1. **(11 баллов)**. Пусть задан вектор $u \in \mathbb{C}^n : \|u\|_2 = 1$. Найдите все $\alpha \in \mathbb{C}$, для которых $A = I - \alpha u u^*$ является: 1) эрмитовой 2) косоэрмитовой 3) унитарной 4) нормальной. Для пункта 3) также нарисуйте найденные α на комплексной плоскости.

$$A = I - \alpha u u^* = \begin{pmatrix} 1-\alpha|u_1|^2 & \alpha u_1\bar{u}_2 & & \\ \alpha u_2 \bar{u}_1 & 1-\alpha|u_2|^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1-\alpha|u_n|^2 \end{pmatrix}$$

1) $A = A^*$ (эрмитова)

$$A^* = \begin{pmatrix} 1-\bar\alpha|u_1|^2 & \bar\alpha u_1\bar{u}_2 & \cdots \\ \bar\alpha u_2 \bar{u}_1 & 1-\bar\alpha|u_2|^2 & \\ & & \ddots & \\ \cdots & & & 1-\bar\alpha|u_n|^2 \end{pmatrix}, \text{ т.к. } \overline{\alpha u_i \bar{u}_j} = \bar\alpha \bar{u}_i u_j,$$

$\forall x \in \mathbb{R} : \bar{x} = x$, а $|u_i|^2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow A = A^*$ только когда $\alpha \in \mathbb{R}$ (чтобы $\alpha = \bar\alpha$)

2) $A = -A^*$ (косоэрмитова)

$$-A^* = \begin{pmatrix} \bar\alpha|u_1|^2-1 & -\bar\alpha u_1\bar{u}_2 & \cdots \\ -\bar\alpha u_2 \bar{u}_1 & \bar\alpha|u_2|^2-1 & \\ & & \ddots & \\ \cdots & & & \bar\alpha|u_n|^2-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\bar\alpha & (1) \\ 1-\alpha|u_1|^2 = -1+\bar\alpha|u_1|^2 \end{cases}$$

(1) $a+ib = -(a-ib)$
$2a = 0 \Rightarrow a = 0$, $\alpha = ib$

(1) условие для всех эл-ов вне диагонали
(2) условие для диагональных

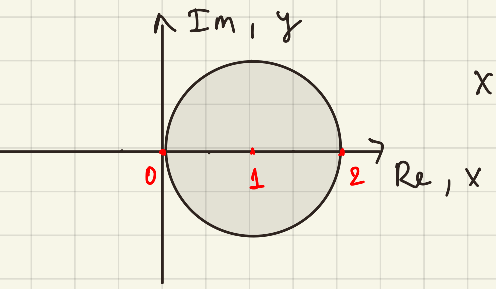
(2) $1 - ib|u_1|^2 = -1 - ib|u_1|^2$
$2 = 0$ $\Rightarrow$ нет решений

3) $AA^* = I$ (унитарная)

$AA^* = (I - \alpha u u^*)(I - \alpha u u^*)^* = (I - \alpha u u^*)(I - \bar\alpha u u^*) = I$

$I - \bar\alpha u u^* - \alpha u u^* + \alpha\bar\alpha\, u u^* u u^* = I$; $\alpha\bar\alpha\, u u^* = (\alpha + \bar\alpha) u u^*$

$\alpha\bar\alpha = \alpha + \bar\alpha \Rightarrow |\alpha|^2 = 2\,\mathrm{Re}\,\alpha$



$\mathrm{Re}^2\alpha + \mathrm{Im}^2\alpha = 2\,\mathrm{Re}\,\alpha$

$x^2 + y^2 = 2x$, $(x-1)^2 + y^2 = 1$

$\{\alpha = a + bi : (a-1)^2 + b^2 = 1\}$

4) $AA^* = A^*A$

$$(I-\alpha uu^*)(I-\alpha uu^*)^* = I - \bar{\alpha} uu^* - \alpha uu^* + |\alpha|^2 uu^* =$$

$$= (I-\alpha uu^*)^*(I-\alpha uu^*) = I - \alpha uu^* - \bar{\alpha} uu^* + |\alpha|^2 uu^* \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

2. **(11 баллов)**. Пусть $e = (1,1,1)^\top$ и $e_1 = (1,0,0)^\top$. Найдите $\|A\|_{2023}$, где $A = ee_1^\top$.

