לירון כהן 207481268 יובל מור 209011543

# תרגיל מסכם - אותות ומערכות

## חלק א'

נתונה מערכת $LTI$ בעלת תגובה להלם:

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n-2]$$

### סעיף א'

המערכת **סיבתית**.

מערכת $LTI$ היא סיבתית אמ"מ התגובה להלם שלה היא פונקציה סיבתית כלומר:

$$\forall n < 0: h[n] = 0$$

נשים לב שמהגדרת מדרגה מתקיים:

$$\forall n < 0: u[n] = 0$$

$$\forall n < 2: u[n-2] = 0$$

ולכן נקבל:

$$\forall n < 0: h[n] = 0 + 0 = 0$$

כלומר המערכת סיבתית.

המערכת **יציבה** במובן $BIBO$.

מערכת $LTI$ יציבה $BIBO$ אמ"מ מתקיים:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

נחשב:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n-2]\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

כפי שראינו בתרגול, עבור $\frac{1}{2}, \frac{3}{4} < 1$ נקבל שהטורים מתכנסים לסכום סופי ולכן המערכת יציבה (ניתן לראות זאת גם ממפת קטבים ואפסים בסעיף ו', כיוון שכל הקטבים נמצאים בתוך מעגל היחידה).

המערכת **הפיכה**.

מערכת $LTI$ היא הפיכה אמ"מ קיימת מערכת הופכית $h_{inv}[n]$ המקיימת:

$$h[n] * h_{inv}[n] = \delta[n]$$

לחלופין, נדרוש שבמישור $Z$ יתקיים:

$$H(z) \cdot H_{inv}(z) = 1$$

נבצע התמרת $Z$ לתגובה להלם הנתונה. עבור הביטוי הראשון נקבל:

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2z}}$$

כאשר תחום ההתכנסות הוא $|z| > \frac{1}{2}$.

עבור הביטוי השני נחשב במפורש:

$$H_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n-2]\, z^{-n} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3}{4z}\right)^n = \frac{\left(\frac{3}{4z}\right)^2}{1 - \frac{3}{4z}}$$

כאשר תחום ההתכנסות הוא $|z| > \frac{3}{4}$.

ובסך הכל נקבל את התמרת $Z$ של התגובה הנתונה:

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2z}} + \frac{\left(\frac{3}{4z}\right)^2}{1 - \frac{3}{4z}} = \frac{1 - \frac{3}{4z} + \frac{9}{16z^2} - \frac{9}{32z^3}}{\left(1 - \frac{1}{2z}\right)\left(1 - \frac{3}{4z}\right)} = \frac{1 - \frac{3}{4z} + \frac{9}{16z^2} - \frac{9}{32z^3}}{1 - \frac{3}{4z} - \frac{1}{2z} + \frac{3}{8z^2}}$$

$$H(z) = \frac{32z^3 - 24z^2 + 18z - 9}{32z^3 - 40z^2 + 12z}$$

כאשר תחום ההתכנסות הוא $|z| > \frac{1}{2}$ וגם $|z| > \frac{3}{4}$ כלומר $|z| > \frac{3}{4}$.

מכאן, קיימת מערכת הופכית שתגובתה להלם היא $\frac{1}{H(z)}$ ולכן המערכת הפיכה, נוודא שהמערכת ההופכית יציבה (וכך נוכיח שהמערכת הפיכה פיזיקלית ולא רק מתמטית):

$$\frac{1}{H(z)} = \frac{32z^3 - 40z^2 + 12z}{32z^3 - 24z^2 + 18z - 9}$$

נשים לב שקטבי המערכת ההופכית הינם $\{0.076 \pm 0.682i, 0.597\}$ ומכיוון שכולם נמצאים בתוך מעגל היחידה (כפי שניתן לראות במפת הקטבים והאפסים בסעיף ו') המערכת ההופכית יציבה ולכן המערכת הפיכה.

<u>סעיף ב'</u>

כפי שחישבנו בסעיף א', פונקציית התמסורת של המערכת היא התמרת $Z$ של התגובה להלם, ולכן נקבל:

$$H(z) = \frac{32z^3 - 24z^2 + 18z - 9}{32z^3 - 40z^2 + 12z}$$

סעיף ג'

מהגדרת פונקציית התמסורת נקבל:

$$H(z) = \frac{1 - \frac{3}{4z} + \frac{9}{16z^2} - \frac{9}{32z^3}}{1 - \frac{3}{4z} - \frac{1}{2z} + \frac{3}{8z^2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

ומכאן:

$$Y(z)\left(1 - \frac{3}{4z} - \frac{1}{2z} + \frac{3}{8z^2}\right) = X(z)\left(1 - \frac{3}{4z} + \frac{9}{16z^2} - \frac{9}{32z^3}\right)$$

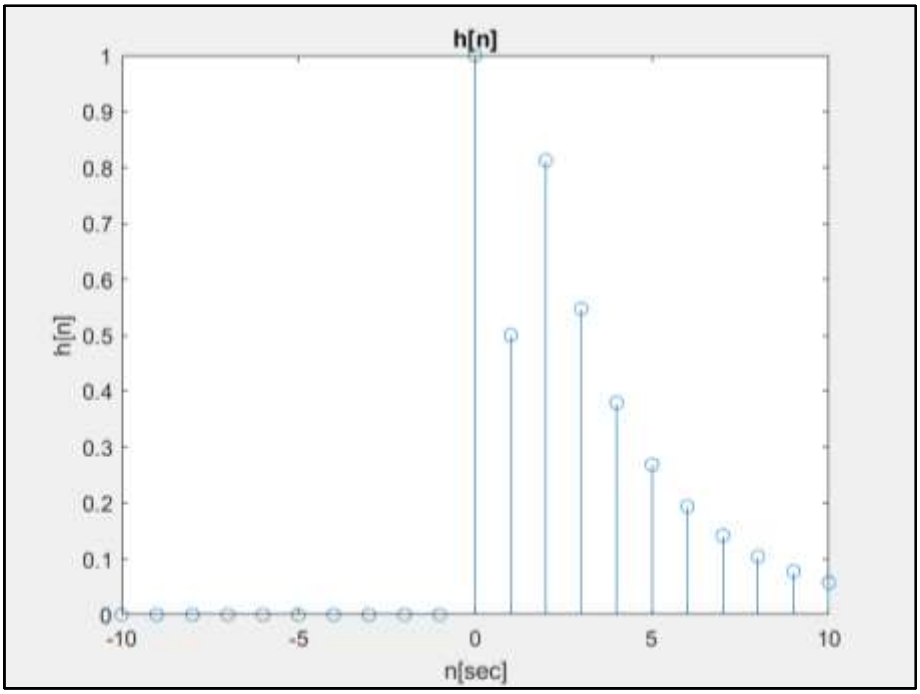
נבצע התמרת $Z$ הפוכה ונקבל:

$$y[n] - \frac{5}{4}y[n-1] + \frac{3}{8}y[n-2] = x[n] - \frac{3}{4}x[n-1] + \frac{9}{16}x[n-2] - \frac{9}{32}x[n-3]$$

כלומר משוואת ההפרשים תהיה:

$$y[n] = x[n] - \frac{3}{4}x[n-1] + \frac{9}{16}x[n-2] - \frac{9}{32}x[n-3] + \frac{5}{4}y[n-1] - \frac{3}{8}y[n-2]$$

סעיף ד'



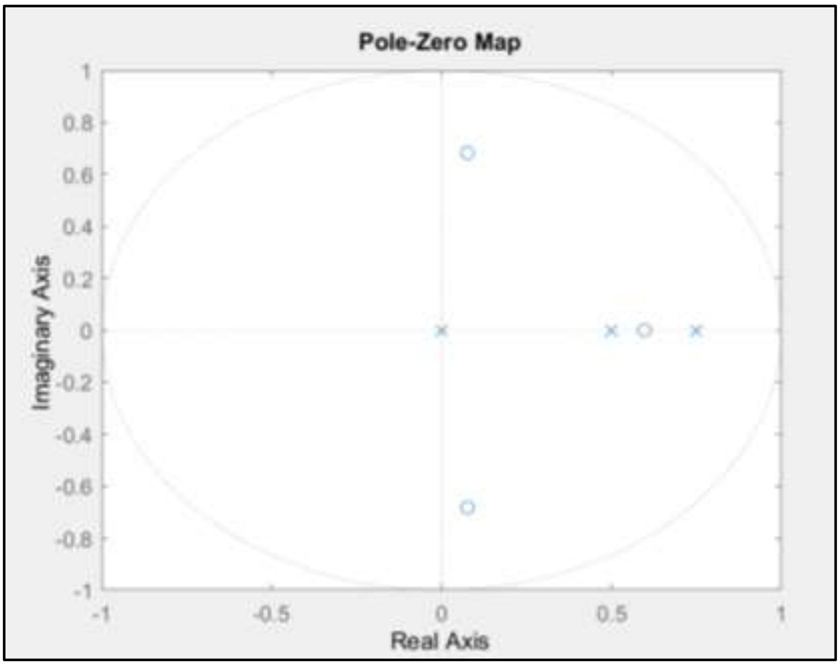

סעיף ה'

