

数值分析原理课后习题

李琦

Email: liqihao2000@126.com

信息与计算科学系

长安大学理学院

更新：2020 年 11 月 16 日

教材: 数值分析原理. 封建湖, 车刚明, 聂玉峰编著. 北京: 科学出版社, 2001.9

习题 1

1. 请指出如下有效数的绝对误差限、相对误差限和有效数字位数:

$$49 \times 10^{-2}, \quad 0.0490, \quad 490.00.$$

解. (a). 记 $x_1 = 49 \times 10^{-2} = 0.49 \times 10^0$, $m = 0$, $n = p = 2$, 2位有效数字.

$$|x_1| \leq \varepsilon = \frac{1}{2} \times 10^{m-n} = \frac{1}{2} \times 10^{-2} = 0.005.$$

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{x_1} = \frac{0.005}{0.49} \approx 0.0102.$$

(b). 记 $x_2 = 0.0490 = 0.490 \times 10^{-1}$, $m = -1$, $n = p = 3$, 3位有效数字.

$$|x_2| \leq \varepsilon = \frac{1}{2} \times 10^{m-n} = \frac{1}{2} \times 10^{-4} = 0.00005.$$

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{x_2} = \frac{0.005}{0.0490} \approx 0.0102.$$

(c). 记 $x_3 = 490.00 = 0.49000 \times 10^3$, $m = 3$, $n = p = 5$, 5位有效数字.

$$|x_3| \leq \varepsilon = \frac{1}{2} \times 10^{m-n} = \frac{1}{2} \times 10^{-2} = 0.005.$$

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{x_3} = \frac{0.005}{490.00} \approx 0.0000102.$$

2. 将 $22/7$ 作为 π 的近似值, 它有几位有效数字, 绝对误差限和相对误差限各为多少?

解. $\pi = 0.314159265 \cdots \times 10^1$, $22/7 \approx 0.31428571428 \times 10^1$, $m = 1$, $n = 3$.

$|\frac{22}{7} - \pi| \approx 0.1264489 \times 10^{-2} = 0.126 \times 10^{-3} \leq \frac{1}{2} \times 10^{1-3}$, 故有效数字为 3 位. $\varepsilon = 0.0013$,
 $\varepsilon_r = 0.0013/(22/7) = 0.00041$.

3. 要使 $\sqrt{101}$ 的相对误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$, 至少需要保留多少位有效数字.

解. $\sqrt{101} \approx 10.05 = 0.1005 \times 10^2$, 故标准形式中 $x_1 = 1$. 根据书中第6页定理 1.1 知,

$$|e_r^*| \leq \frac{1}{2x_1} \times 10^{1-n} = \frac{1}{2} \times 10^{1-n} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}.$$

由上式得 $n \geq 5$. 因此, 至少需要保留 5 位有效数字.

4. 设 x^* 为 x 的近似数, 证明 $\sqrt[n]{x^*}$ 的相对误差大约为 x^* 相对误差的 $\frac{1}{n}$ 倍.

证明. 设 $y = f(x) = \sqrt[n]{x}$, 则有 $f'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$. 记 $y^* = \sqrt[n]{x^*}$, 那么相对误差

$$e_r(y^*) = \frac{y^* - y}{y^*} = \frac{\sqrt[n]{x^*} - \sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x^*}} = \frac{f'(x^*)(x^* - x)}{x^{*\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}e_r(x^*).$$

证毕.

5. 某矩形的长和宽大约为 100cm 和 50cm, 应该选用最小刻度为多少 cm 的测量工具, 才能保证计算出的面积误差不超过 0.15cm^2 .

解. 面积的误差限为 $\varepsilon(x_1x_2)$. 由书中第8页公式(1.9)知

$$\begin{aligned}\varepsilon(x_1^*x_2^*) &\approx |x_1^*|\varepsilon(x_1^*) + |x_2|\varepsilon(x_1^*) \\ &= 50\varepsilon(x_1^*) + 150\varepsilon(x_1^*) \\ &\leq 150\max\{\varepsilon(x_1^*), \varepsilon(x_2^*)\}\end{aligned}$$

由题意要使 $150\max\{\varepsilon(x_1^*), \varepsilon(x_2^*)\} \leq 0.015$. 得 $\max\{\varepsilon(x_1^*), \varepsilon(x_2^*)\} \leq 0.001$. 所以, 应该选用最小刻度为 0.001 cm 的测量工具.

6. 设 $x = 5 \pm 0.1$, $y = 5 \pm 0.1$, 试估计出 $a = y/(x+1)$ 的取值范围.

解. $x \in [5 - 0.1, 5 + 0.1]$, $y \in [5 - 0.1, 5 + 0.1]$. 所以 $x \in [6 - 0.1, 6 + 0.1]$, 进一步 $1/x \in [1/(6 + 0.1), 1/(6 - 0.1)]$. 因此

$$\begin{aligned}a = y/(x+1) &= [5 - 0.1, 5 + 0.1] * [1/(6 + 0.1), 1/(6 - 0.1)] \\ &= [4.9/6.1, 5.1/5.9] \approx [0.803278, 0.864407].\end{aligned}$$

7. 论证当 x^* 是 x 的较好近似时, 函数值的绝对误差、自变量的相对误差、相对误差意义下的条件数之间满足如下近似公式

$$\varepsilon_r(f^*) \approx \text{cond}_r(f(x^*))\varepsilon_r(x^*).$$

证明. 左边 $= \varepsilon_r(f^*) = \frac{f(x^*) - f(x)}{f(x^*)} = \frac{f'(x^* - \theta(x^* - x))(x^* - x)}{f(x^*)},$

右边 $= \text{cond}_r(f(x^*))\varepsilon_r(x^*) = x^* \frac{f'(x^*)}{f(x^*)} \frac{x^* - 1}{x^*} = \frac{f'(x)(x^* - x)}{f(x^*)}.$

又因为 x^* 是 x 的较好近似, 所以 $f'(x^* - \theta(x^* - x)) \approx f'(x^*)$, 即得到结论.

注 最后的结论是左边 \approx 右边, 但是很多同学证明出来的结果是 $=$ 而不是 \approx .

8. 计算函数 $y = \sin(n^3x)$ 在 $x = 0.0001$ 附近的函数值, 当 $n = 100$ 时, 试估计满足函数值相对误差不超过 0.1% 时的自变量相对误差限和绝对误差限.

解. 记 $f'(x) = y' = n^3 \cos(n^3x)$. 相对误差

$$e_r(y^*) = \frac{x^*}{f(x^*)} f'(x^*) e_r(x^*) = \frac{x^* n^3 \cos(n^3 x^*)}{\sin(n^3 x^*)} e_r(x^*).$$

当 $n = 100$, $x = 0.0001$ 时, 函数值相对误差不超过 0.1% , 即

$$\frac{100}{\tan(100)} e_r(x^*) \leq 0.001,$$

得 $e_r(x^*) \leq 0.5872 \times 10^{-5}$, 绝对误差 $e(x^*) = x^* e_r(x^*) = 0.5872 \times 10^{-9}$.

注 很多同学用手机计算器计算出 $\tan(100) \approx -5.671$, 如果是这样的话, 同学们再计算一下是否有 $\tan(45) = 1$, 如果是的话, 那么你用的计算输入参数的单位是 $^\circ$ 而不是弧度. 这个习题需要用弧度计算.

9. 对于 32 位单精度实数系统, 使用迭代格式算法

$$x_0 = 4, x_{n+1} = x_n^2, n = 1, 2, 3, \dots$$

迭代多少次将产生上溢.

解. $x_1 = x_0^2, x_2 = x_1^2 = x_0^4, x_3 = x_2^2 = x_0^8, \dots, x_n = x_{n-1}^2 = x_{n-k}^{2^k} = x_0^{2^n}$, 使得在 32 位单精度实数系统不上溢, 那么 $x_n = x_0^{2^n} = 4^{2^n} \leq 2^{2^7-1}$, 即 $2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \leq 2^7 - 1$, 得到 $n = \frac{\lg(127)}{\lg(2)} - 1 \approx 5.989 \leq 6$. 因此, 该格式迭代 6 次将产生上溢.

10. 请设计求解方程 $x^2 + 2px + q = 0$ 根的一个有效算法, 要求它也能够适用于 $p \gg |q|$ 时的情形. 用所设计算法以及求根公式计算 $p = 240.05, q = 1.00$ 时方程根的近似值(计算过程保留 2 位小数), 并给出两个根近似值的相对误差界.