$$\|A\|_{2023} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_{2023}}{\|x\|_{2023}} = \sup_{x\neq 0} \left\| A \frac{x}{\|x\|_{2023}} \right\|_{2023} = \sup_{\|y\|_{2023}=1} \|Ay\|_{2023} =$$

$$\boxed{A = ee_1^T = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}(1\ 0\ 0) = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} \qquad \|y\|_{2023}=1 \quad y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} \quad y' = \begin{pmatrix}y_1\\y_1\\y_1\end{pmatrix}}$$

$$= \sup_{y'\neq 0} \|y'\|_{2023} = \sqrt[2023]{y_1^{2023} + y_1^{2023} + y_1^{2023}} = |y_1| \sqrt[2023]{3}, \ |y_1| \leq 1 \Rightarrow \sup_{y'\neq 0} \|y'\|_{2023} = \sqrt[2023]{3}$$

Ответ $\sqrt[2023]{3}$

3. **(12 баллов)**.

(a) Докажите, что
$$\|x\|_2 \overset{①}{\leq} \|x\|_1 \overset{②}{\leq} \sqrt{n}\|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$
На каких векторах x достигаются равенства?

(b) Используя неравенство из (a), покажите, что
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_2 \underset{①}{\leq} \|A\|_1 \underset{②}{\leq} \sqrt{m}\|A\|_2 \quad \forall A \in \mathbb{C}^{m\times n}.$$

a) $\|x\|_2 = \sqrt{x^* x} \qquad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

① $(|x_1| + \ldots + |x_n|)^2 \geqslant |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 \Rightarrow \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2} \leq |x_1| + \ldots + |x_n|$

т.к. всё $\geqslant 0$

② $(|x_1| + \ldots + |x_n|)^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + 2\sum_{i\neq j} |x_i|\cdot|x_j| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + (n-1)\sum_{i=1}^n |x_i|^2 = n\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow |x_1| + \ldots + |x_n| \leq \sqrt{n}\sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$

т.к. всё $\geqslant 0$

равенство ① только при $x = 0$ или $\underbrace{x_i = 1}_{\text{один}}$ и $\underbrace{x_j = 0}_{\text{ост}}$

равенство ② при $|x_1| = \ldots = |x_n|$:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = n|x_1| = \sqrt{n^2|x_1|^2} = \sqrt{n\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{n}\sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2} = \sqrt{n}\|x\|_2$$

б) ① $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_2 = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\sqrt{n}\|x\|_2} \overset{\|y\|_2 \leq \|y\|_1}{\leq} \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\sqrt{n}\|x\|_2} \overset{\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \ (x\in\mathbb{C}^n)}{\leq} \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \|A\|_1$

② $\|A_1\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \overset{\|x\|_2 \leq \|x\|_1}{\leq} \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_2} \overset{\|y\|_1 \leq \sqrt{m}\|y\|_2 \ (y\in\mathbb{C}^m)}{\leq} \sup_{x\neq 0} \frac{\sqrt{m}\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{m}\|A\|_2$

4. **(16 баллов)**. Обозначим $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/n & 0 \end{bmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Обоснуйте сходимость $A_n \to A$, $n \to \infty$.

(b) Найдите собственные разложения $A_n = S_n \Lambda_n S_n^{-1}$ и проверьте существование пределов для каждой из S_n,Λ_n и S_n^{-1}. Почему не у всех из этих матриц существует предел?

(c) Найдите разложения Шура $A_n = U_n T_n U_n^{-1}$ и проверьте существование пределов для каждой из U_n,T_n и U_n^{-1}.

Замечание: построить разложение Шура поможет доказательство теоремы Шура. При проверке сходимости используйте удобную норму и определение сходимости из лекции.