בחישוב באמצעות הפונקציה $ztrans$ של $Matlab$ התקבלה פונקציית התמסורת הבאה:

$$H(z) = \frac{32z^3 - 24z^2 + 18z - 9}{4z(2z-1)(4z-3)} = \frac{32z^3 - 24z^2 + 18z - 9}{32z^3 - 40z^2 + 12z}$$

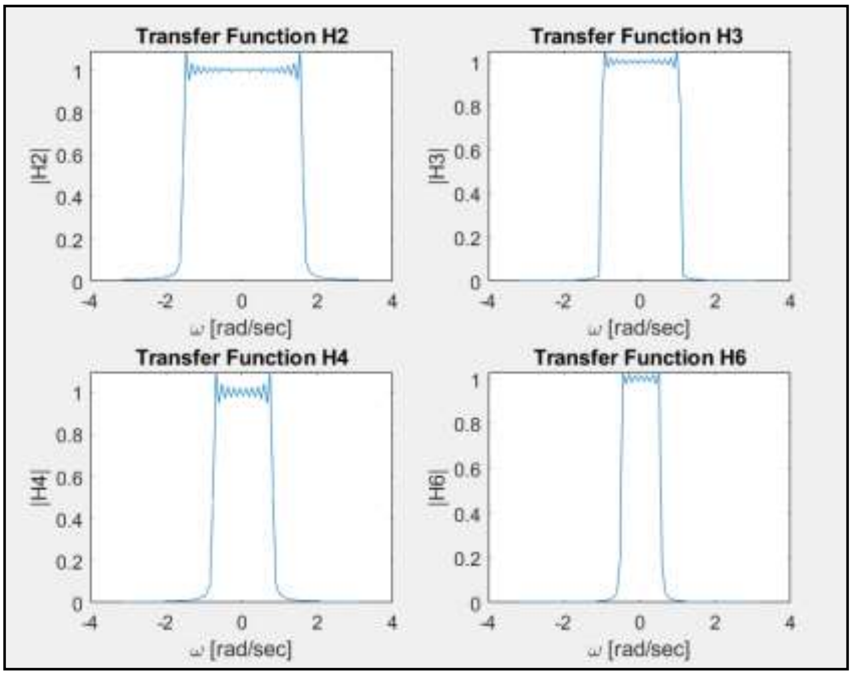
כפי שניתן לראות, התוצאה זהה לחישוב האנליטי שהתבצע בסעיף ב'.

סעיף ו'




**חלק ב'**

סעיף א'



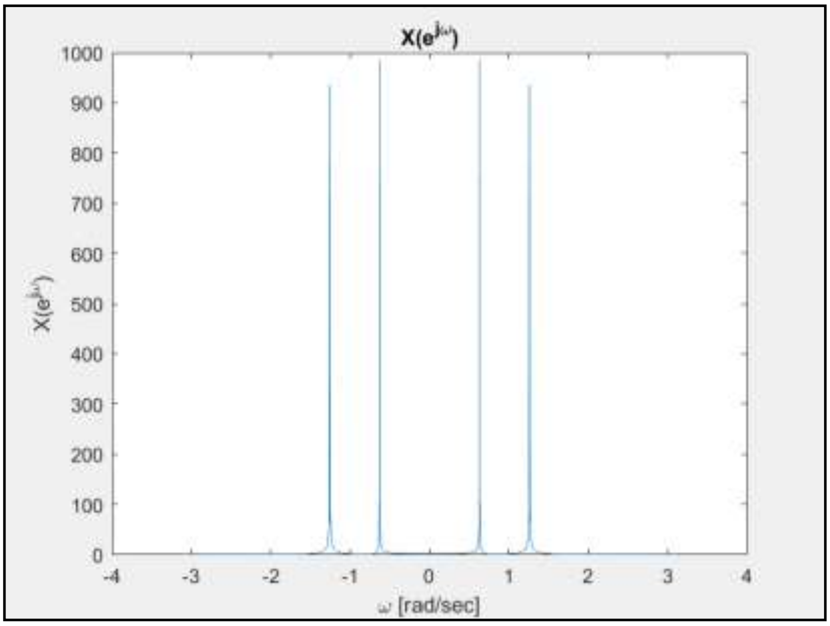

סעיף ב'

עבור:

$$x[n] = 2\cos\left(\frac{3\pi}{10}n\right)\cos\left(\frac{\pi}{10}n\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)$$

נחשב את $X(e^{j\omega})$ באמצעות לינאריות של נוסחאות ידועות להתמרות $DTFT$ מדף הנוסחאות:

$$X(e^{j\omega}) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{5} - 2\pi k\right) + \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{5} - 2\pi k\right) + \delta\left(\omega - \frac{\pi}{5} - 2\pi k\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{5} - 2\pi k\right)$$




<u>סעיף ג'</u>

כפי שראינו בכיתה, אות המוצא יהיה קונבולוציה של אות הכניסה עם התגובה להלם של המסנן.

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

ובמישור התדר נקבל כפל בין התמרת אות הכניסה לפונקציית התמסורת של המסנן.

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$

ומתקיים:

$$X(e^{j\omega}) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{5} - 2\pi k\right) + \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{5} - 2\pi k\right) + \delta\left(\omega - \frac{\pi}{5} - 2\pi k\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{5} - 2\pi k\right)$$

נזכור שמדובר במסנני $LPF$ עם תדרי קטעון שונים, ובהנחה שהמסנן אידיאלי נקבל עבור **המסנן $h_2$**:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & else \end{cases}$$

כל נקודות ההלם עבור $k = 0$ בסכימה נמצאות בתחום בו $H(e^{j\omega}) = 1$ ולכן:

$$Y(e^{j\omega}) = \pi\left(1 \cdot \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{5}\right) - 1 \cdot \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{5}\right) + 1 \cdot \delta\left(\omega - \frac{\pi}{5}\right) - 1 \cdot \delta\left(\omega + \frac{\pi}{5}\right)\right)$$
$$= \pi\left(\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{5}\right) - \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{5}\right) + \delta\left(\omega - \frac{\pi}{5}\right) - \delta\left(\omega + \frac{\pi}{5}\right)\right)$$

ומכאן:

$$y_2[n] = x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{5} n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5} n\right)$$

עבור **המסנן** $\boldsymbol{h_3}$:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \frac{\pi}{3} \\ 0 & else \end{cases}$$

נקודות ההלם שנמצאות בתחום בו $H(e^{j\omega}) = 1$ הן $\pm\frac{\pi}{5}$ ולכן שתי המכפלות עם פונקציות ההלם הראשונות מתאפסות.

$$Y(e^{j\omega}) = \pi\left(0\cdot\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{5}\right)-0\cdot\delta\left(\omega+\frac{2\pi}{5}\right)+1\cdot\delta\left(\omega-\frac{\pi}{5}\right)-1\cdot\delta\left(\omega+\frac{\pi}{5}\right)\right)$$

$$= \pi\left(1\cdot\delta\left(\omega-\frac{\pi}{5}\right)-1\cdot\delta\left(\omega+\frac{\pi}{5}\right)\right) = \pi\left(\delta\left(\omega-\frac{\pi}{5}\right)-\delta\left(\omega+\frac{\pi}{5}\right)\right)$$

ומכאן:

$$y_3[n] = \cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)$$

עבור **המסנן** $\boldsymbol{h_4}$:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \frac{\pi}{4} \\ 0 & else \end{cases}$$

נקודות ההלם שנמצאות בתחום בו $H(e^{j\omega}) = 1$ הן $\pm\frac{\pi}{5}$ ולכן שתי המכפלות עם פונקציות ההלם הראשונות מתאפסות.

$$Y(e^{j\omega}) = \pi\left(0\cdot\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{5}\right)-0\cdot\delta\left(\omega+\frac{2\pi}{5}\right)+1\cdot\delta\left(\omega-\frac{\pi}{5}\right)-1\cdot\delta\left(\omega+\frac{\pi}{5}\right)\right)$$

$$= \pi\left(1\cdot\delta\left(\omega-\frac{\pi}{5}\right)-1\cdot\delta\left(\omega+\frac{\pi}{5}\right)\right) = \pi\left(\delta\left(\omega-\frac{\pi}{5}\right)-\delta\left(\omega+\frac{\pi}{5}\right)\right)$$

ומכאן:

$$y_4[n] = \cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)$$

עבור **המסנן** $\boldsymbol{h_6}$:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \frac{\pi}{6} \\ 0 & else \end{cases}$$

כל נקודות ההלם נמצאות בתחום בו $H(e^{j\omega}) = 0$ הן $\pm\frac{\pi}{5}$ ולכן כל המכפלות עם פונקציות ההלם מתאפסות.