解. 求根公式 $x = -p \pm \sqrt{p^2 - q}$. 当 $p \gg |q|$ 时, $-p$ 和 $\sqrt{p^2 - q}$ 是两个相近的数, 为避免相近的数相减, 取求根公式. $x_1 = -p - \sqrt{p^2 - q}, x_2 = \frac{q}{x_1}$.

$\sqrt{p^2 - q} = \sqrt{(240.05)^2 - 1} \approx 0.24 \times 10^3$. 得 $x_1 \approx -480 = -0.48 \times 10^3, x_2 \approx -0.21 \times 10^{-2}$.

$$\varepsilon(x_1) = \frac{1}{2} \times 10^{m-n} = \frac{1}{2} \times 10^{3-2} = 5,$$

$$\varepsilon(x_2) = \frac{1}{2} \times 10^{m-n} = \frac{1}{2} \times 10^{-2-2} = 0.00005,$$

11. 设有 64 位浮点系统: 尾数符号位占 1 位, 尾数数值占 52 位, 阶码符号位占 1 位, 阶码数值占 10 位. 请推算在此系统下实数的浮点表示能够有多少位有效数字, 并计算该浮点系统的上溢界和下溢界.

解. 类似于本书第 12 页, 有

$$|e_r^*| = \left| \frac{fl(x) - x}{fl(x)} \right| \leq \frac{2^{p-1-52}}{2^{p-1}} = 2^{-52} = 10^n,$$

得 $n = \lg(2^{-52}) \approx -15.65$. 因此双精度系统下实数的浮点表示能够有 15~16 位有效数字.

上溢界: $2^{2^{10-1}} = 10^m$, 得 $m = \lg(2^{2^{10-1}}) \approx 307.95$,

下溢界: $2^{2^{-10}} = 10^m$, 得 $m = \lg(2^{2^{-10}}) \approx -308.25$.

习题 2

1. 对于下面给出的函数值表, 试构造合适的二次 Lagrange 插值多项式计算 $f(1.8)$ 的近似值.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1.21	1.42	1.72	1.67	1.58

解. 根据误差估计式, 选 $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$ 为插值节点, Lagrange 插值基函数为

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}(x-2)(x-3), \\ l_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -(x-1)(x-3), \\ l_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}(x-1)(x-2). \end{aligned}$$

二次多项式为

$$\begin{aligned} L_2(x) &= f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + f(x_2)l_2(x) \\ &= 1.72 \frac{(x-2)(x-3)}{2} - 1.67(x-1)(x-3) + 1.58 \frac{(x-1)(x-2)}{2}, \end{aligned}$$

于是

$$f(1.8) \approx L_2(1.8) = 1.6832.$$

2. 已知 $f(x) = \sin x$ 的如下函数值表,

x	1.0	1.5	2.0
$\sin x$	0.8415	0.9975	0.9093

试用二次插值多项式计算 $\sin(1.8)$ 的近似值 $L_2(1.8)$, 并用插值余项估计其误差限 ε , ε 与 $|\sin(1.8) - L_2(1.8)|$ 相差大吗? 试解释其原因. 对任意 $x \in [1, 2]$ 估计用 $L_2(x)$ 近似 $\sin x$ 的插值误差限.

解. 以 $x_0 = 1.0, x_1 = 1.5, x_2 = 2.0$ 为插值节点, Lagrange 插值基函数为

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1.5)(x-2)}{(1-1.5)(1-2)} = 2(x-1.5)(x-2), \\ l_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(1.5-1)(1.5-2)} = -4(x-1)(x-2), \\ l_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-1)(x-1.5)}{(2-1)(2-1.5)} = 2(x-1)(x-1.5). \end{aligned}$$

二次多项式为

$$L_2(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + f(x_2)l_2(x),$$

于是

$$\begin{aligned} \sin(1.8) &\approx L_2(1.8) = 0.8415l_0(1.8) + 0.9975l_1(1.8) + 0.9093l_2(1.8) \\ &= 0.973884. \end{aligned}$$

插值余项

$$R_2(x) = f(x) - L_2(x) = \frac{f'''(\zeta)}{3!} \omega_3(x) \leq \frac{1}{6} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2),$$

所以误差限为

$$\varepsilon = \frac{1}{6} (1.8 - 1)(1.8 - 1.5)(1.8 - 2) = 0.008,$$

误差为

$$|\sin(1.8) - L_2(1.8)| \approx 0.00003637,$$

这与 ε 相差较大, 这是因为 ε 中导数的绝对值估计偏大. 插值误差限为

$$\varepsilon = \max_{x \in [1, 2]} |R_2(x)| = \max_{x \in [1, 2]} \left| \frac{1}{6} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \right| = 0.00802.$$

3. 取节点 $x_0 = 0, x_1 = 1$ 对函数 $y = e^{-x}$ 作线性插值, 用该插值函数计算 $e^{-0.5}$ 和 $e^{-1.5}$ 的近似值, 并比较这两个近似值的误差限, 比较结果对你有什么启示.

解. 对插值数据 $x_0 = 0, x_1 = 1, f(x_0) = 1, f(x_1) = e^{-1}$ 做线性插值,

$$L_1(x) = 1 \frac{(x - 1)}{0 - 1} + e^{-1} \frac{x - 0}{1 - 0} = (e^{-1} - 1)x + 1,$$

所以 $L_1(0.5) \approx 0.6839, L_1(1.5) \approx 0.0518$, 误差限

$$\varepsilon(0.5) = |e^{-0.5} - L_1(0.5)| = 0.0774,$$

$$\varepsilon(1.5) = |e^{-1.5} - L_1(1.5)| = 0.1713,$$

由上面的计算结果可以看出内插法要好于外插法.

4. 已知如下的函数表:

x	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x)$	-2	0	1	2

使用反插值法求解方程 $f(x) = 0.5$ 在区间 $[0.1, 0.4]$ 内根的近似值.

解. 对于 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 进行三次插值, 插值函数为

$$\begin{aligned} L_3(y) &= f^{-1}(y_0) \frac{(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)}{(y_0 - y_1)(y_0 - y_2)(y_0 - y_3)} \\ &\quad + f^{-1}(y_1) \frac{(y - y_0)(y - y_2)(y - y_3)}{(y_1 - y_0)(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)} \\ &\quad + f^{-1}(y_2) \frac{(y - y_0)(y - y_1)(y - y_3)}{(y_2 - y_0)(y_2 - y_1)(y_2 - y_3)} \\ &\quad + f^{-1}(y_3) \frac{(y - y_0)(y - y_1)(y - y_2)}{(y_3 - y_0)(y_3 - y_1)(y_3 - y_2)} \\ &= 0.1 \frac{x(x - 1)(x - 2)}{-24} + 0.2 \frac{(x^2 - 4)(x - 1)}{4} \\ &\quad + 0.3 \frac{x(x^2 - 4)}{-3} + 0.4 \frac{(x + 2)x(x - 1)}{8}, \end{aligned}$$

于是有

$$x^* \approx L_3(0.5) = 0.2484375.$$

5. 证明关于互异节点 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 的 Lagrange 插值基函数 $\{l_i(x)\}_{i=0}^n$ 满足恒等式 $l_0(x) + l_1(x) + \cdots + l_n(x) \equiv 1$.

证明. 对 $f(x) \equiv 1$ 在 x_0, x_1, \cdots, x_n 处进行 n 次 Lagrange 插值, 则有

$$1 = P_n(x) + R(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) \times 1 + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x),$$

由于 $f^{(n+1)}(\xi) = 0$, 故有 $\sum_{i=0}^n l_i(x) \equiv 1$.

6. 利用如下函数值表构造差商表, 并写出 Newton 插值多项式.

x	1	3/2	0	2
$f(x)$	3	13/4	3	5/3

解. 建立差商表

x	$f(x)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
1	3			
3/2	13/4	1/2		
0	3	1/6	1/3	
2	5/3	-2/3	-5/3	-2

进而 Newton 插值多项式为

$$\begin{aligned} N_3(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1]\omega_1(x) + f[x_0, x_1, x_2]\omega_2(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3]\omega_3(x) \\ &= 3 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{3}(x-1)(x-\frac{3}{2}) - 2(x-1)(x-\frac{3}{2})x. \end{aligned}$$

7. 证明差商具有线性性质, 即若有 $p(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$, 则 $p[x_0, x_1, \cdots, x_k] = c_1 f[x_0, x_1, \cdots, x_k] + c_2 g[x_0, x_1, \cdots, x_k]$.

