3. kontrolna naloga
2. A, 2. 2. 2022

Ime in priimek: Lina Jurkovič

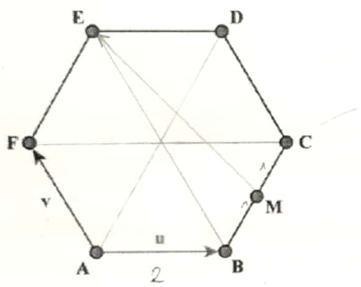
dosežene točke	možne točke	odstotki	ocena
36	40	90	5

ČAS PISANJA: 45 minut

1. V pravilnem šestkotniku $ABCDEF$, z dolžino stranice 2, sta dana vektorja $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{v} = \overrightarrow{AF}$. Točka M je razpolovišče stranice BC.

   a) Izrazi vektorja $\overrightarrow{AE}$ in $\overrightarrow{ME}$ z vektorjema $\vec{u}$ in $\vec{v}$. [4t] 4t

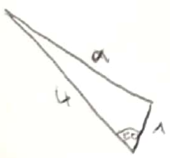
   b) Izračunaj dolžino vektorja $\overrightarrow{ME}$. [4t] 3t



$\overrightarrow{AE} = 2\vec{v} + \vec{u}$ ✓

$\overrightarrow{ME} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) - \vec{u} + \vec{v} =$

$= -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v}$ ✓

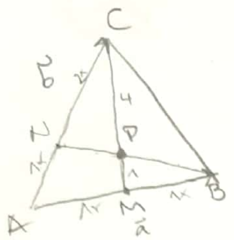


$a^2 = 4^2 + 1^2 - 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \cos 60° =$

$= 17 - 8 \cdot \cos 60 = 13$ ✓

$|\overrightarrow{ME}| = \sqrt{13}$

2. Dan je trikotnik ABC. Točka M je razpolovišče stranice AB. Točka N leži na stranici AC, da velja $|AN| : |AC| = 1 : 3$. Z uporabo vektorjev izračunaj, v kolikšnem razmerju presečišče daljic BN in MC deli daljico MC. [7t] 7t



$|AN| : |AC| = 1:3$

$\vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{AC}$

$\vec{MC} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$

$\vec{MP} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + l(-\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b})$

$|MP| : |PC| = ?$

$\vec{MP} = k\vec{MC}$

$k(-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}) = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + l(-\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b})$

$-\frac{k}{2}\vec{a} + k\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + l\vec{a} - \frac{l}{3}\vec{b} = 0$

$(-\frac{k}{2} + \frac{1}{2} + l)\vec{a} + (k - \frac{1}{3} - \frac{l}{3})\vec{b} = 0$

$-\frac{k}{2} + \frac{1}{2} + l = 0 \quad /\cdot 2$

$k - \frac{1}{3} - \frac{l}{3} = 0 \quad /\cdot 3$

$-k + 1 + 2l = 0$

$3k - 1 - l = 0 \quad /\cdot 2 \quad)+$

$5k - 1 = 0$

$5k = 1$

$k = \frac{1}{5}$

$\vec{MP} = \frac{1}{5}\vec{MC}$

$|MP| : |PC| = 1:4$

3. Vektor $\vec{b}$ je za dve enoti daljši od vektorja $\vec{a}$. Skalarni produkt vektorjev $\vec{a} - \vec{b}$ in $\vec{a} + \vec{b}$ je enak -20, skalarni produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pa 12 kvadratnih enot. Izračunaj dolžini vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ ter velikost kota med njima. [7t] 4t

$\vec{e} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$

$|\vec{b}| = |\vec{a}| + 2$

$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = -20$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$

$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = 12$

$2|\vec{a}| \cdot (|\vec{a}| + 2) \cdot \cos\varphi = 12$

$|\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}| \cdot \cos\varphi = 12$

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$

$a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2 + a_3^2 - b_3^2 = -20$

$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 12$

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$|\vec{a}| = a^2$

$|\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}| \cdot \cos\varphi = 12$

$|\vec{a}|^2 - (|\vec{a}|)^2 + 4|\vec{a}| + 4) = -20$

$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$

$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

$4|\vec{a}| = \cancel{-24}$

$|\vec{a}| = \cancel{6}$

$|\vec{b}| = \cancel{8}$

$(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = (a_1 - b_1)\cdot(a_1 + b_1) + (a_2 - b_2)(a_2 + b_2) + (a_3 - b_3)(a_3 + b_3) =$

