אותות ומערכות – פרויקט מסכם

מגישים: דניאל גריבי ועופר טלוסטי
ת"ז: 313514044 ו-311396303

חלק א'

א. לנוחות הפתרון נתחיל ממציאת פונקציית התמסורת של המערכת ולאחר מכן נענה על סעיף א'.

ב. נרצה לבצע התמרת Z לתגובה להלם הנתונה: $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[n] + \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot u[n-2]$.

נזכיר כי מתקיים עבור $Z\{a^n \cdot u[u]\} = \frac{1}{1-a\cdot z^{-1}}, ROC: |z| > |a|$ ונחשב את התמרת Z של התגובה להלם שהיא פונקציית התמסורת של המערכת:

$$H(z) = Z\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[n] + \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot u[n-2]\right\} \overset{\text{לינאריות}}{=} Z\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[n]\right\} + Z\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot u[n-2]\right\} =$$

$$Z\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[n]\right\} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot Z\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} \cdot u[n-2]\right\} \overset{*}{=} Z\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[n]\right\} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot z^{-2} \cdot Z\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot u[n]\right\} \overset{**}{=}$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{9}{16z^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}} = \frac{2z}{2z-1} + \frac{9}{4z\cdot(4z-3)} = \frac{8z^2(4z-3)+9(2z-1)}{4z(4z-3)(2z-1)} =$$

$$H(z) = \frac{32z^3 - 24z^2 + 18z - 9}{4z(4z-3)(2z-1)} = \frac{32z^3 - 24z^2 + 18z - 9}{32z^3 - 40z^2 + 12z}$$

* תכונת הזזה בזמן.

** תחום ההתכנסות יהיה החיתוך של תחומי ההתכנסות של שתי ההתמרות, כלומר:

$$\left(|z| > \left|\frac{1}{2}\right|\right) \wedge \left(|z| > \left|\frac{3}{4}\right|\right) = |z| > \left|\frac{3}{4}\right|$$

תשובה סופית לסעיף ב':

לפיכך, קיבלנו כי פונקציית התמסורת של המערכת הינה:

$$H(z) = \frac{32z^3 - 24z^2 + 18z - 9}{4z(4z-3)(2z-1)} = \frac{32z^3 - 24z^2 + 18z - 9}{32z^3 - 40z^2 + 12z}$$

ג. עתה, נרצה למצוא את משוואת הפרשים המתארת את המערכת, נפתח את הביטוי שקיבלנו לפונקציית התמסורת.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{32z^3 - 24z^2 + 18z - 9}{32z^3 - 40z^2 + 12z} = \frac{1 - \frac{3}{4z} + \frac{9}{16z^2} - \frac{9}{32z^3}}{1 - \frac{5}{4z} + \frac{3}{8z^2}}$$

$$Y(z) \cdot \left(1 - \frac{5}{4z} + \frac{3}{8z^2}\right) = X(z) \cdot \left(1 - \frac{3}{4z} + \frac{9}{16z^2} - \frac{9}{32z^3}\right)$$

$$Y(z) - \frac{5}{4}z^{-1}Y(z) + \frac{3}{8}z^{-2}Y(z) = X(z) - \frac{3}{4}z^{-1}X(z) + \frac{9}{16}z^{-2}X(z) - \frac{9}{32}z^{-3}X(z)$$

נפעיל התמרת Z הפוכה על שני האגפים ונקבל:

$$y[n] - \frac{5}{4}y[n-1] + \frac{3}{8}y[n-2] = x[n] - \frac{3}{4}x[n-1] + \frac{9}{16}x[n-2] - \frac{9}{32}x[n-3]$$

נסדר את המשוואה ונקבל:

$$y[n] = x[n] - \frac{3}{4}x[n-1] + \frac{9}{16}x[n-2] - \frac{9}{32}x[n-3] + \frac{5}{4}y[n-1] - \frac{3}{8}y[n-2]$$

תשובה סופית לסעיף ג׳:
לפיכך, קיבלנו כי משוואת ההפרשים של המערכת הינה:

$$y[n]=x[n]-\frac{3}{4}x[n-1]+\frac{9}{16}x[n-2]-\frac{9}{32}x[n-3]+\frac{5}{4}y[n-1]-\frac{3}{8}y[n-2]$$

המשך סעיף א׳:

כעת נחזור לענות על סעיף א׳ הנוגע לקביעת תכונות המערכת. נמצא את הקטבים והאפסים של פונקציית התמסורת:

$$H(z)=\frac{32z^3-24z^2+18z-9}{4z(4z-3)(2z-1)}=\frac{32z^3-24z^2+18z-9}{32z^3-40z^2+12z}$$

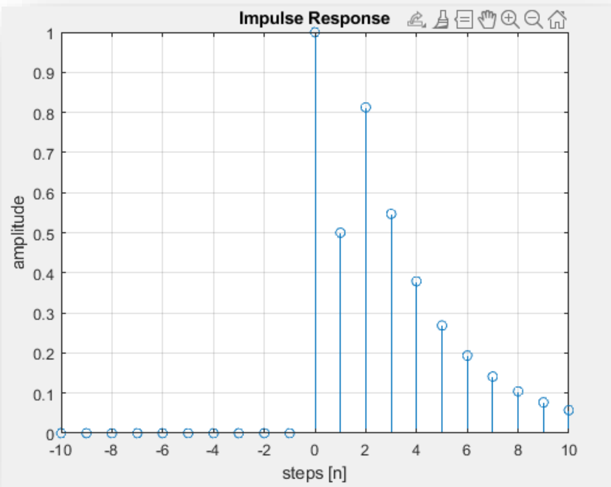
נקבל כי למערכת 3 קטבים ו-3 אפסים (דיאגרמת הקטבים והאפסים מופיעה בסעיף ו׳):
קטבים: $z_0=0, z_1=\frac{3}{4}, z_2=\frac{1}{2}$
אפסים: $z_3=0.597, z_4=0.077+0.682j, z_5=0.077-0.682j$

כפי שראינו בהרצאה נוכל להסיק מדיאגרמה זו את התכונות המבוקשות:

1. <u>סיבתית</u> – המערכת הנתונה **סיבתית**.
תנאי: מערכת תקרא סיבתית אמ״מ המוצא שלה נקבע רק ע״פ הכניסה הנוכחית או בעבר (נבחין כי משוואת ההפרשים שמצאנו בסעיף ג׳ מקיימת תנאי זה).
כמו כן, ראינו בהרצאה כי אם מספר האפסים קטן או שווה למספר הקטבים אז המערכת סיבתית – למערכת ישנם 3 אפסים ו-3 קטבים ולכן המערכת היא אכן סיבתית.
2. <u>יציבה</u> – המערכת הנתונה **יציבה.**
תנאי: מערכת היא יציבה $BIBO$ אם כל הקטבים שלה מוכלים בתוך מעגל היחידה.
ראינו כי קטבי המערכת הינם $0,\frac{1}{2},\frac{3}{4}<1$ ולכן המערכת היא אכן יציבה.
3. <u>הפיכה</u> – המערכת הנתונה **הפיכה**.
תנאי: מערכת תקרא הפיכה אם כל האפסים והקטבים שלה נמצאים בתוך מעגל היחידה.
ראינו כי הקטבים והאפסים של המערכת מוכלים במעגל היחידה ולכן המערכת היא אכן הפיכה.

תשובה סופית לסעיף א׳:
לפיכך, קיבלנו כי המערכת היא סיבתית, יציבה והפיכה.

ד. להלן שרטוט התגובה להלם עבור התחום $n\in[-10,10]$:



נבחין כי ערכי האות עבור ערכי $n<0$ הינם אפסים, כלומר המערכת סיבתית כפי שהוסבר בסעיף א׳.

