

Notas de Estudo

Fenômenos de Transporte



Felipe Santos Araujo
Vitória da Conquista, 2024

Conteúdo

1	Introdução	2
2	Lei de Newton da Viscosidade	3
2.1	Generalização da Lei de Newton da Viscosidade	4
2.2	Transporte Convectivo de Momento	6
3	Balanços de Momento em Cascas e Distribuição de Velocidades em Regime Lamiar	8
3.1	Balanços de Momento em Cascas e Condições de Contorno . .	8
3.2	Escoamento de um Filme Descendente	9
3.3	Escoamento através de um tubo circular	13
3.4	Escoamento através de um ânulo	16
3.5	Escoamento de dois fluidos imiscíveis e adjacentes	18
3.6	Escoamento lento em torno de uma esfera	20
4	Equações de Balanço para Sistemas Isotérmicos	22
4.1	Equação da Continuidade	22
4.2	Equação do Movimento	23
4.3	Equações de Balanço em termos de Derivadas Substantivas . .	25
5	Condutividade Térmica e os Mecanismos de Transporte de Energia	28
5.1	Lei de Fourier da Condução de Calor	28
5.2	Transporte Convectivo de Energia	29
5.3	Lei de Resfriamento de Newton	30
5.4	A Equação de Energia	31
6	Apêndice	36
6.1	Notação	36
6.1.1	ρvv	36
6.2	Derivada Substantiva	36
7	Identidades	36
8	Referências	37

1 Introdução

Fenômenos de Transporte se refere ao estudo de três tópicos que são altamente entrelaçados: dinâmica dos fluidos(momento), transferência de calor(energia) e transferência de massa(massa). Mas porquê estuda-los juntos?

- Ocorrem geralmente simultaneamente de um mesmo problema;
- As equações que descrevem os três fenômenos estão intimamente interligadas;
- Os mecanismos moleculares por trás dos três fenômenos estão bastante relacionados.

A princípio, existem três níveis diferentes de se estudar esses fenômenos.

- Nível macroscópico: é descrito por uma série de equações chamadas de “balanços macroscópicos”, que descrevem como a massa, a energia e o momento angular do sistema variam de acordo a introdução e retirada dessas e de outras grandezas através das correntes de entrada e saída;
- Nível microscópico: um conjunto de equações denominadas “equações de balanço” descrevem como a massa, a energia e o momento variam em uma pequena região. O objetivo é encontrar informações acerca de velocidades, temperaturas, pressões e concentrações dentro do sistema;
- Nível molecular: procura uma compreensão fundamental dos mecanismos de transporte de massa, de momento e de energia em termo da estrutura molecular e das forças intermoleculares.

Estudar fenômenos de transporte é essencial para entender e projetar sistemas que envolvem fluxos de fluidos, trocas de calor e difusão de substâncias.

2 Lei de Newton da Viscosidade

Seja um par de placas paralelas, cada uma com área A e separadas por um distância y . No espaço entre elas, há um fluido inicialmente em repouso.

Conforme o tempo avança, o fluido adquire momento até que se estabelece o perfil linear. O fluido passa a ter um escoamento lamiar (momento ordenado de escoamento). Quando a velocidade de escoamento se torna permanente,

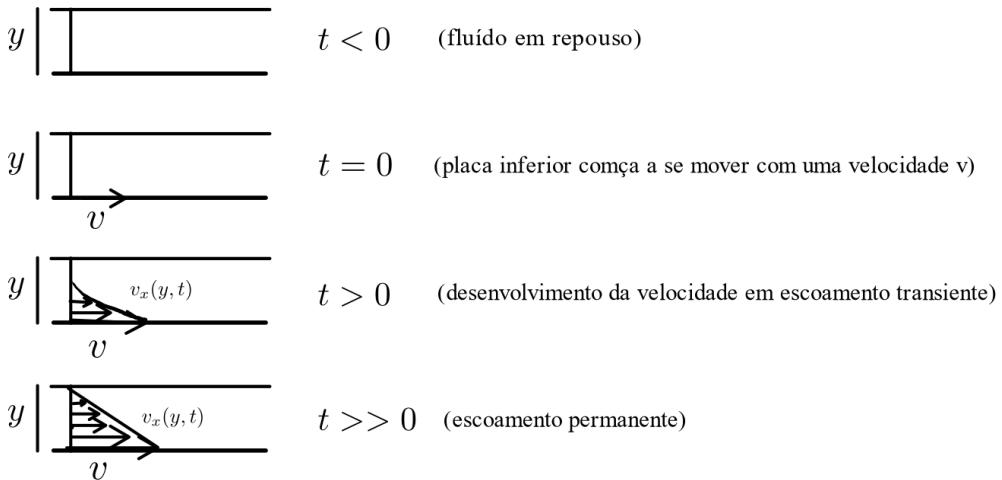


Figura 1: Representação das placas

uma força constante F sobre uma área A é necessária para manter o movimento das placas. A força pode ser expressa por

$$\frac{F}{A} = \mu \cdot \frac{v}{y} \quad (1)$$

Onde μ é a viscosidade do fluido em questão.

Substituímos $\frac{F}{A}$ por τ_{yx} , ou seja, a força na direção x em uma área unitária perpendicular a direção y e ainda $\frac{v}{y}$ por $\frac{dv_x}{dy}$. Assim ficamos com

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy} \quad (2)$$

Essa expressão (2), afirma que a força de cisalhamento por unidade de área é proporcional ao negativo do gradiente de velocidade. Ela é conhecida como Lei de Newton da Viscosidade.

2.1 Generalização da Lei de Newton da Viscosidade

Considere uma configuração de escoamento mais geral, isto é, com diferentes direções e sentidos, podendo depender do tempo ou não.

$$v_x = v_x(x, y, z, t); \quad v_y = v_y(x, y, z, t); \quad v_z = v_z(x, y, z, t)$$

Existirão nove componentes de tensão τ_{ij} , onde i e j podem ter designações x, y, z e t .

Suponha que em uma determinada região de um corpo, uma porção da superfície de um fluido seja removida. Estamos interessados nas forças que devem ser aplicadas nessa superfície livre, de modo que reponha a força antes exercida pelo fluido retirado. A priori são dois tipos de forças, as associadas à pressão e à viscosidade.

- A força de pressão é sempre perpendicular a força exposta. É representada pelo vetor $p\delta$, pressão(escalar) multiplicado pelo vetor unitário δ na direção x, y ou z .
- As forças viscosas, associadas ao gradiente de velocidade no fluido. Em geral, formam um ângulo com a superfície. São forças com componentes escalares, por exemplo, τ_x tem τ_{xx}, τ_{xy} e τ_{xz} .

Com isso, podemos ter o resumo das forças por unidade de área (tensor) que são exercidas no interior de um fluido. Podemos incluir ambos os tipos de tensões em apenas uma, são as chamadas tensões moleculares.

$$\pi_{ij} = p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (3)$$

Onde i e j podem ser x, y, z . δ_{ij} é conhecido como Delta de Kronecker e vale 1 se $i = j$ ou 0 se $i \neq j$.

A expressão (3) pode ser interpretada de duas maneiras:

- Força na direção j sobre uma área unitária perpendicular a i , onde o fluido da região x menor exerce força sobre o x maior;
- fluxo de momento de direção j na direção i positiva.

Em diante, vamos nos referir a τ_{ij} como o tensor tensão viscosa e π_{ij} como o tensor tensão molecular

Mas como essas tensões estão relacionadas com os gradientes de velocidade no fluido?

Precisamos fazer algumas restrições para responder a esta pergunta.

- As tensões viscosas podem ser combinação linear de todos os gradientes de velocidade:

$$\boldsymbol{\tau}_{ij} = - \sum_k \sum_{l,\mu,i,j,k} \frac{\partial v_k}{\partial x_l}$$

onde i, j, k e l podem ser 1,2,3;

- Afirmamos que derivadas ou integrais em relação ao tempo não devem aparecer na expressão;
- Não é esperado a presença de quaisquer forças viscosas caso o fluido se encontre em rotação pura (forças de Cariolis). Para isso, $\boldsymbol{\tau}_{ij}$ deve ser uma combinação simétrica de gradientes de velocidade. As únicas combinações lineares simétricas do gradiente de velocidade serão:

$$\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) e \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \delta_{ij} \quad (4)$$

- Se o fluido for isotrópico, então os coeficientes que antecedem a expressão (4) devem ser escalares de modo que,

$$\boldsymbol{\tau}_{ij} = A \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + B \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \delta_{ij} \quad (5)$$

- A expressão (5) se reduz a expressão (2) para a situação de escoamento da Figura 1. E para um escoamento elementar, $\boldsymbol{\tau}_{ij} = A \frac{dv_x}{dy}$. Dessa forma, a constante A deve ser igual ao negativo da viscosidade μ ;
- Por fim, a constante B é escrita como $\frac{2}{3}\mu - \kappa$, onde κ é chamada de *viscosidade dilatacional*. κ é nula para gases monoatômicos em baixas densidades.

