Fiche Révision - MMC2

TD - Kevin Lippera*

June 17, 2018

1 Nombre de Reynolds & Fluides visqueux

1.1 Nombre de Reynolds

Tout part de l'équation de Navier (promo 1808)-Stokes :

$$\rho(\partial_t \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla u} \cdot \boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{\nabla} p + \eta \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{u} \tag{1}$$

Nombre Reynolds :

1. Nombre caractérisant la prise en compte de l'inertie du fluide par rapport à sa viscosité, il est donné par la relation :

$$\mathcal{R}_e = \frac{UL}{\nu} \tag{2}$$

avec U, L les vitesses et longueurs caractéristiques du problème et ν la viscosité du fluide.

2. On peut considérer que $\mathcal{R}_e \gg 1$: on peut négliger les effets visqueux Navier-Stokes devient Euler :

$$\rho(\partial_t \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla u} \cdot \boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{\nabla} p \tag{3}$$

et $\mathcal{R}_e \ll 1$: on peut négliger l'inertie du fluide et Navier-Stokes devient Stokes :

$$\rho \partial_t \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{\nabla} p + \eta \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{u} \tag{4}$$

1.2 Ecoulements particuliers

1. Ecoulement incompressible : $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = 0$
2. Ecoulement irrotationnel : $\mathrm{rot}(\boldsymbol{u}) = 0$
3. Ecoulement permanent : $\partial_t \boldsymbol{u} = 0$
4. Ecoulement non visqueux : $\eta = 0$ (pas de terme en ∇^2 dans Navier-Stokes)

1.3 Conditions aux limites

Pour un écoulement d'un fluide *non visqueux* le fluide à la surface d'une paroi vérifie la condition d' *imperméabilité* :

$$\boldsymbol{u}|_s \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} \tag{5}$$

où $\boldsymbol{V}$ désigne la vitesse de la paroi et $\boldsymbol{n}$ la normale à cette dernière
Pour un écoulement d'un fluide *visqueux* le fluide à la surface d'une paroi vérifie la condition de *non-glissement*:

$$\boldsymbol{u}|_s = \boldsymbol{V} \tag{6}$$

*Pour toute question n'hésitez pas à me contacter à l'adresse mail : *kevin.lippera@ladhyx.polytechnique.fr*

1.4 Théorème de Bernouilli

Pour un fluide parfait en écoulement incompressible et permanent on montre que sur une ligne de courant on a :

$$\rho\frac{u^2}{2} + p + \rho g z = \text{const} \tag{7}$$

Dans le cas où l'écoulement est en plus irrotationnel on a la relation en n'importe quels points du fluide et pas seulement le long du ligne de courant.

2 Ecoulements Potentiels

2.1 Potentiel Complexe

2.1.1 Domaine de validité

On retiendra que pour ce qui concerne les écoulements potentiels, le fluide est considéré uniquement

1. En écoulement *Incompressible*
2. *Non visqueux*

2.1.2 Potentiel des vitesses

Pour un écoulement irrotationnel on a l'existence d'un potentiel ϕ définit à une constante près tel que :

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla}\phi \tag{8}$$

Le potentiel des vitesses est relié à la *circuclation* de tel sorte que sur un arc orienté du point A vers le point B on a :

$$\int_A^B \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{dl} = \phi(B) - \phi(A) \tag{9}$$

Dans la cas des écoulements *acycliques* on a unicité du potentiel en chaque point et donc on a directement que la circulation autour d'un contour fermé est nulle.
Attention : pour un écoulement cyclique (comme le tourbillon par exemple) le potentiel des vitesses n'est plus unique et une circulation non nulle est alors possible (voir piège à éviter en dernière partie).

2.1.3 Fonction Courant

Pour un écoulement incompressible on a l'existence d'un potentiel ψ définit à une constante près tel que

$$\text{rot}(\boldsymbol{u}) = \Delta\psi \tag{10}$$

En pratique : on pourra retenir les relations :

$$u_x = \partial_y\psi \tag{11}$$
$$u_y = -\partial_x\psi \tag{12}$$

et en polaire :

$$u_r = \frac{1}{r}\partial_\theta\psi \tag{13}$$
$$u_\theta = -\partial_r\psi \tag{14}$$

La fonction courant est reliée au débit de sorte que si on veut calculer le débit a travers un arc orientée par la tangente $\boldsymbol{t}$ allant de A a B alors le débit dans le sens de $\boldsymbol{n}$ tel que $\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{n}$ satisfait :

$$\int_A^B \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}dl = \psi(B) - \psi(A) \tag{15}$$

2.1.4 Potentiel complexe

Dans le cas d'un fluide parfait en écoulement incompressible et irrotationnel les potentiels ψ et ϕ vérifient l'équation de Laplace :

