数值分析原理课后习题

李琦
Email: liqihao2000@126.com
信息与计算科学系
长安大学理学院

更新：2020 年 11 月 16 日

教材: 数值分析原理. 封建湖, 车刚明, 聂玉峰编著. 北京: 科学出版社, 2001.9

习题 1

1. 请指出如下有效数的绝对误差限、相对误差限和有效数字位数:

$$49 \times 10^{-2}, \quad 0.0490, \quad 490.00.$$

解. (a). 记 $x_1 = 49 \times 10^{-2} = 0.49 \times 10^0$, $m = 0$, $n = p = 2$, 2位有效数字.

$$|x_1| \leq \varepsilon = \frac{1}{2} \times 10^{m-n} = \tfrac{1}{2} \times 10^{-2} = 0.005.$$

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{x_1} = \frac{0.005}{0.49} \approx 0.0102.$$

(b). 记 $x_2 = 0.0490 = 0.490 \times 10^{-1}$, $m = -1$, $n = p = 3$, 3位有效数字.

$$|x_2| \leq \varepsilon = \frac{1}{2} \times 10^{m-n} = \tfrac{1}{2} \times 10^{-4} = 0.00005.$$

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{x_2} = \frac{0.005}{0.0490} \approx 0.00102.$$

(c). 记 $x_3 = 490.00 = 0.49000 \times 10^3$, $m = 3$, $n = p = 5$, 5位有效数字.

$$|x_3| \leq \varepsilon = \frac{1}{2} \times 10^{m-n} = \tfrac{1}{2} \times 10^{-2} = 0.005.$$

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{x_3} = \frac{0.005}{490.00} \approx 0.0000102.$$

2. 将22/7作为 π 的近似值, 它有几位有效数字, 绝对误差限和相对误差限各为多少?

解. $\pi = 0.314159265 \cdots \times 10^1$, $22/7 \approx 0.31428571428 \times 10^1$, $m = 1, n = 3$.
$\left|\frac{22}{7} - \pi\right| \approx 0.1264489 \times 10^{-2} = 0.126 \times 10^{1-3} \leq \frac{1}{2} \times 10^{1-3}$, 故有效数字为 3 位. $\varepsilon = 0.0013$, $\varepsilon_r = 0.0013/(22/7) = 0.00041$.

3. 要使 $\sqrt{101}$ 的相对误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$, 至少需要保留多少位有效数字.

解. $\sqrt{101} \approx 10.05 = 0.1005 \times 10^2$, 故标准形式中 $x_1 = 1$. 根据书中第6页定理 1.1 知,

$$|e_r^*| \leq \frac{1}{2x_1} \times 10^{1-n} = \frac{1}{2} \times 10^{1-n} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}.$$

由上式得 $n \geq 5$. 因此, 至少需要保留 5 位有效数字.

4. 设 x^* 为 x 的近似数, 证明 $\sqrt[n]{x^*}$ 的相对误差大约为 x^* 相对误差的 $\frac{1}{n}$ 倍.

证明. 设 $y = f(x) = \sqrt[n]{x}$, 则有 $f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$. 记 $y^* = \sqrt[n]{x^*}$, 那么相对误差

$$e_r(y^*) = \frac{y^* - y}{y^*} = \frac{\sqrt[n]{x^*} - \sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x^*}} = \frac{f'(x^*)(x^* - x)}{{x^*}^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} e_r(x^*).$$

证毕.

5. 某矩形的长和宽大约为 100cm 和 50cm, 应该选用最小刻度为多少 cm 的测量工具, 才能保证计算出的面积误差不超过 0.15cm^2.

解. 面积的误差限为 $\varepsilon(x_1x_2)$. 由书中第8页公式(1.9)知

$$\begin{aligned}\varepsilon(x_1^*x_2^*) &\approx |x_1^*|\varepsilon(x_1^*) + |x_2|\varepsilon(x_1^*)\\ &= 50\varepsilon(x_1^*) + 150\varepsilon(x_1^*)\\ &\leq 150\max\{\varepsilon(x_1^*), \varepsilon(x_2^*)\}\end{aligned}$$

由题意要使 $150\max\{\varepsilon(x_1^*), \varepsilon(x_2^*)\} \leq 0.015$. 得 $\max\{\varepsilon(x_1^*), \varepsilon(x_2^*)\} \leq 0.001$. 所以, 应该选用最小刻度为 0.001 cm 的测量工具.

6. 设 $x = 5 \pm 0.1$, $y = 5 \pm 0.1$, 试估计出 $a = y/(x+1)$ 的取值范围.

解. $x \in [5-0.1, 5+0.1]$, $y \in [5-0.1, 5+0.1]$. 所以 $x \in [6-0.1, 6+0.1]$, 进一步 $1/x \in [1/(6+0.1), 1/(6-0.1)]$. 因此

$$\begin{aligned}a = y/(x+1) &= [5-0.1, 5+0.1] * [1/(6+0.1), 1/(6-0.1)]\\ &= [4.9/6.1, 5.1/5.9] \approx [0.803278, 0.864407].\end{aligned}$$

7. 论证当 x^* 是 x 的较好近似时, 函数值的绝对误差、自变量的相对误差、相对误差意义下的条件数之间满足如下近似公式

$$\varepsilon_r(f^*) \approx \mathrm{cond}_r(f(x^*))\varepsilon_r(x^*).$$

证明. 左边 $= \varepsilon_r(f^*) = \dfrac{f(x^*) - f(x)}{f(x^*)} = \dfrac{f'(x^* - \theta(x^*-x))(x^*-x)}{f(x^*)}$,
右边 $= \mathrm{cond}_r(f(x^*))\varepsilon_r(x^*) = x^*\dfrac{f'(x^*)}{f(x^*)}\dfrac{x^*-1}{x^*} = \dfrac{f'(x)(x^*-x)}{f(x^*)}$.
又因为 x^* 是 x 的较好近似, 所以 $f'(x^* - \theta(x^*-x)) \approx f'(x^*)$, 即得到结论.

注 最后的结论是左边≈右边, 但是很多同学证明出来的结果是 $=$ 而不是 $\approx$.

8. 计算函数 $y = \sin(n^3x)$ 在 $x = 0.0001$ 附近的函数值, 当 $n = 100$ 时, 试估计满足函数值相对误差不超过 0.1% 时的自变量相对误差限和绝对误差限.

解. 记$f'(x) = y' = n^3\cos(n^3x)$. 相对误差

$$e_r(y^*) = \frac{x^*}{f(x^*)}f'(x^*)e_r(x^*) = \frac{x^*n^3\cos(n^3x^*)}{\sin(n^3x^*)}e_r(x^*).$$

当 $n = 100$, $x = 0.0001$ 时, 函数值相对误差不超过 0.1%, 即

$$\frac{100}{\tan(100)}e_r(x^*) \leq 0.001,$$

得 $e_r(x^*) \leq 0.5872 \times 10^{-5}$, 绝对误差 $e(x^*) = x^*e_r(x^*) = 0.5872 \times 10^{-9}$.

注 很多同学用手机计算器计算出 $\tan(100) \approx -5.671$, 如果是这样情况的话, 同学们再计算一下是否有 $\tan(45) = 1$, 如果是的话, 那么你用的计算输入参数的单位是° 而不是弧度. 这个习题需要用弧独计算.

9. 对于 32 位单精度实数系统, 使用迭代格式算法

$$x_0 = 4, x_{n+1} = x_n^2, n = 1, 2, 3, \cdots$$

迭代多少次将产生上溢.

解. $x_1 = x_0^2$, $x_2 = x_1^2 = x_0^4$, $x_3 = x_2^2 = x_0^8$, $\cdots$, $x_n = x_{n-1}^2 = x_{n-k}^{2k} = x_0^{2^n}$, 使得在 32 位单精度实数系统不上溢, 那么 $x_n = x_0^{2^n} = 4^{2^n} \leq 2^{2^7-1}$, 即 $2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \leq 2^7 - 1$, 得到 $n = \frac{\lg(127)}{\lg(2)} - 1 \approx 5.989 \leq 6$. 因此, 该格式迭代 6 次将产生上溢.

10. 请设计求解方程 $x^2 + 2px + q = 0$ 根的一个有效算法, 要求它也能够适用于 $p \gg |q|$ 时的情形. 用所设计算法以及求根公式计算 $p = 240.05$, $q = 1.00$ 时方程根的近似值(计算过程保留2位小数), 并给出两个根近似值的相对误差界.

