2. kontrolna naloga
4. A, 15. 11. 2023

Ime in priimek: Lina Jurković Razred: 4.A

dosežene točke	možne točke	odstotki	ocena
36	40	90	5

1. Iz knjigarne v škatli prinesemo 9 novih različnih knjig, od tega 4 strokovne knjige, 2 pesniški zbirki in 3 romane.

4s
2p
3r

a) Iz škatle naključno sočasno vzamemo 4 knjige. Kolikšna je verjetnost dogodka A, da je med njimi vsaj ena pesniška zbirka? [3t] 3

$n = \binom{9}{4} = 126$ $P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{91}{126} = 0{,}722$

$n_{A'} = \binom{7}{4} = 35$

nobene zbirke $n_A = 126 - 35 = 91$

b) Vseh devet knjig razporedimo na ravno polico. Kolikšna je verjetnost dogodka B, da je na skrajni levi strani police pesniška zbirka in knjige iste zvrsti stojijo vse skupaj? [2t] 2

$n = 9! = 362880$ $P(B) = \frac{576}{362880} = 1{,}59 \cdot 10^{-3}$

$n_B = 2 \cdot 2 \cdot 3! \cdot 4! = 576$

$2 \cdot 1 \cdot 3! \cdot 4! \cdot 2$

c) Vseh devet knjig 7-krat zapored naključno razporedimo na ravno knjižno polico. Kolikšna je verjetnost dogodka C, da se pri tem natančno trikrat zgodi, da pesniški zbirki ne stojita skupaj? [4t] 3

$P(C) = \binom{7}{3} \cdot (0{,}77)^3 \cdot (1-0{,}77)^4 = 0{,}0447$

bolj natančno

$P(C_1) = \frac{282240}{9!} = 0{,}77$ 0,23

$9! - 8 \cdot 2 \cdot 7! = 282240$

$P_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

2. V prvi vrečki je 8 modrih in 9 belih bonbonov, v drugi pa 6 modrih in 12 belih bonbonov.

I. Vržemo pošteno igralno kocko. Če padejo vsaj tri pike, na slepo izvlečemo bonbon iz prve vrečke, sicer pa iz druge.

a) Kolikšna je verjetnost dogodka A, da je izvlečeni bonbon modre barve? [3t] 3

① 8m9b ② 6m12b

vsaj 3 pike $P(K) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$P(A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{17} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} =$

$= \frac{16}{51} + \frac{1}{9} = 0,425$ ✓

b) Izvlečeni bonbon je bele barve. Kolikšna je verjetnost dogodka B, da so na kocki padle manj kot tri pike? [3t] 3

$P(B) = P(B_2 | B_1) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}{0,575} = 0,386$ ✓

$P(B_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{17} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{18}{51} + \frac{2}{9} = 0,575$ je bel

$P(B_2) = \frac{1}{3}$

II. Iz prve vrečke zaporedoma izvlečemo štiri bonbone, brez vračanja nazaj v vrečko. Kolikšna je verjetnost dogodka C, da se bonboni barvno izmenjujejo? [3t] 3

$\frac{8}{17} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{7}{15} \cdot \frac{8}{14} +$ M B M B, B M B M

$P(C) = \frac{8}{17} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{7}{15} \cdot \frac{8}{14} + \frac{9}{17} \cdot \frac{8}{16} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{14} =$

$= 0,141$ ✓

3. Hkrati vržemo dve pošteni igralni kocki, modro in rdečo. Naj bodo dogodki:
A - vsota pik na kockah je manjša od 6
B - na modri kocki je padlo več pik kot na rdeči
C - zmnožek pik na obeh kockah je vsaj 20, če se število pik na kockah razlikuje za dve

a) Ali sta dogodka A in B neodvisna? Odgovor naj bo računsko utemeljen. [5t] 5

M	R
1	1
1	2
1	3
1	4
2	1
2	2
2	3
3	1
3	2
4	1

$P(A) = \frac{10}{6 \cdot 6} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ ✓

$P(B) = \frac{15}{6 \cdot 6} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ ✓

M	R
1	
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5

$P(A) \cdot P(B) = \frac{5}{18} \cdot \frac{5}{12} = \frac{25}{216} = 0,1157$

$P(A \cap B) = \frac{4}{36} = 0,1111$ ✓

Dogodka nista neodvisna. ✓

b) Izračunaj verjetnost dogodka C. [3t] 3

$1\ 6$
$2 \cdot 6$
$3 \cdot 6$
$4 \cdot 5$ $\quad 5 \cdot 4$
$4 \cdot 6$ $\quad 6 \cdot 4$
$5 \cdot 6$ $\quad 6 \cdot 5$
$5 \cdot 5$
$6 \cdot 6$

$$P(C) = P(C_1 | C_2) = \frac{P(C_1 \cap C_2)}{P(C_2)} = $$

$$= \frac{\frac{1}{18}}{\frac{2}{9}} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$P(C_1) = \frac{5}{36}$$

$$P(C_2) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} \qquad \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