(a) $\|\cdot\|_F$: $\boxed{\|A_n - A\|_F = \sqrt{\frac{1}{n^2}} \to 0,\ n\to\infty \Rightarrow A_n \to A,\ n\to\infty}$

(b)

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1/n & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{n} = 0, \quad \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \Lambda_n = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{n} & 0 \\ 0 & 1/-\sqrt{n} \end{pmatrix} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

т.к. $\boxed{\|\Lambda_n - 0\|_F = \|\Lambda_n\|_F = \sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}} = \sqrt{\frac{2}{n}} \to 0,\ n\to\infty}$

$$A_n - \frac{1}{\sqrt{n}}I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{n}} & 1 \\ 1/n & \frac{1}{-\sqrt{n}} \end{pmatrix}, \quad \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{\sqrt{n}} & 1 & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{-\sqrt{n}} & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -\sqrt{n} & n & 0 \\ 1 & -\sqrt{n} & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\sqrt{n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{n} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A_n + \frac{1}{\sqrt{n}}I = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & 1 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix}, \quad \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{\sqrt{n}} & 1 & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} \sqrt{n} & n & 0 \\ 1 & \sqrt{n} & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \sqrt{n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{n} \\ 1 \end{pmatrix}$

$S_n = \begin{pmatrix} \sqrt{n} & -\sqrt{n} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\det S_n = 2\sqrt{n} \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{n} \\ -1 & \sqrt{n} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}} = \begin{pmatrix} 1/2\sqrt{n} & 1/2 \\ -1/2\sqrt{n} & 1/2 \end{pmatrix}$ $\det S_n^{-1} = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$

$\boxed{S_n^{-1} \to A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix},\ n\to\infty,\ \text{т.к. } \|S_n^{-1} - A\|_F = \sqrt{\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n}} = \sqrt{\frac{1}{2n}} \to 0,\ n\to\infty}$

Пусть $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ – предел S_n при $n\to\infty$, тогда

$$\|S_n - B\|_F = \sqrt{(\sqrt{n}-a)^2 + (-\sqrt{n}-b)^2 + (1-c)^2 + (1-d)^2} = \sqrt{n + n + \ldots} \xrightarrow{n\to\infty} \infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ B не предел и $\boxed{\text{предела у } S_n \text{ не существует}}$

$\boxed{(c)}$ $\quad A_n = \mathcal{U}_n T_n \mathcal{U}_n^{-1}$ $\qquad v_1^* = \frac{1}{\sqrt{n+1}}(\sqrt{n}\ \ 1)$ $\qquad A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/n & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\quad v_1 = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\begin{pmatrix} \sqrt{n} \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad v_2^* = \frac{1}{\sqrt{n+1}}(-1\ \ \sqrt{n})$

$v_2 = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{n} \end{pmatrix}$: $\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{1}{n+1}(-\sqrt{n}+\sqrt{n}) = 0$, $\|v_2\|_2 = 1$ — дополнили до ОНБ

$$V_1^* A_n V_1 = \begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \end{pmatrix}\left(A_n v_1\ \ A_n v_2\right) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{n} & \frac{n-1}{n} \\ 0 & -1/\sqrt{n} \end{pmatrix}$$

$v_1^* A_n v_1 = \lambda_1$: $\frac{1}{\sqrt{n+1}}(\sqrt{n}\ \ 1)\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\begin{pmatrix} \sqrt{n} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{n+1}\cdot(n+1)\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$v_2^* A_n v_1 = v_2^*\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}v_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot 0 = 0$

$v_1^* A v_2 = \frac{1}{\sqrt{n+1}}(\sqrt{n}\ \ 1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/n & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{n} \end{pmatrix} = \frac{1}{n+1}(1/n\ \ \sqrt{n})\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{n} \end{pmatrix} = \frac{1}{n+1}\left(-\frac{1}{n}+n\right) = \frac{n-1}{n}$

$v_2^* A v_2 = \frac{1}{\sqrt{n+1}}(-1\ \ \sqrt{n})\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/n & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{n} \end{pmatrix} = \frac{1}{n+1}(1/\sqrt{n}\ \ -1)\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{n} \end{pmatrix} = \frac{1}{n+1}\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right) = -\frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\Rightarrow A_n = V_1 T_n V_1^{-1} = \mathcal{U}_n T_n \mathcal{U}_n^{-1} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}}\begin{pmatrix} \sqrt{n} & -1 \\ 1 & \sqrt{n} \end{pmatrix}}_{\mathcal{U}_n}\underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{n} & \frac{n-1}{n} \\ 0 & 1/\sqrt{n} \end{pmatrix}}_{T_n}\underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{n} & 1 \\ -1 & \sqrt{n} \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{\mathcal{U}_n}$$