证明. 将差商有函数值表示, 则有

$$\begin{aligned} p[x_0, x_1, \dots, x_k] &= \sum_{j=0}^k \frac{p(x_j)}{\omega'_{k+1}(x_j)} = \sum_{j=0}^k \frac{c_1 f(x_j) + c_2 g(x_j)}{\omega'_{k+1}(x_j)} \\ &= c_1 \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{\omega'_{k+1}(x_j)} + c_2 \sum_{j=0}^k \frac{g(x_j)}{\omega'_{k+1}(x_j)} \\ &= c_1 f[x_0, x_1, \dots, x_k] + c_2 g[x_0, x_1, \dots, x_k]. \end{aligned}$$

8. * 证明差商的 Leibnitz 公式, 即若有 $p(x) = f(x)g(x)$, 则有 $p[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \sum_{k=0}^n f[x_0, x_1, \cdots, x_k]g[x_k, x_{k+1}, \cdots, x_n]$ 式中零阶差商 $f[x_0] = f(x_0), g[x_n] = g(x_n)$.
9. 设 $f(x)$ 为 n 次多项式, 试证明当 $k > n$ 时 k 阶差商 $f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x]$ 恒等于零, 当 $k \leq n$ 时 $f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x]$ 为 $n-k$ 次多项式.

10. 利用第 1 题中数据构造 4 次 Newton 向前插值公式, 并计算 $f(1.8)$ 的近似值.

解. 节点是等距分布的, 令 $a = -1, h = 1$, 那么 $1.8 = x_0 + th$, 得 $t = 2.8$. 建立如下差分表:

x	$f(x)$	一阶差分	二阶差分	三阶差分	四阶差分
-1	1.21				
0	1.42	0.21			
1	1.72	0.30	0.09		
2	1.67	-0.05	-0.35	-0.44	
3	1.58	-0.09	-0.04	0.31	0.75

由书中第28页 (2.24) 得

$$\begin{aligned}
 N_4(a + th) &= f(x_0) + \sum_{k=1}^4 \Delta^k f(x_0) \binom{t}{k} \\
 &= f(x_0) + \Delta f(x_0)t + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!}t(t-1) \\
 &\quad + \frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!}t(t-1)(t-2) + \frac{\Delta^4 f(x_0)}{4!}t(t-1)(t-2)(t-3) \\
 &= 1.21 + 0.21t + \frac{0.09}{2}t(t-1) \\
 &\quad - \frac{0.44}{6}t(t-1)(t-2) + \frac{0.75}{24}t(t-1)(t-2)(t-3)
 \end{aligned}$$

所以 $N_4(-1 + 2.8 \times 1) = N_4(1.8) \approx 1.703920$.

11. 证明差商和差分之间的关系 (2.21) 和 (2.22), 并推导差分 and 导数之间的关系.

证明. 证明 (1.21).

当 $k = 1$ 时, $f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h}$ 成立.

假设 $k = m - 1$ 时成立. 即 $f[x_0, x_1, \dots, x_{m-1}] = \frac{\Delta^m y_0}{(m-1)!h^{m-1}}$, $f[x_1, x_2, \dots, x_m] = \frac{\Delta^m y_1}{(m-1)!h^{m-1}}$, 所以有

$$\begin{aligned}
 f[x_0, x_1, \dots, x_m] &= \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_m] - f[x_0, x_1, \dots, x_{m-1}]}{x_m - x_0} \\
 &= \frac{\frac{\Delta^m y_1}{(m-1)!h^{m-1}} - \frac{\Delta^m y_0}{(m-1)!h^{m-1}}}{x_m - x_0} \\
 &= \frac{\Delta^m (y_1 - y_0)}{(m-1)!h^{m-1}} \\
 &= \frac{\Delta^m y_0}{m!h^m}.
 \end{aligned}$$

证明 (1.22).

当 $k = 1$ 时, $f[x_n, x_{n-1}] = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = \frac{\nabla y_n}{h}$ 成立.

假设 $k = m-1$ 时成立. 即 $f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-m+1}] = \frac{\nabla^{m-1}y_n}{(m-1)!h^{m-1}}, f[x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-m}] = \frac{\nabla^m y_{n-1}}{(m-1)!h^{m-1}}$, 所以有

$$\begin{aligned} f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-m}] &= \frac{f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-m+1}] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-m}]}{x_{n-m} - x_n} \\ &= \frac{\frac{\nabla^{m-1}y_n}{(m-1)!h^{m-1}} - \frac{\nabla^m y_{n-1}}{(m-1)!h^{m-1}}}{x_{n-m} - x_n} \\ &= \frac{\frac{\nabla^m(y_n - y_{n-1})}{(m-1)!h^{m-1}}}{x_{n-m} - x_n} \\ &= \frac{\nabla^m y_n}{m!h^m}. \end{aligned}$$

因为差商与函数值之间有关系:

存在着 $\zeta \in (\tilde{m}, \tilde{M})$ 使得有 $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^n(\zeta)}{n!}$. 所以差分与函数值之间有关系:

$$\Delta^n y_0 = h^n f^n(\zeta).$$

12. 推导差分 $\Delta^n f(x_0)$ 的函数值表达式.

解.

$$\begin{aligned} \Delta^n f(x_0) &= (E - I)^n f(x_0) = \left[\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} E^{n-j} \right] f(x_0) \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f_{n-j}. \end{aligned}$$

13. 如何判定下面的函数值表是否来自一个次数不低于3的多项式?

X	-2	-1	0	1	2	3
Y	1	4	11	16	13	-4

解. 节点是等距分布的, 建立如下差分表:

x	$f(x)$	一阶差分	二阶差分	三阶差分	四阶差分
-2	1				
-1	4	3			
0	11	7	4		
1	16	5	-2	-6	
2	13	-3	-8	-6	0
3	-4	-17	-14	-6	0

由上面可以看出三阶差分不等于零, 因此可以用这些点去构造出3次插值多项式, 该差值多项式满足表中的所有数据点.

注 也可以建立差商表.

14. 利用差分性质证明 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

证明. 方法一: 令 $f(n) = n(n+1)(2n+1)/6$, 则

$$\begin{aligned}\Delta f(i) &= f(i+1) - f(i) = \frac{(i+1)(i+2)(2i+3)}{6} - \frac{i(i+1)(2i+1)}{6} \\ &= (i+1)^2 \\ &=: a_i,\end{aligned}$$

对上式中的 $i = 0, 1, \cdots, n$ 求和得

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} a_i &= 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta f(i) = \sum_{i=0}^{n-1} (f(i+1) - f(i)) \\ &= (f(1) - f(0)) + (f(2) - f(1)) + \cdots + (f(n) - f(n-1)) \\ &= f(n) - f(0) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 0,\end{aligned}$$

故得到结果

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

方法二: 令 $f(n) = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$, 对 $f(n)$ 构造差分表

n	$f(n)$	$\Delta f(0)$	$\Delta^2 f(0)$	$\Delta^3 f(0)$	$\Delta^4 f(0)$
0	0^2				
1	1^2	1^2			
2	$1^2 + 2^2$	2^2	3		
3	$1^2 + 2^2 + 3^2$	3^2	5	2	
4	$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$	4^2	7	2	0
5	$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$	5^2	9	2	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n	$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \cdots + n^2$	n^2	$2n-1$	2	0

因此由插值得 (书中第28页 (2.24))

$$f_n = f(x_n) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \Delta^k f(x_0) \binom{n}{k}$$

即

$$\begin{aligned}1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 &= 0^0 + \Delta f(x_0) \binom{n}{1} + \Delta^2 f(x_0) \binom{n}{2} + \Delta^3 f(x_0) \binom{n}{3} \\ &= 1^2 n + 3 \frac{n(n-1)}{2!} + 2 \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

15. 证明差分的分部求和公式

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_k \Delta g_k = f_n g_n - f_0 g_0 - \sum_{k=0}^{n-1} g_{k+1} \Delta f_k.$$

证明. 由于

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n-1} f_k \Delta g_k + \sum_{k=0}^{n-1} g_{k+1} \Delta f_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (f_k \Delta g_k + g_{k+1} \Delta f_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \Delta(f_k g_{k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (f_{k+1} g_{k+1} - f_k g_{k+1}) \\ &= f_n g_n - f_0 g_0, \end{aligned}$$

故有

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_k \Delta g_k = f_n g_n - f_0 g_0 - \sum_{k=0}^{n-1} g_{k+1} \Delta f_k.$$

注 这里用到了 $\Delta(f_k g_k) = f_k \Delta g_k + g_{k+1} \Delta f_k$, 下面给出证明

$$\begin{aligned} \Delta(f_k g_k) &= f_{k+1} g_{k+1} - f_k g_k \\ &= f_{k+1} g_{k+1} - f_k g_{k+1} + f_k g_{k+1} - f_k g_k \\ &= (f_{k+1} - f_k) g_{k+1} + f_k (g_{k+1} - g_k) \\ &= g_{k+1} \Delta f_k + f_k \Delta g_k. \end{aligned}$$

16. 用如下函数值表建立不超过3次的 Hermite 插值多项式, 并请建立插值误差估计式.

x	0	1	2
$f(x)$	1	2	9
$f'(x)$	\searrow	3	\swarrow

解. 方法一: 插值法加待定系数法.

