**CURSO:** ENGENHARIAS (Eletrônica, Aeroespacial, Energia, Automotiva, Software)

**DISCIPLINA:** Métodos Numéricos para Engenharias 02/2021

**PROFESSOR:** Dr. Luciano Neves da Fonseca

1ª Lista de Exercícios

1) Todos os exercícios dos capítulos 3, 4, 5 e 6 do livro Métodos Numéricos para Engenharia, 5ª Edição, Steven C. Chapra e Raymond Canale

2) Com relação ao método da bissecção responda:
   a) Faça um gráfico da função $f(x) = 2e^{-x} - sen(x)$ , com x no intervalo [-1.00000, 10.00000],
   b) Utilize quatro iterações do método da Bissecção para calcular a raiz real da função $f(x) = 2e^{-x} - sen(x)$ no intervalo [0.00000, 2.00000], com cinco casas decimais. Notar que os valores da variável 'x' estão expressos em radianos
   c) Faça uma estimativa do ero na estimação da raiz após quatro iterações.
   d) Quantas iterações seriam necessárias para se obter um erro menor que $10^{-8}$?
   e) Faça um gráfico da função $f(x) = x\,ln(x + 1) - 1.0$ , com x no intervalo [-0.00000, 3.00000],
   f) Utilize quatro iterações do método da Bissecção para calcular a raiz real da função $f(x) = x\,ln(x + 1) - 1.0$ no intervalo [0.00000 , 2.00000], com cinco casas decimais.
   g) Faça uma estimativa do erro no cálculo (d) da raiz após quatro iterações.
   h) Quantas iterações seriam necessárias em (d) para se obter um erro menor que $10^{-9}$?

3) Repita (2a) e (2f) com o método da falsa posição.

4) Com relação ao método de Newton Rapshon responda

   a) Utilize então quatro iterações (calcule $x_4$) do método de Newton-Raphson para calcular a raiz de $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^2 - \frac{\mathrm{e^x}}{2}$, com estimativa inicial $x_0 = 1$.
   b) Faça uma estimativa do erro de aproximação da raiz após 4 iterações.

5) O que é erro de arredondamento? Exemplifique

6) O que é erro de truncamento? Exemplifique.

7) Como podemos minimizar os erros de arredondamento? e os de truncamento?

8) Com relação à aritmética inteira responda:
   A) Se usarmos uma máquina calculadora, que utiliza inteiros na base 2 com 8 bits e sinal em complemento 2, para subtrairmos o número decimal 43 do número binário 01110011, qual será o resultado em binário? e em decimal?
   B) Se usarmos uma máquina calculadora, que utiliza inteiros na base 2 com 8 bits e sinal em complemento 2, para subtrairmos o número decimal 41 do número binário 01001110, qual será o resultado em binário? e em decimal?

C) Se usarmos uma máquina calculadora, que utiliza inteiros na base 2 com 8 bits e sinal em complemento 2, para subtrairmos o número decimal 33 do número binário 01010110, qual será o resultado em binário?

9) Com relação à aritmética ponto flutuante responda:
   A) Em uma máquina de ponto flutuante (8,24) qual será resultado da soma do número 20,68436932 com o número 0,00413825742? Qual o erro de arredondamento? Repita o exercício para máquinas (11,53), (8,16) e (4,12)
   B) Em uma máquina de ponto flutuante (8,16) qual será resultado da soma do número 1253,7843673212 com o número 0,41223682475? Qual o erro de arredondamento? Repita o exercício para máquinas (11,53), (8,16) e (6,12)
   C) Em uma máquina de ponto flutuante (8,24) qual será resultado da soma do número 1,7843673212 com o número 0,041223682475? Qual o erro de arredondamento? Repita o exercício para máquinas (11,53), (8,16) e (4,12)

10) Com relação ao épsilon da máquina responda:
   A) Se o épsilon de uma máquina vale 2,43 $10^{-8}$, qual o próximo número real maior que 1 que pode ser representado neste sistema de numeração? E qual o próximo número real maior 7000000 que pode ser representado neste sistema de numeração?
   B) Se o épsilon de uma máquina vale 3,42 $10^{-9}$, qual o próximo número real maior que 1 que pode ser representado neste sistema de numeração? E qual o próximo número real maior 6.500.000 que pode ser representado neste sistema de numeração?
   C) Se o épsilon de uma máquina vale 5,79 $10^{-6}$, qual o próximo número real maior que 1 que pode ser representado neste sistema de numeração? E qual o próximo número real maior 11.400.000 que pode ser representado neste sistema de numeração?