$$\boxed{\mathcal{U}_n = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{n}{n+1}} & -\frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ \frac{1}{\sqrt{n+1}} & \sqrt{\frac{n}{n+1}} \end{pmatrix}} \qquad \mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\|\mathcal{U}_n - \mathcal{U}\|_C = \left|\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right| \to 0,\ n\to\infty$ $\quad\left(\left|\sqrt{\frac{n}{n+1}} - 1\right| = \left|\sqrt{1-\frac{1}{n+1}} - 1\right|\right.$ тоже $\left.\to 0,\ n\to\infty\right)$

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{U}_n \to \mathcal{U},\ n\to\infty}$

$\det \mathcal{U}_n = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1} = 1$, $\quad \boxed{\mathcal{U}_n^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{n}{n+1}} & \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ -\frac{1}{\sqrt{n+1}} & \sqrt{\frac{n}{n+1}} \end{pmatrix}} \to \mathcal{U}$ (аналогично $\mathcal{U}_n$)

$\boxed{T_n = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{n} & \frac{n-1}{n} \\ 0 & -1/\sqrt{n} \end{pmatrix}} \to T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\|T_n - T\|_C = \left|-\frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| \to 0,\ n\to\infty$

5. **(10 баллов)**. Докажите, что нормальная матрица является унитарной тогда и только тогда, когда все ее собственные значения по модулю равны 1.

$\underset{\text{унитарная}}{A^{-1} = A^*} \iff \underset{\text{нормальная}}{A^*A = AA^*}$ и $|\lambda_i| = 1 \ \forall i$

$\boxed{\Leftarrow}$ A - норм $\Rightarrow$ унитарно диагонализуема

$A = \underset{\text{унит}}{U} \Lambda \underset{\text{унит.}}{U^*} = U \Lambda U^{-1}$ и $\Lambda = \mathrm{diag}(\pm 1, \pm 1, \dots \pm 1) \Rightarrow \Lambda = \Lambda^* = \Lambda^T = \Lambda^{-1}$

$$\left.\begin{aligned} A^* &= (U\Lambda U^*)^* = (U^*)^* (U\Lambda)^* = U \Lambda^* U^* = U \Lambda U^* \\ A^{-1} &= (U\Lambda U^*)^{-1} = (U^*)^{-1} (U\Lambda)^{-1} = U \Lambda^{-1} U^{-1} = U \Lambda U^{-1} \end{aligned}\right\} U^{-1} = U^*, \text{ т.к } U \text{ унитарн.}$$

$\Rightarrow A^{-1} = A^*$ и A - унитарная

$\boxed{\Rightarrow}$ $A^{-1} = A^*$, $AA^* = A^*A = I$, т.к унитарная - уже нормальная

$A = \underset{\text{унит}}{U} \underset{\text{diag}}{\Lambda} \underset{\text{унит}}{U^*}$. $AA^* = I = (U\Lambda U^*)(U\Lambda U^*)^* =$

$= U\Lambda \underbrace{U^* U}_{\substack{U^{-1} \\ I}} \Lambda^* U^* = U \underbrace{\Lambda \Lambda^*}_{B = \mathrm{diag}(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|)} U^* =$

$= UBU^* = I \Rightarrow B = U^{-1} I (U^*)^{-1} = U^{-1} U = I \Rightarrow B = I$

6. **(12 баллов)**. Найдите сингулярное разложение матрицы с элементами $a_{ij} = ij + j$ и запишите его в компактном и полном представлениях. **Замечание:** при записи полного SVD не обязательно явно строить векторы, ортогональные данному.

