<u>שיטת מטעני הדמות – אור טליסמן</u>

נתחיל ברעיון. נניח שנתונה הבעיה הבאה –

$$\begin{cases} \ddot{x} = -4x \\ x(t=0) = 3 \\ \dot{x}(t=0) = 0 \end{cases}$$

(קפיץ שמתחיל את תנועתו ממצב מתוח)

יש לנו כאן משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר 2. ניתן להוכיח כי לבעיה זו תמיד יש פתרון יחיד המקיים גם את המשוואה וגם את תנאי ההתחלה.

לכן, אם נותנים לנו את הפתרון:

$$x(t) = 3\cos(2t)$$

נוכל לבדוק שהוא אכן מקיים את המשוואה הדיפרנציאלית (ע״י חישוב נגזרת שנייה והצבה במד״ר):

$$\ddot{x}(t) = 3 \cdot (-2 \cdot 2)\cos(2t) = -4 \cdot 3\cos(2t) = -4x(t)$$

וכי הוא מקיים גם את תנאי ההתחלה:

$$x(t=0) = 3\cos(0) = 3$$
$$\dot{x}(t=0) = -2 \cdot 3\sin(0) = 0$$

ולכן יכולנו להסיק כי הפתרון: $x(t) = 3\cos(2t)$, הוא הפתרון של הבעיה שלנו. הרי למשוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר שני יש תמיד פתרון יחיד. ואם הפתרון הזה מקיים את המשוואה ובנוסף את תנאי ההתחלה, אזי בהכרח הוא הפתרון של הבעיה שלנו.

מסתבר כי למשוואת לפלס תכונה דומה:

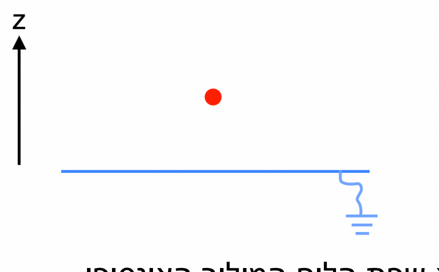
אם יש לנו שני פתרונות, שבנפח מסוים (סופי או אינסופי) מקיימים את משוואת לפלס. ובנוסף, גם על שפת הנפח מקיימים את תנאי השפה. אזי הם אותו הפתרון (קיים פתרון יחיד).

נשים לב כי בבעיה שלנו (מטעני הדמות) לא נצטרך לבדוק האם הפתרון שלנו מקיים את המשוואה בנפח שאנו רוצים, מכיוון שמלכתחילה כבר, מטענים ומולכים מקיימים אותה (הרי משוואת לפלס נגזרה מהתכונות של מטענים ומוליכים במרחב). לכן נצטרך לבדוק רק את קיום תנאי השפה.

אם נתונה בעיה שבה מחפשים פוטנציאל חשמלי של מערכת של מטענים ומוליכים (בעיה קשה), כל מה שאנחנו צריכים זה לבנות מערכת של מטענים נקודתיים (בעיה מאוד קלה), כך שתנאי השפה יהיו אותם תנאים. ומיחידות הפתרון של משוואת לפלס, נקבל בנפח המעניין אותנו את אותו הפוטנציאל בדיוק כמו שהיינו מקבלים אילו היינו פותרים את הבעיה המקורית הקשה, של המטענים והמוליכים.

הערה: בשיטה זו לא נוגעים במטענים הנקודתיים הנתונים.

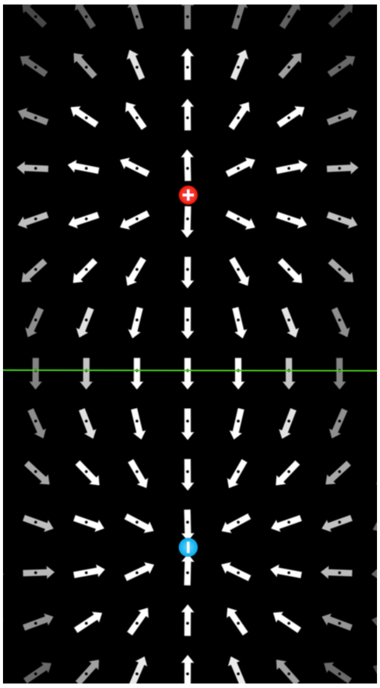
דוגמה: נתון מטען נקודתי q במרחק d מלוח מוליך אינסופי מוארך. מהו הפוטנציאל החשמלי ב $z > 0$?