建立差商表

x	$f(x)$	一阶差商	二阶差商
0	1		
1	2	1	
2	9	7	3

设 $N_2(x)$ 是满足插值条件 $N_2(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2$ 的二次多项式, 则

$$\begin{aligned} N_2(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &= 1 + x + 3x(x - 1) \\ &= 3x^2 - 2x + 1. \end{aligned}$$

为求得 $N_3(x)$, 根据插值条件知, $N_3(x)$ 应具有形式:

$$N_3(x) = N_2(x) + Kx(x - 1)(x - 2),$$

为确定系数 K , 可用条件 $N'_3(1) = 3$, 带入 $N'_3(x) = 6x - 2 + K(3x^2 - 6x + 2)$, 即

$$N'_3(1) = 6 - 2 + K(3 - 6 + 2) = 3,$$

得 $K = 1$. 所以

$$N_3(x) = 3x^2 - 2x + 1 + x(x - 1)(x - 2) = x^3 + 1.$$

方法二: 用插值基函数的方法. 设节点编号为 $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$, 则三次插值多项式可以写成

$$P_3(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + f(x_2)l_2(x) + f'(x_1)\bar{l}_1(x),$$

其中 $l_i, i = 0, 1, 2$ 及 $\bar{l}_1(x)$ 是均为次数不超过3次的多项式, 且满足:

$$\begin{aligned} l_0(x_0) &= 1, & l_1(x_0) &= 0, & l_2(x_0) &= 0, & \bar{l}_1(x_0) &= 0, \\ l_0(x_1) &= 0, & l_1(x_1) &= 1, & l_2(x_1) &= 0, & \bar{l}_1(x_1) &= 0, \\ l_0(x_2) &= 0, & l_1(x_2) &= 0, & l_2(x_2) &= 1, & \bar{l}_1(x_2) &= 0, \\ l'_0(x_1) &= 0, & l'_1(x_1) &= 0, & l'_2(x_1) &= 0, & \bar{l}'_1(x_1) &= 1. \end{aligned}$$

由 $l_0(x)$ 所满足的条件知, $l_0(x) = A(x - x_1)^2(x - x_2)$, 根据 $l_0(x_0) = 1$, 得 $A = \frac{1}{(x_0 - x_1)^2(x_0 - x_2)}$, 故有

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)^2(x - x_2)}{(x_0 - x_1)^2(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 1)^2(x - 2)}{(0 - 1)^2(0 - 2)} = -\frac{(x - 1)^2(x - 2)}{2}.$$

同理可以得到

$$\begin{aligned} l_2(x) &= \frac{x(x - 1)^2}{2}, \\ \bar{l}_1(x) &= -x(x - 1)(x - 2). \end{aligned}$$

最后求 $l_1(x)$, 根据 $l_1(x)$ 应满足的条件, 知

$$l_1(x) = (ax + b)(x - x_0)(x - x_2),$$

利用 $l_1(x_1) = 1, l'_1(x_1) = 0$, 得

$$\begin{cases} (ax_1 + b)(1 - 0)(1 - 2) = 1, \\ a(1 - 0)(1 - 2) + (a + b)(1 - 2) + (a + b)(1 - 0) = 0, \end{cases}$$

得 $a = 0, b = -1$. 故得到 $l_1(x) = -x(x-2)$. 所以

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 1 \cdot l_0(x) + 2 \cdot l_1(x) + 9 \cdot l_2(x) + 3 \cdot \bar{l}_1(x) \\ &= -\frac{(x-1)^2(x-2)}{2} + 2(-x^2+2x) \\ &\quad + 9\frac{x(x-1)^2}{2} - 3x(x-1)(x-2) \\ &= x^3 - 1. \end{aligned}$$

方法三: 建立差商表

x	$f(x)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商表
0	1			
1	2	1		
1	2	3	2	
2	9	7	4	1

则有 $P_3(x) = 1 + (x-1) + 2x(x-1) + x(x-1)^2 = x^3 - 1$.

建立误差估计式.

根据题意, 余项 $R_3(x) = f(x) - P_3(x)$ 应具有如下形式:

$$R_3(x) = K(x)x(x-1)^2(x-2)$$

做辅助函数 $\varphi(t) = f(t) - P_3(t) - K(x)t(t-1)^2(t-2)$, 则 $\varphi(t)$ 在点 $x, 0, 1, 2$ 处有 5 个零点 ($t=1$ 为二重零点), 反复使用罗尔定理, 知至少有一个 $\xi \in (0, 2)$, 使得 $\varphi^{(4)}(\xi) = 0$, 即

$$\varphi^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(\xi) - 4!K(x) = 0,$$

所以

$$K(x) = \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi),$$

$$R_3(x) = \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)x(x-1)^2(x-2).$$

17. 用分段二次插值公式计算 $[0, 1]$ 区间上非节点处的函数值 e^x 的近似值, 要使误差不超过 10^{-6} 需要使用多少个等分节点处的函数值?

解. 设步长 $h = 1/n$. 函数 e^x 在区间上的最大值为 e . 根据书上第38页分段二次插值的误差估计式知, 要满足

$$|R(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{216} \left(\frac{1}{n}\right)^3 e \leq 10^{-6},$$

得 $n \geq 27.934$, 取整数, 因此需要 $n = 28$ 个等分区间, 因此需要 $2n + 1 = 57$ 个等分节点处的函数值.

18. 针对如下函数值表建立三次样条插值函数.

x	1	2	3
$f(x)$	2	4	2
$f'(x)$	1	\searrow	-1

解. 确定方程组系数,

$$h_1 = h_2 = 1, \quad \lambda = \mu_1 = \lambda_2 = \mu_2 = 0.5,$$

建立差商表

x	$f(x)$	一阶差商	二阶差商
1	2		
2	4	2	
3	2	-2	-2

得

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1] &= 2, \quad f[x_1, x_2] = -2, \quad f[x_0, x_1, x_2] = -2, \\ \frac{f[x_0, x_1] - m_0}{h_1} &= \frac{2 - 1}{1} = 1, \quad \frac{m_2 - f[x_1, x_2]}{h_2} = \frac{-1 + 2}{1} = 1. \end{aligned}$$

这样得到关于弯矩的方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

求解得 $M_0 = 8, M_1 = -10, M_2 = 8$. 将所求系数带入书中 (2.46) 的三次样条插值函数

$$\begin{aligned} s(x) &= \begin{cases} s_1(x), & x \in [1, 2] \\ s_2(x), & x \in [2, 3], \end{cases} \\ s_1(x) &= -3x^3 + 13x^2 - 16x + 8, \\ s_2(x) &= 3x^3 - 23x^2 + 56x - 40. \end{aligned}$$

19. * 试推导等距节点的三次 B 样条插值基函数的一般表达形式.
20. * 利用 B 样条插值基函数表示 18 题中的三次样条插值函数.
21. * 验证第 18 题与第 20 题结论的一致性.
22. 用 $f(x)$ 的关于互异节点集 $\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$ 和 $\{x_i\}_{i=2}^n$ 的插值多项式 $g(x)$ 和 $h(x)$ 构造出关于节点集 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 的插值多项式.

