Universidade de Brasília - UnB Gama

Relatório de Física 1 Experimental

Experimento 6 - Determinação da constante elástica e do período para um oscilador harmônico simples na horizontal

Por

Felipe Amorim de Araújo - Matrícula : 221022275
Fernando Gabriel dos Santos Carrijo - Matrícula: 221008033
João Vitor Santos de Oliveira - Matrícula : 221022337
Gustavo Emannoel Pereira Sousa - Matrícula : 221031176

Brasília-DF, 14 de fevereiro de 2023

1 Objetivos

O experimento realizado em laboratório teve como objetivo, por meio da análise do comportamento de um carrinho preso a uma mola sobre um trilho de ar, onde o atrito pode ser ignorado, obter a constante elástica da mola por meio da Lei de Hooke e analisar o movimento e o período de um sistema de oscilador harmônico simples (OHS). O experimento foi divido em duas partes, e os dados obtidos foram submetidos a operações com erros e médias, além de cálculos com regressões gráficas. Os resultados obtidos em ambas partes foram comparados e analisados de acordo com os conceitos teóricos conhecidos sobre estes fenômenos.

2 Introdução Teórica

No atual experimento, faremos uma análise física experimental do comportamento de uma mola sobre a ação de forças e em um sistema oscilatório, para isso é preciso um entendimento teórico de seus comportamentos. A presença das molas no dia a dia se espalham na utilização em diversos sistemas e máquinas, como teclados, botões, veículos, canetas e em diversos outros sistemas mais complexos. Sua utilidade se baseia na sua capacidade característica de armazenar energia mecânica.

2.1 Lei de Hooke

O estudo do comportamento das molas foi realizado pelo cientista inglês Robert Hooke no século XVII, sua observação foi de que quando um corpo elástico é comprimido ou esticado, uma força restauradora tende a fazê-lo voltar ao seu formato original, tal força é proporcional à deformação sofrida pelo corpo e sua constante de elasticidade. Essa observação ou lei é mais referida como a Lei de Hooke ou Lei da Elasticidade.

A Lei de Hooke estabelece que, quando se aplica uma força sobre uma mola, ela se deforma, dando origem a uma força elástica que tem a mesma direção e sentido oposto à força externa aplicada. Essa força elástica, por sua vez, é variável e depende do tamanho da deformação que é sofrida pela mola e de sua constante elástica.

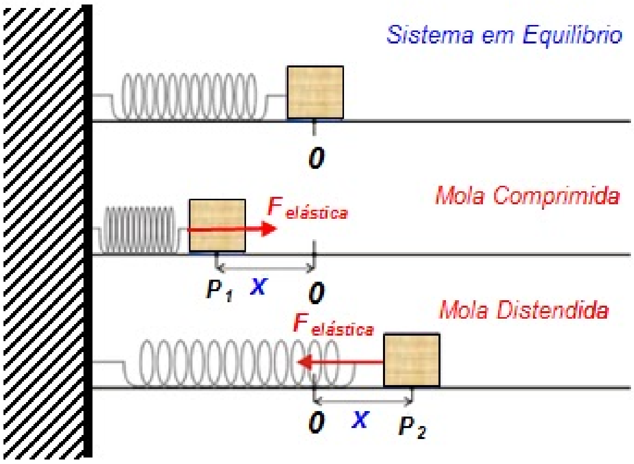

Figura 1: Diagrama da Lei de Hooke

A fórmula que descreve a Lei de Hooke é:

$$F_x = -kx \tag{1}$$

Onde $\boldsymbol{F_x}$ representa a força elástica da mola, **x** é a deformação da mola e **k** é a constante elástica.
É possível observar a presença do sinal negativo na fórmula, que indica que a força elástica age sempre em sentido oposto à deformação da mola.

2.1.1 Constante elástica da mola

A constante elástica mede a rigidez da mola, isto é, a força que é necessária para fazer com que a mola sofra uma deformação. Molas que apresentam grandes constantes elásticas são mais dificilmente deformadas, ou seja, para fazer o seu comprimento variar, é necessário que se aplique uma força maior. A constante elástica é uma grandeza escalar, e a sua unidade de medida, de acordo com o Sistema Internacional de Unidades, é o N/m (newton por metro). A mola também não é o único material que sofre deformação, em fato, tudo se deforma em certa magnitude dependendo da força.

2.1.2 Deformação da mola ou elongação

A deformação ou elongação é a medida de variação do comprimento da mola. Nesse sentido, pode ser calculada pela diferença entre o comprimento final e o comprimento inicial da mola.

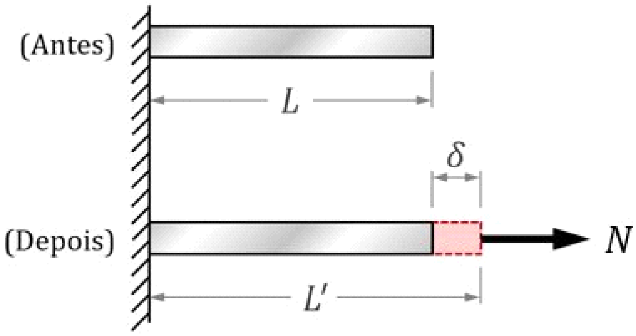

Figura 2: Elongação de uma mola

$$x = L' - L \tag{2}$$

Onde no caso, $\boldsymbol{L}$ representa o comprimento inicial da mola e $\boldsymbol{L'}$ representa o comprimento final.
Perceba que, na fórmula acima, se o comprimento final da mola for maior que o comprimento inicial, a deformação será positiva, caso contrário, quando o comprimento final da mola for menor que o comprimento inicial a deformação será negativa.

