1. **(15 баллов)**. Посчитайте (аналитически) LU-разложение матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

с помощью элементарных преобразований Z_k. Объясните, почему в данном случае существование LU-разложения не противоречит теореме о существовании LU-разложения из лекций.

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_1 = Z_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

$$Z_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = Z_2 Z_1 A = Z_2 A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

$$L = Z_1^{-1} Z_2^{-1} = (Z_2 Z_1)^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = A$$

Теорема из лекции: у невырожд. A $\exists LU$ разложение $\iff$ A - строго регулярна.

Здесь A - вырожденная, поэтому противоречия нет.

2. **(35 баллов)**. Пусть симметричная положительно определенная матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ задана в следующем виде:

$$A = \begin{bmatrix} a & c^\top \\ c & D \end{bmatrix},$$

где $a \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^{n-1}$, $D \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$. Исключением Холецкого первой строки назовем следующую операцию:

$$A = \begin{bmatrix} a & c^\top \\ c & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & 0 \\ \frac{c}{l} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D - \frac{cc^\top}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & \frac{c^\top}{l} \\ 0 & I \end{bmatrix} = L_0 A_1 L_0^\top, \quad l = \sqrt{a}. \tag{1}$$

Применив разложение аналогичное (1) к дополнению по Шуру $D - \frac{cc^\top}{a}$ и т.д., получим разложение Холецкого.

(a) **(9 баллов)**. Докажите, что $D - \frac{cc^\top}{a}$ будет симметричной положительно определенной.

A – строго регулярная (из полож опр следует, что $\Delta_k > 0$ $\forall k = 1, \ldots, n$)

В 6 задаче прошлого дз было доказано, что доп. по Шуру у строго регулярной м. тоже стр. регулярно. И была получена формула: $\boxed{\delta_k = \frac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k} \cdot \delta_{k-1} \neq 0}$, δ_k – k-ый угловой минор доп. по Шуру.

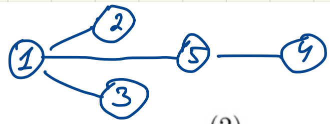
$\delta_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} > 0 \Rightarrow \delta_2 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} \delta_1 > 0 \Rightarrow \ldots \ \delta_k > 0 \Rightarrow$ доп. по Шуру – полож. опр.

D – симметричная, $cc^\top$ – симметричная: $(cc^\top)^\top = cc^\top \Rightarrow$

$\Rightarrow D - \frac{1}{a} cc^\top$ – тоже симметричная.

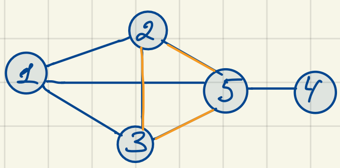
(b) **(4 баллов)**. Для матрицы

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \tag{2}$$

$G(A) =$ 

постройте ее граф G(A).

(c) **(8 баллов)**. Нарисуйте на графе $G(A)$ (выделите цветом) возникающие заполнения у дополнения по Шуру $D - \frac{cc^\top}{a}$ и продолжите эту процедуру рекурсивно. Находить конкретные числа не обязательно.



$$S_1 = D - \frac{1}{a} cc^\top = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{15}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 4 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 3 & \frac{15}{4} \end{pmatrix} \end{array}$$

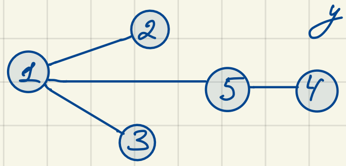
$$S_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1/2 & 3 & 15/4 \end{pmatrix} - \frac{4}{15} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{16} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 4 - \frac{1}{15} & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{1}{30} \\ 0 & 1 & 3 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{30} & 3 & \frac{15}{4} - \frac{1}{60} \end{pmatrix} \end{array}$$

(дальше ничего не изменится)

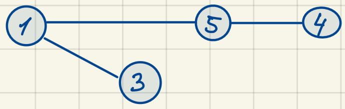
(d) **(8 баллов)**. Примените к графу $G(A)$ алгоритм minimal degree ordering (вычислять разложение для матрицы не нужно, этот пункт подразумевает работу только с графом) и соответствующую матрицу $PAP^{\top}$. На сколько сократилось число ребер заполнения при исключении вершин в новом порядке?