Assim, feito as considerações, temos a expressão,

$$\boldsymbol{\tau}_{ij} = -\mu \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{2}{3}\mu - \kappa \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \delta_{ij} \quad (6)$$

Em notação vetor-tensor vamos ter,

$$\boldsymbol{\tau} = -\mu(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^\top) + \left(\frac{2}{3}\mu - \kappa \right) (\nabla \cdot \mathbf{v}) \delta \quad (7)$$

2.2 Transporte Convectivo de Momento

O momento pode ser transportado a partir do *transporte convectivo*, isto é, um escoamento macroscópico do fluido.

O fluido carrega consigo um momento $\rho\mathbf{v}$ por unidade de volume onde ρ é a *densidade do fluido* e \mathbf{v} é a velocidade com que o mesmo escoa. Sendo assim teremos as componentes do fluxo de momento, $v_x\rho\mathbf{v}$, $v_y\rho\mathbf{v}$ e $v_z\rho\mathbf{v}$, onde cada um descreve o fluxo nos seus respectivos eixos.

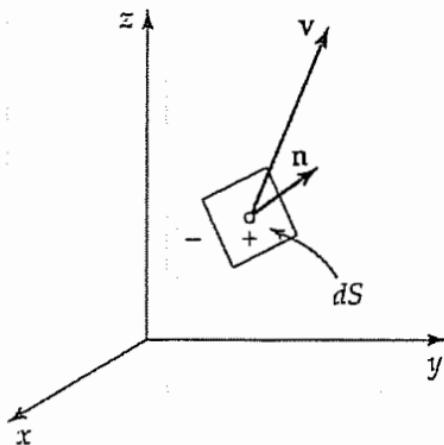


Figura 2: BIRD, R. B.; STEWART, W. Fenomenos de transporte. [s.l.] Reverte Ediciones, 1999.

Se o fluido escoa através da superfície dS , a vazão volumétrica através da superfície é dada por $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})dS$. Portanto, a taxa de transferência de momento através da superfície é $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\rho v dS$, e o fluxo convectivo de momento é $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\rho\mathbf{v}$. A expressão pode ser escrita também na forma vetorial tensorial, $[\mathbf{n} \cdot \rho\mathbf{v}\mathbf{v}]$ - o produto escalar do vetor unitário normal \mathbf{n} pelo tensor fluxo convectivo de momento $\rho\mathbf{v}\mathbf{v}$.

Analogamente, podemos definir o *fluxo molecular total de momento* através de uma superfície de orientação \mathbf{n} é dado por $[\mathbf{n} \cdot \pi] = p\mathbf{n} + [\mathbf{n} \cdot \tau]$ - isto é, o fluxo do lado menos para o lado mais da superfície. Essa grandeza também pode ser interpretada como a força por unidade de área exercida pelo "material menos" sobre o "material mais".

Definiremos agora, o *fluxo combinado de momento*, que é a soma do fluxo molecular de momento com fluxo convectivo de momento,

$$\Phi = \boldsymbol{\pi} + \rho \mathbf{v} \mathbf{v} = p\delta + \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \quad (8)$$

Onde a contribuição $p\delta$ não contém velocidade, mas somente a pressão; a combinação $\rho \mathbf{v} \mathbf{v}$ contém a densidade e produtos das componentes da velocidade; e a contribuição $\boldsymbol{\tau}$ contém a viscosidade e, para fluidos Newtonianos, é uma função linear dos gradientes de velocidade.

3 Balanços de Momento em Cascas e Distribuição de Velocidades em Regime Lamiar

Nesta seção, como obter os perfis de velocidades para escoamentos laminares de fluidos em sistemas simples de escoamento. Uma vez que conhecemos esses perfis, podemos obter outras grandezas como a velocidade máxima, a velocidade média ou a tensão cisalhante em uma superfície.

Os métodos que serão abordados aplicam-se somente para o escoamento permanente, ou seja, que a pressão, a densidade e as componentes de velocidade em cada ponto da corrente do fluido não variam com o tempo. Estudaremos aqui, o *escoamento laminar* que é o escoamento ordenado observado, por exemplo, em tubos para velocidades do fluido suficientemente baixas de modo que partículas diminutas injetadas no tubo movem-se ao longo de uma linha fina. Em oposição temos o *escoamento caótico* ou *escoamento turbulento*, de velocidades suficientemente altas, em que as partículas se separam dispersando-se sobre toda a seção transversal do tubo.

3.1 Balanços de Momento em Cascas e Condições de Contorno

Para o *escoamento permanente*, vamos utilizar o balanço de momento da seguinte forma,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{taxa de entrada} \\ \text{de momento} \\ \text{por transporte} \\ \text{convectivo} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{taxa de saída} \\ \text{de momento} \\ \text{por transporte} \\ \text{convectivo} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{taxa de entrada} \\ \text{de momento} \\ \text{por transporte} \\ \text{molecular} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{taxa de saída} \\ \text{de momento} \\ \text{por transporte} \\ \text{molecular} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{força da gravidade} \\ \text{agindo no sistema} \end{array} \right\} = 0$$

Figura 3: BIRD, R. B.; STEWART, W. Fenomenos de transporte. [s.l.] Reverte Ediciones, 1999.

Nessa seção o balanço de momento é aplicado somente a sistemas nos quais existe apenas uma componente de velocidade, a qual depende de apenas uma variável espacial; além disso, o escoamento deve ser retilíneo.

O procedimento para analisar escoamento viscoso é:

- Identificamos as componentes não-nulas da velocidade e as variáveis espaciais das quais elas dependem;

- Escrevemos uma equação de balanço da forma mencionada anteriormente;
- Fazemos com que a espessura da casca se aproxime de zero e usamos a definição de primeira derivada para obter a equação diferencial correspondente para o fluxo de momento;
- Integrando essas equações, obtemos o fluxo de momento;
- Aplicamos a Lei de Newton da Viscosidade para obter a equação diferencial da velocidade;
- Integrando ela obtemos as distribuições de velocidade.

Nas integrações mencionadas, aparecerão constantes de integração que nos dão valores de velocidade e de tensão nas fronteiras de um sistema. São chamadas de *condições de contorno*. As mais utilizadas serão:

- Em meios *sólido-fluido*, onde vamos ter que a velocidade do fluido se iguala à velocidade com que a superfície sólida se move. Isso vale também para as componentes, tangencial e normal, do vetor velocidade. Essa igualdade das componentes é referida como *condição de não-deslizamento*;
- Em um plano interfacial *líquido-líquido* onde x é constante, as componentes tangenciais de velocidade (v_x e v_y) e do tensor tensão molecular ($p + \tau_{xx}$, τ_{xy} e τ_{xz}) serão contínuas através da região de interface, retornando a ideia de *condições de não-deslizamento*;
- Em plano interfacial *líquido-gás* com x constante, vamos assumir que as componentes do tensor tensão τ_{xy} e τ_{xz} valem zero, desde que o valor do gradiente de velocidade no lado do gás não seja muito grande. Como gases tem uma viscosidade muito inferior a dos líquidos, essa consideração se torna razoável.

Um ponto importante para finalizar é que todas essas condições de contorno faz com que presumimos a não passagem de material através da interface, ou seja, não esperamos adsorção, absorção, dissolução, evaporação, fusão ou qualquer outra reação química na superfície entre as duas fases. Essas condições serão exploradas mais a frente.

3.2 Escoamento de um Filme Descendente

Vamos discutir inicialmente o escoamento de um fluido para baixo sobre um plano inclinado de comprimento L e largura W . Consideraremos a viscosi-

dade e a densidade do fluido constante.

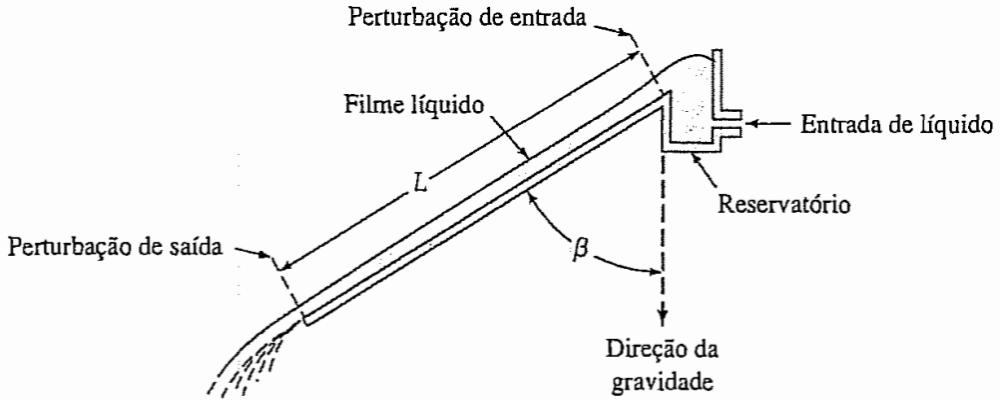


Figura 4: BIRD, R. B.; STEWART, W. Fenomenos de transporte. [s.l.] Reverte Ediciones, 1999.