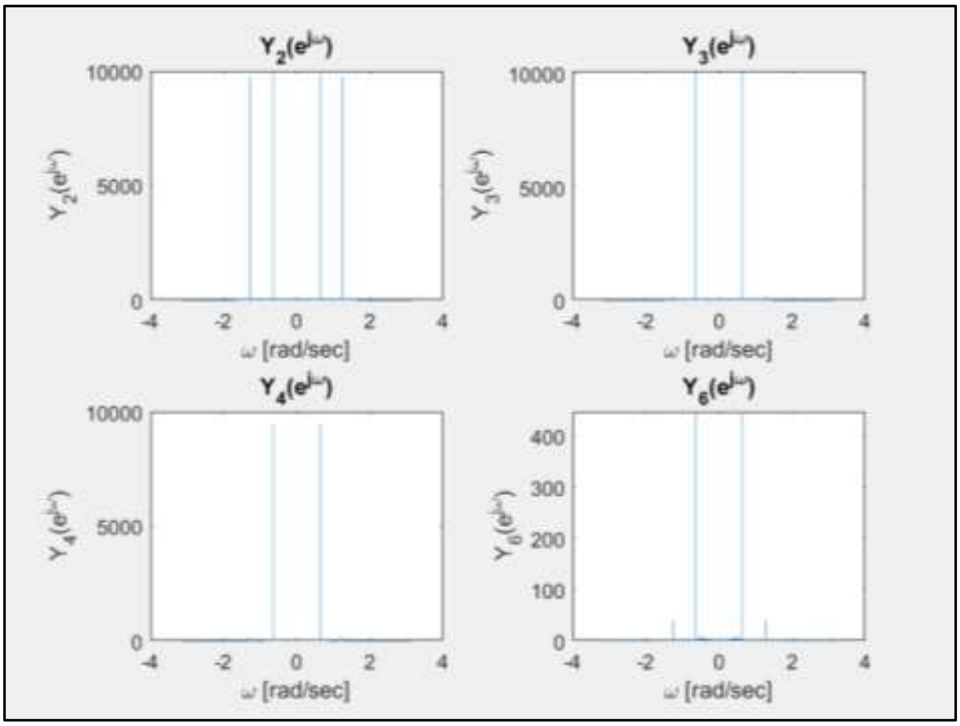
$$Y(e^{j\omega}) = \pi\left(0\cdot\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{5}\right)-0\cdot\delta\left(\omega+\frac{2\pi}{5}\right)+0\cdot\delta\left(\omega-\frac{\pi}{5}\right)-0\cdot\delta\left(\omega+\frac{\pi}{5}\right)\right)$$

$$Y(e^{j\omega}) = 0$$

ומכאן:

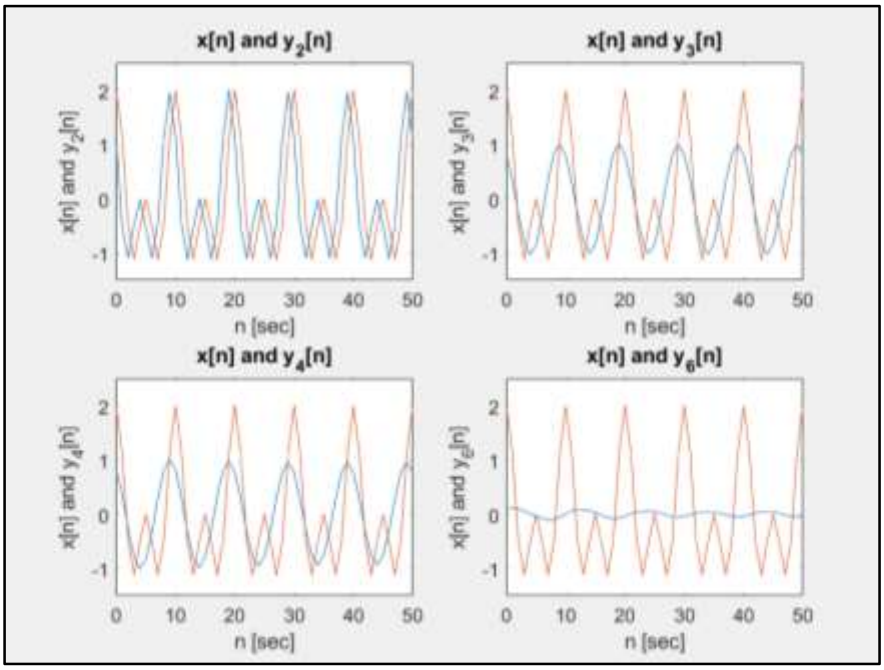
$$y_6[n] = 0$$

סעיף ד'




ניתן לראות שעבור המסננים $h2, h3, h4$ התקבלו כצפוי הלמים בתדרים שהתקבלו בסעיף הקודם. תיאורטית, ספקטרום המוצא עבור המסנן $h_6$ היה צריך להתקבל כאפס, אך כפי שראינו מהספקטרום המסנן אינו אידיאלי ולכן התקבל מוצא שתגובת התדר שלו שונה מאפס. נשים לב שגובה ההלמים עבור מסנן זה קטן משמעותית מגובה ההלמים במסננים האחרים ולכן באופן יחסי לאחרים הוא אפסי.

סעיף ה'




נציין כי הגרפים הכתומים הם אות הכניסה $x[n]$ והגרפים הכחולים הם אותות המוצא $y_i[n]$.

עבור המסנן $h_2$, קיבלנו כצפוי אות מוצא זהה לאות הכניסה (עד כדי הסטה שנובעת מכך שהאות של המסנן לא ממורכז לזמן אפס).

עבור המסננים $h_3, h_4$, קיבלנו אות בעל אמפליטודה קטנה יותר, אך עדיין קרובה לאמפליטודה של אות הכניסה, דבר הנובע ככל הנראה מחוסר אידיאליות של המסננים.

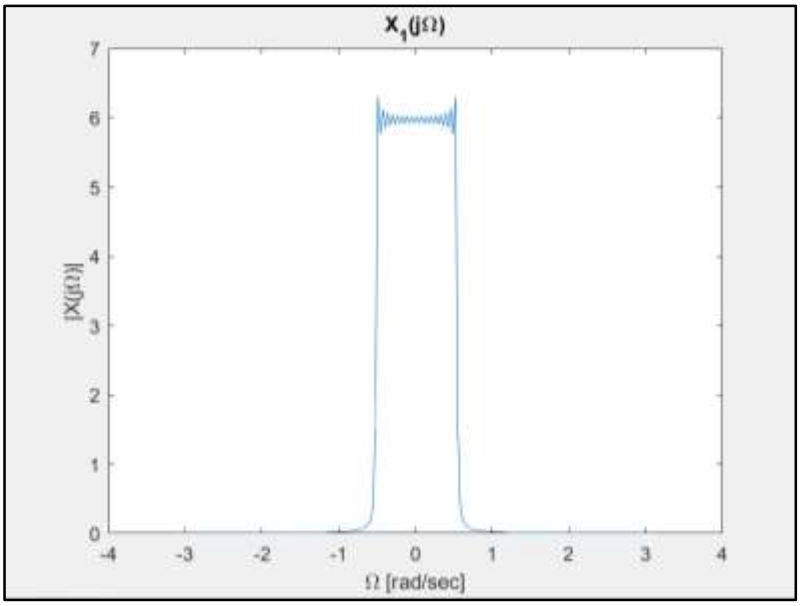
עבור המסנן $h_6$, כאמור, עקב חוסר אידיאליות קיבלנו אות עם אמפליטודה שונה מאפס (הנחתה ולא איפוס מוחלט), אך עדיין קטנה משמעותית מאמפליטודת אות הכניסה.

