1. **(15 баллов)**. Вложите блочно-теплицеву матрицу с теплицевыми блоками

$$\begin{matrix} T_0 = \\ \\ T_1 = \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} = T_{-1} \\ \\ = T_0 \end{matrix}$$

в $B \in \mathbb{R}^{9\times 9}$ – блочный циркулянт с циркулянтными блоками и найдите собственное разложение B.

Сначала надо вложить каждый блок БТТБ в циркулянт. Теплицеву матрицу $n\times n$ можно вложить в циркулянт размера $\geq (2n-1)\times(2n-1)$. В нашем случае нужно в 3×3.

$$\begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} \\ t_1 & t_0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & t_1 \\ t_1 & t_0 & t_{-1} \\ t_{-1} & t_1 & t_0 \end{pmatrix}$$

Получаем новую БТТБ $2\cdot 3 \times 2\cdot 3$.

$$\begin{pmatrix} T_0' & T_{-1}' \\ T_1' & T_0' \end{pmatrix}$$

$$T_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to T_0' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$= B^{(1)}$

Посмотрим на нее как на теплицеву матрицу 2×2 и вложим в циркулянт 3×3:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to T_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} T_0' & T_{-1}' & T_1' \\ T_1' & T_0' & T_{-1}' \\ T_{-1}' & T_1' & T_0' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\cdot 3 \times 3\cdot 3}$$

$$T_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to T_{-1}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Собственное разложение БЦЦБ $\in \mathbb{R}^{nm\times nm}$:

$$C = (F_n \otimes F_m)^{-1} \operatorname{diag}\left((F_n\otimes F_m) c^{(1)}\right)(F_n \otimes F_m)$$

У нас $n=m=3$, $B^{(1)} = (0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1)^T$. Получается:

$$\boxed{B = (F_3 \otimes F_3)^{-1} \operatorname{diag}\left((F_3\otimes F_3) B^{(1)}\right)(F_3\otimes F_3)}$$

$$(F_3\otimes F_3)B^{(1)} = FB^{(1)} = \begin{pmatrix} F_3 & F_3 & F_3 \\ F_3 & w_3 F_3 & w_3^2 F_3 \\ F_3 & w_3^2 F_3 & w_3^4 F_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = F^{(2)} + F^{(4)} + F^{(9)}$$

$$F^{(2)} = (1, w_3, w_3^2, 1, w_3, w_3^2, 1, w_3, w_3^2)^T$$

$$F^{(4)} = (1, 1, 1, w_3, w_3, w_3, w_3^2, w_3^2, w_3^2)^T$$

$$F^{(9)} = (1, w_3^2, w_3^4, w_3^2, w_3^4, w_3^6, w_3^4, w_3^6, w_3^8)^T = (1, w_3^2, w_3, w_3^2, w_3, 1, w_3, 1, w_3^2)$$

$$\Lambda = \operatorname{diag}(3, 1+w_3+w_3^2, 1+w_3+w_3^2, 1+w_3+w_3^2, 3w_3, 1+w_3+w_3^2, 1+w_3+w_3^2, 1+w_3+w_3^2, 3w_3^2)$$

собственные значения

$$F_3^{-1} = \frac{1}{n} F_3^{*} = \frac{1}{n}\overline{F_3}, \quad \overline{w_3} = w_3^{-1} \quad \text{и} \quad F_3^{-1} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w_3^{-1} & w_3^{-2} \\ 1 & w_3^{-2} & w_3^{-4} \end{pmatrix}$$

$$(F_3 \otimes F_3)^{-1} = F_3^{-1} \otimes F_3^{-1} = \frac{1}{n^2}\begin{pmatrix} \overline{F_3} & \overline{F_3} & \overline{F_3} \\ \overline{F_3} & w_3^{-1}\overline{F_3} & w_3^{-2}\overline{F_3} \\ \overline{F_3} & w_3^{-2}\overline{F_3} & w_3^{-4}\overline{F_3} \end{pmatrix}$$ – матрица собственных векторов по столбцам

2. **(15 баллов)**. Сколько уровней алгоритма Штрассена надо сделать, чтобы число операций с плавающей точкой в нем стало в 10 раза меньше (асимптотически), чем для наивного умножения? Считайте, что рассматриваются достаточно большие действительные квадратные матрицы порядка 2^q, $q \in \mathbb{N}$.

