第 5 章
点的复合运动分析

第5章 点的复合运动分析

由于运动的相对性，在不同的参考系中，对于同一动点，其运动方程、速度和加速度是不相同的。许多力学问题中，常常需要研究一点在不同参考系中的运动量(速度和加速度)的相互关系。

本章将用定、动两种参考系，描述同一动点的运动；分析两种结果之间的相互关系，建立点的速度合成定理和加速度合成定理。

点的复合运动是运动分析方法的重要内容，在工程运动分析中有着广泛的应用；同时可为相对运动动力学提供运动分析的理论基础；点的复合运动的分析方法还可推广应用于分析刚体的复合运动。本章是“工程运动学” 篇的重点内容。

第5章 点的复合运动分析

点的复合运动的几个基本概念

点的速度合成定理

牵连运动为平移时点的加速度合成定理

牵连运动为转动时点的加速度合成定理

结论与讨论

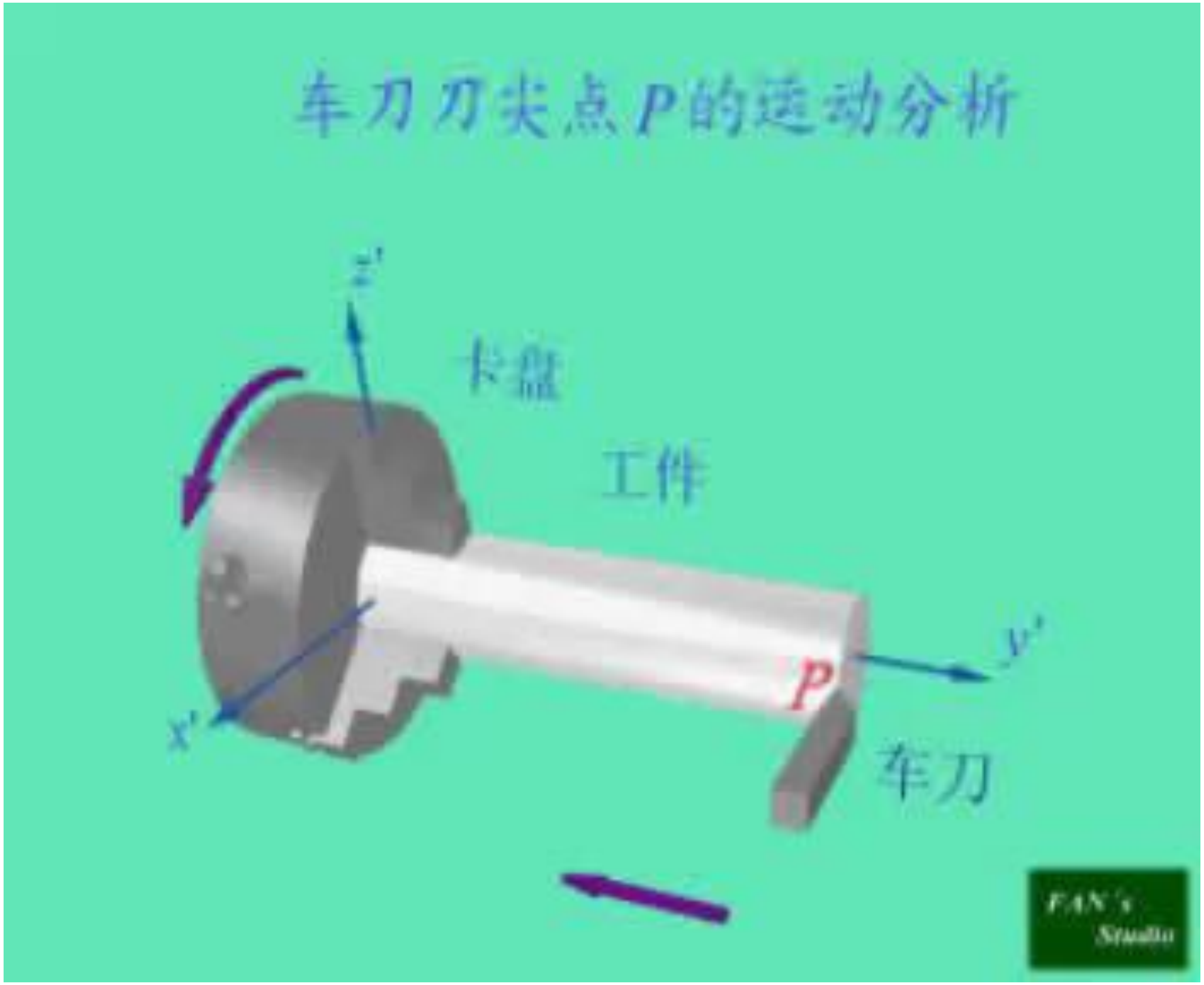
点的合成运动的几个基本概念

□ 两种参考系

一般工程问题中，通常将固连在地球或相对地球不动的架构上的坐标系，称为**定参考系**(fixed reference system)，简称**定系**，以坐标系Oxyz表示；

固定在其它相对于地球运动的参考体上的坐标系称为**动参考系**(moving reference system)，简称**动系**，以坐标系O'x'y'z'表示。

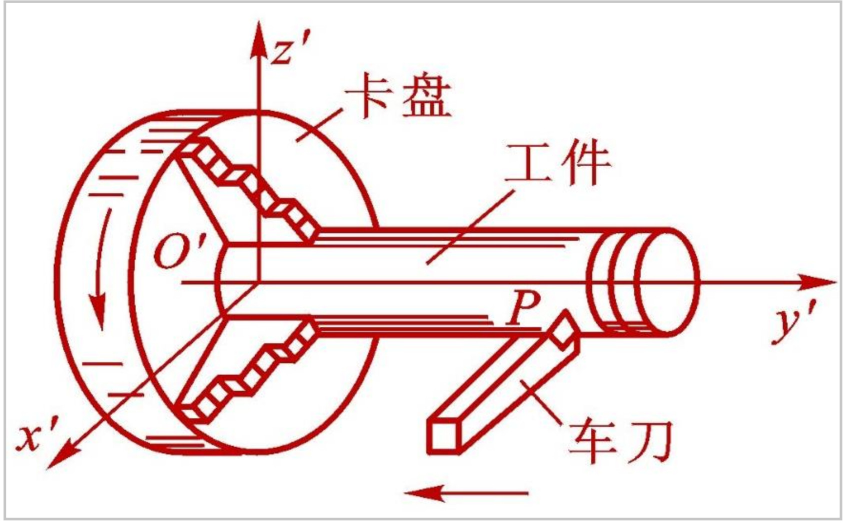
定系和动系



定系和动系

夹持在车床三爪卡盘上的圆柱体工件与切削车刀。卡盘—工件绕轴转动，车刀向左作直线平移。

若以刀尖P点为动点作为研究对象，则可以卡盘—工件为**动系**$O'x'y'z'$，而以车床床身(固连于地球)为**定系**$Oxyz$分析动点P的运动。

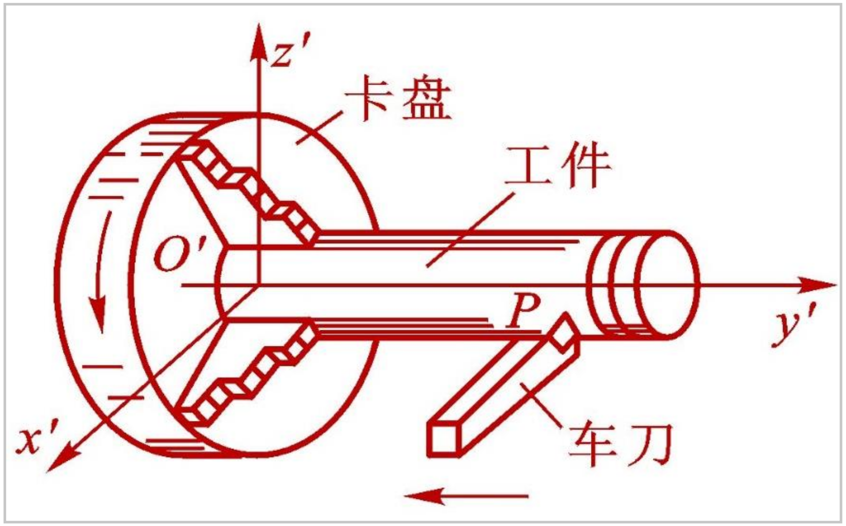


动点(研究对象)相对于定系的运动，称为动点的**绝对运动**(absolute motion)。动点刀尖P点的绝对运动为水平直线(绝对轨迹)运动。

动点相对于定系的运动速度和加速度，分别称为动点的**绝对速度**(absolute velocity)和**绝对加速度**(absolute acceleration)，分别用符号v_a和a_a表示。

定系和动系

若以刀尖P点为动点作为研究对象，则可以卡盘—工件为**动系**$O'x'y'z'$，而以车床床身(固连于地球)为**定系**$Oxyz$分析动点P的运动。

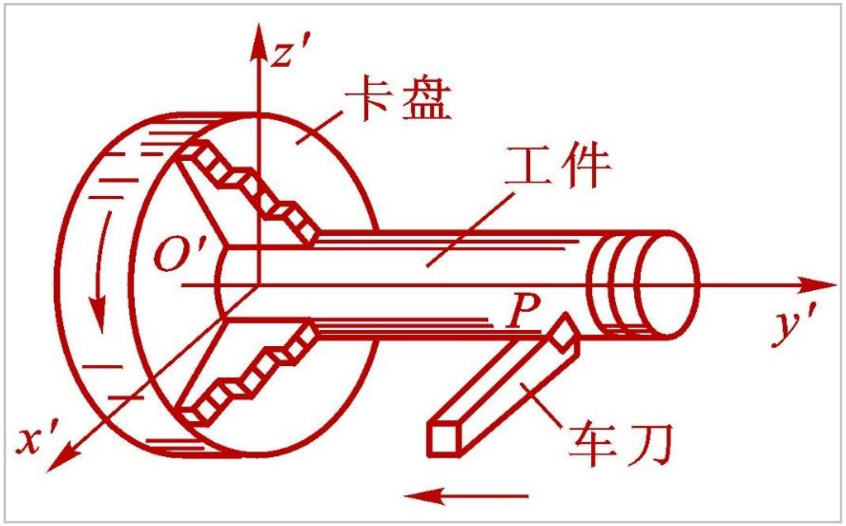


动点相对于动系的运动，称为动点的**相对运动**(relativemotion)。动点刀尖上P点的相对运动是在工件圆柱面上的螺旋线(相对轨迹)运动。

动点相对于动系的运动速度和加速度，分别称为动点的**相对速度**(relative velocity)和**相对加速度**(relative acceleration)，分别用符号v_r和a_r表示。

定系和动系

若以刀尖P点为动点作为研究对象，则可以卡盘—工件为**动系**$O'x'y'z'$，而以车床床身(固连于地球)为**定系**$Oxyz$分析动点P的运动。



动系相对于定系的运动，称为**牵连运动**。图中，牵连运动为绕Oy'轴的定轴转动。

动系上每一瞬时与动点重合的那一点，称为**瞬时重合点**(**牵连点**)。在不同的瞬时，牵连点通常是动系上的不同点。

动系上牵连点相对定系的运动速度和加速度，分别称为动点的**牵连速度**和**牵连加速度**，分别用符号v_e和a_e表示。

概念间的联系

①绝对运动、速度、加速度

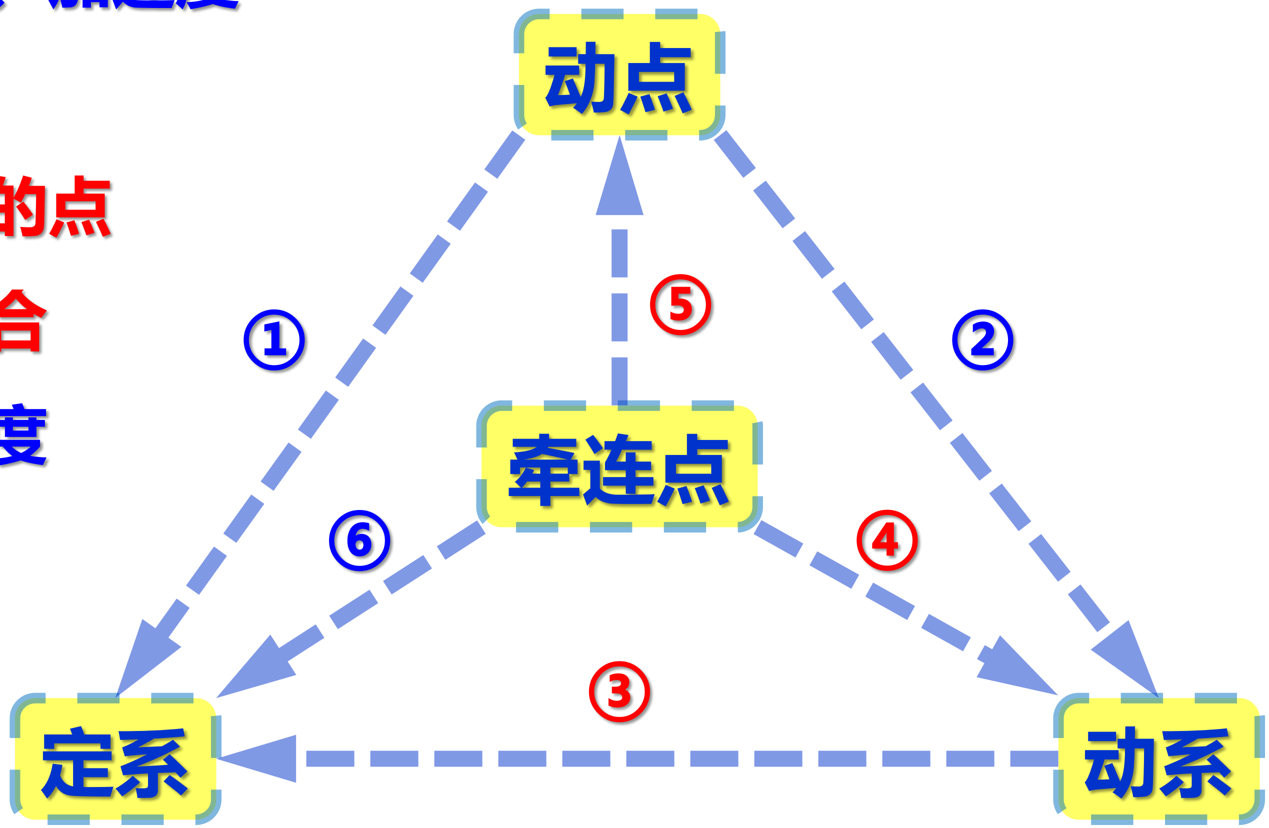
②相对运动、速度、加速度

③牵连运动

④牵连点是动系上的点

⑤牵连点和动点重合

⑥牵连速度、加速度



需要注意的几个问题

1. 动点的绝对运动和相对运动都是指点的运动，它可能作直线运动或曲线运动；而牵连运动则是指动系的运动，实际上也就是与之相连的参考体——刚体的运动，牵连运动可能是平移、转动或其它较复杂的运动；

2. 牵连速度(加速度)是指牵连点的(绝对)速度(加速度)，而牵连运动是指动参考体 - 刚体的运动。这在概念上是不同的，二者的联系是牵连点是动参考体上与动点的瞬时重合点；

3. 分析这三种运动时，必须明确：以哪一物体作为参考系。

分析3种运动的实例

主梁不动时

定参考系?

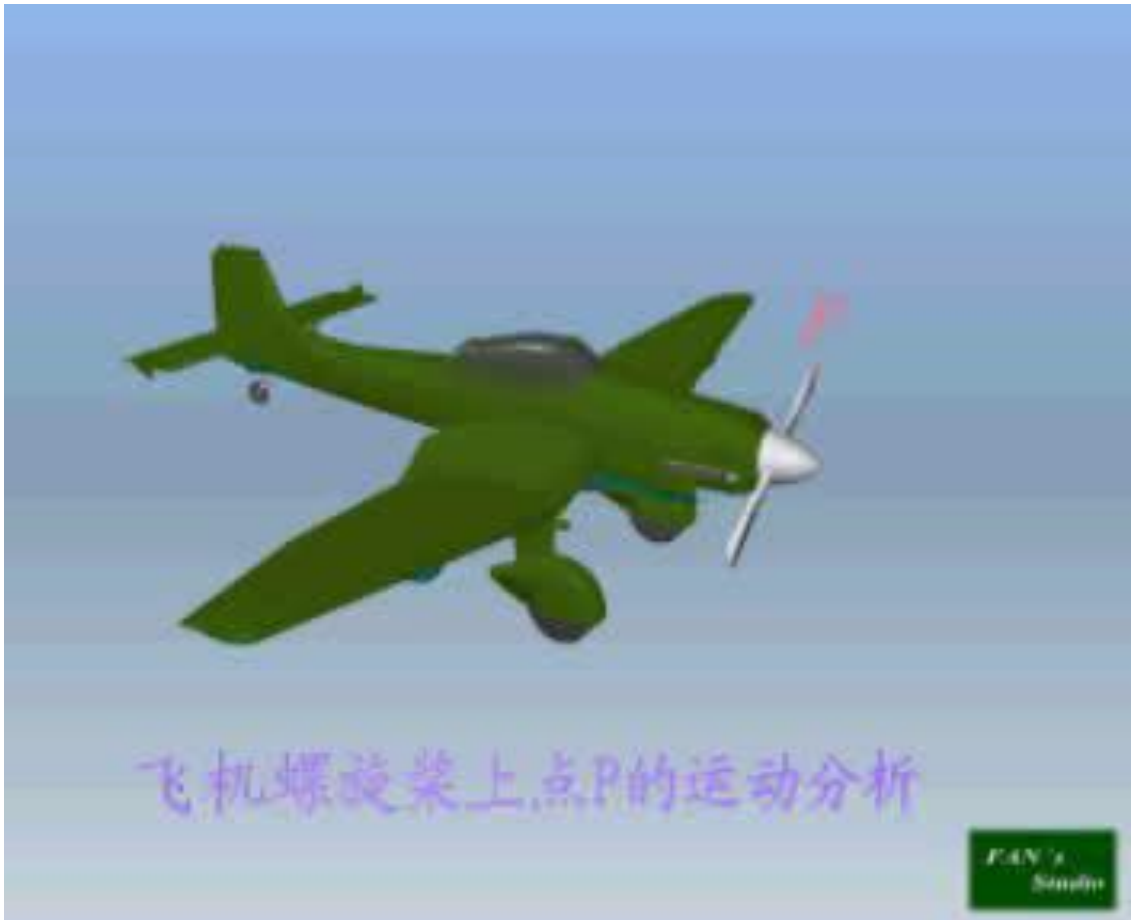
动参考系?

绝对运动?

相对运动?

牵连运动?

分析3种运动的实例



定参考系?

动参考系?

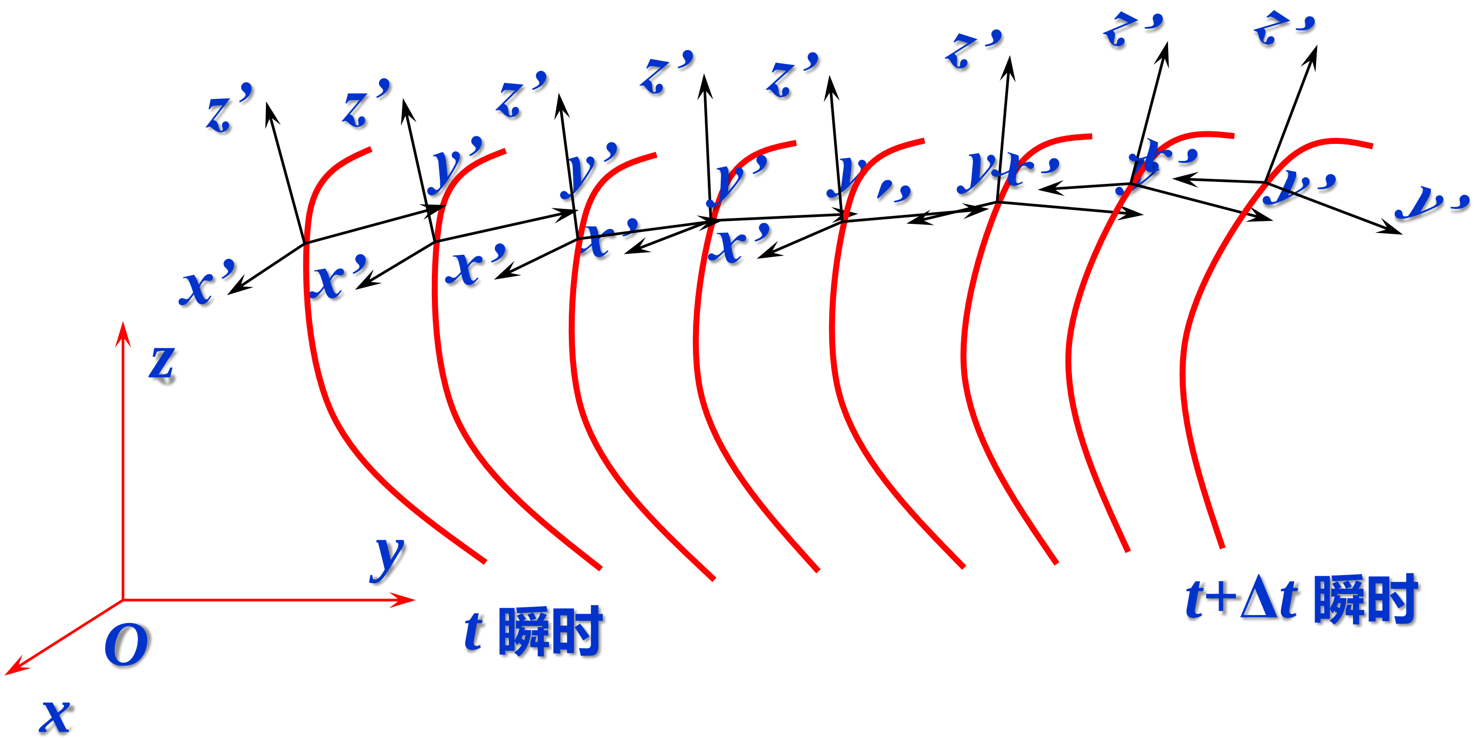
绝对运动?

相对运动?

牵连运动?