## **<u>חלק ג'</u>**

<u>סעיף א'</u>

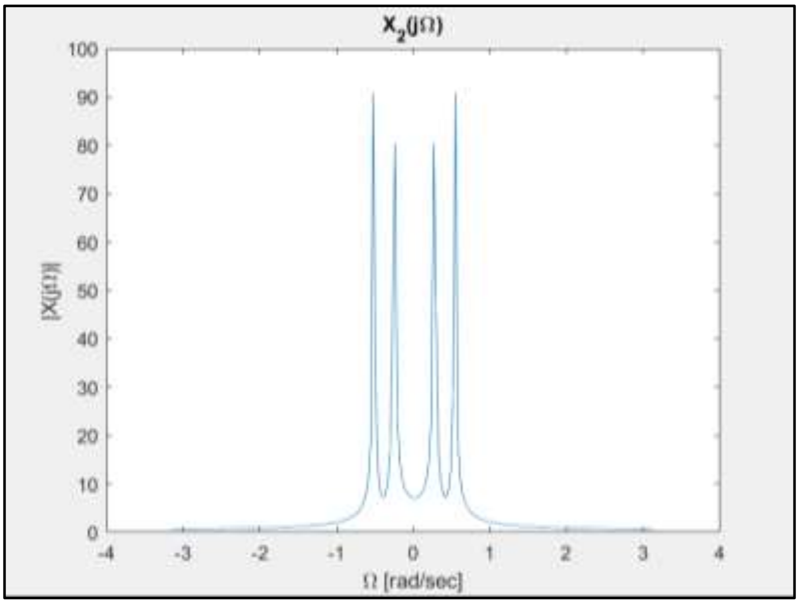
עבור האות $x_1(t) = sinc\left(\frac{t}{6}\right) = 6 \cdot \frac{1}{6} sinc\left(\frac{t}{6}\right)$ נקבל מתוך התמרה ידועה מדף הנוסחאות:

$$X_1(j\Omega) = \begin{cases} 6 & |\Omega| < \frac{\pi}{6} \\ 0 & |\Omega| \geq \frac{\pi}{6} \end{cases}$$




עבור האות $x_2(t) = \cos\left(\frac{\pi}{12} t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} t\right)$ נקבל מתוך התמרות ידועות מדף הנוסחאות:

$$X_2(j\Omega) = \pi \left[\delta\left(\Omega - \frac{\pi}{12}\right) + \delta\left(\Omega + \frac{\pi}{12}\right)\right] + \frac{\pi}{j}\left[\delta\left(\Omega - \frac{\pi}{6}\right) - \delta\left(\Omega + \frac{\pi}{6}\right)\right]$$




נציין כי התקבל עיוות בתחתית התרשים עקב מגבלה של $Matlab$ בנוגע לעיגול של $\pi$, אך ניתן לראות שמלבד עיוות זה התקבלו ארבעה הלמים בתדרים המתאימים.

<u>סעיף ב'</u>

עבור האות $X_1(j\Omega)$ וגם עבור האות $X_2(j\Omega)$, מתקיים $\Omega_M = \frac{\pi}{6}$. נדרוש תדר דגימה מינימלי העומד

בתנאי נייקוויסט, כלומר:

$$\Omega_{min} = 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

ולכן:

$$\frac{2\pi}{T_{max}} = \frac{\pi}{3}$$

ומכאן:

$$T_{max} = 6\ [sec]$$

(נציין שעבור האות הראשון $T_{max} = 6[sec]$ עצמו עומד בתנאי נייקוויסט ועבור האות השני לא).

<u>סעיף ג'</u>

נבחר קצב דגימה של $T = 2[sec] < 6[sec]$.

כפי שראינו בכיתה, האות הדגום עבור האות הנתון הראשון יהיה:

$$x_1[n] = x_1(2n) = sinc\left(\frac{2n}{6}\right) = sinc\left(\frac{n}{3}\right)$$

ולפי השלבים שראינו בתרגול, הספקטרום $X_1(e^{j\omega})$ יהיה:

$$X_1(j\Omega) = \begin{cases} \frac{6}{2} & \left|\frac{\omega}{2}\right| < \frac{\pi}{6} \\ 0 & \left|\frac{\omega}{2}\right| \geq \frac{\pi}{6} \end{cases} = \begin{cases} 3 & |\omega| < \frac{\pi}{3} \\ 0 & |\omega| \geq \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

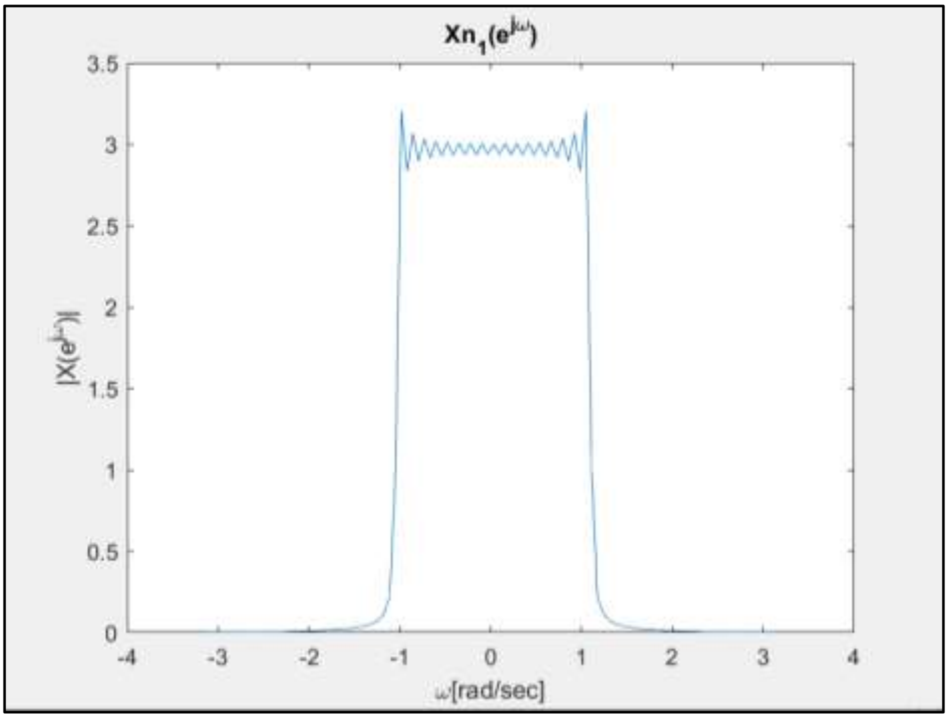
האות הדגום עבור האות הנתון השני יהיה:

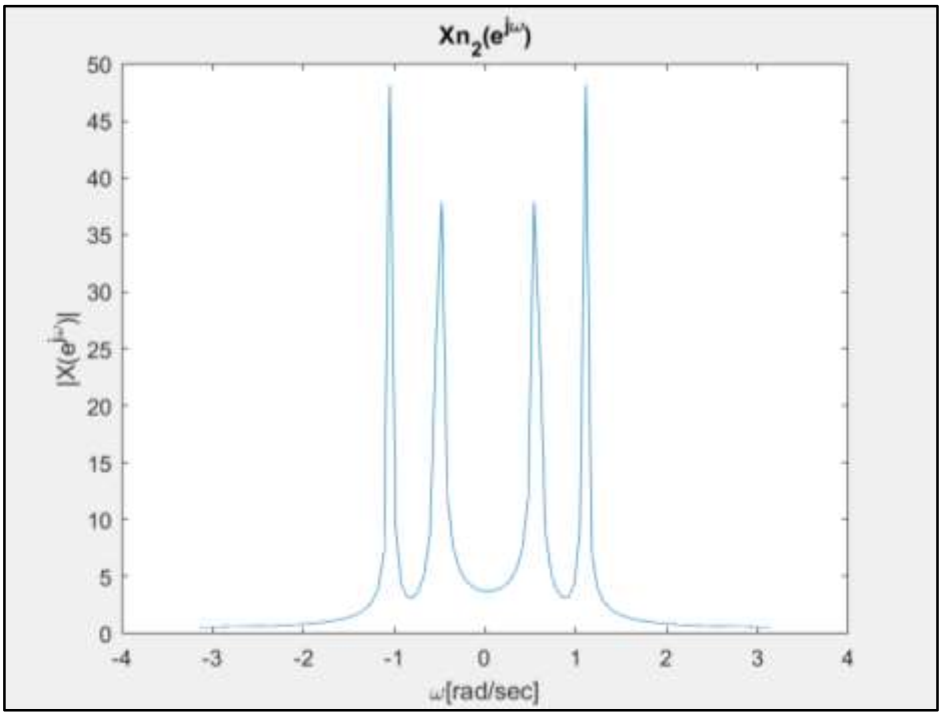
$$x_2[n] = x_2(2n) = \cos\left(\frac{\pi}{6}n\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)$$