解. 求根公式 $x = -p \pm \sqrt{p^2 - q}$. 当 $p \gg |q|$ 时, $-p$ 和 $\sqrt{p^2 - q}$ 是两个相近的数, 为避免相近的数相减, 取求根公式. $x_1 = -p - \sqrt{p^2 - q}$, $x_2 = \dfrac{q}{x_1}$.
$\sqrt{p^2 - q} = \sqrt{(240.05)^2 - 1} \approx 0.24 \times 10^3$. 得 $x_1 \approx -480 = -0.48 \times 10^3$, $x_2 \approx -0.21 \times 10^{-2}$.
$\varepsilon(x_1) = \frac{1}{2} \times 10^{m-n} = \frac{1}{2} \times 10^{3-2} = 5$,
$\varepsilon(x_2) = \frac{1}{2} \times 10^{m-n} = \frac{1}{2} \times 10^{-2-2} = 0.00005$,

11. 设有 64 位浮点系统: 尾数符号位占1位, 尾数数值占52位, 阶码符号位占1位, 阶码数值占10位. 请推算在此系统下实数的浮点表示能够有多少位有效数字, 并计算该浮点系统的上溢界和下溢界.

解. 类似于本书第 12 页, 有

$$|e_r^*| = \left|\frac{fl(x) - x}{fl(x)}\right| \leq \frac{2^{p-1-52}}{2^{p-1}} = 2^{-52} = 10^n,$$

得 $n = \lg(2^{-52}) \approx -15.65$. 因此双精度系统下实数的浮点表示能够有 15~16 位有效数字.
上溢界: $2^{2^{10-1}} = 10^m$, 得 $m = \lg(2^{2^{10-1}}) \approx 307.95$,
下溢界: $2^{2^{-10}} = 10^m$, 得 $m = \lg(2^{2^{-10}}) \approx -308.25$.

习题 2

1. 对于下面给出的函数值表, 试构造合适的二次 Lagrange 插值多项式计算 $f(1.8)$ 的近似值.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1.21	1.42	1.72	1.67	1.58

解. 根据误差估计式, 选 $x_0=1, x_1=2, x_2=3$ 为插值节点, Lagrange 插值基函数为

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}=\frac{1}{2}(x-2)(x-3),$$
$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}=-(x-1)(x-3),$$
$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}=\frac{1}{2}(x-1)(x-2).$$

二次多项式为

$$\begin{aligned}L_2(x)&=f(x_0)l_0(x)+f(x_1)l_1(x)+f(x_2)l_2(x)\\&=1.72\frac{(x-2)(x-3)}{2}-1.67(x-1)(x-3)+1.58\frac{(x-1)(x-2)}{2},\end{aligned}$$

于是

$$f(1.8)\approx L_2(1.8)=1.6832.$$

2. 已知 $f(x)=\sin x$ 的如下函数值表,

x	1.0	1.5	2.0
$\sin x$	0.8415	0.9975	0.9093

试用二次插值多项式计算 $\sin(1.8)$ 的近似值 $L_2(1.8)$, 并用插值余项估计其误差限 ε, ε 与 $\left|\sin(1.8)-L_2(1.8)\right|$ 相差大吗? 试解释其原因. 对任意 $x\in[1,2]$ 估计用 $L_2(x)$ 近似 $\sin x$ 的插值误差限.

解. 以 $x_0=1.0, x_1=1.5, x_2=2.0$ 为插值节点, Lagrange 插值基函数为

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-1.5)(x-2)}{(1-1.5)(1-2)}=2(x-1.5)(x-2),$$
$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x-1)(x-2)}{(1.5-1)(1.5-2)}=-4(x-1)(x-2),$$
$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x-1)(x-1.5)}{(2-1)(2-1.5)}=2(x-1)(x-1.5).$$

二次多项式为

$$L_2(x)=f(x_0)l_0(x)+f(x_1)l_1(x)+f(x_2)l_2(x),$$

于是

$$\begin{aligned}\sin(1.8)\approx L_2(1.8)&=0.8415l_0(1.8)+0.9975l_1(1.8)+0.9093l_2(1.8)\\&=0.973884.\end{aligned}$$

插值余项

$$R_2(x)=f(x)-L_2(x)=\frac{f'''(\zeta)}{3!}\omega_3(x)\le\frac{1}{6}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),$$

所以误差限为

$$\varepsilon=\frac{1}{6}(1.8-1)(1.8-1.5)(1.8-2)=0.008,$$

误差为

$$|\sin(1.8)-L_2(1.8)|\approx 0.00003637,$$

这与 ε 相差较大, 这是因为 ε 中导数的绝对值估计偏大. 插值误差限为

$$\varepsilon=\max_{x\in[1,2]}|R_2(x)|=\max_{x\in[1,2]}\left|\frac{1}{6}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\right|=0.00802.$$

3. 取节点 $x_0=0, x_1=1$ 对函数 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 作线性插值, 用该插值函数计算 $e^{-0.5}$ 和 $e^{-1.5}$ 的近似值, 并比较这两个近似值的误差限, 比较结果对你有什么启示.

解. 对插值数据 $x_0=0, x_1=1, f(x_0)=1, f(x_1)=e^{-1}$ 做线性插值,

$$L_1(x)=1\frac{(x-1)}{0-1}+e^{-1}\frac{x-0}{1-0}=(e^{-1}-1)x+1,$$

所以 $L_1(0.5)\approx 0.6839$, $L_1(1.5)\approx 0.0518$, 误差限

$$\varepsilon(0.5)=|e^{-0.5}-L_1(0.5)|=0.0774,$$

$$\varepsilon(1.5)=|e^{-1.5}-L_1(1.5)|=0.1713,$$

由上面的计算结果可以看出内插法要好于外插法.

4. 已知如下的函数表:

x	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x)$	-2	0	1	2

使用反插值法求解方程 $f(x)=0.5$ 在区间 $[0.1,0.4]$ 内根的近似值.

解. 对于 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 进行三次插值, 插值函数为

$$\begin{aligned}L_3(y)=&f^{-1}(y_0)\frac{(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)(y_0-y_3)}\\&+f^{-1}(y_1)\frac{(y-y_0)(y-y_2)(y-y_3)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)(y_1-y_3)}\\&+f^{-1}(y_2)\frac{(y-y_0)(y-y_1)(y-y_3)}{(y_2-y_0)(y_2-y_1)(y_2-y_3)}\\&+f^{-1}(y_3)\frac{(y-y_0)(y-y_1)(y-y_2)}{(y_3-y_0)(y_3-y_1)(y_3-y_2)}\\=&0.1\frac{x(x-1)(x-2)}{-24}+0.2\frac{(x^2-4)(x-1)}{4}\\&+0.3\frac{x(x^2-4)}{-3}+0.4\frac{(x+2)x(x-1)}{8},\end{aligned}$$

于是有

$$x^*\approx L_3(0.5)=0.2484375.$$

5. 证明关于互异节点 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 的 Lagrange 插值基函数 $\{l_i(x)\}_{i=0}^n$ 满足恒等式 $l_0(x)+l_1(x)+\cdots+l_n(x)\equiv 1$.

证明. 对 $f(x)\equiv 1$ 在 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 处进行 n 次 Lagrange 插值, 则有

$$1=P_n(x)+R(x)=\sum_{i=0}^n l_i(x)\times 1+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x),$$

由于 $f^{(n+1)}(\xi)=0$, 故有 $\sum\limits_{i=0}^n l_i(x)\equiv 1$.

6. 利用如下函数值表构造差商表, 并写出 Newton 插值多项式.

x	1	3/2	0	2
$f(x)$	3	13/4	3	5/3

解. 建立差商表

x	$f(x)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
1	3			
3/2	13/4	1/2		
0	3	1/6	1/3	
2	5/3	$-2/3$	$-5/3$	-2

进而 Newton 插值多项式为

$$\begin{aligned}N_3(x)&=f[x_0]+f[x_0,x_1]\omega_1(x)+f[x_0,x_1,x_2]\omega_2(x)+f[x_0,x_1,x_2,x_3]\omega_3(x)\\&=3+\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{3}(x-1)(x-\frac{3}{2})-2(x-1)(x-\frac{3}{2})x.\end{aligned}$$

7. 证明差商具有线性性质, 即若有 $p(x)=c_1f(x)+c_2g(x)$, 则 $p[x_0,x_1,\cdots,x_k]=c_1f[x_0,x_1,\cdots,x_k]+c_2g[x_0,x_1,\cdots,x_k]$.