点的速度合成定理

刚体(用刚体上在定系中运动的曲线表示)

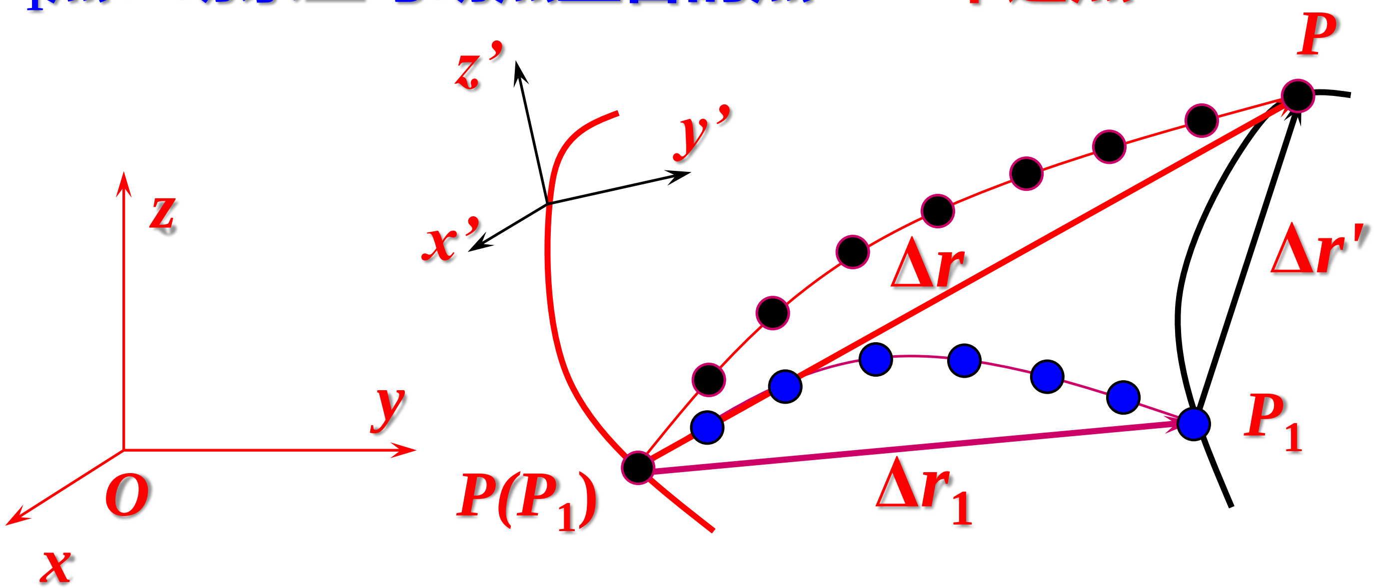


三种运动轨迹

刚体在定系中运动，动系固结在刚体上

动点P 沿着刚体上的曲线运动——相对运动

P_1点：动系上与动点重合的点——牵连点



$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}' + \Delta\vec{r}_1 \quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}'}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t} \Rightarrow \vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

点的速度合成定理

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

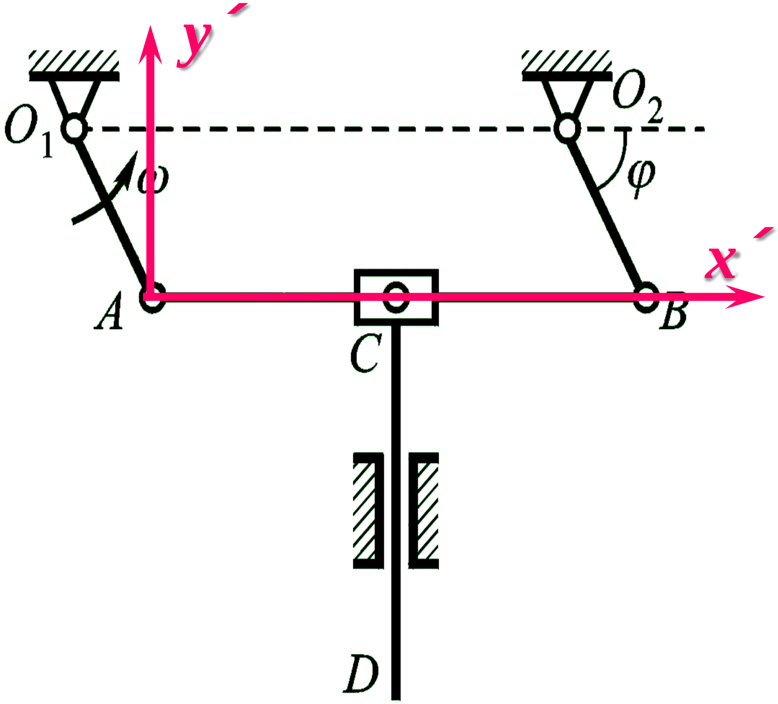
绝对速度　　相对速度　　牵连速度

此即为**速度合成定理**(theorem for composition of velocities)，即动点的绝对速度等于其牵连速度与相对速度的<u>矢量和</u>。

由于没有对绝对运动和相对运动轨迹形状作任何限制，也没有对牵连运动为何种刚体运动作限制，因此本定理对<u>任何运动</u>都是适用的。

注意：牵连运动是刚体(动系)的运动；牵连速度是刚体上一点(与动点相重合的点)的速度。**平面矢量式**可以写成两个分量式，可求解两个未知量。

例题1



铰接四边形

$O_1A=O_2B=100\text{mm}$， $O_1O_2=AB$，杆O_1A以等角速度 $\omega=2\text{rad/s}$绕轴O_1转动。 AB杆上有一套筒C，此套筒与杆CD相铰接，机构的各部件都在同一铅垂平面内。

试求: 当$\varphi = 60^\circ$时，CD杆的速度。

解： 1. 运动分析

动点： CD上的C点;

动系： 固连于AB杆。

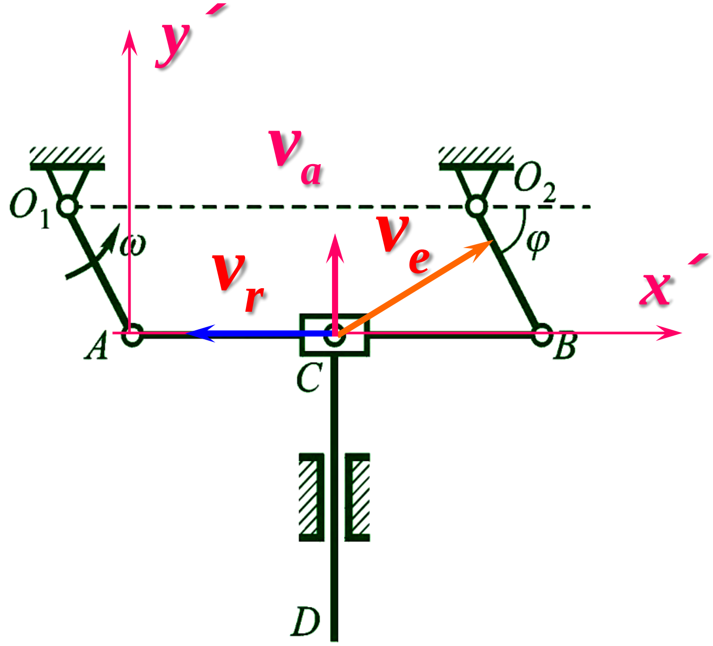
绝对运动： 上下直线运动;

相对运动： 沿AB直线运动;

牵连运动： 铅垂面内曲线平移。

例题1

$O_1A=O_2B=100\text{mm}$， $O_1O_2=AB$， 杆 O_1A 以等角速度 $\omega=2\text{rad/s}$绕轴O_1转动。



解：2.速度分析

$$\vec{v}_a=\vec{v}_r+\vec{v}_e$$

$$v_e=v_A=O_1A\times\omega=0.2\text{m/s}$$

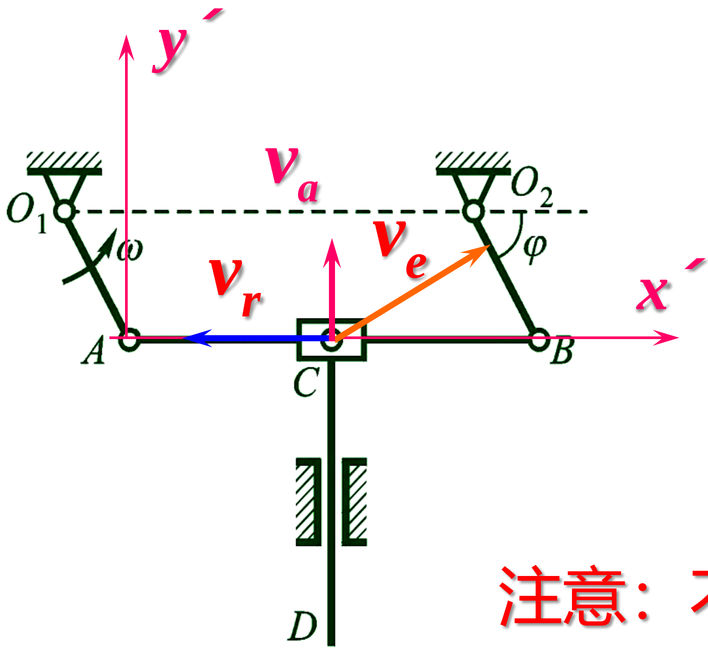
v_e垂直O_1A；

v_r方向沿BA；v_a方向铅垂向上。式中只有v_r、v_a两者大小未知，由平行四边形法则求得：

$$v_{CD}=v_a=v_e\cos\varphi=0.1\text{m/s}$$

方向如图中所示。

例题1



3. 讨论

如果v_r的方向假设与图示方向相反，则无法用平行四边形法则确定v_a。这时，可以向未知矢量v_r的垂直方向投影，以确定v_a。这种方法称为<u>矢量投影法</u>。

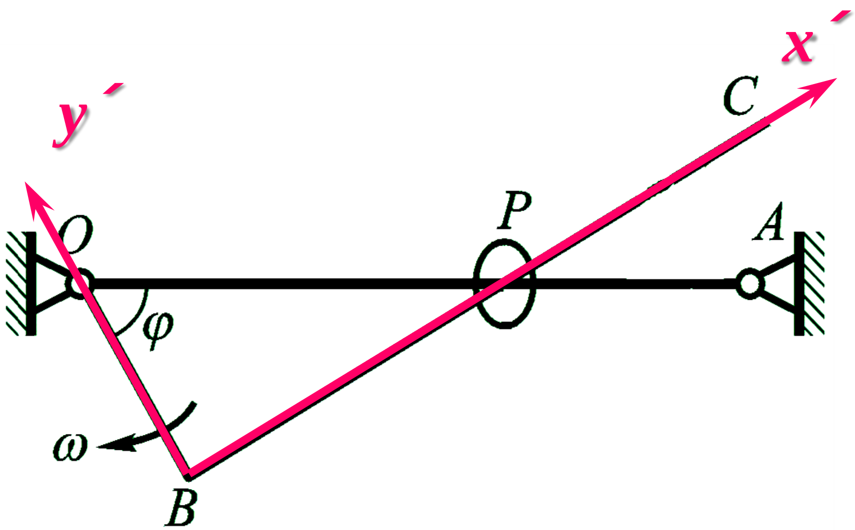
$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

注意：不要把公式改写成 $\vec{v}_a + \vec{v}_r + \vec{v}_e = \vec{0}$

不同于力系的平衡方程！！！

采用矢量投影法求解速度合成定理的矢量方程，是最一般的方法，这时速度的方向即使假设错了，也能求得到正确的解答。

例题2



直角弯杆OBC以匀角速度ω=0.5rad/s，绕O轴转动，使套在其上的小环P沿固定直杆OA滑动；OB=0.1m，OB垂直BC。

试求：当$\varphi = 60^{\circ}$时小环P的速度。

解： 1. 运动分析

动点：小环P;

动系：固连于OBC;

绝对运动：沿OA固定直线；

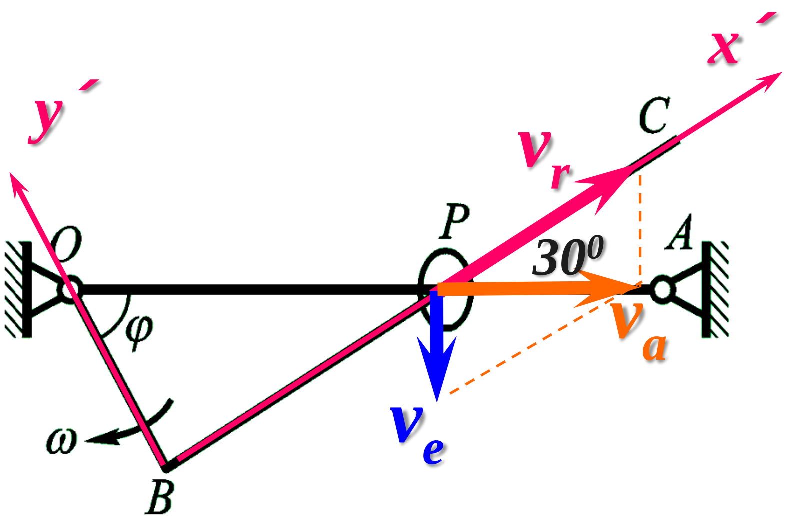
相对运动：沿BC杆直线；

牵连运动：绕O定轴转动。

例题2

直角弯杆OBC以匀角速度ω=0.5rad/s绕O轴转动，使套在其上的小环P沿固定直杆OA滑动；OB=0.1m，OB垂直BC。 φ = 60°

解 :2. 速度分析 $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$



其中 v_a、v_e、v_r方向如图；

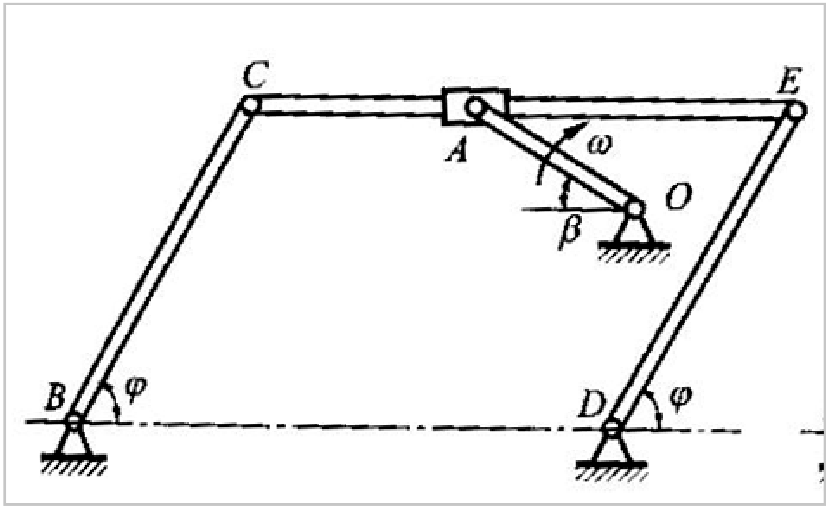
$v_e = OP \cdot \omega = 0.2 \times 0.5 = 0.1$m/s

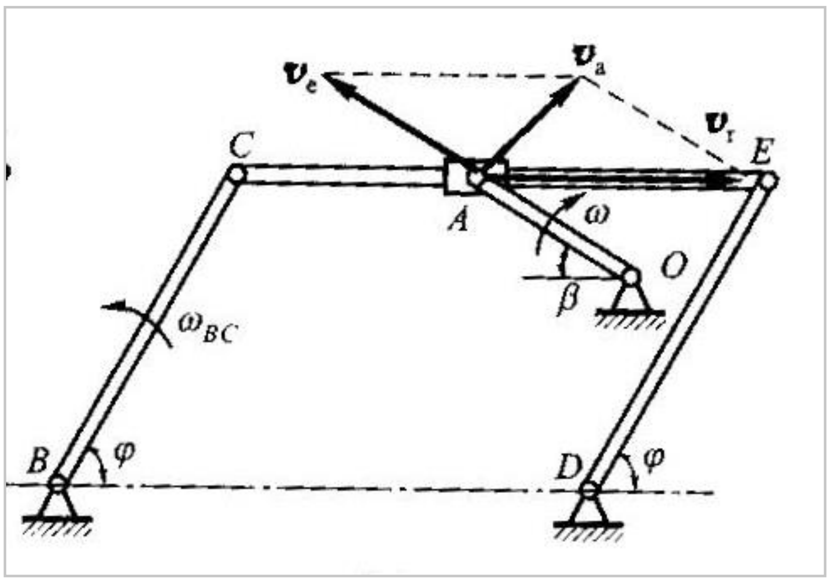
于是式中只有v_a、v_r二者大小未知。从而由速度平行四边形解得小环P的速度：

$$v_a = \sqrt{3} v_e = 0.173 m/s$$

此外，还可求得v_r=2 v_e=0.2m/s

补充例题





曲柄 OA=150 mm，以匀角速度 ω= 2rad/s，绕轴O转动。 杆BC与杆DE平行且相等，BC=DE=300 mm，β=30°，φ=60°。

求：滑块A相对于杆CE的速度和杆BC的角速度。

解：1. 运动分析　<u>动点</u>：OA上的A点；动系：固连于CE杆。

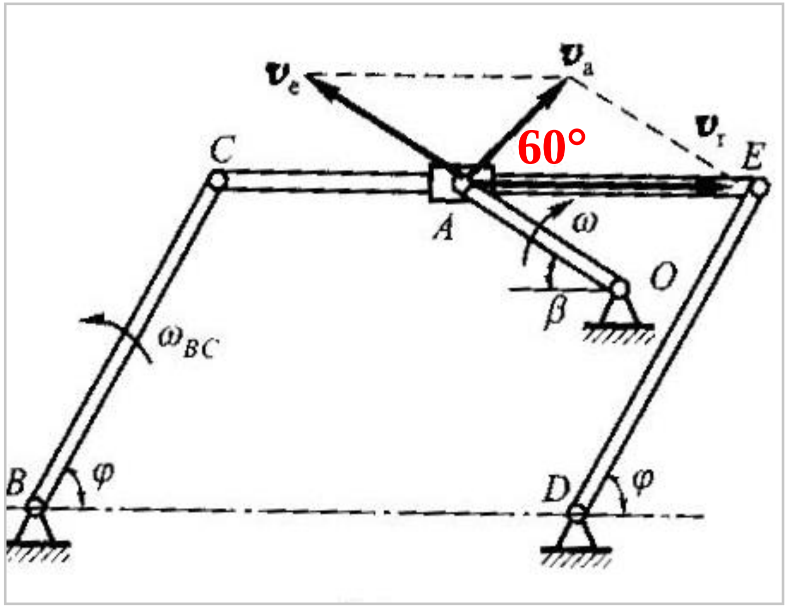
绝对运动：圆周运动；相对运动：沿CE杆运动；牵连运动：铅垂平面内曲线平移。

作速度矢量合成图 $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$

$$v_a = OA \cdot \omega = 150 \cdot 2 = 300\text{mm/s}$$

补充例题

曲柄 OA=150 mm，以匀角速度ω= 2rad/s, 绕轴O转动。 杆BC与杆DE平行且相等，BC=DE=300mm, β=30 °， φ=60 ° 。



求：滑块A相对于杆CE的速度和杆BC的角速度。

$$v_a = OA \cdot \omega = 150 \cdot 2 = 300\text{mm/s}$$

$$v_e = v_a \tan 60° = 300\sqrt{3}\text{mm/s}$$

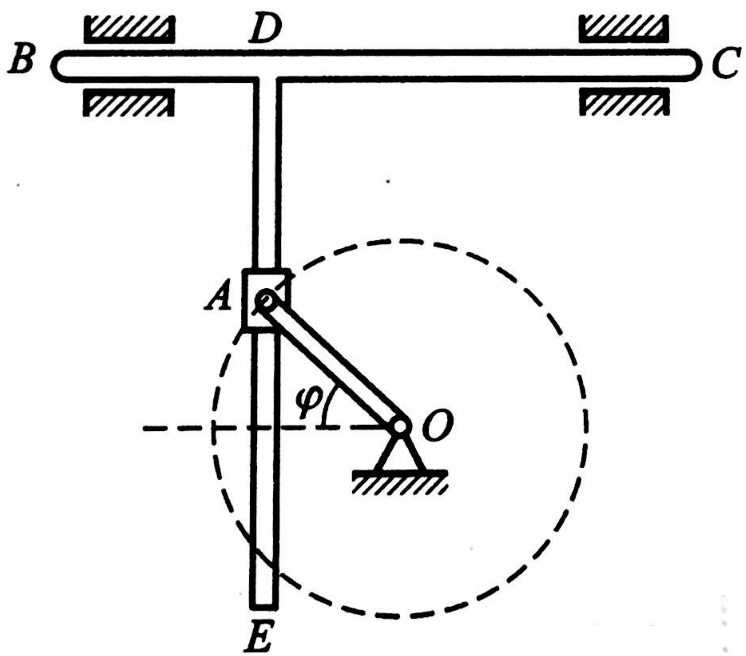
$$v_r = v_a / \sin 30° = 600\text{mm/s}$$

$$\because v_e = v_C = BC \cdot \omega_{BC}$$

$$\therefore \omega_{BC} = \frac{v_C}{BC} = \frac{v_e}{BC} = \frac{300\sqrt{3}}{300} = \sqrt{3}\text{rad/s}$$

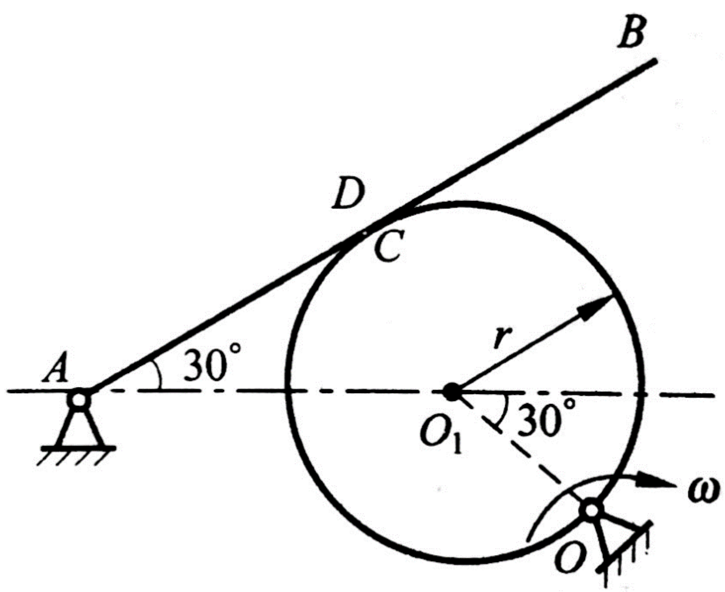
补充例题

图示曲柄滑道机构中，BC为水平，而DE保持铅垂。曲柄长OA=0.1m，并以匀角速度ω=20rad/s绕O轴转动，通过滑块A使杆BC作往复运动。求当曲柄与水平线的交角分别为φ = 0、30、90度时杆BC的速度。(2016年期末考试)



补充例题

已知圆轮半径为r，以匀角速度ω绕O轴转动，如图所示，试求AB杆在图示位置的角速度ω_{AB}。(2016年期末考试)

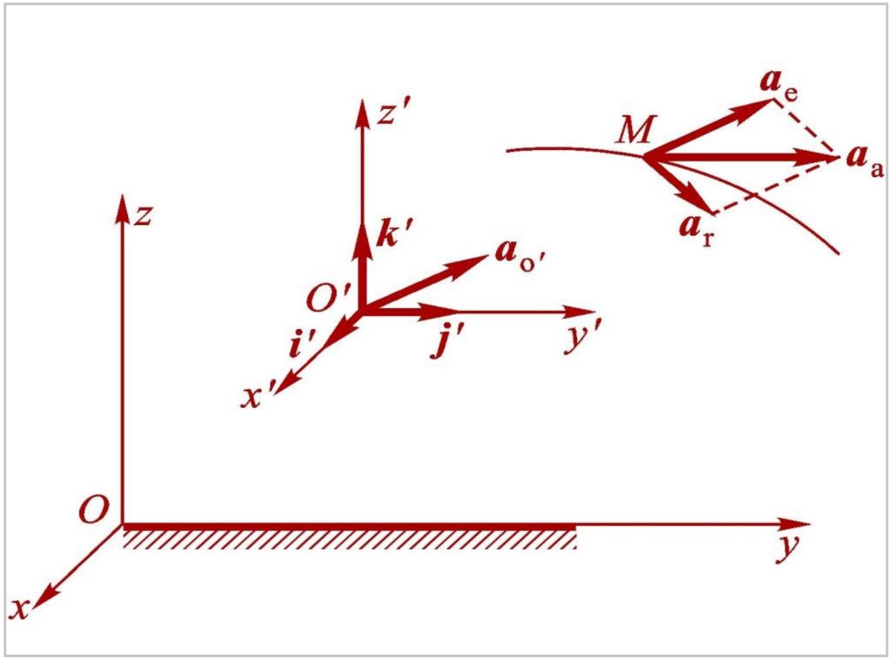


加速度合成定理

□ 牵连运动为平移时点的加速度合成定理

点的合成运动中，加速度之间的关系比较复杂，因此，我们由简单到复杂，先分析动系作平移的情形，即先研究牵连运动为平动时的加速度合成定理，然后再介绍牵连运动为转动时的加速度合成定理。

加速度合成定理(平移)



设$O'x'y'z'$为平移参考系，使x'、y'、z'各轴方向与定坐标轴x、y、z分别平行。

如果动点M相对于动系的相对坐标为 x'、y'、z'，由于i'、j'、k'为平移动坐标轴的单位常矢量，则点M的相对速度和相对加速度为：

$$\vec{v}_r = \dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}' \qquad \vec{a}_r = \ddot{x}'\vec{i}' + \ddot{y}'\vec{j}' + \ddot{z}'\vec{k}'$$

利用点的速度合成定理

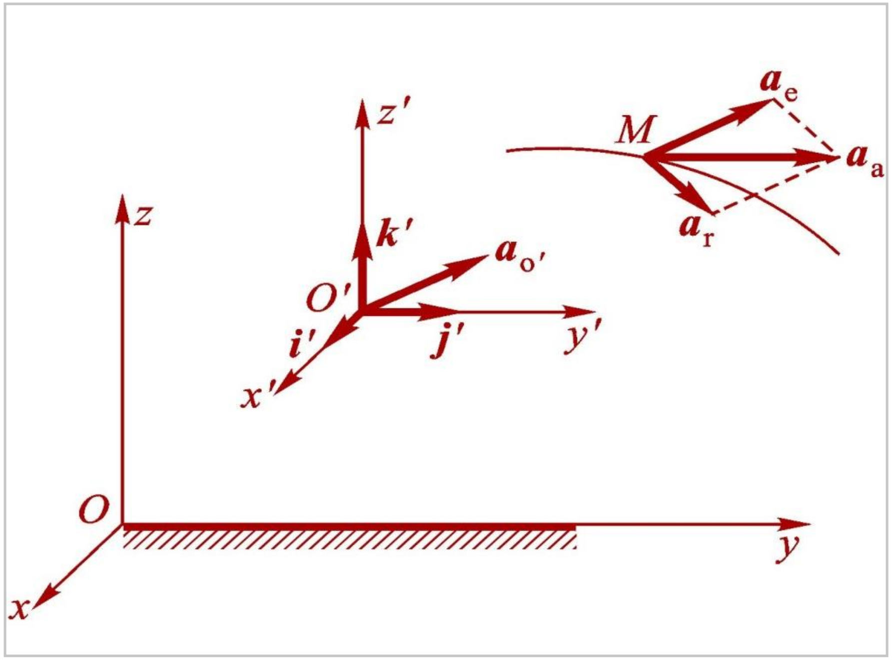
$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

以及牵连运动为平移时

$$\vec{v}_e = \vec{v}_{O'}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_a = \vec{v}_{O'} + \dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}'$$

加速度合成定理(平移)



$$\vec{v}_a = \vec{v}_{O'} + \dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}'$$