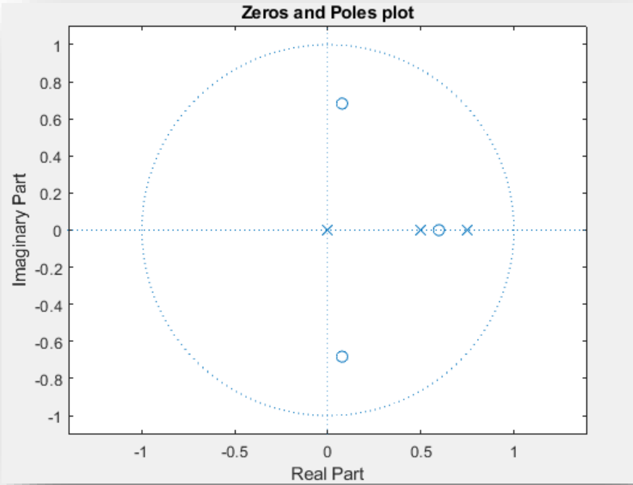
ה. להלן פונקציית התמסורת של המערכת, כפי שחושבה במטלב:

```
H =

  32 s^3 - 24 s^2 + 18 s - 9
  --------------------------
     32 s^3 - 40 s^2 + 12 s
```

נבחין כי זו תוצאה זהה לפונקציית התמסורת אשר חישבנו ידנית בסעיף ב'.

ו. להלן דיאגרמת הקטבים והאפסים של המערכת:

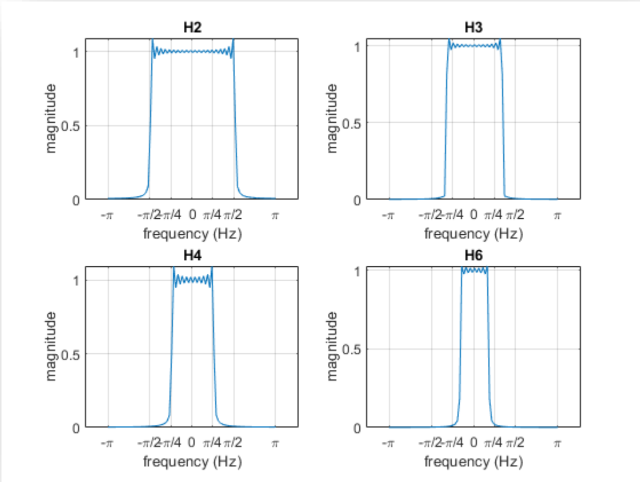


בסעיף א' התבססנו על דיאגרמה זו בקביעת תכונות המערכת וניתן לראות כי אכן מתקיימים:

- המערכת **סיבתית** שכן מספר האפסים קטן-שווה למספר הקטבים.
- המערכת **יציבה** שכן כל הקטבים שלה מוכלים בתוך מעגל היחידה.
- המערכת **הפיכה** שכן כל הקטבים והאפסים שלה מוכלים בתוך מעגל היחידה.

חלק ב'

א. תגובת התדר של המסננים הינה:



נבחין כי המסננים אשר התקבלו אינם מסננים אידיאליים שכן צורתם אינה מלבן מושלם אלא כוללים עליה וירידה חדה אך עדיין פרוסה על טווח תדרים מסוים.

ב. נתחיל בלפשט את $x[n]$:

$$x[n] = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\cos\left(\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{\pi}{10}\right) \cdot n\right) + \cos\left(\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{10}\right) \cdot n\right)\right]$$

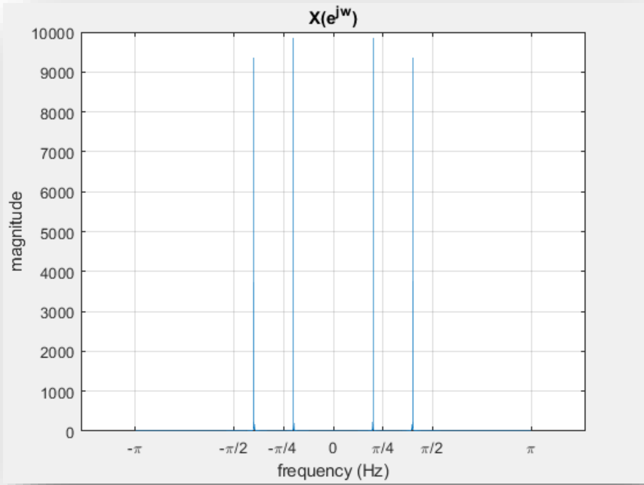
$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot n\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5} \cdot n\right)$$

נבצע התמרת פורייה ל-$x[n]$:

$$X(e^{j\omega}) = DTFT\left\{\cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot n\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5} \cdot n\right)\right\}$$

$$X(e^{j\omega}) = \pi \left[\sum_{l=-\infty}^{l=\infty} \left(\delta\left(\omega - \frac{\pi}{5} - 2\pi \cdot l\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{5} - 2\pi \cdot l\right) + \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{5} - 2\pi \cdot l\right) + \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{5} - 2\pi \cdot l\right)\right)\right]$$

שרטוט הערך המוחלט של $X(e^{j\omega})$ הינו:



נבצע את הסעיפים עבור $h_2[n]$:

ג. נחשב את $y_2[n]$ באמצעות קונבולוציה בין התגובה להלם לכניסה ונבצע התמרת פוריה:

$$y_2[n] = x[n] * h_2[n] \to Y_2(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H_2(e^{j\omega})$$

* לפי תכונה כי קונבולוציה בזמן שווה למכפלה בתדר.

ע״פ הגדרת LPF מתקיים:

$$H_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & else \end{cases}$$

נבחין כי לאחר המכפלה נותר מהסכום האינסופי הדלתאות הבאות בלבד:

$$Y_2(e^{j\omega}) = \pi \left[\delta\left(\omega - \frac{\pi}{5}\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{5}\right) + \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{5}\right) + \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{5}\right)\right]$$

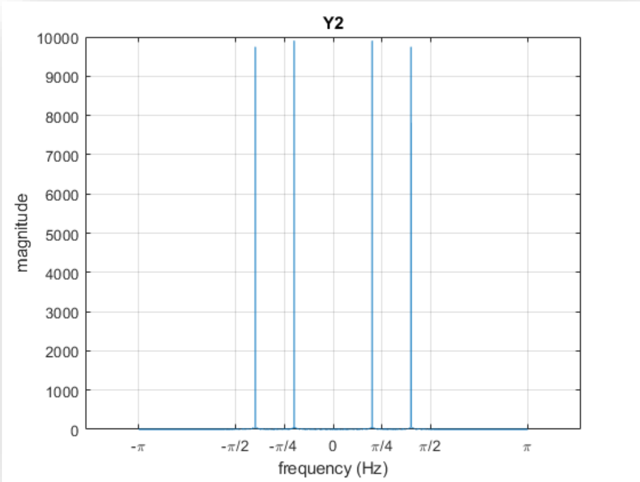
נבצע התמרת פורייה הפוכה:

$$y_2[n] = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\pi}^{\pi} \pi \left[\delta\left(\omega - \frac{\pi}{5}\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{5}\right) + \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{5}\right) + \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{5}\right)\right] e^{j\omega n} d\omega$$

$$y_2[n] = \frac{1}{2} \cdot \left[e^{j\cdot\frac{\pi}{5}\cdot n} + e^{-j\cdot\frac{\pi}{5}\cdot n} + e^{j\cdot\frac{2\pi}{5}\cdot n} + e^{-j\cdot\frac{2\pi}{5}\cdot n}\right] = \cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)$$

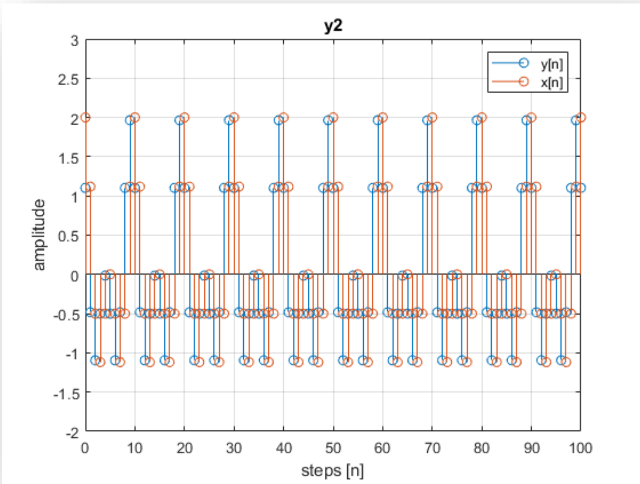
ניתן לראות כי $y_2[n] = x[n]$, דבר זה קורה מאחר והמסנן LPF מעביר את כל התדרים במחזור הבסיסי של $x[n]$.