Tome como "sistema" uma fina casca perpendicular à direção x . Fazemos um balanço de momento de direção z sobre essa casca, o que seria uma região de espessura Δx , limitada pelos planos $z = 0$ e $z = L$, se estendendo por uma distância W na direção y . Estaremos utilizando componentes do *tensor fluxo combinado de momento*, Φ , definido anteriormente na expressão (8), então ficaremos com,

Taxa de entrada de momento de direção z através da superfície em $z = 0$

$$(W\Delta x)\phi_{zz}|_{z=0} \quad (9)$$

Taxa de saída de momento de direção z através da superfície em $z = L$

$$(W\Delta x)\phi_{zz}|_{z=L} \quad (10)$$

Taxa de entrada de momento de direção z através da superfície em x

$$(LW)\phi_{xz}|_x \quad (11)$$

Taxa de saída de momento na direção z através da superfície $x + \Delta x$

$$(LW)\phi_{xz}|_{x+\Delta x} \quad (12)$$

Força gravitacional agindo sobre o fluido na direção z

$$(LW\Delta x)(\rho g \cos \beta) \quad (13)$$

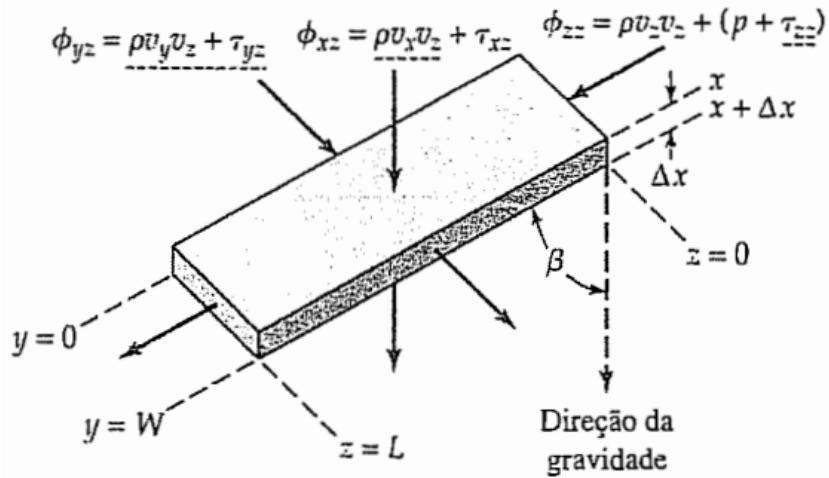


Figura 5: BIRD, R. B.; STEWART, W. Fenomenos de transporte. [s.l.] Reverte Ediciones, 1999.

Nota: As componentes ϕ_{xz} e ϕ_{yz} aparecem devido ao termo $\rho v_x v_z$ e $\rho v_y v_z$ que indicam que o fluido nas direções x e y podem carregar consigo momento na direção z . Além disso, O fluido pode também experimentar forças viscosas na direção z devido a variações de velocidade nas direções x e y .

Quando estamos utilizando as grandezas ϕ_{xx} e ϕ_{xz} nós estamos levando em consideração o transporte de momento de direção z por todos os mecanismos, convectivo e molecular.

Se substituirmos os termos dados na expressão apresentada pela Figura 3 teremos,

$$LW(\phi_{xz}|_x - \phi_{xz}|_{x+\Delta x}) + W\Delta x(\phi_{zz}|_{z=0} - \phi_{zz}|_{z=L}) + (LW\Delta x)(\rho g \cos \beta) = 0 \quad (14)$$

Se dividirmos essa equação por $LW\Delta x$, e tomarmos o limite quando Δx se

aproxima de zero, vamos ter que,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\phi_{xz}|_{x+\Delta x} - \phi_{xz}|_x}{\Delta x} \right) - \frac{\phi_{zz}|_{z=0} - \phi_{zz}|_{z=L}}{L} = \rho g \cos \beta \quad (15)$$

Note que no primeiro termo temos a definição de derivada de ϕ_{xz} em relação a x . Assim a expressão (15) fica,

$$\frac{\partial \phi_{xz}}{\partial x} - \frac{\phi_{zz}|_{z=0} - \phi_{zz}|_{z=L}}{L} = \rho g \cos \beta \quad (16)$$

Podemos explicitar os termos ϕ_{xz} e ϕ_{zz} fazendo o uso da definição de Φ que demos na Seção 2.2 com a expressão (8). Assim obteremos

$$\phi_{xz} = \tau_{xz} + \rho v_x v_z = -\mu \frac{\partial v_z}{\partial x} + \rho v_x v_z \quad (17)$$

$$\phi_{zz} = p + \tau_{zz} + \rho v_z v_z = p - 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \rho v_z v_z \quad (18)$$

Vamos assumir que $v_z = v_z(x)$, $v_x = 0$, $v_y = 0$ e $p = p(x)$, pois para vazões pequenas, espera-se que as forças viscosas impeçam a contínua aceleração do fluido para baixo. Assim vamos ter que,

- como $v_x = 0$, o termo $\rho v_x v_z = 0$;
- como $v_z = v_z(x)$, o termo $-2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}$ em (18) é zero;
- como $v_z = v_z(x)$ o termo $\rho v_z v_z$ é o mesmo que em $z = 0$ e em $z = L$;
- por fim, como $p = p(x)$, a contribuição de p é a mesma em $z = 0$ e em $z = L$. Assim, τ_{xz} dependerá apenas x e a expressão (16) se resume em

$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \rho g \cos \beta \quad (19)$$

Essa equação nos dá o fluxo de momento em τ_{xz} , e ela pode ser integrada obtendo-se,

$$\tau_{xz} = (\rho g \cos \beta)x + C_1 \quad (20)$$

A constante de integração C_1 pode e deve ser calculada utilizando as condições de contorno especificadas no capítulo 3.1. Vamos utilizar a condição de *líquido-gás*.

Então fazemos com que $x = 0$ e $\tau_{xz} = 0$. E assim ficamos que $C_1 = 0$, resultando em,

$$\tau_{xz} = (\rho g \cos \beta)x \quad (21)$$

Em seguida, substituímos τ_{xz} pela Lei da Viscosidade de Newton,

$$\tau_{xz} = -\mu \frac{dv_z}{dx} \quad (22)$$

E então ficamos com,

$$\frac{dv_z}{dx} = -\left(\frac{\rho g \cos \beta}{\mu}\right) x \quad (23)$$

Note que mais um vez podemos integrar a expressão diferencial para obtermos a distribuição de velocidade,

$$v_z = -\left(\frac{\rho g \cos \beta}{2\mu}\right) x^2 + C_2 \quad (24)$$

Para a constante de integração C_2 vamos utilizar a condição de contorno de *não-deslizamento* na superfície sólida, com $x = \delta$ e $v_z = 0$. Assim ficaríamos com $C_2 = \left(\frac{\rho g \cos \beta}{2\mu}\right) \delta^2$. Logo, nossa distribuição de velocidade será dada por,

$$v_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right] \quad (25)$$

3.3 Escoamento através de um tubo circular

Vamos considerar o escoamento lamiar permanente de um fluido com densidade ρ e viscosidade μ em um cilindro de comprimento L e raio R . O líquido escoa para baixo sob a influência da gravidade e de uma diferença de pressão. A princípio, vamos ignorar o fato de que na entrada e na saída do tubo o escoamento não será necessariamente paralelo às paredes do tubo, ou seja, não nos importaremos com o *efeito de extremidades*.

Supomos que $v_z = v_z(r)$, $v_r = 0$, $v_b = 0$ e $p = p(x)$.

Selecionamos como nosso sistema uma casca cilíndrica de espessura Δr e comprimento L e iniciamos listando as várias contribuições para o balanço de momento de direção z .

Taxa de entrada de momento de direção z através da superfície anular em $z = 0$

$$(2\pi r \Delta r) \phi_{zz}|_{z=0} \quad (26)$$

Taxa de saída de momento de direção z através da superfície anular em $z = L$

$$(2\pi r \Delta r) \phi_{zz}|_{z=L} \quad (27)$$

Taxa de entrada de momento de direção z através da superfície cilíndrica em r

$$(2\pi r L) \phi_{rz}|_r \quad (28)$$

Taxa de saída de momento na direção z através da superfície cilíndrica em $r + \Delta r$

$$(2\pi(r + \Delta r)L) \phi_{rz}|_{r+\Delta r} \quad (29)$$

Obs.: Podemos escrever $(r + \Delta r)$ como $r|_{r+\Delta r}$.