解. 方法一: 设所需构造的 $n-1$ 次多项式为

$$q(x) = g(x) + A(h(x) - g(x))(x - x_1),$$

可以验证 $q(x_i) = g(x_i) = f(x_i), i = 1, 2, \dots, n-1$, 还需要满足条件 $q(x_n) = f(x_n)$, 即要满足

$$f(x_n) = g(x_n) + A(h(x_n) - g(x_n))(x_n - x_1),$$

求解得到

$$A = \frac{f(x_n) - g(x_n)}{(h(x_n) - g(x_n))(x_n - x_1)} \frac{f(x_n) - h(x_n)}{f(x_n) - h(x_n)} \frac{1}{x_n - x_1},$$

将其带入 $q(x)$ 的表达式得

$$q(x) = g(x) + [h(x) - g(x)] \frac{x - x_1}{x_n - x_1}.$$

方法二: 设所需构造的 $n - 1$ 次多项式为

$$q(x) = h(x) + A(g(x) - h(x))(x - x_n),$$

可以验证 $q(x_i) = h(x_i) = f(x_i), i = 2, 3, \dots, n$, 还需要满足条件 $q(x_1) = f(x_1)$, 即要满足

$$f(x_1) = h(x_1) + A(g(x_1) - h(x_1))(x_1 - x_n),$$

求解得到

$$A = \frac{f(x_1) - h(x_1)}{(g(x_1) - h(x_1))(x_1 - x_n)} \frac{f(x_1) - g(x_1)}{f(x_1) - g(x_1)} \frac{1}{x_1 - x_n},$$

将其带入 $q(x)$ 的表达式得

$$q(x) = h(x) + [g(x) - h(x)] \frac{x - x_n}{x_1 - x_n}.$$

方法三: 设所需构造的 $n - 1$ 次多项式为 $q(x)$, 它与 $n - 2$ 次插值多项式 $g(x)$ 有共同的插值节点 $\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$, 于是可设

$$q(x) = g(x) + A\omega_{n-1}(x),$$

式中 $\omega_{n-1}(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1})$, A 为待定系数. 又由于 $q(x_n) = f(x_n) = h(x_n)$, 故有

$$h(x_n) = g(x_n) + A\omega_{n-1}(x_n),$$

得

$$A = \frac{h(x_n) - g(x_n)}{\omega_{n-1}(x_n)},$$

将其带入 $q(x)$ 得到

$$q(x) = g(x) + [h(x_n) - g(x_n)] \frac{\omega_{n-1}(x)}{\omega_{n-1}(x_n)}.$$

方法四: 设所需构造的 $n - 1$ 次多项式为 $q(x)$, 它与 $n - 2$ 次插值多项式 $h(x)$ 有共同的插值节点 $\{x_i\}_{i=2}^n$, 于是可设

$$q(x) = h(x) + A\omega_{n-1}(x),$$

式中 $\omega_{n-1}(x) = (x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n)$, A 为待定系数. 又由于 $q(x_1) = f(x_1) = g(x_1)$, 故有

$$g(x_1) = h(x_1) + A\omega_{n-1}(x_1),$$

得

$$A = \frac{g(x_1) - h(x_1)}{\omega_{n-1}(x_1)},$$

将其带入 $q(x)$ 得到

$$q(x) = h(x) + [g(x_1) - h(x_1)] \frac{\omega_{n-1}(x)}{\omega_{n-1}(x_1)}.$$

方法五: 设所需构造的 $n-1$ 次多项式为 $q(x)$, 它与 $n-2$ 次插值多项式 $g(x)$ 有共同的插值节点 $\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$, 于是可设

$$q(x) = g(x) + A(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}), \quad (0.1)$$

又它与 $n-2$ 次插值多项式 $h(x)$ 有共同的插值节点 $\{x_i\}_{i=2}^n$, 于是可设

$$q(x) = h(x) + A(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n), \quad (0.2)$$

其中 A 为 $n-1$ 次多项式 $q(x)$ 的 $n-1$ 次差商, 它是个常数. 计算 (0.1)· $(x-x_n)$ -(0.2)· $(x-x_1)$, 得

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{x-x_n}{x_1-x_n}g(x) - \frac{x-x_1}{x_1-x_n}h(x) \\ &= g(x) + [h(x) - g(x)]\frac{x-x_1}{x_n-x_1} \\ &= h(x) + [g(x) - h(x)]\frac{x-x_n}{x_1-x_n}. \end{aligned}$$

习题 3

1. 证明实函数 $\|f\|_2 = \left[\int_a^b f^2(x) dx \right]^{\frac{1}{2}}$ 是定义于线性空间 $C[a, b]$ 上的范数.

证明. 根据范数的定义来证明.

- 正定性 $(f, f)^{\frac{1}{2}} \geq 0$, 当且仅当 $f = 0$ 时 $(f, f)^{\frac{1}{2}} = 0$.
- 齐次性 设 α 为数域 \mathbb{R} 上任一数

$$(\alpha f, \alpha f)^{\frac{1}{2}} = [\alpha \bar{\alpha} (f, f)]^{\frac{1}{2}} = |\alpha| (f, f)^{\frac{1}{2}}.$$

- 三角不等式 对任意 $f, g \in H$,

$$\begin{aligned} (f+g, f+g) &= (f, f) + (f, g) + (g, f) + (g, g) \\ &= (f, f) + (f, g) + \overline{(f, g)} + (g, g) \\ &= (f, f) + 2\operatorname{Re}(f, g) + (g, g) \\ &\leq (f, f) + 2|(f, g)| + (g, g) \\ &\leq (f, f) + 2(f, f)^{\frac{1}{2}}(g, g)^{\frac{1}{2}} + (g, g) \quad (\text{Cauchy 不等式}) \\ &= [(f, f)^{\frac{1}{2}} + (g, g)^{\frac{1}{2}}]^2, \end{aligned}$$

于是有

$$(f+g, f+g)^{\frac{1}{2}} \leq (f, f)^{\frac{1}{2}} + (g, g)^{\frac{1}{2}}.$$

故 $(f, f)^{\frac{1}{2}}$ 是 H 上的一种范数.

2. 证明内积空间上的任意两个元素 f 和 g 满足 Cauchy 不等式

$$|(f, g)| \leq (f, f)^{\frac{1}{2}}(g, g)^{\frac{1}{2}}$$

和三角不等式 (3.11).

证明. 等价证明 $|(f, g)|^2 \leq (f, f)(g, g)$.

当 $g = 0$ 时显然成立.

当 $g \neq 0$ 时, 取实数 $\lambda \neq 0$, 那么有

$$0 \leq (f + \lambda g, f + \lambda g) \leq (f, f) + 2\lambda |(f, g)| + \lambda^2 (g, g),$$

这是关于 λ 的一元二次不等式, 因此有

$$\Delta = (2|(f, g)|)^2 - 4(f, f)(g, g) \leq 0,$$

即得 $|(f, g)|^2 \leq (f, f)(g, g)$.

三角不等式上题已证.

3. 证明首项系数为 1 的正交多项式系 $\{g_i\}_{i=0}^{+\infty}$ 满足关系式 (3.18).

证明. 对于不超过 k 次的多项式 $g_{k+1}(x) - xg_k(x)$ 存在着一组参数 $\{c_i\}_{i=0}^k$, 使得

$$g_{k+1}(x) - xg_k(x) = \sum_{i=0}^{k-2} c_i g_i(x) + c_{k-1} g_{k-1}(x) + c_k g_k(x).$$

下面逐步确定参数 $\{c_i\}_{i=0}^k$. 首先, 由内积的性质以及正交多项式的性质 2° 得到

$$(g_{k+1} - xg_k, g_m) = (g_{k+1}, g_m) - (g_k, xg_m) = 0, \quad (m = 0, 1, \dots, k-2).$$

另一方面

$$\left(\sum_{i=0}^{k-2} c_i g_i + c_{k-1} g_{k-1} + c_k g_k, g_m \right) = c_m (g_m, g_m).$$

综合这两方面有 $c_m = 0$ ($m = 0, 1, \dots, k-2$), 进而简化为

$$g_{k+1}(x) - xg_k(x) = c_{k-1} g_{k-1}(x) + c_k g_k(x).$$

首先确定参数 c_{k-1} . 让上式与 $g_{k-1}(x)$ 作内积, 有

$$-(xg_k, g_{k-1}) = c_{k-1} (g_{k-1}, g_{k-1}),$$

解得

$$c_{k-1} = -\frac{(g_k, xg_{k-1})}{(g_{k-1}, g_{k-1})}.$$

又因为 $xg_{k-1}(x)$ 是首项系数为 1 的多项式, 因此存在一组参数 $\{d_i\}_{i=0}^{k-1}$ 有

$$xg_{k-1}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} d_i g_i(x) + g_k(x),$$

