李青航 SA22225226

2.3-2

算法见Algorithm 1,其中A为数组，p为最左游标，r为最右游标，p,q,r将数组分为区间左半边$[p,q]$,右半边$(q,r]$.

2.3-3

由指数运算法则$n=\lg 2^n$和条件

$$T(n)=\begin{cases}2, & \text{if } n==2\\ 2T(n/2)+n, & \text{if } n=2^k,k>1\end{cases} \tag{1}$$

当$k=1$时，由(1)得$T(2)=2$
假设$n=2^k$时，有

$$T(2^k)=2T(2^k/2)+2^k \tag{2}$$

则当$n=2^{k+1}$时，根据(2),且把猜测$T(n)=n\lg n$带入有

$$\begin{aligned}T(2^{k+1})&=2T(2^{k+1}/2)+2^{k+1}=2T(2^k)+2^{k+1}\\&=2(2^k\lg(2^k))+2^{k+1}=k2^{k+1}+2^{k+1}\\&=(k+1)2^{k+1}=2^{k+1}\lg(2^{k+1})=n\lg(n)\end{aligned}$$

2.3-4

$$T(n)=\begin{cases}\Theta(1), & \text{if } n\le 1\\ T(n-1)+I(n), & \text{otherwise}\end{cases}$$

其中，$T(n)$表示对n个元素的数组A进行插入排序的时间，$I(n)$表示将第n个元素插入到已经排好的$A[1...n-1]$的时间。当最坏的情况下，$I(n)\in\Theta(n)$.

4.3-1

根据所证明结论，猜测$T(n)\in O(n^2)$,所以,将$T(n)<n^2$带入：

$$T(n)\le c(n-1)^2+n=cn^2+(1-2c)n+1\le cn^2-2c+2\le cn^2$$

根据$O(n^2)$定义，证明成立

4.3-2

Algorithm 1 MERGE(A, p, q, r)

```
n_1 = q - p + 1
n_2 = r - q
let L[1...n_1] and R[1...n_2] be two new array
for  i = 1 to n_1 do
    L[i] = A[p + i - 1]
end for
for j = 1 to n_2 do
    L[j] = A[q + j]
end for
i = 1
j = 1
k = p
while i ≠ n_1 + 1 and j ≠ n_2 + 1 do
    if L[i] ≤ R[i] then
        A[k] = L[i]
        i = i + 1
    else if A[k] = R[j] then
        j = j + 1
    end if
    k = k + 1
end while
if i == n_1 + 1 then
    for m = j to n_2 do
        A[k] = R[m]
        k = k + 1
    end for
end if
if j == n_2 + 1 then
    for m = i to n_1 do
        A[k] = L[m]
        k = k + 1
    end for
end if
```

根据所证结论知道，$T(n) \in O(\lg n)$,存在有$T(n) \leq 3\lg(n) - 1$，将其带入

$$\begin{aligned}T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq 3\lg(\lceil n/2 \rceil) - 1 + 1 \\ &\leq 3\lg(3n/4) \\ &= 3\lg(n) - 3\lg(3/4) \\ &\leq 3\lg(n) - 1\end{aligned}$$

4.3-3

假设有$T(n) \geq cn\lg n$

$$\begin{aligned}T(n) &\geq 2(c\lfloor n/2 \rfloor \lg(\lfloor n/2 \rfloor)) + n \\ &\geq cn\lg(n/2) + n \\ &= cn\lg n - cn\lg 2 + n \\ &= cn\lg n - cn + n \\ &\geq cn\lg n\end{aligned}$$

所以有下界，即$T(n) \in \Omega(n\lg n)$

又由题目知已经有上界$T(n) \in O(n\lg n)$,所以$T(n) \in \Theta(n\lg n)$

4.4-1

根据递归树，得出$T(n) \in O(n^{\lg 3})$,将$T(n) \leq 2n^{\lg 3} - 2n$带入验证：

$$\begin{aligned}T(n) &= 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\ &\leq 6(\frac{n}{2})^{\lg 3} - n + n \\ &= cn^{\lg 3}\end{aligned}$$

所以$T(n) \in O(n^{\lg 3})$

4.4-6

根据书图4-6，每层的时间代价都是cn,高度为$\log_3 n$，所以总代价为:

$cn\log_3 n = \frac{c}{\log 3} n\lg n \in \Omega(n\lg n)$

4.5-1

a. $\Theta(n^{\frac{1}{2}})$ （情况1）

b. $\Theta(\sqrt{n}\lg n)$ （情况2）

c. $\Theta(n)$ （情况3）

d. $\Theta(n^2)$ （情况3）

4.5-3

套用主方法，其中$a = 1, b = 2$，所以$\Theta(n^{\log_2 1}) = \Theta(1)$,使用情况2，答案为$\Theta(\lg n)$