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= 0 \quad (16) \\ \Delta\phi &= 0 \quad (17) \end{aligned}$$

Ces équations étant *linéaires* on peut alors utiliser le théorème de superposition à tout moment. On défini de plus le potentiel complexe par la relation :

$$f(z) = \phi(z) + i\psi(z) \quad (18)$$

Il est utile de connaître la formule qui relie la vitesse au potentiel complexe :

$$f'(z) = u_x - iu_y \quad (19)$$

mais aussi sa démonstration :

$$\begin{aligned} f(z + dz) &= \phi(x + dx, y + dy) + i\psi(x + dx, y + dy) \\ &= \phi(x, y) + i\psi(x, y) + \partial_x\phi dx\partial_y\phi dy + i(\partial_x\psi dx\partial_y\psi dy) \\ &= f(z) + (u_x dx + u_y dy) + i(-u_y dx + u_x dy) \\ &= f(z) + (u_x - iu_y)dz \quad (20) \end{aligned}$$

Astuce: On peut vérifier que la fonction courant ψ est constante le long d'un obstacle fixe. En effet, les iso-ψ sont les lignes de courant du champ de vitesse et doivent être tangentes en tout point à l'obstacle (le fluide ne traverse pas un obstacle). Une autre facon de le voir est de dire que le débit à travers un obstacle se calcule comme vu précedement à l'aide de la fonction courant de sorte que si ψ est constant, le débit rentrant dans l'obstacle est nul.

En pratique : Lorsqu'on vous donne un potentiel complexe f, dériver dans $\mathcal{C}$ revient dans les cas non pathologiques qui seront traités dans le cadre de ce cours au même que si l'on derive simplement par rapport à la variable z.

2.1.5 Exemples à connaître

Ecoulement uniforme tourné d'un angle α et de norme U

$$f(z) = Uze^{-i\alpha} \quad (21)$$

Ecoulement d'un tourbillon centré à l'origine

$$f(z) = \frac{im}{2\pi}\log(z) \quad (22)$$

Ecoulement d'un puit/source centré à l'origine

$$f(z) = \frac{m}{2\pi}\log(z) \quad (23)$$

Ecoulement autour d'un cylindre de rayon R sans circulation (écoulement acyclique)

$$f(z) = U\left(z + \frac{R}{z}\right) \quad (24)$$

Ecoulement autour d'un cylindre de rayon R avec circulation (écoulement cyclique)

$$f(z) = U\left(z + \frac{R}{z}\right) - \frac{im}{2\pi}\log z \quad (25)$$

On retiendra que changer z en $z - z_0$ dans les expressions précédentes permet de changer l'origine du potentiel en z_0, de même que changer z en $ze^{-i\alpha}$ permet de tourner l'écoulement à l'infini d'un angle α.

2.2 Transformation conforme - Transformation de Joukowski

2.2.1 Transformation conforme

Une transformation est dites conforme si elle est holomorphe (dérivable dans $\mathcal{C}$) et si sa dérivée ne s'annule pas. On retiendra qu'une telle transformation *conserve les angles.* On appelle *point singulier* d'une transformation un point où la dérivée de la transformation s'annule (et où elle n'est du coup plus conforme)

2.2.2 Transformation de Joukowski

La transformation de Joukowski est l'application H du plan d'affixe Z vers le plan d'affixe z :

$$z = H(Z) = Z + \frac{c^2}{Z} \tag{26}$$

à retenir :

1. Elle possède deux points singuliers en $+c$ et en $-c$
2. Elle permet de transformer un cercle centré à l'origine de rayon $R = c$ en *plaque plane*
3. Elle permet de transformer un cercle centré à l'origine de rayon $R > c$ en *ellipse*
4. Elle permet de transformer un cercle centré èn z_0 et qui passe par c en *aile d'avion.* Si z_0 est réel alors l'aile est symétrique, si z_0 est complexe l'aile sera cambrée.

On pourra retenir ces relations utiles :

$$f(z) = F(Z) \tag{27}$$

$$f'(z) = \frac{F(Z)'}{H(Z)'} \tag{28}$$

2.2.3 Condition de Kutta

On se rend compte que les lignes de courant autour d'un profil calculés en transformant celles d'un écoulement autour d'un cylindre *acyclique* par la transformation de Joukowski ne correspondent pas à l'experience. De plus la vitesse au bord de fuite dans le plan d'affixe z : $f'(c)$ est infinie car c est un point singulier pour la transformation. C'est ainsi que la *condition de Kutta* intervient pour remettre un peu d'ordre et impose que *le bord de fuite soit un point d'arrêt dans l'écoulement dans le plan d'affixe Z*:

$$F'(c) = 0 \tag{29}$$

Ainsi cela impose une circulation m pour l'écoulement. *C'est la méthode qu'on utilisera pour déterminer la circulation d'un écoulement dont on ignore à priori la circulation.*