Força gravitacional agindo sobre o fluido na direção z na casca cilíndrica

$$(2\pi \Delta r L)(\rho g) \quad (30)$$

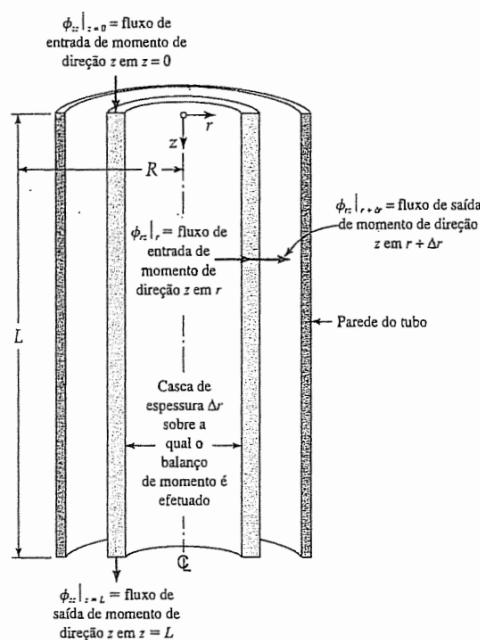


Figura 6: BIRD, R. B.; STEWART, W. Fenomenos de transporte. [s.l.] Reverte Ediciones, 1999.

Somando as contribuições de balanço ficamos com,

$$2\pi r \Delta r (\phi_{zz}|_{z=0} - \phi_{zz}|_{z=L}) + 2\pi L r (\phi_{rz}|_r - \phi_{rz}|_{r+\Delta r}) + (2\pi r \Delta r L) \rho g = 0 \quad (31)$$

Dividimos a expressão (31) por $2\pi L \Delta r$ e tomamos o limite quando $\Delta r \rightarrow 0$, assim obteremos,

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \left(\frac{(r\phi_{rz})|_{r+\Delta r} - (r\phi_{rz})|_r}{\Delta r} \right) = \left(\frac{\phi_{zz}|_{z=0} - \phi_{zz}|_{z=L}}{L} + \rho g \right) r \quad (32)$$

$$\frac{\partial(r\phi_{rz})}{\partial r} = \left(\frac{\phi_{zz}|_{z=0} - \phi_{zz}|_{z=L}}{L} + \rho g \right) r \quad (33)$$

Obtemos agora as componentes de ϕ_{rz} e ϕ_{zz} ,

$$\phi_{rz} = \tau_{rz} + \rho v_r v_z = -\mu \frac{\partial v_z}{\partial r} + \rho v_r v_z$$

$$\phi_{zz} = p + \tau_{zz} + \rho v_z v_z = p - 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \rho v_z v_z$$

Podemos fazer as seguintes considerações

- como $v_z = v_z(r)$, o termo $\rho v_z v_z$ e $-2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}$ serão o mesmo em ambas as extremidades do tubo;
- como $v_r = 0$, o termo $\rho v_r v_z$ é 0.

Assim a expressão (33) se reduz a

$$\frac{d(r\tau_{rz})}{dr} = \left(\frac{(p - \rho g 0) - (p - \rho g L)}{L} \right) r = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{L} \right) r \quad (34)$$

Podemos integrar a expressão (34) obtendo

$$\tau_{rz} = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{2L} \right) r + \frac{C_1}{r} \quad (35)$$

C_1 pode ser calculado usando a condição de contorno interface líquido-gás. Assumindo $r = 0$ e $\tau_{rz} =$ finita. Vemos que C_1 deve ser zero. Dessa forma, ficamos com a expressão

$$\tau_{rz} = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{2L} \right) r \quad (36)$$

Da Lei de Newton da Viscosidade, temos que,

$$\tau_{rz} - \mu \frac{dv_z}{dr}$$

Igualando à expressão (36) temos que

$$\frac{dv_z}{dr} = - \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{2\mu L} \right) r \quad (37)$$

Integrando (37) obtemos

$$v_z = - \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{4\mu L} \right) r^2 + C_2$$

Usamos a condição de contorno interface sólido-líquido para calcular C_2 , com $r = R$ e $v_z = 0$. Dessa forma, nota-se que $C_2 = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{4\mu L} \right) R^2$. Assim ficamos com a expressão

$$v_z = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{4\mu L} \right) R^2 \left[1 - \frac{r^2}{R^2} \right] \quad (38)$$

3.4 Escoamento através de um ânulo

Analisaremos agora o escoamento lamiar permanente de um líquido incompressível em uma região entre dois cilindros coaxiais de raio κR e R . O fluido escoa para cima - ou seja, contra o sentido da gravidade. Adotaremos as mesmas hipóteses, que $v_z = v_z(r)$, $v_r = 0$, $v_b = 0$ e $p = p(x)$. Da mesma forma que a seção 3.3, faremos um balanço de forma que

$$\frac{d(r\tau_{rz})}{dr} = \left(\frac{(p_0 + \rho g 0) - (p_1 + \rho g L)}{L} \right) = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{L} \right) r \quad (39)$$

A integração da expressão (39) nos da

$$\tau_{rz} = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{2L} \right) r + \frac{C_1}{r} \quad (40)$$

A constante C_1 não pode ser determinada de forma imediata. Isto porque não temos as informações do fluxo de momento nas superfícies $r = \kappa R$ e $r = R$. Mas podemos afirmar que existirá um máximo no perfil de velocidades

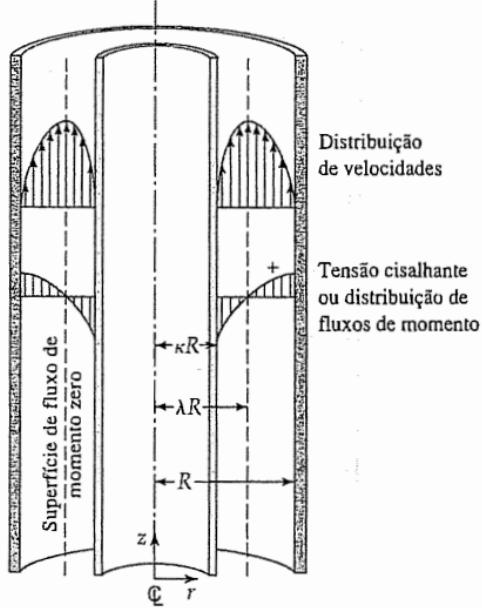


Figura 7: BIRD, R. B.; STEWART, W. Fenomenos de transporte. [s.l.] Reverte Ediciones, 1999.

em alguma superfície (por enquanto desconhecida) $r = \lambda R$, na qual o fluxo de momento será zero. Dessa forma

$$0 = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{2L} \right) \lambda R + \frac{C_1}{\lambda R}$$

C_1 vale então $-\left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{2L} \right) (\lambda R)^2$. Assim, a expressão (40) fica

$$\tau_{rz} = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{2L} \right) R + \left[\frac{r}{R} - \lambda^2 \frac{R}{r} \right] \quad (41)$$

Substituindo τ_{rz} da Lei de Newton da Viscosidade,

$$\frac{dv_z}{dr} = - \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{2\mu L} \right) R + \left[\frac{r}{R} - \lambda^2 \frac{R}{r} \right] \quad (42)$$

Integrando (42)

$$v_z = - \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{4\mu L} \right) R^2 + \left[\left(\frac{r}{R} \right)^2 - 2\lambda^2 \ln \left(\frac{r}{R} \right) + C_2 \right] \quad (43)$$

Precisamos agora avaliar as constantes λ e C_2 . Utilizaremos a condição de não-deslizamento em cada contorno sólido em $r = \kappa R$ com $v_z = 0$ e em $r = R$ em $v_z = 0$.

A substituição desses valores na expressão (43) nos fornece duas expressões

$$\kappa - 2\lambda^2 \ln \kappa + C_2 = 0$$

$$1 + C_2 = 0$$

A partir dessas equações as duas constantes de integração, λ e C_2 , são determinadas como

$$C_2 = -1$$

e

$$2\lambda^2 = \frac{1 - \kappa^2}{\ln(1/\kappa)}$$

Dessa forma, a expressão (43) fica da forma

$$v_z = - \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{4\mu L} \right) R^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 - \frac{1 - \kappa^2}{\ln(1/\kappa)} \ln \left(\frac{R}{r} \right) \right] \quad (44)$$

3.5 Escoamento de dois fluidos imiscíveis e adjacentes

Agora, analisemos o escoamento de dois líquidos imiscíveis e incompressíveis na direção z em uma fenda horizontal de comprimento L e largura W , que está sobre a influência de um gradiente de pressão $(p_0 - p_L)/L$. Os fluidos são configurados de modo que a metade da fenda é preenchida com o fluido I (a fase mais densa) e a outra metade com o fluido II (a fase menos densa). Os fluidos escoam lentamente de modo que não ocorrem instabilidades-isto é, a interface se mantém perfeitamente plana.