11) Utilize 4 iterações (calcule $x_4$) do método do ponto fixo para calcular a raiz de $f(x) = x^2 - \frac{e^x}{2}$, com estimativa inicial $x_o$=0.

12) Utilize 4 iterações do método da bisseção (calcule $x_4$) para calcular a raiz desta mesma equação, com intervalo inicial [0,1].

$$f(x) = 4x - e^x$$

| i | a | f(a) | b | f(b) | $x_i$ | $f(x_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.00000 | | 1.00000 | | | |
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |

13) Utilize 4 iterações do método da bisseção (calcule $x_4$) para calcular a raiz da equação $f(x) = 4.9 + \frac{5.1x-22.3}{3.1x-4.2}$ no intervalo [0.5 , 1.5].

| i | a | f(a) | b | f(b) | $x_i$ | $f(x_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.50000 | | 1.50000 | | | |
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |

14) Utilize 4 iterações do método da Newton Rapshson(calcule $x_4$ ) com valor inicial $x_0$=2.0000 para calcular o valor numérico $(1+\sqrt{13})/2$. (Dica – fórmula de Bhaskara).

| i | $x_i$ | $f(x_i)$ | $f'(x_i)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 2,00000 | | |
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |

15) Para o item 10, faça uma estimativa para o erro do valor calculado, comparando-o com o valor numérico exato de$(1+\sqrt{13})/2$.

16) Julgue se as seguintes afirmativas são verdadeiras (V) ou falsas (F).

a. O método de Newton Raphson usa linhas tangenciais que cruzam o eixo x em aproximações sucessivas em direção à raiz. Embora não tenha convergência garantida, este método, quando funciona, apresenta taxa de convergência muito alta.

b. O método do ponto fixo é um método aberto no qual são feitas aproximações sucessivas da equação y=g(x), que é obtida a partir de manipulações algébricas sobre a equação original f(x)=0.

c. O método de Newton Raphson precisa de uma boa estimativa inicial $x_o$, caso contrário a solução pode divergir ou convergir para uma raiz que não seja relevante. Se $x_i$ for a aproximação da raiz na iteração i, então $x_{i+1} = x_i + f'(x_i) / f(x_i)$

d. O método da secante modificado e o método de Newton precisam de apenas 1 valor inicial, embora o método de Newton necessite de uma sub-rotina adicional para o cálculo da primeira derivada da função contínua f(x). Já o método da secante exige 2 valores iniciais para iniciar processo de iteração.

e. Erros de arredondamento são particularmente sérios quando dois números grandes são adicionados ou quando um número pequeno é subtraído de um número grande.

f. Em um computador com resolução finita, o intervalo entre o número 1 e o próximo número real é chamado de épsilon da máquina. No entanto, o intervalo entre o número 1000 e o próximo número real será 1000*épsilon.

g. Erros de arredondamento podem ser evitados com precisão dupla, com algoritmos de recondicionamento ou por expansão de funções por polinômios.

h. Na representação por complemento 2, há somente uma representação para o zero e as regras de soma e multiplicação são simétricas.

i. Tanto os métodos abertos quanto os métodos intervalares têm convergência garantida, desde que se escolham valores iniciais adequados. No entanto, os métodos abertos possuem taxa de convergência mais elevada que os métodos intervalares, que apresentam convergência monotônica.

j. Se f(x) for contínua no intervalo [a,b] e se f(a)*f(b)<0, então há pelo menos uma raiz real no intervalo [a,b].

k. Se f(x) for contínua no intervalo [a,b] e se f(a)*f(b)>0 então não há uma raiz real no intervalo [a,b].

l. O método da falsa posição é um método aberto no qual se faz aproximações sucessivas para a derivada da função em torno da raiz da equação.

m. A taxa de convergência do método da secante modificado depende da escolha do incremento δ. Um incremento muito pequeno pode causar sérios erros de arredondamento e levar à divergência.

n. O método da secante e o método da falsa posição usam dois valores iniciais, x0 e x1, para calcular a inclinação da reta que é usada para se projetar o novo valor da raiz no eixo x. A diferença entre estes dois métodos está em como os valores iniciais são substituídos pelo novo valor da raiz. No método da secante, por exemplo, a nova raiz xr substitui o valor inicial que possui f(x) com o mesmo sinal de f(xr)

17) Se $1 + x = 1$ , qual o maior valor de x?
   a) Em uma máquina f(11,53)
   b) Em uma máquina f(5,5)
   c) Em uma máquina f(8,24)