ד. שרטוט $Y_2(e^{j\omega})$:



כפי שניתן לראות השרטוט זהה לשרטוט ההתמרה של אות הכניסה, דבר זה נובע מכך שהמסנן "רחב" מספיק ע"מ להעביר את כל התדרים באות.

ה. שרטוט המוצא $y_2[n]$ והכניסה $x[n]$:



כאמור המסנן מעביר את כל האות הנכנס, ולכן ניתן לראות כי האות היוצא מן המסנן זהה לאות הנכנס. נציין כי ההסטה שניתן לזהות בין האות המקורי לאות המשוחזר נובעת מכך שהמסנן הנתון אינו ממורכז לזמן אפס ולפיכך ישנה הזזה של האות המשוחזר בזמן.

נבצע את הסעיפים עבור $h_3[n]$:

ג. נחשב את $y_3[n]$ באמצעות קונבולוציה בין התגובה להלם לכניסה ונבצע התמרת פוריה :

$$y_3[n] = x[n] \cdot h_3[n] \rightarrow Y_3(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H_3(e^{j\omega})$$

* לפי תכונה כי קונבולוציה בזמן שווה למכפלה בתדר.

ע"פ הגדרת LPF מתקיים :

$$H_3(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \frac{\pi}{3} \\ 0, & else \end{cases}$$

נבחין כי לאחר המכפלה נותר מהסכום האינסופי הדלתאות הבאות בלבד :

$$Y_3(e^{j\omega}) = \pi\left[\delta\left(\omega - \frac{\pi}{5}\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{5}\right)\right]$$

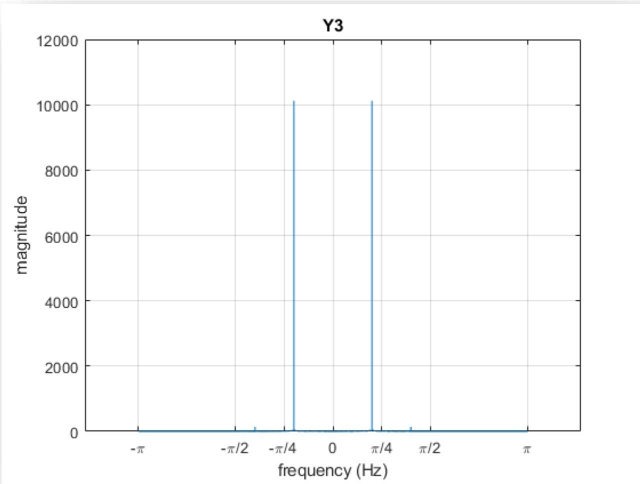
נבצע התמרת פורייה הפוכה :

$$y_3[n] = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \pi\left[\delta\left(\omega - \frac{\pi}{5}\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{5}\right)\right] e^{j\omega n} d\omega$$

$$y_3[n] = \frac{1}{2} \cdot \left[e^{j\cdot\frac{\pi}{5}\cdot n} + e^{-j\cdot\frac{\pi}{5}\cdot n}\right] = \cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)$$

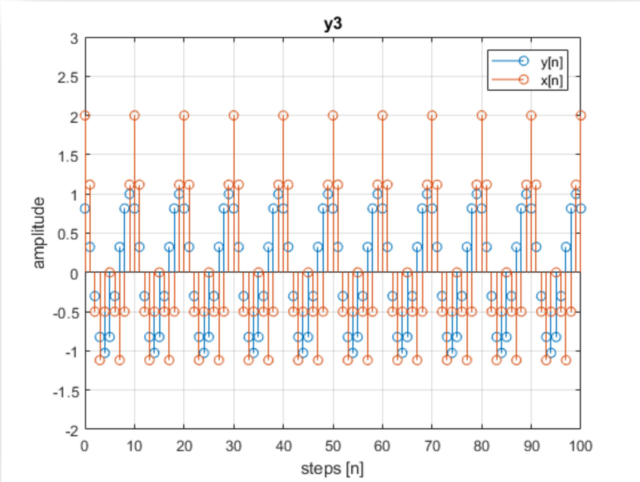
ניתן לראות כי אחד הקוסינוסים "הועלם" על ידי המסנן.

ד. שרטוט $Y_3(e^{j\omega})$:



כפי שניתן לראות בשרטוט ההתמרה של המוצא חסרים התדרים $\pm\frac{2\pi}{5}$, דבר זה נובע מכך שהמסנן מעביר תדרים של עד $\frac{\pi}{3}$ ולכן רק התדרים $\pm\frac{\pi}{5}$ עוברים.

ה.   שרטוט המוצא $y_3[n]$ והכניסה $x[n]$:



כאמור חלק מן ההרמוניות הועלמו ע״י המסנן וחלקן נשארו. ניתן לראות כי חלק מן הדגימות של האות זהות לאות היוצא, דגימות אלה מקורן בקוסינוס שתדרו שנשאר. אך חלק מן הדגימות של האות הנכנס נעלמו באות היוצא, דגימות אלה מקורן בקוסינוס שתדרו הועלם ע״י המסנן.

נציין כי ההסטה שניתן לזהות בין האות המקורי לאות המשוחזר נובעת מכך שהמסנן הנתון אינו ממורכז לזמן אפס ולפיכך ישנה הזזה של האות המשוחזר בזמן.

נבצע את הסעיפים עבור $h_4[n]$:

ג.   נחשב את $y_4[n]$ באמצעות קונבולוציה בין התגובה להלם לכניסה ונבצע התמרת פוריה:

$$y_4[n] = x[n] \cdot h_4[n] \rightarrow Y_4(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H_4(e^{j\omega})$$

* לפי תכונה כי קונבולוציה בזמן שווה למכפלה בתדר.

ע״פ הגדרת LPF מתקיים:

$$H_4(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \frac{\pi}{4} \\ 0, & else \end{cases}$$

נבחין כי לאחר המכפלה נותר מהסכום האינסופי הדלתאות הבאות בלבד:

$$Y_4(e^{j\omega}) = \pi\left[\delta\left(\omega - \frac{\pi}{5}\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{5}\right)\right]$$

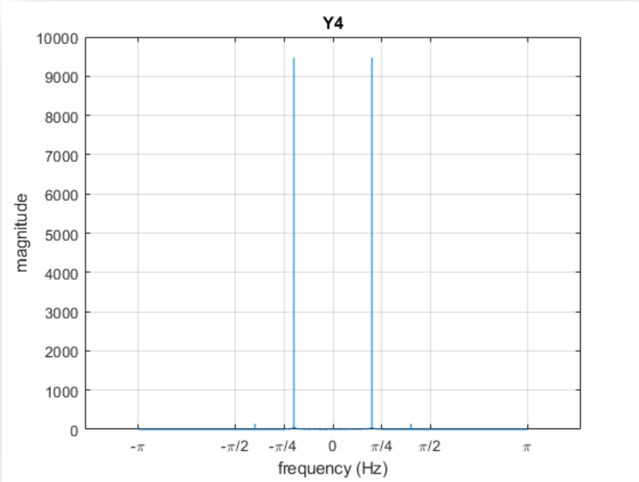
נבצע התמרת פורייה הפוכה:

$$y_4[n] = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \pi\left[\delta\left(\omega - \frac{\pi}{5}\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{5}\right)\right] e^{j\omega n} d\omega$$

$$y_4[n] = \frac{1}{2} \cdot \left[e^{j\cdot\frac{\pi}{5}\cdot n} + e^{-j\cdot\frac{\pi}{5}\cdot n}\right] = \cos\left(\frac{\pi}{5} n\right)$$

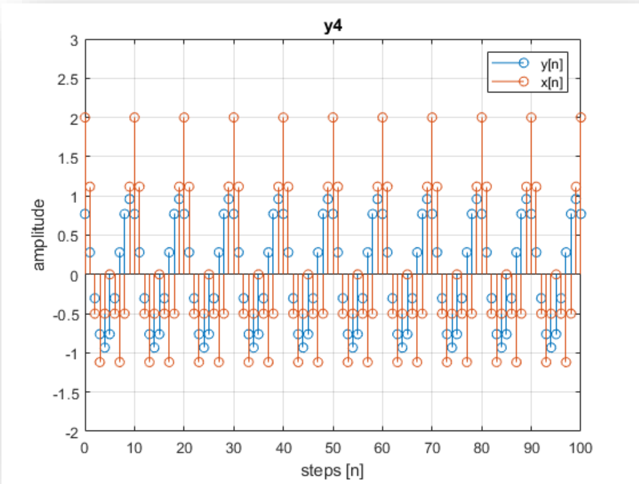
ניתן לראות כי אחד הקוסינוסים ״הועלם״ על ידי המסנן, בדומה למסנן h_3.