Алгоритм заключается в том, чтобы выбирать вершину с мин. степенью, присваивать её новый номер, исключать её и продолжать, учитывая заполнения.

1 мин. степень у 2 → 1

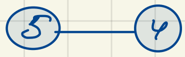


2 мин. степень у 3 → 2



3 мин степень у 1 → 3

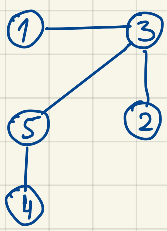
4 мин степень у 4 → 4



5 → 5

Итог: $\boxed{(1,2,3,4,5) \to (2,3,1,4,5)}$

$$\boxed{PAP^T} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



— новый граф.

ребер заполнения стало ноль.

(e) **(6 баллов)**. Запишите матрицу A из (2) в CSR формате.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

values = [4, 1, 2, 1, 1, 4, 2, 5, 1, 3, 1, 3, 4]

rows = [0, 4, 6, 8, 10, 13]

cols = [0, 1, 2, 4, 0, 1, 0, 2, 3, 4, 0, 3, 4]

3. **(25 баллов).**

(a) Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – произвольная невырожденная матрица. Пусть рассматривается итерационный процесс вида $x_{k+1} = x_k + \tau_k r_k$, $r_k = b - Ax_k$. Получите оптимальные параметры $\tau_k \in \mathbb{R}$, минимизирующие функционал невязки $J(x) = \|b - Ax\|_2^2$ на каждом шаге итерационного процесса. Убедитесь, что полученное выражение зависит только от A и r_k.

(b) В случае $A = A^\top > 0$ покажите, что для полученного процесса выполняется:

$$\|r_k\|_2 \leq \left(\frac{\mathrm{cond}_2(A) - 1}{\mathrm{cond}_2(A) + 1}\right)^k \|r_0\|_2.$$

(a) $$r_{k+1} = b - Ax_{k+1} = b - A(x_k + \tau_k r_k) = b - Ax_k - \tau_k A r_k =$$

$$= r_k - \tau_k A r_k = (I - \tau_k A) r_k$$

$$\|b - Ax_{k+1}\|_2^2 = \|r_k - \tau_k A r_k\|_2^2 = \langle r_k, r_k\rangle + \tau_k^2 \langle Ar_k, Ar_k\rangle -$$

$$- 2\tau_k \langle r_k, Ar_k\rangle.$$

$$\frac{\partial J}{\partial \tau_k} = 2\tau_k \langle Ar_k, Ar_k\rangle - 2\langle r_k, Ar_k\rangle = 0$$

$$\boxed{\tau_k = \frac{\langle r_k, Ar_k\rangle}{\langle Ar_k, Ar_k\rangle}}$$

(b) $$A = A^T > 0$$

$$\|r_{k+1}\|_2^2 = \|b - Ax_{k+1}\|_2^2 = \min_{\tau_k} \|b - A(x_k + \tau_k r_k)\|_2^2 \underset{\forall t}{\leq} \|b - Ax_k - t A r_k\|_2^2 =$$

$$= \|r_k - tAr_k\|_2^2 = \|(I - tA) r_k\|_2^2 \underset{\text{субмульт}}{\leq} \|I - tA\|_2^2 \cdot \|r_k\|_2^2 =$$

$$= \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{argmin} \|I - tA\|_2 \\ t = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n} - \text{с.з. } A \end{array} \right] = \frac{\mathrm{cond}(A) - 1}{\mathrm{cond}(A) + 1} \|r_k\|_2^2$$

Аналогично $\|r_k\|_2^2 \leq \frac{\mathrm{cond}(A) - 1}{\mathrm{cond}(A) + 1} \|r_{k-1}\|_2^2$ и так по цепочке $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \|r_{k+1}\|_2^2 \leq \left(\frac{\mathrm{cond}(A) - 1}{\mathrm{cond}(A) + 1}\right)^k \|r_0\|_2^2$$

4. **(25 баллов)**. Покажите, что для достижения точности $\frac{\|e_k\|_2}{\|e_0\|_2} \le \varepsilon$ для заданного $0 < \varepsilon < 1$ в методе Чебышева необходимо сделать не больше

$$N(\varepsilon) = 1 + \frac{\sqrt{\mathrm{cond}_2(A)}}{2} \ln(2\varepsilon^{-1})$$

итераций (при достаточно большом $\mathrm{cond}_2(A)$).