Наивное умножение – $T_{naive}(2^q) = 2^{3q+1} + O(2^{2q})$ операций.
Причем умножений 2^{3q}, сложений $2^{3q} - 2^{2q}$.

Для алгоритма Штрассена есть рекуррентное соотношение:
$M(n) = 7M\left(\frac{n}{2}\right)$ – умножений $\quad A(n) = 7A\left(\frac{n}{2}\right) + 18\left(\frac{n}{2}\right)^2$ – сложений
Тогда посчитаем кол-во операций для N уровней Штрассена и для оставшихся вычислений наивным способом:

$$M(2^q) = 7M(2^{q-1}) = 7^2 M(2^{q-2}) = \ldots = 7^N M(2^{q-N}) \Rightarrow 7^N \cdot 2^{3(q-N)}$$

$$A(2^q) = 7A(2^{q-1}) + 18 \cdot 2^{2q-2} = \ldots = 7\left(7A(2^{q-2}) + 18 \cdot 2^{2q-4}\right) + 18 \cdot 2^{2q-2} =$$

$$= 7^N A(2^{q-N}) + 18 \sum_{i=1}^{N} 7^{i-1} \cdot 2^{2(q-i)} = 7^N \cdot \left(2^{3(q-N)} - 2^{2(q-N)}\right) + 18 \sum_{i=1}^{N} 7^{i-1} 2^{2(q-i)} \circledcirc$$

$$\sum_{i=1}^{N} 7^{i-1} \cdot 2^{2(q-i)} = 2^{2q} \sum_{i=1}^{N} 7^{i-1} \cdot 2^{-2i} = \frac{2^{2q}}{7} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{7}{4}\right)^i = \frac{2^{2q}}{7} \cdot \left(\frac{7}{4}\right) \cdot \frac{1 - \left(\frac{7}{4}\right)^N}{1 - \frac{7}{4}} =$$

$$= 2^{2q-2}\left(-\frac{4}{3}\right)\left(1 - \left(\frac{7}{4}\right)^N\right) = -\frac{1}{3}2^{2q} + \frac{1}{3}2^{2q} \cdot \frac{7^N}{2^{2N}} = -\frac{1}{3}2^{2q} + \frac{1}{3}7^N \cdot 2^{2(q-N)}$$

$$\circledcirc\ 7^N 2^{3(q-N)} - 7^N 2^{2(q-N)} - 6 \cdot 2^{2q} + 6 \cdot 7^N 2^{2(q-N)} = 7^N \cdot 2^{3(q-N)} + 5 \cdot 7^N \cdot 2^{2(q-N)} - 6 \cdot 2^{2q} =$$

$$= 7^N 2^{3(q-N)} + O(2^{2q})$$

Итого $\quad T_{strassen} = 7^N 2^{3(q-N)+1} + O(2^{2q})$.

Нужно асимптотически различие в 10 раз $\Rightarrow$

$$\frac{T_{strassen}}{T_{naive}} \to \frac{7^N 2^{3(q-N)+1}}{2^{3q+1}} = 7^N \cdot 2^{-3N} \leq \frac{1}{10} \Rightarrow \left(\frac{7}{8}\right)^N \leq \frac{1}{10}$$

$$N \geq \log_{7/8} \frac{1}{10} = \log_{8/7} 10 \in [17, 18]$$

$\boxed{\text{Ответ: } 18}$

3. **(15 баллов)**. Проверьте наличие прямой и обратной устойчивости алгоритма $y = x - 2(u^\top x)u$ вычисления $y = H(u)x$, где $u, x \in \mathbb{R}^n$, $\|u\|_2 = 1$, $H(u)$ – матрица Хаусхолдера.