2.2 Oscilador Harmônico Simples

O oscilador harmônico simples é um fundamental sistema de movimento oscilatório envolvendo uma mola e uma massa, no estudo do movimento harmônico simples cabe lembrar que um movimento oscilatório é todo movimento no qual uma mesma situação se repete em intervalos de tempos iguais. Também não há forças dissipativas, como as forças de atrito e arraste, e, por isso, a energia mecânica total do sistema é conservada.

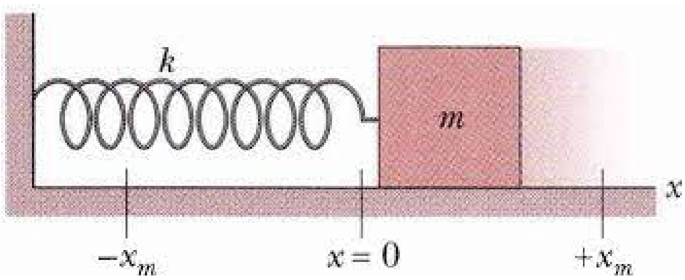

Figura 3: Oscilador Harmônico Simples

A figura acima representa um sistema de Oscilador Harmônico Simples. Nele temos um corpo de massa m apoiado sobre uma superfície sem atrito, preso a uma mola helicoidal, ideal, cuja constante elástica vale k. O oscilador encontra-se em equilíbrio na posição O, ou seja, a mola está em seu estado natural.

2.2.1 Movimento Harmônico Simples (MHS)

No equilíbrio, a mola não exerce forças sobre o corpo. Quando o corpo se afasta da distância de equilíbrio, a mola exerce sobre ele uma força, conforme a lei de Hooke, de forma que:

$$-kx = ma \tag{3}$$

Como a aceleração é a derivada segunda da posição x, pode-se escrever a equação acima, como uma equação diferencial de segunda ordem:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \tag{4}$$

A resolução matemática para essa equação diferencial representa a equação horária oscilatória do movimento harmônico simples, a solução é dada pela equação à seguir:

$$x(t) = x_M \cos(\omega t) \tag{5}$$

O termo x_M ou x_0 representa a amplitude de oscilação máxima da equação.

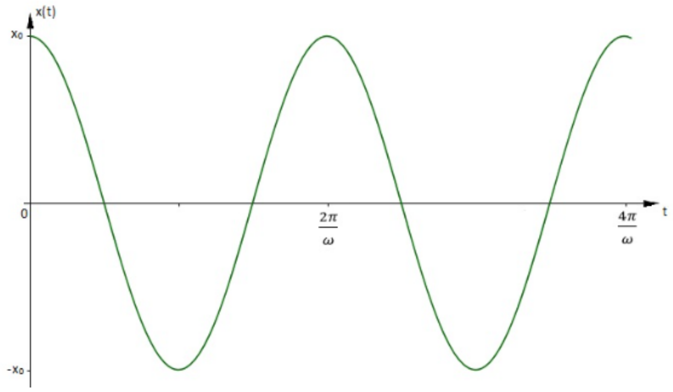

Figura 4: Representação do gráfico x × t do movimento harmônico simples

2.2.2 Frequência e período

Chamamos de frequência o número de oscilações (n) realizadas por um sistema em movimento harmônico simples que são concluídas a cada segundo. O período (T), por sua vez, é igual ao tempo gasto para que o sistema complete uma oscilação. A frequência então, pode ser calculada pelo inverso do período:

$$f = \frac{n}{\Delta t} = \frac{1}{T} \tag{6}$$

As unidades de medida da frequência e do período são, respectivamente, o hertz (Hz) e o segundo (s).

O movimento harmônico simples é definido a partir de grandezas angulares. Tais grandezas permitem-nos saber em qual posição uma partícula em MHS encontra-se, bem como saber quais são suas medidas de energia cinética e potencial naquele instante. A mais importante das grandezas angulares relacionadas ao MHS é a frequência angular, também conhecida como velocidade angular (ω) ou pulsação, dada por:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \tag{7}$$

Derivando duas vezes a equação (5), obtemos:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -x_M \cos(\omega t)\omega^2$$

Sabendo que a derivada segunda da posição é a aceleração, e que temos a própria função $x(t)$ no lado direito da equação, podemos multiplicar ambos os lados por m, obtendo:

$$ma = -\omega^2 x(t)$$

$$F_x = -m\omega^2 x(t)$$

Assim, podemos obter a seguinte relação para a constante elástica e a velocidade angular:

$$k = m\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{8}$$

Usando a equação acima, e a equação (7), relacionamos o período, a massa e a constante elástica:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{9}$$

Podemos observar, então, que o valor da massa está relacionado com a velocidade do oscilador, ou seja, quando é massa maior, o oscilador é mais lento, e quando a massa é menor o oscilador é mais veloz.

