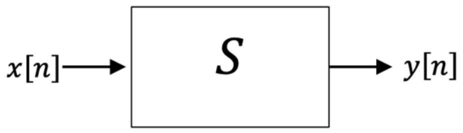
Dvir Ben Asuli 318208816
Daniel Nischisov 207901414

אותות ומערכות – פרויקט סיכום

חלק א'

נתונה מערכת בדידה המסומנת באות S שכניסתה היא $x[n]$ ומוצאה הוא $y[n]$ המוגדרת על ידי משוואת ההפרשים הבאה:



$$y[n]-4y[n-1]+4y[n-2]=20x[n]+10x[n-1]$$

<u>ליניאריות:</u>

המערכת הינה מערת ליניארית.

על מנת להראות שהמערכת ליניארית, נדרש להראות שעבור קלט x_1 עם פלט y_1 וקלט x_2 עם פלט x_2, אם נפעיל את המערכת על הצירוף הליניארי שלהם נקבל:

$$S\{ax_1[n]+bx_2[n]\}=a\cdot S\{x_1[n]\}+b\cdot S\{x_2[n]\}$$

בפרט עבור x_1 ו- x_2 מתקיים:

$$S\{x_1[n]\}=y_1[n]$$
$$y_1[n]-4y_1[n-1]+4y_1[n-2]=20x_1[n]+10x_1[n-1]$$
$$S\{x_2[n]\}=y_2[n]$$
$$y_2[n]-4y_2[n-1]+4y_2[n-2]=20x_2[n]+10x_2[n-1]$$

במידה ונשתמש באותות $ax_1[n]$ ו- $bx_2[n]$ זה שקול ללהכפיל את המשוואות ב-a ו- b:

$$ay_1[n]-4ay_1[n-1]+4ay_1[n-2]=20ax_1[n]+10ax_1[n-1]$$
$$by_2[n]-4by_2[n-1]+4by_2[n-2]=20bx_2[n]+10bx_2[n-1]$$

כעת נחבר את המשוואות ונקבל:

$$ay_1[n]-4ay_1[n-1]+4ay_1[n-2]\ +by_2[n]-4by_2[n-1]+4by_2[n-2]$$
$$=20ax_1[n]+10ax_1[n-1]+\ 20bx_2[n]+10bx_2[n-1]$$

נסדר את המשוואה לקבלת:

$$ay_1[n]+by_2[n]-4(ay_1[n-1]+by_2[n-1])+4(ay_1[n-2]+by_2[n-2])$$
$$=20(ax_1[n]+bx_2[n])+10(ax_1[n-1]+bx_2[n-1])$$

או בצורה אחרת:

$$(ay_1+by_2)[n]-4(ay_1+by_2)[n-1]+4(ay_1+by_2)[n-2]$$
$$=20(ax_1+bx_2)[n]+10(ax_1+bx_2)[n-1]$$

אם נחזור למבנה הכללי של המשוואה

$$y[n] - 4y[n-1] + 4y[n-2] = 20x[n] + 10x[n-1]$$

וסמן למשל את אות הצירוף הלינארי:

$$X[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$$

נקבל שהקלט המתאים לזה הוא

$$Y[n] = ay_1[n] + by_2[n]$$

שזה פלט ששווה בדיוק לסכום הפלטים של שני הקלטים בנפרד:

$$Y[n] = ay_1[n] + by_2[n] = a \cdot S\{x_1[n]\} + b \cdot S\{x_2[n]\}$$

מכך שתכונת הלינאריות מתקיימת.

<u>קביעות בזמן:</u>

המערכת הינה מערכת קבועה בזמן.

נאמר שוב כי התגובה של אות $x[n]$ היא $y[n]$. כעת נגדיר אות חדש

$$x'[n] = x[n-k]$$

ונאמר שהמוצא שלו הוא $y'[n]$:

$$S\{x[n]\} = y[n]$$
$$S\{x'[n]\} = S\{x[n-k]\} = y'[n]$$

נרצה להראות כי $y'[n] = y[n-k]$.

עבור $x[n]$ נקבל:

$$y[n] - 4y[n-1] + 4y[n-2] = 20x[n] + 10x[n-1]$$

ועבור $x'[n]$ נקבל:

$$y'[n] - 4y'[n-1] + 4y'[n-2] = 20x'[n] + 10x'[n-1]$$
$$y'[n] - 4y'[n-1] + 4y'[n-2] = 20x[n-k] + 10x[n-k]$$

כעת אם נסתכל על $x[n-k]$ נקבל (על ידי הצבה של $n_{new} = n-k$ במשוואה המקורית על $x[n]$):

$$y[n-k] - 4y[n-1-k] + 4y[n-2-k] = 20x[n-k] + 10x[n-k]$$

כלומר עבור $x'[n] = x[n-k]$ אכן רואים שהתגובות, בדרכים השונות שביטאנו אותן מקיימות

$$S\{x'[n]\} = y'[n] = S\{x[n-k]\} = y[n-k]$$

:LTI

המערכת הינה מערכת LTI.

כיוון שהמערכת לינארית וקבועה בזמן, לפי הגדרה היא מערכת LTI.

:זיכרון

המערכת הינה בעלת זיכרון.

נשים לב שהמוצא בזמן n, $y[n]$, לפי משוואת ההפרשין תלוי בכניסות בזמנים $x[n]$ ו- $x[n-1]$. כיוון שיש תלות בגדלים נוספים מעבר לכניסה בזמן n, הרי שהמערכת הינה בעלת זיכרון.

:סיבתיות

המערכת הינה מערכת סיבתית.

מערכת מוגדרת כסיבתית אם ורק אם המוצא נקבע רק על פי הכניסה בעבר ו/או בהווה. כיוון שפה המוצאים תלויים רק בערכי x שאכן בעבר או בהווה, וכמו כן במוצאים מהעבר בלבד, אין תלות במוצאים עתידיים ולכן המערכת סיבתית על פי ההגדרה.

באופן שקול ניתן לומר שמערכת LTI (כמו זו) היא סיבתית אם ורק אם התגובה שלה להלם היא סיבתית כלומר אם ורק אם מתקיים:

$$\forall t \leq 0;\ \ h(t) = 0$$

שעניין זה מתקיים אם בפונקציית התמסורת שלה, במרחב z, מספר הקטבים גדול או שווה למספר האפסים.