1	3
2	4
3	5
4	6
5	3
6	4
4	2
3	1

4. Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = 1 + \ln(1 - \frac{1}{n})$.

a) Ali je število $\ln \frac{4e}{5}$ člen tega zaporedja? Odgovor naj bo računsko utemeljen. [4M] 4

$$a_n = 1 + \ln(1 - \frac{1}{n})$$

$$\ln \frac{4e}{5} = \ln 4e - \ln 5 = \ln 4 + \ln e - \ln 5 =$$
$$= 1 + \ln 4 - \ln 5 =$$
$$= 1 + \ln \frac{4}{5}$$

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{4}{5} \qquad n = 5$$
$$1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{n}$$
$$\frac{1}{5} = \frac{1}{n}$$

Da, pri $n=5$.

b) Dokaži, da je število $M = 1 + \ln 2$ zgornja meja danega zaporedja. [4M] 4

$$a_n - M = 1 + \ln(1 - \frac{1}{n}) - (1 + \ln 2) =$$
$$= 1 + \ln(\frac{n-1}{n}) - 1 - \ln 2 = \qquad \frac{2-1}{4}$$
$$= \ln(\frac{n-1}{n}) - \ln 2 = \ln\left(\frac{\frac{n-1}{n}}{\frac{2}{1}}\right) = \ln(\frac{n-1}{2n}) \qquad n \neq 1$$

$$\frac{n-1}{2n} < 1 \quad \text{za } \forall n \in \mathbb{N},\ n \neq 1$$

$\Rightarrow \ln(\frac{n-1}{2n}) < 0 \Rightarrow M > a_n \Rightarrow M$ je zgornja meja zaporedja.

5. S popolno indukcijo dokaži, da za vsako naravno število n velja: $6|(10^n+3\cdot 4^{n+2}+14)$.

[6t] 3

$$6|(10^n+3\cdot 4^{n+2}+14)$$

Dokaz s popolno indukcijo:

① $n=1$

$$6|(10+3\cdot 4^3+14)$$

$10+192+14=216=6\cdot 36$ Trditev velja za št. 1.

② $n \to n+1$

Predpostavljamo, da trditev velja za št. n.

$10^n+3\cdot 4^{n+2}+14=6k$ $\cancel{(/:k \quad \frac{10^n}{k}+\frac{3\cdot 4^{n+2}}{k}+\frac{14}{k}=6)}$

Dokazati želimo, da velja tudi za n+1:

$$10^{n+1}+3\cdot 4^{n+3}+14=6k'$$

deljivo s 6
ne spremeni deljivosti števila

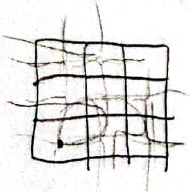
$$-4\cdot(10^n+3\cdot 4^{n+2}+14)$$

$$10^{n+1}+3\cdot 4^{n+3}+14=10^n\cdot 10+3\cdot 4^3\cdot 4^n+14=$$
$$=10\cdot 10^n+192\cdot 4^n+14=10\cdot 10^n+3\cdot 4^{n+2}+4+14=$$
$$=$$

Dokazali smo, da trditev velja za št. n+1.
Dokazali smo že, da velja za št. 1, torej velja za vsa naravna števila.

DODATNA NALOGA:
Robotek stoji na spodnjem levem polju šahovnice velikosti 3×3. Vsak njegov premik je naključen: z enako verjetnostjo se premakne vsakič za eno polje bodisi v desno ali pa navzgor. Na ta način lahko robotek zdrsne tudi čez rob šahovnice, s čimer je njegove poti seveda konec. Kolikšna je verjetnost, da robotku uspe priti na zgornje desno polje?

[3t] 0



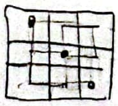
$\cancel{P(A)=\frac{8}{14}=0{,}571}$

$P^{2,2}_4=\frac{4!}{2!\,2!}=6$

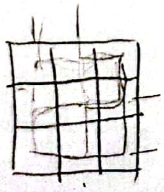
$P(A)=6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=0{,}575$

8 ||||||||||||

2 2



||||



$1\cdot 1\cdot \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot$

$1\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}$