Faremos então um balanço diferencial de fluxo de momento

$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \frac{p_0 - p_L}{L} \quad (45)$$

Podemos integrar essa equação para as duas fases I e II, de forma que

$$\tau_{xz}^I = \left(\frac{p_0 - p_L}{L} \right) x + C_1^I \quad (46)$$

$$\tau_{xz}^{II} = \left(\frac{p_0 - p_L}{L} \right) x + C_1^{II} \quad (47)$$

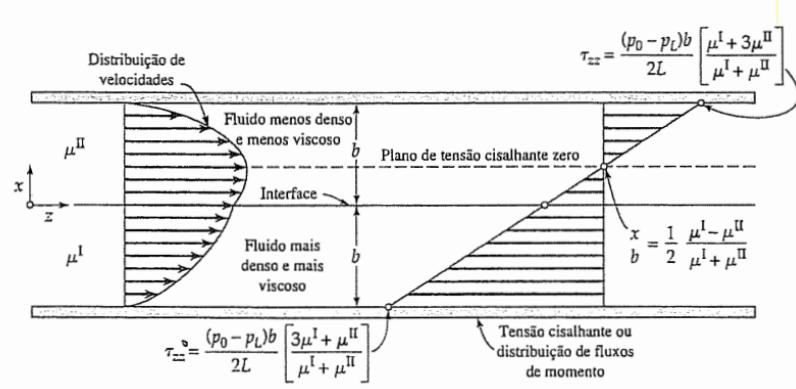


Figura 8: BIRD, R. B.; STEWART, W. Fenomenos de transporte. [s.l.] Reverte Ediciones, 1999.

Podemos utilizar uma das condição de contorno, isto é, quanto o fluxo de momento τ_{xz} é continuo através da interface líquido-líquido, em $x = 0$ e $\tau_{xz}^I = \tau_{xz}^{II}$.

Dessa forma, $C_1^I = C_1^{II}$. Como as duas constantes são iguais, representaremos então somente por C_1 .

Podemos aplicar a Lei de Newton da Viscosidade em (46) e (47). E então ficaremos com

$$-\mu^I \frac{dv_z^I}{dx} = \left(\frac{p_0 - p_L}{L} \right) x + C_1 \quad (48)$$

$$-\mu^{II} \frac{dv_z^{II}}{dx} = \left(\frac{p_0 - p_L}{L} \right) x + C_1 \quad (49)$$

Integrando ambas as equações

$$v_z^I = - \left(\frac{p_0 - p_L}{2\mu L} \right) x^2 + \frac{C_1}{\mu^I} x + C_2^I \quad (50)$$

$$v_z^{II} = - \left(\frac{p_0 - p_L}{2\mu L} \right) x^2 + \frac{C_1}{\mu^{II}} x + C_2^{II} \quad (51)$$

Queremos agora, determinar ambas as constantes de integração C_1 , C_2^I e C_2^{II} . Utilizaremos então as seguintes condições de contorno de não-deslizamento:

$$\text{em } x = 0; \quad v_z^I = v_z^{II}$$

$$\begin{aligned} \text{em } x = -b; & \quad v_z^I = 0 \\ \text{em } x = +b; & \quad v_z^{II} = 0 \end{aligned}$$

Utilizando dessas três condições de contorno vamos obter três expressões simultâneas para as constantes de integração,

$$\begin{aligned} C_2^I &= C_2^{II} \\ 0 &= -\left(\frac{p_0 - p_L}{2\mu^I L}\right) b^2 + \frac{C_1}{\mu^I} b + C_2^I \\ 0 &= -\left(\frac{p_0 - p_L}{2\mu^{II} L}\right) b^2 + \frac{C_1}{\mu^{II}} b + C_2^{II} \end{aligned}$$

Dessas três expressões obtemos que

$$\begin{aligned} C_1 &= -\left(\frac{p_0 - p_L}{2L}\right) b \left(\frac{\mu^I - \mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}}\right) \\ C_2^I &= -\left(\frac{p_0 - p_L}{2\mu^I L}\right) b^2 \left(\frac{2\mu^I}{\mu^I + \mu^{II}}\right) = C_2^{II} \end{aligned}$$

E por fim, obteremos os perfis de fluxos de momento e velocidades resultantes. Segue que eles são,

$$\tau_{xz} = \left(\frac{p_0 - p_L}{L}\right) b \left[\left(\frac{x}{b}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu^I - \mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}}\right)\right] \quad (52)$$

$$v_z^I = \left(\frac{p_0 - p_L}{2\mu^I L}\right) b^2 \left[\left(\frac{2\mu^I}{\mu^I + \mu^{II}}\right) + \left(\frac{\mu^I - \mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}}\right) \left(\frac{x}{b}\right) - \left(\frac{x^2}{b}\right)\right] \quad (53)$$

$$v_z^{II} = \left(\frac{p_0 - p_L}{2\mu^{II} L}\right) b^2 \left[\left(\frac{2\mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}}\right) + \left(\frac{\mu^I - \mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}}\right) \left(\frac{x}{b}\right) - \left(\frac{x^2}{b}\right)\right] \quad (54)$$

3.6 Escoamento lento em torno de uma esfera

Trataremos agora de um escoamento onde duas componentes de velocidade não serão nulas (v_r e v_θ), ao contrário dos problemas anteriores onde apenas uma componente era não nula. Não podemos analisar esse comportamento com as técnicas utilizadas anteriormente. Voltaremos mais tarde nesse problema.

Consideremos o escoamento de um fluido incompressível em torno de uma esfera sólida e fixa de raio R e diâmetro D . O fluido tem uma densidade ρ , uma viscosidade μ e velocidade uniforme v_∞ vertical para cima no sentido

z . Esse é um escoamento lento, ou seja, o número de Reynolds $Re = D \frac{v_x \rho}{\mu}$ é menor que cerca de 0,1. Isso se deve a ausência de vórtices junto da esfera. As distribuições de velocidade e de pressão são

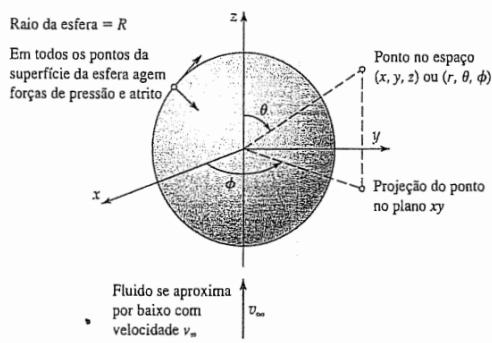


Figura 9: BIRD, R. B.; STEWART, W. Fenomenos de transporte. [s.l.] Reverte Ediciones, 1999.

$$v_r = v_\infty \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{R}{r} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \cos \theta \quad (55)$$

$$v_\theta = v_\infty \left[-1 + \frac{3}{4} \left(\frac{R}{r} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \sin \theta \quad (56)$$

$$v_\phi = 0 \quad (57)$$

$$p = p_0 - \rho g z - \frac{3}{2} \frac{\mu v_\infty}{R} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \cos \theta \quad (58)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Taxa de} \\ \text{aumento} \\ \text{De massa} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Taxa de} \\ \text{Entrada} \\ \text{De massa} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Taxa de} \\ \text{Saída} \\ \text{de massa} \end{array} \right\}$$

4 Equações de Balanço para Sistemas Isotérmicos

Veremos agora um balanço geral, uma forma que possa ser aplicado a qualquer problema. Veremos a *equação da continuidade*(para balanço de massa) e a *equação do movimento*(para balanço de momento).