ד. שרטוט $Y_4(e^{j\omega})$:



כפי שניתן לראות בשרטוט ההתמרה של המוצא חסרים התדרים $\pm\frac{2\pi}{5}$, דבר זה נובע מכך שהמסנן מעביר תדרים של עד $\frac{\pi}{4}$ ולכן רק התדרים $\pm\frac{\pi}{5}$ עוברים. השרטוט זהה לשרטוט עבור המסנן h_3 מאחר ובטווח התדרים בין $\frac{\pi}{3}$ ל-$\frac{\pi}{4}$ אין תדרים הקיימים באות.

ה. שרטוט המוצא $y_4[n]$ והכניסה $x[n]$:



כאמור חלק מן ההרמוניות הועלמו ע״י המסנן וחלקן נשארו. ניתן לראות כי חלק מן הדגימות של האות זהות לאות היוצא, דגימות אלה מקורן בקוסינוס שתדרו שנשאר. אך חלק מן הדגימות של האות הנכנס נעלמו באות היוצא, דגימות אלה מקורן בקוסינוס שתדרו הועלם ע״י המסנן.

נציין כי ההסטה שניתן לזהות בין האות המקורי לאות המשוחזר נובעת מכך שהמסנן הנתון אינו ממורכז לזמן אפס ולפיכך ישנה הזזה של האות המשוחזר בזמן.

גם בשרטוט זה ניתן לראות תוצאה זהה למסנן h_3.

נבצע את הסעיפים עבור $h_6[n]$:

ג. נחשב את $y_6[n]$ באמצעות קונבולוציה בין התגובה להלם לכניסה ונבצע התמרת פוריה:

$$y_6[n] = x[n] \cdot h_6[n] \rightarrow Y_6(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H_6(e^{j\omega})$$

* לפי תכונה כי קונבולוציה בזמן שווה למכפלה בתדר.

ע"פ הגדרת LPF מתקיים:

$$H_6(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \frac{\pi}{6} \\ 0, & else \end{cases}$$

נבחין כי לאחר המכפלה נותר מהסכום האינסופי הדלתאות הבאות בלבד:

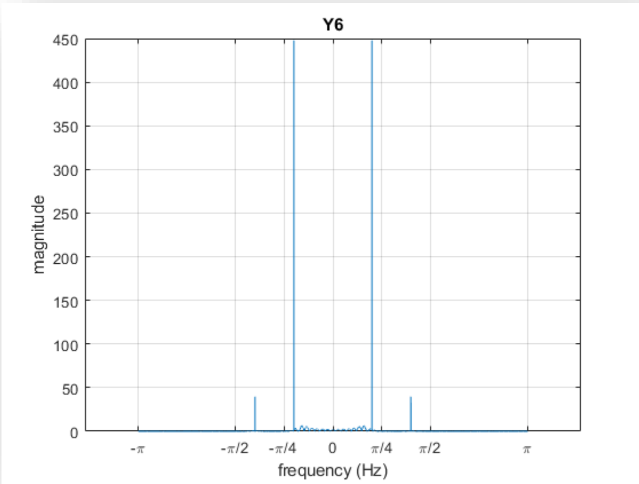
$$Y_6(e^{j\omega}) = \pi[0] = 0$$

נבצע התמרת פורייה הפוכה:

$$y_6[n] = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} 0 \cdot e^{j\omega n} d\omega = 0$$

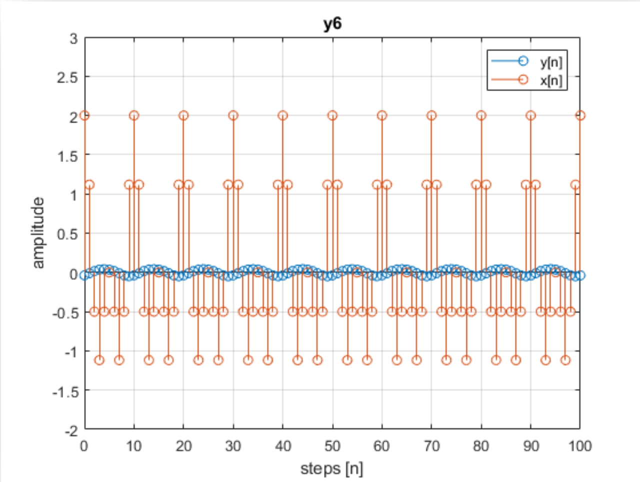
ניתן לראות כי $y_6[n]$ הינו 0, בשל העובדה כי המסנן מעביר תדרים נמוכים יותר מתדרי הקוסינוס שלנו.

ד. שרטוט $Y_6(e^{j\omega})$:



אומנם ניתן לראות בשרטוט זה את התדרים של האות המקורי, אך עוצמתם הונחתה בלפחות פי 20 מהעוצמה המקורית שניתן לראות בשרטוט מסעיף ב'. דבר זה נובע מאחר ומסנן אידיאלי לא קיים ובפועל התדרים שגדולים מתדר הסף מונחתים ולא נעלמים לחלוטין. תדרים שקרובים ולתדר הסף של המסנן ינחתו פחות מאשר תדרים רחוקים יותר. לכן, עוצמת התדר $\frac{\pi}{5}$ גבוהה מעוצמת התדר $\frac{2\pi}{5}$ מאחר והוא קרוב יותר לתדר הסף.

ה.   שרטוט המוצא $y_6[n]$ והכניסה $x[n]$:



כפי שהוסבר מעלה המסננים אינם אידיאליים ולפיכך האות מונחת כמעט לחלוטין אך עדיין ניתן לראות כי האות הינו בקירוב אפסי בכל המדידות המוצגות בגרף.

נציין כי ההסטה שניתן לזהות בין האות המקורי לאות המשוחזר נובעת מכך שהמסנן הנתון אינו ממורכז לזמן אפס ולפיכך ישנה הזזה של האות המשוחזר בזמן – מעט קשה יותר לזהות זאת בגרף זה ביחס לסעיפים הקודמים.

