1. **(12 баллов)**. Найдите скелетное разложение вида $C\widehat{A}^{-1}R$ матрицы $m \times n$ с элементами:

$$a_{ij} = \frac{i}{j} + \frac{j}{i}.$$

Нумерация индексов начинается с 1.

Пусть $A = B + D$, $b_{ij} = \frac{i}{j}$ $d_{ij} = \frac{j}{i}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \dots & 1/n \\ 2 & 1 & & & \\ \vdots & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ m & & & & m/n \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1/2 & 1 & & & \\ 1/3 & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \\ 1/m & & & & n/m \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rk}\,B = 1$, т.к. представима в виде $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix} (1 \ 1/2 \ 1/3 \dots 1/n)$

аналогично $\mathrm{rk}\,D = 1 \Rightarrow \mathrm{rk}\,A \le 2$

Рассмотрим угловой минор A размера 2×2: $\begin{vmatrix} 2 & 5/2 \\ 5/2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - \frac{25}{4} = -\frac{9}{4} \ne 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{rk}\,A \geqslant 2$. Получаем $\mathrm{rk}\,A = 2$.

Возьмем $\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5/2 \\ 5/2 & 2 \end{pmatrix}$ – левая верхняя подматрица 2×2.

Тогда C – два первых столбца, R – две первые строки

$$\boxed{A = -\frac{4}{9}\begin{pmatrix} 2 & 5/2 \\ 5/2 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ m+\frac{1}{m} & \frac{m}{2}+\frac{2}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5/2 \\ -5/2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5/2 & \dots & \frac{1}{n}+n \\ 5/2 & 2 & \dots & \frac{2}{n}+\frac{n}{2} \end{pmatrix}}$$

2. **(15 баллов)**. Пусть $S, S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^n$, а $S^\perp, S_1^\perp, S_2^\perp$ – их ортогональные дополнения.

(a) Покажите, что $\mathrm{dist}(S_1, S_2) = \mathrm{dist}(S_1^\perp, S_2^\perp)$.

(b) Найдите $\mathrm{dist}(S, S^\perp)$. $=1$

а) $\mathrm{dist}(S_1, S_2) = \|P_1 - P_2\|_2$

$\mathrm{dist}(S_1^\perp, S_2^\perp) = \|(I - P_1) - (I - P_2)\|_2 = \|P_2 - P_1\|_2$

$\mathrm{dist}(\cdot,\cdot)$ - метрика $\Rightarrow$ симметричная $\Rightarrow \|P_1 - P_2\|_2 = \|P_2 - P_1\|_2$

в) $\mathrm{dist}(S, S^\perp) = \|P - (I-P)\|_2 = \|2P - I\|_2 = \sigma_1(2P-I) = \sqrt{|\underset{\text{наибольшее по модулю}}{\lambda_1}((2P-I)^*(2P-I))|}$

$(2P-I)^*(2P-I) = (2P^* - I^*)(2P-I) = 4P^2 - 2P - 2P + I = 4P - 4P + I = I \Rightarrow \lambda_i = 1$

$\boxed{\text{Получаем } \sigma_1(2P-I) = 1}$

3. **(15 баллов)**. Пусть $U = [U_r\ U_r^{\perp}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – матрица левых сингулярных векторов матрицы $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ранга r. Покажите, что $\ker(A^*) = \operatorname{Im}(U_r^{\perp})$ и запишите ортопроектор на $\ker(A^*)$.

$$\underset{n\times m}{A^*}\underset{m\times(m-r)}{(U_r^{\perp}}\underset{(m-r)\times 1}{y)} = \underset{n\times n}{[V_r\ V_r^{\perp}]}\underset{n\times m}{\begin{bmatrix}\Sigma_r^* & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}}\underset{m\times m}{\begin{bmatrix}U_r^*\\ U_r^{*\perp}\end{bmatrix}}\underset{m\times(m-r)\ (m-r)\times 1}{(U_r^{\perp}y)} = [V_r\ V_r^{\perp}]\begin{bmatrix}\Sigma_r^* & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ y\end{bmatrix} =$$

$$= V\begin{bmatrix}\Sigma_r^*\cdot 0 + 0\cdot y\\ 0\qquad 0\cdot y\end{bmatrix} = V\cdot 0 = 0 \qquad \Rightarrow \quad \underline{\operatorname{Im}(V_r^{\perp}) \subseteq \operatorname{Ker}(A^*)}$$

$$x = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix} \in \ker(A^*) \Rightarrow Ax = 0 = V_r\Sigma_r^* U_r^* x = 0 \Rightarrow v_1\sigma_1^* u_1^* x + \ldots + v_r\sigma_r^* u_r^* x = 0$$

