Séance 2

TD - Kevin Lippera*

February 7, 2018

1 Ligne de courant

On considère un écoulement de la forme :

$$\underline{u} = (2x - 3z)\underline{e}_x + (3x - 2z)\underline{e}_z \tag{1}$$

1. L'écoulement est il incompressible ?
2. Calculer l'accélération du fluide
3. Déterminer les lignes de courant de l'écoulement

2 Eau du robinet

On propose dans ce probleme de trouver la loi d'évolution d'un jet d'eau lorsque l'on ouvre un robinet. On considère un robinet de rayon a qui laisse couler de l'eau, de masse volumique ρ, a l'air libre à la pression p_0. On suppose que l'eau est un fluide parfait en écoulement stationnaire incompressible. On considèrera une vitesse moyenne sur la section de sorte que $\underline{u} = u(z)\underline{e}_z$.

1. Expliquer qualitativement pourquoi le diamètre du tube se resserre.
2. Par application du théorème de Bernouilli déterminer la loi $u(z)$
3. En deduire la loi d'évolution du rapport des rayons $r(z)$
4. Retrouver le résultat par l'application des équations de Navier-Stokes.

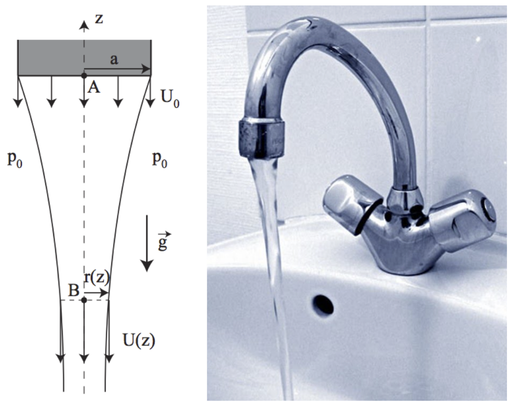

Figure 1: Jet d'eau sortant d'un robinet

*Pour toute question n'hésitez pas à me contacter à l'adresse mail : *kevin.lippera@ladhyx.polytechnique.fr*

3 Peinture et goutte

On considère une feuille de papier de rayon $R = 10$ cm qui est fixée sur un plateau tournant à vitesse angulaire $\omega = 10^3$rad/s constante autour d'un axe vertical Oz. Le peintre envoie une goutte de peinture, de masse volumique ρ, de viscosité cinématique $\nu = 10^{-4}\text{m}^2/\text{s}$ tombe verticalement sur la feuille et la goutte sétale en un film mince d'épaisseur $h < 0.1$mm. On se propose dans cet exercice d'étudier la dynamique de l'étalement de la goutte. On adopte le modèle suivant : la goutte a été déposée au centre O et forme à l'instant t un film de rayon $R(t)$ et d'épaisseur maximale $h(t)$ avec $h(t) \ll R(t)$. Son volume reste constant ce qui donne en ordre de grandeur la relation:

$$h(t)R(t)^2 = h_0 R_0^2 \tag{2}$$

Dans le référentiel tournant, l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\rho(\partial_t \underline{u} + (\underline{u} \cdot \underline{\nabla})\underline{u}) = -\underline{\nabla} p + \rho \underline{g} + \eta \Delta \underline{u} - 2\rho \underline{\omega} \times \underline{u} + \rho \omega^2 \underline{OM} \tag{3}$$

De plus la goutte étant assez plate et de faible épaisseur, on suppose le champ de pression uniforme.

1. Indiquer la signification des différents termes de l'équation (3).

2. Exprimer en ordre de grandeur la puissance résistante P_r due aux forces de viscosité en fonction de ρ, ω, R, h et $\dot{R}$.

3. Exprimer de même en ordre de grandeur la puissance motrice P_m en fonction des mêmes variables.

4. En déduire qu'en ordre de grandeur on a :

$$R^3 \frac{dR}{dt} \approx \frac{\omega^2 R_0^4 h_0^2}{\nu} \tag{4}$$

et expliciter R. Évaluer la durée τ pour qu'une goutte de volume initial $V_0 = 10^{-8} m^3$ s?étale jusqu'en $R_M = 10$ cm