证明. 将差商有函数值表示, 则有

$$\begin{aligned}p[x_0,x_1,\ldots,x_k]&=\sum_{j=0}^k\frac{p(x_j)}{\omega'_{k+1}(x_j)}=\sum_{j=0}^k\frac{c_1f(x_j)+c_2g(x_j)}{\omega'_{k+1}(x_j)}\\&=c_1\sum_{j=0}^k\frac{f(x_j)}{\omega'_{k+1}(x_j)}+c_2\sum_{j=0}^k\frac{g(x_j)}{\omega'_{k+1}(x_j)}\\&=c_1f[x_0,x_1,\ldots,x_k]+c_2g[x_0,x_1,\ldots,x_k].\end{aligned}$$

8. * 证明差商的 Leibnitz 公式, 即若有 $p(x)=f(x)g(x)$, 则有 $p[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\sum_{k=0}^n f[x_0,x_1,\cdots,x_k]g[x_k,x_k$ 式中零阶差商 $f[x_0]=f(x_0)$, $g(x_n)=g(x_n)$.

9. 设 $f(x)$ 为 n 次多项式, 试证明当 $k>n$ 时 k 阶差商 $f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x]$ 恒等于零, 当 $k\le n$ 时 $f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x]$ 为 $n-k$ 次多项式.

10. 利用第 1 题中数据构造 4 次 Newton 向前插值公式, 并计算 $f(1.8)$ 的近似值.

解. 节点是等距分布的, 令 $a=-1, h=1$, 那么 $1.8=x_0+th$, 得 $t=2.8$. 建立如下差分表:

x	$f(x)$	一阶差分	二阶差分	三阶差分	四阶差分
-1	1.21				
0	1.42	0.21			
1	1.72	0.30	0.09		
2	1.67	-0.05	-0.35	-0.44	
3	1.58	-0.09	-0.04	0.31	0.75

由书中第28页 (2.24) 得

$$\begin{aligned}
&N_4(a+th)\\
&=f(x_0)+\sum_{k=1}^{4}\Delta^k f(x_0)\binom{t}{k}\\
&=f(x_0)+\Delta f(x_0)t+\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!}t(t-1)\\
&\quad+\frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!}t(t-1)(t-2)+\frac{\Delta^4 f(x_0)}{4!}t(t-1)(t-2)(t-3)\\
&=1.21+0.21t+\frac{0.09}{2}t(t-1)\\
&\quad-\frac{0.44}{6}t(t-1)(t-2)+\frac{0.75}{24}t(t-1)(t-2)(t-3)
\end{aligned}$$

所以 $N_4(-1+2.8\times 1)=N_4(1.8)\approx 1.703920$.

11. 证明差商和差分之间的关系 (2.21) 和 (2.22), 并推导差分和导数之间的关系.

证明. 证明 (1.21).
当 $k=1$ 时, $f[x_0,x_1]=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\dfrac{\Delta y_0}{h}$ 成立.
假设 $k=m-1$ 时成立. 即 $f[x_0,x_1,\cdots,x_m-1]=\dfrac{\Delta^m y_0}{(m-1)!h^{m-1}}$, $f[x_1,x_2,\cdots,x_m]=\dfrac{\Delta^m y_1}{(m-1)!h^{m-1}}$, 所以有

$$\begin{aligned}
f[x_0,x_1,\cdots,x_m]&=\frac{f[x_1,x_2,\cdots,x_m]-f[x_0,x_1,\cdots,x_m-1]}{x_m-x_0}\\
&=\frac{\dfrac{\Delta^m y_1}{(m-1)!h^{m-1}}-\dfrac{\Delta^m y_0}{(m-1)!h^{m-1}}}{x_m-x_0}\\
&=\frac{\dfrac{\Delta^m (y_1-y_0)}{(m-1)!h^{m-1}}}{x_m-x_0}\\
&=\frac{\Delta^m y_0}{m!h^m}.
\end{aligned}$$

证明 (1.22).
当 $k=1$ 时, $f[x_n,x_{n-1}]=\dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}=\dfrac{\nabla y_n}{h}$ 成立.

假设$k=m-1$时成立. 即 $f[x_n,x_{n-1},\cdots,x_{n-m+1}]=\dfrac{\nabla^{m-1}y_n}{(m-1)!h^{m-1}}$, $f[x_{n-1},x_{n-2},\cdots,x_{n-m}]=\dfrac{\nabla^{m}y_{n-1}}{(m-1)!h^{m-1}}$, 所以有

$$
\begin{aligned}
f[x_n,x_{n-1},\cdots,x_{n-m}] &= \frac{f[x_n,x_{n-1},\cdots,x_{n-m+1}]-f[x_{n-1},x_{n-2},\cdots,x_{n-m}]}{x_{n-m}-x_n}\\
&= \frac{\dfrac{\nabla^{m-1}y_n}{(m-1)!h^{m-1}}-\dfrac{\nabla^{m}y_{n-1}}{(m-1)!h^{m-1}}}{x_{n-m}-x_n}\\
&= \frac{\dfrac{\nabla^{m}(y_n-y_{n-1})}{(m-1)!h^{m-1}}}{x_{n-m}-x_n}\\
&= \frac{\nabla^m y_n}{m!h^m}.
\end{aligned}
$$

因为差商与函数值之间有关系:
存在着 $\zeta\in(\widetilde{m},\widetilde{M})$ 使得有 $f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\dfrac{f^n(\zeta)}{n!}$. 所以差分与函数值之间有关系:

$$\Delta^n y_0 = h^n f^n(\zeta).$$

12. 推导差分 $\Delta^n f(x_0)$ 的函数值表达式.

解.

$$
\begin{aligned}
\Delta^n f(x_0)=(E-I)^n f(x_0) &= \left[\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}E^{n-j}\right]f(x_0)\\
&=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}f_{n-j}.
\end{aligned}
$$

13. 如何判定下面的函数值表是否来自一个次数不低于3的多项式?

X	-2	-1	0	1	2	3
Y	1	4	11	16	13	-4

解. 节点是等距分布的, 建立如下差分表:

x	$f(x)$	一阶差分	二阶差分	三阶差分	四阶差分
-2	1				
-1	4	3			
0	11	7	4		
1	16	5	-2	-6	
2	13	-3	-8	-6	0
3	-4	-17	-14	-6	0

由上面可以看出三阶差分不等于零, 因此可以用这些点去构造出3次插值多项式, 该差值多项式满足表中的所有数据点.

注 也可以建立差商表.

14. 利用差分性质证明 $1^2+2^2+\cdots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$.

证明. 方法一: 令 $f(n)=n(n+1)(2n+1)/6$, 则

$$\begin{aligned}\Delta f(i)=f(i+1)-f(i)&=\frac{(i+1)(i+2)(2i+3)}{6}-\frac{i(i+1)(2i+1)}{6}\\&=(i+1)^2\\&=:a_i,\end{aligned}$$

对上式中的 $i=0,1,\cdots,n$ 求和得

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}a_i=1^2+2^2+\cdots+n^2=\sum_{i=0}^{n-1}\Delta f(i)&=\sum_{i=0}^{n-1}(f(i+1)-f(i))\\&=(f(1)-f(0))+(f(2)-f(1))+\cdots+(f(n)-f(n-1))\\&=f(n)-f(0)\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-0,\end{aligned}$$

故得到结果

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

方法二: 令 $f(n)=1^2+2^2+\cdots+n^2$, 对 $f(n)$ 构造差分表

n	$f(n)$	$\Delta f(0)$	$\Delta^2 f(0)$	$\Delta^3 f(0)$	$\Delta^4 f(0)$
0	0^2				
1	1^2	1^2			
2	1^2+2^2	2^2	3		
3	$1^2+2^2+3^2$	3^2	5	2	
4	$1^2+2^2+3^2+4^2$	4^2	7	2	0
5	$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$	5^2	9	2	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\cdots+n^2$	n^2	$2n-1$	2	0

因此由插值得 (书中第28页 (2.24))

$$f_n=f(x_n)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\Delta^k f(x_0)\binom{n}{k}$$

即

$$\begin{aligned}1^2+2^2+\cdots+n^2&=0^0+\Delta f(x_0)\binom{n}{1}+\Delta^2 f(x_0)\binom{n}{2}+\Delta^3 f(x_0)\binom{n}{3}\\&=1^2n+3\frac{n(n-1)}{2!}+2\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