两边对时间求导，并注意到因动系平移，故i'、j'、k'为常矢量，于是得到

$$\vec{a}_a = \dot{\vec{v}}_{O'} + \ddot{x}'\vec{i}' + \ddot{y}'\vec{j}' + \ddot{z}'\vec{k}'$$

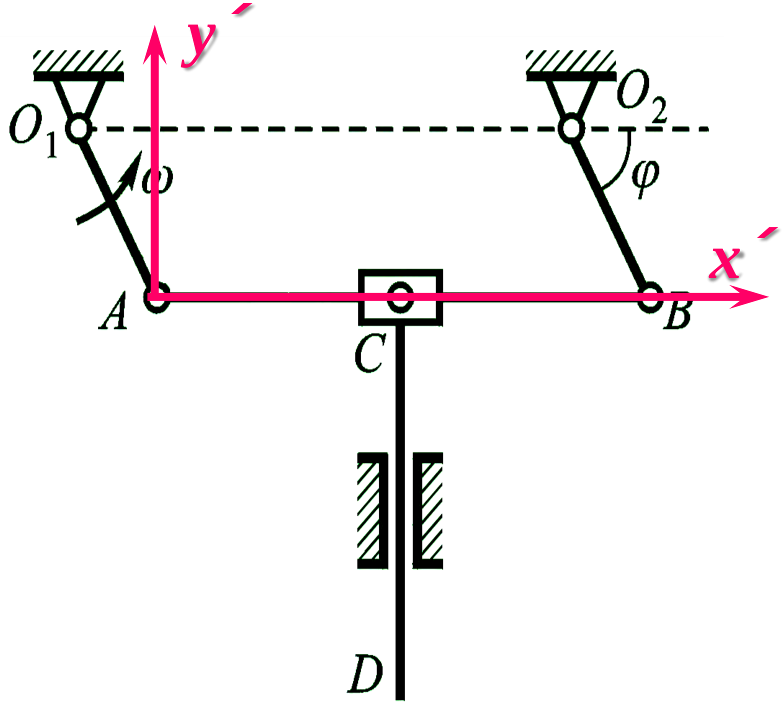
$$\dot{\vec{v}}_{O'} = \vec{a}_{O'}$$

又由于动系平移，故 $\vec{a}_{O'} = \vec{a}_e$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r}$$

这就是牵连运动为平移时点的加速度合成定理：当牵连运动为平移时，动点在某瞬时的绝对加速度等于该瞬时它的牵连加速度与相对加速度的矢量和。

例题3



铰接四边形

$O_1A=O_2B=100\text{mm}$， $O_1O_2=AB$，杆O_1A以等角速度 $\omega=2\text{rad/s}$绕轴O_1转动。 AB杆上有一套筒C，此套筒与杆CD相铰接，机构的各部件都在同一铅垂平面内。

试求: 当$\varphi = 60^\circ$时，CD杆的加速度。

解： 1. 运动分析

动点： CD上的C点;

动系： 固连于AB杆。

绝对运动： 上下直线运动;

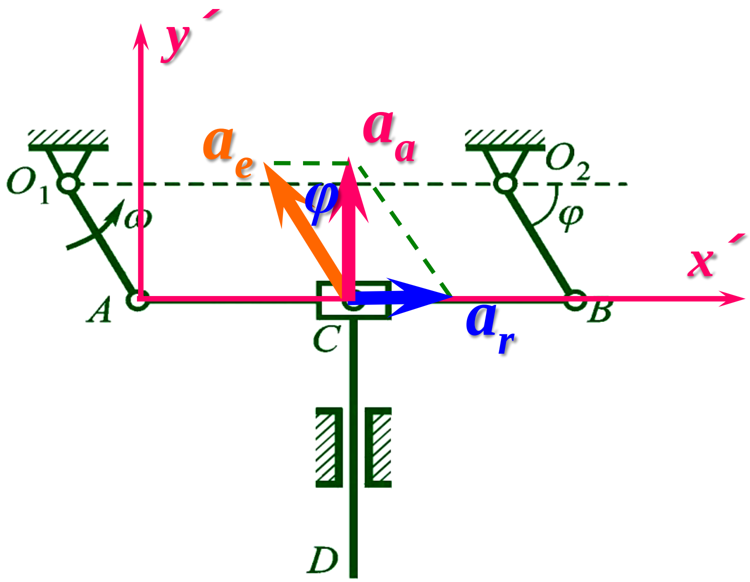
相对运动： 沿AB直线运动;

牵连运动： 铅垂面内曲线平移。

例题3

$O_1A=O_2B=100\text{mm}$， $O_1O_2=AB$， 杆 O_1A 以等角速度 $\omega=2\text{rad/s}$绕轴O_1转动。

解：2.加速度分析： $\vec{a}_a=\vec{a}_e+\vec{a}_r$



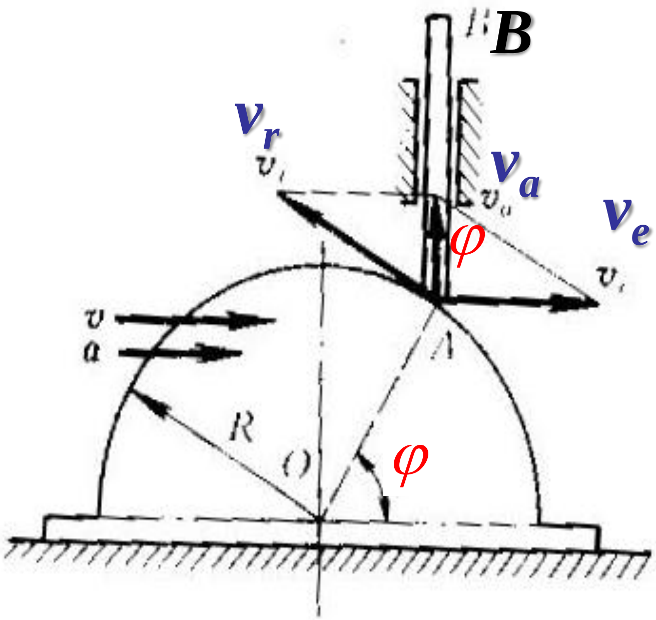
其中由于动系作平移，故动系AB杆上各点的加速度相同，因此动系AB杆上与动点套筒C相重合点C_1(图中未示出)的加速度即牵连加速度：

$$\vec{a}_e=\vec{a}_A \qquad a_A=O_1A\omega^2=0.4\text{m/s}^2$$

由平行四边形法则，得

$$a_{CD}=a_a=a_e\sin\varphi=0.346\text{m/s}^2$$

例题4



凸轮的半径R=100mm，平移速度v=600mm/s，加速度a=450mm/s²，φ=60°，求图示瞬时导杆AB的速度和加速度

解：动点为导杆上的A点，动系为凸论。

绝对运动：上下直线运动；
相对运动：圆周运动；
牵连运动：凸轮平移。

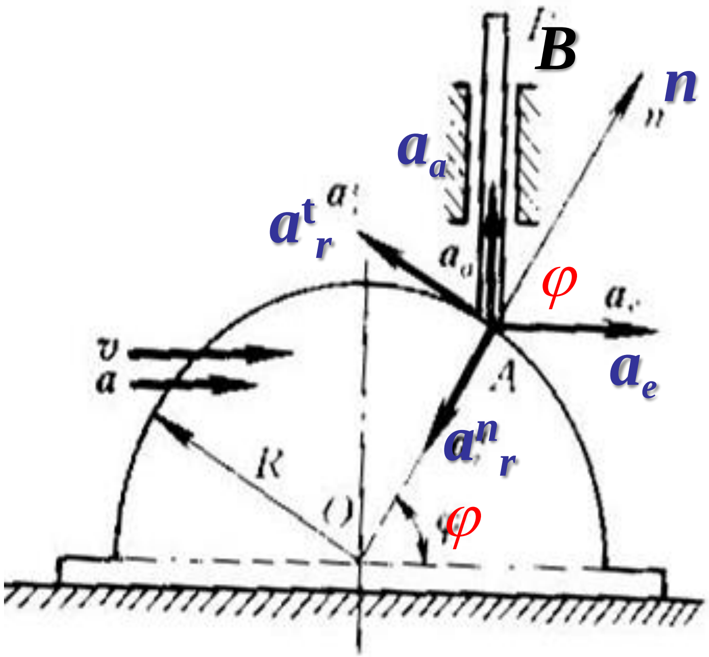
1. 速度分析： $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$

$$v_e = v = 600\text{mm/s},$$

$$v_a = v_e \cot\varphi = 600 \cdot \cot 60^\circ = 346\text{mm/s}$$

$$v_r = v_e / \sin\varphi = 600 / \sin 60^\circ = 693\text{mm/s}$$

例题4



凸轮的半径R=100mm，平移速度 v = 600 m/s，加速度a = 450mm/s^2，φ=60°

2. 加速度分析 ：相对加速度的切向分量为a^t_r ，方向在切线，指向假设。法向分量为a^n_r，方向指向O点。

$$a_e = a = 450\text{mm/s}^2,\ v_r = 693\text{mm/s}$$

$$a_r^n = v_r^2 / R$$

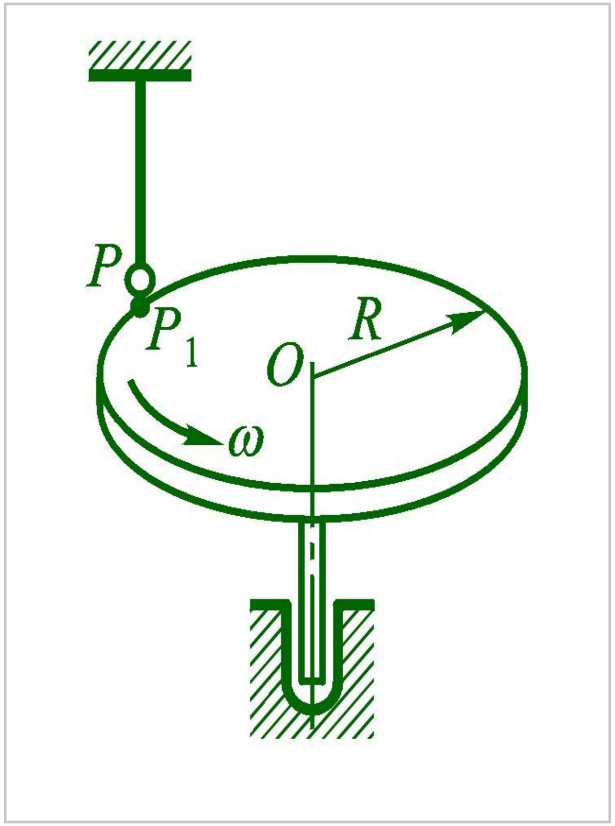
$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r^t + \vec{a}_r^n$$

等式两边在n方向上投影： $a_a \sin 60° = a_e \cos 60° - a_r^n$

$$a_a = \frac{a_e \cos 60° - (v_r^2 / R)}{\sin 60°} = \frac{450 \cdot \cos 60° - (693^2 / 100)}{\sin 60°} = -5.29\text{m/s}^2$$

加速度合成定理(转动)

- 牵连运动为转动时点的加速度合成定理——科氏加速度

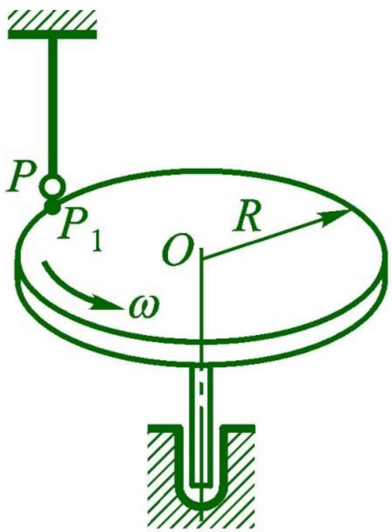


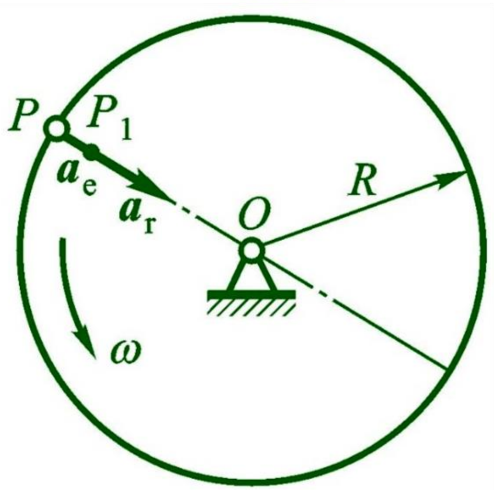
当牵连运动为转动时，加速度合成定理与牵连运动为平移时所得到的结果是<u>不同</u>的。

以图示的以等角速度ω绕轴O转动的圆盘为例。圆盘半径为R。在邻近其边缘的上方，静止地悬挂一个小球P。

若以P为动点，圆盘为动系，验证牵连运动为平移时所得到的加速度合成定理能不能成立。

加速度合成定理(转动)





绝对运动：静止，故动点的绝对加速度 $\vec{a}_a=0$

牵连运动：绕O轴作定轴转动；

相对运动：以点O为圆心、R为半径，与盘上重合点反向的等速圆周运动。

牵连加速度的大小 $a_e=R\omega^2$

方向指向圆盘中心O

相对加速度的大小 $a_r=R\omega^2$

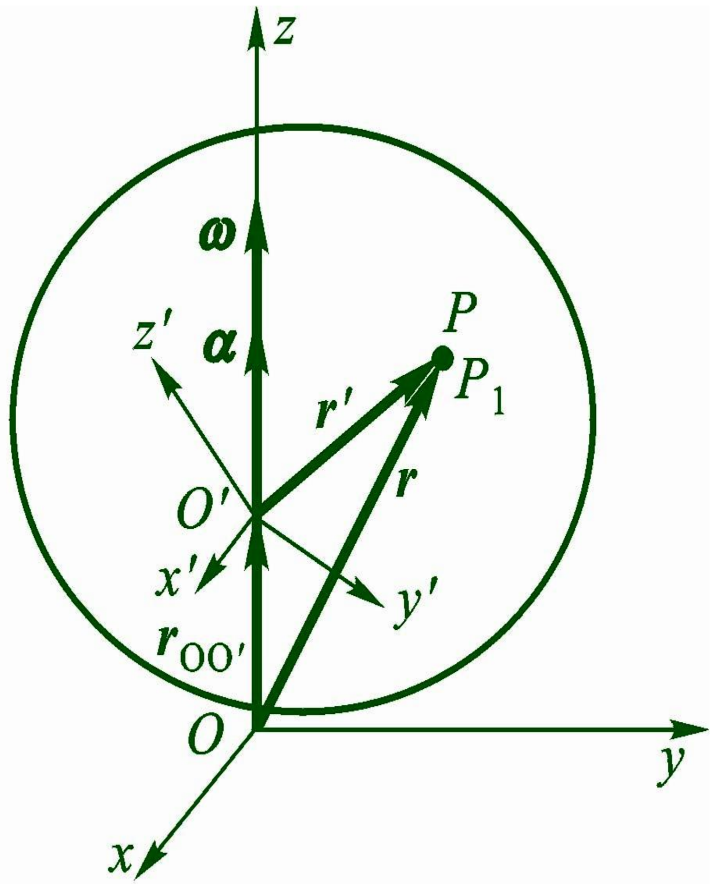
方向也指向圆盘中心O

牵连加速度与相对加速度的矢量和

$$\vec{a}_e+\vec{a}_r=R\omega^2\vec{n}+R\omega^2\vec{n}=2R\omega^2\vec{n}\neq\vec{a}_a=0$$

牵连运动为平移时所得到的加速度合成定理不适用于牵连运动为转动的情形。

牵连运动为定轴转动——推导



设动系$O'x'y'z'$以角速度矢ω绕定轴Oz($Oxyz$为定系)转动，角加速度矢为α。动点P 的相对矢径、相对速度和相对加速度可以表示为：

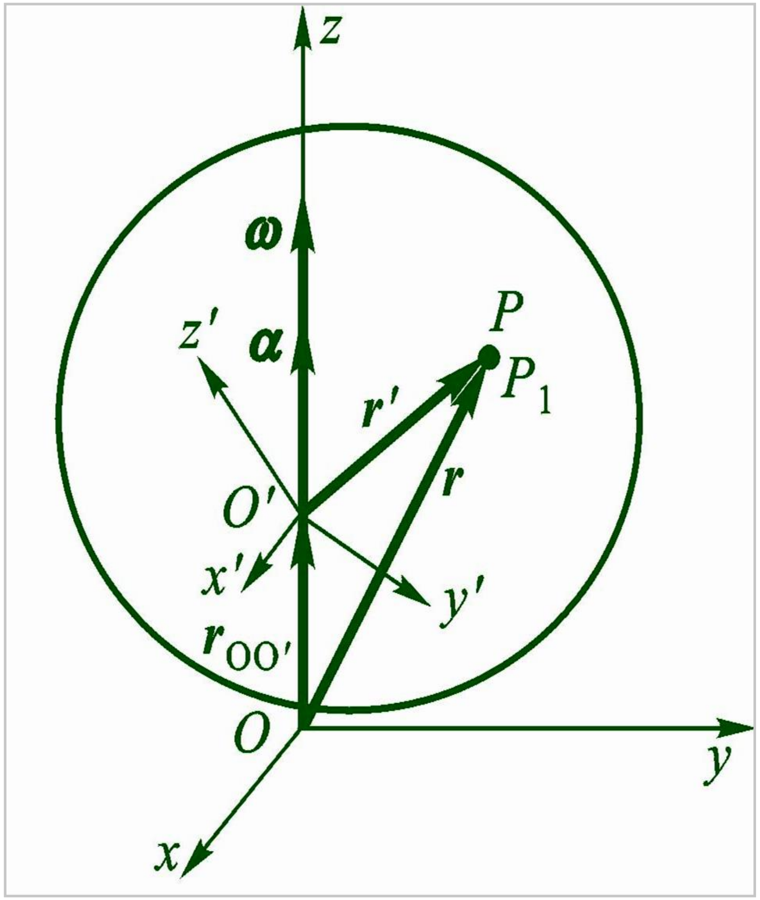
$$\vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$$

$$\vec{v}_r = \dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}'$$

$$\vec{a}_r = \ddot{x}'i' + \ddot{y}'j' + \ddot{z}'k'$$

牵连运动为定轴转动——推导

$$\vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}' \qquad \vec{v}_r = \dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}' \qquad \vec{a}_r = \ddot{x}'\vec{i}' + \ddot{y}'\vec{j}' + \ddot{z}'\vec{k}'$$



设动点P瞬时重合点为P_1，利用速度矢量与角速度矢量之间的关系式

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

则动点P的牵连速度，即瞬时重合点P_1的速度为

$$\vec{v}_e = \vec{v}_{P_1} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

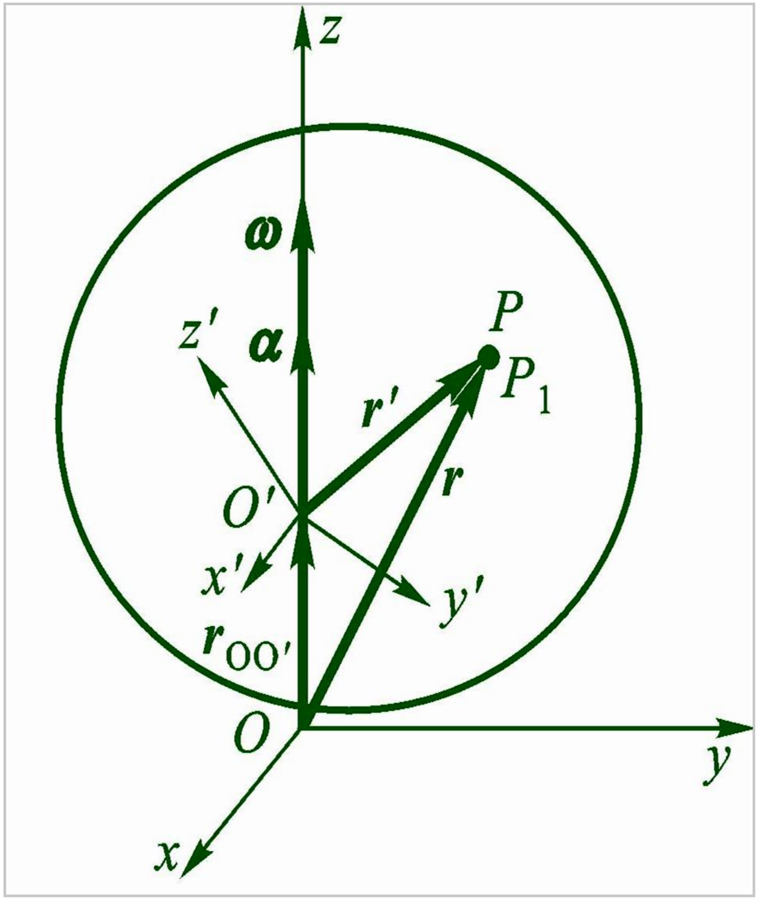
加速度矢量与角速度矢量和角加速度矢量之间的关系式

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

则动点P的牵连加速度，即瞬时重合点P_1的加速度为

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{P_1} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}_e$$

牵连运动为定轴转动——推导



$$\vec{v}_r = \dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}' \qquad \vec{v}_e = \vec{v}_{P_1} = \vec{\omega}\times\vec{r}$$

应用速度合成定理，有

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r = \vec{\omega}\times\vec{r} + \dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}'$$

将其对时间 t 求一次导数，得到

$$\vec{a}_a = \dot{\vec{v}}_a = \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}$$
$$+\left(\ddot{x}'\vec{i}' + \ddot{y}'\vec{j}' + \ddot{z}'\vec{k}'\right) + \left(\dot{x}'\dot{\vec{i}}' + \dot{y}'\dot{\vec{j}}' + \dot{z}'\dot{\vec{k}}'\right)$$

$$\dot{\vec{\omega}} = \vec{\alpha}, \quad \dot{\vec{r}} = \vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

$$\ddot{x}'\vec{i}' + \ddot{y}'\vec{j}' + \ddot{z}'\vec{k}' = \vec{a}_r$$

利用泊松公式

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{i}' \qquad \frac{d\vec{j}'}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{j}' \qquad \frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{k}'$$

牵连运动为定轴转动——推导

$$\vec{a}_a=\dot{\vec{v}}_a=\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}+\left(\ddot{x}'\vec{i}'+\ddot{y}'\vec{j}'+\ddot{z}'\vec{k}'\right)+\left(\dot{x}'\dot{\vec{i}}'+\dot{y}'\dot{\vec{j}}'+\dot{z}'\dot{\vec{k}}'\right)$$

$$\dot{\vec{\omega}}=\vec{\alpha},\quad \dot{\vec{r}}=\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r \qquad \ddot{x}'\vec{i}'+\ddot{y}'\vec{j}'+\ddot{z}'\vec{k}'=\vec{a}_r$$

$$\frac{d\vec{i}'}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{i}' \qquad \frac{d\vec{j}'}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{j}' \qquad \frac{d\vec{k}'}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{k}'$$

上式中:

$$\dot{x}'\dot{\vec{i}}'+\dot{y}'\dot{\vec{j}}'+\dot{z}'\dot{\vec{k}}'=\dot{x}'\vec{\omega}\times\vec{i}'+\dot{y}'\vec{\omega}\times\vec{j}'+\dot{z}'\vec{\omega}\times\vec{k}'$$

$$=\omega\times\left(\dot{x}'\vec{i}'+\dot{y}'\vec{j}'+\dot{z}'\vec{k}'\right)=\vec{\omega}\times\vec{v}_r$$

$$\vec{a}_a=\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}_e+\vec{a}_r+2\vec{\omega}\times\vec{v}_r$$

$$\vec{a}_a=\vec{a}_e+\vec{a}_r+\vec{a}_C \qquad \vec{a}_C=2\vec{\omega}\times\vec{v}_r$$

a_C **称为科氏加速度(Coriolis acceleration)**

加速度合成定理(转动)

不正确的分析思路所得到的是不正确的结论

将速度合成定理等号两侧分别对时间 t 求一次绝对导数

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \quad \longrightarrow \quad \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d\vec{v}_e}{dt} + \frac{d\vec{v}_r}{dt}$$