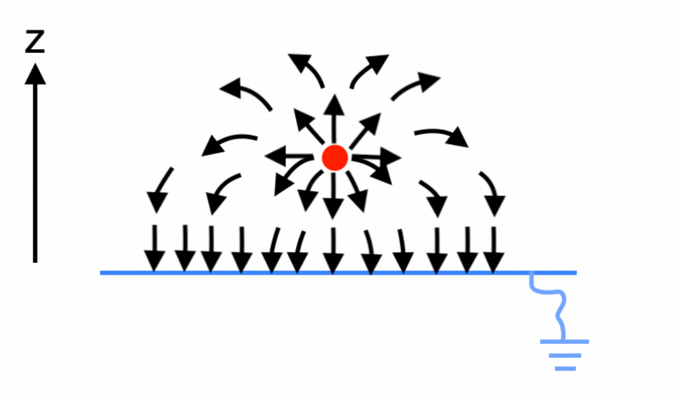
פתרון: כפי שהוסבר, נשתמש בתכונת היחידות של פתרון משוואת לפלס. אם נמצא סידור כלשהו של מטענים נקודתיים, שמקיים את תנאי השפה, אז הוא גם הפתרון המתאים לבעיה המקורית.

אנו מעוניינים לקבל פתרון בתחום $z > 0$, לכן שפת התחום היא שפת הלוח המוליך האינסופי. מכיוון *ששפת מוליך הוא משטח שווה פוטנציאל*, ומכיוון שהלוח מוארק, קיבלנו תנאי שפה – הפוטנציאל חייב להיות 0 במישור z=0.

ניתן לפתור זאת מידית, בכך שנשים לב שדיפול חשמלי (איור 2) מקיים את התכונה שיש בין המטענים מישור שווה פוטנציאל (ניתן לזהות משטח שווה פוטנציאל בכך שהשדה החשמלי מאונך לו – הוכחה בנספחים) ואם שניהם שווים אז הוא נמצא בדיוק באמצע ביניהם, וכך מתקיימים תנאי השפה של הבעיה המקורית. לכן הפוטנציאל של בעיית הדמות שלנו הוא גם פתרון הבעיה המקורית.



איור 2 - שדה של דיפול חשמלי

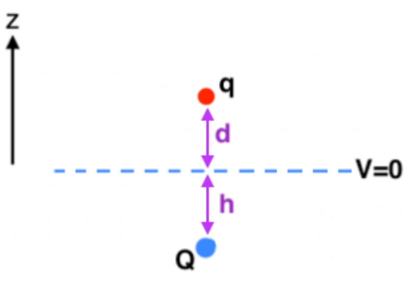


איור 1 - השדה בבעיה המקורית

נפתור בעזרת השיטה:

מההבנה הזאת, נמקם את מטען הדמות Q מתחת למטען הנקודתי המקורי ובמרחק h מהמישור z=0 (איור 3). חשוב לזכור כי במערכת החדשה שאנו בונים, המוליך לא קיים, ישנם ***רק*** מטענים נקודתיים.

כעת נרצה לדעת באיזה מרחק h ואיזה מטען Q נשתמש כדי ליצור אותו פוטנציאל על שפת התחום שלנו (z=0).



איור 3 - בניית המערכת עם מטען הדמות

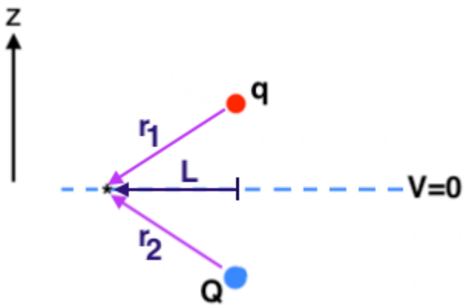
נסמן את ראשית הצירים בנקודה על הקו המחבר בין המטענים, בגובה בו הלוח המוליך היה אמור להיות (הפוטנציאל בה הוא 0). ונחשב בה את הפוטנציאל החשמלי:

$$\Phi(0,0,0) = \frac{kq}{d} + \frac{kQ}{h} = 0$$

ולכן קיבלנו את המשוואה הראשונה:

$$(*) \quad \frac{-qh}{d} = Q$$

כעת יש לנו משוואה אחת ושני נעלמים. לכן אנו צריכים למצוא משוואה נוספת המקשרת בין h ו- Q. ניקח נקודה נוספת על המשטח שווה הפוטנציאל שלנו (איור 4), נגיד במרחק L כלשהו מהראשית (לא משנה באיזה כיוון), ונקבל קשר נוסף בין הפרמטרים.