15. 证明差分的分部求和公式

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_k \Delta g_k = f_n g_n - f_0 g_0 - \sum_{k=0}^{n-1} g_{k+1} \Delta f_k.$$

证明. 由于

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1} f_k \Delta g_k + \sum_{k=0}^{n-1} g_{k+1} \Delta f_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (f_k \Delta g_k + g_{k+1} \Delta f_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \Delta (f_k g_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (f_{k+1} g_{k+1} - f_k g_k) \\
&= f_n g_n - f_0 g_0,
\end{aligned}$$

故有

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_k \Delta g_k = f_n g_n - f_0 g_0 - \sum_{k=0}^{n-1} g_{k+1} \Delta f_k.$$

注 这里用到了 $\Delta(f_k g_k) = f_k \Delta g_k + g_{k+1} \Delta f_k$, 下面给出证明

$$\begin{aligned}
\Delta(f_k g_k) &= f_{k+1} g_{k+1} - f_k g_k \\
&= f_{k+1} g_{k+1} - f_k g_{k+1} + f_k g_{k+1} - f_k g_k \\
&= (f_{k+1} - f_k) g_{k+1} + f_k (g_{k+1} - g_k) \\
&= g_{k+1} \Delta f_k + f_k \Delta g_k.
\end{aligned}$$

16. 用如下函数值表建立不超过3次的 Hermite 插值多项式, 并请建立插值误差估计式.

x	0	1	2
$f(x)$	1	2	9
$f'(x)$	╲	3	╲

解. 方法一: 插值法加待定系数法.

建立差商表

x	$f(x)$	一阶差商	二阶差商
0	1		
1	2	1	
2	9	7	3

设 $N_2(x)$ 是满足插值条件 $N_2(x_i)=f(x_i), i=0,1,2$ 的二次多项式, 则

$$\begin{aligned}N_2(x)&=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)\\&=1+x+3x(x-1)\\&=3x^2-2x+1.\end{aligned}$$

为求得 $N_3(x)$, 根据插值条件知, $N_3(x)$ 应具有形式:

$$N_3(x)=N_2(x)+Kx(x-1)(x-2),$$

为确定系数 K, 可用条件 $N_3'(1)=3$, 带入 $N_3'(x)=6x-2+K(3x^2-6x+2)$, 即

$$N_3'(1)=6-2+K(3-6+2)=3,$$

得 $K=1$. 所以

$$N_3(x)=3x^2-2x+1+x(x-1)(x-2)=x^3+1.$$

方法二: 用插值基函数的方法. 设节点编号为 $x_0=0, x_1=1, x_2=2$, 则三次插值多项式可以写成

$$P_3(x)=f(x_0)l_0(x)+f(x_1)l_1(x)+f(x_2)l_2(x)+f'(x_1)\bar{l}_1(x),$$

其中 $l_i, i=0,1,2$ 及 $\bar{l}_1(x)$ 是均为次数不超过3次的多项式, 且满足:

$$\begin{aligned}&l_0(x_0)=1,\quad l_1(x_0)=0,\quad l_2(x_0)=0,\quad \bar{l}_1(x_0)=0,\\&l_0(x_1)=0,\quad l_1(x_1)=1,\quad l_2(x_1)=0,\quad \bar{l}_1(x_1)=0,\\&l_0(x_2)=0,\quad l_1(x_2)=0,\quad l_2(x_2)=1,\quad \bar{l}_1(x_2)=0,\\&l_0'(x_1)=0,\quad l_1'(x_1)=0,\quad l_2'(x_1)=0,\quad \bar{l}_1'(x_1)=1.\end{aligned}$$

由 $l_0(x)$ 所满足的条件知, $l_0(x)=A(x-x_1)^2(x-x_2)$, 根据 $l_0(x_0)=1$, 得 $A=\dfrac{1}{(x_0-x_1)^2(x_0-x_2)}$, 故有

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)^2(x-x_2)}{(x_0-x_1)^2(x_0-x_2)}=\frac{(x-1)^2(x-2)}{(0-1)^2(0-2)}=-\frac{(x-1)^2(x-2)}{2}.$$

同理可以得到

$$\begin{aligned}l_2(x)&=\frac{x(x-1)^2}{2},\\\bar{l}_1(x)&=-x(x-1)(x-2).\end{aligned}$$

最后求 $l_1(x)$, 根据 $l_1(x)$ 应满足的条件, 知

$$l_1(x)=(ax+b)(x-x_0)(x-x_2),$$

利用 $l_1(x_1)=1, l_1'(x_1)=0$, 得

$$\begin{cases}(ax_1+b)(1-0)(1-2)=1,\\a(1-0)(1-2)+(a+b)(1-2)+(a+b)(1-0)=0,\end{cases}$$

得 $a=0, b=-1$. 故得到 $l_1(x)=-x(x-2)$. 所以

$$\begin{aligned}P_3(x) &= 1\cdot l_0(x)+2\cdot l_1(x)+9\cdot l_2(x)+3\cdot \bar{l}_1(x)\\ &= -\frac{(x-1)^2(x-2)}{2}+2(-x^2+2x)\\ &\quad +9\frac{x(x-1)^2}{2}-3x(x-1)(x-2)\\ &= x^3-1.\end{aligned}$$

方法三: 建立差商表

x	$f(x)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商表
0	1			
1	2	1		
1	2	3	2	
2	9	7	4	1

则有 $P_3(x)=1+(x-1)+2x(x-1)+x(x-1)^2=x^3-1$.
建立误差估计式.
根据题意, 余项 $R_3(x)=f(x)-P_3(x)$ 应具有如下形式:

$$R_3(x)=K(x)x(x-1)^2(x-2)$$

做辅助函数 $\varphi(t)=f(t)-P_3(t)-K(x)t(t-1)^2(t-2)$, 则 $\varphi(t)$ 在点 $x, 0, 1, 2$ 处有 5 个零点($t=1$ 为二重零点), 反复使用罗尔定理, 知至少有一个 $\xi\in(0,2)$, 使得 $\varphi^{(4)}(\xi)=0$, 即

$$\varphi^{(4)}(\xi)=f^{(4)}(\xi)-4!K(x)=0,$$

所以

$$K(x)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi),$$
$$R_3(x)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)x(x-1)^2(x-2).$$

17. 用分段二次插值公式计算 $[0,1]$ 区间上非节点处的函数值 e^x 的近似值, 要使误差不超过 10^{-6} 需要使用多少个等分节点处的函数值?

解. 设步长 $h=1/n$. 函数 e^x 在区间上的最大值为 e. 根据书上第38页分段二次插值的误差估计式知, 要满足

$$\left|R(x)\right|\le\frac{\sqrt{3}}{216}\left(\frac{1}{n}\right)^3 e\le 10^{-6},$$

得 $n\ge 27.934$, 取整数, 因此需要 $n=28$ 个等分区间, 因此需要 $2n+1=57$ 个等分节点处的函数值.

18. 针对如下函数值表建立三次样条插值函数.

x	1	2	3
$f(x)$	2	4	2
$f'(x)$	1	\	-1

解. 确定方程组系数,

$$h_1 = h_2 = 1, \quad \lambda = \mu_1 = \lambda_2 = \mu_2 = 0.5,$$

建立差商表

x	$f(x)$	一阶差商	二阶差商
1	2		
2	4	2	
3	2	-2	-2

得

$$f[x_0, x_1] = 2, \quad f[x_1, x_2] = -2, \quad f[x_0, x_1, x_2] = -2,$$
$$\frac{f[x_0, x_1] - m_0}{h_1} = \frac{2-1}{1} = 1, \quad \frac{m_2 - f[x_1, x_2]}{h_2} = \frac{-1+2}{1} = 1.$$

这样得到关于弯矩的方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

求解得 $M_0 = 8$, $M_1 = -10$, $M_2 = 8$. 将所求系数带入书中 (2.46)的三次样条插值函数

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x), & x \in [1, 2] \\ s_2(x), & x \in [2, 3], \end{cases}$$
$$s_1(x) = -3x^3 + 13x^2 - 16x + 8,$$
$$s_1(x) = 3x^3 - 23x^2 + 56x - 40.$$

19. * 试推导等距节点的三次 B 样条插值基函数的一般表达形式.
20. * 利用 B 样条插值基函数表示 18 题中的三次样条插值函数.
21. * 验证第 18 题与第 20 题结论的一致性.
22. 用 $f(x)$ 的关于互异节点集 $\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$ 和 $\{x_i\}_{i=2}^{n}$ 的插值多项式 $g(x)$ 和 $h(x)$ 构造出关于节点集 $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ 的插值多项式.