对上式用 $g_k(x)$ 作内积, 并用正交性得 $(g_k, xg_{k-1}) = (g_k, g_k)$, 因此

$$c_{k-1} = -\frac{(g_k, g_k)}{(g_{k-1}, g_{k-1})} := -\beta_{k-1}.$$

下面确定参数 c_k . 与 $g_k(x)$ 作内积, 有

$$-(xg_k, g_k) = c_k (g_k, g_k),$$

解得

$$c_k = -\frac{(xg_k, g_k)}{(g_k, g_k)} := -\alpha_k.$$

即得到地推关系式

$$g_{k+1}(x) = (x - \alpha_k)g_k(x) - \beta_{k-1}g_{k-1}(x).$$

因为 $g_0(x) = 1$, 现在设 $g_1(x) = x + C$. 用 $g_0(x)$ 对 $g_1(x)$ 作内积得

$$0 = (g_1, g_0) = (x, g_0) + C(1, g_0),$$

得

$$C = -\frac{(x, g_0)}{(1, g_0)} = -\frac{(xg_0, g_0)}{(g_0, g_0)} := -\alpha_0.$$

即得 $g_1(x) = x - \alpha_0$.

综上得到地推关系式

$$\begin{cases} g_0 \equiv 1, \\ g_1 = x - \alpha_0, \\ g_{k+1}(x) = (x - \alpha_k)g_k(x) - \beta_{k-1}g_{k-1}(x), \end{cases}$$

其中

$$\alpha_k = \frac{(xg_k, g_k)}{(g_k, g_k)},$$

$$\beta_{k-1} = \frac{(g_k, g_k)}{(g_{k-1}, g_{k-1})}.$$

4. 求 $f(x) = \sin x$, $x \in [0, 0.1]$ 在空间 $\Phi = \text{span}\{1, x, x^2\}$ 上的最佳平方逼近多项式, 并给出平方误差.

解. 取多项式系 $\Phi = \{1, x, x^2\}$, 计算

$$\begin{aligned} (\phi_0, \phi_0) &= \int_0^1 1 \cdot 1 \, dx = 1, \quad (\phi_0, \phi_1) = (\phi_1, \phi_0) = \int_0^1 1 \cdot x \, dx = \frac{1}{2}, \\ (\phi_0, \phi_2) &= (\phi_2, \phi_0) = \int_0^{0.1} 1 \cdot x^2 \, dx = \frac{1}{3000}, \\ (\phi_1, \phi_2) &= (\phi_2, \phi_1) = \int_0^{0.1} x \cdot x^2 \, dx = \frac{1}{40000}, \\ (\phi_2, \phi_2) &= \int_0^{0.1} x^2 \cdot x^2 \, dx = \frac{1}{500000}, \\ (\phi_0, f) &= \int_0^{0.1} 1 \cdot \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{0.1} = 1 - \cos(0.1) = 0.004995834721974, \\ (\phi_1, f) &= \int_0^{0.1} x \cdot \sin x \, dx = -x \cos x \Big|_0^{0.1} + \int_0^{0.1} \cos x \, dx \\ &= -0.1 \cos(0.1) + \sin(0.1) = 0.000333000119026, \\ (\phi_2, f) &= \int_0^{0.1} x^2 \cdot \sin x \, dx = -x^2 \cos x \Big|_0^{0.1} + \int_0^{0.1} 2x \cos x \, dx \\ &= -0.01 \cos(0.1) + 2x \sin(x) \Big|_0^{0.1} - 2 \int_0^{0.1} \sin x \, dx \\ &= -0.01 \cos(0.1) + 0.2 \sin(0.1) + 2 \cos(0.1) - 2 \\ &= 0.000024972232637, \end{aligned}$$

由

$$\begin{bmatrix} (\phi_0, \phi_0) & (\phi_0, \phi_1) & (\phi_0, \phi_2) \\ (\phi_1, \phi_0) & (\phi_1, \phi_1) & (\phi_1, \phi_2) \\ (\phi_2, \phi_0) & (\phi_2, \phi_1) & (\phi_2, \phi_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f, \phi_0) \\ (f, \phi_1) \\ (f, \phi_2) \end{bmatrix}$$

得

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.83244072420 \times 10^{-5} \\ 1.000999107374296 \\ -0.024985122519286 \end{bmatrix}.$$

因此得到二次最佳平方逼近多项式为

$$\varphi(x) = -0.83244072420 \times 10^{-5} + 1.000999107374296x - 0.024985122519286x^2.$$

$$\text{平方误差 } \|\delta\|_2^2 = (f, f) - F^T C \approx 0.9893107383654454 \times 10^{-12}.$$

Listing 1: Matlab code

```
1 clear;
2 clc;
3
4 g00 = integral(@(x) 1*1*x.^0, 0, 0.1);
5 g01 = integral(@(x) 1*x, 0, 0.1);
6 g02 = integral(@(x) 1*x.^2, 0, 0.1);
7 g11 = integral(@(x) x.*x, 0, 0.1);
8 g12 = integral(@(x) x.*x.^2, 0, 0.1);
9 g22 = integral(@(x) x.^2.*x.^2, 0, 0.1);
10
11 % G is a symmetric matrix
12 G = [g00 g01 g02;
13      g01 g11 g12;
14      g02 g12 g22];
15 F=[integral(@(x) 1.*sin(x), 0, 0.1)
16    integral(@(x) x.*sin(x), 0, 0.1)
17    integral(@(x) x.^2.*sin(x), 0, 0.1)
18 ];
19 F
20
21 C = G\F
22
23 syms x
24
25 T = [1 x x.^2];
26 phi = T*C;
27
28 d_pre=digits(7);
29 d_cur=digits;
30 phi = vpa(phi)
31
32 error_2= integral(@(x) sin(x).^2, 0, 0.1)-F'*C;
33 error_2 = vpa(error_2,6)
```

5. 对例 3.1 用 Legendre 多项式作为基进行计算.

解. 因为 Legendre 正交多项式系的定义区间是 $[-1, 1]$, 因此做变换 $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$, 那么令 $g(t) = f(x(t)) = \frac{1}{1 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t)^2} = \frac{4}{t^2 + 2t + 5}$. 取 Legendre 多项式基底 $\Phi = \{P_0(t), P_1(t), P_2(t)\} = \{1, t, (3t^2 - 1)/2\}$. 计算

$$(P_0, P_0) = 2, \quad (P_1, P_1) = \frac{2}{3}, \quad (P_2, P_2) = \frac{2}{5},$$

$$(P_0, g(t)) = \int_{-1}^1 1 \cdot \frac{4}{t^2 + 2t + 5} dt = \frac{\pi}{2},$$

$$(P_1, g(t)) = \int_{-1}^1 t \cdot \frac{4}{t^2 + 2t + 5} dt = 2 \ln 2 - \frac{\pi}{2},$$

$$(P_2, g(t)) = \int_{-1}^1 (3t^2 - 1)/2 \cdot \frac{4}{t^2 + 2t + 5} dt = 12 - 6 \ln 2 - \frac{5}{2}\pi.$$

由 $G_3 C = F$, 即

$$\begin{bmatrix} 2 & & \\ & \frac{2}{3} & \\ & & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (P_0, g(t)) \\ (P_1, g(t)) \\ (P_2, g(t)) \end{bmatrix},$$

得

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{4} \\ 3 \ln 2 - \frac{3}{4}\pi \\ 30 - 15 \ln 2 - \frac{25}{4}\pi \end{bmatrix}.$$

因此

$$\varphi(t) = c_0 + c_1 t + c_2 (3t^2 - 1)/2,$$

将 $t = 2x - 1$ 代入, 得到二次最佳平方逼近多项式为

$$\frac{1}{1 + x^2} \approx 1.029989318574570 - 0.360535137012694x - 0.1929707600123248x^2.$$

Listing 2: Matlab code

```
1 clear;
2 clc;
3
4 G = diag([2,2/3,2/5]);
5 G
6
7 F=[integral(@(t) (1.*4./(t.^2+2*t+5)),-1,1)
8     integral(@(t) (t.*4./(t.^2+2*t+5)),-1,1)
9     integral(@(t) ((3*t.^2-1)/2.*4./(t.^2+2*t+5)),-1,1)
10 ];
11 F
```

```

12
13 C = G\F
14
15 syms t
16 T = [1 t (3*t.^2-1)/2 ]
17 S = T*C;
18 St=simplify(S);
19
20 % Fractions in symbolic expressions are represented by decimal
    numbers
21 d_pre=digits(7);
22 d_cur=digits;
23 St = vpa(St)
24
25 syms x t
26 t = 2*x-1;
27 T = [1 t (3*t.^2-1)/2 ]
28 S = T*C;
29 Sx=simplify(S);
30 Sx = vpa(Sx)

```

注 答案上二次项的系数是不是错的?