Из лекции знаем соотношение и хотим 2-ую часть нер-ва

$$\frac{\|e_k\|_2}{\|e_0\|_2} \le 2\left(\frac{\sqrt{\mathrm{cond}(A)}-1}{\sqrt{\mathrm{cond}(A)}+1}\right)^k \le \varepsilon \Rightarrow e^{\ln\left(\frac{\cdots}{\cdots}\right)^k} \le e^{\ln\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k \ln\left(\frac{\sqrt{\mathrm{cond} A}-1}{\sqrt{\mathrm{cond} A}+1}\right) \le \ln\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow k \le \ln\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\ln\left(\frac{\sqrt{\mathrm{cond} A}-1}{\sqrt{\mathrm{cond} A}+1}\right)\right)^{-1} =$$

$$\ln\left(\frac{\sqrt{\mathrm{cond} A}-1}{\sqrt{\mathrm{cond} A}+1}\right) = -\ln\left(\frac{\sqrt{\mathrm{cond} A}+1}{\sqrt{\mathrm{cond} A}-1}\right) = -\ln\left(1+\underbrace{\frac{2}{\sqrt{\mathrm{cond} A}-1}}_{\to 0}\right) \approx$$

$$\approx -\frac{2}{\sqrt{\mathrm{cond} A}-1}, \quad \mathrm{cond}(A) \to \infty$$

$$= \left(-\ln(2\varepsilon^{-1})\right)\left(-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\mathrm{cond} A}-1\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\mathrm{cond} A}-1\right)\ln(2\varepsilon^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{cond} A}\ln(2\varepsilon^{-1}) - \frac{1}{2}\ln(2\varepsilon^{-1}) \le$$

$$-\frac{1}{2}\ln(2\varepsilon^{-1}) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \le 1; \quad \ln\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \le 2; \quad \varepsilon \le 2e^2 \approx 14{,}5$$

всегда, т.к $\varepsilon \in (0,1)$

$$\le \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{cond} A}\ln(2\varepsilon^{-1}) + 1.$$

1. **(50 б. балла).** Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ обладает строгим строчным диагональным преобладанием. Докажите, что для такой матрицы LU-разложение существует, и для коэффициента роста $\rho = \|U\|_C/\|A\|_C$, где $A = LU$, справедливо $\rho \le 2$.

БОНУС

Можем представить $A = D+B$, где B - матрица внедиаг. элементов, D - диагональных. Тогда $A = D(I+D^{-1}B)$ и D - невырождена, т.к. из условия $|a_{kk}| > \sum_{m\ne k}|a_{km}|$ следует, что $a_{kk} > 0$. $(I+D^{-1}B)$ - невырождена:

$$|a_{ii}| > \sum_{i\ne j}|a_{ij}| \Rightarrow |a_{ii}| > |a_{ij}| \Rightarrow \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1 \quad \forall j\ne i$$

У матрицы $D^{-1}B$: $(D^{-1}B)_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \Rightarrow \|D^{-1}B\|_\infty < 1$. Следовательно, сходится ряд Неймана $\sum_{k=1}^{\infty} (D^{-1}B)^k$ и $(I-D^{-1}B)$ обратима.

Получается, что A - невырождена (пр-ие невырожденных).

Приведенное док-во использует только квадратность и св-во стр. строчного диаг. преобл. Все ведущие подматрицы A - тоже обладают этим свойством $\Rightarrow$ они все невырождены и A - строго регулярная $\Rightarrow$ $\exists$ LU разложение.