Ao elevar os dois lados dessa equação ao quadrado, obtemos uma forma de obter a constante elástica da mola a partir da massa oscilante e o período ao quadrado:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k}m \tag{10}$$

3 Parte Experimental e Discussão

Neste experimento, foram montados dois sistemas utilizando o kit de trilho ar e uma mola de aço obedecente a lei de Hooke presa a um carrinho, posicionada no início do trilho, afim de minimizar quaisquer forças exteriores e de analisar experimentalmente o comportamento da mola sobre efeito de forças e em uma configuração de oscilador harmônico simples (OHS). Foram feitas tabelas e efetuados cálculos de médias e erros

sobre os dados encontrados, para obter-se as forças, deslocamentos, intervalos e outros parâmetros envolvidos, incluindo a constante elástica da mola, além disso foi utilizado uma calculadora científica e outras ferramentas gráficas para obtenção de gráficos e regressões lineares. Os resultados obtidos foram analisados de forma teórica com base nas equações e leis que governam esses tipos de fenômenos na natureza.
Os gráficos dessa seção podem ser encontrados também no final do documento como anexos.

3.1 Material utilizado

- kit de trilho ar;
- kit cronômetro;
- carrinho
- mola de aço;
- barbante;
- 6 massas de 20g e outros discos metálicos de massas variadas;
- régua;

3.2 Lei de Hooke

Na primeira parte do experimento, a mola posicionada no início do trilho de ar foi conectada à um carrinho preso à um barbante com uma massa inicial de 20g suspenso em sua extremidade, de forma semelhante a figura à seguir:

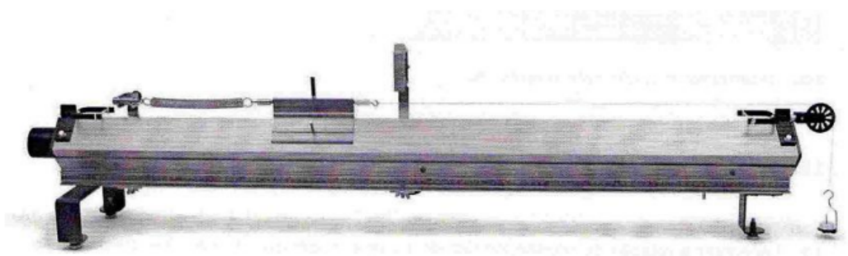

Figura 5: Mola e carrinho com peso suspenso

A montagem desse sistema teve como objetivo fazer a verificação e observar o comportamento da lei de Hooke (1), sobre a mola utilizada no experimento.

A pequena tensão exercida sobre a mola pela massa inicial de 20g foi considerada como a tensão inicial da mola e a sua extensão horizontal foi marcada no trilho como a posição x_0. Para a realização do experimento, foi adicionado uma nova massa suspensa de 20g afim de aumentar a força exercida sobre a mola, a extensão adicional da mola em relação à inicial foi marcada no trilho e medida em metros. Esse processo foi repetido até a massa total suspensa (ignorando a massa de 20g inicial) atingir 100g.

A força exercida pelas massas sobre a mola pode ser obtida calculando a força peso total das massas. Os dados de deslocamento em relação as forças exercidas, e as constantes elásticas calculadas a partir da lei de Hooke estão na tabela à seguir:

Massa (g)	Força (N)	x (m)	k (N/m)
20	0,196 N	0,0490 m	4,00 N/m
40	0,392 N	0,0950 m	4,13 N/m
60	0,588 N	0,1470 m	4,00 N/m
80	0,784 N	0,1890 m	4,15 N/m
100	0,980 N	0,2300 m	4,26 N/m

Tabela 1: Massas, forças, deslocamentos e as constantes elásticas calculadas

Calculando a média dos valores das constantes elásticas da tabela acima, considerando os erros, obtemos:

$$k = (4,11 \pm 0,05)\,\mathrm{N/m}$$

Utilizando uma calculadora científica, calculamos a regressão linear dos dados das forças e dos deslocamentos da tabela (1), de forma a considerarmos os deslocamentos como valores do eixo x e as forças valores do eixo y. O coeficiente angular dessa regressão representa a constante elástica calculada da mola, o valor obtido pela regressão foi:

$$k = 4,29\,\mathrm{N/m}$$

Usando a fórmula do erro relativo, podemos calcular a discrepância entre os dois resultados encontrados pela média dos dados e pela regressão linear feita na calculadora:

$$E = \frac{|A - B|}{A} \tag{11}$$

O erro relativo entre os dois valores foi calculado em:

$$E = 0,0424 \text{ ou } 4,24\%$$

A partir da ferramenta gráfica SciDavis foi feito um gráfico $F_x \times x$, da força exercida horizontalmente em função do deslocamento. Foi feita a regressão linear do gráfico afim de obter o valor da constante elástica nessa regressão:

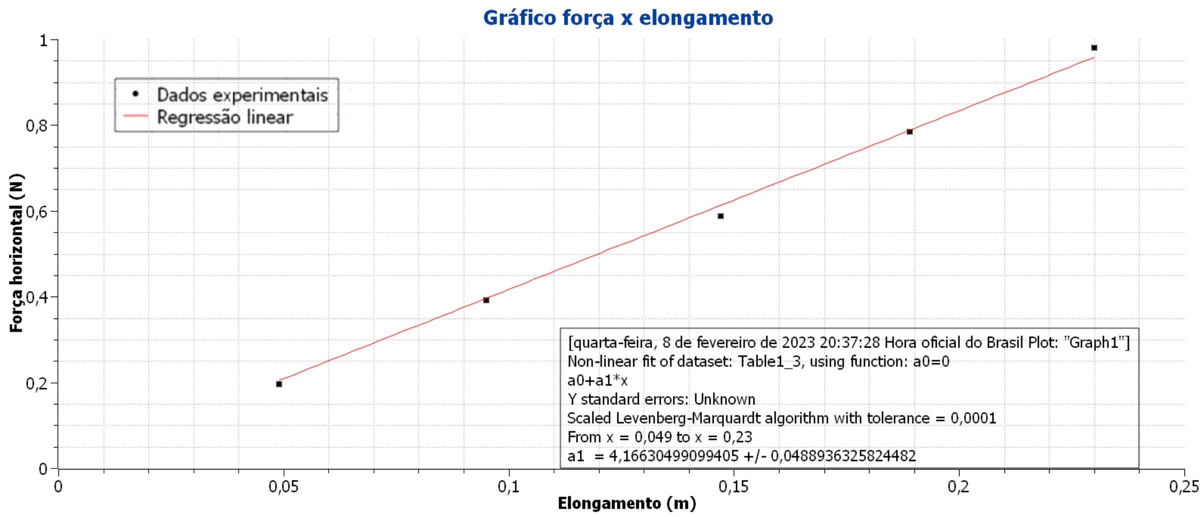

Figura 6: Gráfico $F_x \times x$ com regressão linear

Pela regressão linear, o valor da constante elástica é representado pelo coeficiente angular obtido:

$$k = (4,17 \pm 0,05)\,\mathrm{N/m}$$

Comparando os três valores da constante elástica calculados, podemos observar semelhança entre os esses valores, a discrepância maior encontrada pela regressão linear da calculadora pode ser explicada pela impossibilidade de anular o valor do coeficiente linear como na ferramenta gráfica do SciDavis. Calculando o erro relativo entre o valor da regressão linear do gráfico e os outros dois valores encontrados pela média e pela regressão na calculadora respectivamente obtemos:

$$E = 1,41\%$$

$$E = 2,95\%$$

3.3 Oscilador Harmônico Simples

Para realização da segunda parte do experimento, foi mantida a posição do carrinho e da mola conforme a primeira parte do experimento, sem alterações. A massa do conjunto do carrinho e massa suspensa, que representa a massa oscilante em uma configuração de OHS, foi medida. O valor de massa inicial observado foi:

$$m = 0,269\,\mathrm{kg}$$

Um dos sensores do trilho foi colocado na posição de equilíbrio entre carrinho e a mola, o carrinho foi deslocado uma certa distância de amplitude de sua posição de equilíbrio, afim de causar sua oscilação, e o cronômetro foi configurado para a função F5 para medir o período de uma oscilação completa do carrinho em relação a mola. Montado desta forma o sistema simularia experimentalmente um Oscilador Harmônico

Simples. A equação de movimento para o oscilador é representada pela equação (5)

Para a obtenção de dados, o processo de medição do período de oscilação do carrinho foi repetido 5 vezes, ao fim, uma massa adicional de 40 g era adicionada ao carrinho, aumentando sua massa total. Esse processo foi repetido no total 5 vezes, até o carrinho atingir uma massa final de 429,0 g. Os dados dos períodos de oscilação para cada massa e suas médias e erros estão na tabela à seguir:

Massa oscilante (kg)	0,2690 kg	0,3090 kg	0,3490 kg	0,3890 kg	0,4290 kg
$\bar{T}_1$	1,644 s	1,761 s	1,866 s	1,974 s	2,073 s
$\bar{T}_2$	1,647 s	1,765 s	1,867 s	1,971 s	2,071 s
$\bar{T}_3$	1,648 s	1,766 s	1,872 s	1,972 s	2,072 s
$\bar{T}_4$	1,642 s	1,764 s	1,871 s	1,972 s	2,074 s
$\bar{T}_5$	1,644 s	1,766 s	1,867 s	1,970 s	2,072 s
Média	1,645 s	1,764 s	1,869 s	1,972 s	2,072 s
Erro aleatório	0,001 s	0,001 s	0,001 s	0,001 s	0,000 s
Erro absoluto	0,002 s	0,002 s	0,002 s	0,002 s	0,001 s

Tabela 2: Períodos em relação as massas, suas médias e erros

Com a ferramenta gráfica SciDavis, foi feito um gráfico T × m com os períodos médios em função das massas oscilantes totais do sistema. O gráfico feito se encontra à seguir:

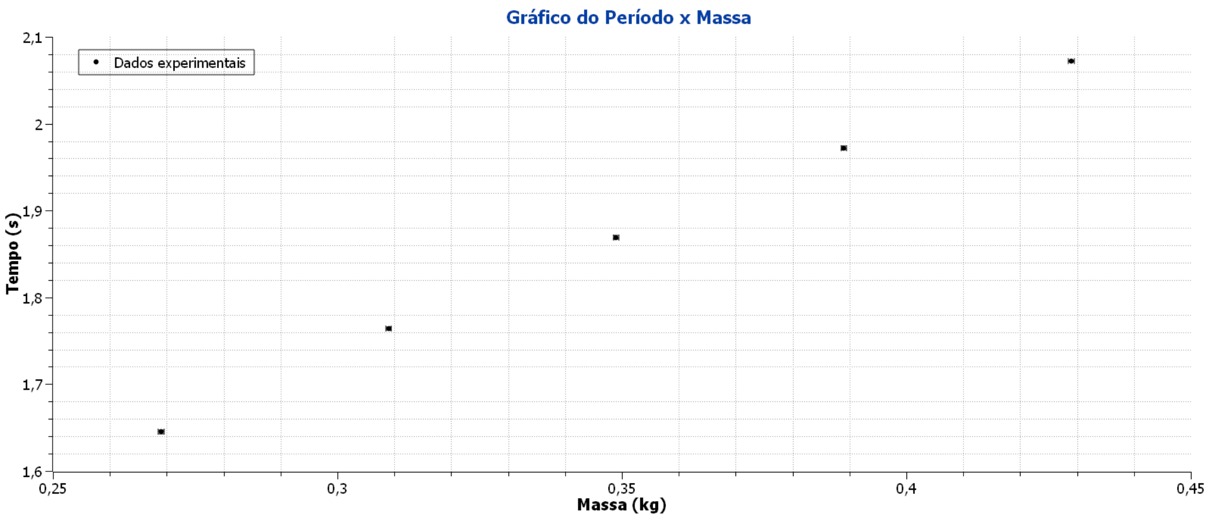

Figura 7: Gráfico de dispersão T × m

O gráfico anterior pode ser representado pela equação (9), que a relaciona o período à raiz da massa sobre a constante elástica.

Para a obtenção da constante elástica da mola é possível elevar os dois lados da equação (9) ao quadrado, obtendo-se a equação (10) que apresenta 4π sobre a constante elástica (k) como o coeficiente angular da massa relacionada ao período ao quadrado.

Foi feito um gráfico T^2 $\times$ m no SciDavis com regressão linear utilizando os dados dos períodos médios da tabela (2) ao quadrado:

T^2 (s^2)	Erro T^2	Massa (kg)	Erro M
2,706 s^2	0,004 s^2	0,2690 kg	0,005 kg
3,113 s^2	0,004 s^2	0,3090 kg	0,005 kg
3,492 s^2	0,004 s^2	0,3490 kg	0,005 kg
3,888 s^2	0,003 s^2	0,3890 kg	0,005 kg
4,295 s^2	0,003 s^2	0,4290 kg	0,005 kg

Tabela 3: Dados para o gráfico T^2 $\times$ m

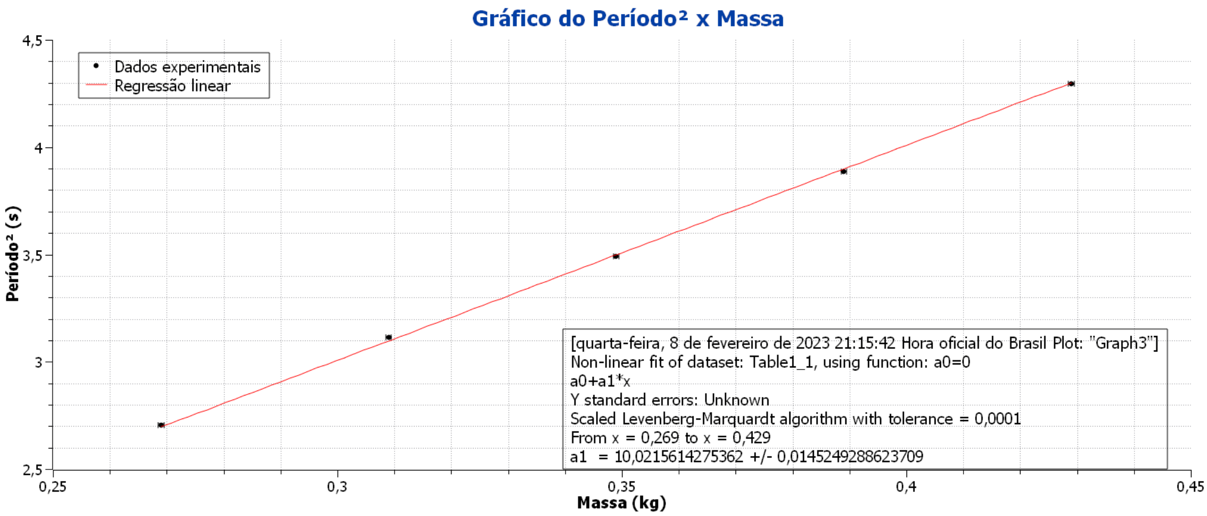

Figura 8: Gráfico de dispersão T^2 $\times$ m

A partir do coeficiente angular encontrado na regressão podemos calcular a constante elástica da mola pela seguinte relação vinda da equação (10):