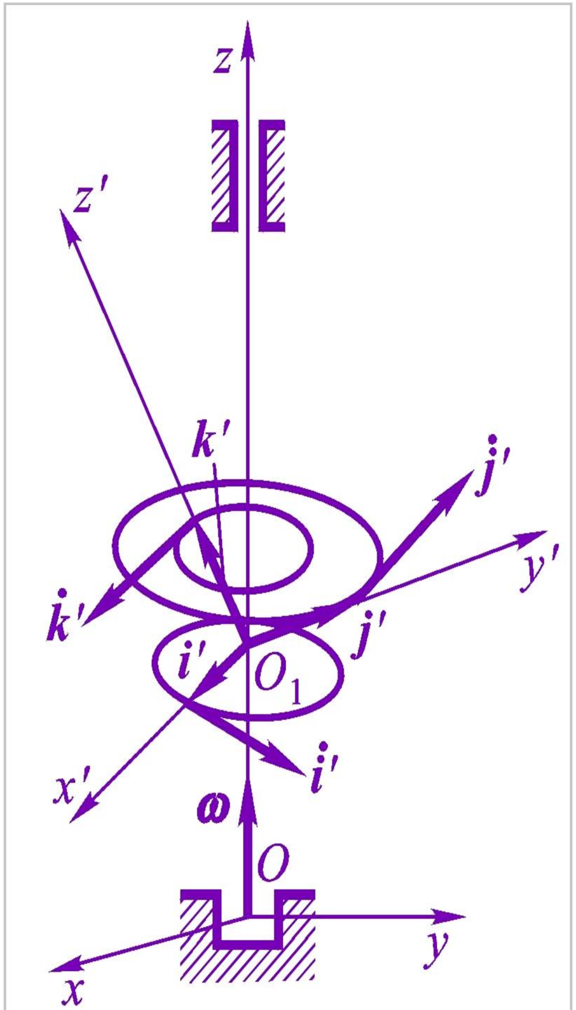
$$\Downarrow$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r$$

当牵连运动为转动时

$$\frac{d\vec{v}_a}{dt} = \vec{a}_a \qquad \frac{d\vec{v}_e}{dt} \neq \vec{a}_e \qquad \frac{d\vec{v}_r}{dt} \neq \vec{a}_r$$

牵连运动为定轴转动



$$\vec{v}_e=\vec{\omega}(t)\times\vec{r}_{OP}(t)$$

$$\Rightarrow\frac{d\vec{v}_e}{dt}=\frac{d\,\vec{\omega}\times\vec{r}_{O'P}}{dt}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}_{OP}+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}_{OP}}{dt}$$

$$\Rightarrow\frac{d\vec{v}_e}{dt}=\vec{\alpha}\times\vec{r}_{OP}+\vec{\omega}\times\vec{v}_a=\vec{\alpha}\times\vec{r}_{OP}+\vec{\omega}\times(\vec{v}_e+\vec{v}_r)$$

$$\Rightarrow\frac{d\vec{v}_e}{dt}=\left(\vec{\alpha}\times\vec{r}_{OP}+\vec{\omega}\times\vec{v}_e\right)+\vec{\omega}\times\vec{v}_r$$

$$\Rightarrow\frac{d\vec{v}_e}{dt}=\vec{a}_e+\vec{\omega}\times\vec{v}_r$$

牵连运动为定轴转动

$$\vec{v}_r = \dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}'$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}_r}{dt} = \ddot{x}'\vec{i}' + \ddot{y}'\vec{j}' + \ddot{z}'\vec{k}' + \dot{x}'\dot{\vec{i}}' + \dot{y}'\dot{\vec{j}}' + \dot{z}'\dot{\vec{k}}'$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}_r}{dt} = \ddot{x}'\vec{i}' + \ddot{y}'\vec{j}' + \ddot{z}'\vec{k}' + \dot{x}'(\vec{\omega}\times\vec{i}') + \dot{y}'(\vec{\omega}\times\vec{j}') + \dot{z}'(\vec{\omega}\times\vec{k}')$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}_r}{dt} = \vec{a}_r + \vec{\omega}\times\vec{v}_r$$

$$\frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d\vec{v}_e}{dt} + \frac{d\vec{v}_r}{dt} \qquad \Rightarrow \vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_r = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_C$$

当动系定轴转动时，动点在某瞬时的绝对加速度等于该瞬它的牵连加速度、相对加速度与科氏加速度的矢量和。

牵连运动为定轴转动——推导2

$$\vec{r}_{O'P} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}' \qquad \vec{a}_a = \frac{d^2(\vec{r}_{O'P} + \vec{r}_{OO'})}{dt^2} = \frac{d^2(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}')}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_a = \frac{d}{dt}(\dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}' + x'\dot{\vec{i}}' + y'\dot{\vec{j}}' + z'\dot{\vec{k}}')$$

$$\Rightarrow \vec{a}_a = \ddot{x}'\vec{i}' + \ddot{y}'\vec{j}' + \ddot{z}'\vec{k}' + 2(\dot{x}'\dot{\vec{i}}' + \dot{y}'\dot{\vec{j}}' + \dot{z}'\dot{\vec{k}}') + x'\ddot{\vec{i}}' + y'\ddot{\vec{j}}' + z'\ddot{\vec{k}}'$$

$$\Rightarrow \vec{a}_a = \vec{a}_r + 2(\dot{x}'(\vec{\omega}\times\vec{i}') + \dot{y}'(\vec{\omega}\times\vec{j}') + \dot{z}'(\vec{\omega}\times\vec{k}'))$$
$$+ x'\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{i}') + y'\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{j}') + z'\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{k}')$$

$$\Rightarrow \vec{a}_a = \vec{a}_r + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_r$$
$$+ x'(\dot{\vec{\omega}}\times\vec{i}' + \vec{\omega}\times\dot{\vec{i}}') + y'(\dot{\vec{\omega}}\times\vec{j}' + \vec{\omega}\times\dot{\vec{j}}') + z'(\dot{\vec{\omega}}\times\vec{k}' + \vec{\omega}\times\dot{\vec{k}}')$$

$$\Rightarrow \vec{a}_a = \vec{a}_r + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_r + \vec{\alpha}\times\vec{r}_{O'P} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{O'P})$$

$$\Rightarrow \vec{a}_a = \vec{a}_r + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_r + \vec{\alpha}\times\vec{r}_{O'P} + \vec{\omega}\times\vec{v}_e = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_C$$

加速度合成定理(转动)

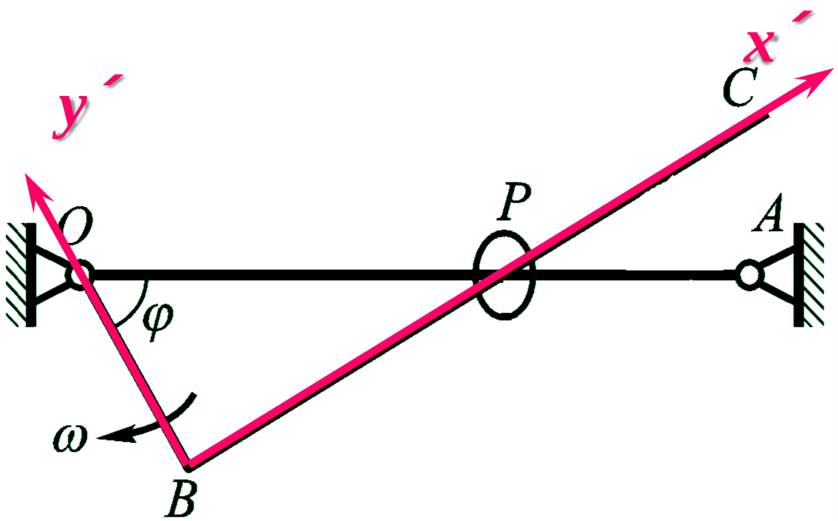
当动系为定轴转动时，动点在某瞬时的绝对加速度等于该瞬时它的牵连加速度、相对加速度与科氏加速度的矢量和。

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_C$$

可以证明，当牵连运动为**任意运动**时，上式都成立，它是点的加速度合成定理的普遍形式。当牵连运动为平移时，ω =0，a_C=0.

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r$$

例题5



直角弯杆OBC以匀角速度ω=0.5rad/s，绕O轴转动，使套在其上的小环P沿固定直杆OA滑动；OB=0.1m，OB垂直BC。

试求：当$\varphi = 60°$时小环P的加速度。

解： 1. 运动分析

动点：小环P;

动系：固连于OBC;

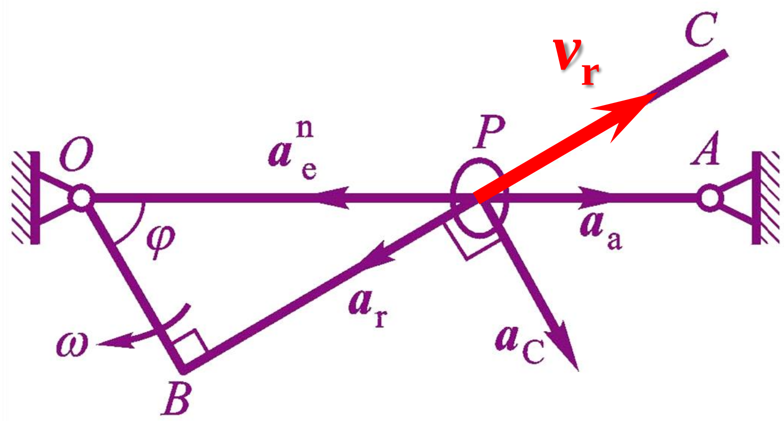
绝对运动：沿OA固定直线;

相对运动：沿BC杆直线;

牵连运动：绕O定轴转动。

例题5

解：前面例题中已经求得小环的相对速度为 v_r=0.2 m/s



2.加速度分析：

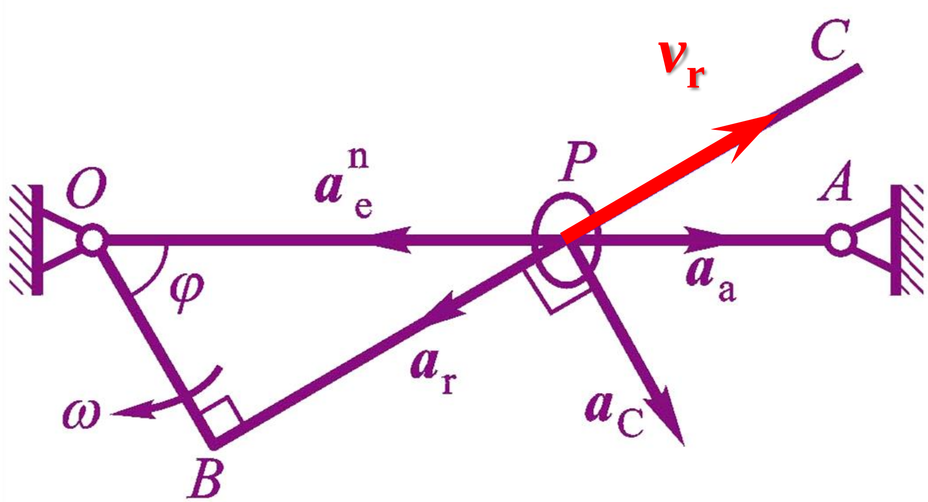
绝对加速度为a_a，方向假设向右；
相对加速度为a_r，假设方向指向B点；
牵连加速度为a^n_e，方向指旋转轴O。
科氏加速度为a_C，方向垂直于v_r。

$$a_e^n = OP \cdot \omega^2 = 0.2\text{m} \times \left(0.5\text{rad/s}\right)^2 = 0.05\text{m/s}^2$$

利用例题中已经求得小环的相对速度 v_r=0.2 m/s

$$a_C = 2\omega v_r = 2 \times 0.5\text{rad/s} \times 0.2\text{m/s} = 0.2\text{m/s}^2$$

例题5



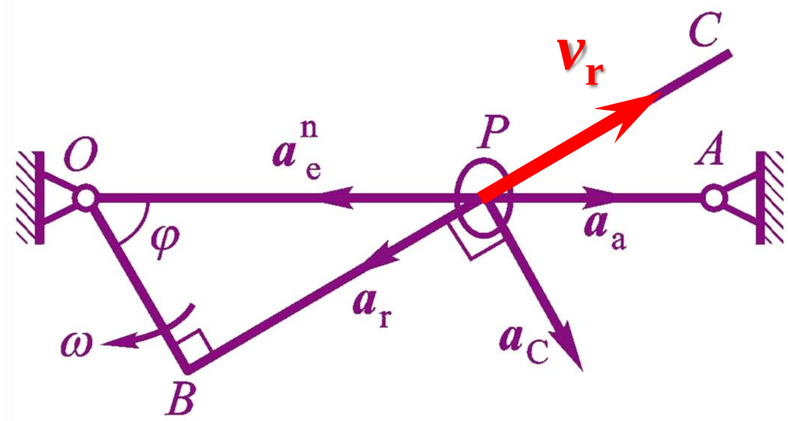
应用加速度合成定理 $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_C$

将等号两边各项向矢量a_C方向上(垂直于a_r的方向)投影，得到

$$0.5a_a = -0.5a_e^n + a_C \qquad a_P = a_a = 0.35\text{m/s}^2$$

方向与图设一致

例题5



3.讨论：

本例的加速度分析中，a_a 和a_r的方向是假设的；

a^n_e和a_C的方向不能假设： a^n_e是根据牵连运动为等速转动确定； a_C则是根据科氏加速度的定义

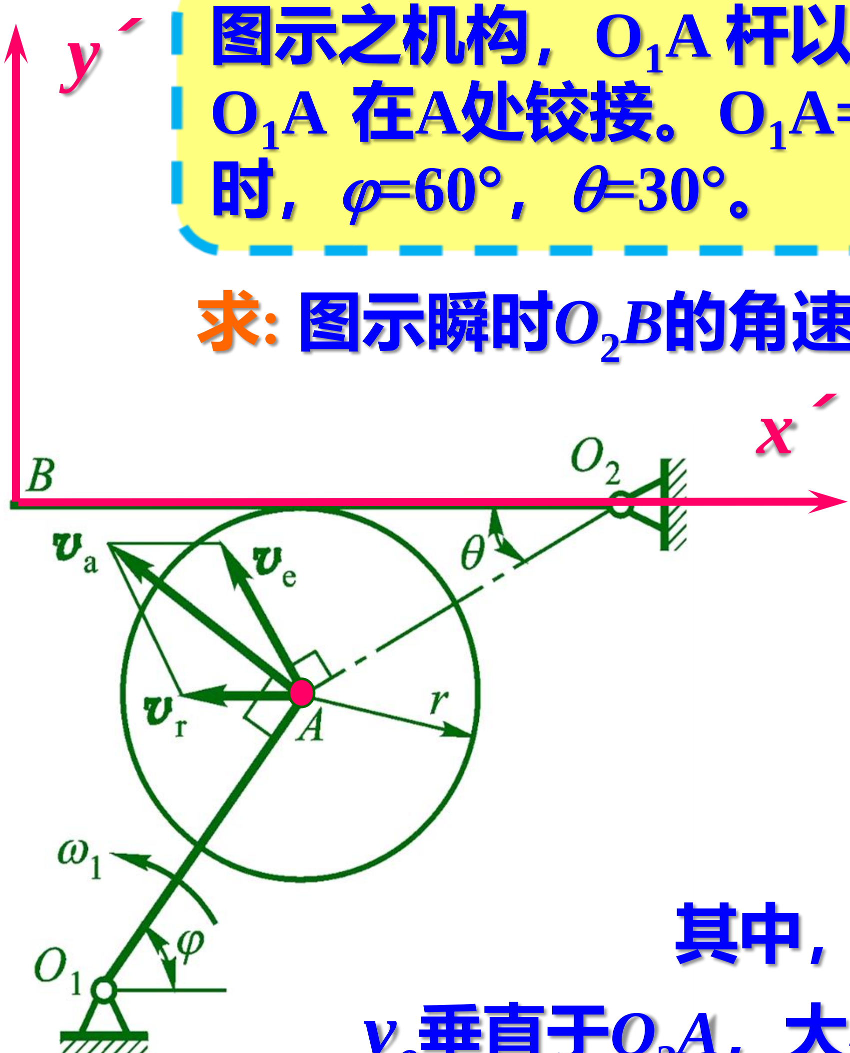
$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega}\times\vec{v}_r$$

方向由右手螺旋定则确定，即：四指指向与矢量ω方向一致，握拳四指指向与矢量v_r方向一致，则拇指指向即为a_C的正方向。

例题6

图示之机构，O_1A 杆以匀角速度ω_1 转动，轮A半径为r，与O_1A 在A处铰接。$O_1A=2r$，O_2B 始终与轮A 接触。图示瞬时，$\varphi=60°$，$\theta=30°$。

求: 图示瞬时O_2B的角速度 ω_2、角加速度 α_2。



解：1. 运动分析　动点：杆O_1A上A点；动系：固连于O_2B杆；

绝对运动：O_1为圆心的圆周运动

相对运动：与O_2B平行的直线运动

牵连运动：绕O_2轴定轴转动。

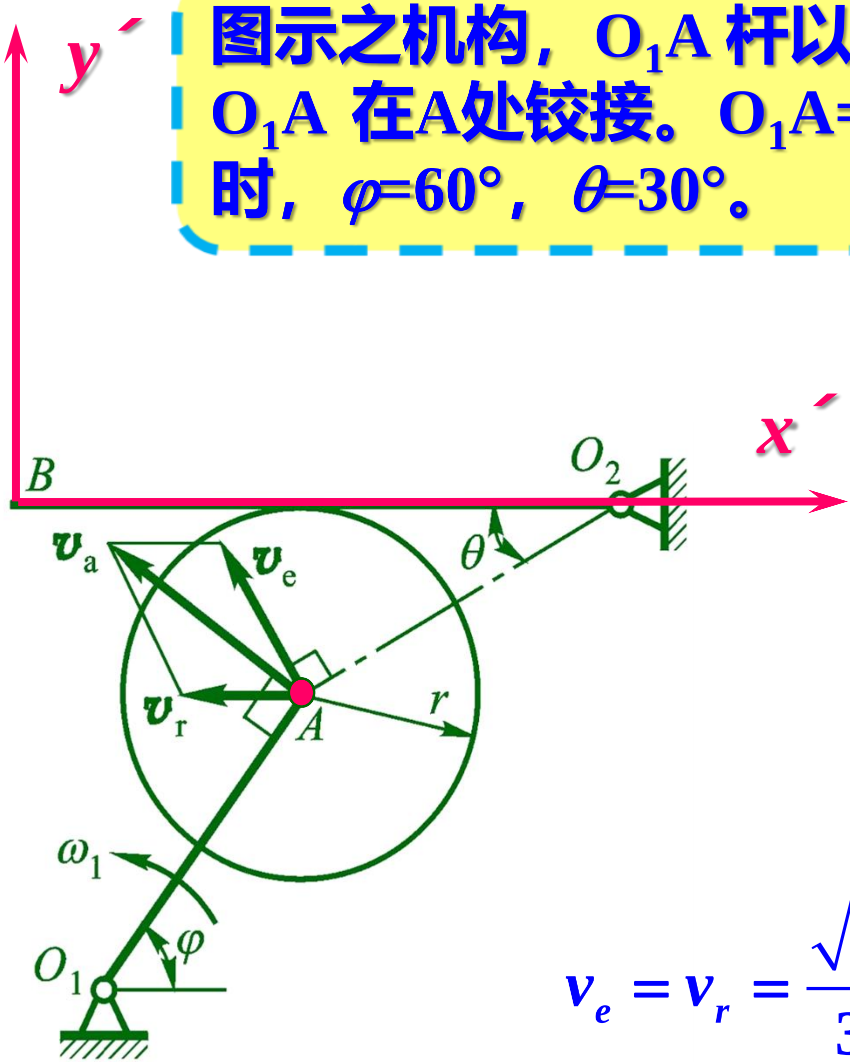
2. 速度分析　$\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r$

其中，v_a垂直于O_1A，其值为　$v_a=2r\omega_1$

v_e垂直于O_2A，大小未知；v_r平行于O_2B，大小未知

例题6

图示之机构，O_1A 杆以匀角速度ω_1 转动，轮A半径为r，与O_1A 在A处铰接。$O_1A=2r$，O_2B 始终与轮A 接触。图示瞬时，$\varphi=60°$，$\theta=30°$。



2. 速度分析　$\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r$

v_a垂直于O_1A，其值为　$v_a=2r\omega_1$

v_e垂直于O_2A，大小未知；

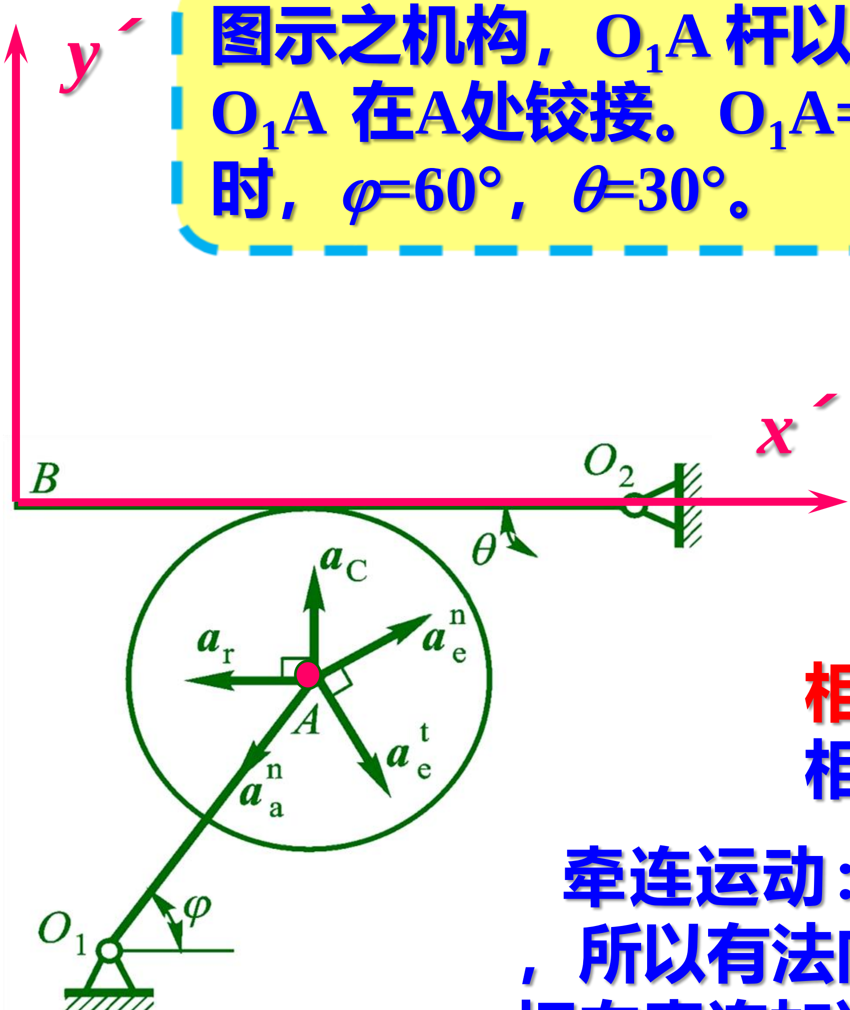
v_r平行于O_2B，大小未知。

应用平行四边形法则解得:

$$v_e=v_r=\frac{\sqrt{3}}{3}v_a=\frac{2\sqrt{3}}{3}r\omega_1 \qquad \omega_2=\frac{v_e}{2r}=\frac{\sqrt{3}}{3}\omega_1$$

例题6

图示之机构，O_1A 杆以匀角速度ω_1 转动，轮A半径为r，与O_1A 在A处铰接。$O_1A=2r$，O_2B 始终与轮A 接触。图示瞬时，$\varphi=60°$，$\theta=30°$。



2. 加速度分析

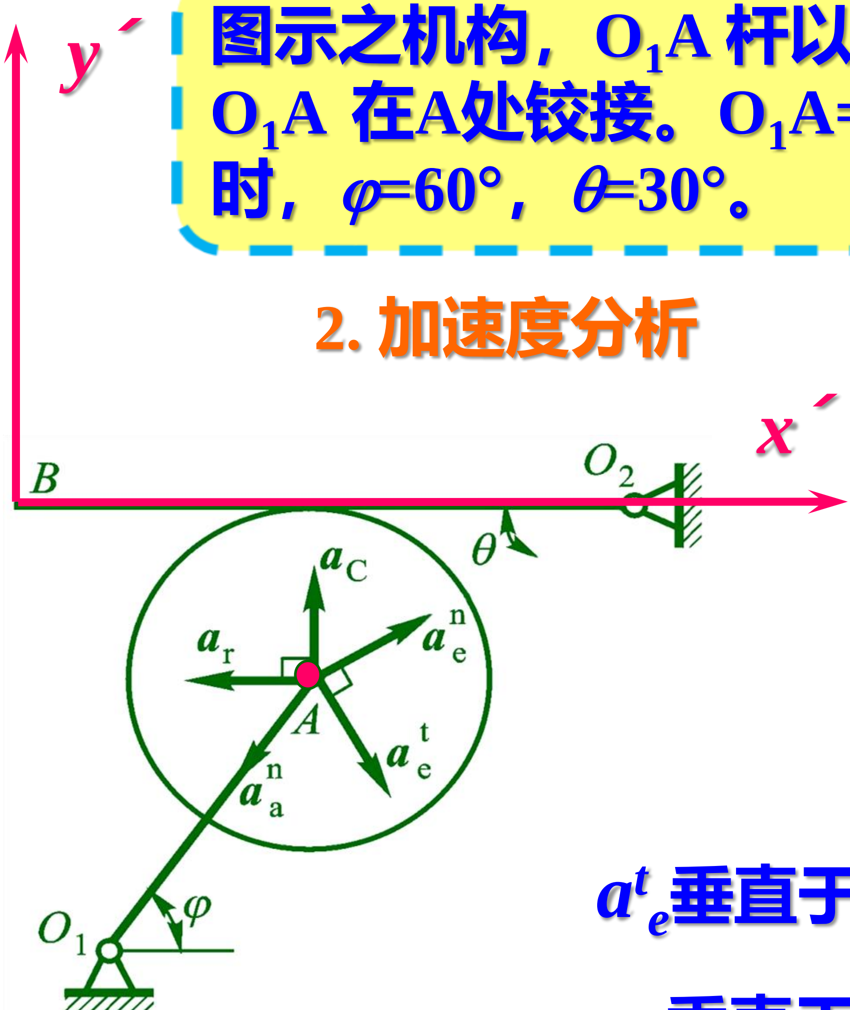
绝对运动：以O_1为圆心的等速圆周运动；所以只有法向绝对加速度为a^n_a，方向指向O_1；