איור 4 - בחירת הנקודה השנייה

לכן:

$$\Phi(0, \mathrm{L}, 0) = \frac{kq}{r_1} + \frac{kQ}{r_2} = 0$$

וקיבלנו משוואה נוספת:

$$(**) \quad \frac{kq}{\sqrt{L^2 + d^2}} + \frac{kQ}{\sqrt{L^2 + h^2}}$$

מפתרון שתי המשוואות ניתן למצוא את הפרמטרים שחיפשנו:

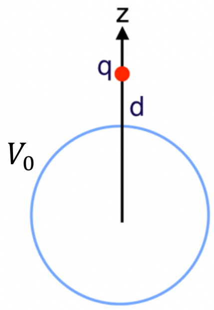
$$Q = -q, \qquad h = d$$

וזהו הפתרון.
ולכן זהו גם הפתרון של הבעיה המקורית בתחום $z > 0$:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{kq}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} + \frac{-kq}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}}$$

וסיימנו.

דוגמה: נתונה קליפה מוליכה ברדיוס R, שעל פנייה פוטנציאל V_0 (לא מוארקת). מהו הפוטנציאל החשמלי מחוץ לקליפה, אם מחוצה לה, במרחק d מפנייה נמצא מטען נקודתי q?



איור 5 - הבעיה

פתרון: נסמן מערכת צירים כך שהראשית נמצאת במרכז הקליפה, והמטען הנקודתי נמצא על ציר ה z (איור 5).

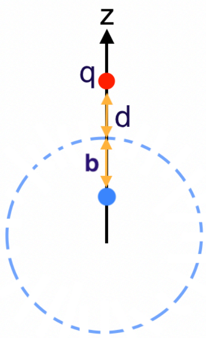
נשים לב כי גם כאן נוכל להשתמש בדיפול חשמלי.
נסי למצוא באיור 2 משטח שווה פוטנציאל (השדה ניצב לו), בצורת קליפה כדורית, סביב המטען השלילי.

בשיטת מטעני הדמות, אנו צריכים למצוא מערכת מטענים נקודתיים אשר יקיימו את תנאי השפה של הבעיה המקורית.
נזכור כי הפוטנציאל הוא לינארי. כלומר, נוכל לפרק את הפוטנציאל במרחב לרכיבים. במילים אחרות נוכל לפרק את הבעיה לשתי בעיות:

1) הרכבת מערכת מטענים נקודתיים אשר יתנו פוטנציאל אפס על הקליפה הכדורית. ניתן לחשוב על זה כעל בעיית קליפה מוארקת ומטען מחוצה לה.

2) הרכבת מערכת מטענים נקודתיים שתיתן פוטנציאל חשמלי V_0 על הקליפה הכדורית. נוכל פשוט להוסיף מטען נקודתי במרכז הקליפה (בלי המטען הנקודתי מהבעיה המקורית).

לבסוף נוכל לחבר את הפתרונות של 1,2 והפתרון שיתקבל יקיים את תנאי השפה, ולכן יהיה גם הפתרון של הבעיה המקורית, בתחום הרצוי.



איור 6 - בחירת נקודה ראשונה על השפה

נתחיל ב (1) נפתור את הבעיה תחת ההנחה ש $V_0 = 0$ (קליפה מוארקת). נשים מטען דמות Q בתוך הקליפה, על ציר z, במרחק b מהקליפה.

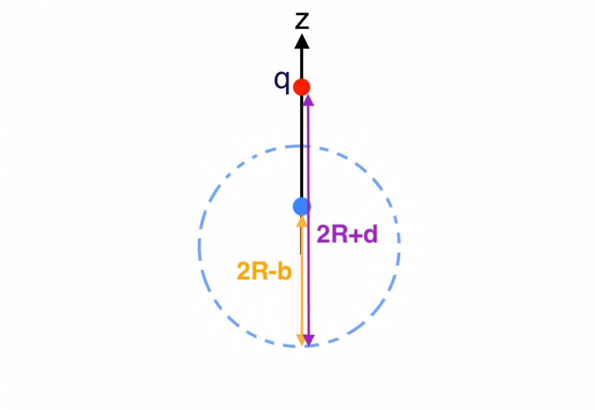
ומכיוון שיש לנו שני משתנים b, Q נצטרך שתי משוואות.
נבחר את הנקודות הכי קלות לחישוב (אלו שעל ציר z).
נשים לב לנקודה על ציר z הקרובה למטען q (איור 6).