$v_1, \ldots, v_r$ – ОНБ $\Rightarrow$ если их лин. комбинация равна нулю, то и все коэф. равны нулю. $\Rightarrow$ $\sigma_i^* u_i^* x = 0\ \forall i = 1,\ldots,r$, но $\sigma_i^* \neq 0 \Rightarrow u_i^* x = 0 \Rightarrow \langle u_i, x\rangle = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ u_i и x ортогональны $\Rightarrow x \in \operatorname{Im}(U_r^{\perp}) \Rightarrow \underline{\operatorname{Ker}(A^*) \subseteq \operatorname{Im}(U_r^{\perp})}$

$\boxed{\text{Итог: } \operatorname{Ker}(A^*) = \operatorname{Im}(U_r^{\perp}).}$

$\operatorname{Im}(U_r^{\perp}) = \operatorname{Ker}(A^*) \Rightarrow$ ортопроектор на $U_r^{\perp}$ – так же ортопроектор на $\ker(A^*)$

$U_r^{\perp}$ - полноранговая $\Rightarrow P_{U_r^{\perp}} = U_r^{\perp}(U_r^{\perp})^*$ $\qquad \boxed{\text{Итог: } U_r^{\perp}(U_r^{\perp})^*}$

4. **(18 баллов)**. Вычислите $\frac{\partial f}{\partial x}$ для следующих функционалов, где $x \in \mathbb{R}^n$. Считайте все возникающие матрицы и векторы действительными.

(a) $f(x) = \|Ax - b\|_2^2$;

(b) $f(x) = \ln(x^\top x)$, $x \neq 0$.

(a) $\quad f(x+h) = f(x) + \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i + \bar{o}(\|h\|_2)$

$$\|A(x+h) - b\|_2^2 = \langle A(x+h) - b, A(x+h) - b\rangle = \langle A(x+h), A(x+h)\rangle - 2\langle A(x+h), b\rangle + \langle b, b\rangle =$$

$$= \langle Ax + Ah, Ax + Ah\rangle - 2\langle Ax + Ah, b\rangle + \langle b, b\rangle = \underline{\langle Ax, Ax\rangle} + 2\langle Ax, Ah\rangle + \langle Ah, Ah\rangle -$$

$$\underline{- 2\langle Ax, b\rangle} - 2\langle Ah, b\rangle + \underline{\langle b, b\rangle} = \langle Ax - b, Ax - b\rangle + 2\langle Ax, Ah\rangle + \langle Ah, Ah\rangle -$$

$$- 2\langle Ah, b\rangle = f(x) + \langle 2(Ax - b), Ah\rangle + \langle Ah, Ah\rangle = f(x) + \langle 2A^T(Ax - b), h\rangle + \|Ah\|_2^2 =$$

$$= f(x) + \langle 2A^T(Ax - b), h\rangle + \bar{o}(\|h\|_2) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = 2A^T(Ax - b)}$$

(b) $\quad \ln(x^T x) = \ln(\langle x, x\rangle)$

$$f(x+h) - f(x) = \ln((x+h)^T(x+h)) - \ln(x^T x) = \ln\left(\frac{(x+h)^T(x+h)}{x^T x}\right) = \ln\left(\frac{\langle x+h, x+h\rangle}{\langle x, x\rangle}\right) =$$

$$= \ln\left(1 + \frac{\langle 2x, h\rangle}{\langle x, x\rangle} + \underbrace{\frac{\langle h, h\rangle}{\langle x, x\rangle}}^{\text{стремится к 0 быстрее } \|h\|_2^2}\right) = \ln\left(1 + \frac{\langle 2x, h\rangle}{\langle x, x\rangle} + \bar{o}(\|h\|_2)\right) = \frac{\langle 2x, h\rangle}{\langle x, x\rangle} + \bar{o}(\|h\|_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{\langle x, x\rangle} = \frac{2x}{x^T x}}$$

5. **(20 баллов)**. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – симметричная матрица. Пусть $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $p < n$. **Указание:** при использовании правил дифференцирования необходимо указывать, на какое конкретно правило вы ссылаетесь.

(a) Найдите дифференциал $f(X) = X^\top AX$.

(b) Найдите дифференциал $g(X) = (X^\top X)^{-1}$. Напомним, что для квадратной обратимой Y справедливо $d(Y^{-1})[H] = -Y^{-1}HY^{-1}$.