解. 方法一: 设所需构造的 $n-1$ 次多项式为

$$q(x) = g(x) + A(h(x) - g(x))(x - x_1),$$

可以验证 $q(x_i) = g(x_i) = f(x_i), i = 1, 2, \cdots, n-1$, 还需要满足条件 $q(x_n) = f(x_n)$, 即要满足

$$f(x_n) = g(x_n) + A(h(x_n) - g(x_n))(x_n - x_1),$$

求解得到

$$A = \frac{f(x_n) - g(x_n)}{(h(x_n) - g(x_n))(x_n - x_1)} \xlongequal{f(x_n)=h(x_n)} \frac{1}{x_n - x_1},$$

将其带入 $q(x)$ 的表达式得

$$q(x)=g(x)+[h(x)-g(x)]\frac{x-x_1}{x_n-x_1}.$$

方法二: 设所需构造的 $n-1$ 次多项式为

$$q(x)=h(x)+A(g(x)-h(x))(x-x_n),$$

可以验证 $q(x_i)=h(x_i)=f(x_i), i=2,3,\cdots,n$, 还需要满足条件 $q(x_1)=f(x_1)$, 即要满足

$$f(x_1)=h(x_1)+A(g(x_1)-h(x_1))(x_1-x_n),$$

求解得到

$$A=\frac{f(x_1)-h(x_1)}{(g(x_1)-h(x_1))(x_1-x_n)}\xlongequal{f(x_1)=g(x_1)}\frac{1}{x_1-x_n},$$

将其带入 $q(x)$ 的表达式得

$$q(x)=h(x)+[g(x)-h(x)]\frac{x-x_n}{x_1-x_n}.$$

方法三:设所需构造的 $n-1$ 次多项式为 $q(x)$, 它与 $n-2$ 次插值多项式 $g(x)$ 有共同的插值节点 $\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$, 于是可设

$$q(x)=g(x)+A\omega_{n-1}(x),$$

式中 $\omega_{n-1}(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})$, A 为待定系数. 又由于 $q(x_n)=f(x_n)=h(x_n)$, 故有

$$h(x_n)=g(x_n)+A\omega_{n-1}(x_n),$$

得

$$A=\frac{h(x_n)-g(x_n)}{\omega_{n-1}(x_n)},$$

将其带入 $q(x)$ 得到

$$q(x)=g(x)+[h(x_n)-g(x_n)]\frac{\omega_{n-1}(x)}{\omega_{n-1}(x_n)}.$$

方法四:设所需构造的 $n-1$ 次多项式为 $q(x)$, 它与 $n-2$ 次插值多项式 $h(x)$ 有共同的插值节点 $\{x_i\}_{i=2}^{n}$, 于是可设

$$q(x)=h(x)+A\omega_{n-1}(x),$$

式中 $\omega_{n-1}(x)=(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)$, A 为待定系数. 又由于 $q(x_1)=f(x_1)=g(x_1)$, 故有

$$g(x_1)=h(x_1)+A\omega_{n-1}(x_1),$$

得

$$A=\frac{g(x_1)-h(x_1)}{\omega_{n-1}(x_1)},$$

将其带入 $q(x)$ 得到

$$q(x)=h(x)+[g(x_1)-h(x_1)]\frac{\omega_{n-1}(x)}{\omega_{n-1}(x_1)}.$$

方法五: (参考翟梦情) 设所需构造的 $n-1$ 次多项式为 $q(x)$, 它与 $n-2$ 次插值多项式 $g(x)$ 有共同的插值节点 $\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$, 于是可设

$$q(x) = g(x) + A(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}), \tag{0.1}$$

又它与 $n-2$ 次插值多项式 $h(x)$ 有共同的插值节点 $\{x_i\}_{i=2}^{n}$, 于是可设

$$q(x) = h(x) + A(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n), \tag{0.2}$$

其中 A 为 $n-1$ 次多项式 $q(x)$ 的 $n-1$ 次差商, 它是个常数. 计算 (0.1)$\cdot(x-x_n)-$(0.2)$\cdot(x-x_1)$, 得

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{x-x_n}{x_1-x_n}g(x) - \frac{x-x_1}{x_1-x_n}h(x) \\ &= g(x) + [h(x)-g(x)]\frac{x-x_1}{x_n-x_1} \\ &= h(x) + [g(x)-h(x)]\frac{x-x_n}{x_1-x_n}. \end{aligned}$$

习题 3

1. 证明实函数 $\|f\|_2=\left[\int_a^b f^2(x)\,dx\right]^{\frac{1}{2}}$ 是定义于线性空间 $C[a,b]$ 上的范数.

证明. 根据范数的定义来证明.

- 正定性 $(f,f)^{\frac{1}{2}}\geq 0$, 当且仅当 $f=0$ 时 $(f,f)^{\frac{1}{2}}=0$.
- 齐次性 设 α 为数域 $\mathbb{R}$ 上任一数

$$(\alpha f,\alpha f)^{\frac{1}{2}}=[\alpha\bar{\alpha}(f,f)]^{\frac{1}{2}}=|\alpha|(f,f)^{\frac{1}{2}}.$$

- 三角不等式 对任意 $f,g\in H$,

$$\begin{aligned}(f+g,f+g)&=(f,f)+(f,g)+(g,f)+(g,g)\\&=(f,f)+(f,g)+\overline{(f,g)}+(g,g)\\&=(f,f)+2\,\mathrm{Re}(f,g)+(g,g)\\&\leq(f,f)+2|(f,g)|+(g,g)\\&\leq(f,f)+2(f,f)^{\frac{1}{2}}(g,g)^{\frac{1}{2}}+(g,g)\ (\text{Cauchy 不等式})\\&=[(f,f)^{\frac{1}{2}}+(g,g)^{\frac{1}{2}}]^2,\end{aligned}$$

于是有

$$(f+g,f+g)^{\frac{1}{2}}\leq(f,f)^{\frac{1}{2}}+(g,g)^{\frac{1}{2}}.$$

故 $(f,f)^{\frac{1}{2}}$ 是 H 上的一种范数.

2. 证明内积空间上的任意两个元素 f 和 g 满足 Cauchy 不等式

$$\big|(f,g)\big|\leq(f,f)^{\frac{1}{2}}(g,g)^{\frac{1}{2}}$$

和三角不等式 (3.11).

证明. 等价证明 $\big|(f,g)\big|^2\leq(f,f)(g,g)$.
当 $g=0$ 时显然成立.
当 $g\neq 0$ 时, 取实数 $\lambda\neq 0$, 那么有

$$0\leq(f+\lambda g,f+\lambda g)\leq(f,f)+2\lambda\big|(f,g)\big|+\lambda^2(g,g),$$

这是关于 λ 的一元二次不等式, 因此有

$$\Delta=\big(2\big|(f,g)\big|\big)^2-4(f,f)(g,g)\leq 0,$$

即得 $\big|(f,g)\big|^2\leq(f,f)(g,g)$.
三角不等式上题已证.

3. 证明首项系数为 1 的正交多项式系 $\{g_i\}_{i=0}^{+\infty}$ 满足关系式 (3.18).

