5. kontrolna naloga
3. A, 26. 5. 2023

Ime in priimek: Lira Jurkovič Razred: 3.a

dosežene točke	možne točke	odstotki	ocena
18	36	50	2

ČAS PISANJA: 45 minut

1. Zapiši polinom $p(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 8$ v razcepni obliki. [5t] 1

$\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 8 = \frac{1}{4}(x^3 - 6x^2 + 32) = \frac{1}{4}x(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6}) + 8$

$\frac{1}{4} \cdot 6$

$x^3 - 6x + 32 =$

$= x^2(x-6) + 32 =$

$\frac{6}{4}$

$x^3 - 6x^2 + 32 =$

$\frac{1}{4}x(x^2 - 6) + 8$

$\frac{1}{4}x(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6}) + 8$

s Hornerjevim algoritmom

2. Polinom šeste stopnje je soda funkcija. Ima realne koeficiente, ničlo $-3i$ in dvojno ničlo 1. Graf poteka skozi točko $A(0, -18)$. Zapiši predpis tega polinoma v razcepni obliki. [5t] 2

simetrična na y-os

→ tudi dvojna ničla -1

$x_1 = -3i$

$x_2 = 3i$

$x_3 = 1$

$x_4 = 1$

$p(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)$

$y = a(x+3i)(x-3i)(x-1)^2(x-x_5)(x-x_6)$

$y = a(x^2+9)(x^2-2x+1)(x^2 - x_6x - x_5x + x_5x_6)$

$y = a(x^4 - 2x^3 + x^2 + 9x^2 - 18x + 9)(x^2 - (x_5+x_6)x + x_5x_6)$

$y = a(x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 18x + 9)(x^2 - (x_5+x_6)x + x_5x_6)$

$y = a(x^6 - (x_5+x_6)x^5 + x_5x_6x^4 - 2x^5 + 2(x_5+x_6)x^4 - 2x_5x_6x^3 + 10x^4 - 10(x_5+x_6)x^3 + 10x_5x_6x^2 - 18x^3 + 18(x_5+x_6)x^2 - 18x_5x_6x + 9x^2 -$

A(0, −18)

$-18 = a \cdot 9 \cdot x_5x_6$

$a \cdot x_5x_6 = -2$

$x_6 = x_5 = \sqrt{2}i$

$p(x) = (x+3i)(x-3i)(x-1)(x-1)(x-\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

$p(x) = a(x+3i)(x-3i)(x-1)^2 \cdot (x+1)^2$

$x=0,\ y=-18 \rightarrow a = \ldots$

3. Dana je funkcija $f(x) = \frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-2x-3}$.

[6t] 4

a) Nariši graf funkcije f.

ničle

$x^3-4x^2+4x=0$

$x(x^2-4x+4)=0$

$x(x-2)^2=0$

$x_1=0$ (L)

$x_2=2$ (S) $\quad P_y(0,0)$ ✓

pol

$x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$x_1=3$ L

$x_2=-1$ ✓

$(x^3-4x^2+4x) : (x^2-2x-3) = x+2$

$-x^3+2x^2+3x$

$-2x^2+7x$

$-2x^2+4x+6$

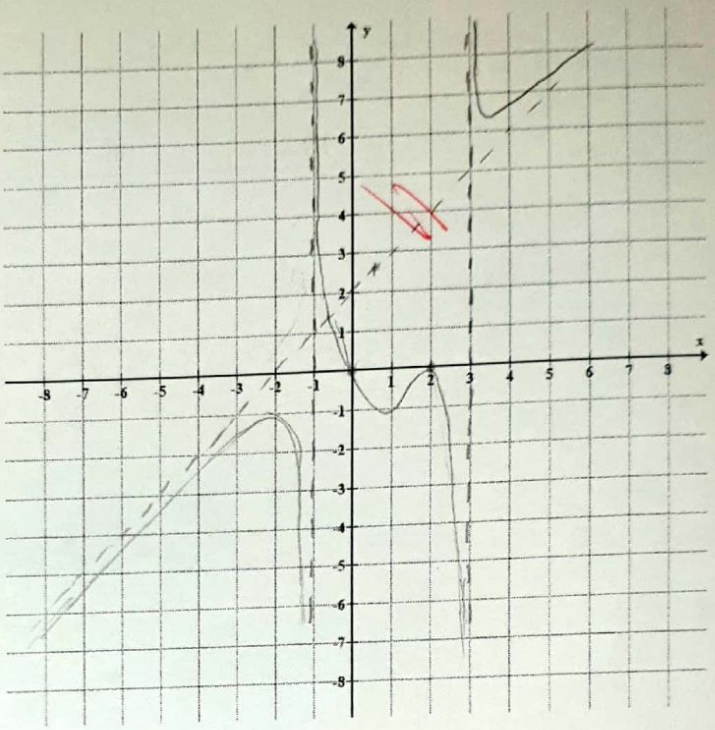
$3x+6$

pr. z asimptoto:

$3x+6=0$

$3x=-6$

$x=-\frac{6}{3}$



b) Zapiši definicijsko območje funkcije $g(x) = 5 - \log_3(-f(x))$.