על מנת לבדוק זאת נמצא את תגובת המערכת להלם, על ידי שימוש בהתמרת Z משוואת ההפרשים:

$$Y(z) - 4z^{-1}Y(z) + 4z^{-2}Y(z) = 20X(z) + 10z^{-1}X(z)$$

כעת נמצא את התגובה להלם על ידי:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

נפשט את המשוואה שקיבלנו:

$$(1 - 4z^{-1} + 4z^{-2}) \cdot Y(z) = (20 + 10z^{-1}) \cdot X(z)$$

ואז נקבל:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{20 + 10z^{-1}}{1 - 4z^{-1} + 4z^{-2}}$$

$$H(z) = \frac{20z^2 + 10z}{z^2 - 4z + 4}$$

נשים לב שלמערכת יש אפסים ב- $z = 0, -0.5$

כמו כן יש לה 2 קטבים ב- $z = 2$ (קוטב מסדר שני). סה"כ מספר הקטבים שווה למספר האפסים, כלומר המערכת היא אכן מערכת סיבתית.

יציבות BIBO:

המערכת אינה יציבה BIBO.

נזכור כי אמרנו בהרצאה שמערכת LTI היא יציבה BIBO אם ורק אם כל הקטבים שלה נמצאים בתוך מעגל היחידה. ראינו שבמישור z התגובה להלם של המערכת מבוטאת על ידי

$$H(z) = \frac{20z^2 + 10z}{z^2 - 4z + 4}$$

ושיש לה קוטב מסדר 2 ב- $z = 2$. בפרט, הקטבים שלה מחוץ למעגל היחידה ולכן היא לא יציבה BIBO. בתוכנית ה-MATLAB המצורפת לתרגיל עבור חל׳ א׳ מוצגת תוכנית המשתמש באות קבוע ומבצעת לו קונבולוציה בזמן עם תגובת התדר של המעגל. בהתבסס על $H(z)$ ניתן לבצע התמרה הפוכה ע״י:

$$H(z) = \frac{20 + 10z^{-1}}{1 - 4z^{-1} + 4z^{-2}} = 10z \cdot \frac{2z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})^2} + 5 \cdot \frac{2z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})^2}$$

על פי טבלת ההתמרות ותכונת הכפלה ב-z נקבל:

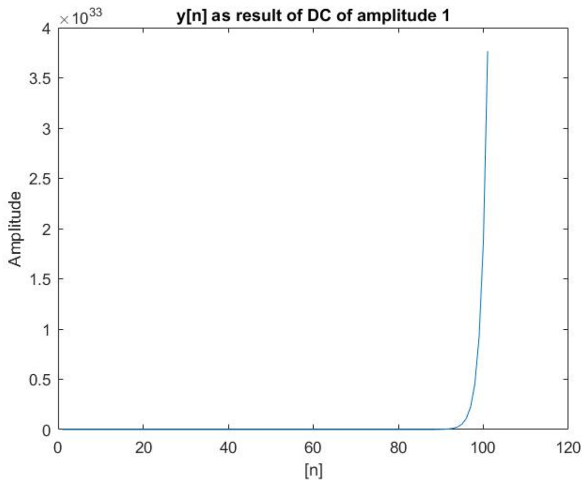
$$2^n \cdot n \cdot u[n] \overset{z}{\Leftrightarrow} \frac{2z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})^2}$$

$$x[n - n_0] \overset{z}{\Leftrightarrow} z^{-n_0} X(z)$$

ואז:

$$h[n] = 10 \cdot 2^{n+1} u[n+1] + 5 \cdot 2^n u[n]$$

כעת נשתמש בביטוי זה על מנת לבצע קונבולוציה עם אות פשוט וחסום על מנת להראות שהמוצא לא חסום (קוד ה-MATLAB מצורף).



הפיכות:

המערכת אינה הפיכה מבחינה מעשית אך כן הפיכה מבחינה מתמטית.

מערכת מוגדרת כמערכת הפיכה אם ורק אם קיימת מערכת סיבתית בעלת תגובה להלם $H^{-1}(z)$ כך שמתקיים:

$$H(z) \cdot H^{-1}(z) = 1$$

בפרט, נרצה שהמערכת ההופכית תיקח את המוצא של המערכת הרגילה ותדע לייצר ממנו את הכניסה של המערכת המקורית. כיוון שראינו שהמוצא של המערכת המקורית אינו יציב, לא ניתן לייצר ממנו את הכניסה ועל כן לא ניתן לבנות מכונה הפוכה שכזו.

לכן מבחינה מעשית, המערכת אינה הפיכה. לעומת זאת אם נסתכל על פונקציית התמסורת ונחלץ את הביטוי ההפוך שיקיים את המשוואה $H(z) \cdot H^{-1}(z) = 1$ נקבל את התמסורת הבאה:

$$H^{-1}(z) = \frac{z^2 - 4z + 4}{20z^2 + 10z}$$

בניגוד למערכת המקורית, כעת האפסים של המערכת הם ב- $z = 2$ ואילו הקטבים הם ב- $z = 0, -0.5$. עדיין מספר האפסים שווה למספר הקטבים ולכן המערכת הזו סיבתית. כיוון שהקטבים אכן בתוך מעגל היחידה, מערכת זו היא כן יציבה BIBO- ולכן מבחינה תיאורטית מערכת הופכית אכן קיימת ל-$H(z)$.

נוכל לרשום את התמסורת באופן הבא:

$$H^{-1}(z) = \frac{1 - 4z^{-1} + 4z^{-2}}{20 + 10z^{-1}} = \frac{Y'(z)}{X'(z)}$$

כאשר $X'(z)$ ו- $Y'(z)$ הם התמרות Z של המערכת ההפוכה.

נקבל:

$$Y'(z)(20 + 10z^{-1}) = X'(z)(1 - 4z^{-1} + 4z^{-2})$$

ובהתמרה הפוכה נקבל את משוואת ההפרשים:

$$20y'[n] + 10y'[n-1] = x'[n] - 4x'[n-1] + 4x'[n-2]$$

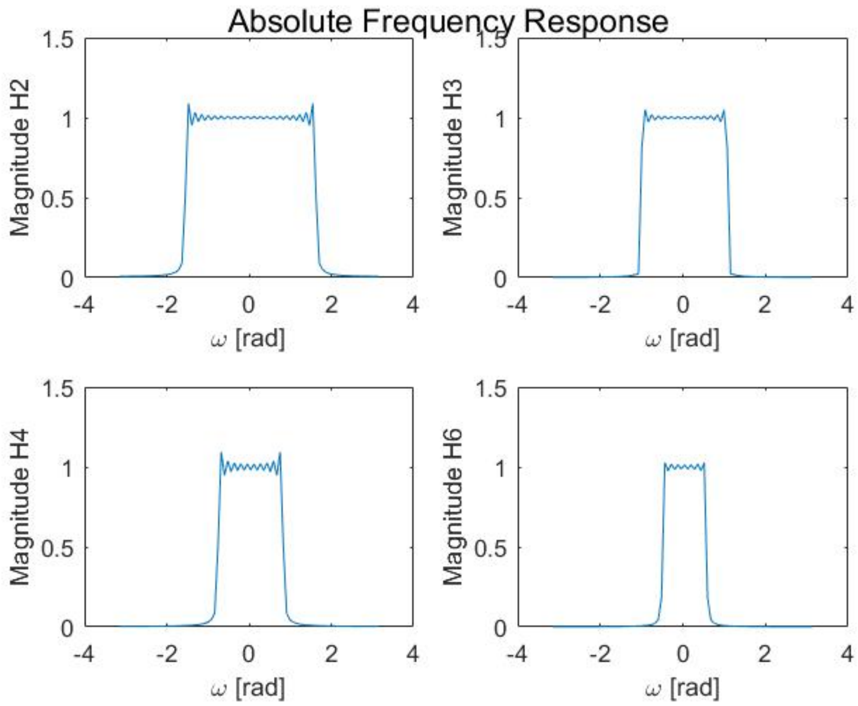
כלומר המערכת ההפוכה למערכת המוצגת בשאלה תוצג על ידי משוואת ההפרשים:

$$\boldsymbol{y[n] = \frac{1}{20}x[n] - \frac{1}{5}x[n-1] + \frac{1}{5}x[n-2] - \frac{1}{2}y[n-1]}$$

חלק ב'

סעיף 1

ייצוג המסננים השונים בתדר :



סעיף 2

סעיף א'

האות שנתון :

$$x[n] = 2\cos\left(\frac{3\pi}{10}n\right)\cos\left(\frac{\pi}{10}n\right)$$

באופן שקול נוכל לרשום :

$$x[n] = \cos\left(n\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{\pi}{10}\right)\right) + \cos\left(n\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{10}\right)\right)$$

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)$$

לאחר ביצוע התמרת פורייה הספקטרום של האות יהיה :

$$X(e^{jw}) = \pi\left[\delta\left(w + \frac{\pi}{5}\right) + \delta\left(w - \frac{\pi}{5}\right)\right] + \pi\left[\delta\left(w + \frac{2\pi}{5}\right) + \delta\left(w - \frac{2\pi}{5}\right)\right]$$

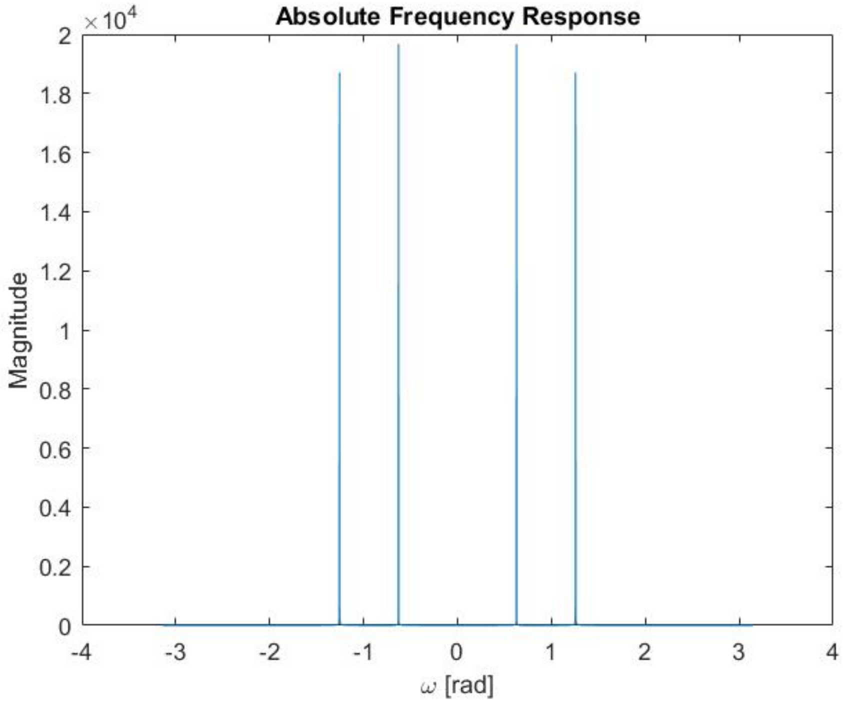
כלומר סה"כ נקבל את האות והספקטרום :

$$\boldsymbol{x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)}$$

$$\boldsymbol{X(e^{jw}) = \pi\cdot\delta\left(w - \frac{2\pi}{5}\right) + \pi\cdot\delta\left(w - \frac{\pi}{5}\right) + \pi\cdot\delta\left(w + \frac{\pi}{5}\right) + \pi\cdot\delta\left(w + \frac{2\pi}{5}\right)}$$

סעיף ב'

ייצוג האות $x[n]$ בתדר:



סעיף ג'

נזכור כי ראינו שהספקטרום של האות נתון על ידי

$$X(e^{jw}) = \pi \cdot \delta\left(w - \frac{2\pi}{5}\right) + \pi \cdot \delta\left(w - \frac{\pi}{5}\right) + \pi \cdot \delta\left(w + \frac{\pi}{5}\right) + \pi \cdot \delta\left(w + \frac{2\pi}{5}\right)$$

נרצה להשתמש בהתמרות של תגובת המסננים לתדר על מנת למצוא את המוצא $Y(e^{jw}) = X(e^{jw}) \cdot H(e^{jw})$, ואז לבצע התמרה הפוכה.

מסנן $h_2[n]$:

המסנן הראשון הוא עם הגבר 1 ועם תדר קטעון $\frac{\pi}{2}$. על כן הביטוי בתדר הוא:

$$H_2(e^{jw}) = \begin{cases} 1, & |w| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & else \end{cases}$$

כעת כמו שאמרנו נבצע $Y(e^{jw}) = X(e^{jw}) \cdot H(e^{jw})$ ונקבל:

$$Y_2(e^{jw}) = \pi \cdot \delta\left(w - \frac{2\pi}{5}\right) + \pi \cdot \delta\left(w - \frac{\pi}{5}\right) + \pi \cdot \delta\left(w + \frac{\pi}{5}\right) + \pi \cdot \delta\left(w + \frac{2\pi}{5}\right)$$

נשים לב כי כל ההלמים נכנסים בתוך הטווח של $w < \frac{\pi}{2}$ ובו ההגבר הוא 1.

בעצם נשארנו עם אותו האות:

$$\boldsymbol{y_2[n] = \cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)}$$

מסנן $h_3[n]$:

המסנן השני הוא עם הגבר 1 ועם תדר קטעון $\frac{\pi}{3}$. על כן הביטוי בתדר הוא:

$$H_2(e^{jw}) = \begin{cases} 1, & |w| < \frac{\pi}{3} \\ 0, & else \end{cases}$$

כעת כמו שאמרנו נבצע $Y(e^{jw}) = X(e^{jw}) \cdot H(e^{jw})$ ונקבל:

$$Y_3(e^{jw}) = \pi \cdot \delta\left(w - \frac{\pi}{5}\right) + \pi \cdot \delta\left(w + \frac{\pi}{5}\right)$$

נשים לב כי רק ההלמים ב- $\pm\frac{\pi}{5}$ נכנסים בטווח של $w < \frac{\pi}{3}$ ועל כן השאר מתאפסים.