прямая устойчивость : $\dfrac{\|\tilde{f}(x) - f(x)\|}{\|f(x)\|} = O(\varepsilon_{machine})$, f – истина, $\tilde{f}$ – алгоритм, x – вход

ε - общее обозначение погрешности ε_0. $|\varepsilon_0| \le \varepsilon_m$ с семинара

(1) $$\|y - \tilde{y}\| = \left\| x - 2\left(\sum_{i=1}^n u_i x_i\right) \cdot u - (1+\varepsilon)\left(x - 2\left(\overbrace{\sum_{i=1}^n u_i x_i (1+\varepsilon)^{n+2-i}}\right) u \cdot (1+\varepsilon)^{n+1}\right)\right\| =$$

$$= \left\| x(1-1+\varepsilon) - 2\left(\sum_{i=1}^n u_i x_i\right) u + 2\left(\sum_{i=1}^n u_i x_i (1+\varepsilon)^{n+2-i}\right) u \, (1+\varepsilon)^{n+2}\right\| =$$

$$= \left\| \varepsilon \cdot x - 2\left(\sum_{i=1}^n u_i x_i - \sum_{i=1}^n u_i x_i (1+\varepsilon)^{2n+4-i}\right) u \right\| = \left\| \varepsilon x - 2\left[\sum_{i=1}^n u_i x_i \left(1 - (1+\varepsilon)^{2n+4-i}\right)\right] u \right\| \le$$

$$|1 - (1+\varepsilon)^{2n+4-i}| \le |1 - (1 + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{2n+4-i} + O(\varepsilon^2_{machine}))| \le |\varepsilon(2n+4-i) + O(\varepsilon_m^2)|$$

$$\le \|\varepsilon x\| + 2\sum_{i=1}^n |u_i| \cdot |x_i| \cdot |\varepsilon(2n+4-i) + O(\varepsilon_m^2)| \cdot \|u\| \le \varepsilon_m \|x\| + (2n+4)\varepsilon_m \left(\sum_{i=1}^n |u_i||x_i|\right)\|u\| + \bar{O}(\varepsilon_m^2)$$

$$\frac{\|y - \tilde{y}\|}{\|y\|} \le \varepsilon_m \frac{\|x\| + (2n+4)|u|^T|x| \, \|u\|}{\|x - 2(u^T x)u\|} + \bar{O}(\varepsilon_m^2) = O(\varepsilon_m)$$

обратная устойчивость : $\exists \tilde{x} : \tilde{f}(x) = f(\tilde{x})$ и $\dfrac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} = O(\varepsilon_{machine})$

$$fl(x - 2(u^T x)u) = (1+\varepsilon_0)\left(x - 2\left(\sum_{i=1}^n u_i x_i (1+\varepsilon)^{n+2-i}\right) u \cdot (1+\varepsilon)^{n+1}\right) \ominus$$

Хотим найти такие $\tilde{x}$ и $\tilde{u}$, что $\uparrow = \tilde{x} - 2(\tilde{u}^T\tilde{x})\tilde{u}$.

$$\ominus \quad (1+\varepsilon_0)x - (1+\varepsilon_0)2\left(\sum_{i=1}^n u_i x_i (1+\varepsilon)^{n+2-i}\right) u \, (1+\varepsilon)^{n+1} =$$

$$= \tilde{x} - 2\left(\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i u_i (1+\varepsilon)^{n+2-i}\right) u \, (1+\varepsilon)^{n+1}$$ – невозможно корректно возмутить вектор u.

Получается, что алгоритм не обладает обратной устойчивостью

4. **(15 баллов)**. Пусть $f(x) = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – невырожденная матрица, $x \in \mathbb{R}^n$. Докажите, что

$$\sup_{x \neq 0} \operatorname{cond}(f, x) = \operatorname{cond}(A).$$

Здесь в определениях чисел обусловленности используется вторая матричная и векторная нормы.

$\operatorname{cond}(f,x) = \frac{\|df(x)\|}{\|f(x)\|}\|x\|$ $\quad df(x) = A$ $\quad \operatorname{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ $\quad \|A^{-1}\|_2 = \|\Sigma^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_n}$

$\sup\limits_{x\neq 0} \operatorname{cond}(f,x) = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|A\|_2\|x\|_2}{\|Ax\|_2} = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\sigma_1 \|x\|_2}{\|Ax\|_2} = \sigma_1 \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|x\|_2}{\|\Sigma V^T x\|_2} = \sigma_1 \|A^{-1}\|$

Нужно найти x: $\frac{\|x\|_2}{\|\Sigma V^T x\|_2} = \frac{1}{\sigma_n}$ (в итоге супремум достигается при минимальном ненулевом значении знаменателя)

1) $x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ – разложили по ОНБ из ортог. матрицы V.