$$a_1 = \frac{4\pi^2}{k}$$

$$k = \frac{4\pi^2}{a_1}$$

O valor de a_1 encontrado foi de:

$$a_1 = 10,021 \pm 0,014$$

Portanto, o valor da constante elástica calculado foi de:

$$k = (3,94 \pm 0,01)\,\mathrm{N/m}$$

Para comparar o valor encontrado com o valor da constante elástica calculada pela regressão linear na primeira parte do experimento, podemos calcular o erro relativo entre eles, assim obtendo a discrepância entre ambos:

$$E = 5,75\%$$

4 Conclusão

Neste experimento foram obtidos dados experimentais de dois fenômenos envolvendo o comportamento de molas, analisados pelas equações que governam esses comportamentos e fenômenos.
A primeira parte do experimento envolveu uma verificação experimental da lei de Hooke, foram obtidos as massas, forças e deslocamentos atuantes sobre a mola de aço utilizada no experimento. A partir desses dados, usando a equação da lei de Hooke foi calculada a constante elástica da mola. Primeiramente a constante elástica média foi calculada diretamente a partir dos dados experimentais, o valor obtido foi:

$$k = (4,11 \pm 0,05)\,\mathrm{N/m}$$

Posteriormente, usando uma calculadora científica foi calculada a constante elástica utilizando a função de regressão linear da calculadora:

$$k = 4,29\,\mathrm{N/m}$$

O erro relativo entre os dois valores encontrados é:

$$E = 4,24\%$$

Por fim, usando a ferramenta SciDavis, foi feito um gráfico com outra regressão linear dos dados, obtendo-se outro valor para a constante elástica:

$$k = (4,17 \pm 0,05)\,\mathrm{N/m}$$

O erro relativo entre esse valor e o obtido pela média e pela regressão na calculadora foi respectivamente:

$$E = 1,41\%$$
$$E = 2,95\%$$

Como é possível observar pelos três valores obtidos, os mesmos se assemelham mesmo com certa discrepância, resultado dos diferentes métodos utilizados para obtê-los. Portanto é possível concluir que os resultados estiveram dentro do esperado, de forma a verificar a lei de Hooke.

Para a segunda parte do experimento, foram obtidos os dados dos períodos de oscilação para diferentes massas oscilantes na mola. Foram montados dois gráficos, relacionando o período em função da massa e o período ao quadrado em função da massa respectivamente, no segundo foi feita a regressão linear e obtido o coeficiente angular. Manipulando as equações do sistema de um Oscilador Harmônico Simples, foi possível relacionar a constante elástica da mola com o coeficiente angular encontrado na regressão. O valor da constante elástica encontrado foi:

$$k = (3,94 \pm 0,01)\,\mathrm{N/m}$$

O erro relativo desse valor com o da regressão linear encontrado na primeira parte do experimento foi:

$$E = 5,75\%$$

Comparando os dois valores encontrados pelas regressões nas duas partes do experimento, é possível observar uma certa discrepância, ocasionada possivelmente pelas diferentes características dos experimentos, porém essa discrepância encontra-se dentro de um intervalo esperado, considerando também o possível desgaste dos equipamentos utilizados no experimento. Portanto, foi possível a partir do experimento, analisar e verificar a lei de Hooke e o movimento do Oscilador Harmônico Simples, obtendo-se a constante elástica da mola.

Referências

[1] H.D. Young & R.A. Freedman, *Física I, Sears & Zemansky* (Pearson, Addison Wesley, 2016), 14^a Ed.

[2] H. Moysés Nussenzveig, *Curso de Física Básica, 1: Mecânica* (São Paulo: Blucher, 2013), 5^a Ed.

[3] http://fisica2015-thiagokyamamoto.blogspot.com/2015/11/forca-elastica-lei-de-hooke.html

[4] https://brasilescola.uol.com.br/fisica/lei-de-hooke.htm

[5] https://mundoeducacao.uol.com.br/fisica/lei-hooke.htm

[6] https://brasilescola.uol.com.br/fisica/movimento-harmonico-simples.htm

[7] https://mundoeducacao.uol.com.br/fisica/movimento-harmonico-simples.htm

[8] https://aprender3.unb.br/pluginfile.php/2357800/mod_resource/content/2/Experimento_VI_Wytler.pdf