בעצם זה כאילו ביטלנו את הקוסינוס בתדירות $\frac{2\pi}{5}$:

$$\boldsymbol{y_3[n] = \cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)}$$

מסנן $h_4[n]$:

המסנן השלישי הוא עם הגבר 1 ועם תדר קטעון $\frac{\pi}{4}$. על כן הביטוי בתדר הוא:

$$H_2(e^{jw}) = \begin{cases} 1, & |w| < \frac{\pi}{4} \\ 0, & else \end{cases}$$

כעת כמו שאמרנו נבצע $Y(e^{jw}) = X(e^{jw}) \cdot H(e^{jw})$ ונקבל:

$$Y_4(e^{jw}) = \pi \cdot \delta\left(w - \frac{\pi}{5}\right) + \pi \cdot \delta\left(w + \frac{\pi}{5}\right)$$

שוב קיבלנו רק ההלמים ב- $\pm\frac{\pi}{5}$ נכנסים בטווח של $w < \frac{\pi}{4}$ ועל כן השאר מתאפסים.

זה שוב כאילו ביטלנו את הקוסינוס בתדירות $\frac{2\pi}{5}$:

$$\boldsymbol{y_4[n] = \cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)}$$

מסנן $h_6[n]$:

המסנן הרביעי הוא עם הגבר 1 ועם תדר קטעון $\frac{\pi}{6}$. על כן הביטוי בתדר הוא:

$$H_2(e^{jw}) = \begin{cases} 1, & |w| < \frac{\pi}{6} \\ 0, & else \end{cases}$$

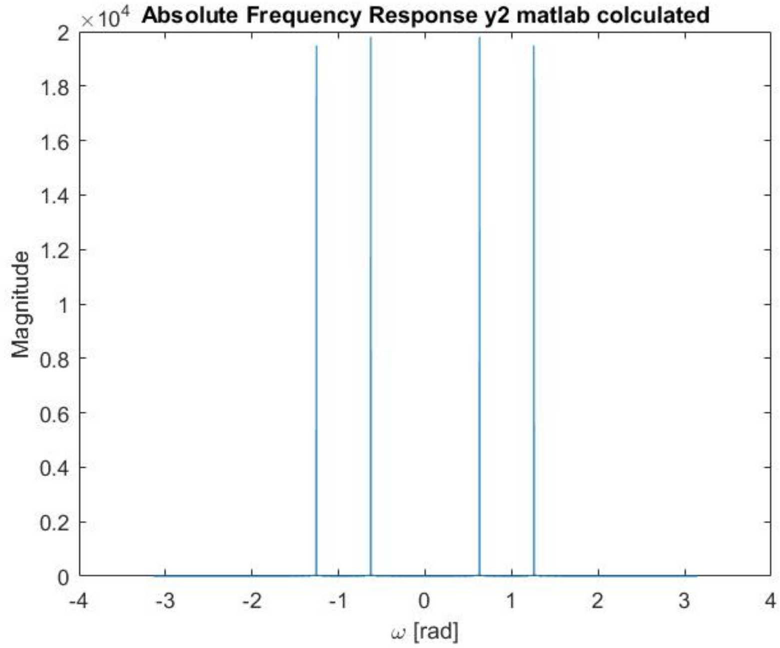
כעת כמו שאמרנו נבצע $Y(e^{jw}) = X(e^{jw}) \cdot H(e^{jw})$ ונקבל הפעם שכל ההלמים היו בתחום $w \geq \frac{\pi}{6}$ ולכן כולם מתאפסים:

$$Y(e^{jw}) = 0, \qquad \boldsymbol{y_6[n] = 0}$$

סעיף ד'

מסנן $h_2[n]$:

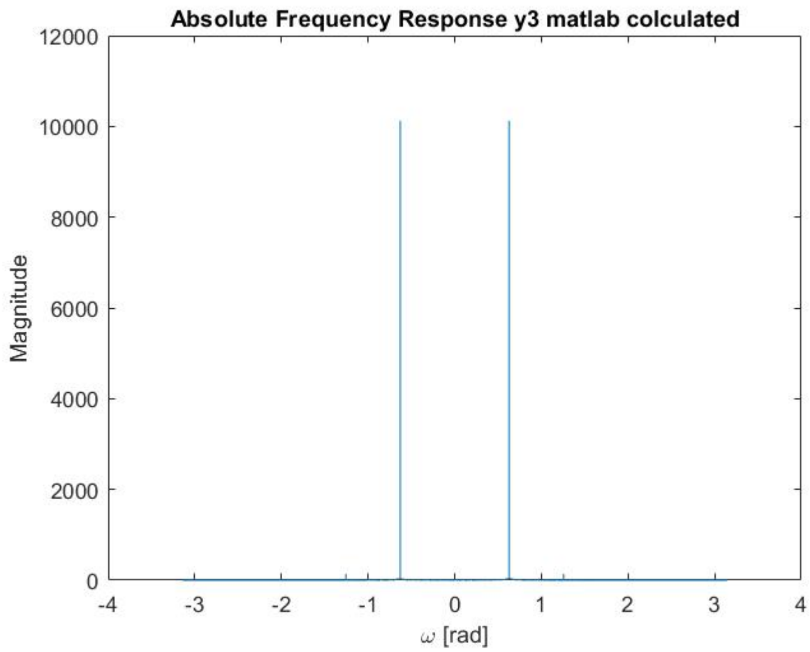
ספקטרום אות המוצא $Y_2(e^{jw})$ הוא:



כמו שהסברנו בסעיף ג', המסנן כמעט ולא השפיע על האות ולכן הספקטרום של אות המוצא של המסנן כמעט זהה לאות המקורי (עד כדי הבדלים קטנים באמפליטודה שעלולים לנבוע מזה שהמסנן בפועל הוא לא באמת אידיאלי כמו בתיאוריה).