相对运动：与O_2B平行的直线运动；相对加速度为a_r，假设方向向左；

牵连运动：绕O_2轴定轴转动。不是等速转动，所以有法向牵连加速度为a^n_e方向指旋转轴O_2；切向牵连加速度为a^t_e，其指向可以先假设。

例题6

图示之机构，O_1A 杆以匀角速度ω_1 转动，轮A半径为r，与O_1A 在A处铰接。O_1A=2r，O_2B 始终与轮A 接触。图示瞬时，φ=60°，θ=30°。



2. 加速度分析

$$\vec{a}_a = \vec{a}_a^n = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^t + \vec{a}_r + \vec{a}_C$$

其中，a^n_a沿AO_1方向，其值为

$$a_a^n = 2r\omega_1^2$$

a^n_e沿AO_2方向，其值为

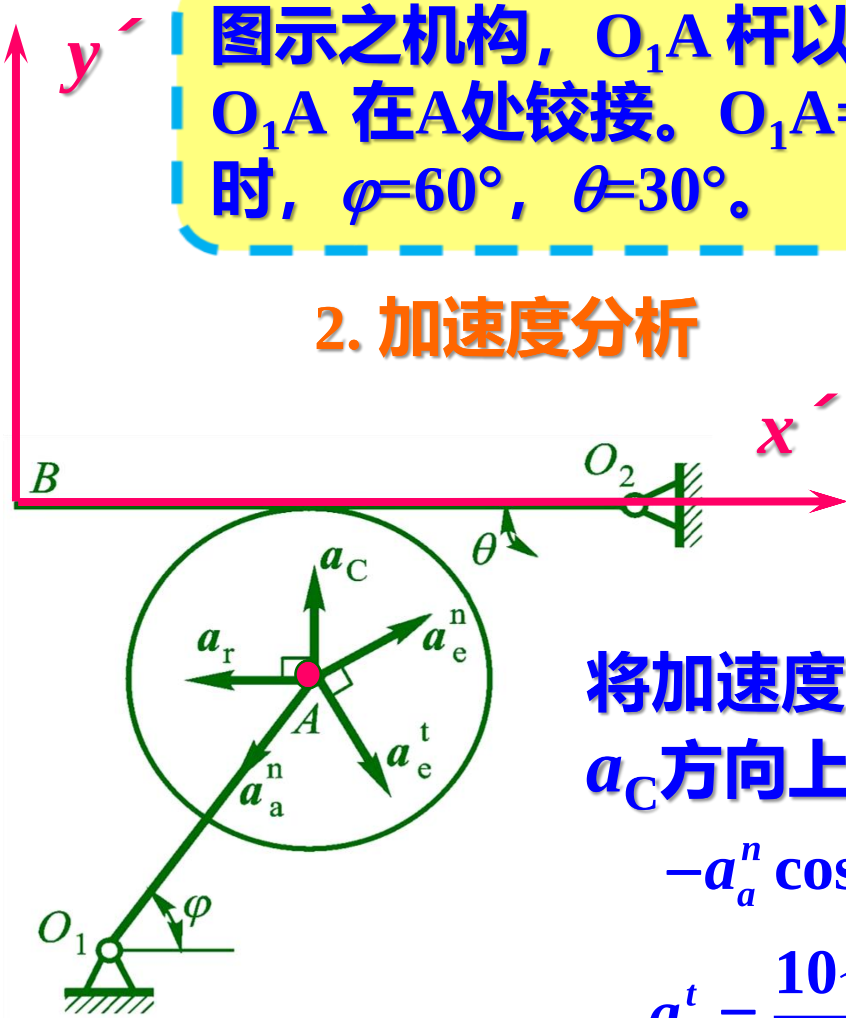
$$a_e^n = AO_2 \cdot \omega_2^2 = 2r \cdot (\frac{\sqrt{3}}{3}\omega_1)^2 = \frac{2}{3}r\omega_1^2$$

a^t_e垂直于AO_2， a_r平行于O_2B，大小都未知

a_C 垂直于a_r，其值为: $a_C = 2\omega_2 v_r = \frac{4}{3}r\omega_1^2$

例题6

图示之机构，O_1A 杆以匀角速度ω_1 转动，轮A半径为r，与O_1A 在A处铰接。$O_1A=2r$，O_2B 始终与轮A 接触。图示瞬时，φ=60°，θ=30°。



2. 加速度分析

$$\vec{a}_a = \vec{a}_a^n = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^t + \vec{a}_r + \vec{a}_C \qquad a_a^n = 2r\omega_1^2$$

$$a_e^n = AO_2 \cdot \omega_2^2 = 2r \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\omega_1\right)^2 = \frac{2}{3}r\omega_1^2$$

$$a_C = 2\omega_2 v_r = \frac{4}{3}r\omega_1^2$$

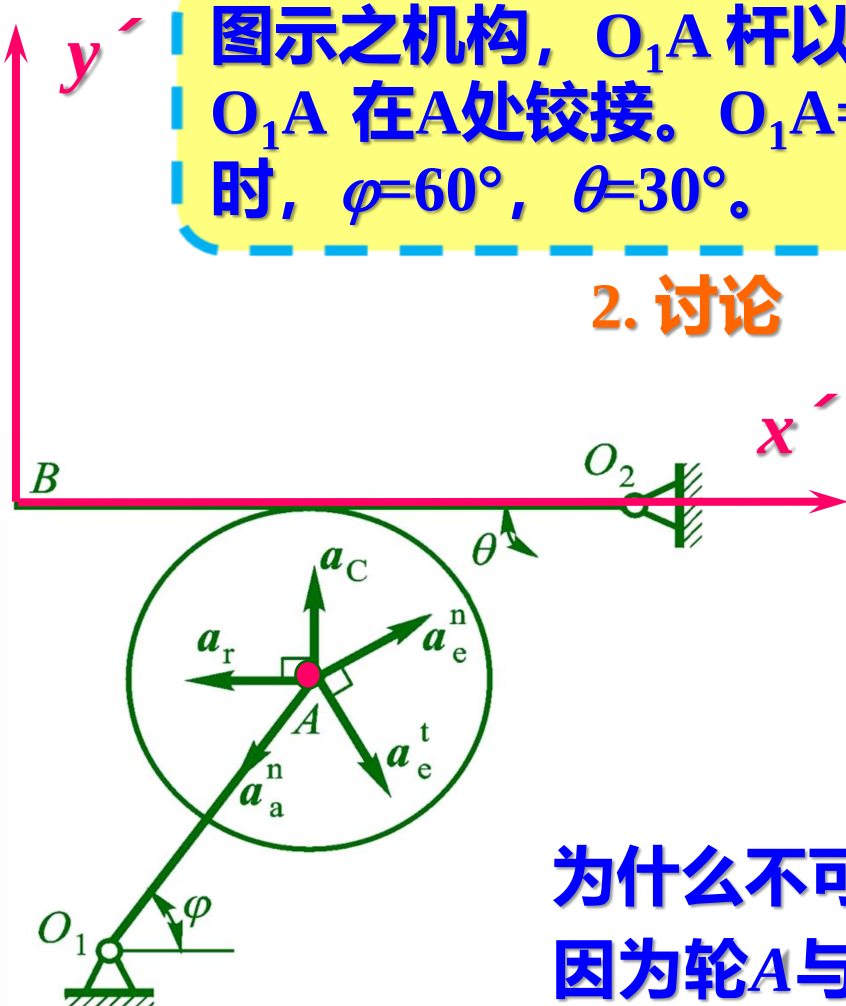
将加速度合成矢量方程等号两边各项向矢量a_C方向上投影，得到

$$-a_a^n\cos 30° = a_e^n\cos 60° - a_e^t\cos 30° + a_C$$

$$a_e^t = \frac{10\sqrt{3}+18}{9}r\omega_1^2 \qquad \alpha_2 = \frac{a_e^t}{2r} = \frac{5\sqrt{3}+9}{9}\omega_1^2$$

例题6

图示之机构，O_1A 杆以匀角速度ω_1 转动，轮A半径为r，与O_1A 在A处铰接。$O_1A=2r$，O_2B 始终与轮A 接触。图示瞬时，$\varphi=60°$，$\theta=30°$。



2. 讨论

A为动点，O_1A杆和轮A均不能选作动系，所以选O_2B杆为动系。

因轮A与O_2B保持接触，即A点运动过程中与动系上O_2B直线保持距离为r，故A点相对直线O_2B(动系)作平行直线运动，使v_r、a_r方向已知，便于求解。

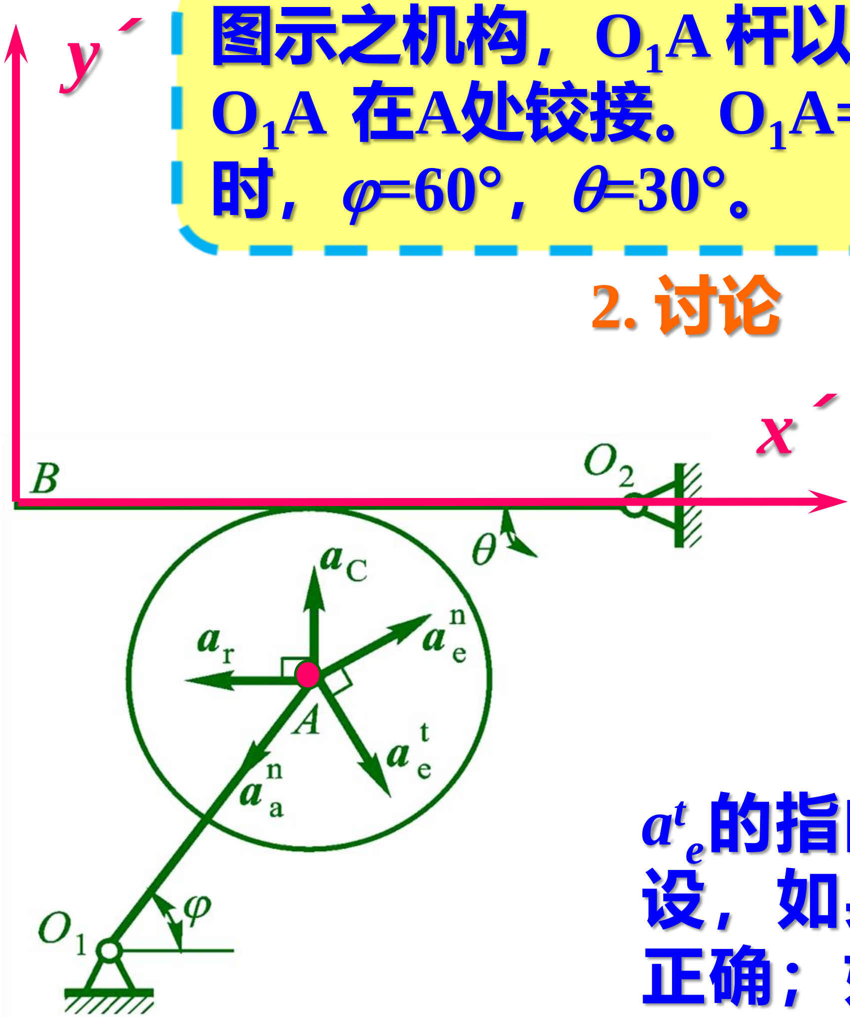
为什么不可以选轮A与O_2B杆接触点为动点?

因为轮A与O_2B杆接触点是变化的，二者相对轨迹不明确。

例题6

图示之机构，O_1A 杆以匀角速度ω_1 转动，轮A半径为r，与O_1A 在A处铰接。$O_1A=2r$，O_2B 始终与轮A 接触。图示瞬时，$\varphi=60°$，$\theta=30°$。

2. 讨论

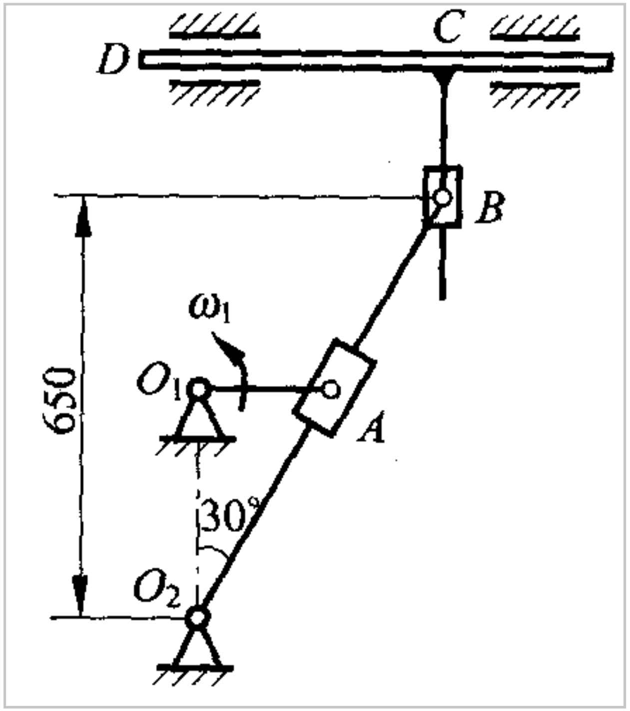


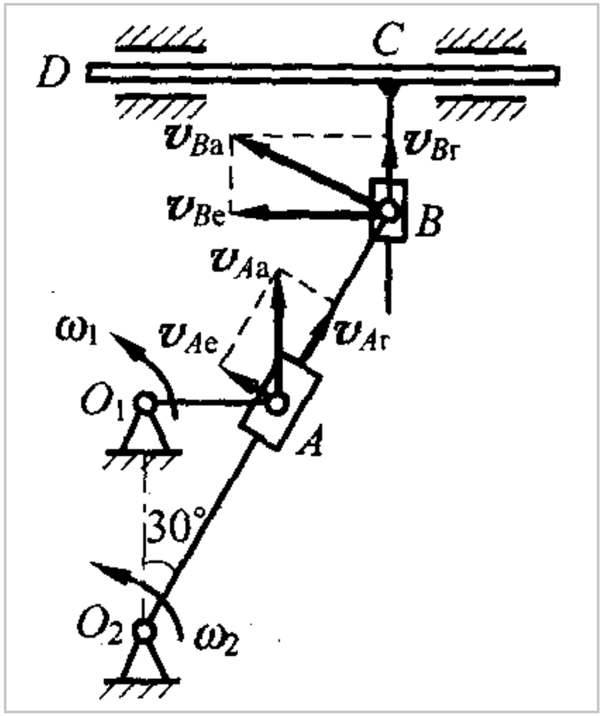
本题的另一难点是确定动点A与动系(固连于O_2B后为无限大坐标平面)的重合点，即**牵连点**，从而根据定轴转动刚体上点的速度、加速度性质确定v_e、a^n_e、a^t_e方向。

a^t_e的指向如果一时不能确定，可以先假设，如果计算结果为正，说明假设方向正确；如果计算结果为负，说明实际方向与假设方向相反。

例题7

O_1A 杆以匀角速度 $\omega_1 = 2\text{rad/s}$ 转动，$O_1A = r = 200\text{mm}$。求图示CD的速度和加速度。





解：动点：滑块A

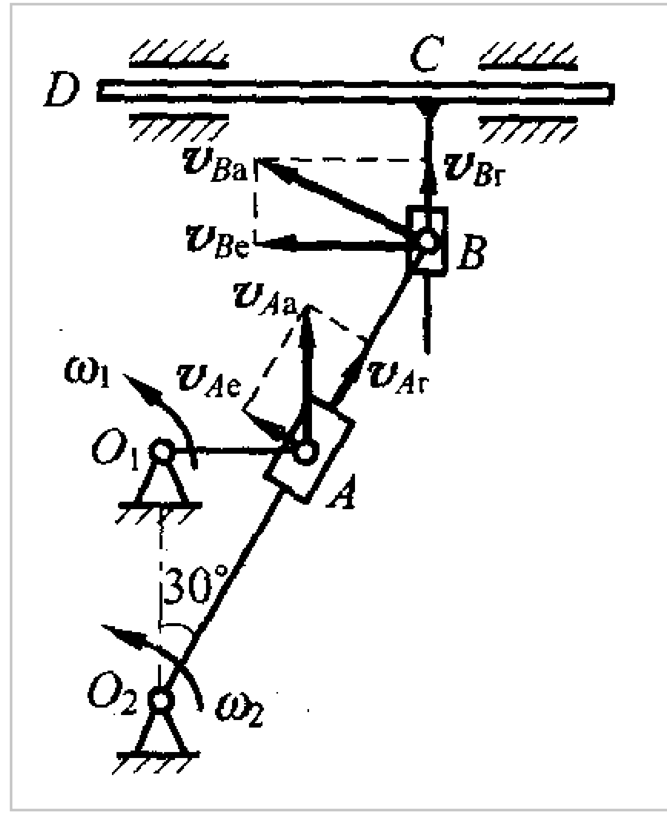
动系：固结于O_2B

$$v_{Aa} = O_1A \cdot \omega_1 = r \cdot \omega_1 \qquad v_{Ae} = v_{Aa}\cos 60^\circ = \frac{1}{2} r\omega_1$$

$$v_{Ar} = v_{Aa}\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} r\omega_1$$

例题7

ω_1=2rad/s ， $O_1A=r$=200mm。
求CD的速度和加速度。



$$v_{Ae} = v_{Aa}\cos 60^\circ = \frac{1}{2} r\omega_1$$

$$v_{Ar} = v_{Aa}\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} r\omega_1$$

$$\omega_2 = \frac{v_{Ae}}{O_2A} = \frac{v_{Ae}}{2r} = \frac{1}{4}\omega_1$$

动点：滑块B　　动系：固结于CD

$$v_{Ba} = O_2B\cdot\omega_2 = \frac{0.65}{\cos 30^\circ}\omega_2 \qquad v_{Be} = v_{Ba}\cos 30^\circ$$

$$v_{CD} = v_{Be} = v_{Be}\cos 30^\circ = 0.65\omega_2 = 0.325(\text{m/s})$$

例题7

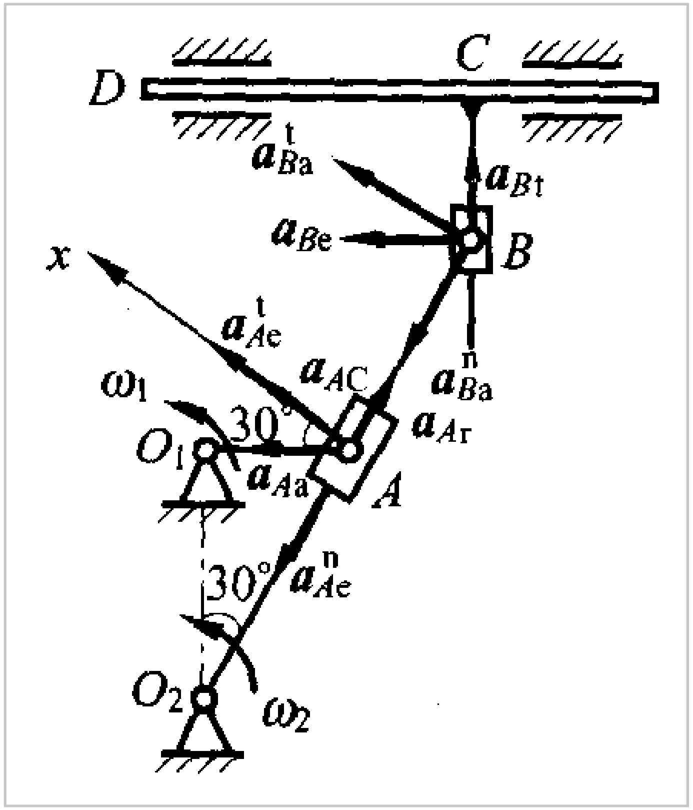
ω_1=2rad/s ， $O_1A=r$=200mm。
求CD的速度和加速度。

解：动点：滑块A；动系：O_2B

$$\vec{a}_a = \vec{a}_{Ae} + \vec{a}_{Ar} + \vec{a}_{AC}$$
$$= \vec{a}_{Ae}^{n} + \vec{a}_{Ae}^{t} + \vec{a}_{Ar} + \vec{a}_{AC}$$

$a_{Aa} = r \cdot \omega_1^2$ 沿着O_1A，指向O_1；

$a_{Ae}^{t} = (O_2A)\cdot\alpha_2$， α_2为未知，垂直于O_2A，指向未知，假设指向左上；



$a_{Ae}^{n} = O_2A \cdot \omega_2^2$ 沿着O_2A，指向O_2；

a_{Ar}： 大小未知，沿着O_2B，

a_{AC}：垂直于O_2B，指向左上，其大小为 $a_{AC} = 2\omega_2 \cdot v_{Ar} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} r\omega_1^2$

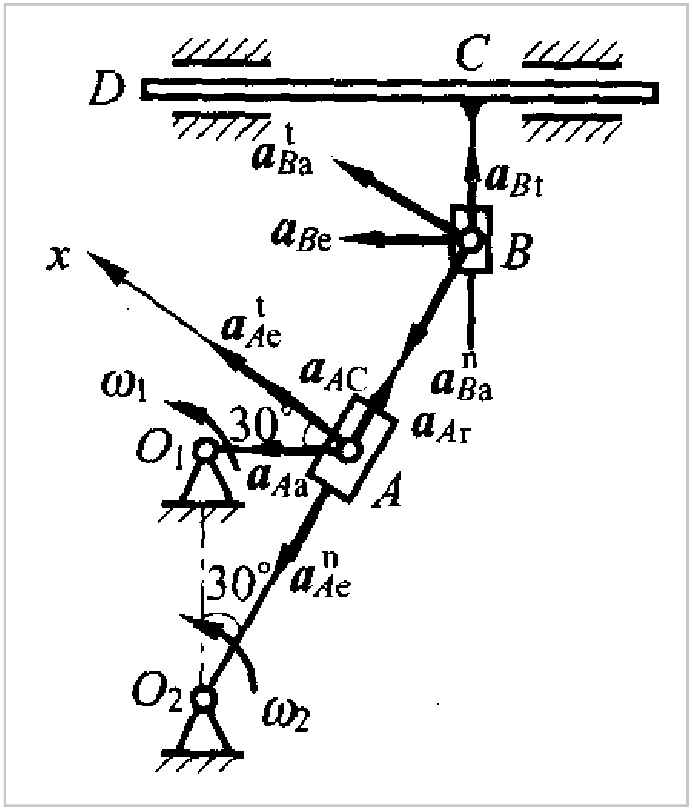
例题7

ω_1=2rad/s ， $O_1A=r=$200mm。
求CD的速度和加速度。

$$\vec{a}_a = \vec{a}_{Ae} + \vec{a}_{Ar} + \vec{a}_{AC}$$
$$= \vec{a}_{Ae}^n + \vec{a}_{Ae}^t + \vec{a}_{Ar} + \vec{a}_{AC}$$

$$a_{Aa} = r \cdot \omega_1^2 \qquad a_{Ae}^n = O_2A \cdot \omega_2^2$$

$$a_{AC} = 2\omega_2 \cdot v_{Ar} = \frac{\sqrt{3}}{4} r\omega_1^2$$



在X方向上投影

$$a_{Aa} \cos 30° = a_{Ae}^t + a_{AC}$$

$$a_{Ae}^t = \frac{\sqrt{3}}{4} r\omega_1^2 \qquad \alpha_2 = \frac{a_{Ae}^t}{O_2A} = \frac{\sqrt{3}}{8}\omega_1^2$$

例题7

ω_1=2rad/s ，$O_1A=r$=200mm。
求CD的速度和加速度。

动点：滑块B；动系： 固结于CD

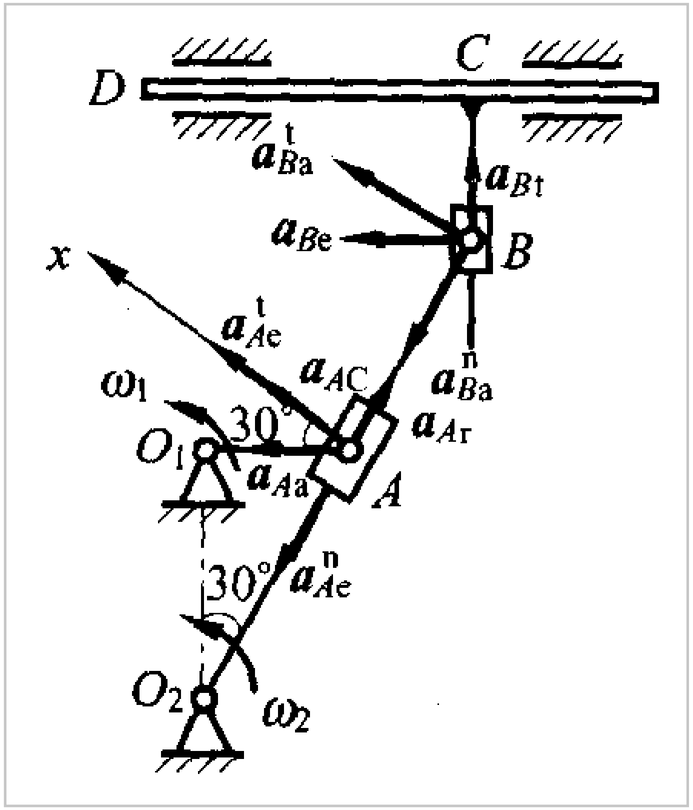
$$\vec{a}_{Ba} = \vec{a}_{Ba}^{t} + \vec{a}_{Ba}^{n} = \vec{a}_{Be} + \vec{a}_{Br}$$

