4. kontrolna naloga
2. A, 30. 3. 2022

Ime in priimek: Lira Jurković

dosežene točke	možne točke	odstotki	ocena
23	43	53	2

ČAS PISANJA: 45 minut

1. Poenostavi izraz za $x > 0$ in $y > 0$: [6t] 6t

$$\frac{\sqrt[12]{x^7y^5}}{\sqrt[6]{x^3y}} \cdot \left(\sqrt[4]{xy^3}\right)^2 - y \cdot \sqrt[4]{y^3 \cdot \sqrt[3]{x^7}} =$$

$$= \sqrt[6]{\frac{\sqrt[2]{x^7y^5}}{x^3y}} \cdot \sqrt[2]{xy^3} - y \cdot y^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[12]{x^7} =$$

$$= \frac{x^{\frac{7}{12}}y^{\frac{5}{12}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}} \cdot x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{7}{4}} \cdot x^{\frac{7}{12}} =$$

$$= x^{\frac{1}{12}} \cdot y^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{7}{4}}x^{\frac{7}{12}} =$$

$$= x^{\frac{7}{12}} \cdot y^{\frac{7}{4}} - y^{\frac{7}{4}}x^{\frac{7}{12}} = 0$$

2. Izračunaj vrednost izraza $(A-B)^{-1}$, če je $A = \frac{3x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}}$ in $B = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}$. [5t] 2t

$$A-B = \frac{3x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}} - \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}\right) =$$

$$= \frac{3x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}} - \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{4}{3}}} =$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{3}} \cdot 3x^{-\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}}-2x^{-\frac{2}{3}}\right)} - \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}(1-x)} =$$

$$= \frac{3x^{-\frac{2}{3}}(1-x) - 1\left(x^{\frac{1}{3}}-2x^{-\frac{2}{3}}\right)}{\left(x^{\frac{1}{3}}-2x^{-\frac{2}{3}}\right)(1-x)} = \frac{3x^{-\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} - \cancel{x^{-\frac{2}{3}}}_{x^{4/3}} - 2x^{-\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}}} =$$

$$= \frac{5x^{-\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}}}{3x^{\frac{1}{3}} - 3x^{-\frac{2}{3}}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}\left(5x^{-1}-4\right)}{3x^{\frac{1}{3}}\left(1-x^{-1}\right)} = \frac{5x^{-1}-4}{3-3x}$$

$$\cancel{(A-B)^{-1} = \frac{3-3x}{5x^{-1}-4}}$$

3. Reši enačbo $\sqrt{3x-2} - 4 + \sqrt{x+2} = 0$. [6t] 3t

$\sqrt{3x-2} - 4 + \sqrt{x+2} = 0$

$\sqrt{3x-2} = 4 - \sqrt{x+2} \quad /()^2$

$3x-2 = 16 - 8\sqrt{x+2} + x+2$

$2x \cancel{+12} = -8\sqrt{x+2}$ -20

$-2x \cancel{-12} = 8\sqrt{x+2} \quad /()^2$

$4x^2 + 48x + 144 = 64x + 128$

$\cancel{4x^2 - 16x + 16 = 0} \quad /:4$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$(x-2)(x-2) = 0$

$x = 2$

L: $\sqrt{6-2} - 4 + \sqrt{4} = 2 - 4 + 2 = 0$

D: 0

L=D

4. Racionaliziraj imenovalec: $\frac{1}{\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9}}$. [3t] 0t

$\frac{1}{\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5 \cdot (\sqrt{5})^2} - \sqrt[3]{3 \cdot 5} + \sqrt[3]{3 (\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3}) + \sqrt[3]{3 \cdot 3}}$

5. Točke $P(-1,2,-3)$, $Q(-2,1,0)$, $R(0,5,1)$ in $S(1,6,-2)$ so oglišča paralelograma.

a) Izračunaj vrednost realnih števil m in n, da bo $\vec{PQ} \times \vec{PS} = (-13, m+3n, m)$. [4t] 4t