2.2.4 Formule de Blasius

On peut calculer les efforts de pression (attention ne pas parler de force de trainée car le fluide est parfait ici) à l'aide de la formule de Blasius. Il en existe une pour les forces et une pour les moments :

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint_S f'(z)^2 \mathrm{d}z \tag{30}$$

$$M_z = -\frac{\rho}{2} \mathcal{R}\Big[\oint_S z f'(z)^2 \mathrm{d}z\Big] \tag{31}$$

2.2.5 Formule de la portance

On peut calculer la portance d'un objet si l'on connait sa circulation m par la formule de la portance :

$$F_x + iF_y = \rho U m e^{i(\alpha - \pi/2)} \tag{32}$$

Formule clairement à privilégier en pratique pour les cas simples.

2.3 Application : Plaque plane

Pour le cas de la plaque plane on retiendra :

1. Qu'elle correspond à la transformation d'un cercle centré à l'origine de rayon c par Joukowski de paramètre c.

2. Pour avoir une portance non nulle on incline l'écoulement (ou la plaque, question de point de vue) et la portance sera orthogonale à la direction de l'écoulement

3. Pour une plaque dans un écoulement incliné d'un angle α la portance vaut

$$F_x + iF_y = -4\pi c\rho U^2 \sin\alpha e^{i(\alpha-\pi/2)} \tag{33}$$

4. Grâce à la conditon de Kutta, la vitesse en bord de fuite dans le plan d'affixe z devient finie mais celle en bord d'attaque reste infinie (physiquement à cause de l'épaisseur nulle de la plaque) pour calculer ces vitesses on fera un développement limité en $Z = c + \epsilon$ (resp. en $Z = -c - \epsilon$) de F' et H' pour en déduire la limite de f' en c.

5. Pour connaître les points d'arrêts d'un écoulement on peut regarder l'image par Joukowski des points Z_a pour lequel $F'(Z_a) = 0$

3 Couche limite

3.1 Hypothèses

- Ici le fluide est considéré comme *visqueux* et donc vérifie la condition de non glissement à la surface d'un obstacle.
- On sépare la region entre le fluide est l'obstacle en deux : (1) la couche limite proche de la surface de l'obstacle (fine couche de fluide où les effets de la viscosité sont importants et (2) la région extérieur où l'écoulement peut être considéré comme potentiel (tout le travail des potentiels complexes vu précédement est valide).

3.2 Equation de Prandlt

3.2.1 Enoncé

L'équation de Prandlt est une conséquence de l'équation de Navier-Stokes écrite dans *la couche limite* où on a gardé uniquement les termes dominants. Elle s'écrit en régime permanent :

$$\rho(u_x\partial_x u_x + u_y\partial_y u_x) = -\partial_x p_e + \eta\partial_y^2 u_x \tag{34}$$

La chose importante ici à retenir c'est que la pression p_e est la pression *extérieure* à la couche limite car Navier Stokes projetée suivant l'axe y donne

$$0 = -\partial_y p \tag{35}$$

est donc la pression dans la couche limite est constante sur l'axe y.

3.2.2 Démonstration (important de savoir la méthode)

Pour redémontrer l'équation de Prandlt il suffit d'adimensionaliser les grandeurs physiques x, y u_x, u_y et p par les grandeurs caractéristiques du problème :

$$y = y'\delta \tag{36}$$
$$x = x'L \tag{37}$$
$$u_x = u'_x U_x \tag{38}$$
$$u_y = u'_y U_y \tag{39}$$

L'équation de conservation de la masse donne une relation entre U_x et U_y :

$$U_y = \frac{\delta}{L}U_x \ll U_x \tag{40}$$

3.2.3 Conditions aux limites et condition de raccords

Dans la couche limite on a :

- Condition de non glissement au niveau de l'obstacle : $u_y|_{y=0} = 0$, $u_x|_{y=0} = 0$
- Condition de raccord avec l'extérieur : $\boldsymbol{u}|_{y\to\infty} = \boldsymbol{u}_e$

3.3 Equation de Blasius

On cherche une solution autosimilaire à l'équation de Prandlt en considérant une fonction courant ψ de sorte que

$$\begin{aligned} \psi(x,\eta) &= U_\infty \delta(x) f(\eta) && (41) \\ \eta &= y/\delta(x) && (42) \end{aligned}$$

$\delta(x)$ est la couche limite locale.
On retiendra les relations :

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \frac{x}{\sqrt{\mathcal{R}_e(x)}} && (43) \\ \mathcal{R}_e(x) &= \frac{Ux}{\nu} && (44) \end{aligned}$$