6. 以 Chebyshev 多项式作为基, 求 $f(x) = \sin x, x \in [0, 0.1]$ 关于权函数 $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{40x-400x^2}}$ 的不超过2次的最佳平方逼近多项式, 并求平方误差.

解. 因为 Chebyshev 正交多项式系的定义区间是 $[-1, 1]$, 因此做变换 $x = 0.05 + 0.05t$, 那么令 $g(t) = f(x(t)) = \sin(0.05 + 0.05t)$, $\rho(t) = \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} -1 \leq t \leq 1$. 取 Chebyshev 多项式基底 $\Phi = \{T_0(t), T_1(t), T_2(t)\} = \{1, t, 2t^2 - 1\}$. 计算

$$(T_0, T_0) = \pi, \quad (T_1, T_1) = \frac{\pi}{2}, \quad (T_2, T_2) = \frac{\pi}{2},$$

$$(T_0, g(t)) = \int_{-1}^1 1 \cdot \sin(0.05 + 0.05t) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \approx 0.156916072476249,$$

$$(T_1, g(t)) = \int_{-1}^1 t \cdot \sin(0.05 + 0.05t) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \approx 0.078417151554614,$$

$$(T_2, g(t)) = \int_{-1}^1 (2t^2 - 1) \cdot \sin(0.05 + 0.05t) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \approx -0.000049056713216.$$

由 $G_3 C = F$, 即

$$\begin{bmatrix} \pi & & \\ & \frac{\pi}{2} & \\ & & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (T_0, g(t)) \\ (T_1, g(t)) \\ (T_2, g(t)) \end{bmatrix},$$

得

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.049947937170322 \\ 0.049921909172413 \\ -0.000031230473601 \end{bmatrix}.$$

因此

$$\varphi(t) = c_0 + c_1 t + c_2(2t^2 - 1),$$

将 $t = 20x - 1$ 带入, 得到二次最佳平方逼近多项式为

$$\sin x \approx -0.52025 \times 10^{-5} + 1.0009x - 0.02498x^2.$$

平方误差 $\|\delta\|_2^2 = (g, g) - F^T C \approx 0.424912 \times 10^{-10}$.

Listing 3: Matlab code

```
1 clear;
2 clc;
3
4 G = diag([pi, pi/2, pi/2]);
5 G
6
7 F=[integral(@(t) (1.*sin(0.05+0.05*t))./sqrt(1-t.^2)), -1, 1)
8     integral(@(t) (t.*sin(0.05+0.05*t))./sqrt(1-t.^2)), -1, 1)
9     integral(@(t) ((2*t.^2-1).*sin(0.05+0.05*t))./sqrt(1-t.^2)), -1, 1)
10 ];
11 F
12
13 C = G\F
14
15 syms t
16 T = [1 t 2*t.^2-1 ]
17 S = T*C;
18 St=simplify(S);
19
20 % Fractions in symbolic expressions are represented by decimal
    numbers
21 d_pre=digits(7);
22 d_cur=digits;
23 St = vpa(St)
24
25 syms x t
26 t = 20*x-1;
27 T = [1 t 2*t.^2-1 ]
28 S = T*C;
29 Sx=simplify(S);
30 Sx = vpa(Sx)
```

```

31
32 error_2=(integral(@(t) (sin(0.05+0.05*t).^2./sqrt(1-t.^2)),-1,1)-F
    '*C)
33 error_2 = vpa(error_2,6)

```

7. 已知函数表

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0	1	2	1	0

试用二次多项式拟合这组数据.

解. 取 $\Phi = \text{span}\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x)\} = \{1, x, x^2\}$. 设 $\varphi = c_0 + c_1x + c_2x^2$. 定义矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) \\ \phi_0(x_2) & \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) \\ \phi_0(x_3) & \phi_1(x_3) & \phi_2(x_3) \\ \phi_0(x_4) & \phi_1(x_4) & \phi_2(x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ f(x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

由 $A^T AC = A^T y$, 得

$$C = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{58}{35} \\ 0 \\ -\frac{3}{7} \end{bmatrix}.$$

因此拟合函数为

$$\varphi(x) = -\frac{3}{7}x^2 + \frac{58}{35}.$$

8. 假设彗星 1968Tentax 在太阳系内移动, 在某个极坐标系下的位置做了下面的观测

r	2.70	2.00	1.61	1.20	1.02
φ	48°	67°	83°	108°	126°

由 Kepler 第一定律, 彗星应在一个椭圆或双曲的平面轨道上运动, 假设忽略来自行星的干扰, 于是坐标满足

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi},$$

其中 p 为参数, e 为偏心率. 由给定的观察值用最小二乘法拟合出参数 p 和 e , 并给出平方误差.

解. 由于 r 关于参数 p 和 e 是非线性的, 变形为

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{e}{p} \cos \varphi,$$

记 $y = \frac{1}{r}$, $t = \cos \varphi$, $a = \frac{1}{p}$, $b = -\frac{e}{p}$ 得拟合模型 $y = a + bt$, 离散内积为 $(f, g) = \sum_{i=0}^4 f(t_i)g(t_i)$.

$$(1, 1) = \sum_{i=0}^4 1^2 = 5.0, \quad (1, t) = \sum_{i=0}^4 t_i = 0.284929 = (t, 1),$$

$$(t, t) = \sum_{i=0}^4 t_i^2 = 1.056242, \quad (y, 1) = 3.3052154, \quad (y, t) = -0.314887.$$

求方程组

$$\begin{bmatrix} 5.0 & 0.284929 \\ 0.284929 & 1.056242 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.3052154 \\ -0.314887 \end{bmatrix},$$

得

$$a = 0.688617, \quad b = -0.483880.$$

进而有 $p = \frac{1}{a} = 1.452186$, $e = -bp = 0.702684$, 拟合方程为

$$r(\varphi) = \frac{1.452186}{1 - 0.702684 \cos \varphi}.$$

平方误差 δ^2 为

$$\delta^2 = \sum_{i=0}^4 |r_i - r(\varphi_j)|^2 = 0.002262.$$

9. 试给出关于点集 $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 的首项系数为 1 的正交多项式系 $\{\varphi_i\}_{i=0}^{+\infty}$ 中的前四项 $\{\varphi_i\}_{i=0}^4$. 并用 $\{\varphi_i\}_{i=0}^2$ 作为基函数求解 7 题.

解. 记点 $-2, -1, 0, 1, 2$ 分别为 x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 . 离散内积 $(f, g) = \sum_{i=0}^4 f(x_i)g(x_i)$. 应用首项系数为 1 的正交多项式地推关系有

$$\begin{aligned} \phi_0 &= 1, \alpha_0 = \frac{(x\phi_0, \phi_0)}{(\phi_0, \phi_0)} = \frac{0}{5} = 0, \\ \phi_1(x) &= x - \alpha_0 = x, \\ \alpha_1 &= \frac{(x\phi_1, \phi_1)}{(\phi_1, \phi_1)} = \frac{0}{10} = 0, \beta_1 = \frac{(\phi_1, \phi_1)}{(\phi_0, \phi_0)} = \frac{10}{5} = 2, \\ \phi_2(x) &= (x - \alpha_1)\phi_1 - \beta_1\phi_0 = x^2 - 2, \\ \alpha_2 &= \frac{(x\phi_2, \phi_2)}{(\phi_2, \phi_2)} = \frac{0}{14} = 0, \beta_2 = \frac{(\phi_2, \phi_2)}{(\phi_1, \phi_1)} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}, \\ \phi_3(x) &= (x - \alpha_2)\phi_2 - \beta_2\phi_1 = x^3 - \frac{17}{5}x. \end{aligned}$$

下面求解第 7 题.