$= a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2 + a_3^2 - b_3^2$

$48 \cdot \cos\varphi = 12$

$\varphi = \cancel{75{,}52^\circ}$

4. Dane so točke $A(t+3,-3,4)$, $B(2,t+2,3)$ in $C(0,-1,3t-2)$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Izračunaj, za katera števila t sta vektorja $\overrightarrow{BA}$ in $\overrightarrow{BC}$ pravokotna. [6t] 6t

$\vec{BA} = (t+1, -5-t, 1)$

$\vec{BC} = (-2, -3-t, 3t-5)$

$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = -2\cdot(t+1) + \overbrace{(-3-t)(-5-t)}^{(15+3t+5t+t^2)} + (3t-5) =$

$= -2t - 2 + 3t - 5 + 15 + 3t + 5t + t^2 =$

$= 8 + 9t + t^2 = (t+8)(t+1)$

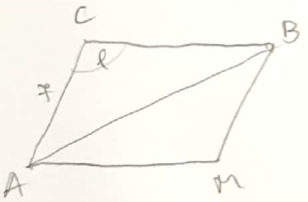
$t^2 + 9t + 8 = 0$

$t_1 = -8$

$t_2 = -1$

b) Za $t = 0$ zapiši koordinate točke M, da bo $AMBC$ paralelogram, in izračunaj velikost $\measuredangle ACB$ na minuto natančno. [8t] 8t

$\measuredangle ACB = \varphi$



$|AC| = \sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7$

$|CB| = \sqrt{4+9+25} = \sqrt{38}$

$|AB| = \sqrt{1+25+1} = \sqrt{27}$

$27 = 38 + 49 - 2\cdot 7 \cdot \sqrt{38}\cdot\cos\varphi$

$-14\cdot\sqrt{38}\cdot\cos\varphi = -60$

$\cos\varphi = \frac{60}{14\cdot\sqrt{38}}$

$\cancel{\varphi = 130°3'}$

$\varphi = 45{,}95° = 45°57'$

$A(3,-3,4)$ $\quad M(m_1, m_2, m_3)$

$B(2,2,3)$

$C(0,-1,-2)$

$\vec{CB} = \vec{AM}$

$(2,3,5) = (m_1-3, m_2+3, m_3-4)$

$m_1 - 3 = 2 \quad m_2 + 3 = 3 \quad m_3 - 4 = 5$

$m_1 = 5 \quad m_2 = 0 \quad m_3 = 9$

$M(5,0,9)$

$\vec{CB} = (2,3,5)$

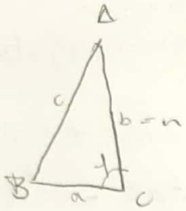
$\vec{AM} = (m_1-3, m_2+3, m_3-4)$

$\vec{AC} = (-3,2,-6)$

$\vec{CB} = (2,3,5)$

$\vec{AB} = (-1,5,-1)$

5. V trikotniku ABC velja $a < b < c$. Dolžine stranic so tri zaporedna naravna števila. Naj bo $b = n$. Pokaži, da je kosinus največjega kota tega trikotnika enak $\frac{n-4}{2n-2}$. [4t] 4t



$a < b < c$

$n-1 < n < n+1$

$\cos\varphi = \frac{n-4}{2n-2}$

$(n+1)^2 = (n-1)^2 + n^2 - 2\cdot n\cdot(n-1)\cdot\cos\varphi$

$n^2+2n+1 = n^2-2n+1+n^2 - 2n(n-1)\cdot\cos\varphi$

$n^2+2n+1 = 2n^2-2n+1 - (2n^2-2n)\cos\varphi$

$-(n^2+4n) = -(2n^2-2n)\cos\varphi$

$\cos\varphi = \frac{n^2-4n}{2n^2-2n} = \frac{n(n-4)}{n(2n-2)} = \frac{n-4}{2n-2}$

$\cos\varphi = \frac{n-4}{2n-2}$

DODATNA NALOGA:

Dokaži, da za poljubno točko M v prostoru in težišče T trikotnika ABC velja $\overrightarrow{MT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$.

[3t]