18) Converta de decimal para binário-fracionário b(16,16) em complemento 2, 16 bits antes do ponto decimal, e 16 bits depois do ponto decimal.
   Repita o exercício com conversão de decimal para binário-fracionário b(16,16) com 1 bit para sinal, , 16 bits antes do ponto decimal, e 16 bits depois do ponto decimal.

a) 34
b) 127
c) -128
d) 12
e) -1
f) 12.745
g) -12.724
h) 17.931
i) 0.1437

19) Converta de binário b(12,12) complemento 2 para decimal
a) 11011011
b) 001110011011
c) 11001101010.1010001111
d) 111001110011.111
e) 0.01110011

20) Represente os seguintes números em um sistema de ponto flutuante f(5,8)
   a) $x_1$=1089.23
   b) $x_2$=-76530293.789
   c) $x_3$=0.000011992
   d) $x_4$=41.9838
   e) $x_5$=-0.110078

21) Calcule no sistema f(5.8)
   a) $x_1 + x_5$
   b) $x_3 + x_5$

c) $x_2 * x_3$
d) $x_2 / x_1$

22) Represente estes mesmos números em um sistema f(8,11)

23) Represente estes mesmos números em um sistema f(11,53)

24) Desenvolva 7 termos da série de Taylor e calcule a aproximação de f(x) para:
a) $f(x) = cos(x)$ em torno de $x = \frac{\pi}{4}$
b) $f(x) = \ln(1 + x)$ em torno de $x = 0$
c) $f(x) = (x + 2)^5$ em torno de $x = 1$
d) Calcule o erro percentual, comparando com o valor exato de f(0.5), para 3, 4, 5, 6 e 7 iterações das séries acima.

25) Quantos termos da série de Taylor são necessários para se calcular a constante "e", a partir da expansão de $f(x) = e^x$ em torno do ponto x=0, de modo que o erro seja menor que $10^{-7}$?

26) Quanto termos da série de Taylor são necessários para se calcular ln(0.8), a partir da expansão de $f(x) = ln(1 + x)$, de modo que o erro seja menor que $10^{-6}$?

27) Localize graficamente as raízes das seguintes equações:

a) $f(x) = 4cos(x) - e^{2x}$
b) $f(x) = \frac{x}{2} - tg(x)$
c) $f(x) = 1 - xln(x)$
d) $f(x) = 2^x - 3x$
e) $f(x) = x^3 + x - 1000$

28) Use o método de Newton-Raphson para encontrar a menor raiz positiva das seguintes equações, com erro menor que $10^{-4}$.
a) $f(x) = \frac{x}{2} - tg(x)$
b) $f(x) = 2cos(x) - \frac{e^x}{2}$
c) $f(x) = x^5 - 6$
d) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 10$ , com $x_0 - 1.9$

29) Resolva geometricamente o método de Newton-Raphson da questão anterior.

30) Em uma representação numérica são usados 10 bits na representação de inteiros positivos e negativos em complemento 2. Qual o maior número positivo e o menor número negativo que pode ser representado. Responda tanto em binário quanto em decimal.

31) Encontre o número decimal que representa os seguintes números binários de 16 bits em complemento 2:
a) 1111 1111 1111 1111
b) 1000 0000 0000 0110
c) 1001 0101 0101 1111
d) 1000 0000 0000 0001

32) Qual o épsilon do seu laptop

33) Calcule o valor $f(x) = exp(x) - 1 \; para \; x = 0.0001$ usando 3 termos da expansão de Taylor para $exp(x)$ em torno de x=0.

34) Encontre a expansão da série de Maclaurin (Taylor em torno de x=0) para as seguintes funções:
   a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
   b) $f(x) = \tan(x)$
   c) $f(x) = \frac{1}{1-x}$
   d) $f(x) = \ln(1 + x)$

35) Prove que a expansão de Taylor de $f(x) = ln\left[\frac{1+x}{1-x}\right]$ em torno do ponto $x = 1$ é dada por:

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

36) A partir da expansão de Maclaurin de $f(x) = e^x$ e de $g(x) = e^{-x}$, encontre a expansão de Maclaurin de $sinh(x) \; e \; de \; cosh(x)$, sabendo que:

$sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $cosh = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

37) Se a seguinte função for usada em um programa, qual o intervalo de valores de x que irá acarretar overflow, ou seja, uma divisão por zero originada de um erro de arredondamento (subtração de dois números iguais). Considere que a máquina tenha floating point de 32 bits. Condicione esta função para evitar erros de arredondamento.

$$f(x) = \frac{1}{1 - tanh(x)} \quad ; x < 19$$

38) Em um computador hipotético com palavra de 32 bits para floating point, o expoente tem 8 bits e Emin=125. A mantissa tem 23 bits, mais um bit oculto (sempre igual a 1). Encontre o épsilon da máquina e o maior e o menor floating point que pode ser representado.