והספקטרום $X_2(e^{j\omega})$ יהיה:

$$X_2(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\left[\delta\left(\omega - \frac{\pi}{6} - 2\pi k\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{6} - 2\pi k\right)\right] + \frac{\pi}{j}\left[\delta\left(\omega - \frac{\pi}{3} - 2\pi k\right) - \delta\left(\omega + \frac{\pi}{3} - 2\pi k\right)\right]$$

<u>סעיף ד'</u>

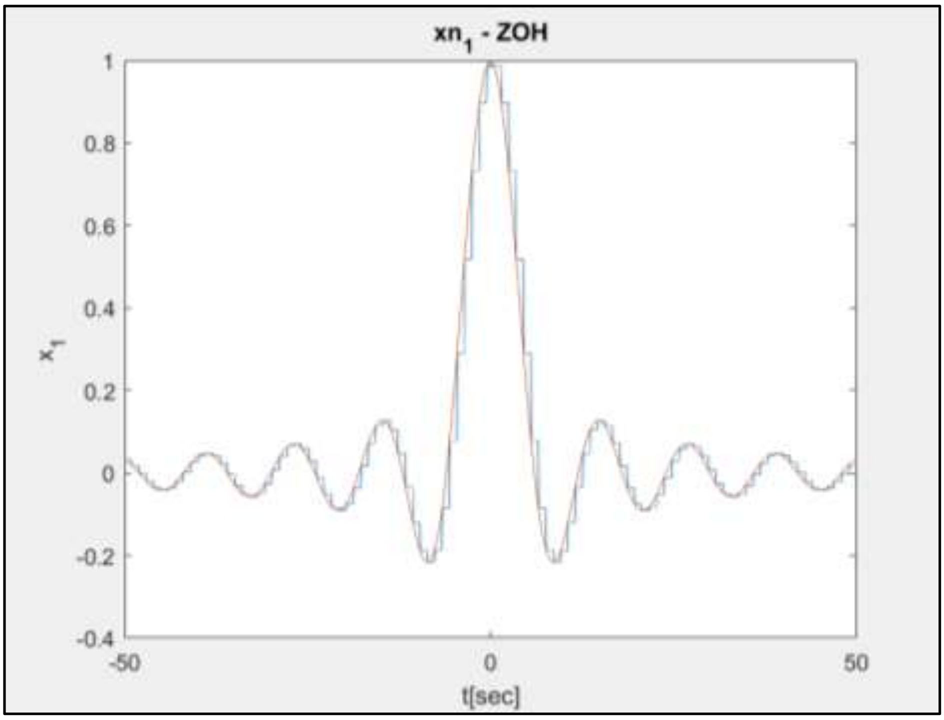


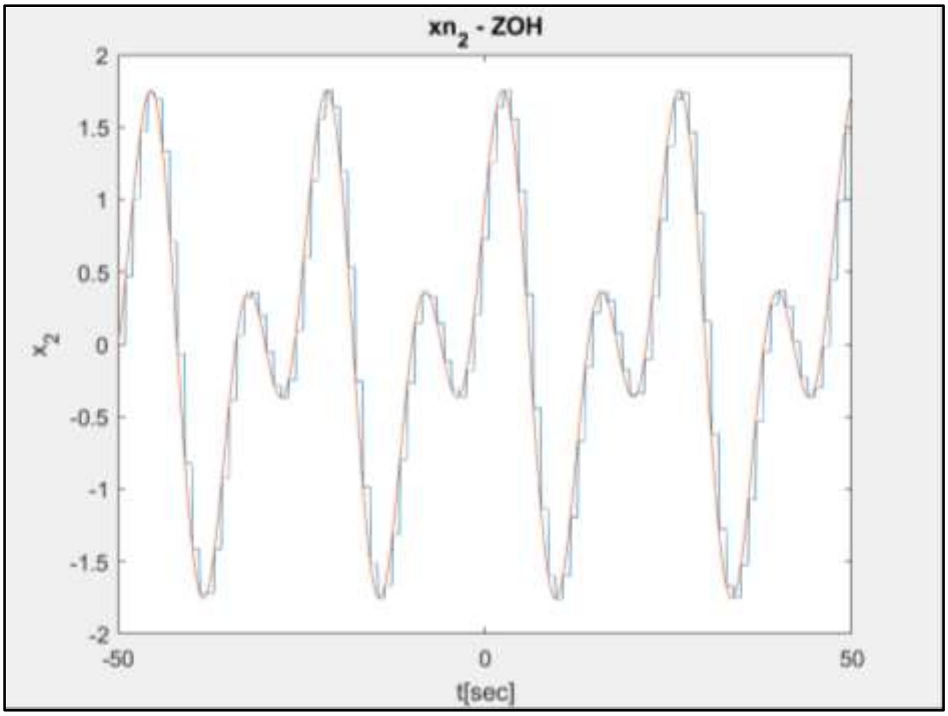



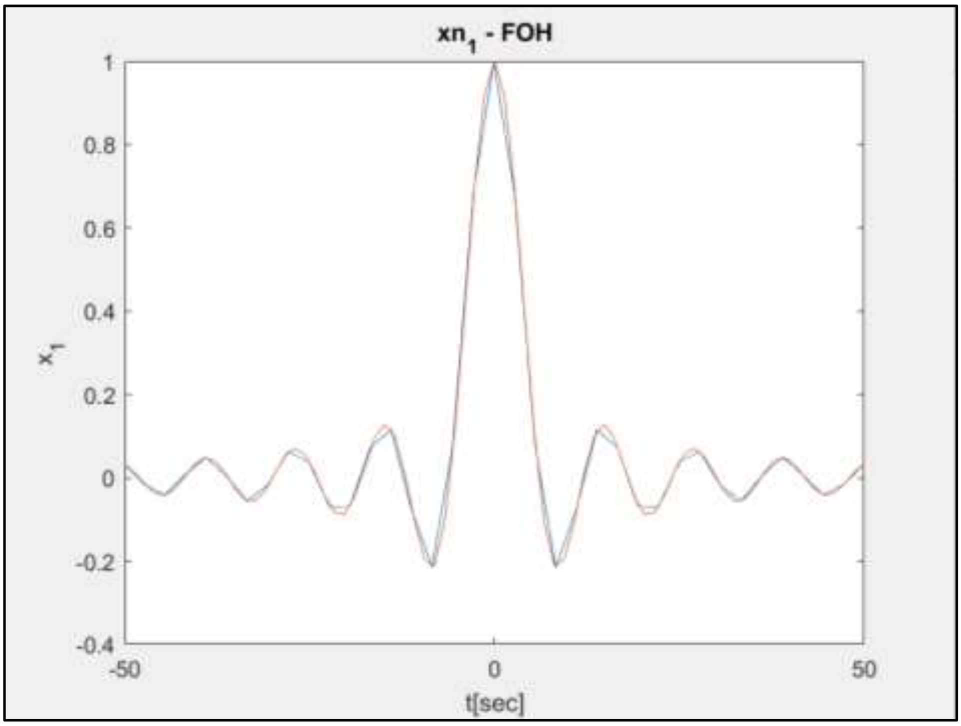
## סעיף ה'

בדומה לשחזורים שהתבצעו בהרצאה ע"י ד"ר זיו, התקבלו השחזורים הבאים.

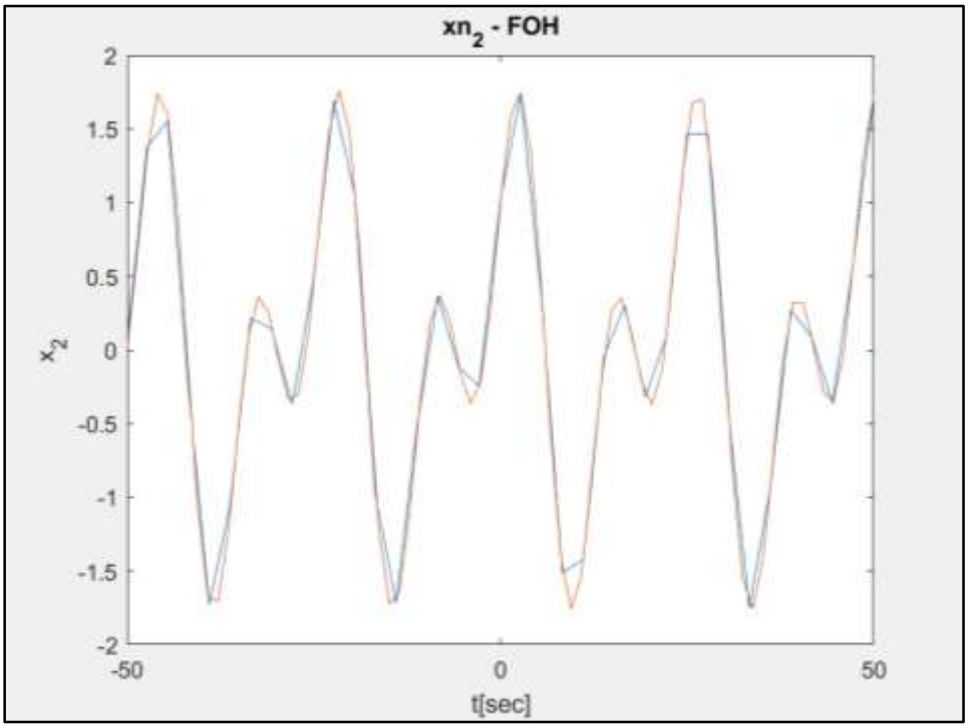
נציין כי הגרפים הכתומים הם האות המקורי והגרפים הכחולים הם השחזורים שביצענו.