证明. 对于不超过 k 次的多项式 $g_{k+1}(x)-xg_k(x)$ 存在着一组参数 $\{c_i\}_{i=0}^{k}$, 使得

$$g_{k+1}(x)-xg_k(x)=\sum_{i=0}^{k-2}c_ig_i(x)+c_{k-1}g_{k-1}(x)+c_kg_k(x).$$

下面逐步确定参数 $\{c_i\}_{i=0}^{k}$. 首先, 由内积的性质以及正交多项式的性质 $2°$ 得到

$$(g_{k+1}-xg_k,g_m)=(g_{k+1},g_m)-(g_k,xg_m)=0,\quad (m=0,1,\cdots,k-2).$$

另一方面

$$\left(\sum_{i=0}^{k-2}c_ig_i+c_{k-1}g_{k-1}+c_kg_k,g_m\right)=c_m(g_m,g_m).$$

综合这两方面有 $c_m=0$ $(m=0,1,\cdots,k-2)$, 进而简化为

$$g_{k+1}(x)-xg_k(x)=c_{k-1}g_{k-1}(x)+c_kg_k(x).$$

首先确定参数 c_{k-1}. 让上式与 $g_{k-1}(x)$ 作内积, 有

$$-(xg_k,g_{k-1})=c_{k-1}(g_{k-1},g_{k-1}),$$

解得

$$c_{k-1}=-\frac{(g_k,xg_{k-1})}{(g_{k-1},g_{k-1})}.$$

又因为 $xg_{k-1}(x)$ 是首项系数为 1 的多项式, 因此存在一组参数 $\{d_i\}_{i=0}^{k-1}$ 有

$$xg_{k-1}(x)=\sum_{i=0}^{k-1}d_ig_i(x)+g_k(x),$$

对上式用 $g_k(x)$ 作内积, 并用正交性得 $(g_k,xg_{k-1})=(g_k,g_k)$, 因此

$$c_{k-1}=-\frac{(g_k,g_k)}{(g_{k-1},g_{k-1})}:=-\beta_{k-1}.$$

下面确定参数 c_k. 与 $g_k(x)$ 作内积, 有

$$-(xg_k,g_k)=c_k(g_k,g_k),$$

解得

$$c_k=-\frac{(xg_k,g_k)}{(g_k,g_k)}:=-\alpha_k.$$

即得到地推关系式

$$g_{k+1}(x)=(x-\alpha_k)g_k(x)-\beta_{k-1}g_{k-1}(x).$$

因为 $g_0(x)=1$, 现在设 $g_1(x)=x+C$. 用 $g_0(x)$ 对 $g_1(x)$ 作内积得

$$0=(g_1,g_0)=(x,g_0)+C(1,g_0),$$

得

$$C=-\frac{(x,g_0)}{(1,g_0)}=-\frac{(xg_0,g_0)}{(g_0,g_0)}:=-\alpha_0.$$

即得 $g_1(x) = x - \alpha_0$.
综上得到地推关系式

$$\begin{cases} g_0 \equiv 1, \\ g_1 = x - \alpha_0, \\ g_{k+1}(x) = (x - \alpha_k) g_k(x) - \beta_{k-1} g_{k-1}(x), \end{cases}$$

其中

$$\alpha_k = \frac{(xg_k, g_k)}{(g_k, g_k)},$$
$$\beta_{k-1} = \frac{(g_k, g_k)}{(g_{k-1}, g_{k-1})}.$$

4. 求 $f(x) = \sin x$, $x \in [0, 0.1]$ 在空间 $\Phi = \mathrm{span}\{1, x, x^2\}$ 上的最佳平方逼近多项式, 并给出平方误差.

解. 取多项式系 $\Phi = \{1, x, x^2\}$, 计算

$$\begin{aligned}
(\phi_0, \phi_0) &= \int_0^1 1 \cdot 1\, dx = 1, \quad (\phi_0, \phi_1) = (\phi_1, \phi_0) = \int_0^1 1 \cdot x\, dx = \frac{1}{2}, \\
(\phi_0, \phi_2) &= (\phi_2, \phi_0) = \int_0^{0.1} 1 \cdot x^2\, dx = \frac{1}{3000}, \\
(\phi_1, \phi_2) &= (\phi_2, \phi_1) = \int_0^{0.1} x \cdot x^2\, dx = \frac{1}{40000}, \\
(\phi_2, \phi_2) &= \int_0^{0.1} x^2 \cdot x^2\, dx = \frac{1}{500000}, \\
(\phi_0, f) &= \int_0^{0.1} 1 \cdot \sin x\, dx = -\cos x|_0^{0.1} = 1 - \cos(0.1) = 0.004995834721974, \\
(\phi_1, f) &= \int_0^{0.1} x \cdot \sin x\, dx = -x\cos x|_0^{0.1} + \int_0^{0.1} \cos x\, dx \\
&= -0.1\cos(0.1) + \sin(0.1) = 0.000333000119026, \\
(\phi_2, f) &= \int_0^{0.1} x^2 \cdot \sin x\, dx = -x^2 \cos x|_0^{0.1} + \int_0^{0.1} 2x\cos x\, dx \\
&= -0.01\cos(0.1) + 2x\sin(x)|_0^{0.1} - 2\int_0^{0.1} \sin x\, dx \\
&= -0.01\cos(0.1) + 0.2\sin(0.1) + 2\cos(0.1) - 2 \\
&= 0.000024972232637,
\end{aligned}$$

由

$$\begin{bmatrix} (\phi_0, \phi_0) & (\phi_0, \phi_1) & (\phi_0, \phi_2) \\ (\phi_1, \phi_0) & (\phi_1, \phi_1) & (\phi_1, \phi_2) \\ (\phi_2, \phi_0) & (\phi_2, \phi_1) & (\phi_2, \phi_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f, \phi_0) \\ (f, \phi_1) \\ (f, \phi_2) \end{bmatrix}$$

得

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.83244072420 \times 10^{-5} \\ 1.000999107374296 \\ -0.024985122519286 \end{bmatrix}.$$

因此得到二次最佳平方逼近多项式为

$$\varphi(x) = -0.83244072420 \times 10^{-5} + 1.000999107374296x - 0.024985122519286x^2.$$

平方误差 $\|\delta\|_2^2 = (f,f) - F^T C \approx 0.9893107383654454 \times 10^{-12}$.

Listing 1: Matlab code

```
clear;
clc;

g00 = integral(@(x) 1*1*x.^0, 0, 0.1);
g01 = integral(@(x) 1*x, 0, 0.1);
g02 = integral(@(x) 1*x.^2, 0, 0.1);
g11 = integral(@(x) x.*x, 0, 0.1);
g12 = integral(@(x) x.*x.^2, 0, 0.1);
g22 = integral(@(x) x.^2.*x.^2, 0, 0.1);

% G is a symmetric matrix
G = [g00 g01 g02;
     g01 g11 g12;
     g02 g12 g22];
F=[integral(@(x) 1.*sin(x), 0, 0.1)
   integral(@(x) x.*sin(x), 0, 0.1)
   integral(@(x) x.^2.*sin(x), 0, 0.1)
];
F

C = G\F

syms x

T = [1 x x.^2];
phi = T*C;

d_pre=digits(7);
d_cur=digits;
phi = vpa(phi)

error_2= integral(@(x) sin(x).^2, 0, 0.1)-F'*C;
error_2 = vpa(error_2,6)
```

5. 对例 3.1 用 Legendre 多项式作为基进行计算.

解. 因为 Legendre 正交多项式系的定义区间是 $[-1,1]$, 因此做变换 $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t$, 那么令 $g(t)=f(x(t))=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\right)^2}=\frac{4}{t^2+2t+5}$. 取 Legendre 多项式基底 $\Phi=\{P_0(t),P_1(t),P_2(t)\}=\{1,t,(3t^2-1)/2\}$. 计算

$$(P_0,P_0)=2,\quad (P_1,P_1)=\frac{2}{3},\quad (P_2,P_2)=\frac{2}{5},$$

$$\begin{aligned}
(P_0,g(t))&=\int_{-1}^{1}1\cdot\frac{4}{t^2+2t+5}\,dt=\frac{\pi}{2},\\
(P_1,g(t))&=\int_{-1}^{1}t\cdot\frac{4}{t^2+2t+5}\,dt=2\ln 2-\frac{\pi}{2},\\
(P_2,g(t))&=\int_{-1}^{1}(3t^2-1)/2\cdot\frac{4}{t^2+2t+5}\,dt=12-6\ln 2-\frac{5}{2}\pi.
\end{aligned}$$

由 $G_3C=F$, 即

$$\begin{bmatrix}2&&\\&\frac{2}{3}&\\&&\frac{2}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\c_1\\c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(P_0,g(t))\\(P_1,g(t))\\(P_2,g(t))\end{bmatrix},$$

得

$$\begin{bmatrix}c_0\\c_1\\c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\pi}{4}\\3\ln 2-\frac{3}{4}\pi\\30-15\ln 2-\frac{25}{4}\pi\end{bmatrix}.$$

因此

$$\varphi(t)=c_0+c_1t+c_2(3t^2-1)/2,$$

将 $t=2x-1$ 带入, 得到二次最佳平方逼近多项式为

$$\frac{1}{1+x^2}\approx 1.029989318574570-0.360535137012694x-0.192970760012324 8x^2.$$

Listing 2: Matlab code

```
clear;
clc;

G = diag([2,2/3,2/5]);
G

F=[integral(@(t) (1.*4./(t.^2+2*t+5)),-1,1)
    integral(@(t) (t.*4./(t.^2+2*t+5)),-1,1)
    integral(@(t) ((3*t.^2-1)/2.*4./(t.^2+2*t+5)),-1,1)
    ];
F
```

```
C = G\F

syms t
T = [1 t (3*t.^2-1)/2 ]
S = T*C;
St=simplify(S);

% Fractions in symbolic expressions are represented by decimal
    numbers
d_pre=digits(7);
d_cur=digits;
St = vpa(St)

syms x t
t = 2*x-1;
T = [1 t (3*t.^2-1)/2 ]
S = T*C;
Sx=simplify(S);
Sx = vpa(Sx)
```

注 答案上二次项的系数是不是错的?