חלק ג'

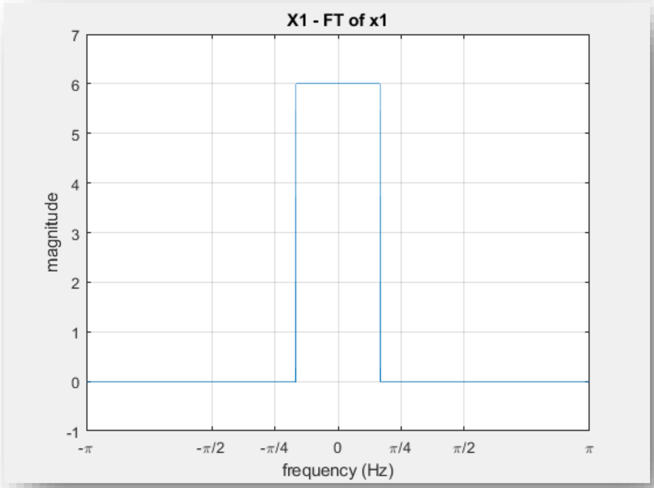
נתחיל לבצע את הסעיפים עבור האות $x_1(t) = sinc\left(\frac{t}{6}\right)$:

א. נחשב את התמרת פורייה של האות:

$$X_1(j\Omega) = FT\left\{sinc\left(\frac{t}{6}\right)\right\}(\Omega) = \frac{1}{\left(\frac{1}{6}\right)} FT\{sinc\,(t)\}\left(\frac{\Omega}{\left(\frac{1}{6}\right)}\right) = 6 \cdot FT\{sinc\,(t)\}(6 \cdot \Omega)$$

$$X_1(j\Omega) = \begin{cases} 6, & |\Omega| < \Omega_m = \frac{\pi}{6} \\ 0, & else \end{cases}$$

השרטוט מן המטלאב:



ב. נשים לב כי $\Omega_m = \frac{\pi}{6}$ ולכן כפי שהראנו בתרגול 5 מתקיים:

$$T_{max} \leq \frac{\pi}{\Omega_m} = 6\ [sec]$$

כלומר לכל זמן דגימה קטן מ-6 שניות נבטיח כי יתקבל שחזור מדויק.
נציין כי האי-שיוויון הינו **אי-שיוויון חלש** שכן ערכי הספקטרום של האות הדגום בקצוות הינם אפס.

נבחר להשתמש ב- $\boldsymbol{T = 4}$ להמשך התרגיל.

ג. האות הדגום הינו:

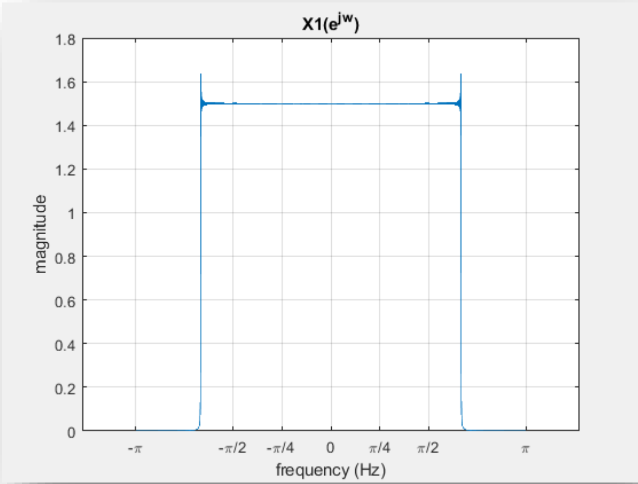
$$x_1[n] = x_1(n \cdot T) = x_1(4n) = sinc\left(\frac{2}{3} \cdot n\right)$$

נבצע DTFT לאות ונקבל:

$$X_1(e^{j\omega}) = DTFT\left\{sinc\left(\frac{2}{3} \cdot n\right)\right\}(\omega) = DTFT\left\{\frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{2}{3} \cdot \pi}{\pi} \cdot sinc\left(\frac{\frac{2}{3} \cdot \pi}{\pi} \cdot n\right)\right\}(\omega)$$

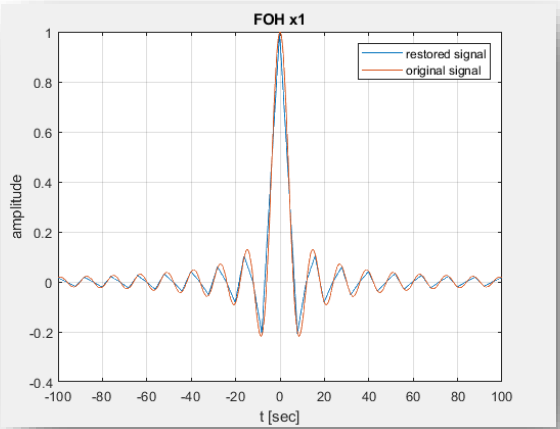
$$X_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{3}{2}, & |\omega| < \frac{2\pi}{3} \\ 0, & else \end{cases}$$

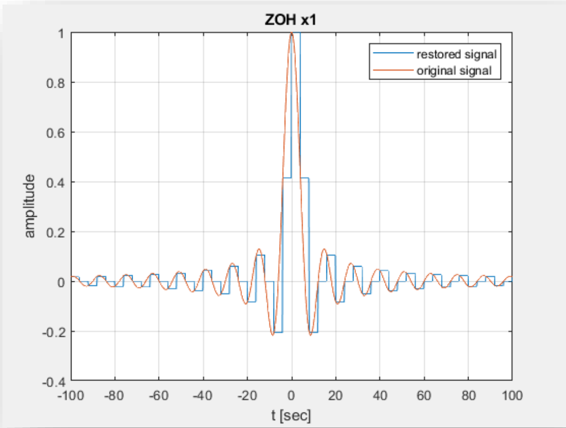
ד. שרטוט הספקטרום של האות הדגום:



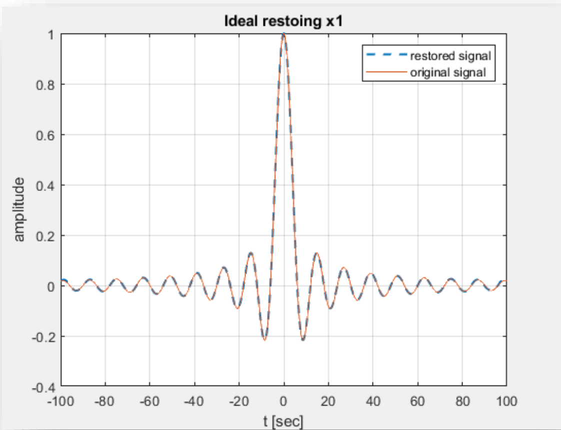
ה. להלן שחזור האותות בשיטות השונות:

שחזורי ZOH ו-FOH:





- שחזור אידיאלי:



ו. נחזור עבור זמן דגימה $T = 1.5 \cdot T_{max} = 9$.
כעת האות הדגום יהיה:

$$x_1[n] = x_1(n \cdot T) = x_1(9n) = sinc\left(\frac{3}{2} \cdot n\right)$$

לפי דף הנוסחאות נקבל:

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} FT\{x_1(t)\}\left(j \cdot \frac{\omega - 2\pi k}{T}\right) = \frac{1}{9} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} FT\left\{sinc\left(\frac{t}{6}\right)\right\}\left(j \cdot \frac{\omega - 2\pi k}{9}\right)$$

בסעיף א' חישבנו את התמרת הפוריה של $sinc\left(\frac{t}{6}\right)$, נשתמש בה כעת:

$$FT\left\{sinc\left(\frac{t}{6}\right)\right\}\left(j \cdot \frac{\omega - 2\pi k}{9}\right) = \begin{cases} 6, & \left|\frac{\omega - 2\pi k}{9}\right| < \frac{\pi}{6} \\ 0, & else \end{cases} = \begin{cases} 6, & |\omega - 2\pi k| < \frac{3\pi}{2} \\ 0, & else \end{cases}$$

מאחר ו- $\omega \in [-\pi, \pi]$ רק עבור $k = 0,1,-1$ הביטוי בתוך הסכום אינו שווה 0 לכל ערך ω אפשרי.
נחשב את הביטוי בנפרד לכל ערך k

- כאשר $k = 0$ נקבל:

$$FT\left\{sinc\left(\frac{t}{6}\right)\right\}\left(j \cdot \frac{\omega - 2\pi k}{9}\right) = \begin{cases} 6, & |\omega| < \frac{3\pi}{2} \\ 0, & else \end{cases}$$

נשים לב כי לכל ערך ω אפשרי מתקיים $|\omega| < \frac{3\pi}{2}$ ולכן הביטוי שווה ל-6 באופן קבוע.