מסנן $h_3[n]$:

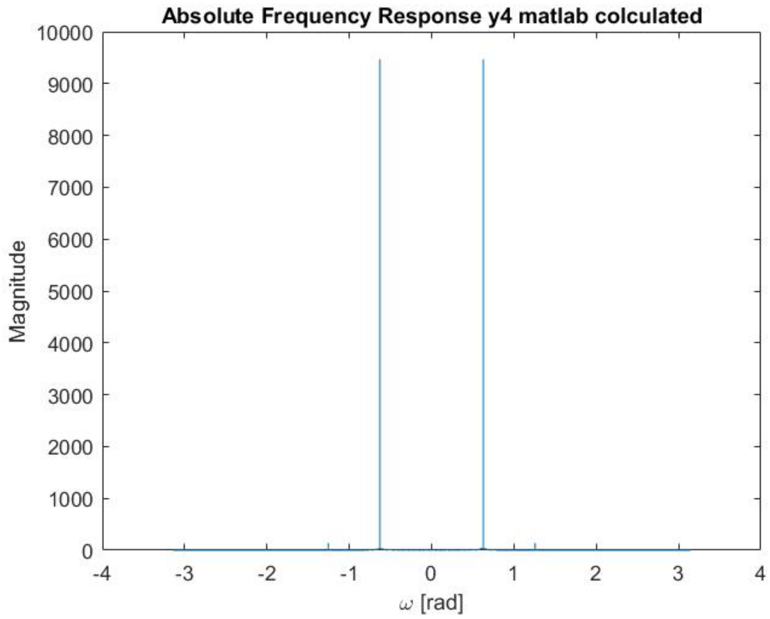
ספקטרום אות המוצא $Y_3(e^{jw})$ הוא:



גם פה יצא כמו שציפינו בסעיף ג'- התדרים היחידים שיעברו $\pm\frac{\pi}{5}$, באמפליטודה מאותו סדר גודל כמו באות המקורי.

מסנן $h_4[n]$:

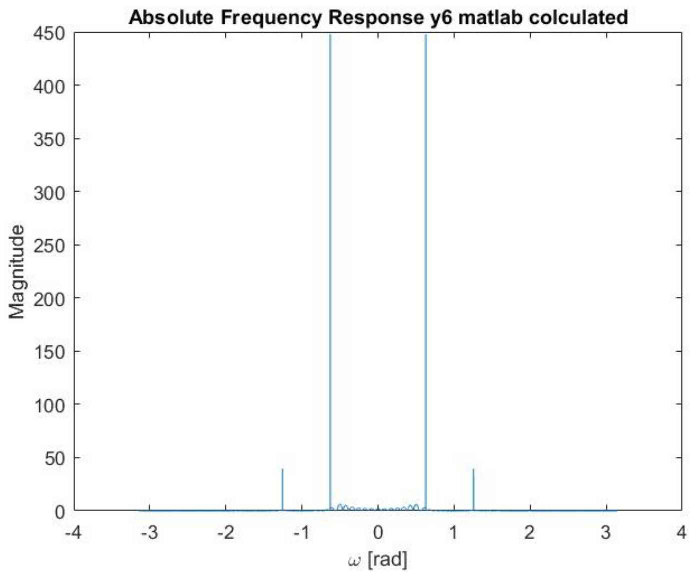
ספקטרום אות המוצא $Y_4(e^{jw})$ הוא



כמו שציפינו בחלק ג', הפונקציונליות של המסנן כעת זהה כמעט לזו שבמסנן $h_2[n]$, שכן טווח התדרים שהוא חוסם עדיין לא מספיק בשביל לא להכיל את $\pm\frac{\pi}{5}$.

מסנן $h_6[n]$:

ספקטרום אות המוצא $Y_6(e^{jw})$ הוא

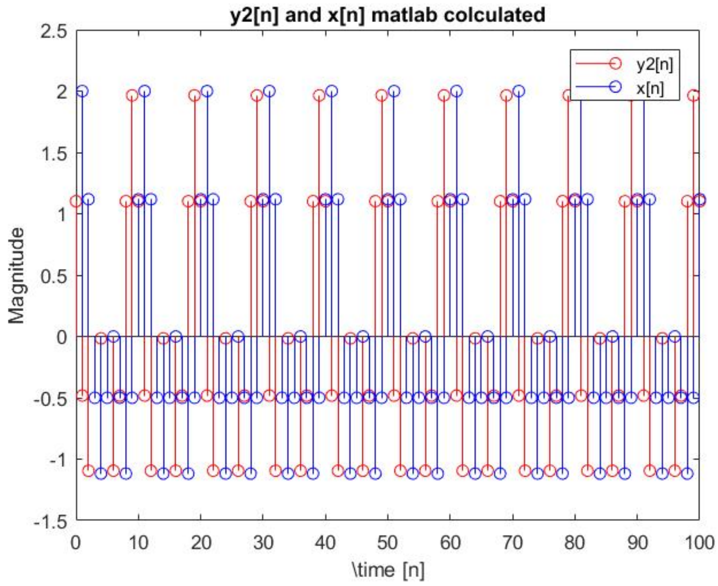


תיאורטית ציפינו שלאחר מעבר האות במסנן זה הספקטרום יתאפס לחלוטין, שכן המסנן חוסם תדרים בטווח $w \geq \frac{\pi}{6}$ ולכן אף אחד מתדרי האות לא אמורים לעבור. כיוון שהמסנן אינו אידיאלי בפועל, עדיין מופיעים ערכים בתדר, אך נשים לב שהם קטנים משמעותית מהערכים שראינו באות המקורי ובמסננים הקודמים (סדר גודל של 450 לעומת 20000). כאמור עניין זה נובע מכך שהמסנן אינו אידיאלי כמו בתיאוריה, ועל כן נצפה שחלק מהתדרים אכן יישארו באות ולא יתאפסו לגמרי.

סעיף ה'

מסנן $h_2[n]$:

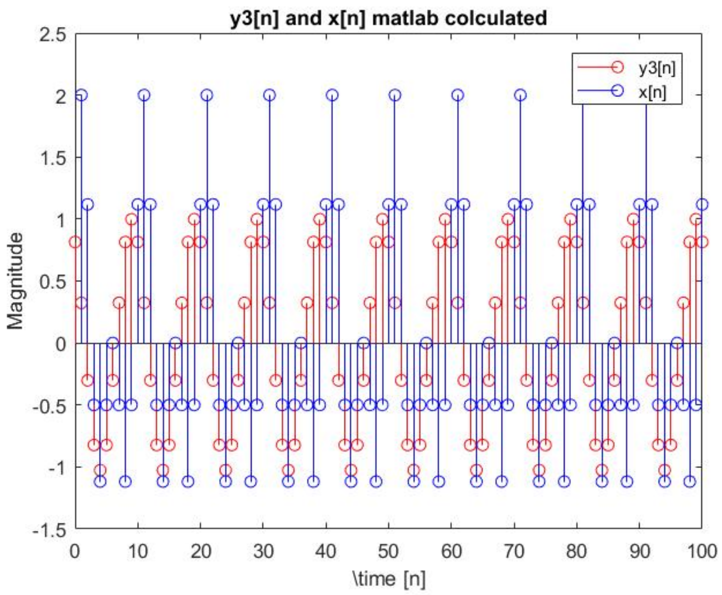
מוצא המערכת בזמן $y_2[n]$ הוא:



כצפוי מסנן זה כמעט לא שינה את האות בכלל. מלבד שינוי בפאזה שמתקבל מהעובדה ש- $Arg\left(H\left(e^{jw}\right)\right) = \frac{\pi}{2}Rad$, התדרים המופיעים באות והאמפליטודות נשארו זהות.