здесь $a_{ij} \in \mathbb{R} \Rightarrow * \to T$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & \dots & 2n \\ 3 & 6 & 9 & \dots & 3n \\ 4 & 8 & 12 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ m+1 & 2m+2 & 3m+3 & \dots & (m+1)n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & \dots & m+1 \\ 4 & 6 & 8 & \dots & 2m+2 \\ 6 & 9 & 12 & \dots & 3m+3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 2n & 3n & 4n & & nm+n \end{pmatrix}$$

$$AA^T = (1^2 + \dots + n^2) \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & \dots & 2m+2 \\ 6 & 9 & 12 & & \vdots \\ 8 & 12 & 16 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 2m+2 & \dots & & \dots & (m+1)^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

$AA^T_{ij} = A_{(i)} \cdot A^T{}^{(j)} = (i+1)(1 \dots n) \cdot (j+1)(1 \dots n)^T = (1 + 2^2 + \dots + n^2) \cdot (i+1)(j+1)$

Заметим, что $A_{(2)} = \frac{1}{2}(A_{(1)} + A_{(3)})$ и все строки A линейно выражаются через $A_{(1)}$ и $A_{(2)}$ $\Rightarrow$ $\mathrm{rk} A = 1$. Подробнее: приводя к СВ отнуляем все строки начиная с $A_{(4)}$, затем отнуляем $A_{(2)}$, потом $A_{(3)}$.

Получаем, что A^T имеет одно сингулярное (ненулевое) значение $\Rightarrow$ AA^T - одно собственное (ненулевое)

AA^T - нормальная $\Rightarrow \mathrm{tr}(AA^T) = \lambda_1 + \underbrace{\dots + \lambda_n}_{=0} = \lambda_1 = (1^2 + \dots + n^2) \sum_{k=2}^{m+1} k^2 =$

$= \boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \sum_{k=2}^{m+1} k^2 = \lambda_1}$

$$AA^T \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \vdots \\ m+1 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \begin{pmatrix} 2\,(2\ 3\ 4\ \ldots\ m+1) \\ 3\,(2\ 3\ 4\ \ldots\ m+1) \\ \vdots \\ m+1\,(2\ 3\ 4\ \ldots\ m+1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \vdots \\ m+1 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \sum_{k=2}^{m+1} k^2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \vdots \\ m+1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \vdots \\ m+1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\boxed{V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \vdots \\ m+1 \end{pmatrix} \text{ — собственный вектор } AA^T}$ $\boxed{\exists\ S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2,\ S_m = \sum_{k=2}^{m+1} k^2}$

Теперь, $\sigma_1 = \sqrt{|\lambda_1|}$, нормируем V_1: $V_1 = \frac{1}{\sqrt{S_m}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \vdots \\ m+1 \end{pmatrix}$

$U_1 = \frac{1}{\sigma_1} A^T V_1 = \frac{1}{\sqrt{S_n}\sqrt{S_m}} \frac{1}{\sqrt{S_m}} \cdot S_m \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{S_n}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ — уже нормирован.

Компактное SVD: $A^T = U_1 \sigma_1 V_1^T = \frac{1}{\sqrt{S_n}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \sqrt{S_n}\sqrt{S_m} \cdot \frac{1}{\sqrt{S_m}} (2\ 3 \ldots m+1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \ldots & m+1 \\ 4 & 6 & \ldots & 2m+2 \\ \vdots & & & \\ 2n & 3n & \ldots & mn+n \end{pmatrix}$

случайно искала для A^T,
а не для A

$\downarrow$

Компактное SVD: $A = V_1 \sigma_1 U_1^T = \frac{1}{\sqrt{S_m}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \vdots \\ m+1 \end{pmatrix} \sqrt{S_n}\sqrt{S_m} \cdot \frac{1}{\sqrt{S_m}} (1\ 2 \ldots n) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & \ldots & 2n \\ 3 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ m+1 & & & & mn+n \end{pmatrix}$

Чтобы получить полное SVD, нужно $U = (U_1)$ и $V = (V_1)$ дополнить до ОНБ можно любыми векторами, т.к. в Σ после σ_1 стоят нули, которые при произведении обнулят все вектора, кроме U_1 и V_1

7. **(14 баллов)**.

(a) Докажите, что для любой $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $m \geq n$, справедливо:

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_2.$$

(b) Покажите, что все матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, удовлетворяющие $\|A\|_F = \sqrt{n}\|A\|_2$, являются унитарными, умноженными на некоторую константу.

Замечание: воспользуйтесь сингулярным разложением.