3.3.1 Enoncé

Dans le cas où le gradient de pression suivant x est nul (par exemple si le champ de vitesse extérieur est uniforme), l'équation de Blasius s'écrit sous la forme :

$$2f^{(3)} + f^{(2)} f = 0 \tag{45}$$

où f est une fonction de η défini par :

$$\psi(x,y) = \sqrt{\nu U x} f(\eta) \tag{46}$$

3.3.2 Conditions aux limites sur f

- *Condition de non glissement sur x* : $u_x = 0$ et donc $f(0) = 0$
- *Condition de non glissement sur y* : $u_y = 0$ et donc $f'(0) = 0$
- *Condition de raccord* : $\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{u}_e$ et donc $f'(\infty) = 1$

3.3.3 Calcul de force de traînée

On peut définir la grandeur locale $\tau(x)$ (cisaillement local) par

$$\tau(x) = \eta(\partial_y u + \partial_x v)|_{y=0} = \eta \partial_y u|_{y=0} \tag{47}$$

La force de traînée sur une plaque de longueur L sera donc la somme des cisaillements locaux :

$$F_x = \int_0^L \tau(x) \mathrm{d}x \tag{48}$$

Attention au piège classique, cette force est une force par unité de longueur, il faut donc aussi l'intégrer sur la largeur pour avoir la force totale.

3.3.4 Méthode de résolution de Blasius : Méthode du tir

L'équation de Blasius peut se résoudre numériquement à l'aide de la méthode du tir : On détermine deux fonctions h et g de sorte que $f' = g$ et $g' = h$. L'équation du troisième ordre sur f se transforme en un système de trois équations du premier ordre sur f, g et h :

$$\begin{aligned} 2h' + hf &= 0 && (49) \\ h &= g' && (50) \\ g &= f' && (51) \end{aligned}$$

On choisit comme conditions initiales $f(0) = 0$, $g(0) = 0$ et $h(0) = \alpha$ où α est un paramètre à régler de sorte qu'on obtient au final une solution f qui vérifie la condition de raccord $f'(\infty) = 1$.

3.3.5 Cas avec gradient de pression non nul sur x

Dans ce cas attention l'équation de Prandlt ne devient plus l'équation de Blasius sur f mais se complique un peu. Par exemple si la vitesse extérieur n'est plus uniforme mais vérifie $\boldsymbol{u}_e = u_e(x)\boldsymbol{e}_x$ on appliquera donc la méthode suivante :

1. Détermination du gradient de pression en fonction de l'écoulement exterieur suivant x en utilisant la relation :

$$u_e \partial_x u_e = -\frac{1}{\rho}\partial_x p_e \tag{52}$$

2. Injecter le résultat dans l'équation de Prandlt

3. Faire le changement de variable :

$$\psi(x,\eta) \quad = \quad u_e(x)\delta(x)f(\eta) \tag{53}$$

pour trouver une nouvelle équation du f (du nom de Falkner-Skan)

4 Points importants & Pièges a éviter

4.1 Ecoulements Potentiels

- *Ecoulement cyclique* : Dans le cadre des écoulements potentiels on se place dans le plan et ainsi une section s'apparente à un cylindre infini. Ce domaine est dit *doublement connexe* car on ne peut pas réduire une courbe fermée entourant la section a un point (de même qu'on ne peut pas sortir une bague mise sur un doigt de longueur infinie). Pour ce type de domaine, le potentiel ϕ est multiforme, c'est à dire que sa valeur en un point est défini modulo m où m est la circulation autour du domaine. C'est pour cela que dans le cas d'un écoulement *acyclique* où $m = 0$ ϕ est unique mais dès lors qu'un circulation non nulle apparait ϕ peut prendre plusieurs valeurs.

- *Paradoxe de d'Alembert* : L'effort de trainé de tout corps cylindrique (on est dans le plan) plongé dans un écoulement potentiel subit une force perpendiculaire à l'écoulement. Il n'y a donc pas de force de trainé ce qui est contraire à la réalité. On trouve ce résultat car on a fait initialement l'hypothèse de fluide parfait et donc non visqueux.

- *Transformation de Joukowski* : Ne pas conforme la transformation de Joukoswki de paramètre c : $Z- > Z + c^2/Z$ et l'écoulement autour d'un cylindre de rayon $R > c$: $F(Z) = Z + R^2/Z$. La transformation est indépendante de la géométrie du corps considéré.

- *Signe de l'angle α dans un écoulement potentiel* : Attention un écoulement potentiel uniforme dirigé selon de vecteur $\cos\alpha\boldsymbol{e}_x + \sin\alpha\boldsymbol{e}_y$ et donc tourné d'un angle α positif (dans le sens trigonométrique) est de la forme :

$$F(Z) = UZe^{-i\alpha} \tag{54}$$

Attention au signe "$-$" qui est la conséquence de la relation $\overline{F'} = u_x + iu_y$