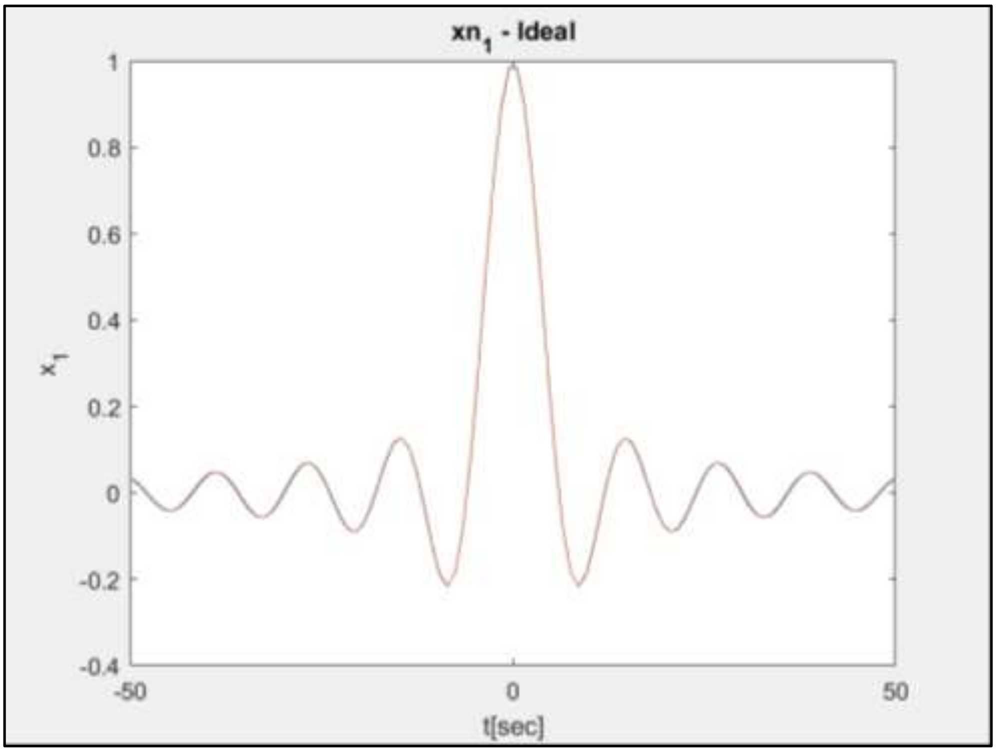



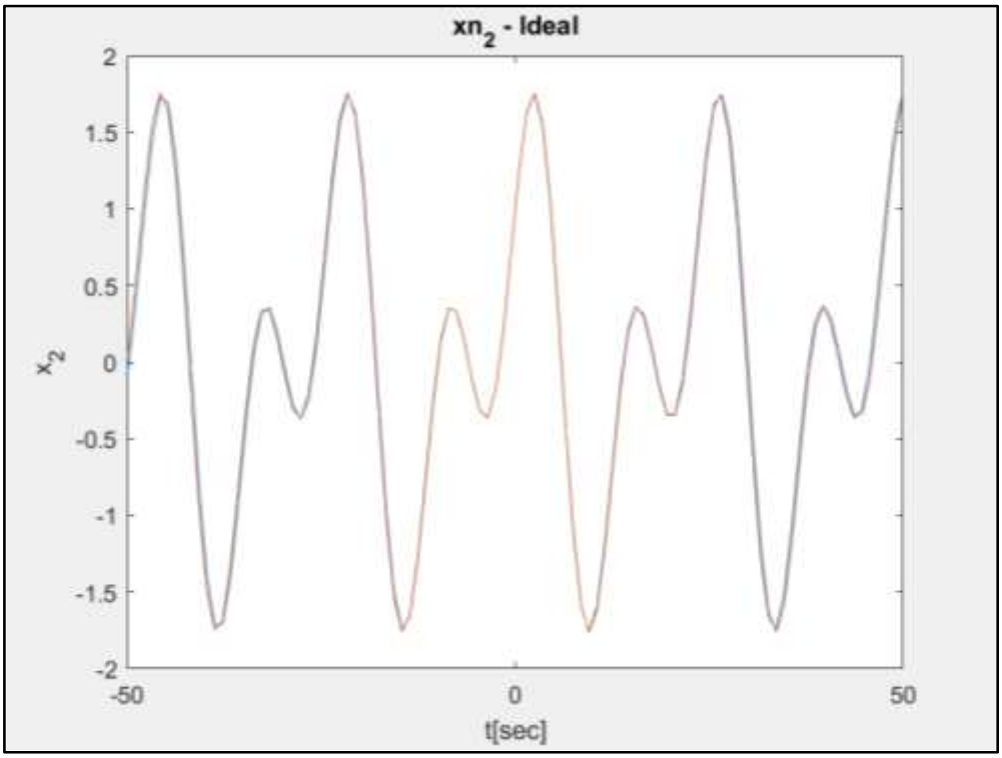


xn$_1$ - FOH
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
x$_1$
-50
0
50
t[sec]

xn$_2$ - FOH
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
x$_2$
-50
0
50
t[sec]




<u>סעיף ו'</u>

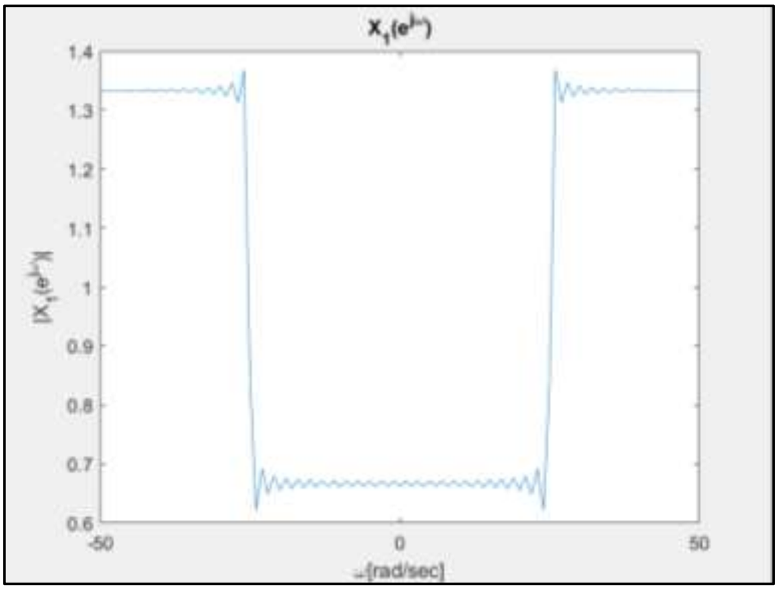
נבחר קצב דגימה של $T = 9[sec] = 1.5 \cdot 6[sec]$.