$a_{Ba}^{t} = (O_2B)\,\alpha_2$，垂直于$O_2B$，

$a_{Ba}^{n} = O_2B \cdot \omega_2^2$ 沿着O_2B，指向O_2；

a_{Be}：大小未知，沿着水平

a_{Br}：大小未知，沿着CB



在水平方向上投影：

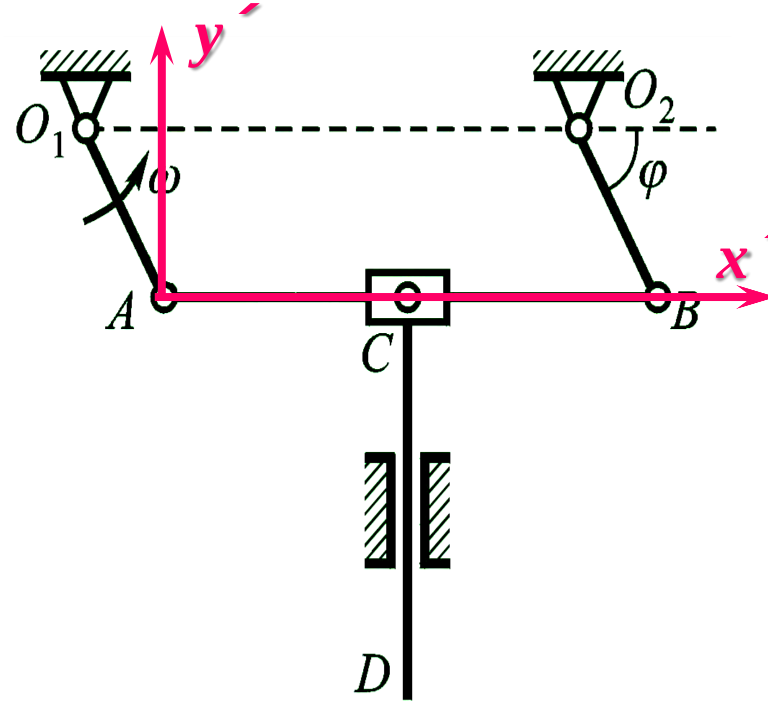
$$a_{Ba}^{t}\cos 30° + a_{Ba}^{n}\cos 60° = a_{Be} \qquad \Rightarrow a_{Be} = a_{CD} = 0.657(\mathrm{m/s^2})$$

结论与讨论

I：铰链、小环作为动点
II：点、小环作为动点

点的复合运动问题的分类I

1. 铰链套筒(滑块)问题
2. 铰链滚轮(直接接触)问题
3. 小环问题
4. 绝对速度(加速度)问题
5. 其他问题



点的复合运动问题的分类II

1. 点→线距离不变
2. 点→点距离不变
3. 小环问题

例题1、例题3

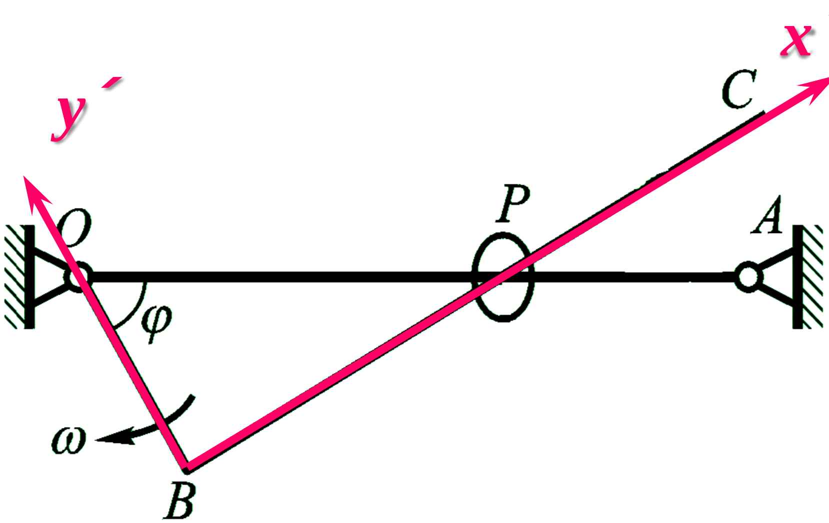
被连接刚体的运动类型？

结论与讨论

I：铰链、小环作为动点
II：点、小环作为动点

点的复合运动问题的分类I

1. 铰链套筒(滑块)问题
2. 铰链滚轮(直接接触)问题
3. 小环问题
4. 绝对速度(加速度)问题
5. 其他问题



点的复合运动问题的分类II

1. 点→线距离不变
2. 点→点距离不变
3. 小环问题

例题2、例题5

被连接刚体的运动类型?

结论与讨论

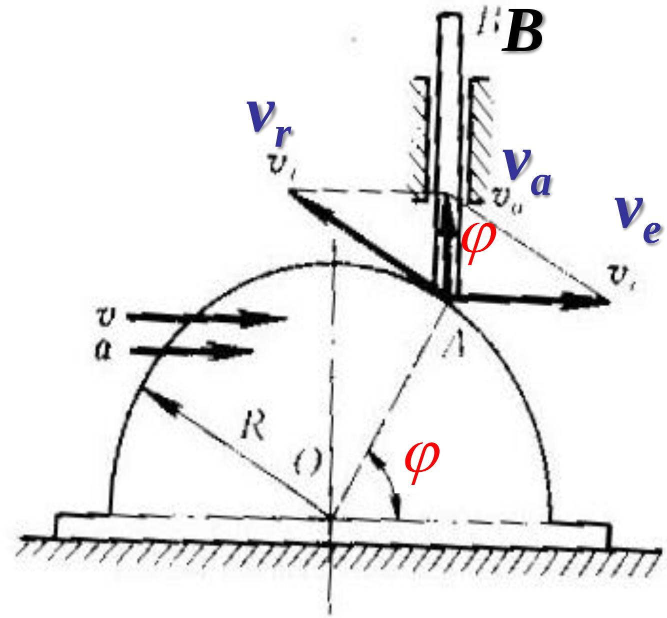
I：铰链、小环作为动点
II：点、小环作为动点

点的复合运动问题的分类I

1. 铰链套筒(滑块)问题
2. <u>铰链滚轮(直接接触)问题</u>
3. 小环问题
4. 绝对速度(加速度)问题
5. 其他问题

点的复合运动问题的分类II

1. 点→线距离不变
2. <u>点→点距离不变</u>
3. 小环问题



例题4

被连接刚体的运动类型?

结论与讨论

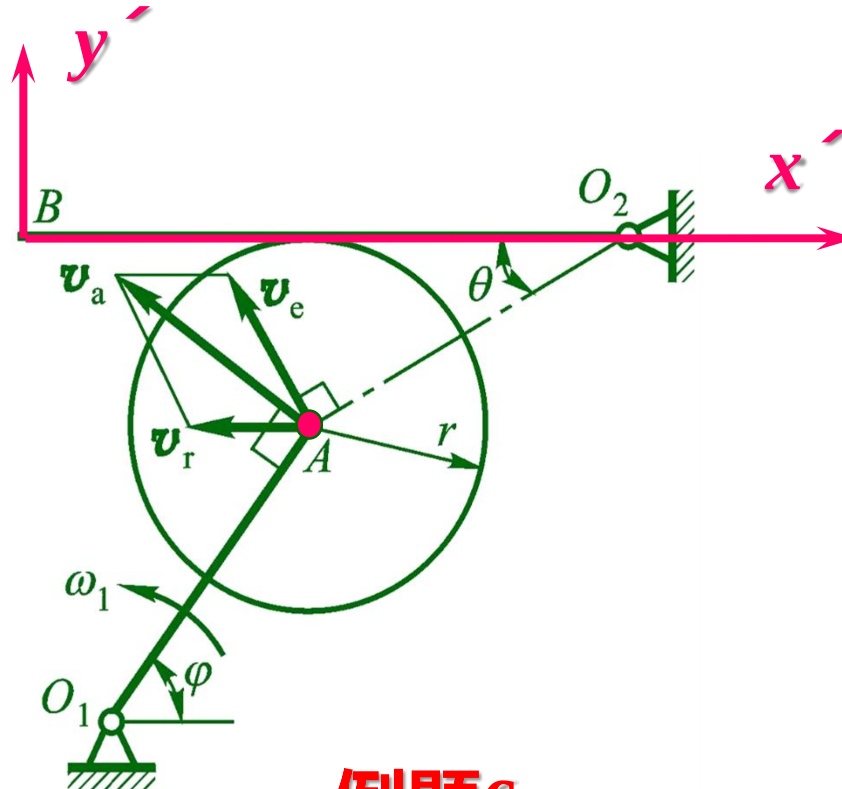
I：铰链、小环作为动点
II：点、小环作为动点

点的复合运动问题的分类I

1. 铰链套筒(滑块)问题
2. <u>铰链滚轮(直接接触)问题</u>
3. 小环问题
4. 绝对速度(加速度)问题
5. 其他问题

点的复合运动问题的分类II

1. <u>点→线距离不变</u>
2. 点→点距离不变
3. 小环问题



例题6

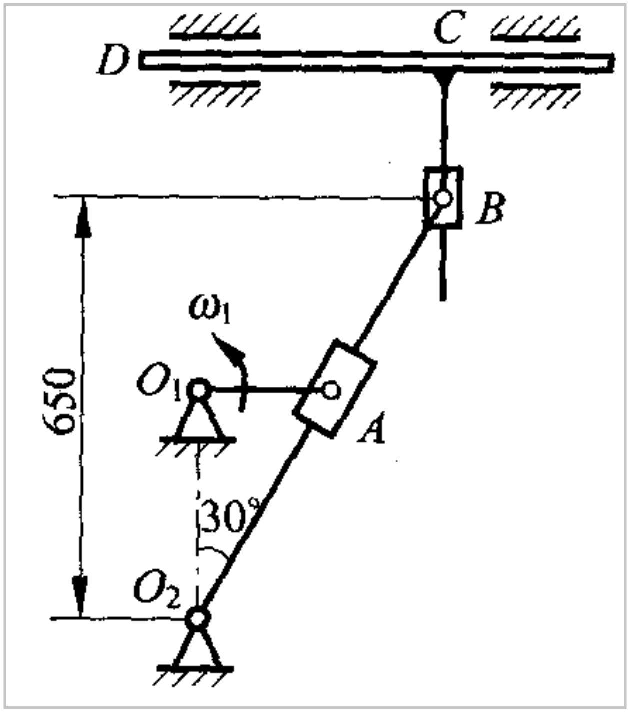
被连接刚体的运动类型?

结论与讨论

I：铰链、小环作为动点
II：点、小环作为动点

点的复合运动问题的分类I

1. 铰链套筒(滑块)问题
2. 铰链滚轮(直接接触)问题
3. 小环问题
4. 绝对速度(加速度)问题
5. 其他问题



点的复合运动问题的分类II

1. 点→线距离不变
2. 点→点距离不变
3. 小环问题

例题7

被连接刚体的运动类型?

结论与讨论

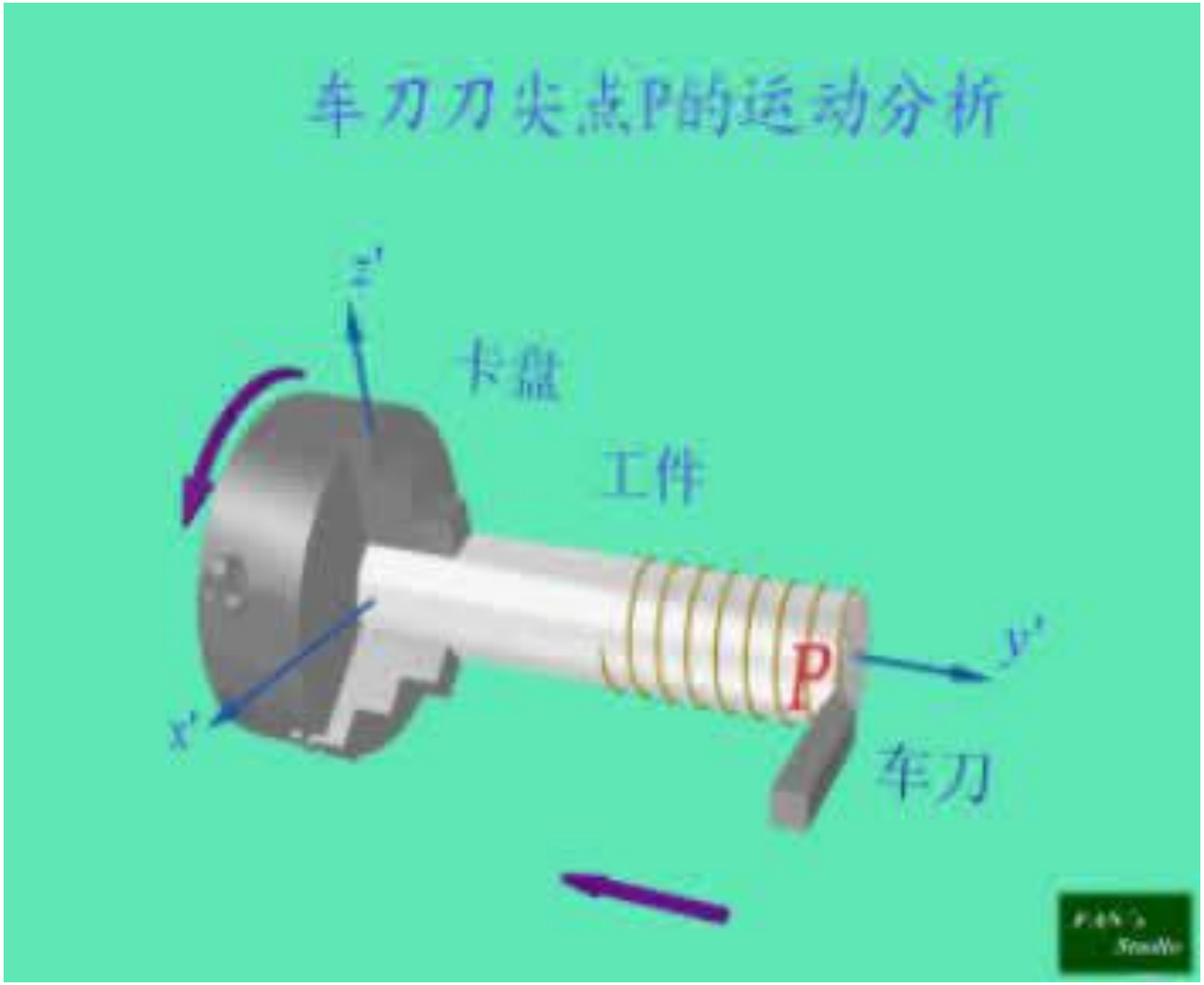
本章核心内容是运动分析、速度分析和加速度分析。

- 正确认识运动的相对性
- 恰当选取动点、动系和定系
- 正确分析三种运动
- 正确分析速度和加速度
- 速度合成定理和加速度合成定理的一般形式

正确认识运动的相对性

运动分析、速度与加速度分析中要特别注意运动的相对性，即对于不同的参考系，有不同的运动方程、速度和加速度。

正确认识运动的相对性



恰当选取动点、动系和定系

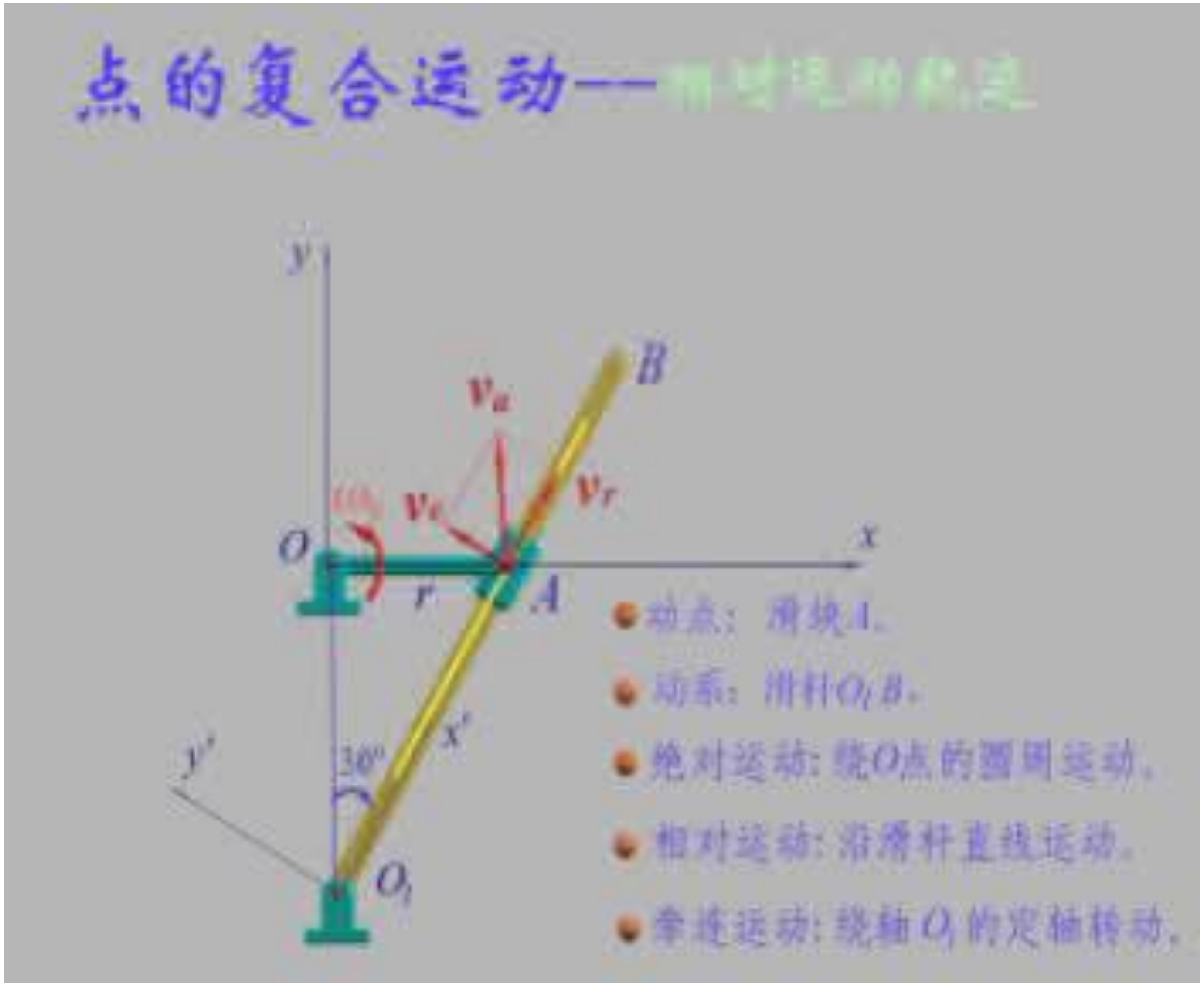
定系一般不作说明时指固连于地球上。

所选的动参考系应能将动点的运动分解成为**相对运动和牵连运动**。

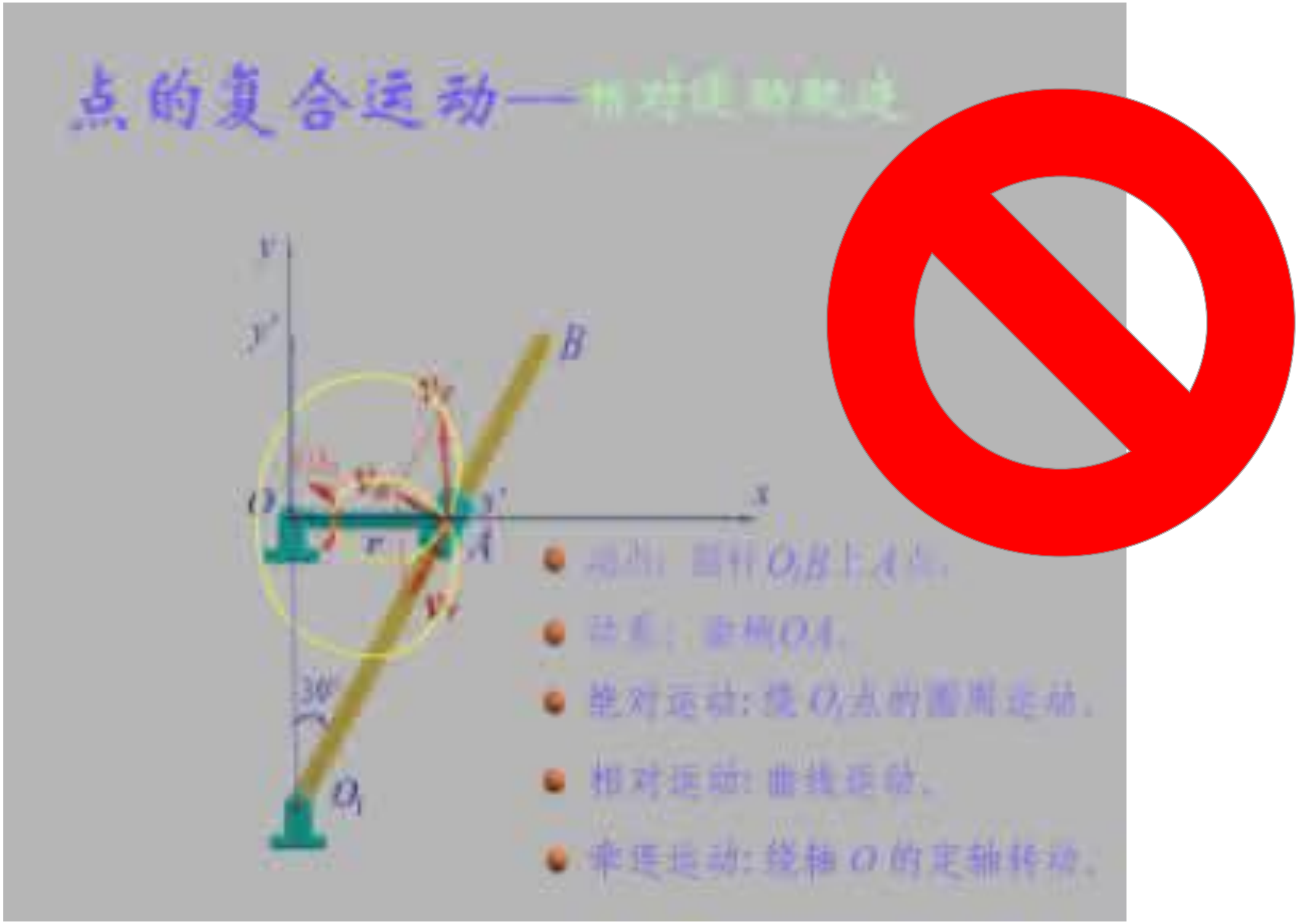
动点和动系间**必须有相对运动**，即动点和动系不能选在同一个物体上。当然，动点也不能取动系上的点；

为了便于求解，动点与动系的选择应使**相对运动轨迹简单或直观**(直线运动或者圆周运动)，目的是希望v_r、a^n_r、a^t_r方向已知，使未知量尽可能少，以便于求解。