(c) Найдите $\frac{\partial w(X)}{\partial X}$, где $w(X) = \mathrm{Tr}(f(X)g(X))$. Считайте, что производная считается в точке X с ортонормированными столбцами. $\Rightarrow$ $X^T X = I \Rightarrow g(X) = I$

по определению

(a) $f(X+dX) - f(X) = df(X)[dX] + \bar{o}(\|dX\|_F)$

$f(X+dX) - f(X) = (X+dX)^T A(X+dX) - X^T AX = X^T A(X+dX) + dX^T A(X+dX) - X^T AX =$

$= X^T AX + X^T AdX + dX^T AX + dX^T AdX - X^T AX = \underbrace{\boxed{X^T AdX + dX^T AX}}_{df(x)} + \underbrace{dX^T AdX}_{\alpha(dX)}$

$\alpha(dX)$: $\|dX^T A dX\|_F \le \|A\|_F \|dX\|_F^2$

(b) $d((X^T X)^{-1})$ = [правило дифф. композиции] $= d((X^T X)^{-1})[d(X^T X)] =$

$= -(X^T X)^{-1} d(X^T X)(X^T X)^{-1}$ = [правило дифф. произведения для $d(X^T X)$] =

$= \underbrace{\boxed{-(X^T X)^{-1}(dX^T \cdot X + X^T dX)(X^T X)^{-1}}}_{dg(x)}$ $(dX^T = (dX)^T)$

(c) $\boxed{dw(X)} = d(tr(f(X)g(X)))$ = [дифференциал лин. ф-я, tr - сумма] =

$= tr(d(f(X)g(X)))$ = [правило дифф. произведения] $= tr(df(x)g(x) + f(x)dg(x)) =$

$= tr(df(x) + f(x)dg(x)) = tr[X^T AdX + dX^T AX + X^T AX(-I(dX^T X + X^T dX)I)] =$

$= tr[X^T AdX] + tr[dX^T AX] - tr[X^T AX dX^T X] - tr[X^T AX X^T dX] =$

$= 2tr[X^T AdX] - tr[X^T AX dX^T X] - tr[X^T AXX^T dX] =$

$= 2tr[X^T AdX] - tr[X^T AX X^T dX] - tr[X^T AXX^T dX] = 2tr[X^T A(I - XX^T)dX]$

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial X} = 2(I - XX^T)A^T X}$$

6. **(20 баллов).** Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – симметричная невырожденная матрица. положительно определенная & $\boxed{X \in \mathbb{R}^{n\times n}}$

(a) Найдите матрицу M, такую что

$$\mathrm{vec}(AX + XA) = M\,\mathrm{vec}(X)$$

и укажите ее размер.

(b) Пусть $A = S\Lambda S^{-1}$ – собственное разложение A. Выразите собственные векторы и собственные значения матрицы M через S и Λ. **Подсказка:** вам поможет тождество $I = SS^{-1}$ и правила Кронекерова произведения.

(c) Покажите, что решение $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ матричного уравнения

$$AX + XA = B,$$

существует и единственно для любой $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(a)

Заметим, что $I_n \otimes A = \begin{pmatrix} A & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$, а $\mathrm{Vec}(X) = \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ \vdots \\ X^{(n)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2}$

тогда $(I_n \otimes A)\,\mathrm{Vec}\,X = \begin{pmatrix} A & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ \vdots \\ X^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX^{(1)} \\ \vdots \\ AX^{(n)} \end{pmatrix} = \mathrm{vec}(AX)$

Теперь, $A \otimes I_n = \begin{pmatrix} a_{11}I & \dots & a_{1n}I \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}I & \dots & a_{nn}I \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$

тогда $\left((A \otimes I_n)\cdot \mathrm{Vec}\,X\right)_i = (a_{i1}I \dots a_{in}I) \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ \vdots \\ X^{(n)} \end{pmatrix} = a_{i1}I X^{(1)} + \dots + a_{in} I X^{(n)} =$

$= a_{i1}X^{(1)} + \dots + a_{in}X^{(n)} = (X^{(1)} \dots X^{(n)}) \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix} = XA^{(i)} \quad (A^{(i)} = A_{(i)})$

$\Rightarrow (A \otimes I_n)\,\mathrm{Vec}\,X = \begin{pmatrix} XA^{(1)} \\ \vdots \\ XA^{(n)} \end{pmatrix} = \mathrm{Vec}(XA)$

$\mathrm{Vec}(AX + XA) = \mathrm{Vec}(AX) + \mathrm{Vec}(XA)$, т.к. Vec – биекция

Получаем $\mathrm{Vec}(AX + XA) = (I_n \otimes A)\,\mathrm{Vec}\,X + (A \otimes I_n)\,\mathrm{Vec}\,X = (I_n \otimes A + A \otimes I_n)\,\mathrm{Vec}\,X$