取 $\Phi = \text{span}\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x)\} = \{1, x, x^2 - 2\}$. 设 $\varphi(x) = c_0 + c_1x + c_2(x^2 - 2)$. 定义矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) \\ \phi_0(x_2) & \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) \\ \phi_0(x_3) & \phi_1(x_3) & \phi_2(x_3) \\ \phi_0(x_4) & \phi_1(x_4) & \phi_2(x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ f(x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

由 $A^T AC = A^T y$, 得

$$C = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ -\frac{3}{7} \end{bmatrix}.$$

因此拟合函数为

$$\varphi(x) = \frac{4}{5} - \frac{3}{7}(x^2 - 2) = -\frac{3}{7}x^2 + \frac{58}{35}.$$

10. * 求 $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ 在 $[0, 1]$ 上的一次最佳一致逼近多项式.

解. 计算方法经典题分析解集 P59

11. * 求多项式 $f(x) = 2x^4 + x^3 + 5x^2 + 1$ 在 $[-1, 1]$ 上的3次最佳一致逼近多项式.
 12. * 用幂级数的缩合方法, 求 $f(x) = e^x$, $x \in [-1, 1]$ 上的3次近似多项式 $p_{6,3}(x)$, 并估计 $\|f(x) - p_{6,3}(x)\|_\infty$.
 13. 求 $f(x) = e^x$, $x \in [-1, 1]$ 的以 Chebyshev 多项式 $T_4(x)$ 的零点为插值节点的3次插值多项式 $p_3(x)$, 并估计 $\|f(x) - p_3(x)\|_\infty$.

解. 求得 $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 = 0$ 的根为

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.923879532511287 \\ 0.382683432365090 \\ -0.382683432365090 \\ -0.923879532511287 \end{bmatrix},$$

建立差商表

x	$f(x)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
0.923879532511287	2.519044171406984			
0.382683432365090	1.466213800757109	1.945376861299382		
-0.382683432365090	0.682028773350537	1.024587114419994	0.704741961644773	
-0.923879532511287	0.396975968643480	0.526708903907574	0.381059484997363	0.175175694047241

所以三次 Newton 插值多项式为

$$\begin{aligned} p_3(x) &= 0.994615316878994 + 0.998933227976305x \\ &= 0.542900723321068x^2 + 0.175175694047241x^3. \end{aligned}$$

误差 $\|f(x) - p_3(x)\|_\infty = \max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - p_3(x)| \approx 0.006656866235438$.

Listing 4: Matlab code

```
1 clear;
2 clc;
3
4 syms x
5 eqn = 8*x^4-8*x^2+1 == 0;
```

```

6 solx = solve(eqn,x)
7
8 x=[ (1/2 - 2^(1/2)/4)^(1/2)
9      (2^(1/2)/4 + 1/2)^(1/2)
10     -(1/2 - 2^(1/2)/4)^(1/2)
11     -(2^(1/2)/4 + 1/2)^(1/2) ];
12
13 x = sort(x,'descend');
14 x
15
16 y =exp(x);
17 y
18
19 % divided difference table
20
21 table = [x, y];
22 cha1 = [0
23          (y(2)-y(1))/(x(2)-x(1))
24          (y(3)-y(2))/(x(3)-x(2))
25          (y(4)-y(3))/(x(4)-x(3))
26          ]
27 cha2 = [0
28          0
29          (cha1(3)-cha1(2))/(x(3)-x(1))
30          (cha1(4)-cha1(3))/(x(4)-x(2))
31          ]
32
33 cha3 = [0
34          0
35          0
36          (cha2(4)-cha2(3))/(x(4)-x(1))
37          ]
38
39 cha = [y cha1 cha2 cha3]
40
41 syms t
42 p3 = cha(1,1)+cha(2,2)*(t-x(1))+...
43      +cha(3,3)*(t-x(1))*(t-x(2))+cha(4,4)*(t-x(1))*(t-x(2))*(t-x(3))
44      ;
45 p3 = simplify(p3)
46
47 % Fractions in symbolic expressions are represented by decimal
48   numbers
49 d_pre=digits(9);

```

```

49 d_cur=digits;
50 p3 = vpa(p3)
51
52 t = -1:0.001:1;
53 f = exp(t);
54 value = 0.175175694*t.^3 + 0.542900723*t.^2 + 0.998933228*t +
      0.994615317;
55 error_inf=vpa(max(abs(f-value)),3)

```

14. 求 $f(x) = e^x$, $x \in [-1, 1]$ 上的关于权函数 $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的三次最佳平方逼近多项式 $S_3(x)$, 并估计误差 $\|f(x) - S_3(x)\|_2$ 和 $\|f(x) - S_3(x)\|_\infty$.

解. 取 Chebyshev 多项式基底 $\Phi = \{T_0(x), T_1(x), T_2(x), T_3(x)\} = \{1, x, 2x^2 - 1, 4x^3 - 3x\}$. 计算

$$(T_0, T_0) = \pi, \quad (T_1, T_1) = (T_2, T_2) = (T_3, T_3) = \frac{\pi}{2},$$

$$(T_0, f(x)) = \int_{-1}^1 1 \cdot e^x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx 3.977463260506311,$$

$$(T_1, f(x)) = \int_{-1}^1 x \cdot e^x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx 1.775499689212096,$$

$$(T_2, f(x)) = \int_{-1}^1 (2x^2 - 1) \cdot e^x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx 0.426463882081949,$$

$$(T_3, f(x)) = \int_{-1}^1 (4x^3 - 3x) \cdot e^x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx 0.069644160883853.$$

由 $G_4 C = F$, 即

$$\begin{bmatrix} \pi & & & \\ & \frac{\pi}{2} & & \\ & & \frac{\pi}{2} & \\ & & & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (T_0, f(x)) \\ (T_1, f(x)) \\ (T_2, f(x)) \\ (T_3, f(x)) \end{bmatrix},$$

得

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.266065877751973 \\ 1.130318207984916 \\ 0.271495339534006 \\ 0.044336849848610 \end{bmatrix}.$$

因此

$$\begin{aligned} S_3(x) &= c_0 + c_1 x + c_2(2x^2 - 1) + c_3(4x^3 - 3x) \\ &= 0.177347399394439x^3 + 0.542990679068011x^2 \\ &\quad + 0.997307658439087x + 0.994570538217967. \end{aligned}$$

误差 $\|f(x) - S_3(x)\|_2 = \sqrt{(f, f) - F^T C} \approx 0.006894835319082$.

误差 $\|f(x) - S_3(x)\|_\infty = \max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - S_3(x)| \approx 0.006065553339541$.

Listing 5: Matlab code

```

1 clear;
2 clc;
3
4 G = diag([pi,pi/2,pi/2,pi/2]);
5 G
6
7 F=[integral(@(x) (1.*exp(x)./sqrt(1-x.^2)),-1,1)
8     integral(@(x) (x.*exp(x)./sqrt(1-x.^2)),-1,1)
9     integral(@(x) ((2*x.^2-1).*exp(x)./sqrt(1-x.^2)),-1,1)
10    integral(@(x) ((4*x.^3-3*x).*exp(x)./sqrt(1-x.^2)),-1,1)
11    ];
12 F
13
14 C = G\F;
15 C
16
17 syms x
18 T = [1 x 2*x.^2-1 4*x.^3-3*x];
19 S = T*C;
20
21 % Fractions in symbolic expressions are represented by decimal
    numbers
22 d_pre=digits(7);
23 d_cur=digits;
24 S = vpa(S)
25
26 % error
27 error_2=sqrt(integral(@(x) (exp(x).^2./sqrt(1-x.^2)),-1,1)-F'*C);
28 error_2 = vpa(error_2,4)
29
30 x = -1:0.001:1;
31 f = exp(x);
32 value = 0.1773474*x.^3 + 0.5429907*x.^2 + 0.9973077*x + 0.9945705;
33 error_inf=max(abs(f-value));
34 error_inf = vpa(error_inf,4)

```

15. * 用插值法求 $f(x) = e^x$, $x \in [0, 1]$ 上的3次最佳一致逼近多项式的近似, 并用范数 $\|\cdot\|_\infty$ 估计误差.
16. * 选取常数 a, b , 使得 $\max_{0 \leq x \leq 1} |e^x - ax - b|$ 达到最小.