)*L(1)
(L4)=(L4)-(-4.000000)/(2.000000)*L(1)
Eliminando coluna 1 com Pivô 2.000000

   2.    1.     3.     5.     4.
   0.    3.5    3.5    9.5    5.
   0.   -0.5   -7.5   -5.5   -4.
   0.    0.     7.     15.    5.
(L3)=(L3)-(-0.500000)/(3.500000)*L(2)
(L4)=(L4)-(0.000000)/(3.500000)*L(2)
Eliminando coluna 2 com Pivô 3.500000

   2.    1.     3.     5.           4.
   0.    3.5    3.5    9.5          5.
   0.    0.    -7.    -4.1428571   -3.2857143
   0.    0.     7.     15.          5.
(L4)=(L4)-(7.000000)/(-7.000000)*L(3)
Eliminando coluna 3 com Pivô -7.000000

   2.    1.     3.     5.           4.
   0.    3.5    3.5    9.5          5.
   0.    0.    -7.    -4.1428571   -3.2857143
   0.    0.     0.     10.857143    1.7142857
Substituição regressiva
x(4)=0.157895
x(3)=0.375940
x(2)=0.624060
x(1)=0.729323
```