מסנן $h_3[n]$:

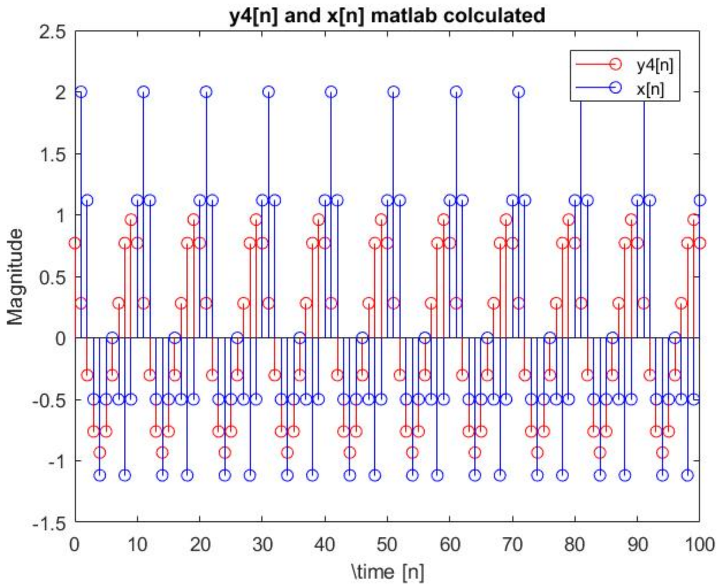
מוצא המערכת בזמן $y_3[n]$ הוא:



כמו שציפינו ממרחב התדר, האות המסונן יכיל כעת אך ורק תדירות אחת ובה יתבצעו התנודות. האמפליטודה ירדה במקצת אך באותו סדר גודל של התדירות המקורית, שכן המסנן לא אמור לשנות הגבר אך הוא עדיין לא מסנן אידיאלי. גם פה נצפית אותה שינוי פאזה שראינו במסנן הקודם.

מסנן $h_4[n]$:

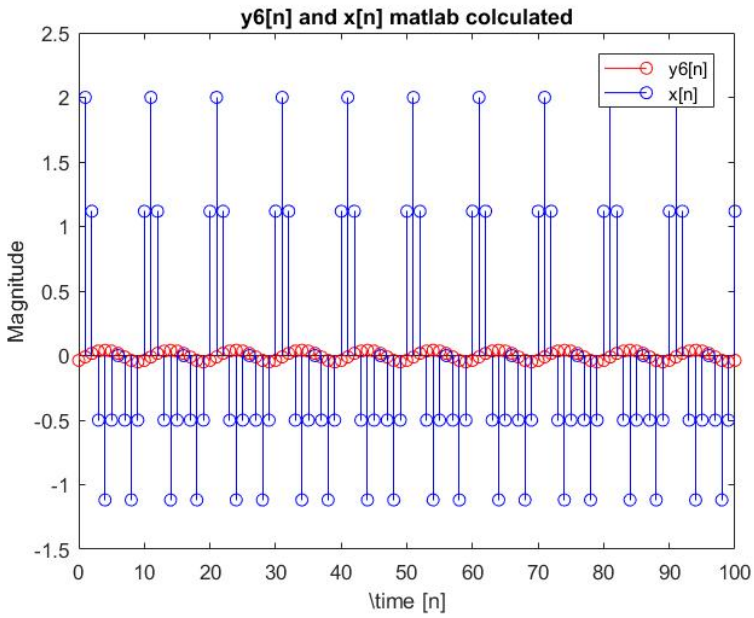
מוצא המערכת בזמן $y_4[n]$ הוא:



כמו שתואר בחלק ג', אין הבדל משמעותי בין מסנן זה למסנן $h_3[n]$ ולכן האות לאחר יציאת המסנן נראה כמעט זהה לחלוטין, עד כדי שינוי קטן באמפליטודה.

מסנן $h_6[n]$:

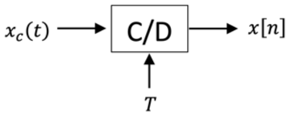
מוצא המערכת בזמן $y_6[n]$ הוא:



כמו שראינו במרחב התדר, האות המסונן יהיה כמעט אפסי, כך שהתנודות הקטנות שיש בו נובעות מכך שהמסנן אינו אידיאלי ועדיין חלק מהתדרים הצליחו לעבור. כמו כן גם פה אנחנו רואים את שינוי הפאזה שהתרחש גם במסננים האחרים.

חלק ג'

אות (1)



$$x_c(t) = sinc\left(\frac{t}{6}\right)$$

סעיף א'

נשתמש בנוסחא מהדף נוסחאות:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\frac{\pi}{T}}{\pi} sinc\left(\frac{\frac{\pi}{T}t}{\pi}\right)\right\} = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 \quad , & else \end{cases} = X_c(j\Omega)$$

נעביר אם כך את הביטוי לצורה:

$$x_c(t) = sinc\left(\frac{t}{6}\right) = 6 \cdot \frac{\frac{\pi}{6}}{\pi} sinc\left(\frac{\frac{\pi}{6}t}{\pi}\right)$$

כלומר במקרה זה $T = 6$.

לכן נקבל את האות המותמר:

$$\boldsymbol{X_c(j\Omega) = \begin{cases} 6, & |\Omega| < \frac{\pi}{6} \\ 0 \quad , & else \end{cases}}$$

כמו שרואים התדר המקסימלי הוא $\Omega_m = \frac{\pi}{6}$ ועל כן תנאי הדגימה יהיה $T < \frac{\pi}{\frac{\pi}{6}}$.

סה"כ נקבל:

$$\boldsymbol{\Omega_m = \frac{\pi}{6}, \qquad T_{max} = 6}$$

סעיף ב'

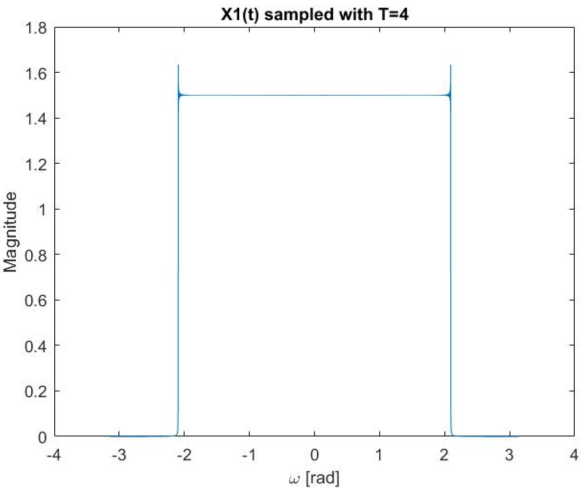
האות הדגום במרווחי T:

$$\boldsymbol{x_c[n] = sinc\left(\frac{nT}{6}\right)}$$

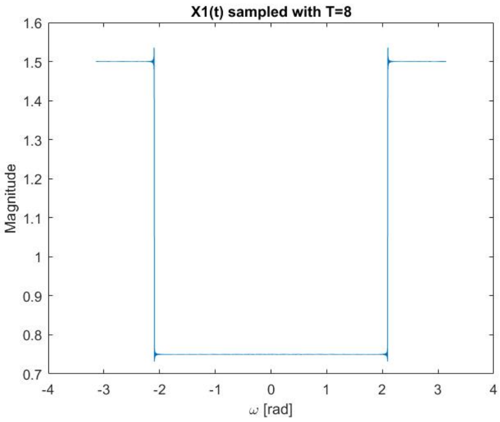
סעיף ג'