$$\Phi(0,0,z=R) = \frac{kq}{d} + \frac{kQ}{b} = 0$$

לכן קיבלנו את המשוואה הראשונה:

$$(*) \quad \frac{-qb}{d} = Q$$

כעת נבחר את הנקודה השנייה. כדי להשאיר את החישוב קל, נבחר את הנקודה על המשטח שווה הפוטנציאל בנקודה הרחוקה יותר מהמטען q של ציר ה z (איור 7).



איור 7 - בחירת הנקודה השנייה

לכן נדרוש את התנאי:

$$\Phi(0,0,z=-R)=\frac{kq}{2R+d}+\frac{kQ}{2R-b}=0$$

ולכן נקבל את המשוואה השנייה:

$$(**)\ \ b=\frac{Rd}{R+d}$$

מפתרון שתי המשוואות ניתן למצוא את הפרמטרים שחיפשנו:

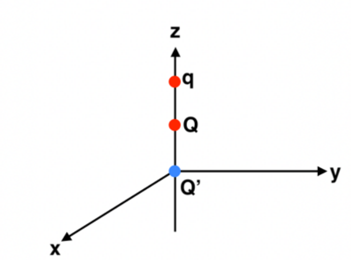
$$Q=-\frac{qR}{R+d}\qquad b=\frac{Rd}{R+d}$$

ולכן קיבלנו את הפוטנציאל עבור מערכת המטענים הנקודתיים שלנו:

$$\Phi_1(x,y,z)=\frac{kq}{\sqrt{x^2+y^2+(z-R-d)^2}}-\frac{R}{R+d}\cdot\frac{kq}{\sqrt{x^2+y^2+(z-R+b)^2}}$$

כעת נמשיך למערכת (2) בה נשים מטען נקודתי Q’ במרכז הקליפה ולכן על הקליפה יתקיים:

$$\Phi_2=\frac{kQ'}{R}$$



איור 8 - מערכת מטעני הדמות

ונדרוש כי על הקליפה יהיה פוטנציאל V_0, לכן נקבל כי:

$$\Phi_2=\frac{kQ'}{R}=V_0\rightarrow Q'=V_0\cdot\frac{R}{k}$$

ולכן מחוץ בתחום שמחוץ לקליפה, הפתרון הזה מוסיף:

$$\Phi_2(x,y,z)=\frac{kQ'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{V_0R}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

נשים לב שיחד, הפתרונות Φ_1,Φ_2 מקיימים את תנאי השפה על הקליפה (הראשון מוסיף אפס שם), ולכן יחד הם הפתרון גם לבעיה המקורית, בתחום שמחוץ לקליפה הכדורית:

$$\Phi(x,y,z)=\Phi_1+\Phi_2=$$
$$=\frac{kq}{\sqrt{x^2+y^2+(z-R-d)^2}}-\frac{R}{R+d}\cdot\frac{kq}{\sqrt{x^2+y^2+(z-R+b)^2}}+\frac{V_0R}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

וסיימנו.

<u>**נספחים**</u>

הוכחת המשפט ***קווי השדה ניצבים למשטחים שווי פוטנציאל***:

נתבונן במשטח שווה פוטנציאל כלשהו (לא משנה אם סופי, אינסופי, סגור או פתוח).
אם נתקרב לכל נקודה בו מספיק הוא יראה כמו מישור. לכן נקבע מערכת צירים קרטזית, כך שציר z ניצב למשטח (לא משנה אם יוצא או נכנס למשטח) ולכן המישור x-y מקביל למישור שווה הפוטנציאל.

נתבונן בקשר בין הפוטנציאל לשדה החשמלי:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{dV}{dx}\hat{x} - \frac{dV}{dy}\hat{y} - \frac{dV}{dz}\hat{z}$$

אנו מדברים על משטח שווה פוטנציאל, לכן אין שינויי בפוטנציאל בכיוון x וגם בכיוון y אין שינוי.

לכן:

$$\frac{dV}{dx} = 0 \;\; ; \quad \frac{dV}{dy} = 0$$

ולכן קיבלנו שדה הניצב למשטח:

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dz}\hat{z} = E\hat{z}$$

ובזאת הוכחנו את המשפט.