6. 以 Chebyshev 多项式作为基, 求 $f(x)=\sin x, x\in[0,0.1]$ 关于权函数 $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{40x-400x^2}}$ 的不超过2次的最佳平方逼近多项式, 并求平方误差.

解. 因为 Chebyshev 正交多项式系的定义区间是 $[-1,1]$, 因此做变换 $x=0.05+0.05t$, 那么令 $g(t)=f(x(t))=\sin(0.05+0.05t)$, $\rho(t)=\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ $-1\le t\le 1$. 取 Chebyshev 多项式基底 $\Phi=\{T_0(t),T_1(t),T_2(t)\}=\{1,t,2t^2-1\}$. 计算

$$(T_0,T_0)=\pi,\quad (T_1,T_1)=\frac{\pi}{2},\quad (T_2,T_2)=\frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned}
(T_0,g(t))&=\int_{-1}^{1}1\cdot\sin(0.05+0.05t)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\approx 0.156916072476249,\\
(T_1,g(t))&=\int_{-1}^{1}t\cdot\sin(0.05+0.05t)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\approx 0.078417151554614,\\
(T_2,g(t))&=\int_{-1}^{1}(2t^2-1)\cdot\sin(0.05+0.05t)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\approx -0.000049056713216.
\end{aligned}$$

由 $G_3C=F$, 即

$$\begin{bmatrix}\pi & & \\ & \frac{\pi}{2} & \\ & & \frac{\pi}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\ c_1\\ c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(T_0,g(t))\\ (T_1,g(t))\\ (T_2,g(t))\end{bmatrix},$$

得

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.049947937170322 \\ 0.049921909172413 \\ -0.000031230473601 \end{bmatrix}.$$

因此

$$\varphi(t) = c_0 + c_1 t + c_2(2t^2 - 1),$$

将 $t = 20x - 1$ 带入, 得到二次最佳平方逼近多项式为

$$\sin x \approx -0.52025 \times 10^{-5} + 1.0009x - 0.02498x^2.$$

平方误差 $\|\delta\|_2^2 = (g,g) - F^T C \approx 0.424912 \times 10^{-10}$.

Listing 3: Matlab code

```
clear;
clc;

G = diag([pi,pi/2,pi/2]);
G

F=[integral(@(t) (1.*sin(0.05+0.05*t)./sqrt(1-t.^2)),-1,1)
   integral(@(t) (t.*sin(0.05+0.05*t)./sqrt(1-t.^2)),-1,1)
   integral(@(t) ((2*t.^2-1).*sin(0.05+0.05*t)./sqrt(1-t.^2)),-1,1)
   ];
F

C = G\F

syms t
T = [1 t 2*t.^2-1 ]
S = T*C;
St=simplify(S);

% Fractions in symbolic expressions are represented by decimal numbers
d_pre=digits(7);
d_cur=digits;
St = vpa(St)

syms x t
t = 20*x-1;
T = [1 t 2*t.^2-1 ]
S = T*C;
Sx=simplify(S);
Sx = vpa(Sx)
```

```
error_2=(integral(@(t) (sin(0.05+0.05*t).^2./sqrt(1-t.^2)),-1,1)-F
    '*C)
error_2 = vpa(error_2,6)
```

7. 已知函数表

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0	1	2	1	0

试用二次多项式拟合这组数据.

解. 取 $\Phi = \operatorname{span}\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x)\} = \{1, x, x^2\}$. 设 $\varphi = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$. 定义矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) \\ \phi_0(x_2) & \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) \\ \phi_0(x_3) & \phi_1(x_3) & \phi_2(x_3) \\ \phi_0(x_4) & \phi_1(x_4) & \phi_2(x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ f(x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

由 $A^T A C = A^T y$, 得

$$C = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{58}{35} \\ 0 \\ -\frac{3}{7} \end{bmatrix}.$$

因此拟合函数为

$$\varphi(x) = -\frac{3}{7}x^2 + \frac{58}{35}.$$

8. 假设彗星 1968Tentax 在太阳系内移动, 在某个极坐标系下的位置做了下面的观测

r	2.70	2.00	1.61	1.20	1.02
φ	48°	67°	83°	108°	126°

由 Kepler 第一定律, 彗星应在一个椭圆或双曲的平面轨道上运动, 假设忽略来自行星的干扰, 于是坐标满足

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi},$$

其中 p 为参数, e 为偏心率. 由给定的观察值用最小二乘法拟合出参数 p 和 e, 并给出平方误差.

解. 由于 r 关于参数 p 和 e 是非线性的, 变形为

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{e}{p}\cos\varphi,$$

记 $y = \frac{1}{r}$, $t = \cos\varphi$, $a = \frac{1}{p}$, $b = -\frac{e}{p}$ 得拟合模型 $y = a + bt$, 离散内积为 $(f, g) = \sum_{i=0}^{4} f(t_i)g(t_i)$.

$$(1,1)=\sum_{i=0}^{4}1^2=5.0,\quad (1,t)=\sum_{i=0}^{4}t_i=0.284929=(t,1),$$

$$(t,t)=\sum_{i=0}^{4}t_i^2=1.056242,\quad (y,1)=3.3052154,\quad (y,t)=-0.314887.$$

求方程组

$$\begin{bmatrix}5.0 & 0.284929\\ 0.284929 & 1.056242\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.3052154\\ -0.314887\end{bmatrix},$$

得

$$a=0.688617,\quad b=-0.483880.$$

进而有 $p=\dfrac{1}{a}=1.452186$, $e=-bp=0.702684$, 拟合方程为

$$r(\varphi)=\frac{1.452186}{1-0.702684\cos\varphi}.$$

平方误差 δ^2 为

$$\delta^2=\sum_{i=0}^{4}|r_i-r(\varphi_j)|^2=0.002262.$$

9. 试给出关于点集 $\{-2,-1,0,1,2\}$ 的首项系数为 1 的正交多项式系 $\{\varphi_i\}_{i=0}^{+\infty}$ 中的前四项 $\{\varphi_i\}_{i=0}^{4}$. 并用 $\{\varphi_i\}_{i=0}^{2}$ 作为基函数求解 7 题.

解. 记点 $-2,-1,0,1,2$ 分别为 x_0,x_1,x_2,x_3,x_4. 离散内积 $(f,g)=\sum_{i=0}^{4}f(x_i)g(x_i)$. 应用首项系数为 1 的正交多项式地推关系有

$$\begin{aligned}
&\phi_0=1,\alpha_0=\frac{(x\phi_0,\phi_0)}{(\phi_0,\phi_0)}=\frac{0}{5}=0,\\
&\phi_1(x)=x-\alpha_0=x,\\
&\alpha_1=\frac{(x\phi_1,\phi_1)}{(\phi_1,\phi_1)}=\frac{0}{10}=0,\ \beta_1=\frac{(\phi_1,\phi_1)}{(\phi_0,\phi_0)}=\frac{10}{5}=2,\\
&\phi_2(x)=(x-\alpha_1)\phi_1-\beta_1\phi_0=x^2-2,\\
&\alpha_2=\frac{(x\phi_2,\phi_2)}{(\phi_2,\phi_2)}=\frac{0}{14}=0,\ \beta_2=\frac{(\phi_2,\phi_2)}{(\phi_1,\phi_1)}=\frac{14}{10}=\frac{7}{5},\\
&\phi_3(x)=(x-\alpha_2)\phi_2-\beta_2\phi_1=x^3-\frac{17}{5}x.
\end{aligned}$$

下面求解第 7 题.