Пусть методом Гауссовского исключения:

После $k-1$ шагов метода Гаусса, применяемого к мат. A, получим мат.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \ddots & & & * \\ & & b_{kk} & \ddots & \\ 0 & & 0 & & \\ & & \vdots & & \\ & & 0 & & \\ & & b_{mk} & b_{mm} & \\ & & * & \cdots \; * & \ddots \; b_{nn} \end{pmatrix}$$

Чтобы обнулить b_{mk}, вычитаем $(m) = (m) - (k)\cdot\frac{b_{mk}}{b_{kk}}$:

$$\tilde b_{mj} = b_{mj} - b_{kj}\cdot \frac{b_{mk}}{b_{kk}} \quad \forall j = k\dots n \quad \text{и} \quad \tilde b_{mk} = 0$$

Новая сумма модулей в (m) строке:

$$\sum_{j=k+1}^n |\tilde b_{mj}| = \sum_{j=k+1}^n \left|b_{mj} - b_{kj}\frac{b_{mk}}{b_{kk}}\right| \le \sum_{j=k+1}^n\left(|b_{mj}| + |b_{kj}|\cdot\left|\frac{b_{mk}}{b_{kk}}\right|\right) =$$

$$= \sum_{j=k+1}^n |b_{mj}| + \left|\frac{b_{mk}}{b_{kk}}\right| \underbrace{\sum_{j=k+1}^n |b_{kj}|}_{<|b_{kk}|} < \sum_{j=k+1}^n |b_{mj}| + \frac{|b_{mk}|}{|b_{kk}|}|b_{kk}| = \sum_{j=k}^n |b_{mj}|$$

Получим $\sum\limits_{j=k}^{n} |\tilde{b}_{mj}| < \sum\limits_{j=k}^{n} |b_{mj}|$ $\quad (\tilde{b}_{mk}=0)$, т.е. сумма модулей элементов каждой строки не увеличивается. (1)

$$|\tilde{b}_{mm}| = \left|b_{mm} - \frac{b_{km}\, b_{mk}}{b_{kk}}\right| \geqslant \left| |b_{mm}| - \underbrace{\frac{|b_{km}|}{|b_{kk}|}}_{\leq 1} \underbrace{|b_{mk}|}_{\leq |b_{mm}|} \right| = |b_{mm}| - \frac{|b_{km}|}{|b_{kk}|}|b_{mk}|$$

$$\sum_{\substack{j=k+1\\ j\neq m}}^{n} |\tilde{b}_{mj}| = \sum_{\substack{j=k+1\\ j\neq m}}^{n} \left| b_{mj} - b_{kj}\frac{b_{mk}}{b_{kk}}\right| \leq \sum_{\substack{j=k+1\\ j\neq m}}^{n} |b_{mj}| + \frac{|b_{mk}|}{|b_{kk}|}\sum_{\substack{j=k+1\\ j\neq m}}^{n} |b_{kj}| \leq$$

$$\leq \Big(\underbrace{\sum_{j=k\neq m}^{n} |b_{mj}|}_{<|b_{mm}|} - |b_{mk}|\Big) + \frac{|b_{mk}|}{|b_{kk}|}\Big(\underbrace{\sum_{j=k+1}^{n} |b_{kj}|}_{<|b_{kk}|} - |b_{km}|\Big) <$$

$$< |b_{mm}| - |b_{mk}| + \frac{|b_{mk}|}{|b_{kk}|}\left(|b_{kk}| - |b_{km}|\right) = |b_{mm}| - \frac{|b_{mk}||b_{km}|}{|b_{kk}|} \leq |\tilde{b}_{mm}|$$

Получаем $|\tilde{b}_{mm}| > \sum\limits_{\substack{j=k+1\\ j\neq m}}^{n}$, т.е. после каждого шага Гаусса сохраняется стр. стр. диаг. преоб. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ матрица U им обладает. (2)

Из (1) и (2) следует: $\forall_{ij}\ |u_{ij}| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |u_{ik}| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{ik}| = |a_{ii}| + \sum\limits_{k\neq i}^{n} |a_{ik}| < 2|a_{ii}|$

А значит $\|U\|_c = \max\limits_{ij} |u_{ij}| = |u_{km}| \leq 2|a_{kk}| \leq 2\max\limits_{ij} |a_{ij}| = 2\|A\|_c$.

Итог: $\dfrac{\|U\|_c}{\|A\|_c} \leq 2$.