4.1 Equação da Continuidade

A expressão que vamos trabalhar nessa seção é de extrema importância para o estudo de sistemas de fluídos. Seu desenvolvimento vem a partir de um balanço de massa sobre um elemento de volume $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ que escoa através de um fluido. A equação será da forma Consideremos as duas faces que estão

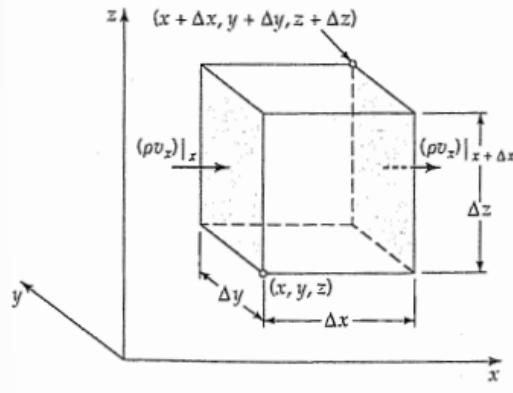


Figura 10: BIRD, R. B.; STEWART, W. Fenómenos de transporte. [s.l.] Reverte Ediciones, 1999.

sombreadas. A taxa de entrada de massa no elemento de volume através dessa área em x é $(\rho v_x)|_x \Delta y \Delta z$, e a taxa de saída de massa através da área sombreada em $x + \Delta x$ é $(\rho v_x)|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$. Para as outras faces escrevemos expressões similares. A taxa de aumento de massa no interior deste elemento

de volume é dada por $\Delta x \Delta y \Delta z (\partial \rho / \partial t)$. Dessa forma ficamos com o balanço

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t} = & \Delta y \Delta z [(\rho v_x)|_x - (\rho v_x)|_{x+\Delta x}] \\ & + \Delta x \Delta z [(\rho v_y)|_y - (\rho v_y)|_{y+\Delta y}] \\ & + \Delta x \Delta y [(\rho v_z)|_z - (\rho v_z)|_{z+\Delta z}] \end{aligned} \quad (59)$$

Dividindo a expressão (59) por $\Delta x \Delta y \Delta z$ e tomando seu limite quando $\Delta x \Delta y \Delta z$ tendem a zero

$$\lim_{\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{(\rho v_x)|_x - (\rho v_x)|_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \frac{(\rho v_y)|_y - (\rho v_y)|_{y+\Delta y}}{\Delta y} + \frac{(\rho v_z)|_z - (\rho v_z)|_{z+\Delta z}}{\Delta z} \right)$$

E então

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right) \quad (60)$$

Esta é a *equação da continuidade* que tínhamos mencionado no começo desta seção. Ela descreve a taxa de variação temporal da densidade do fluido em uma posição no espaço. EM notação vetorial podemos escrever-la

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) \quad (61)$$

Um caso importante que essa equação nos dá é quando $(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$. Neste caso, temos um fluido de densidade constante, assim ele recebe o nome de *fluído incompressível*.

4.2 Equação do Movimento

Para obter a equação do movimento efetuaremos o balanço da seguinte maneira. Analisaremos primeiro a taxa de momento na direção x . A partir dela

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Taxa de} \\ \text{aumento} \\ \text{De momento} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Taxa de} \\ \text{Entrada De} \\ \text{momento} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Taxa de} \\ \text{Saída de} \\ \text{momento} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Taxa} \\ \text{Externa} \\ \text{Sobre o} \\ \text{fluído} \end{array} \right\}$$

podemos fazer de maneira similar para as componentes y e z . O momento entra e sai de $\Delta x \Delta y \Delta z$ por transporte convectivo e molecular, ambos mencionados anteriormente.

A taxa que a componente de momento de direção x entra através da face sombreada em x por todos os mecanismos é $(\phi_{xx})|_x \Delta y \Delta z$ e a taxa que sai

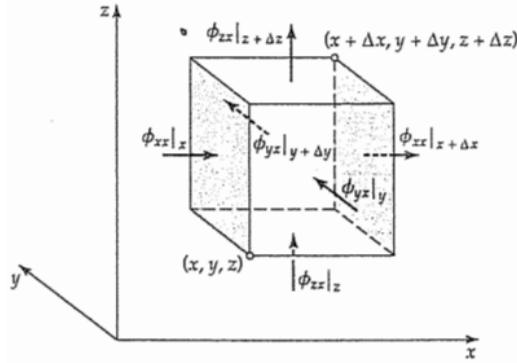


Figura 11: BIRD, R. B.; STEWART, W. Fenomenos de transporte. [s.l.] Reverte Ediciones, 1999.

pela outra face sombreada em $x + \Delta x$ é $(\phi_{xx})|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$. As taxas com que o momento de direção x entra e sai nas faces em y e $y + \Delta y$ são, respectivamente, $(\phi_{yx})|_y \Delta x \Delta z$ e $(\phi_{yx})|_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z$. Por fim, temos as taxas com que o momento de direção x entra e sai através das faces z e $z + \Delta z$ são, respectivamente, $(\phi_{zx})|_z \Delta x \Delta y$ e $(\phi_{zx})|_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y$. Somando-as obtemos a taxa líquida de adição de momento de direção x ,

$$\Delta y \Delta z (\phi_{xx})|_x - (\phi_{xx})|_{x+\Delta x} + \Delta x \Delta z (\phi_{yx})|_y - (\phi_{yx})|_{y+\Delta y} + \Delta x \Delta y (\phi_{zx})|_z - (\phi_{zx})|_{z+\Delta z} \quad (62)$$

Precisamos também da força externa - força gravitacional - que age sobre o fluido no elemento de volume. A componente x dessa força será

$$\rho g_x \Delta x \Delta y \Delta z$$

A soma desses termos deve ser igual à taxa de aumento de momento de direção x no interior do elemento de volume $\Delta x \Delta y \Delta z \partial(\rho v_x)_0 / \partial t$. Assim feito, dividimos a equação por $\Delta x \Delta y \Delta z$ e tomamos o limite quando $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ tendem a zero. E então ficamos com

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \phi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{zx}}{\partial z} \right) + \rho g_x \quad (63)$$

Essa equação pode ser desenvolvida também para as componentes y e z do balanço de momento. Usando a notação vetorial-tensorial essa equação pode ser escrita como

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} = -[\nabla \cdot \Phi]_i + \rho g_i \quad i = x, y, z \quad (64)$$

Podemos multiplicar a expressão (64) pelo vetor unitário i e somamos vetorialmente as três componentes. Dessa forma, vamos obter

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} = -[\nabla \cdot \Phi] + \vec{g} \quad (65)$$

Essa é a forma diferencial da Lei de Conservação de Momento. Note que Φ é o fluxo combinado de momento, a qual foi mostrado anteriormente.

$$\Phi = \rho v \vec{v} + p \vec{\delta} + \vec{\tau}$$

Substituindo em (65),

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} = -[\nabla \cdot \rho v \vec{v}] - [\nabla p] - [\nabla \cdot \vec{\tau}] + \rho \vec{g} \quad (66)$$

A energia mecânica não se conserva em um sistema que está em escoamento, mas podemos encontrar uma equação de balanço que lide com esse energia. Essa expressão ainda será utilizada mais adiante para desenvolver o que queremos com esses estudos.

Pegue o produto escalar do vetor \mathbf{v} que aparece na expressão anterior. Separamos os termos que contém p e τ em duas partes. Fazemos por fim alguns ajustes e temos a *equação de balanço para a energia cinética*,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -(\nabla \cdot \frac{1}{2} \rho v^2 \mathbf{v}) - (\nabla \cdot p \mathbf{v}) - p(-\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]) - [\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{v}] + \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) \quad (67)$$

O termo $p(-\nabla \cdot \mathbf{v})$ pode ser negativo ou positivo dependendo se o fluído está em expansão ou compressão. O outro termo, $-[\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{v}]$ que descreve a degradação da energia mecânica em energia térmica é sempre positivo para fluidos newtonianos, ele pode ser escrito como,

$$\begin{aligned} (-\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{v}) &= \frac{1}{2} \mu \sum_i \sum_j \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \delta_{ij} \right]^2 + \kappa (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 \\ &= \mu \Phi_v + \kappa \Psi_v \end{aligned}$$

4.3 Equações de Balanço em termos de Derivadas Substantivas

Utilizaremos em diante, a notação de derivada temporal substantiva (também conhecida como derivada material, derivada hidrodinâmica ou derivada acompanhando o movimento). Usaremos o operador especial $\frac{D}{Dt}$ onde

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$$

*Nota: Esta é melhor explicada no **Apêndice***

Assim, a expressão (66) fica

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p - \nabla \cdot \vec{\tau} + \rho \vec{g} \quad (68)$$

Descreveremos agora, três simplificações importantes da *equação do movimento*,

1. Para ρ e μ constantes e a inserção da Lei de Newton da Viscosidade, vamos ter a *Equação de Navier-Stokes*

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g} \quad (69)$$

2. Quando a aceleração for constante ou nula podemos desconsiderar os termos que a envolvem, dessa forma obteremos a *Equação de Escoamento de Stokes*

$$0 = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g} \quad (70)$$

3. Quando as forças viscosas são desprezadas, ou seja, $[\nabla \cdot \tau] = 0$ teremos então a *Equação de Euler* para fluídos "invíscidos"

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{g} \quad (71)$$

Como podemos chegar na *Equação de Bernoulli* utilizando a *Equação de Euler*? Temos,

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{g}$$

Utilizando a identidade 2.1, escrevemos

$$\rho \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) - \rho [v \times [\nabla v \times v]] = -\nabla p - \rho g \nabla h$$

Note que, $\rho g \nabla h$ se deve ao fato de $\vec{g} = g \left(\frac{\partial z}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial z}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial z}{\partial z} \hat{z} \right) = g \nabla z = g \nabla h$.