כפי שראינו בכיתה, האות הדגום עבור האות הנתון הראשון יהיה:

$$x_1[n] = x_1(9n) = sinc\left(\frac{9n}{6}\right) = sinc\left(\frac{3}{2}n\right)$$

והספקטרום $X_1(e^{j\omega})$ יהיה:

$$X_1(j\Omega)=\begin{cases}\frac{6}{9} & \left|\frac{\omega}{9}\right|<\frac{\pi}{6}\\ 0 & \left|\frac{\omega}{9}\right|\geq\frac{\pi}{6}\end{cases}=\begin{cases}\frac{2}{3} & |\omega|<\frac{3\pi}{2}\\ 0 & |\omega|\geq\frac{3\pi}{2}\end{cases}$$

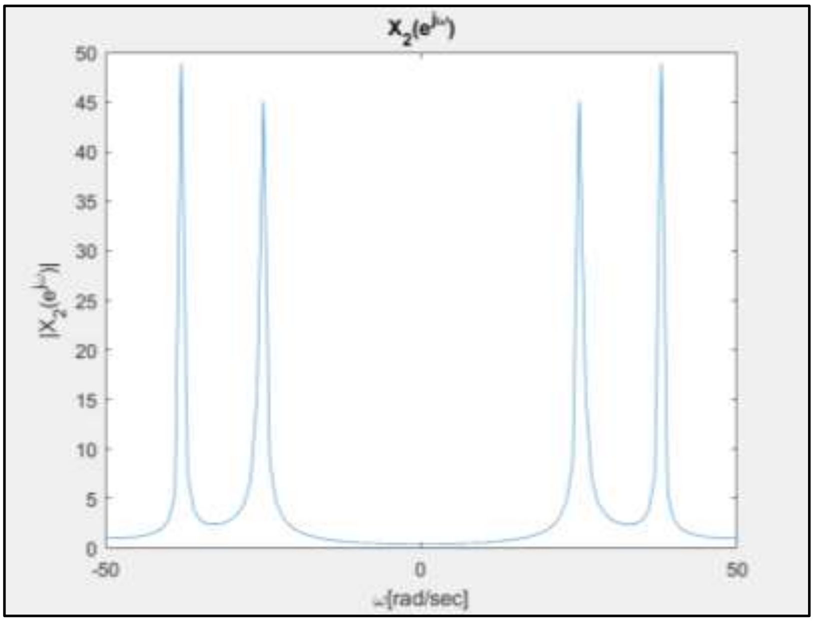


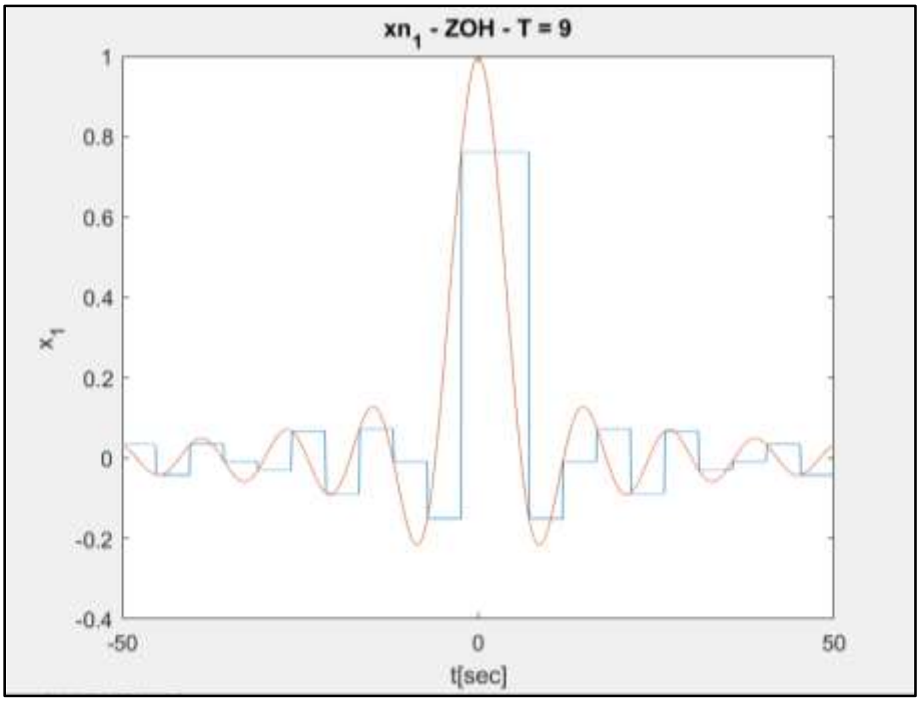

האות הדגום עבור האות הנתון השני יהיה:

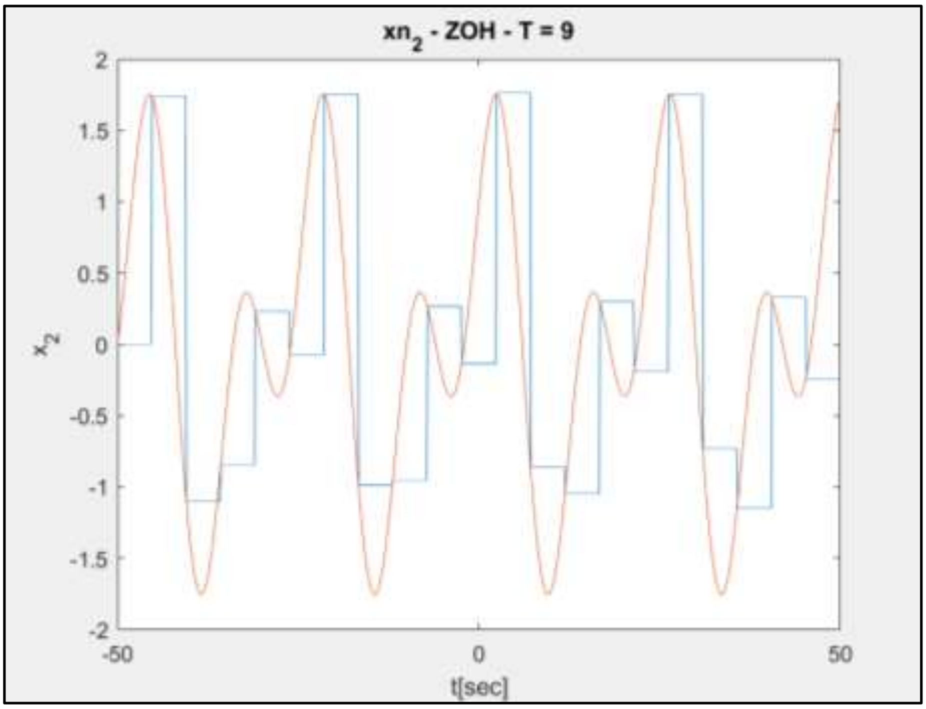
$$x_2[n]=x_2(9n)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}n\right)$$

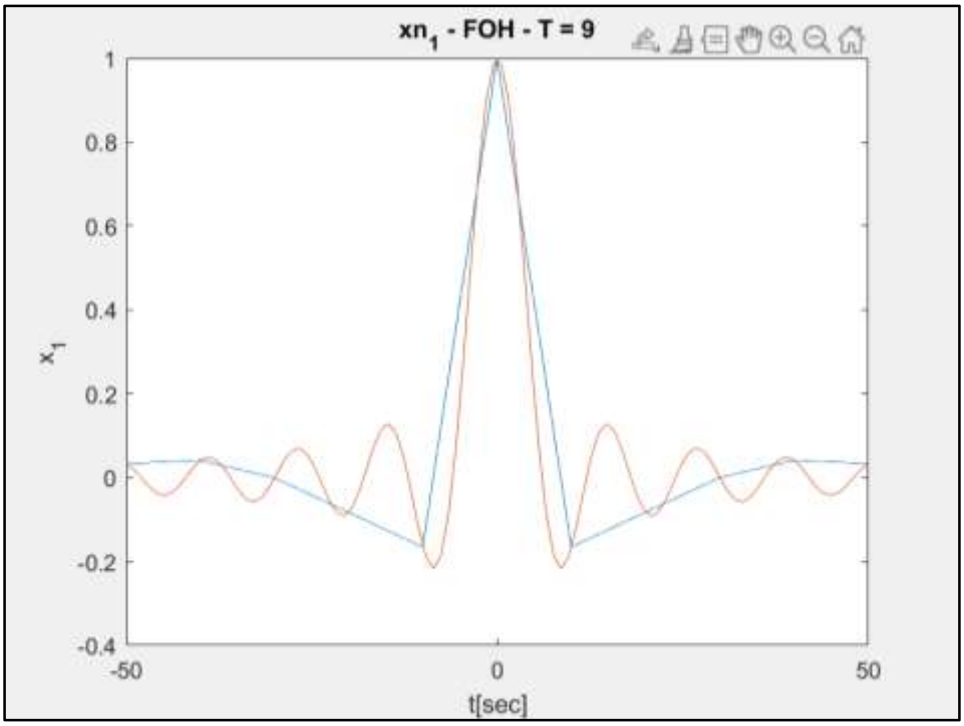
והספקטרום $X_2(e^{j\omega})$ יהיה:

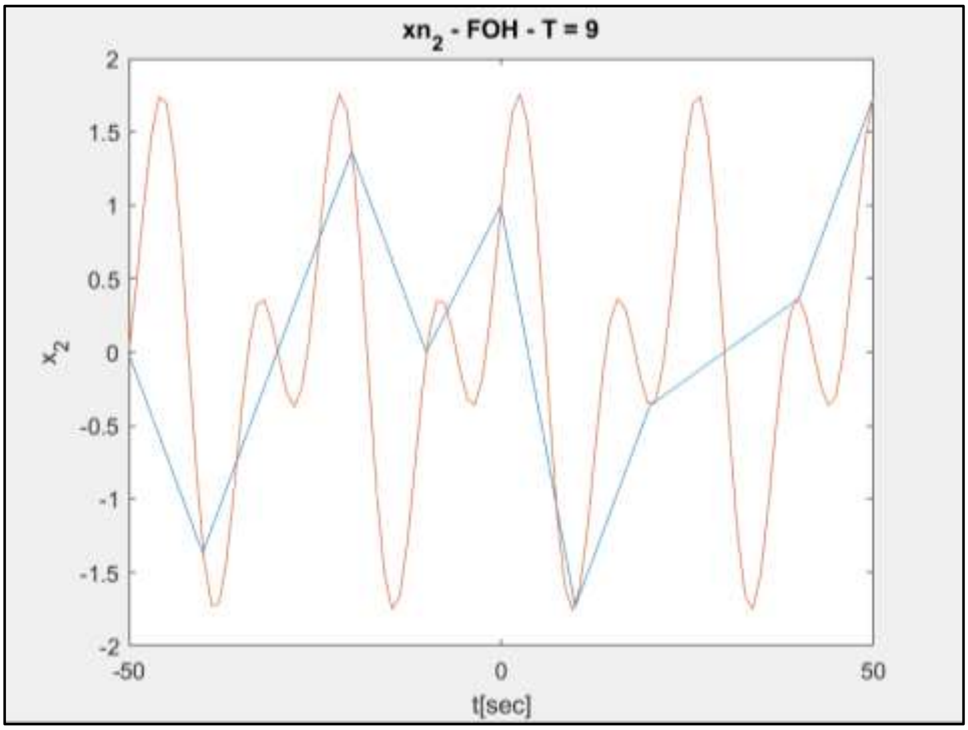
$$X_2(j\Omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\pi\left[\delta\left(\omega-\frac{3\pi}{4}-2\pi k\right)+\delta\left(\omega+\frac{3\pi}{4}-2\pi k\right)\right]$$
$$+\frac{\pi}{j}\left[\delta\left(\omega-\frac{3\pi}{2}-2\pi k\right)-\delta\left(\omega+\frac{3\pi}{2}-2\pi k\right)\right]$$

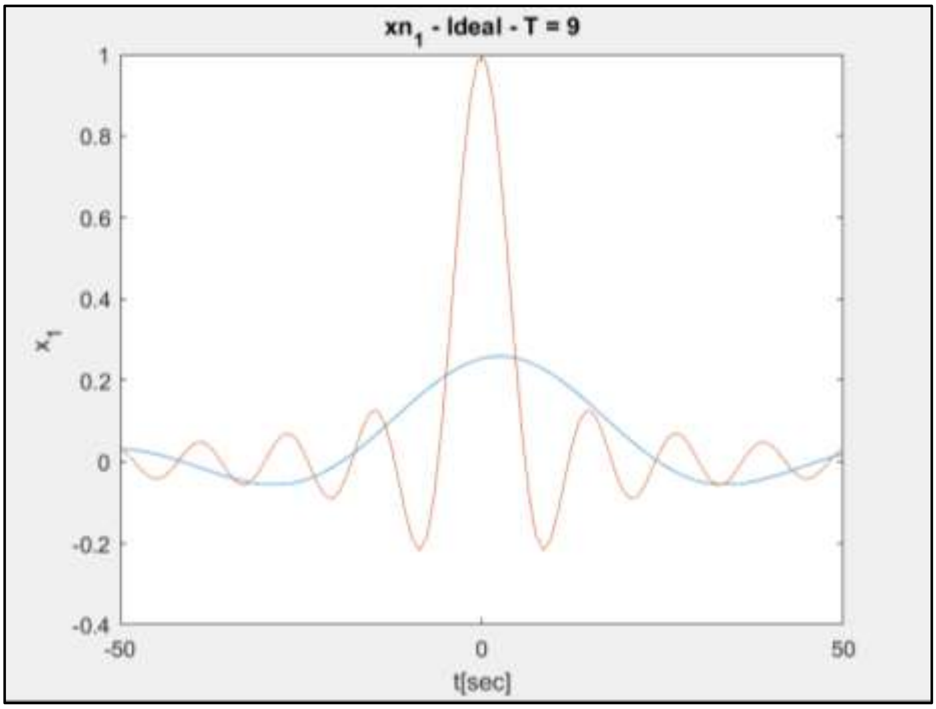


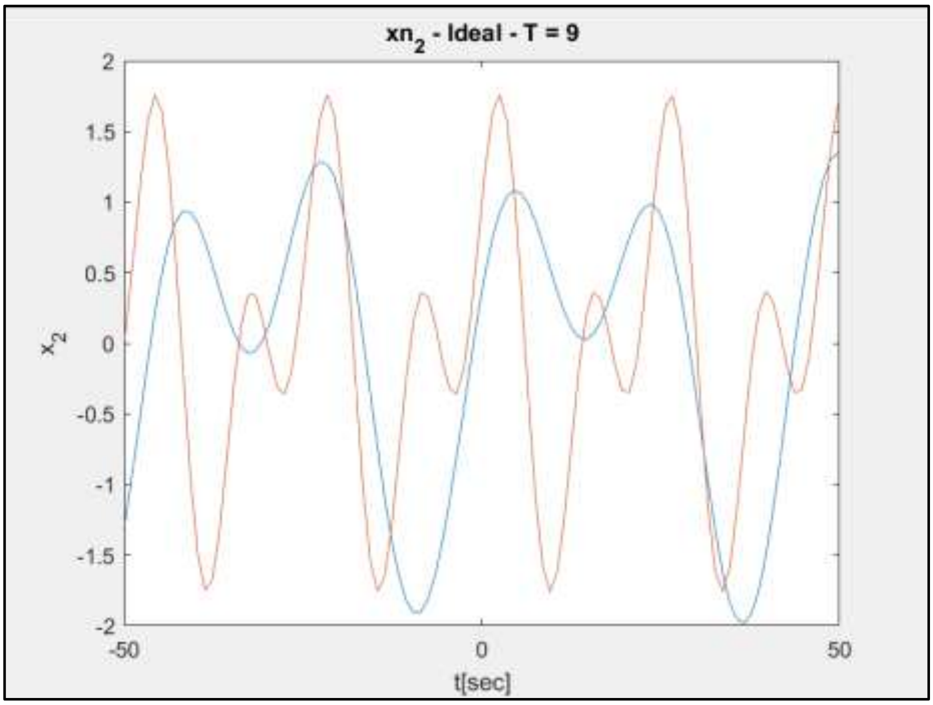

xn1 - ZOH - T = 9
x1
t[sec]
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-50
0
50


xn2 - ZOH - T = 9
x2
t[sec]
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-50
0
50


xn1 - FOH - T = 9
x1
t[sec]
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-50
0
50


xn2 - FOH - T = 9
x2
t[sec]
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-50
0
50




<u>סעיף ז'</u>

מכיוון ש-$T = 9[sec] > T_{max} = 6[sec]$, קצב הדגימה של סעיף ו' אינו עומד בתנאי נייקוויסט ולכן, כצפוי, השחזורים שהתבצעו בקצב דגימה זה לא היו מיטביים עקב ה-$aliasing$ שמתקבל בקצב דגימה נמוך מידי.

לעומת זאת, בסעיף ה' עבור $T = 2[sec] < T_{max} = 6[sec]$, קצב הדגימה עומד בתנאי נייקוויסט ולכן התקבלו שחזורים מיטביים (נציין גם כי מדובר בקצב דגימה מאוד גבוה ולכן השחזורים טובים אף יותר ביחס לקצבי דגימה נמוכים יותר שעדיין עומדים בתנאי נייקוויסט).

כמובן שהשחזור הטוב ביותר הוא השחזור האידיאלי, לאחריו שחזור ה-$FOH$ המחבר שתי נקודות עוקבות בקו ישר ביניהן, ולבסוף שחזור ה-$ZOH$ המחבר שתי נקודות עוקבות בקו אופקי ומדרגה.