取 $\Phi=\mathrm{span}\{\phi_0(x),\phi_1(x),\phi_2(x)\}=\{1,x,x^2-2\}$. 设 $\varphi(x)=c_0+c_1x+c_2(x^2-2)$. 定义矩阵

$$A=\begin{bmatrix}\phi_0(x_0)&\phi_1(x_0)&\phi_2(x_0)\\ \phi_0(x_1)&\phi_1(x_1)&\phi_2(x_1)\\ \phi_0(x_2)&\phi_1(x_2)&\phi_2(x_2)\\ \phi_0(x_3)&\phi_1(x_3)&\phi_2(x_3)\\ \phi_0(x_4)&\phi_1(x_4)&\phi_2(x_4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2&2\\1&-1&-1\\1&0&-2\\1&1&-1\\1&2&-2\end{bmatrix},\quad y=\begin{bmatrix}f(x_0)\\f(x_1)\\f(x_2)\\f(x_3)\\f(x_4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\1\\0\end{bmatrix}.$$

由 $A^TAC = A^Ty$, 得

$$C = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ -\frac{3}{7} \end{bmatrix}.$$

因此拟合函数为

$$\varphi(x) = \frac{4}{5} - \frac{3}{7}(x^2 - 2) = -\frac{3}{7}x^2 + \frac{58}{35}.$$

10. * 求 $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ 在 $[0,1]$ 上的一次最佳一致逼近多项式.

解. 计算方法经典题分析解集 P59

11. * 求多项式 $f(x) = 2x^4 + x^3 + 5x^2 + 1$ 在 $[-1,1]$ 上的3次最佳一致逼近多项式.
12. * 用幂级数的缩合方法, 求 $f(x) = e^x$, $x \in [-1,1]$ 上的3次近似多项式 $p_{6,3}(x)$, 并估计 $\|f(x) - p_{6,3}(x)\|_\infty$.
13. 求 $f(x) = e^x, x \in [-1,1]$ 的以 Chebyshev 多项式 $T_4(x)$ 的零点为插值节点的3次插值多项式 $p_3(x)$, 并估计 $\|f(x) - p_3(x)\|_\infty$.

解. 求得 $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 = 0$ 的根为

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.923879532511287 \\ 0.382683432365090 \\ -0.382683432365090 \\ -0.923879532511287 \end{bmatrix},$$

建立差商表

x	$f(x)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
0.923879532511287	2.519044171406984			
0.382683432365090	1.466213800757109	1.945376861299382		
-0.382683432365090	0.682028773350537	1.024587114419994	0.704741961644773	
-0.923879532511287	0.396975968643480	0.526708903907574	0.381059484997363	0.175175694047241

所以三次 Newton 插值多项式为

$$\begin{aligned} p_3(x) &= 0.994615316878994 + 0.998933227976305x \\ &= 0.542900723321068x^2 + 0.175175694047241x^3. \end{aligned}$$

误差 $\|f(x) - p_3(x)\|_\infty = \max\limits_{x\in[-1,1]} |f(x) - p_3(x)| \approx 0.006656866235438.$

Listing 4: Matlab code

```
clear;
clc;

syms x
eqn = 8*x^4-8*x^2+1 == 0;
```

```
solx = solve(eqn,x)

x=[  (1/2 - 2^(1/2)/4)^(1/2)
   (2^(1/2)/4 + 1/2)^(1/2)
 -(1/2 - 2^(1/2)/4)^(1/2)
 -(2^(1/2)/4 + 1/2)^(1/2) ];

x = sort(x,'descend');
x

y =exp(x);
y

% divided difference table

table = [x, y];
cha1 = [0
        (y(2)-y(1))/(x(2)-x(1))
        (y(3)-y(2))/(x(3)-x(2))
        (y(4)-y(3))/(x(4)-x(3))
        ]
cha2 = [0
        0
        (cha1(3)-cha1(2))/(x(3)-x(1))
        (cha1(4)-cha1(3))/(x(4)-x(2))
        ]

cha3 = [0
        0
        0
        (cha2(4)-cha2(3))/(x(4)-x(1))
        ]

cha = [y cha1 cha2 cha3]

syms t
p3 = cha(1,1)+cha(2,2)*(t-x(1))...
    +cha(3,3)*(t-x(1))*(t-x(2))+cha(4,4)*(t-x(1))*(t-x(2))*(t-x(3))
       ;

p3 = simplify(p3)

% Fractions in symbolic expressions are represented by decimal
   numbers
d_pre=digits(9);
```

```
d_cur=digits;
p3 = vpa(p3)

t = -1:0.001:1;
f = exp(t);
value = 0.175175694*t.^3 + 0.542900723*t.^2 + 0.998933228*t +
    0.994615317;
error_inf=vpa(max(abs(f-value)),3)
```

14. 求 $f(x)=e^x, x\in[-1,1]$ 上的关于权函数 $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的三次最佳平方逼近多项式 $S_3(x)$, 并估计误差 $\|f(x)-S_3(x)\|_2$ 和$\|f(x)-S_3(x)\|_\infty$.

解. 取 Chebyshev 多项式基底 $\Phi=\{T_0(x),T_1(x),T_2(x),T_3(x)\}=\{1,x,2x^2-1,4x^3-3x\}$. 计算

$$(T_0,T_0)=\pi,\quad (T_1,T_1)=(T_2,T_2)=(T_3,T_3)=\frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned}
(T_0,f(x))&=\int_{-1}^{1}1\cdot e^x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\approx 3.977463260506311,\\
(T_1,f(x))&=\int_{-1}^{1}x\cdot e^x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\approx 1.775499689212096,\\
(T_2,f(x))&=\int_{-1}^{1}(2x^2-1)\cdot e^x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\approx 0.426463882081949,\\
(T_3,f(x))&=\int_{-1}^{1}(4x^3-3x)\cdot e^x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\approx 0.069644160883853.
\end{aligned}$$

由 $G_4C=F$, 即

$$\begin{bmatrix}\pi&&&\\&\frac{\pi}{2}&&\\&&\frac{\pi}{2}&\\&&&\frac{\pi}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(T_0,f(x))\\(T_1,f(x))\\(T_2,f(x))\\(T_3,f(x))\end{bmatrix},$$

得

$$\begin{bmatrix}c_0\\c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.266065877751973\\1.130318207984916\\0.271495339534006\\0.044336849848610\end{bmatrix}.$$

因此

$$\begin{aligned}
S_3(x)&=c_0+c_1x+c_2(2x^2-1)+c_3(4x^3-3x)\\
&=0.177347399394439x^3+0.542990679068011x^2\\
&\quad+0.997307658439087x+0.994570538217967.
\end{aligned}$$

误差 $\|f(x)-S_3(x)\|_2=\sqrt{(f,f)-F^TC}\approx 0.006894835319082.$

误差 $\|f(x)-S_3(x)\|_\infty=\max\limits_{x\in[-1,1]}|f(x)-S_3(x)|\approx 0.006065553339541.$

Listing 5: Matlab code

```
clear;
clc;

G = diag([pi,pi/2,pi/2,pi/2]);
G

F=[integral(@(x) (1.*exp(x)./sqrt(1-x.^2)),-1,1)
   integral(@(x) (x.*exp(x)./sqrt(1-x.^2)),-1,1)
   integral(@(x) ((2*x.^2-1).*exp(x)./sqrt(1-x.^2)),-1,1)
   integral(@(x) ((4*x.^3-3*x).*exp(x)./sqrt(1-x.^2)),-1,1)
   ];
F

C = G\F;
C

syms x
T = [1 x 2*x.^2-1 4*x.^3-3*x];
S = T*C;

% Fractions in symbolic expressions are represented by decimal numbers
d_pre=digits(7);
d_cur=digits;
S = vpa(S)

% error
error_2=sqrt(integral(@(x) (exp(x).^2./sqrt(1-x.^2)),-1,1)-F'*C);
error_2 = vpa(error_2,4)

x = -1:0.001:1;
f = exp(x);
value = 0.1773474*x.^3 + 0.5429907*x.^2 + 0.9973077*x + 0.9945705;
error_inf=max(abs(f-value));
error_inf = vpa(error_inf,4)
```

15. * 用插值法求 $f(x)=e^x$, $x\in[0,1]$ 上的3次最佳一致逼近多项式的近似, 并用范数 $\|\cdot\|_\infty$ 估计误差.

16. * 选取常数 a,b, 使得 $\max\limits_{0\le x\le 1}|e^x-ax-b|$ 达到最小.