Multiplicamos toda a expressão pelo vetor unitário $s = \vec{v}/|v|$. E então substituímos $s \cdot \nabla$ por d/ds , sendo s a distância medida ao longo de uma linha de corrente. Como o campo vetorial de velocidade é um campo conservativo, o termo que acompanha o rotacional se anula. Dessa forma,

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -\frac{d}{ds} p - \rho g \frac{d}{ds} h$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)+\frac{d}{ds}p+\rho g\frac{d}{ds}h=0$$

$$\left(\frac{1}{2}\rho\right)dv^2+dp+\rho g dh=0$$

5 Condutividade Térmica e os Mecanismos de Transporte de Energia

A condução de calor pode ser considerada como *transporte molecular de energia* uma vez que são as moléculas constituintes da substância que carregam calor. Essa energia também pode ser transportada pelo *movimento macroscópico do fluido*, sendo esse o *transporte convectivo de energia*, essa forma de transporte depende da densidade ρ do fluido.

5.1 Lei de Fourier da Condução de Calor

Considere uma barra de metal sólido de área A entre duas placas paralelas separadas por uma distância y (um condutor). Inicialmente, o sólido está a uma temperatura constante T_0 . Em $t = 0$, a temperatura da placa inferior é elevada a uma temperatura superior T_1 e mantida nela. Com o passar do tempo, essa temperatura se altera e se estabelece em um perfil linear permanente de temperatura. Assim, uma taxa constante de transferencial de calor $\frac{dQ}{dt}$, através da barra, é necessária para manter a diferença de temperatura $\Delta T = T_1 - T_0$. Para valores pequenos de ΔT , teremos a seguinte relação

$$\frac{dQ}{dt} = -kA \frac{dT}{dy} \quad (72)$$

A taxa de transferência de calor por unidade de área é proporcional ao decréscimo de temperatura e inversamente proporcional à espessura do condutor. k é a *constante de condutividade térmica* do material. Essa expressão é válida também em líquidos ou gases.

Quando a espessura da barra tender a zero, a taxa local de transferência de calor por unidade de área, a qual chamaremos de *fluxo térmico* é designada por $q_y = -k \frac{dT}{dy}$.

Essa equação é a Lei de Fourier da Condução de Calor. Ela determina que o fluxo térmico devido à condução é proporcional ao gradiente de temperatura

$$\vec{q} = -k \nabla T \quad (73)$$

Ela descreve o transporte molecular de calor em meios isotrópicos (o fluido não tem uma direção preferencial).

5.2 Transporte Convectivo de Energia

Definimos anteriormente a Lei de Fourier de Condução de Calor. Ela determina o transporte de energia através de um meio por conta de um movimento molecular. A energia também é transportada por meio do movimento macroscópico do fluido. Considere três elementos de área dS perpendiculares no ponto P . A velocidade do fluido nesse ponto é \vec{v} . A taxa volumétrica do escoamento através do elemento de área dS perpendicular ao eixo x é $v_x dS$. Assim, a taxa com que a energia é transportada através desse elemento de energia é

$$\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho \hat{U}\right) v_x dS \quad (74)$$

Onde $\frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2}\rho(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$ é a energia cinética por unidade de volume

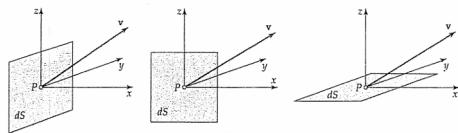


Figura 12: BIRD, R. B.; STEWART, W. Fenomenos de transporte. [s.l.] Reverte Ediciones, 1999.

e $\rho \hat{U}$ é a energia interna por unidade de volume.

Podemos generalizar a expressão de transporte convectivo para quaisquer direções, multiplicando pelo correspondente vetor unitário e então dividir a expressão encontrada por dS .

$$\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho \hat{U}\right) \delta_x v_x + \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho \hat{U}\right) \delta_y v_y + \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho \hat{U}\right) \delta_z v_z = \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho \hat{U}\right) \vec{v} \quad (75)$$

Esse é chamado de *vetor fluxo convectivo de energia*.

Aplicaremos agora, essa expressão para os seguintes três elementos de superfície. Note que temos três elementos de superfície com área dS perpendiculares no ponto P . Eles estão acompanhados das tensões $\boldsymbol{\pi}_x, \boldsymbol{\pi}_y, \boldsymbol{\pi}_z$ que estão atuando nessas superfícies. A taxa com que o trabalho é realizado pelo fluido do lado negativo de dS sobre o lado do fluido positivo é

$$[\boldsymbol{\pi} \cdot \vec{v}] = \delta_x (\boldsymbol{\pi}_x \cdot \vec{v}) + \delta_y (\boldsymbol{\pi}_y \cdot \vec{v}) + \delta_z (\boldsymbol{\pi}_z \cdot \vec{v}) \quad (76)$$

Podemos então definir o *vetor fluxo combinado de energia* \vec{e} como,

$$\vec{e} = \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho \hat{U}\right) \vec{v} + [\boldsymbol{\pi} \cdot \vec{v}] + \vec{q} \quad (77)$$

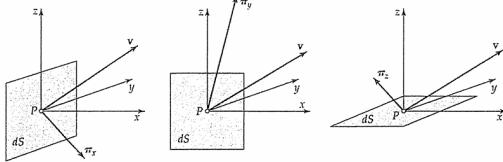


Figura 13: BIRD, R. B.; STEWART, W. Fenomenos de transporte. [s.l.] Reverte Ediciones, 1999.

O tensor total molecular $\boldsymbol{\pi}$ pode ser dividido em $\boldsymbol{\pi} = p\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau}$ de tal forma que $[\boldsymbol{\pi} \cdot \vec{v}] = p\vec{v} + [\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{v}]$. O termo $p\vec{v}$ pode ser combinado ao da energia interna $\rho\hat{U}\vec{v}$ para dar a entalpia, $\rho\hat{U}\vec{v} + p\vec{v} = \rho(\hat{U} + \frac{p}{\rho})\vec{v} = \rho(\hat{U} + p\hat{V})\vec{v} = \rho\hat{H}\vec{v}$. Assim reescrevemos e como

$$e = (\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\hat{H})\vec{v} + [\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{v}] + \bar{q} \quad (78)$$

5.3 Lei de Resfriamento de Newton

Podemos introduzir nessa seção o balanço de energia em cascas e condições de contorno. Esses balanços serão da forma, O termo *produção de energia*

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{l} \text{taxa de} \\ \text{entrada de} \\ \text{energia pelo} \\ \text{transporte} \\ \text{convectivo} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} \text{taxa de} \\ \text{saída de} \\ \text{energia pelo} \\ \text{transporte} \\ \text{convectivo} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{taxa de} \\ \text{entrada de} \\ \text{energia pelo} \\ \text{transporte} \\ \text{molecular} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} \text{taxa de} \\ \text{saída de} \\ \text{energia pelo} \\ \text{transporte} \\ \text{molecular} \end{array} \right) + \\ & \left(\begin{array}{l} \text{taxa de} \\ \text{trabalho} \\ \text{realizado sobre} \\ \text{o sistema pelo} \\ \text{transporte} \\ \text{molecular} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} \text{taxa de} \\ \text{trabalho} \\ \text{realizado pelo} \\ \text{sistema pelo} \\ \text{transporte} \\ \text{molecular} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{taxa de} \\ \text{trabalho} \\ \text{realizado sobre} \\ \text{o sistema} \\ \text{pelas forças} \\ \text{externas} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{taxa de} \\ \text{produção} \\ \text{de energia} \end{array} \right) = 0 \end{aligned}$$

Figura 14: BIRD, R. B.; STEWART, W. Fenomenos de transporte. [s.l.] Reverte Ediciones, 1999.

pode ser, por exemplo, conversão de energia mecânica em calor e processos como fissão nuclear, reações químicas.

Ao escrevermos a expressão anterior para uma placa fina ou casca de material qualquer, a espessura da placa ou casca é levada a tender a zero, tal como fizemos nas seções anteriores. Esse procedimento nos leva a uma expressão

para a distribuição de temperatura contendo constantes de integração, que são as nossas condições de contorno. Os tipos mais comuns de condições de contorno são,

- A temperatura é especificada numa superfície;
- O fluxo térmico normal a uma superfície pode ser dado (isto é equivalente a especificar o componente normal do gradiente de temperatura);
- Nas interfaces do sistema são impostas a continuidade da temperatura e do fluxo térmico normal à interface;
- Numa interface sólido-fluido o componente normal do fluxo térmico pode ser relacionado à diferença entre a temperatura da superfície sólida T_0 e a temperatura média de mistura do fluido T_b .

Essa última condição é conhecida como *Lei de Resfriamento de Newton*, definida como

$$q = h(T_0 - T_b) \quad (79)$$

h é conhecida como *coeficiente de transferência de calor*.

5.4 A Equação de Energia

Estaremos interessados em uma equação que consiga descrever o transporte de energia em fluidos ou sólidos homogêneos. Essa será a *equação da energia*. Junto a a equação da continuidade (conservação da massa) e a equação do movimento (conservação de momento) ampliaremos nossas ferramentas de análise dos fenômenos de transporte.