и $\boxed{M = I_n \otimes A + A \otimes I_n} \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$

(b) $A = S\Lambda S^{-1}$, $I = SS^{-1}$

$\boxed{M} = I \otimes A + A \otimes I = SS^{-1} \otimes S\Lambda S^{-1} + S\Lambda S^{-1} \otimes SS^{-1} = (S \otimes S)(S^{-1} \otimes \Lambda S^{-1}) + (S \otimes S)(\Lambda S^{-1} \otimes S^{-1}) =$

$= (S \otimes S)(S^{-1} \otimes \Lambda S^{-1} + \Lambda S^{-1} \otimes S^{-1}) = (S \otimes S)\left((I \otimes \Lambda)(S^{-1} \otimes S^{-1}) + (\Lambda \otimes I)(S^{-1} \otimes S^{-1})\right) =$

$= \boxed{(S \otimes S)\left((I \otimes \Lambda) + (\Lambda \otimes I)\right)(S^{-1} \otimes S^{-1})}$

$(I \otimes \Lambda)$ и $(\Lambda \otimes I)$ диагональные $\Rightarrow$ сумма – диагональная мат.

$(S \otimes S)^{-1} = (S^{-1} \otimes S^{-1}) \Rightarrow$ Получили собственное разложение M.

собственные векторы:

$$(S\otimes S)^{(ik)} = \begin{pmatrix} s_{11}S & \dots & s_{1n}S \\ s_{21}S & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ s_{n1}S & \dots & s_{nn}S \end{pmatrix}^{(ik)} = \begin{pmatrix} s_{1i}\, S^{(k)} \\ s_{2i}\, S^{(k)} \\ \vdots \\ s_{ni}\, S^{(k)} \end{pmatrix} = S^{(i)} \otimes S^{(k)}$$

Собственные значения:

$$\mathrm{Spec}(M) = \{\lambda_i + \lambda_k\}_{i,k=1}^{n} \qquad \left((I\otimes\Lambda) + (\Lambda\otimes I)\right)^{(ik)} = \begin{pmatrix} \Lambda+\lambda_1 I & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda+\lambda_n I \end{pmatrix}^{(ik)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i+\lambda_k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) $AX + XA = B \qquad \mathrm{Vec}(AX+XA) = \mathrm{Vec}\, B = M\, \mathrm{vec}\, X$

Получается, нужно показать, что $\det M \neq 0$, тогда СЛУ будет иметь единственное решение.

Определитель матрицы равен произведению ее собственных значений.

$\det M = \prod\limits_{i,k=1}^{n} (\lambda_i + \lambda_k)$, A - полож. опр $\Rightarrow$ $\lambda_i > 0\ \forall i = 1, \dots, n$ (угловые миноры) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_i + \lambda_k \neq 0\ \forall i,k = 1, \dots, n \Rightarrow \det M \neq 0$.

Бонус

1. **(25 б. баллов)**. Пусть $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $m > n$, и $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ — ее подматрица максимального объема среди $n \times n$ подматриц. Докажите, что $\|AB^{-1}\|_C \le 1$.

Пусть $A = \begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix}$, $C \in \mathbb{C}^{(m-n)\times n}$, $m-n=r$

$$A = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \\ c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \\ c_{r1} & \dots & c_{rn} \end{pmatrix}$$

Поменяем местами $B(i)$ и $C(j)$:

$$\begin{array}{l} B' \to \\ \\ A' = \\ \\ \to \end{array} \left.\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ c_{j1} & \dots & c_{jn} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \\ \hline c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \vdots & & \\ c_{r1} & \dots & c_{rn} \end{pmatrix}\right. \begin{array}{l} \}\, n\times n \\ \\ \\ \}\, r\times n \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ & C(j)B^{-1} & \\ 0 & \dots & 1 \\ \hline & C(1)B^{-1} & \\ 0 & \dots\ 1 \dots & 0 \\ & C(r)B^{-1} & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow B'' \\ \\ \\ \\ \end{array} B$$

B - квадратная, невырожденная, $A' = A'B^{-1}B$

Рассмотрим B': $\det B' = \det B'' \cdot \det B$

Приведя B'' к УСВ, получим $\det B'' = (CB^{-1})_{ji}$, тогда

$\det B' = (CB^{-1})_{ji} \det B$, причем мы знаем, что $\det B' \le \det B$,

т.к. у B максимальной объем. Значит, $|(CB^{-1})_{ji}| \le 1$. Все процедура справедлива для всех $i = 1, \dots, n$ и $j = 1, \dots, r$ => в матрице CB^{-1} все элементы по модулю не больше 1 => $\|CB^{-1}\|_C \le 1$.