$P(-1,2,-3)$

$Q(-2,1,0)$

$R(0,5,1)$

$S(1,6,-2)$

$\vec{PQ} \times \vec{PS} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (-13, 7, -2)$

$m = -2$

$-2 + 3n = 7$

$3n = 9$

$n = 3$

$\vec{PQ} = (-1, -1, 3)$

$\vec{PS} = (2, 4, 1)$

$\vec{PR} = (1, 3, 4)$

b) Zapiši enačbo ravnine Π_1, v kateri leži paralelogram $PQRS$. [3t] 2t

$ax+by+cz=d$

$\vec{r} = \vec{a} + t\vec{u} + s\vec{v}$

$\vec{r} = (\cancel{-1, -1, 3}) + t(2, 4, 1) + s(1, 3, 4)$

$\begin{cases} x = -1 + 2t + s \\ y = -1 + 4t + 3s \\ z = 3 + t + 4s \end{cases}$

$-1 + 2t + s = -1$

$2t + s = 0 \quad /\cdot(-3)$

$4t + 3s = 3$

$t + 4s = -6$

$2t = -3$

$t = -\frac{3}{2}$

$-\frac{3}{2} + 4s = -6$

$4s = -\frac{9}{2}$

$s = -\frac{9}{8}$

c) Zapiši enačbo premice, ki poteka skozi koordinatno izhodišče in je pravokotna na ravnino Π_1. [2t] 1t

$A(0, 0, 0)$

$\vec{r} = (0, 0, 0) + t(- \quad , - \quad , - \quad)$

$\vec{r} = \vec{a} + t(\vec{a} - \vec{b})$

č) Izračunaj koordinate tiste točke ravnine Π_1, ki je najbližja koordinatnemu izhodišču. [3t] 0t

$t = 0, s = 0$

$x = -1 + 2t + s$

$y = -1 + 4t + 3s$

$z = 3 + t + 4s$

$x = 1$

$y = -1$

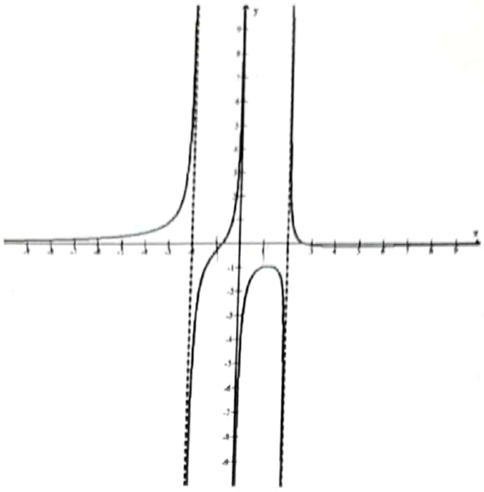
$z = 3$

$\cancel{T(1, -1, 3)}$

d) Ravnina Π_2 ima enačbo $x - 2y + z = 3$. Na minuto natančno izračunaj kot med ravninama Π_1 in Π_2. [5t] 0t

$x - 2y + z = 3$

6. Na sliki je graf funkcije $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$.



a) Določi njeno definicijsko območje, omejenost, intervale naraščanja in intervale konkavnosti.

[4t] 4t

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-2, 2, 0\}$

neomejena

In: $(-\infty, -2), (-2, 0), (0, 1)$

konk.: $(-2, -1), (0, 2)$

b) Določi množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ (eno od možnosti) tako, da bo funkcija $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ (z enakim predpisom, kot jo ima funkcija, katere graf je na sliki) injektivna, ne pa surjektivna.

[2t] 1t

$A = \{-5, -4, -3, \cancel{-2}\}$ $B = \mathbb{R}$

DODATNA NALOGA:

Reši enačbo: $(\sqrt{5}+1)(\sqrt[4]{5}+1)(\sqrt[8]{5}+1)(\sqrt[16]{5}+1)(\sqrt[32]{5}+1) = \frac{4}{x-1}$.

[3t]

tudi vse napisano s smernicami se šteje kot končni odgovori.

L. Jurković