ספקטרום האות הדגום $X(e^{jw})$ עבור $\boldsymbol{T = 4}$:

כיוון שבחרנו זמן דגימה קטן מהזמן המקסימלי האפשרי, אנו רואים שספקטרום האות הדגום דומה לאיך שתיארנו את הספקטרום של האות המקורי עד כדי המתיחות הנגרמות מהדגימה (מתיחת ציר $w = T\Omega$ ואז האות מתאפס בסביבות $\frac{2}{3}\pi \approx 2$) והקטנת הגובה של כל רכיב פי 4.



<u>סעיף ד'</u>



ספקטרום האות הדגום $X(e^{jw})$ עבור $\boldsymbol{T=8}$:
הפעם בחרנו זמן דגימה גבוה מהמקסימלי, ולכן כמו שציפינו מתקיים Aliasing. בעצם קיבלנו מצב ששני מלבנים שראינו מהצורה התקינה חופפים זה לזה. נזכור כי כיוון שבחרנו $T=8$ אחר, הגובה של מלבן "תקין" הוא 0.75, והשכפולים נעשים סביב

$$\Omega_s = \frac{\pi}{4}, \qquad \omega = 2\pi$$

לכן הטווח שאנחנו רואים באמצע הוא גובה תקין של מלבן ומה שיש בצדדים זה חיבור של שני מלבנים זה על זה.

<u>אות (2)</u>

$$x_c(t) = sinc^2\left(\frac{t}{12}\right)$$

<u>סעיף א'</u>

נשתמש בנוסחא מהדף נוסחאות:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\frac{\pi}{T}}{\pi} sinc^2\left(\frac{\frac{\pi}{T}t}{2\pi}\right)\right\} = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\frac{\pi}{T}}, & |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 \quad , & else \end{cases} = X_c(j\Omega)$$

נפרק את האות לקבלת:

$$x_c(t) = sinc^2\left(\frac{t}{12}\right) = 24 \cdot \frac{\frac{\pi}{6}}{\pi} sinc^2\left(\frac{\frac{\pi}{6}t}{2\pi}\right)$$

ואז נקבל:

$$X_c(j\Omega) = 24 \cdot \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\frac{\pi}{6}}, & |\Omega| < \frac{\pi}{6} \\ 0 \quad , & else \end{cases}$$

וסה"כ האות המותמר יהיה:

$$\boldsymbol{X_c(j\Omega)} = \begin{cases} \boldsymbol{24 - 144|t|}, & \boldsymbol{|\Omega| < \frac{\pi}{6}} \\ \boldsymbol{0} \quad , & \boldsymbol{else} \end{cases}$$

שוב

$$\boldsymbol{\Omega_m = \frac{\pi}{6}}, \qquad \boldsymbol{T_{max} = 6}$$

<u>סעיף ב'</u>

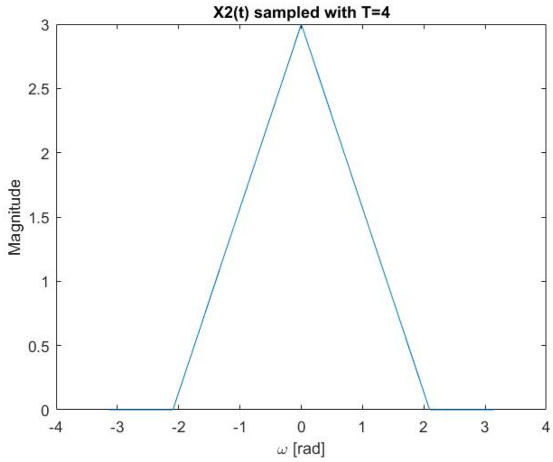
האות הדגום במרווחי T:

$$x_c[n] = sinc^2\left(\frac{nT}{12}\right)$$

סעיף ג'

ספקטרום האות הדגום $X(e^{jw})$ עבור $T = 4$:

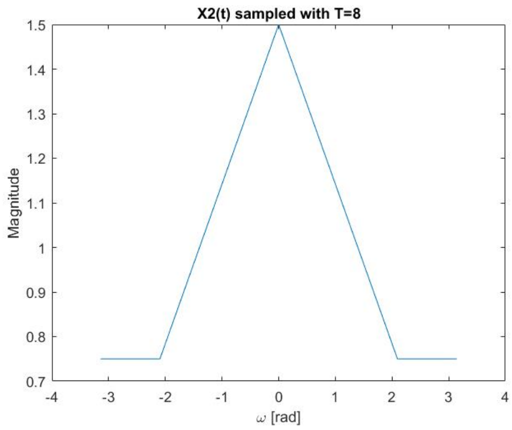
באופן דומה לסעיף הקודם, כשבחרנו זמן דגימה מתחת למקסימלי, קיבלנו ספקטרום תקין לאות הדגום שדומה למשולש שתיארנו עבור האות המקורי עד כדי שינויי הסקאלה שנובעים מהדגימה, בדיוק כמו שתיארנו בסעיף הקודם.



סעיף ד'

ספקטרום האות הדגום $X(e^{jw})$ עבור $T = 8$:

שוב כשבחרנו זמן דגימה גבוה מהמקסימלי, צפינו בתופעה של Aliasing שנובע משכפולים כל 2π של האות. במקרה הקודם לאחר $\Omega = \frac{\pi}{6}$ האות התאפס לגמרי, ופה אנחנו רואים שהחל מנקודה זו עדיין לאות יש ערך קבוע, שנובע מחפיפה של שני משולשים בתחום זה כך שהאחד יורד בשיפוע מסוים והשני עולה באותו שיפוע, דבר הגורם לקו ישר בסכימה שלהם.