(a) $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_F$ — унитарно-инвариантные, из лекций: $\|A\|_2 = \sigma_1(A)$, $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2}$

$\|A\|_2 = \sigma_1 \leq \|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_r^2} \leq \sqrt{n \cdot \sigma_1^2} = \sqrt{n}\,\sigma_1 = \sqrt{n}\,\|A\|_2$

(b) $\|A\|_F = \sqrt{n}\|A\|_2$: $\sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_r^2} = \sqrt{n}\,\sigma_1 = \sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_1^2} \Rightarrow \sigma_i = \sigma_1\ \forall i$

$\Rightarrow A = U\Sigma V^* = \sigma_1 U I V^* = \sigma_1 U V^*$. Пусть $B = UV^*$, тогда $BB^* = UV^*VU^* =$

$= I = VU^*UV^* = B^*B \Rightarrow B$ — унитарная и $A = \sigma_1 B$

8. **(14 баллов).** Дана нормальная матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и её разложение Шура $A = U\Lambda U^*$.

(a) Запишите сингулярное разложение матрицы A с использованием матриц U и Λ.

(b) Покажите, что $\sigma_1(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$.

(c) Приведите пример матрицы $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, не являющейся нормальной и для которой полученное в (b) выражение неверно.

$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

U - унит

(a)

$$(U\Lambda U^*)(U\Lambda U^*)^* = U\Lambda U^* U\Lambda^* U^* = U\Lambda\Lambda^* U^*$$

$$(U\Lambda U^*)^*(U\Lambda U^*) = U\Lambda^* U^* U\Lambda U^* = U\Lambda^*\Lambda U^*$$

$AA^* = A^*A \Rightarrow \Lambda\Lambda^* = \Lambda^*\Lambda$ и Λ – нормальная + ВУТ (из Шура) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ если $\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, то $\Lambda\Lambda^* = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & bc \\ bc & c^2 \end{pmatrix} =$

$= \Lambda^*\Lambda = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2+c^2 \end{pmatrix} \Rightarrow b = 0$ и $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Тогда $\Lambda\Lambda^* = \mathrm{diag}(|\lambda_1|^2, \dots, |\lambda_n|^2)$ – матрица из с/з AA^* ($U\Lambda\Lambda^* U$ – собственное разложение)

$$\sqrt{\lambda(AA^*)} = \sqrt{(\lambda(A))^2} = |\lambda(A)| = \sigma(A)$$

Теперь, $A^*A = U\Lambda_{A^*A}U^*$. $\exists$ $\boxed{V_\sigma = U}$, тогда $\boxed{U_\sigma = AV_\sigma\Sigma^{-1}}$,

где $\boxed{\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0)}$

$$\boxed{\text{Получаем SVD для } A: \quad A = U_\sigma \Sigma V_\sigma^*}$$

(б) Уже показали, что $\sigma(A) = |\lambda(A)|$. При этом в Σ: $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, значит, $\sigma_1(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$.

(c)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ $A^*A = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 7 & 17 \end{pmatrix}$

$\neq$

$AA^* = \begin{pmatrix} 17 & 7 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ A не норм.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) - 12 = \lambda^2 - 2\lambda - 11 = 0$$

$D = 4 + 4\cdot 11 = 48$ $\boxed{\lambda_{1,2}(A) = \frac{2 \pm \sqrt{48}}{2} = 1 \pm 2\sqrt{3}}$

$$\begin{vmatrix} 10-\lambda & 7 \\ 7 & 17-\lambda \end{vmatrix} = 170 - 340\lambda + \lambda^2 - 49 = \lambda^2 - 340\lambda + 121 = 0$$

$D = 340^2 - 4\cdot 121 = 115600 - 484 = 115116$ $\boxed{\lambda_{1,2}(A^*A) = \frac{340 \pm \sqrt{115116}}{2}}$

$\boxed{\sigma(A) = \sqrt{\lambda(A^*A)} \neq |\lambda(A)|}$ (ну тут явно ...)