- כאשר $k = 1$ נקבל:

$$FT\left\{sinc\left(\frac{t}{6}\right)\right\}\left(j \cdot \frac{\omega - 2\pi k}{9}\right) = \begin{cases} 6, & |\omega - 2\pi| < \frac{3\pi}{2} \\ 0, & else \end{cases}$$

כאשר רק $\frac{\pi}{2} > \omega$ נקבל $|\omega - 2\pi| < \frac{3\pi}{2}$. ולכן כאשר $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ הביטוי שווה ל-6 ואחרת 0.

- כאשר $k = -1$ נקבל:

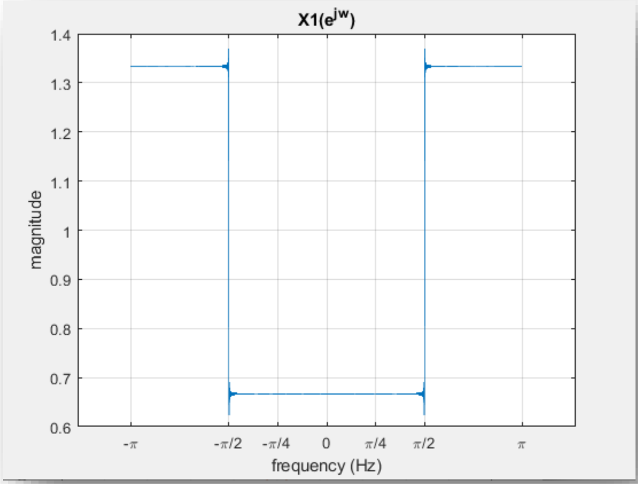
$$FT\left\{sinc\left(\frac{t}{6}\right)\right\}\left(j \cdot \frac{\omega - 2\pi k}{9}\right) = \begin{cases} 6, & |\omega + 2\pi| < \frac{3\pi}{2} \\ 0, & else \end{cases}$$

כאשר רק $-\frac{\pi}{2} > \omega$ נקבל $|\omega - 2\pi| < \frac{3\pi}{2}$. ולכן כאשר $-\pi < \omega < -\frac{\pi}{2}$ הביטוי שווה ל-6 ואחרת 0.

ולכן כאשר $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ נקבל את התרומה של $k = 0,1$, כאשר $-\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2}$ נקבל את התרומה של $k = 0$ בלבד וכאשר $-\pi < \omega < -\frac{\pi}{2}$ נקבל את התרומה של $k = 0,-1$ ולכן:

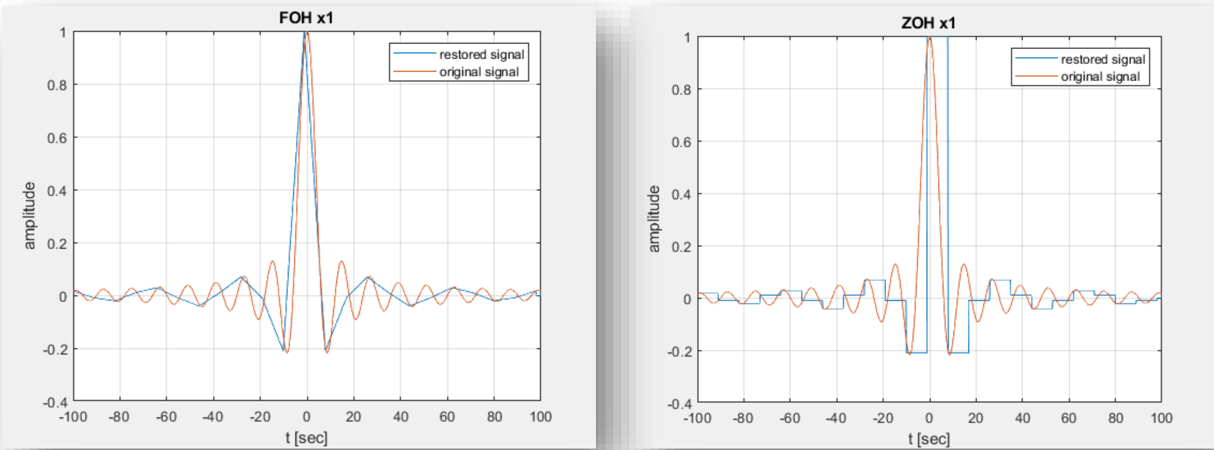
$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{9} \cdot \begin{cases} 6+6, & \frac{\pi}{2} < \omega < \pi \\ 6, & -\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2} \\ 6+6, & -\pi < \omega < -\frac{\pi}{2} \end{cases} = \begin{cases} \frac{4}{3}, & \frac{\pi}{2} < |\omega| < \pi \\ \frac{2}{3}, & |\omega| < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

שרטוט הספקטרום של האות הדגום:

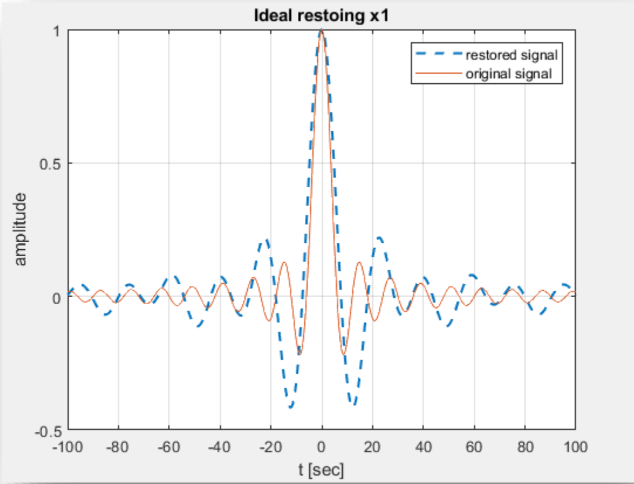


להלן שחזור האותות בשיטות השונות:

- שחזורי ZOH ו-FOH:



- שחזור אידיאלי:



ז. הסבר לתוצאות:

ביצענו 6 סוגי שחזורים עבור האות $x_1(t) = sinc\left(\frac{t}{6}\right)$:

- שלושה שחזורים עבור $T = 4 < 6 = T_s$ (העומד בתנאי נייקוויסט) מסוג ZOH, FOH ואידיאלי.
- שלושה שחזורים עבור $T = 9 > 6 = T_s$ (שאינו עומד בתנאי נייקוויסט) מסוג ZOH, FOH ואידיאלי.

נבחין כי איכות השחזור של האותות הדגומים ע"י שיטות השחזור השונות משתנה כאשר שחזור ZOH הינו השחזור הגס ביותר, אחריו שחזור מסוג FOH שנותן תוצאה טובה יותר ולבסוף השחזור האידיאלי אשר עבור דגימה העומדת בתנאי נייקוויסט משחזר את האות בצורה מושלמת.

כמו כן, נשים לב כי ככל שקצב הדגימה יהיה נמוך יותר כך תדר הדגימה יהיה גבוה יותר וכך איכות השחזורים שנקבל יהיו מדויקים יותר. כאשר עבור $T_s \to 0$ נקבל אות רציף הזהה לאות המקורי.

נציין כי עבור האות הדגום בזמן מחזור $T = 9$, אשר אינו עומד בתנאי נייקוויסט, האות המשוחזר אינו זהה לאות המקורי כתוצאה מאיבוד המידע הנובע מתופעת הקיפול (Aliasing).