2) $\Sigma V^T x = (\sigma_1 \langle v_1, x\rangle, \sigma_2 \langle v_2, x\rangle, \ldots, \sigma_n \langle v_n, x\rangle)^T \Rightarrow$

$\Rightarrow \|\Sigma V^T x\|_2^2 = (\sigma_1 \alpha_1)^2 + \ldots + (\sigma_n \alpha_n)^2$ $(\langle v_i, v_j\rangle = 0,\ i \neq j \Rightarrow \langle v_i, x\rangle = \alpha_i \langle v_i, v_i\rangle = \alpha_i)$

$\|x\|^2 = \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2$ (т.к. ОНБ) Итог: $\frac{\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2}{\sigma_1^2\alpha_1^2 + \ldots + \sigma_n^2 \alpha_n^2} = \frac{1}{\sigma_n^2}$ (*),

$\sigma_n^2 \alpha_1^2 + \ldots + \sigma_n^2 \alpha_n^2 = \sigma_1^2 \alpha_1^2 + \ldots + \sigma_n^2 \alpha_n^2$, $\quad \underbrace{(\sigma_1^2 - \sigma_n^2)}_{\geq 0} \alpha_1^2 + \ldots + \underbrace{(\sigma_{n-1}^2 - \sigma_n^2)}_{\geq 0} \alpha_{n-1}^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$ (если $\sigma_1 \neq \sigma_n, \ldots, \sigma_{n-1} \neq \sigma_n$ – иначе (*) выполняется)

Тогда $\frac{\|x\|_2}{\|Ax\|_2} = \frac{|\alpha_n|}{\sigma_n |\alpha_n|} = \frac{1}{\sigma_n}$ – что и требовалось. $(x = \alpha_n v_n)$

5. **(20 баллов)**. С помощью матричной экспоненты найдите, при каком начальном условии y_0 решение системы дифференциальных уравнений $y(t)$:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = Ay, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad \text{с матрицей} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

будет удовлетворять $y(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$. **Замечание:** В этой задаче может пригодиться разложение в ряд Тейлора гиперболических функций.

$y(t) = e^{At} y_0$ - решение данной системы (из лекции 12)

При этом $y(1) = e^A y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A^0 = I,\ A^1 = A,\ A^2 = I,\ A^3 = A,\ A^4 = I$

$$e^{At} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \ldots = I + \begin{pmatrix} 0 & 0 & t \\ 0 & t & 0 \\ t & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2/2 & & 0 \\ & t^2/2 & \\ 0 & & t^2/2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & t^3/3! \\ 0 & t^3/3! & 0 \\ t^3/3! & 0 & 0 \end{pmatrix} + \ldots = \begin{pmatrix} 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + \ldots & 0 & t + t^3/3! + t^5/5! + \ldots \\ 0 & 1 + t + \frac{t^2}{2} + \ldots & 0 \\ t + t^3/3! + \ldots & 0 & 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + \ldots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(t) & 0 & \operatorname{sh}(t) \\ 0 & e^t & 0 \\ \operatorname{sh}(t) & 0 & \operatorname{ch}(t) \end{pmatrix} \Rightarrow y(1) = e^A y_0 = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} 1 & 0 & \operatorname{sh} 1 \\ 0 & e^t & 0 \\ \operatorname{sh} 1 & 0 & \operatorname{ch} 1 \end{pmatrix} y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} y_{01} = ch\,1 \\ y_{02} = 0 \\ y_{03} = -sh\,1 \end{cases}}$$

6. **(20 баллов)**. Пусть у $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n > 1$, все ведущие подматрицы невырождены. Покажите, что матрица $D - \frac{1}{a}bc^\top$ (см. обозначения в лекции 13) также удовлетворяет этому свойству.