Бонус

1. **(30 б. баллов).** Пусть $|x| \in \mathbb{R}^n$ обозначает вектор, компоненты которого являются абсолютными значениями компонент вектора $x \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$. Для каждого $n \geq 2$ приведите пример нормы на $\mathbb{R}^n$, для которой $\|x\| \neq \||x|\|$ для некоторого $x \in \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим ф-ю $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: $\|x\| = \max\limits_{i \neq j} |x_i + x_j|$ $\boxed{\text{для } n>2}$

Проверим, почему она является нормой

1) $\|x\| \geq 0$ очевидно 2) $\|x\| = 0 \iff x = 0$, т.к. если $\exists\, x \neq 0$ и $\|x\| = \max\limits_{i,j} |x_i + x_j| = 0$,

то $\exists k$ $x_k \neq 0 \Rightarrow |x_k + x_k| = 2|x_k| \neq 0$ и $\max\limits_{i,j} |x_i + x_j| = 2|x_k| \neq 0$

3) $\|\lambda x\| = \max\limits_{i,j} |\lambda x_i + \lambda x_j| = \max\limits_{i,j} |\lambda(x_i + x_j)| = \max\limits_{i,j} |\lambda| \cdot |x_i + x_j| = |\lambda| \|x\|$

4) $\|x+y\| = \max\limits_{i,j} |x_i + y_i + x_j + y_j| \leq \max\limits_{i,j} (|x_i + x_j| + |y_i + y_j|) \leq \max\limits_{i,j} |x_i + x_j| + \max\limits_{i,j} |y_i + y_j| = \|x\| + \|y\|$

$\forall n > 2$ возьмем вектор $x = (1, -1, 0, \ldots, 0)$: $\|x\| = 1 \neq \||x|\| = 2$

$\boxed{\text{для } n = 2}$ $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\|x\| = \max\limits_{i \neq j} |x_i + x_j| + \|x\|_\infty$

1) $\|x\| \geq 0$ очевидно 2) $\|x\| = 0 \iff x = 0$, т.к. для $\|x\|_\infty$ работает, а

$\max\limits_{i,j} |x_i + x_j| = 2|x_i|$, $|x_i| = \max\limits_j |x_j|$

3) $\|\lambda x\| = \max\limits_{i,j} |\lambda x_i + \lambda x_j| + \|\lambda x\|_\infty = \max\limits_{i,j} |\lambda| |x_i + x_j| + |\lambda| \|x\|_\infty = |\lambda| (\max |x_i + x_j| + \|x\|_\infty)$

4) $\|x+y\| = \max\limits_{i,j} |x_i + y_i + x_j + y_j| + \|x+y\|_\infty \leq \max\limits_{i,j} \left[|x_i + x_j| + |y_i + y_j| \right] + \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \leq$

$\leq \max\limits_{i,j} |x_i + x_j| + \max\limits_{i,j} |y_i + y_j| + \|x\|_\infty + \|y\|_\infty = \|x\| + \|y\|$.

возьмем вектор $x = (1, -1)$: $\|x\| = 0 + 1 = 1$ $\||x|\| = 2 + 1 = 3$

2. **(30 б. баллов).**

(a) Найдите явное выражение для $\|A\|_{p\to\infty}$ через элементы матрицы A при $p \geq 1$ и $p = \infty$. **Замечание:** считайте неравенство Гельдера известным.

(b) Для каждого значения $p \geq 1$ и $p = \infty$ проверьте, является ли $\|\cdot\|_{p\to\infty}$ субмультипликативной.

(c) Является ли Чебышевская норма операторной (то есть найдутся ли две векторные нормы, порождающие ее)?

(a) $|\langle y, x\rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ – нер-во Гельдера

теорема Вейерштрасса ; $Ax = y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$\|A\|_{p\to\infty} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_p} = \max_{x\neq 0} \frac{1}{\|x\|_p} \cdot \max_i |y_i| \leq \max_{x\neq 0} \frac{1}{\|x\|_p} \max_i \|x\|_p \|A^T_{(i)}\|_q \ominus$$

по нер-ву Гельдера $|y_i| = |\langle x, A^T_{(i)}\rangle| \leq \|x\|_p \cdot \|A^T_{(i)}\|_q$

$$\ominus \max_i \|A^T_{(i)}\|_q$$

при $p=1$ $q=\infty$: $\|A\|_{1\to\infty} = \max_i \max_j |a_{ij}| = \max_{i,j} |a_{ij}| = \|A\|_c$ (Чебышевская)

$p = 1$, $q = \infty$: $\max_i \|a^T_{(i)}\|_q = \max_i \max_j |a_{ij}|$ - макс элемент матрицы по мод.

$p > 1$, $1 \leq q < \infty$: $\max_i \sqrt[q]{|a_{i1}|^q + \ldots + |a_{in}|^q}$