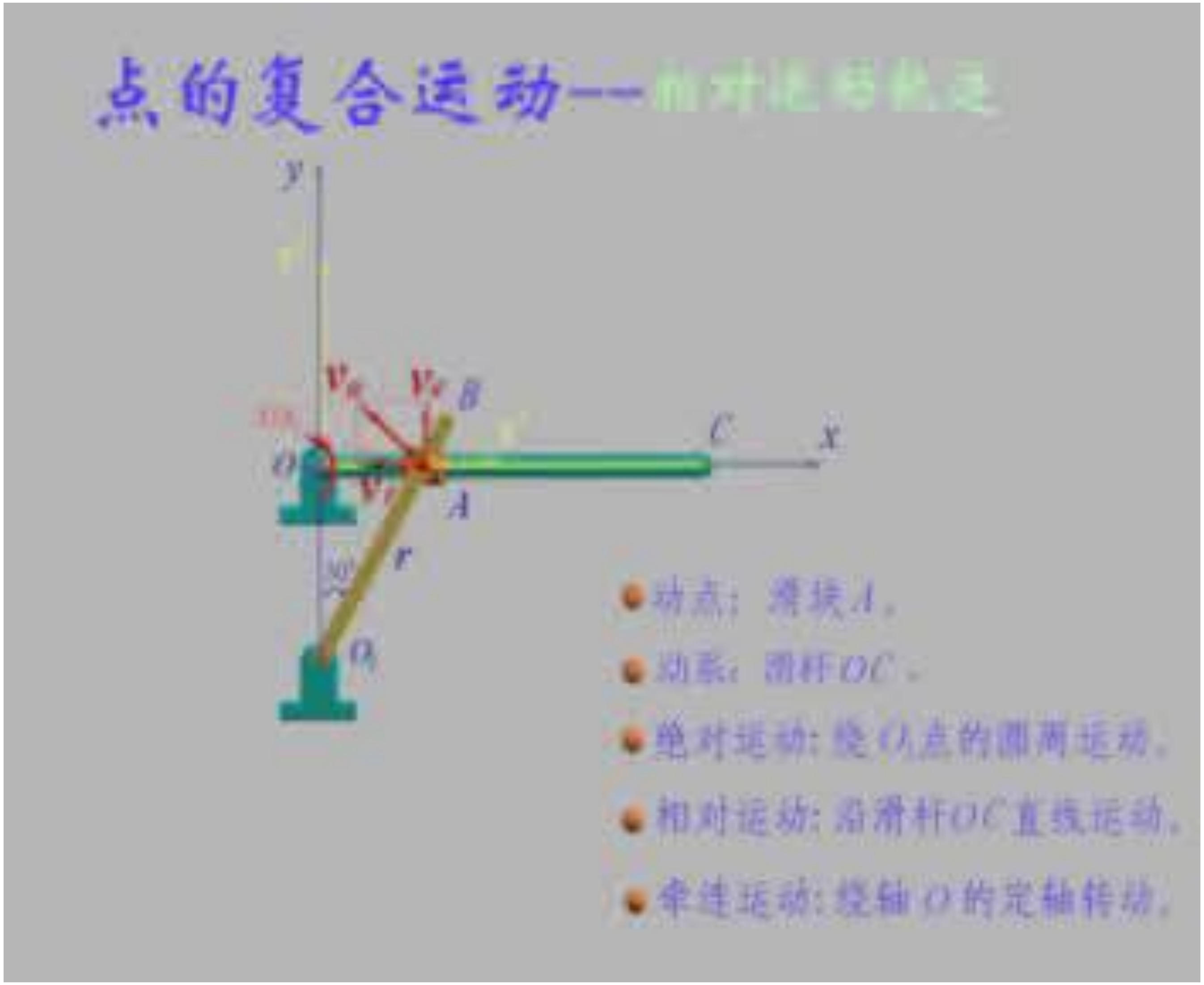
恰当选取动点、动系和定系



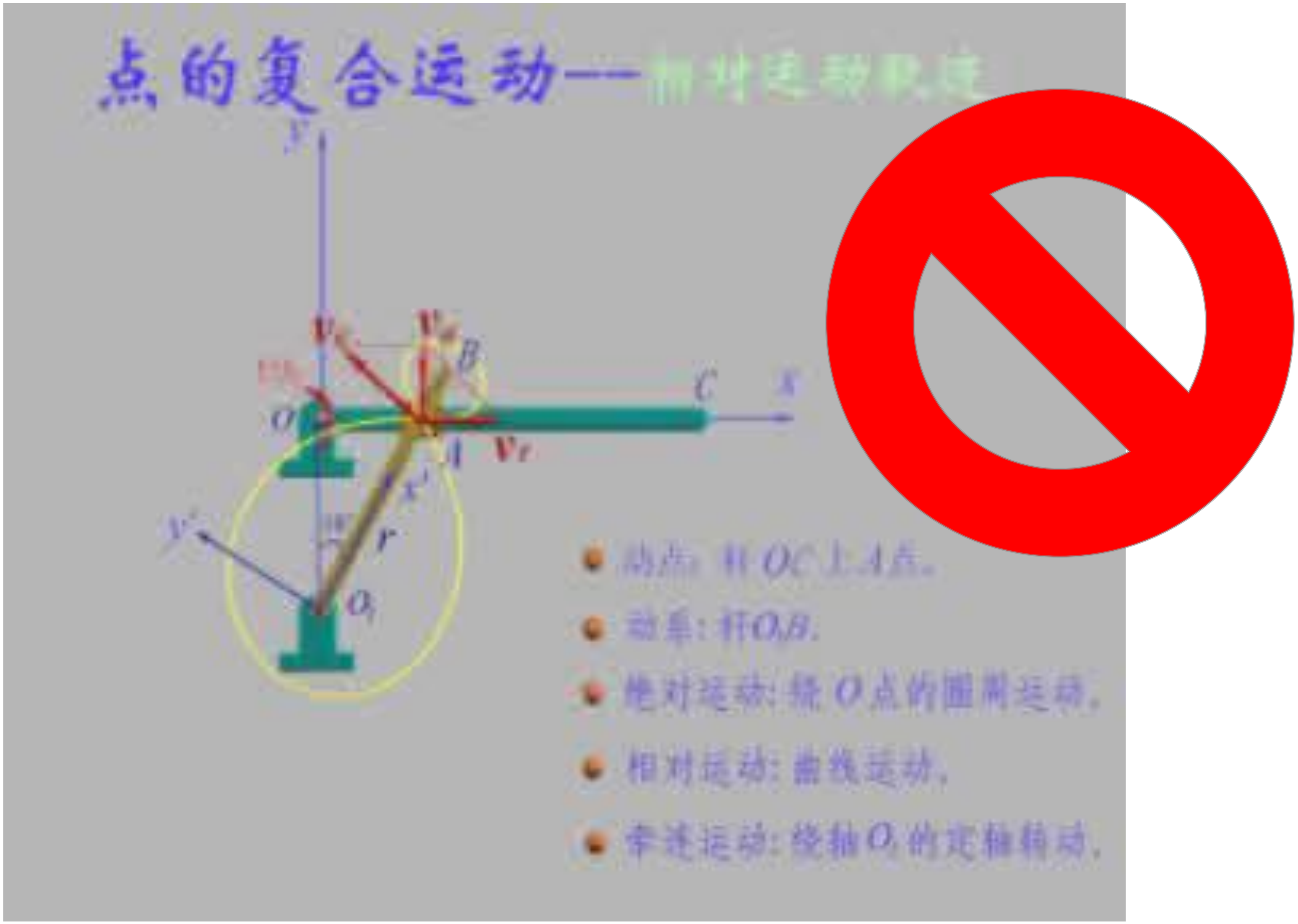
恰当选取动点、动系和定系



恰当选取动点、动系和定系



恰当选取动点、动系和定系



正确分析三种运动

绝对运动指点的运动(直线运动、圆周运动或其它某种曲线运动)；

相对运动也是指点的运动(直线运动、圆周运动或其他某种曲线运动)，正确判断的要领是**观察者在动系上**观察时，动点作何种曲线运动；

牵连运动是指动系(所固连的刚体)的运动(平移、定轴转动或其它某种形式刚体运动)。

需要注意的是，不要将点的运动与刚体的运动概念相混。

正确分析速度和加速度

一般绝对速度概念容易理解掌握；至于相对速度、相对加速度分析之关键在于**相对运动轨迹的判断**；而牵连速度、牵连加速度完全是新概念，它与牵连运动有联系又有明显区别。

牵连运动是动系(刚体)的运动，而牵连速度和牵连加速度分别是动系上**牵连点**(与动点重合点)的(绝对)速度和(绝对)加速度。要注意动点与牵连点的联系与区别。另外，当动系含转动时，若

$$\vec{\omega}\times\vec{v}_r \neq 0$$

则存在**科氏加速度**。

速度和加速度合成定理的一般形式

点的速度合成定理的一般形式 $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$

点的加速度合成定理一般可写成如下形式

$$\vec{a}_a^n + \vec{a}_a^t = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^t + \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^t + \vec{a}_C$$

矢量方程每项都有大小和方向两个要素，平面问题中，一个矢量方程相当于两个代数方程，一般能求两个未知量。

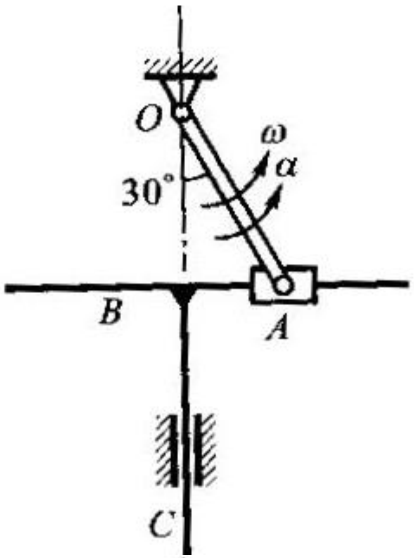
加速度合成定理矢量方程中，各项法向加速度的方向指向运动曲线的曲率中心，大小可根据速度大小和曲率半径求出。

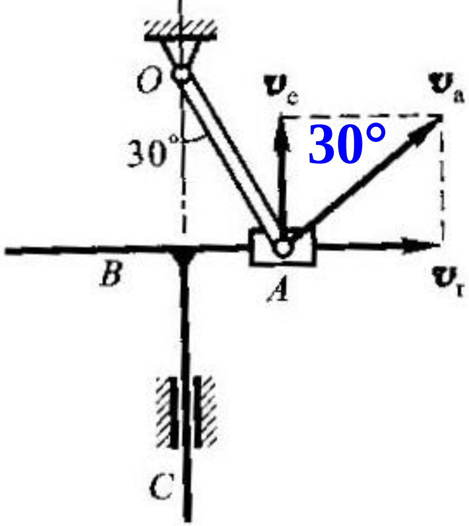
因此在应用加速度合成定理时，一般**先进行速度分析**，这样各项法向加速度都是已知量。科氏加速度a_C的大小和方向两个要素也是已知的。

通常只有三项切向加速度的六个要素是可能的待求量，若已知其中的四个要素，则余下的两个要素就可以完全确定(**将矢量方程向两个未知要素之一的垂直方向投影**)。

参考例题1

曲柄滑块机构,OA=100mm，瞬时杆OA的角速度ω=1rad/s, 角加速度α = 1rad/s2 绕轴O转动。OA杆上有一滑块A，滑块A与杆AB连接。





求: 图示时，BC杆上C点的速度, 加速度,滑块A相对于导杆BC 的速度和加速度。

解：1. 运动分析

动点：*OA*上的*A点*；动系：固连于*BC*杆。

绝对运动：圆周运动；相对运动：沿AB杆直线；牵连运动：导杆BC上下平移。

作速度矢量合成图 $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$

$$v_a = OA \cdot \omega = 100 \cdot 1 = 100\text{mm/s}$$

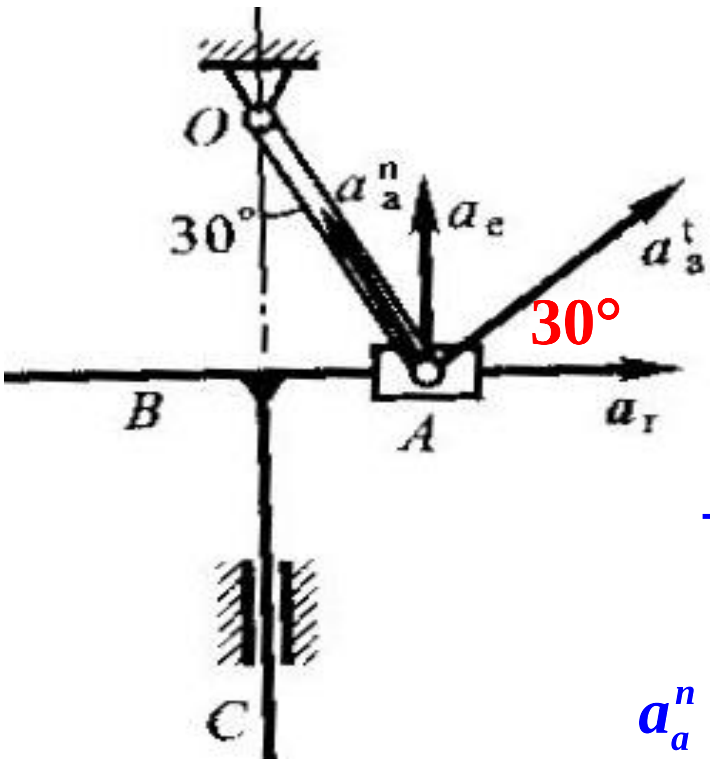
$$v_e = v_a \sin 30° = 50\text{mm/s}$$

$$v_r = v_a \cos 30° = 50\sqrt{3}\text{mm/s}$$

BC杆上C点的速度 $v_C = v_e = 50\text{mm/s}$

参考例题1

曲柄滑块机构,OA=100mm，瞬时杆OA的角速度ω=1rad/s, 角加速度α = 1rad/s2 绕轴O转动。OA杆上有一滑块A，滑块A与杆AB连接。



作加速度矢量合成图：

$$\vec{a}_a^t + \vec{a}_a^n = \vec{a}_e + \vec{a}_r \qquad (1)$$

$$a_a^n = OA \cdot \omega^2 = 100\text{mm/s}^2$$

$$a_a^t = OA \cdot \alpha = 100\text{mm/s}^2$$

将(1)式在水平方向投影，得：

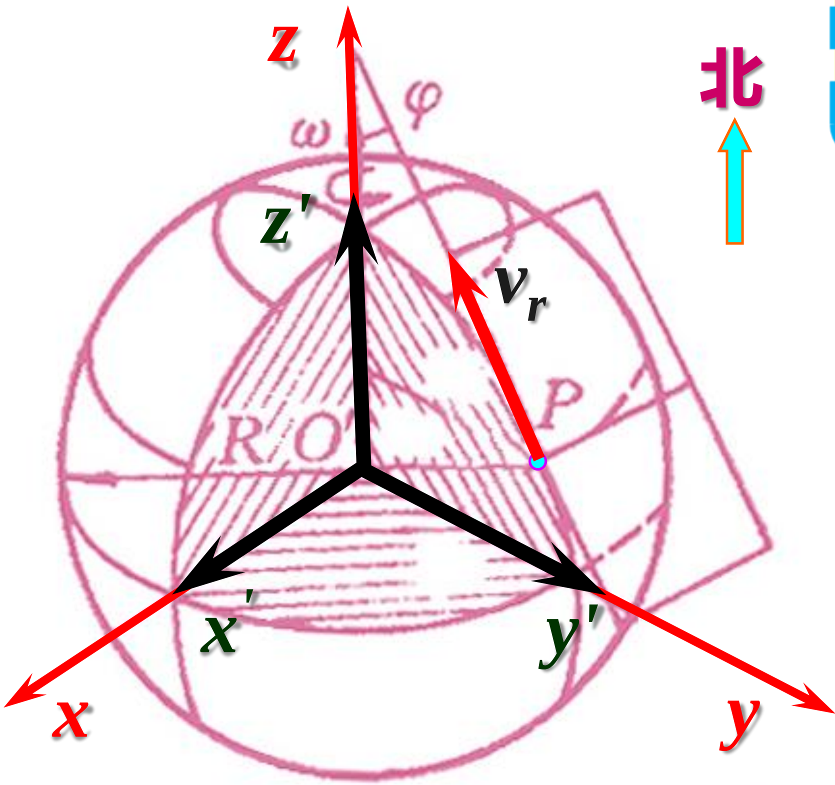
$$-a_a^n \sin 30° + a_a^t \cos 30° = a_r,\ \ a_r = 36.6\text{mm/s}^2$$

将(1)式在垂直方向投影，得：

$$a_a^n \cos 30° + a_a^t \sin 30° = a_e,\ \ a_e = 136.6\text{mm/s}^2$$

BC杆上C点的加速度 $a_C = a_e = 136.6\text{mm/s}^2$

参考例题2



已知：火车(P)沿子午线自南向北以等速v_r行驶。地球半径为R。

求：火车在北纬φ^o时的绝对加速度。

解：1. 选择定系、动系、动点

定系 - 地心系$Oxyz$

动系 - 地球球体$Ox'y'z'$

动点 - 火车P

2. 分析运动

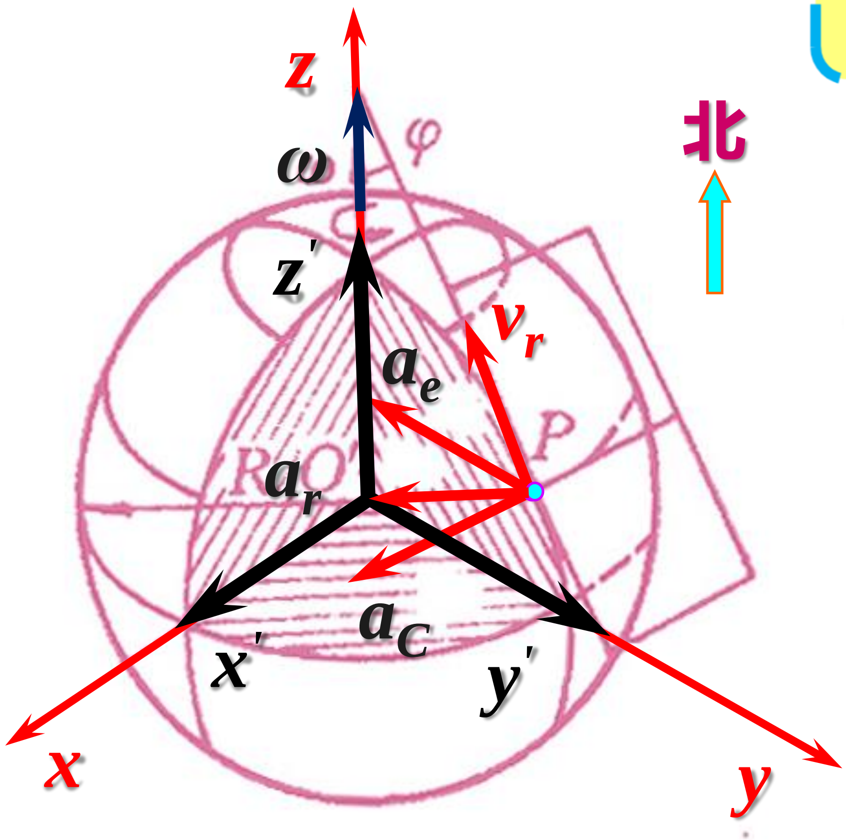
绝对运动 - 空间曲线运动；

相对运动 - 沿着子午线的 等速圆周运动；

牵连运动 - 地球绕Oz′轴 作定轴转动。

参考例题2

已知：火车(P)沿子午线自南向北以等速v_r行驶。地球半径为R。



3. 分析加速度

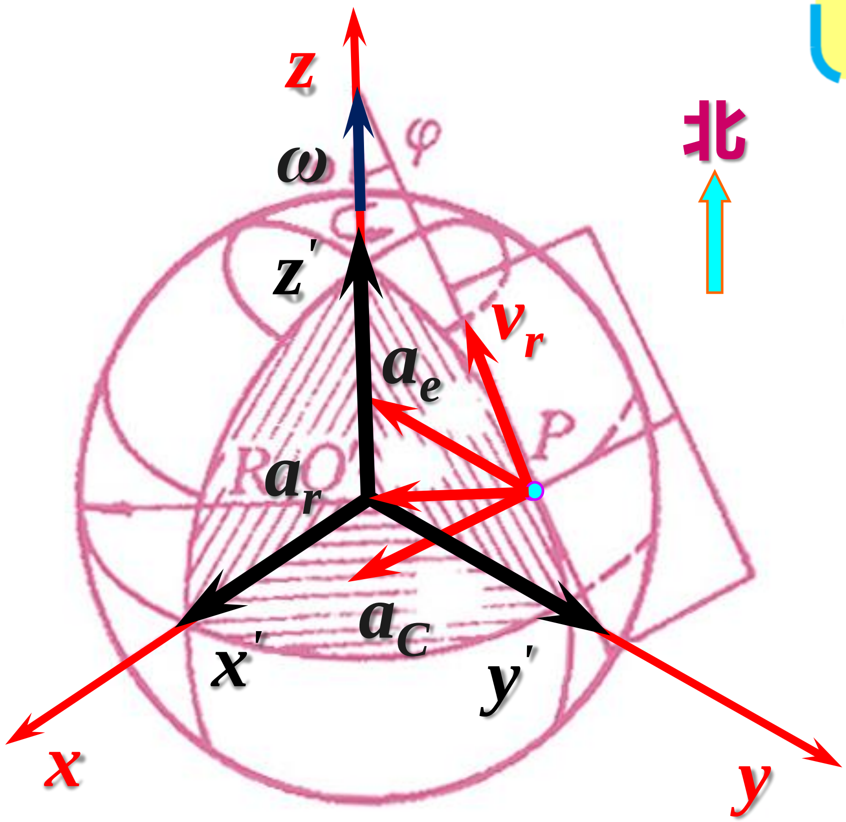
绝对加速度a_a：要求的未知量；

相对加速度：$a_r=v_r^2/R$；方向指向地心；

牵 连 加 速 度： $a_e=R\cos\varphi \cdot \omega^2 a_e$ 矢量垂直于Oz´轴，方向指向Oz´；

科氏加速度： $a_C=2\omega v_r \sin\varphi$；方向沿过P点纬线的切向，指向西。

参考例题2



已知：火车(P)沿子午线自南向北以等速v_r行驶。地球半径为R。

4. 应用加速度合成定理确定火车的绝对加速度

$$\vec{a}_a=\vec{a}_e+\vec{a}_r+\vec{a}_C$$

$$=-R\omega^2\cos\varphi\vec{j}'$$

$$+\left(-\frac{v_r^2}{R}\cos\varphi\vec{j}'-\frac{v_r^2}{R}\sin\varphi\vec{k}'\right)$$

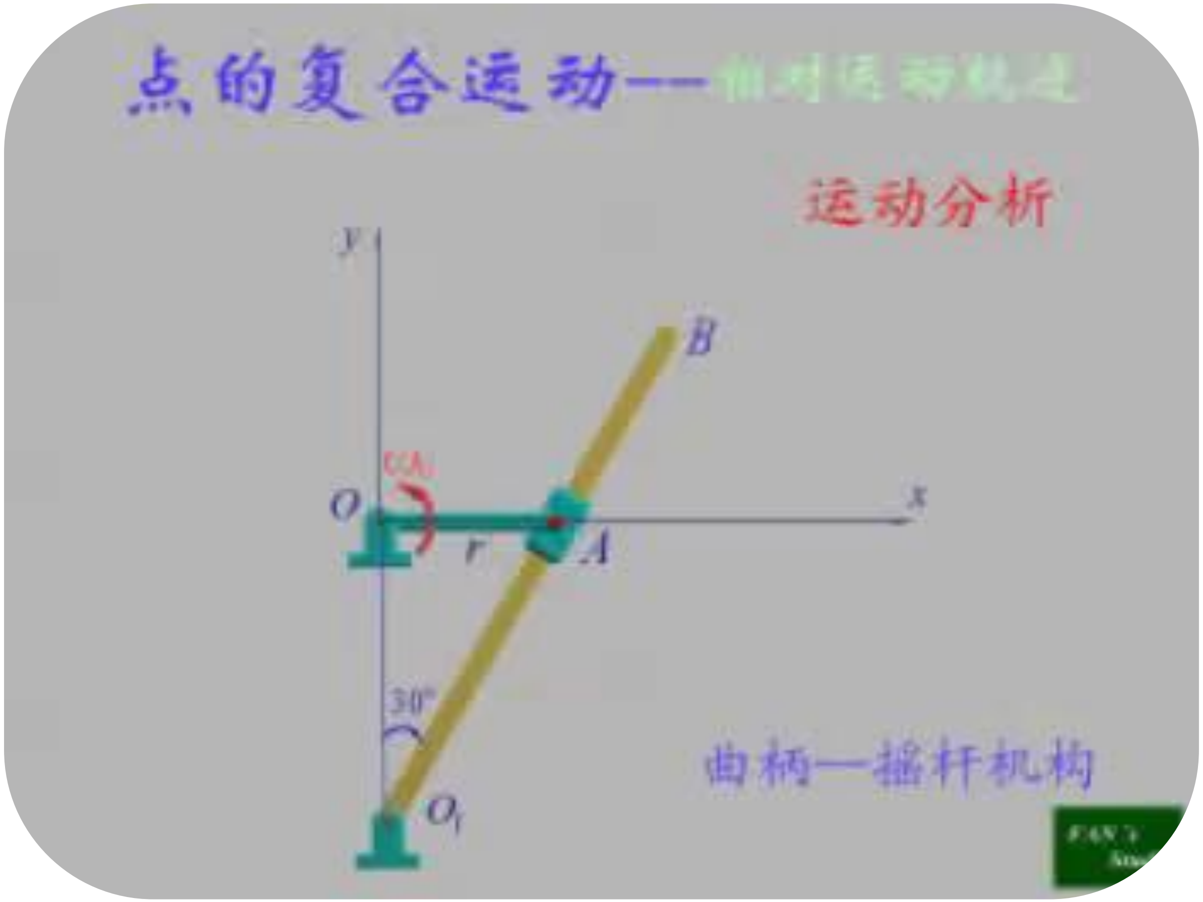
$$+2\omega v_r\sin\varphi\vec{i}'$$

$$\Rightarrow\vec{a}_a=2\omega v_r\sin\varphi\vec{i}'-\left(R\omega^2+\frac{v_r^2}{R}\right)\cos\varphi\vec{j}'-\frac{v_r^2}{R}\sin\varphi\vec{k}'$$