[3t] 2

$-f(x)>0$ ✓

$D_f(g(x)) = (-\infty, -1) \cup [0, 3)$ ✓

D_g

4. Dana je krožnica K z enačbo $x^2 + y^2 - 2x + 6y + C = 0$.

a) Določi realno število C, da bo enačba določala krožnico s polmerom 5. [3t] 3

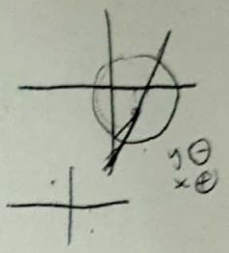
$x^2+y^2-2x+6y+C=0$

$(x-1)^2-1+(y+3)^2-9+C=0$

$(x-1)^2+(y+3)^2=10-C$ ✓

$10-C=25$

$C=-15$ ✓



b) Zapiši tisto premico $y = kx - 5$, ki razpolavlja krožnico K. [3t] 1

$y=kx-5$ $\quad y_1=kx_1-5$ $\quad y_2=kx_2-5$

$x^2+y^2-2x+6y-15=0$

$S(1,-3)$ ✓

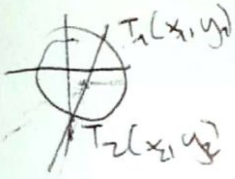
$-3=k\cdot 1-5$

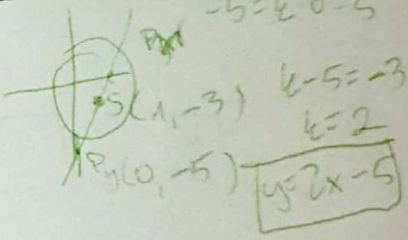
$-5=k\cdot 0-5$

$d(T_1,T_2)=10$

$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=10$

$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=100$





$k-5=-3$

$k=2$

$y=2x-5$

c) Za $C = 2$ določi realna števila n, za katera je premica $y = x + n$ mimobežnica krožnice K. $D<0$ [5t] 2

$(x-1)^2+(y+3)^2=8$

$y=x+n$

$D=b^2-4ac=0$

mimobežnica:

$b^2-4ac<0$

$(x-1)^2+(x+n+3)^2=8$ ✓

$x^2-2x+1+x^2+(16+2n)x+64+8n+n^2=8$

$2x^2+(14+2n)x+57+8n+n^2=0$

65-8

$(x+n+3)(x+n+3)=$

$=x^2+xn+3x+nx+n^2+3n+3x+3n+9=$

$=x^2+(16+2n)x+64+8n+n^2$

$(14+2n)^2-4\cdot 2\cdot(57+8n+n^2)=0$

$196+56n+4n^2-456-64n-8n^2=0$

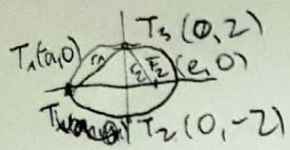
$-4n^2-8n-260=0$

$n^2+2n+65=0$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$n_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-260}}{2}$

5. Dana je elipsa v središčni legi in goriščema na abscisni osi. Razdalja med desnim goriščem elipse in levim temenom elipse je $2(\sqrt{3}+2)$, razdalja med temenoma na ordinatni osi pa 4. Določi enačbo elipse. [6t] 3



$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$d(T_1,F_2)=2(\sqrt{3}+2)=2\sqrt{3}+4$

$T(T_2,T_3)=4$

$b=2$ ✓

$a+e=2(\sqrt{3}+2)$ ✓

$a=2(\sqrt{3}+2)-e$

$e=2(\sqrt{3}+2)-a$

$e^2=a^2-b^2$

$a=\dots$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1$

$\frac{0}{a^2}+\frac{4}{4}=1$

$a=4$

$(2\sqrt{3}+4-a)^2=$

$(2\sqrt{3}+2)-a)^2=$

$=4(\sqrt{3}+2)^2-4a(\sqrt{3}+2)+a^2=$

$=4(3+4\sqrt{3}+4)-4a\sqrt{3}+8a+a^2$

$-\frac{a}{a^2}=1$

$\frac{a}{a^2}=1$

$a=a^2$

$a=1$

$r_1+r_2=2a$

$r_1=\sqrt{(a-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{a^2+4}$

$r_2=\sqrt{(2(\sqrt{3}+2)-a)^2+4}=\sqrt{(2\sqrt{3}+4-a)^2-4}$

$\sqrt{a^2+4}+\sqrt{(2(\sqrt{3}+2)-a)^2-4}=2a \quad /(\cdot)^2$

$a^2+4+(2(\sqrt{3}+2)-a)^2-4+\sqrt{(a^2+4)(2(\sqrt{3}+2)-a)^2-4)}=4a^2$

$a^2=\dots$

DODATNA NALOGA:

Polinom četrte stopnje s celimi koeficienti zavzame pri štirih različnih naravnih vrednostih neodvisne spremenljivke vrednost 5, ordinatno os pa seka pri vrednosti 35. Določi ta polinom. [3t]

$a^2+4+4(\sqrt{3}+2)^2+a^2-4+\dots$

$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$