Numerical Analysis homework # 1

梁育玮 3230102923 [*]

(数应 2302), Zhejiang University

Due time: 2024 年 9 月 11 日

I. The interval in bisection method

I-a

设第 n 步迭代之后的区间长度为 h_n, $h_0 = 2$
则 $h_{n+1} = \frac{1}{2}h_n$，所以 $h_n = \dfrac{1}{2^n}h_0 = \dfrac{1}{2^n}2 = \dfrac{1}{2^{n-1}}$
即第 n 步迭代之后的区间长度为 $\dfrac{1}{2^{n-1}}$。

I-b

设第 n 步迭代之后区间 $[a_n, b_n]$ 的中点为 c_n，则 $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$。
则 $|r - c_n| \leq \dfrac{b_n - a_n}{2} = \dfrac{h_n}{2} = \dfrac{1}{2^n}$

II. *reltative error* in bisection method

当迭代到第 n 步之后，区间长度 $h_{n+1} = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$,

$$E_{rel} = \frac{|r - c_n|}{|r|} \leq \frac{\dfrac{a_0 - b_0}{2^{n+1}}}{a_0} = \frac{a_0 - b_0}{2^{n+1}a}$$

当 $n \geq \dfrac{\log(b_0 - a_0) - \log\epsilon - \log a_0}{\log 2} - 1.$ 时，有 $E_{rel} \leq \epsilon$。

III. Newton's method for polynoial

$$p(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3 = 0$$

求导得

$$p'(x) = 12x^2 - 4x$$

[*]Electronic address: `liangyuwei631@gmail.com`

n	x_n	$p(x_n)$	$p'(x_n)$
0	-1	-3	16
1	-0.8125	-2.6816	9.8438
2	-0.5401	-0.7727	6.5685
3	-0.4224	-0.1319	5.1706
4	-0.3969		

IV. Newton's method in which only the derivative at x_0 is used

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)} \\
x_{n+1} - \alpha &= x_n - \alpha - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)} \\
x_{n+1} - \alpha &= (x_n - \alpha)\left(1 - \frac{f(x_n) - f(\alpha)}{f'(x_0)(x-\alpha)}\right) \\
e_{n+1} &= e_n\left(1 - \frac{f'(\xi_n)}{f'(x_0)}\right)
\end{aligned}
$$

其中 ξ_n 与 x_n 有关, 令 $s = 1, C = \left(1 - \frac{f'(\xi_n)}{f'(x_0)}\right)$ 即可

V. the iteration $x_{n+1} = \tan^{-1} x_n$

(i) 若 $x_1 = 0$，结论是显然的

(ii) 若 $x_1 \neq 0$，由归纳易知 $x_n \neq 0$

令

$$f(x) = \tan^{-1} x$$

则

$$|f'(x)| = \left|\frac{1}{1+x^2}\right| < 1$$

由压缩映射定理，数列 $\{x_n\}$ 收敛

VI. continued fraction

令 α 为方程 $x^2 + px - 1 = 0$ 大于 0 的解, 则有 $\alpha^2 + p\alpha - 1 = 0$

$$\alpha = \frac{-p + \sqrt{p^2+4}}{2}$$

注意到

$$x_{n+2} = \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p + x_n}} = \frac{p + x_n}{p^2 + px_n + 1}$$

$$
\begin{aligned}
x_{n+2}-\alpha &= \frac{p+x_n}{(p^2+px_n+1)}-\alpha \\
&= \frac{p+x_n-p^2\alpha-px_n\alpha-\alpha}{(p^2+px_n+1)} \\
&= \frac{p(1-p\alpha)+x_n-px_n\alpha-\alpha}{(p^2+px_n+1)} \\
&= \frac{p\alpha^2+x_n-px_n\alpha-\alpha}{(p^2+px_n+1)} \\
&= \frac{(x_n-\alpha)(1-p\alpha)}{(p^2+px_n+1)}
\end{aligned}
$$

其中 $1>1-p\alpha=\alpha^2>0$, 故 $|x_{n+2}-\alpha|<|x_n-\alpha|$
从而数列 $\{x_1,x_3,x_5,\dots\}$ 单调递减且有下界，故存在极限，设极限为 x(x>0)，则有

$$x=\frac{p+x}{p^2+px+1}$$

化简得

$$x^2+px-1=0$$

从而

$$x=\alpha$$

同理可证数列 $\{x_2,x_4,x_6,\dots\}$ 极限也为 α
综上可知数列 $\{x_n\}$ 的极限为 α

VII. $a_0<0<b_0$

此时相对误差不一定能得到一个很好的测量，若根 r 很接近 0 的话，相对误差会很大。极端情况 $r=0$, 相对误差不能得到一个很好的估计

VIII. Newton's method at a root of multipicity k

VIII-a

VIII-b

设 $f(x)=(x-\alpha)^k g(x)$
其中

$$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{(x-\alpha)^k} & \text{if } x\neq\alpha \\ \frac{f^{(k)}(\alpha)}{n!} & \text{if } x=\alpha\end{cases}$$

易知 $g(x)$ 连续，且

$$f'(x)=k(x-\alpha)^{k-1}g(x)+(x-\alpha)^k g'(x)$$

$$x_{n+1}=x_n-k\frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$
\begin{aligned}
&\implies x_{n+1}-\alpha=x_n-\alpha-k\frac{(x-\alpha)^k g(x)}{k(x-\alpha)^{k-1}g(x)+(x-\alpha)^k g'(x)} \\
&\implies \frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}=1-\frac{kg(x)}{kg(x)+(x-a)g'(x)} \\
&\implies \frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^2}=\frac{g'(x)}{kg(x)+(x-a)g'(x)}
\end{aligned}
$$