אות (3)

$$x_c(t) = \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$$

סעיף א'

ישירות מהנוסחה נקבל:

$$X_c\{j\Omega) = \pi\left[\delta\left(\Omega + \frac{\pi}{12}\right) + \delta(\Omega - \frac{\pi}{12})\right]$$

כעת נקבל:

$$\Omega_m = \frac{\pi}{12}, \qquad T_{max} = 12$$

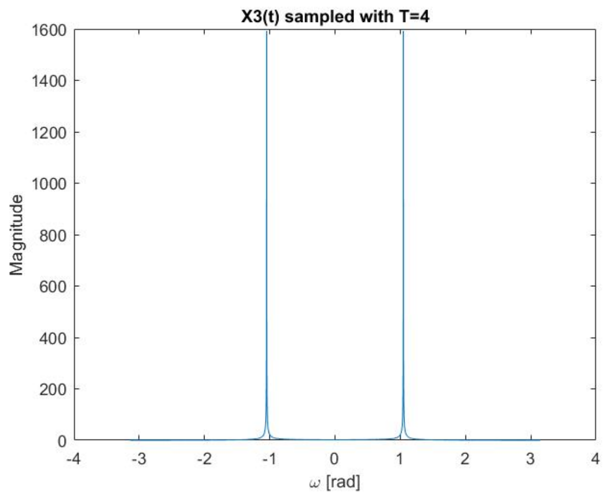
סעיף ב'

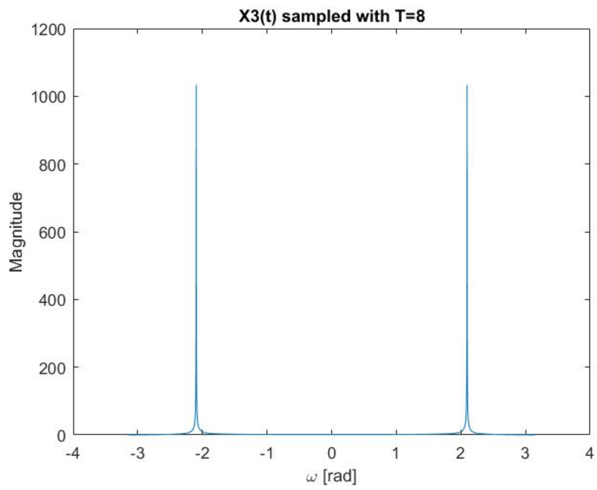
האות הדגום במרווחי T:

$$x_c[n] = \cos\left(\frac{T\pi}{12}n\right)$$

סעיף ג׳ + ד׳

ספקטרום האות הדגום $X(e^{jw})$ עבור $\boldsymbol{T = 4}$ וספקטרום האות הדגום $X(e^{jw})$ עבור $\boldsymbol{T = 8}$:





בשני המקרים בחרנו זמן דגימה קטן מהמקסימלי, ולכן הספקטרום של האות הדגום זהה לספקטרום שתיארנו לאות המקורי עד כדי שינוי הסקאלה. נשים לב שמה-T השונה בשני המקרים קיבלנו הלמים במקומות שונים על ציר ה-w ובגבהים שונים, אבל מדובר על אותם ערכים אם מסתכלים על מונחי Ω.

אות (4)

$$x_c(t) = \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

סעיף א׳

בדומה לאות (3) נשתמש בנוסחא ונקבל :

$$\boldsymbol{X_c\{j\Omega) = \pi\left[\left(\delta\left(\Omega + \frac{\pi}{12}\right) + \delta\left(\Omega - \frac{\pi}{12}\right)\right) + j\cdot\left(\delta\left(\Omega + \frac{\pi}{6}\right) - \delta\left(\Omega - \frac{\pi}{6}\right)\right)\right]}$$

הפעם :

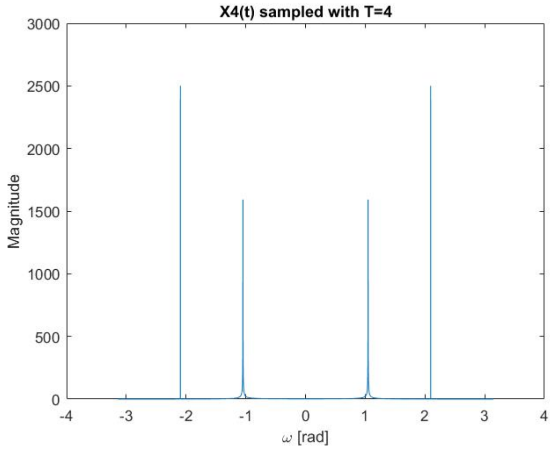
$$\boldsymbol{\Omega_m = \frac{\pi}{6}, \qquad T_{max} = 6}$$

סעיף ב׳

האות הדגום במרווחי T :

$$\boldsymbol{x_c[n] = \cos\left(\frac{T\pi}{12}n\right) + \sin\left(\frac{T\pi}{6}n\right)}$$

<u>סעיף ג'</u>



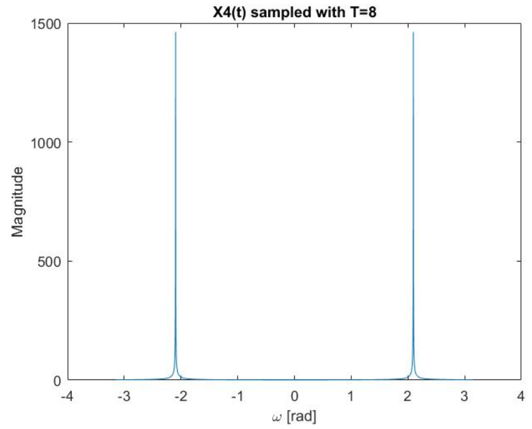
ספקטרום האות הדגום $X(e^{jw})$ עבור $\boldsymbol{T = 4}$:

בזמן דגימה קטן מהמקסימלי, כמו שציפינו ראינו הלמים רק ב-

$$\Omega = \pm\frac{\pi}{6}, \qquad \pm\frac{\pi}{12}$$

אין משמעות לגובה ההלמים שכן ההלם מוגדר בגודל אינסופי.

<u>סעיף ד'</u>



ספקטרום האות הדגום $X(e^{jw})$ עבור $\boldsymbol{T = 8}$:

הפעם כשבחרנו זמן דגימה גבוה מהמקסימלי, שוב נתקלנו בתופעת ה-Aliasing. הפעם, כתוצאה מהשכפולים כל 2π סביב

$$\Omega_s = \frac{\pi}{4}, \qquad \omega = 2\pi$$

ההלם של אות קוסינוסי ממחזור אחד "עלה על" ההלם של אות סינוסי ממחזור אחר, כך שבחלון 2π שמוצג על ידי המאטלב אנו רואים רק את אותו הלם משולב בסביבות $w = \frac{2}{3}\pi$.

אין חשיבות מעשית לגובה ההלם בגרף, אבל נשים לב שאם היינו לוקחים את האותות מהגרף הקודמים, מקטינים אותם פי 2 (כי הגדלנו את T פי 2) ומחברים אותם זה בדיוק גובה ההלם שהיינו מצפים לראות.