נעבור לבצע את הסעיפים עבור האות $x_2(t)=\cos\left(\frac{\pi}{12}\cdot t\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)$:

א. נשים לב שהאות בעל זמן מחזור $T=24$, נמיר את $x_2(t)$ לטור פורייה :

$$x_2(t)=\cos\left(\frac{\pi}{12}\cdot t\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)=\frac{1}{2}\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{12}t}+\frac{1}{2}\cdot e^{-j\cdot\frac{\pi}{12}t}+\frac{1}{2j}\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{6}t}-\frac{1}{2j}\cdot e^{-j\cdot\frac{\pi}{6}t}$$

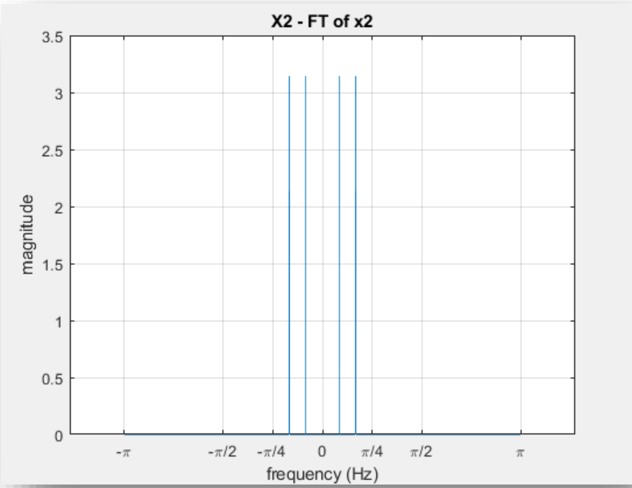
$$x_2(t)=\underbrace{\frac{1}{2}}_{a_1}\cdot e^{j\frac{2\pi}{24}t}+\underbrace{\frac{1}{2}}_{a_{-1}}\cdot e^{-j\cdot\frac{2\pi}{24}t}+\underbrace{\frac{1}{2j}}_{a_2}\cdot e^{j\cdot 2\cdot\frac{2\pi}{24}t}\underbrace{-\frac{1}{2j}}_{a_{-2}}\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\frac{2\pi}{24}t}$$

נשתמש בנוסחה להתמרת פורייה של אות מחזורי רציף :

$$X_2(j\Omega)=2\pi\left[a_1\cdot\delta\left(\Omega-\frac{2\pi}{24}\right)+a_{-1}\cdot\delta\left(\Omega+\frac{2\pi}{24}\right)+a_2\cdot\delta\left(\Omega-2\cdot\frac{2\pi}{24}\right)+a_{-2}\cdot\delta\left(\Omega+2\cdot\frac{2\pi}{24}\right)\right]$$

$$X_2(j\Omega)=\pi\left[\delta\left(\Omega-\frac{\pi}{12}\right)+\delta\left(\Omega+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{1}{j}\delta\left(\Omega-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{j}\delta\left(\Omega+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

השרטוט מן המטלאב :



נציין כי במסגרת יצירת הגרף השתמשנו בפונקציית Dirac אליה הכנסנו ערכים מעוגלים על מנת שערכי התדר המוצבים בפונקציה יהיו מדויקים ויובילו ליצירת הגרף המופיע לעיל. בפועל הערכים אשר התקבלו בתוך פונקציית ה$Dirac$ הינם קטנים מאוד ($\sim10^{-18}$) אשר מבחינה הנדסית הם בפועל אפס ולכן נכון להתייחס אליהם ככזה.

להלן השורה מהקוד אליה אנו מתייחסים :

```
X2 = pi*(dirac(round(w-(pi/12),4))+dirac(round(w+(pi/12), 4))-1i*dirac(round(w-(pi/6),4))+1i*dirac(round(w+(pi/6),4)));
```

ב. נשים לב כי $\Omega_m=\frac{\pi}{6}$ ולכן כפי שהראנו בתרגול 5 מתקיים :

$$T_{max}<\frac{\pi}{\Omega_m}=6\ [sec]$$

כלומר לכל זמן דגימה קטן מ-6 שניות נבטיח כי יתקבל שחזור מדויק.
נציין כי האי-שיוויון הינו **אי-שיוויון חזק** שכן ערכי הספקטרום של האות הדגום בקצוות אינם אפס.

ג. האות הדגום הינו:

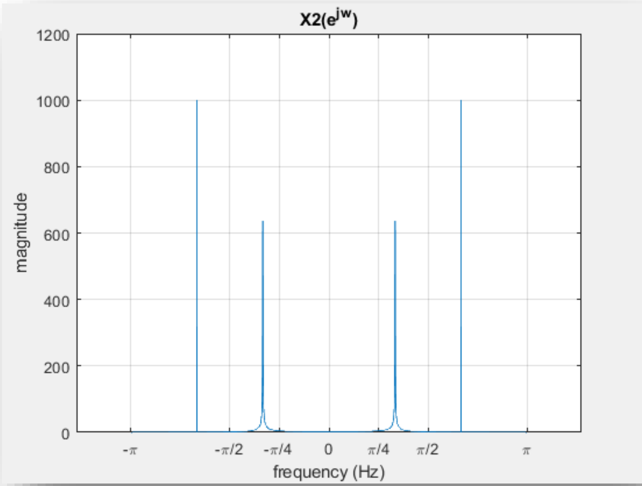
$$x_2[n] = x_2(n \cdot T) = x_2(4n) = \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3} \cdot n\right)$$

נבצע DTFT לאות ונקבל:

$$X_2(e^{j\omega}) = DTFT\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3} \cdot n\right)\right\}(\omega) =$$

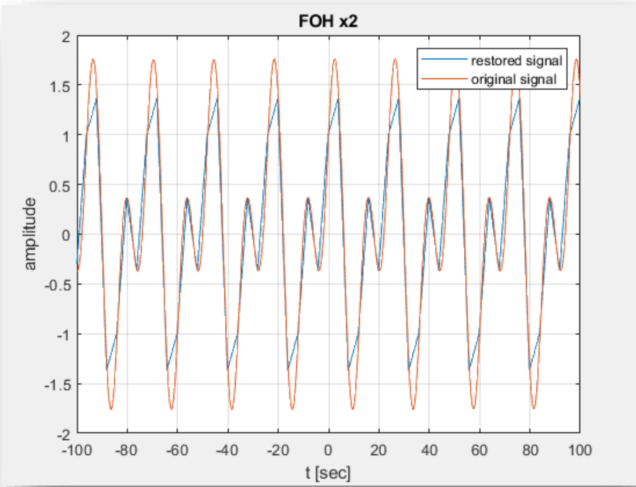
$$X_2(e^{j\omega}) = \pi\left[\sum_{l=-\infty}^{l=\infty}\left(\delta\left(\omega - \frac{\pi}{3} - 2\pi \cdot l\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{3} - 2\pi \cdot l\right) + \frac{1}{j} \cdot \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{3} - 2\pi \cdot l\right) - \frac{1}{j} \cdot \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{3} - 2\pi \cdot l\right)\right)\right]$$

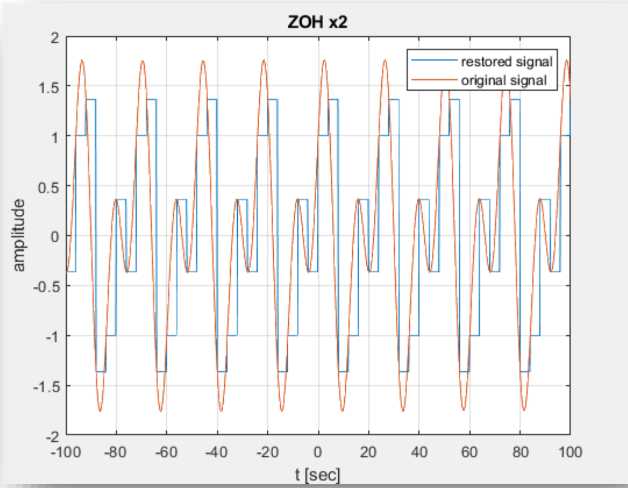
ד. שרטוט הספקטרום של האות הדגום:



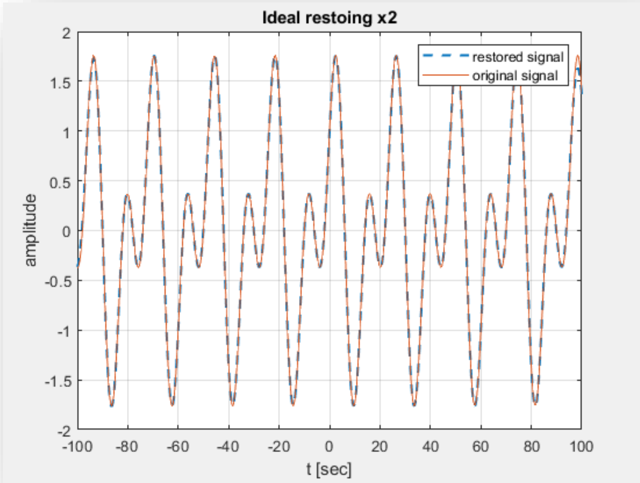
ה. להלן שחזור האותות בשיטות השונות:

- שחזורי ZOH ו-FOH:





- שחזור אידיאלי:



ו. נחזור עבור זמן דגימה $T = 1.5 \cdot T_{max} = 9$.