39) Encontre a raiz positiva da equação $f(x) = x^2 - 0.9x - 1.52$ no intervalo [1,2] pelo método da bisseção com tolerância de 0.001.

40) Encontre o valor que x que satisfaça a igualdada $tan(x) = 3.5$ no intervalo $[0, \pi]$ pelo método da Bisseção com tolerância de 0.005

41) A partir de uma tabela, encontre intervalos de tamanho 0.5 para cada uma das raízes positivas das seguintes equações:
   a) $f(x) = 0.5e^{-\frac{x}{3}} - sen(x) \quad ; x > 0$
   b) $f(x) = ln(1 + x) - x^2 \quad ; x > 0$
   c) $f(x) = x^3 - 2x - 1 \quad ; x > 0$
   d) $f(x) = e^x - 5x^2 \quad ; x > 0$
   e) $f(x) = \sqrt{x} + 2 - x \quad ; x > 0$
   f) Faça um esboço do gráfico das funções mostradas nos itens acima

g) Encontre a maior raiz de cada um dos itens acima a partir do método da bisseção com tolerância 0.0001

42) Encontre todas as raízes positivas das equações abaixo pelo método da falsa posição com tolerância 0.001. Primeiro determine os intervalos adequados por tabelas ou gráficos.

a) $f(x) = tan(x) - x + 1$
b) $f(x) = sin(x) - 0.3e^x$
c) $f(x) = -x^3 + x + 1$
d) $f(x) = 16x^5 - 20x^3 + x^2 + 5x - 0.5$

43) Encontre a raiz de $f(x) = sin(x) - x + 1$ $\ no\ intervalo\ 1 < x < 3$ com 4 iterações do método da falsa posição modificado. Faça uma estimativa do erro.

44) Encontre a raiz de $f(x) = tan(x) - 0.1x$ no intervalo $-\pi < x < 1.5\pi$ pelo método de Newton Raphson com tolerância 0.0001

45) Calcule o valor de x que satisfaz a seguinte igualdade a partir de 4 iterações do método de Newton Raphson:

$$3.06 = \frac{(1-x)(10.52+x)^{\frac{1}{2}}}{x(1+x)^{\frac{1}{2}}}$$

46) Repita o problema 45 com 5 iterações do método da secante
47) Repita o problema 45 com 5 iterações do método da secante modificado com delta=0.01.

48) Encontre a o valor de x que satisfaça a relação $\frac{\left(x(2.1-0.5x)^{\frac{1}{2}}\right)}{(1-x)(1.1-0.5x)^{\frac{1}{2}}} = 3.69 \quad ; 0 < x < 1$ pelo método da Falsa posição com tolerância de 0.001

49) Faça a divisão longo dos seguintes polinômios, mostrando o divisor o dividendo e o resto

a) $\frac{x^3-2x^2+5x+7}{x+2}$

b) $\frac{x^8-7x^7-12x^6-4x^5-x^4+x^3-5x+9}{x^2-2x+1}$

50) Usando o método de Bairstow, encontre os fatores quadráticos e as raízes dos seguintes polinômios:
a) $p(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
b) $p(x) = 2x^3 + x^2 - x - 7$
c) $p(x) = -x^4 - 4x^3 - 7x^2 + x - 3$
d) $p(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24$
e) $p(x) = x^6 - 6x^5 + 14x^4 - 18x^3 + 14x^2 - 6x + 1$

51) Descreva o método de Bairstow
52) Descreva o método de Muller para calcular raízes de polinômios.

53) Quais as semelhanças e diferenças entre os métodos de Muller e de Bairstow para o cálculo das raízes de polinômios.

54) Um método muito utilizado no passado, conhecido como o método da “divisão e média”, para se encontrar a raiz quadrada x de um número positivo ‘a’, é mostrado abaixo.

$$x_{novo} = \frac{\left(x_{old} + \frac{a}{x_{novo}}\right)}{2}$$

Demonstre que isso é equivalente ao algoritmo de Newton-Raphson.