A - строго регулярная : все угловые миноры (Δ_i) ненулевые.

$$A = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc} a & c^T \\ b & D \end{array}\right)\begin{array}{l}]1 \\ ]n-1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 1 & n-1 \end{array} \end{array} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{a}b & I_{n-1} \end{pmatrix}}_{Z_1} \underbrace{\begin{pmatrix} a & c^T \\ 0 & D - \frac{1}{a}bc^T \end{pmatrix}}_{(*)}$$

$\det A = \det Z_1 \cdot \det(*) =$
$= \det Z_1 \cdot a \cdot \det(S) = 1 \cdot a \cdot \det S \neq 0$
$\Rightarrow S$ - полного ранга $(n-1)$

$S = D - \frac{1}{a}bc^T$, δ_i - i-ый угловой минор S.

$$\delta_1 = a_{22} - \frac{1}{a_{11}} \cdot a_{21} \cdot a_{12} = \frac{1}{a_{11}}(a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}) = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \neq 0$$

Разложили A в пр-ие Z_1 и $(*)$ - так получилось, потому что $a = \Delta_1 \neq 0$. У S $\delta_1 \neq 0 \Rightarrow S$ тоже получится разложить.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{S_{11}} b_2 & I_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} & c_2^T \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}, \quad S_{11} = a_{22} - \frac{1}{a_{11}} a_{21} \cdot a_{12}$$

$$Z_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \frac{1}{S_1} b_2 & I_{n-2} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \qquad A = Z_1 Z_2 \underbrace{\begin{pmatrix} a & c' & \\ 0 & S_{11} & c_2^T \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & S_2 \end{pmatrix}}_{(**)}$$

Z_1 и Z_2 - ВУТ $\Rightarrow$ у $(**)$ такие же, как у A (лемма февраль метод Гаусса)
(лемма звучит так: $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow \delta_k(M) = \delta_k(CM) = \delta_k(MC^T)$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12} \quad a_{13} \quad \dots \quad c^T} \\ \boxed{\begin{matrix} a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ b \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{32} & \ddots & \\ \vdots & & D \\ \vdots & & \ddots \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$(*) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} = c^T & \\ 0 & a_{22} - \frac{1}{a_{11}} a_{21} \cdot a_{12} & a_{23} - \frac{1}{a_{11}} a_{21} a_{13} & a_{24} - \frac{1}{a_{11}} a_{21} a_{14} \dots & c_2^T \\ \vdots & a_{32} - \frac{1}{a_{11}} a_{31} a_{12} & a_{33} - \frac{1}{a_{11}} a_{31} a_{13} & \dots & \\ \vdots & a_{42} - \frac{1}{a_{11}} a_{41} a_{12} & \vdots & & D_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & b_2 & & & \end{pmatrix}$$
$$\underbrace{\hspace{12em}}_{S}$$

$\Delta_2 = S_{11} \cdot a_{11} = \delta_1 \Delta_1$ — получили

$\Delta_3 = (S_2)_{11} \cdot S_{11} \cdot a_{11} = (S_2)_{11} \cdot \delta_1 \cdot \Delta_1 = (S_2)_{11} \cdot \Delta_2$ — из-за сохранения угловых миноров + опред-ль 3x3 левой верхней верхнетреугольной подматрицы — произ-ие диагональных элементов.

$$S_2 = D_2 - \frac{1}{S_{11}} b_2 c_2^T$$

$$(S_2)_{11} = s_{22} - \frac{1}{S_{11}} S_{21} \cdot S_{12} = \frac{1}{S_{11}} \cdot \delta_2 = \frac{\delta_2}{\delta_1}$$

$$\Downarrow$$

$$(S_2)_{11} = \frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} \neq 0 \implies \delta_2 \neq 0$$

Аналогично продолжая обнулять часть матрицы под диагональю, будем получать на k-ом шаге ↓ зная, что $\forall k = 1, \dots, n : \Delta_k \neq 0$ и $\forall p = 1, \dots, k-1 : \delta_p \neq 0$

$$\begin{cases} (S_k)_{11} = \dfrac{\delta_k}{\delta_{k-1}} \quad \text{и} \\ \Delta_{k+1} = (S_k)_{11} \cdot (S_{k-1})_{11} \cdot \ldots \cdot S_{11} \cdot a_{11} = (S_k)_{11} \cdot \Delta_k \end{cases}$$

$\implies \delta_k = (S_k)_{11} \cdot \delta_{k-1} = \dfrac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k} \cdot \delta_{k-1} \neq 0$ и S — строго регулярная.