A lei de conservação de energia é uma extensão da Primeira Lei da Termodinâmica, que nos diz que diferença entre a quantidade de calor Q trocada com o meio e o trabalho W realizado durante a transformação resulta numa variação da energia interna do sistema, ou $\Delta U = Q - W$.

Estaremos interessados em um elemento de volume constante, através do qual um fluido está escoando. A energia cinética e a energia interna podem estar entrando e deixando o sistema por transporte convectivo. O calor pode entrar e sair do sistema por condução de calor. O trabalho pode ser feito no fluido em escoamento pelas tensões. Esse termo inclui o trabalho feito pelas forças de pressão e pelas forças viscosas. Além disso, trabalho pode ser feito sobre o sistema em virtude de forças externas como a da gravidade.

A forma para escrevermos a equação de energia segue da forma:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{taxa de} \\ \text{aumento} \\ \text{da energia} \\ \text{interna e} \\ \text{cinética} \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{taxa líquida de} \\ \text{adição de energia} \\ \text{cinética e interna} \\ \text{por transporte} \\ \text{convetivo} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{taxa líquida de} \\ \text{adição de calor} \\ \text{por transporte} \\ \text{molecular} \\ \text{(condução)} \end{array} \right\} + \\ &\quad \left\{ \begin{array}{l} \text{taxa de trabalho} \\ \text{feito no sistema} \\ \text{por mecanismo} \\ \text{molecular (i.e.,} \\ \text{pelas tensões)} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{taxa de trabalho} \\ \text{feito no sistema} \\ \text{pelas forças} \\ \text{externas (p.ex.,} \\ \text{gravidade)} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Figura 15: BIRD, R. B.; STEWART, W. Fenomenos de transporte. [s.l.] Reverte Ediciones, 1999.

A taxa de aumento das energias cinética e interna em um elemento de volume $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ dada por:

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \hat{U} \right) \quad (80)$$

\hat{U} é chamada de *energia interna específica*, é a energia interna por unidade de massa. O produto $\rho \hat{U}$ é a energia por unidade de volume.

Precisamos verificar a taxa de entrada e saída de energia no elemento de volume $\Delta x \Delta y \Delta z$

$$\Delta y \Delta z (e_x|_x - e_x|_{x+\Delta x}) + \Delta x \Delta z (e_y|_y - e_y|_{y+\Delta y}) + \Delta x \Delta y (e_z|_z - e_z|_{z+\Delta z}) \quad (81)$$

A taxa com que o trabalho é realizado sobre o fluido pelas forças externas é o produto escalar da velocidade do fluido \mathbf{v} e a força que atua no fluido $(\rho \Delta x \Delta y \Delta z)g$, ou

$$\rho \Delta x \Delta y \Delta z (v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z) \quad (82)$$

Agora, reorganizamos essas contribuições e dividimos a expressão resultante por $\Delta x \Delta y \Delta z$. Após, fazemos $\Delta x, \Delta y$ e Δz tenderem a zero. E por fim, ficamos com,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \hat{U} \right) = - \left(\frac{\partial e_x}{\partial x} + \frac{\partial e_y}{\partial y} + \frac{\partial e_z}{\partial z} \right) + \rho (v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z) \quad (83)$$

Em notação vetorial podemos escrever como,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \hat{U} \right) = -(\nabla \cdot \mathbf{e}) + \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) \quad (84)$$

Introduzindo a expressão (77) em e ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \hat{U} \right) = -(\nabla \cdot (\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \hat{U}) \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\nabla \cdot p \mathbf{v}) - (\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]) + \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) \quad (85)$$

A partir dessa expressão podemos dar procedência ao principal estudo dessas notas, a Equação de Convecção - Difusão.

Uma das formas eficientes da expressão anterior é quando subtraímos ela da equação de balanço da energia cinética (67). Assim teremos a *equação de balanço para a energia interna*

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \hat{U} = -(\nabla \cdot \rho \hat{U} \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{q}) - p(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{v}) \quad (86)$$

Utilizaremos a expressão (86) de uma forma mais compacta reescrevendo-a com o auxílio da derivada substantiva. Dessa forma,

$$\rho \frac{D \hat{U}}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - p(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{v}) \quad (87)$$

Reescreveremos \hat{U} como entalpia,

$$\hat{U} = \hat{H} - p \hat{V} = \hat{H} - \left(\frac{p}{\rho} \right)$$

Podemos combinar a expressão (87) com a *equação da continuidade* e então reescrevemos como,

$$\rho \frac{D \hat{H}}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \frac{Dp}{Dt} \quad (88)$$

Agora, suponhamos que a entalpia seja uma função de p e T . Usamos então a seguinte expressão,

$$\begin{aligned} d\hat{H} &= \left(\frac{\partial \hat{H}}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial \hat{H}}{\partial p} \right)_T dp \\ &= \hat{C}_p dT + \left[\hat{V} - T \left(\frac{\partial \hat{V}}{\partial T} \right)_p \right] dp \end{aligned}$$

Podemos expressar a variação da entalpia em um elemento de fluido que se move com a velocidade do fluido:

$$\begin{aligned}\rho \frac{D\hat{H}}{Dt} &= \rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} + \rho \left[\hat{V} - T \left(\frac{\partial \hat{V}}{\partial T} \right)_p \right] \frac{Dp}{Dt} \\ &= \rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} + \rho \left[\frac{1}{\rho} - T \left(\frac{\partial(\frac{1}{\rho})}{\partial T} \right)_p \right] \frac{Dp}{Dt} \\ &= \rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} + \left[1 + \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_p \right] \frac{Dp}{Dt}\end{aligned}$$

Então,

$$\rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{v}) - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_p \frac{Dp}{Dt} \quad (89)$$

Essa é a *Equação de Balanço para a Temperatura*.

Alguns pontos que devem ser mencionados:

- O termo $-(\nabla \cdot \mathbf{q})$ quando usado na Lei de Fourier se transforma em $+(\nabla \cdot \kappa \nabla T)$. Se a condutividade térmica for constante, $+\kappa \nabla^2 T$;
- Usando a Lei de Newton da Viscosidade, o termo $-(\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{v})$ se transforma em $\mu \Phi_v + \kappa \Psi_v$.

Para um fluido incompressível, ou seja, densidade constante, $-(\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{v}) = \mu \Phi_v$ uma vez que $\kappa \Psi_v = 0$ e $(\partial \ln \rho / \partial \ln T) = 0$.

Note que,

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla T)$$

Estamos em um regime estacionário, temperatura constante, logo, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. Por fim, a expressão (89) pode ser reescrita como,

$$\rho \hat{C}_p (\mathbf{v} \cdot \nabla T) = \kappa \nabla^2 T + \mu \Phi_v \quad (90)$$

Essa é a *Equação de Convecção - Difusão*. Ela fecha o conjunto de equações que serão de extrema importância para o estudo de sistema de condução de

calor.

Continuidade:

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (91)$$

Movimento:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \quad (92)$$

Energia:

$$\rho \hat{C}_p (\mathbf{v} \cdot \nabla T) = \kappa \nabla^2 T + \mu \Phi_v \quad (93)$$

Essas são as três equações que utilizaremos para dar continuidade em todo o resto deste trabalho.

6 Apêndice

6.1 Notação

6.1.1 ρvv

Nos referimos a notação ρvv (*fluxo convectivo de momento*) como sendo o produto tensorial de entre ρ , um escalar e vv um tensor, j[á que v é um vetor e multiplicá-lo por ele mesmo gera um tensor. Podemos escrever também da forma $\rho v \times v$.

6.2 Derivada Substantiva

Também conhecida coma derivada material, derivada hidrodinâmica e derivada acompanhando o movimento.

Considere uma função escalar $f(x, y, z, t)$ podemos fazer as seguintes manipulações

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho f)}{\partial t} &= \left(\frac{\partial(\rho v_x f)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y f)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z f)}{\partial z} \right) \\ &= \rho \left(\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} \right) + f \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial \rho f}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho \mathbf{v} f) = \rho \frac{Df}{Dt}\end{aligned}$$

7 Identidades

2.1:

$$[v \cdot \nabla v] = [\nabla(v \cdot v)]/2 - [v \times [\nabla v \times v]]$$

$$-k\Delta\theta + \langle v, \Delta\theta \rangle = f$$

8 Referências

1. BIRD, R. B.; STEWART, W. **Fenomenos de transporte.** [s.l.] Reverte Ediciones, 1999.
2. CORTEZ, G. G. **Notas de Fenômenos de Transporte I,** 2011.
3. GURTIN, M. E. **An Introduction to Continuum Mechanics.** [s.l.] Academic Press, 1982.
4. YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A.; A LEWIS FORD. **Sears & Zemansky Física II Termodinâmica e Ondas.** [s.l.] São Paulo Pearson Addison Wesley, 2008.