Notas de Estudo em Cálculo 3 e 4

Felipe Santos Araujo

June 2024

Conteúdo

1 Funções Vetoriais

1.1 Funções Vetoriais e Curvas Vetoriais

Funções Vetoriais são funções que ao invés de lidarem com valores reais, lidam com vetores para descreverem curvas e superfícies no espaço.

Definição 1 *Para todo número real t existe um único vetor de V_3 denotado por $r(t)$. Seja $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ as componentes do vetor $r(t)$, então f, g e h são chamadas funções componentes de r e podemos escrever:*

$$r(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j} + h(t)\hat{k}$$

Note que a partir dessa definição podemos definir a parametrização de funções vetoriais como:

$$x = f(t); y = g(t); z = h(t)$$

Importante notar que o domínio dessa função r é constituído por todos os valores de t para os quais a expressão $r(t)$ está definida.

O limite da função $r(t)$ pode ser definido como,

$$\lim_{t \to a} r(t) = \left\langle \lim_{t \to a} f(t), \lim_{t \to a} g(t), \lim_{t \to a} h(t) \right\rangle$$

desde que f, g e h tenham limites existentes.

Exemplo 1 - Calcule

$$\lim_{t \to 0} (e^{(-3t)}\hat{i} + \frac{t^2}{\sin^2(t)}\hat{j} + \cos(2t)\hat{k})$$

Note que,

$$\lim_{t \to 0} (e^{(-3t)}\hat{i} + \frac{t^2}{\sin^2(t)}\hat{j} + \cos(2t)\hat{k})$$

$$= [\lim_{t \to 0} e^{(-3t)}]\hat{i} + [\lim_{t \to 0} \frac{t^2}{\sin^2(t)}]\hat{j} + [\lim_{t \to 0} \cos(2t)]\hat{k}$$

$$= \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

1.2 Derivadas e Integrais de Funções Vetoriais

1.2.1 Derivdas de Funções Vetoriais

Definição 2 *A derivada de uma função vetorial r é definida do mesmo modo como é feito para as funções de valores reais:*

$$\frac{dr}{dt} = r'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h}$$

Teorema 1 *Seja*

$$r(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\hat{\imath} + g(t)\hat{\jmath} + h(t)\hat{k}$$

Então,

$$r'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle = f'(t)\hat{\imath} + g'(t)\hat{\jmath} + h'(t)\hat{k}$$

Demonstração:

$$r'(t) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[r(t + \Delta t) - r(t)]$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[\langle f(t+\Delta t), g(t+\Delta t), h(t+\Delta t)\rangle - \langle f(t), g(t), h(t)\rangle]$$

$$= \lim_{t \to 0} \left\langle \frac{f(t+\Delta t) - f(t))}{\Delta t}, \frac{g(t+\Delta t) - g(t))}{\Delta t}, \frac{h(t+\Delta t) - h(t))}{\Delta t} \right\rangle$$

$$= \left\langle \lim_{t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t))}{\Delta t}, \lim_{t \to 0} \frac{g(t+\Delta t) - g(t))}{\Delta t}, \lim_{t \to 0} \frac{h(t+\Delta t) - h(t))}{\Delta t} \right\rangle$$

$$= \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$$

Observação: Todas as formas de derivação vistas para funções de valores reais servem também para funções vetoriais.

1.2.2 Integral de Funções Vetoriais