כעת האות הדגום יהיה:

$$x_2[n] = x_2(n \cdot T) = x_2(9n) = \cos\left(\frac{3\pi}{4} \cdot n\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} \cdot n\right)$$

נבצע DTFT לאות ונקבל:

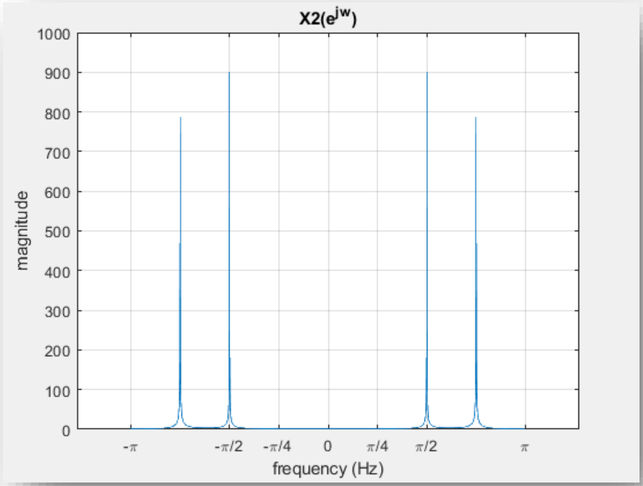
$$X_2(e^{j\omega}) = DTFT\left\{\cos\left(\frac{3\pi}{4} \cdot n\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} \cdot n\right)\right\}(\omega)$$

$$X_2(e^{j\omega}) = \pi\left[\sum_{l=-\infty}^{l=\infty}\left(\delta\left(\omega - \frac{3\pi}{4} - 2\pi \cdot l\right) + \delta\left(\omega + \frac{3\pi}{4} - 2\pi \cdot l\right) + \frac{1}{j} \cdot \delta\left(\omega - \frac{3\pi}{2} - 2\pi \cdot l\right) - \frac{1}{j} \cdot \delta\left(\omega + \frac{3\pi}{2} - 2\pi \cdot l\right)\right)\right]$$

נרצה שהתדרים בתוך פונקציות הדלתא יהיו בין π ל-$-\pi$ ולכן נוסיף\נחסר 2π מהשני דלתאות האחרונות:

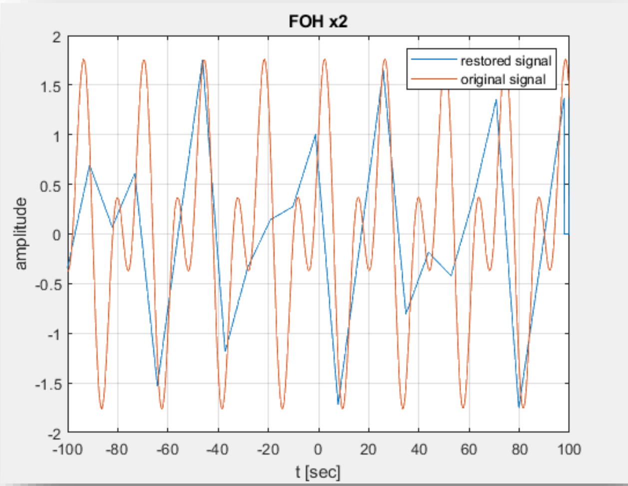
$$X_2(e^{j\omega}) = \pi\left[\sum_{l=-\infty}^{l=\infty}\left(\delta\left(\omega - \frac{3\pi}{4} - 2\pi \cdot l\right) + \delta\left(\omega + \frac{3\pi}{4} - 2\pi \cdot l\right) + \frac{1}{j} \cdot \delta\left(\omega + \frac{\pi}{2} - 2\pi \cdot l\right) - \frac{1}{j} \cdot \delta\left(\omega - \frac{\pi}{2} - 2\pi \cdot l\right)\right)\right]$$

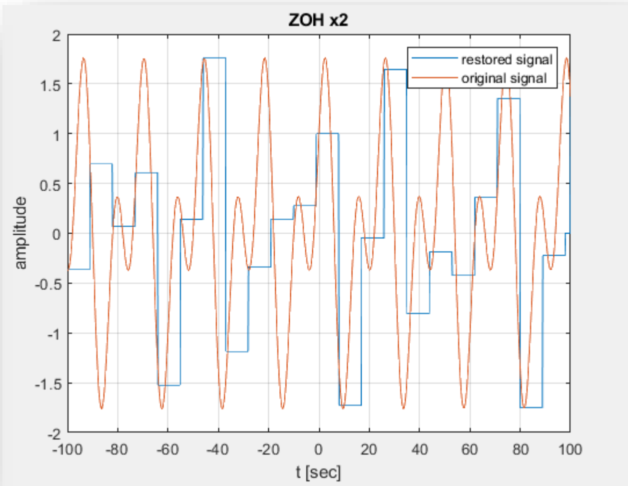
שרטוט הספקטרום של האות הדגום:



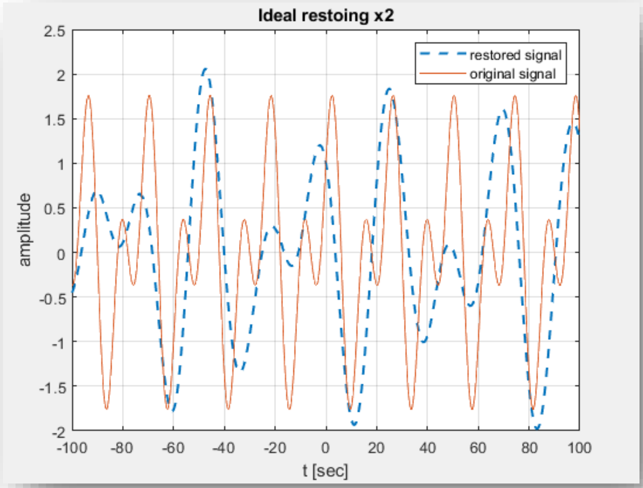
להלן שחזור האותות בשיטות השונות:

- שחזורי ZOH ו-FOH:





- שחזור אידיאלי:



ז. **הסבר לתוצאות** (בדומה לניתוח של האות הראשון):

ביצענו 6 סוגי שחזורים עבור האות: $x_2(t) = \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$

- שלושה שחזורים עבור $\mathrm{T_s} = 6 > 4 = \mathrm{T}$ (העומד בתנאי נייקוויסט) מסוג ZOH, FOH ואידיאלי.
- שלושה שחזורים עבור $\mathrm{T_s} = 6 < 9 = \mathrm{T}$ (שאינו עומד בתנאי נייקוויסט) מסוג ZOH, FOH ואידיאלי.

נבחין כי איכות השחזור של האותות הדגומים ע״י שיטות השחזור השונות משתנה כאשר שחזור ZOH הינו השחזור הגס ביותר, אחריו שחזור מסוג FOH שנותן תוצאה טובה יותר ולבסוף השחזור האידיאלי אשר עבור דגימה העומדת בתנאי נייקוויסט משחזר את האות בצורה מושלמת.

כמו כן, נשים לב כי ככל שקצב הדגימה יהיה נמוך יותר כך תדר הדגימה יהיה גבוה יותר וכך איכות השחזורים שנקבל יהיו מדויקים יותר. כאשר עבור $\mathrm{T_s} \to 0$ נקבל אות רציף הזהה לאות המקורי.

נציין כי עבור האות הדגום בזמן מחזור $\mathrm{T} = 9$, אשר אינו עומד בתנאי נייקוויסט, האות המשוחזר אינו זהה לאות המקורי כתוצאה מאיבוד המידע הנובע מתופעת הקיפול (Aliasing).