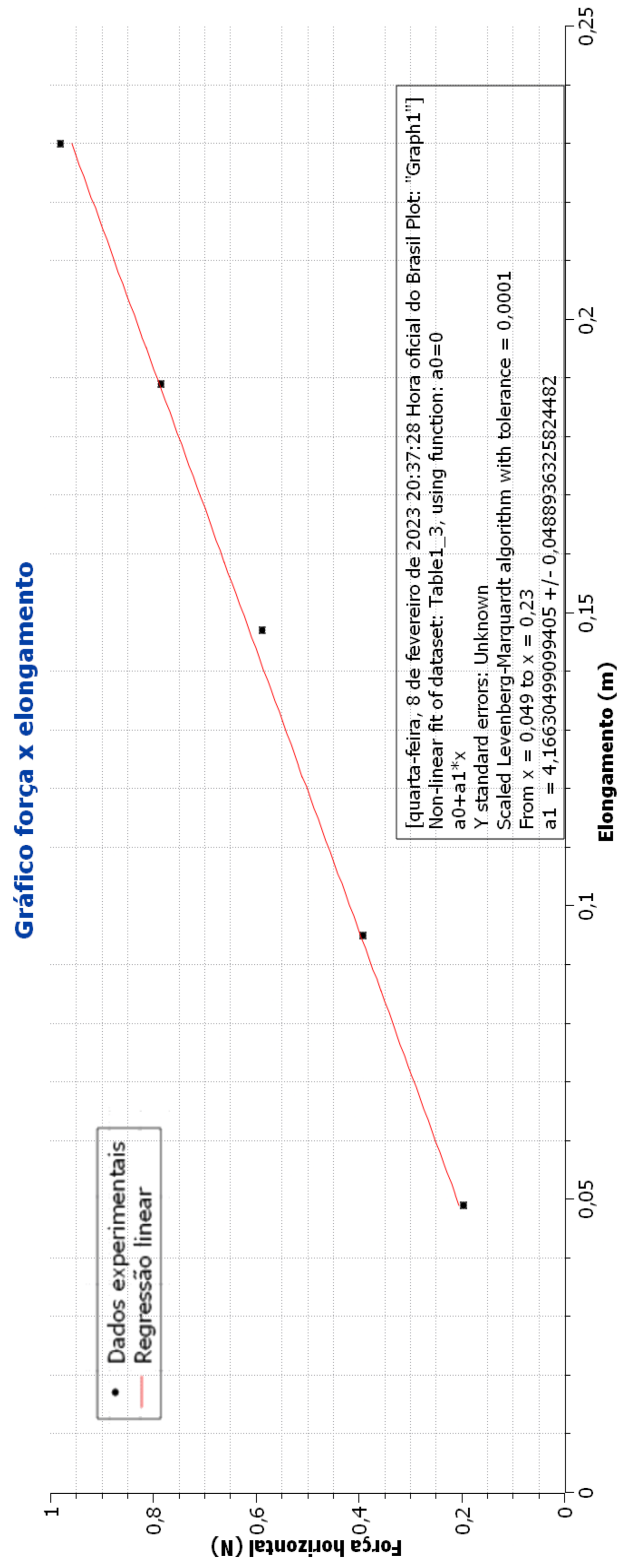

Gráfico força x elongamento
Dados experimentais
Regressão linear
[quarta-feira, 8 de fevereiro de 2023 20:37:28 Hora oficial do Brasil Plot: "Graph1"]
Non-linear fit of dataset: Table1_3, using function: a0=0
a0+a1*x
Y standard errors: Unknown
Scaled Levenberg-Marquardt algorithm with tolerance = 0,0001
From x = 0,049 to x = 0,23
a1 = 4,1663049909405 +/- 0,0488936325824482
Elongamento (m)
Força horizontal (N)
0
0,05
0,1
0,15
0,2
0,25
0,2
0,4
0,6
0,8
1