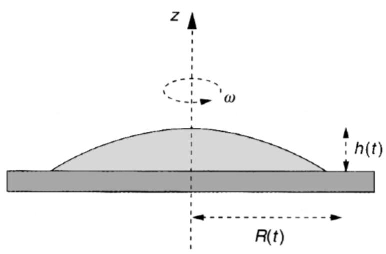

Figure 2: Schéma d'une goutte sur une plaque tournante

4 Dynamique du colibri

Le colibri parvient à rester immobile dans l'air en battant des ailes à une fréquence f suffisamment importante pour compenser leurs poids. On va chercher à caractériser la loi d'échelle reliant la fréquence de battement des ailes à l'envergure de l'animal volant. Le battement des ailes en vol stationnaire a pour but de mettre l'air immobile situé au-dessus de l'animal en mouvement vers le bas. Il existe alors sous l'animal un jet d'air s'écoulant vers le bas (cf. figure 4).On note p_A et p_B respectivement la pression au-dessus et en-dessous de l'animal. On considere que $S_A \approx S_B \approx S_0$
Hypothèses : On considere l'écoulement d'air, de masse volumique ρ et supposé parfait, stationnaire, en écoulement incompressible et non pesant. On suppose la vitesse uniforme par section. On suppose également que $S_0 \ll S_1$.

1. Quelle conséquence sur les vitesses U_1 et U_0 l'hypothèse $S_0 \ll S_1$ entraine t-elle ?
2. En appliquant deux fois le théorème de bernouilli, trouver la force exercée sur le colibri.
3. Par un bilan de quantité de mouvement trouver la relation :

$$\underline{F} = 2\rho S_0 U_0^2 \underline{e_z} \tag{5}$$

4. En posant L^3 l'ordre de grandeur du volume de l'animal, quel est le scaling de la fréquence de battement des ailes en fonction de la taille. On pourra raisonner par analyse dimensionnelle.

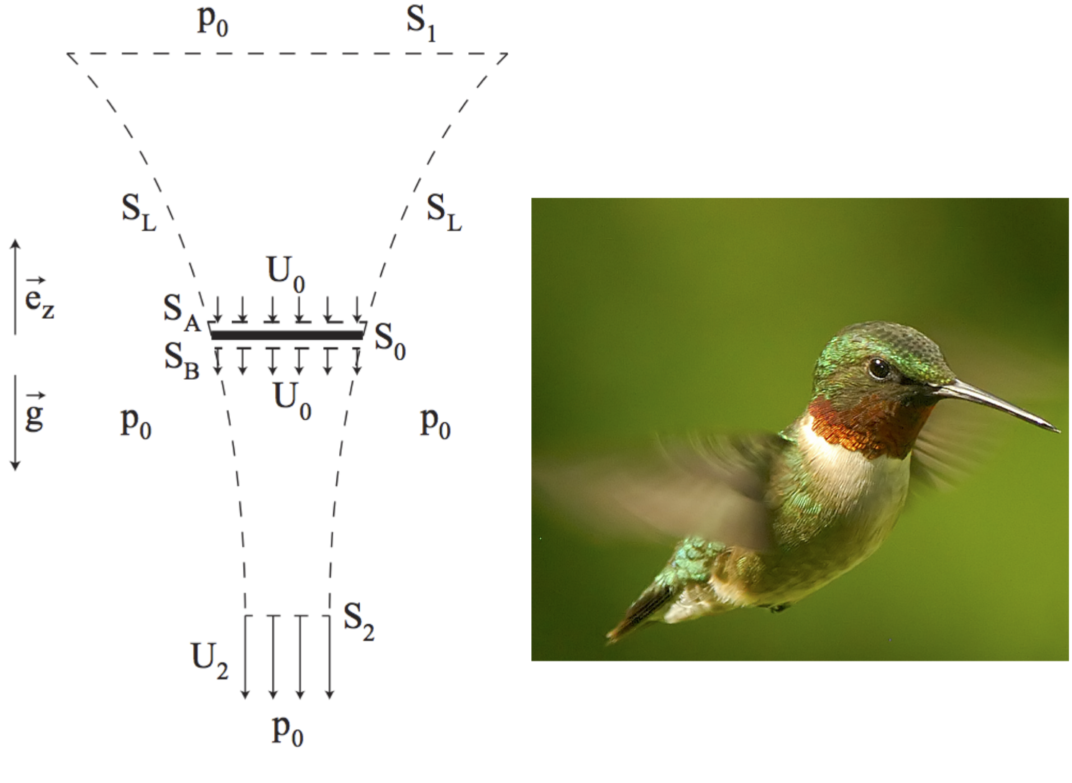

Figure 3: Schéma du fluide en mouvement sous l'effet du battement des ailes