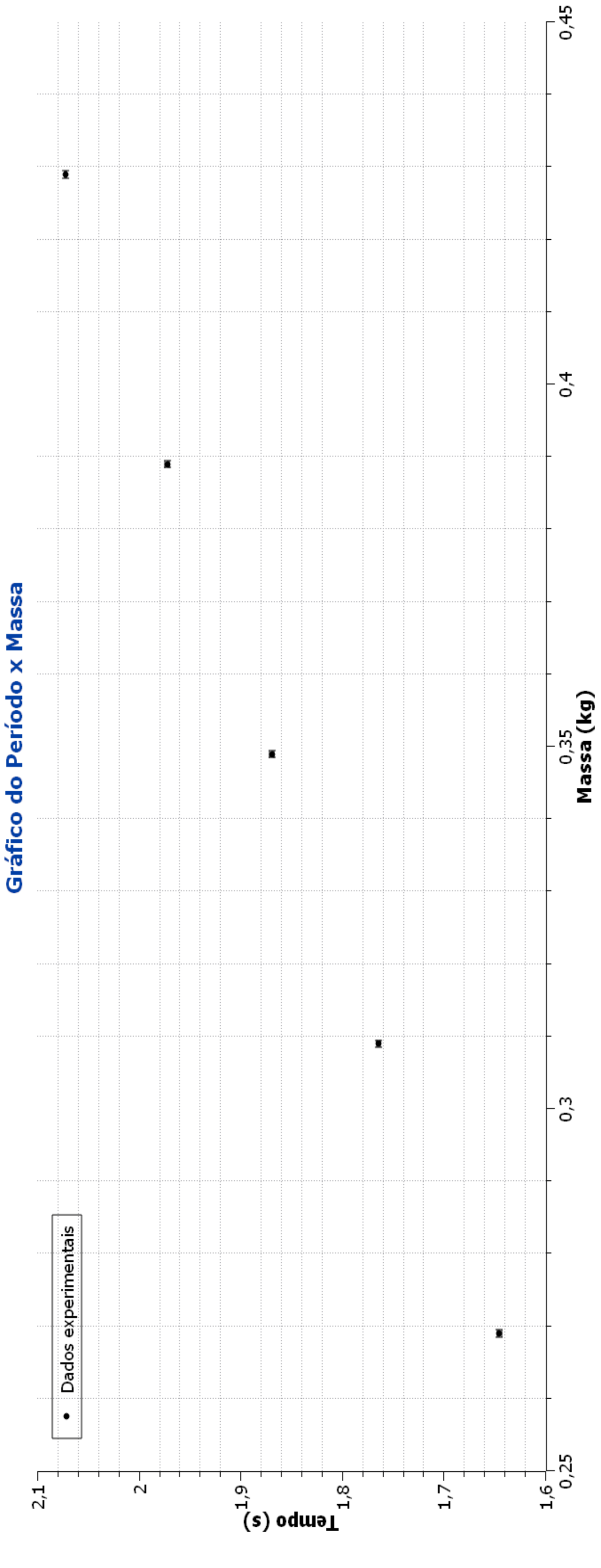

Gráfico do Período x Massa
Dados experimentais
Tempo (s)
2,1
2
1,9
1,8
1,7
1,6
Massa (kg)
0,25
0,3
0,35
0,4
0,45

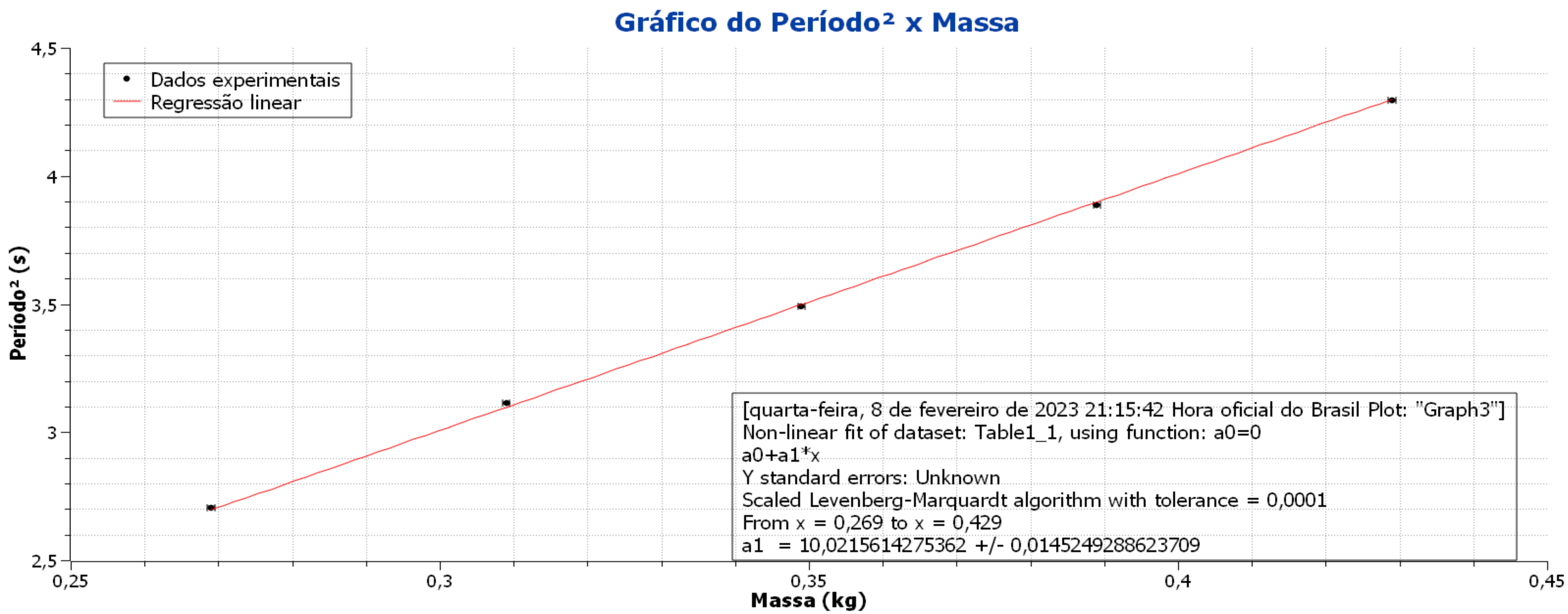
Gráfico do Período² x Massa
Dados experimentais
Regressão linear
[quarta-feira, 8 de fevereiro de 2023 21:15:42 Hora oficial do Brasil Plot: "Graph3"]
Non-linear fit of dataset: Table1_1, using function: a0=0
a0+a1*x
Y standard errors: Unknown
Scaled Levenberg-Marquardt algorithm with tolerance = 0,0001
From x = 0,269 to x = 0,429
a1 = 10,0215614275362 +/- 0,0145249288623709
Período² (s)
4,5
4
3,5
3
2,5
0,25
0,3
0,35
0,4
0,45
Massa (kg)