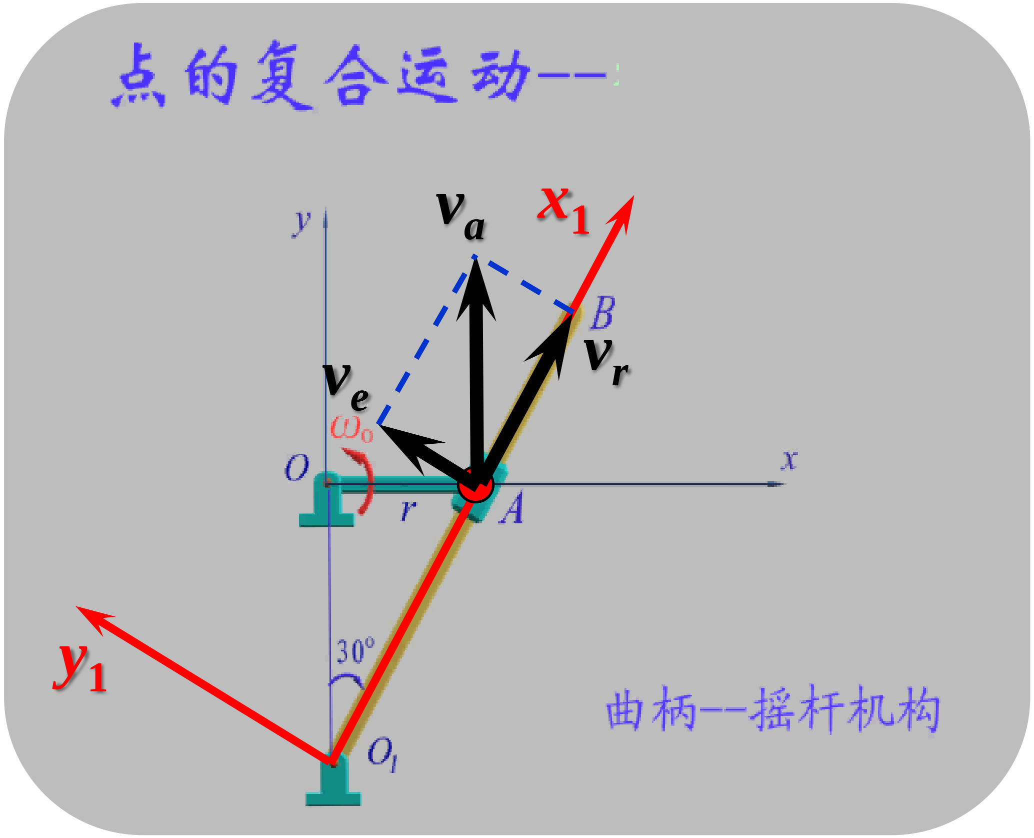
参考例题3

已知：ω_0，$OA = r$

求：AB与铅垂线夹角为30°时，摇杆AB的角加速度。



参考例题3



解：选择动点、动系，运动分析与速度分析

动点：滑块A

动系：$O_1x_1y_1$固结于O_1B

对于动点A，在 t 瞬时

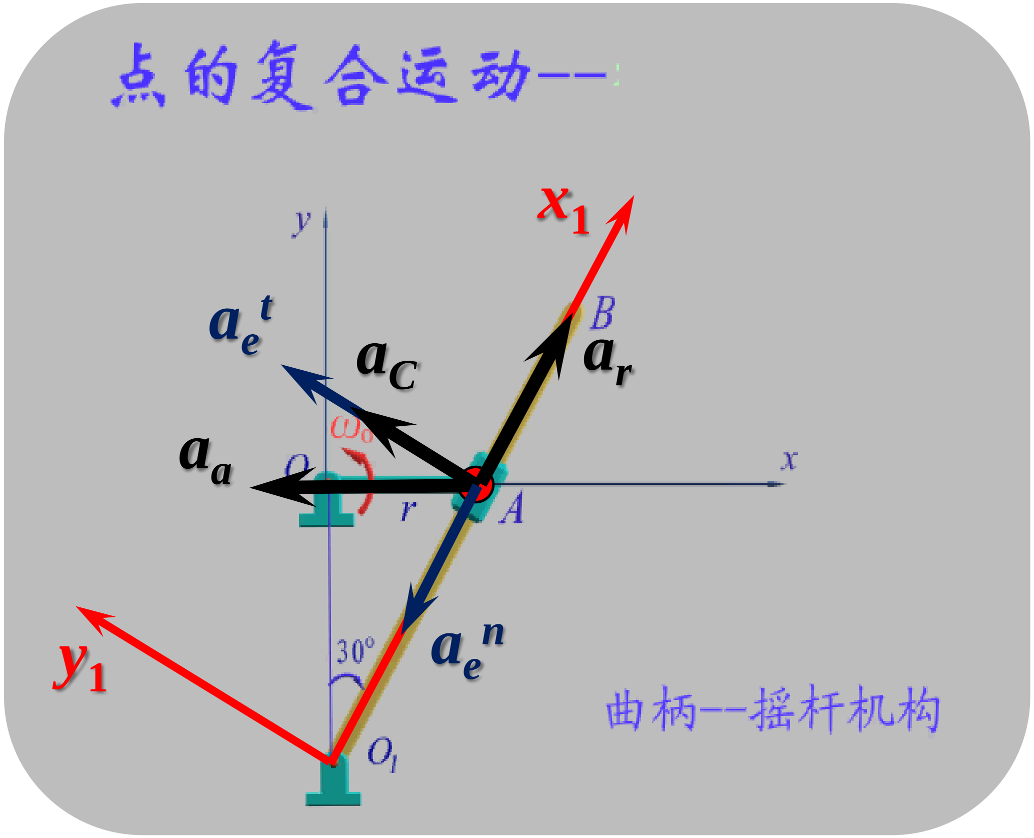
绝对速度v_a：$v_a = r\omega_0$ 沿着铅垂方向向上；

相对速度v_r：大小未知，沿O_1B方向向上；

牵连速度v_e：大小未知，方向垂直与O_1A，斜向左上方。

$$v_e = v_a \cos 60^\circ = \frac{1}{2} r\omega_0, \qquad v_r = v_a \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} r\omega_0$$

参考例题3



加速度分析

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_C$$

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$$

A_a： $a_a = r\omega_0^2$，沿着OA，指向O;

a_r：大小未知，沿着O_1B，指向B;

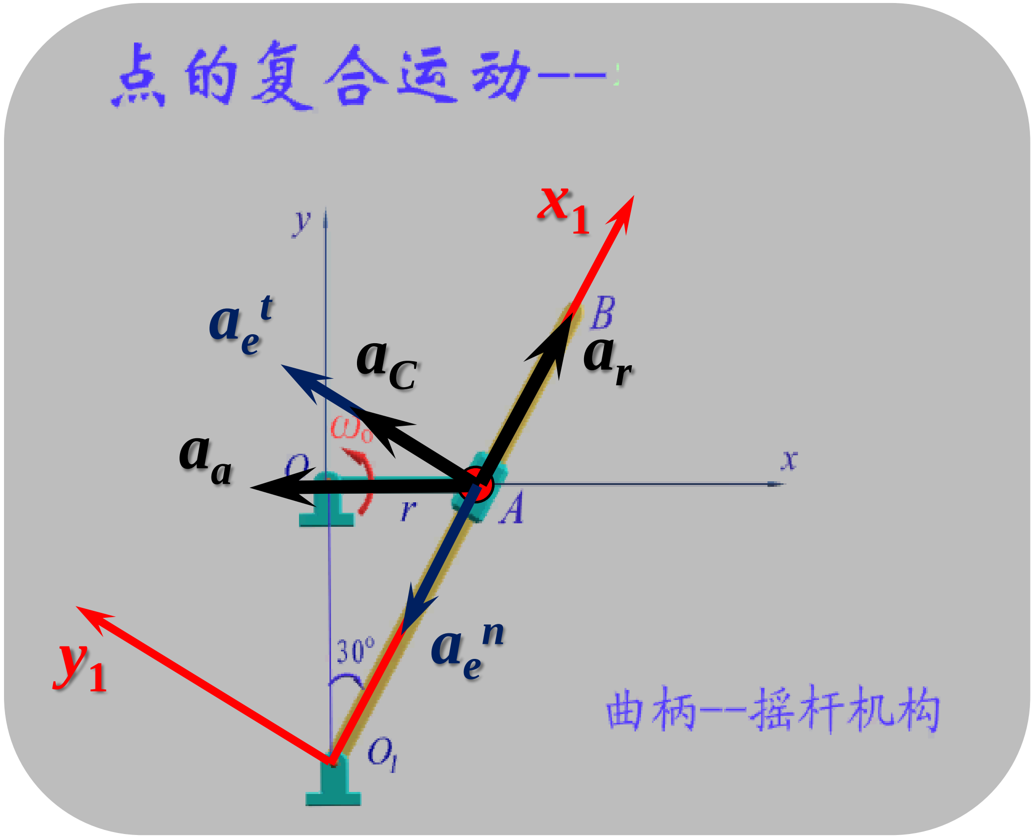
a_e^n： $a_e^n = \dfrac{v_e^2}{O_1A} = \dfrac{r^2\omega^2}{4\times 2r} = \dfrac{r\omega^2}{8}$

沿着O_1A， 指向O_1;

a_e^t： $a_e^t = (O_1A)\cdot\alpha$， 未知，方向垂直于$O_1A$，假设指向左上;

a_C：垂直于O_1B，指向左上 $a_C = 2\omega_{O1}v_r = 2\dfrac{v_e}{O_1A}\dfrac{\sqrt{3}}{2}r\omega_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}r\omega_0^2$

参考例题3



加速度分析

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_C$$

$$a_e^n = \frac{r\omega^2}{8} \qquad a_a = r\omega_0^2$$

$$a_C = 2\omega_{O1} v_r = \frac{\sqrt{3}}{4} r\omega_0^2$$

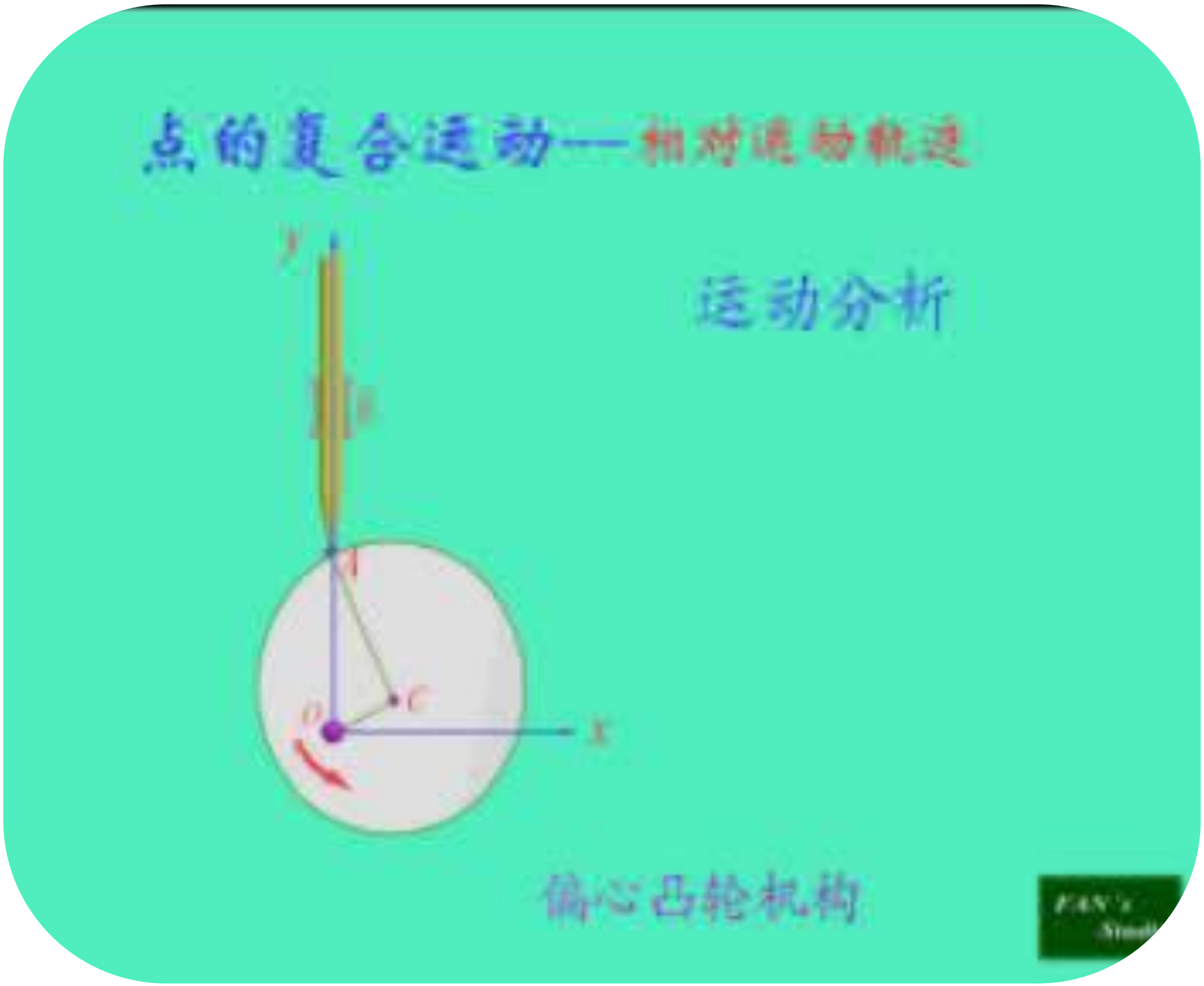
$$a_e^t = (O_1A)\cdot\alpha = 2r\alpha$$

应用加速度合成定理，确定未知的角加速度a

将所有加速度矢量向a_e^t方向上投影：

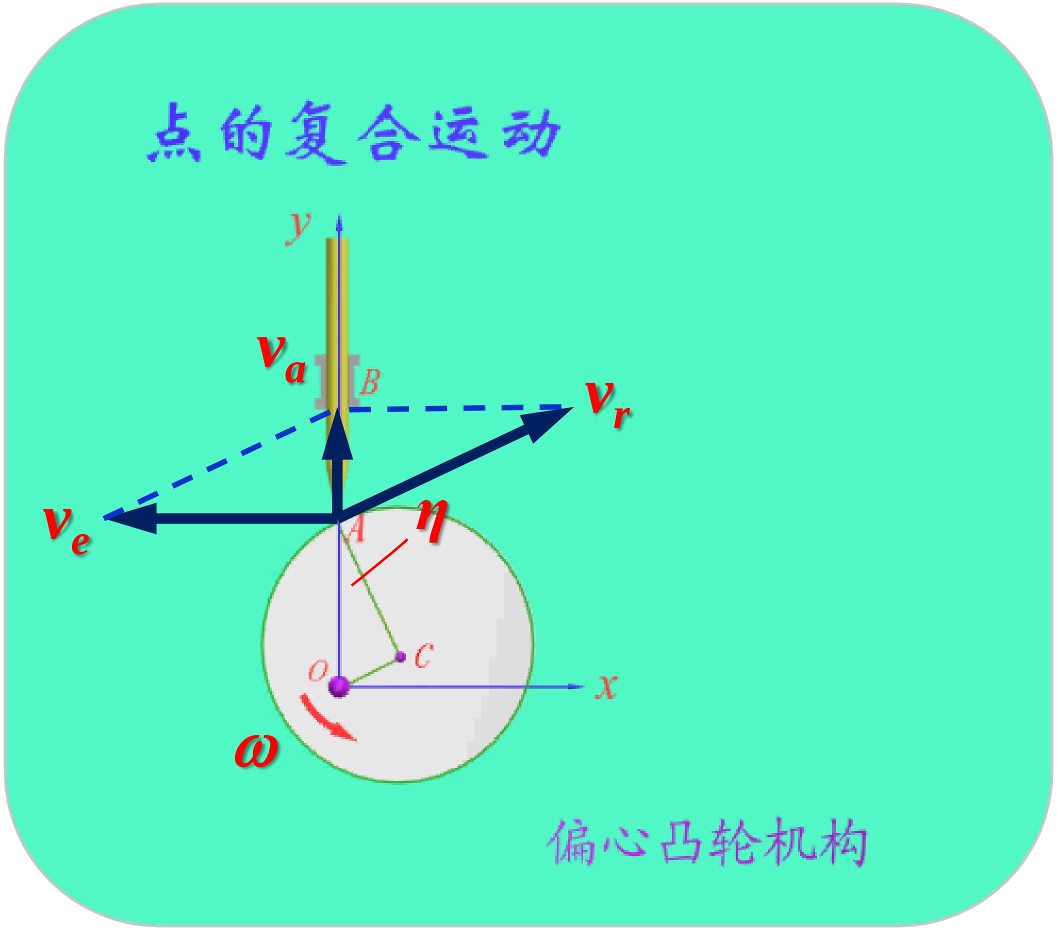
$$a_a \cos 30° = a_e^t + a_C \qquad r\omega_0^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2r\alpha + \frac{\sqrt{3}}{4} r\omega_0^2 \qquad \alpha = \frac{\sqrt{3}}{8}\omega_0^2$$

参考例题4



参考例题4

已知：凸轮的偏心距OC = e,凸轮半径 $r=\sqrt{3}e$，并且以等角速度ω绕O轴转动， 图示瞬时，AC垂直于OC，$\eta=30°$。



求：顶杆的速度与加速度。

解：1．选择动点、动系，运动分析与速度分析

动点：顶杆上A点;

动系：Cx_1y_1固结于凸轮。

对于动点A，在 t 瞬时

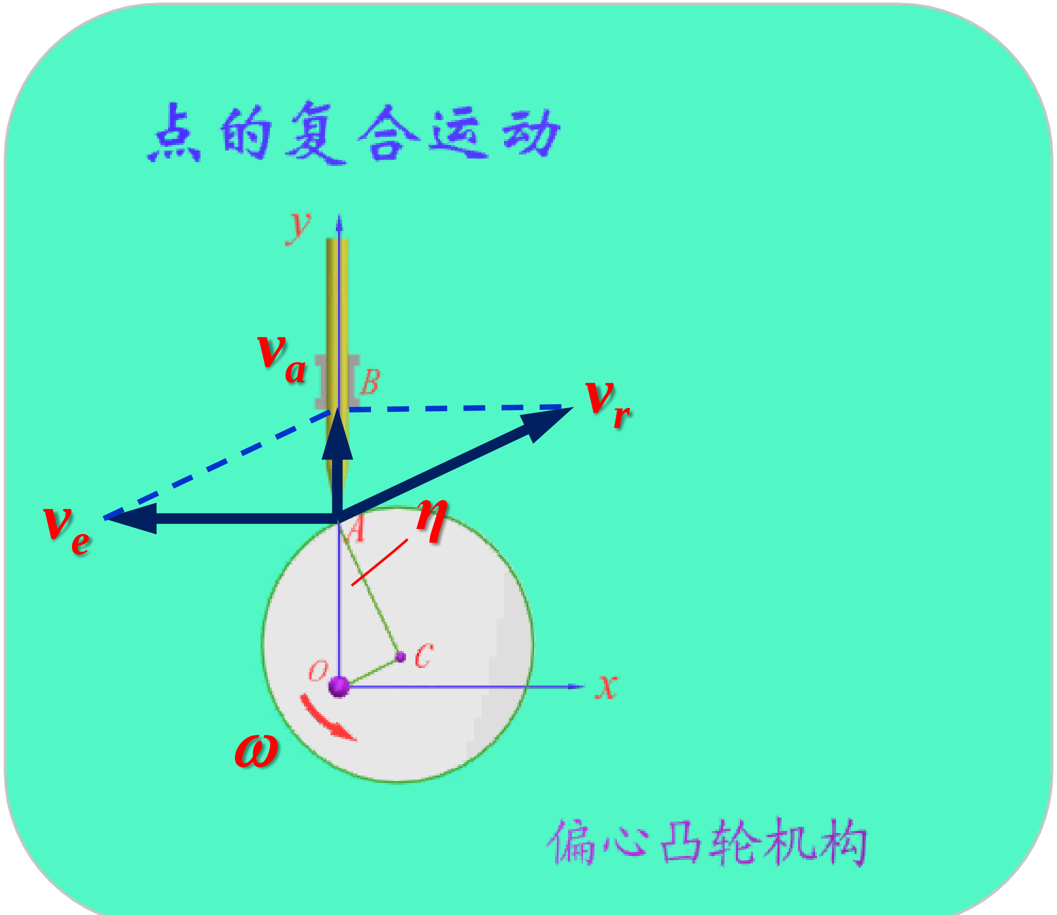
绝对运动：铅垂直线运动；

相对运动：圆周运动；

牵连运动：绕O轴的定轴转动

参考例题4

已知：凸轮的偏心距OC = e,凸轮半径 $r=\sqrt{3}e$，并且以等角速度ω绕O轴转动， 图示瞬时，AC垂直于OC，$\eta=30°$。



求：顶杆的速度与加速度。

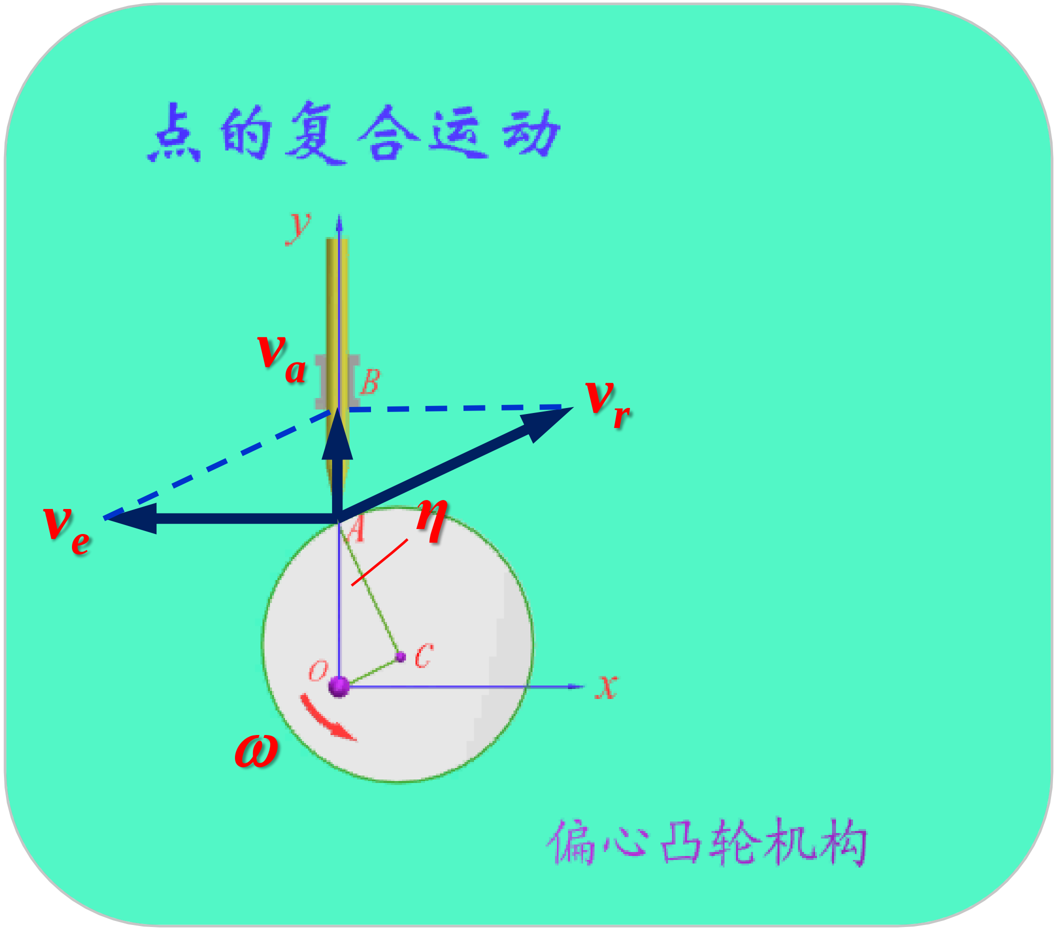
牵连速度v_e：$v_e = OA\cdot\omega = 2e\omega$，方向垂直与$OA$，指向左方；

绝对速度v_a：v_a为所要求的未知量，方向沿着铅垂方向向上；

相对速度v_r：大小未知，方向垂直与CA。

参考例题4

已知：凸轮的偏心距OC = e,凸轮半径 $r=\sqrt{3}e$，并且以等角速度ω绕O轴转动， 图示瞬时，AC垂直于OC，$\eta=30°$。



求：顶杆的速度与加速度。

速度合成定理： $\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r$

由速度平行四边形

$$v_e=2e\omega,\ \eta=30°$$

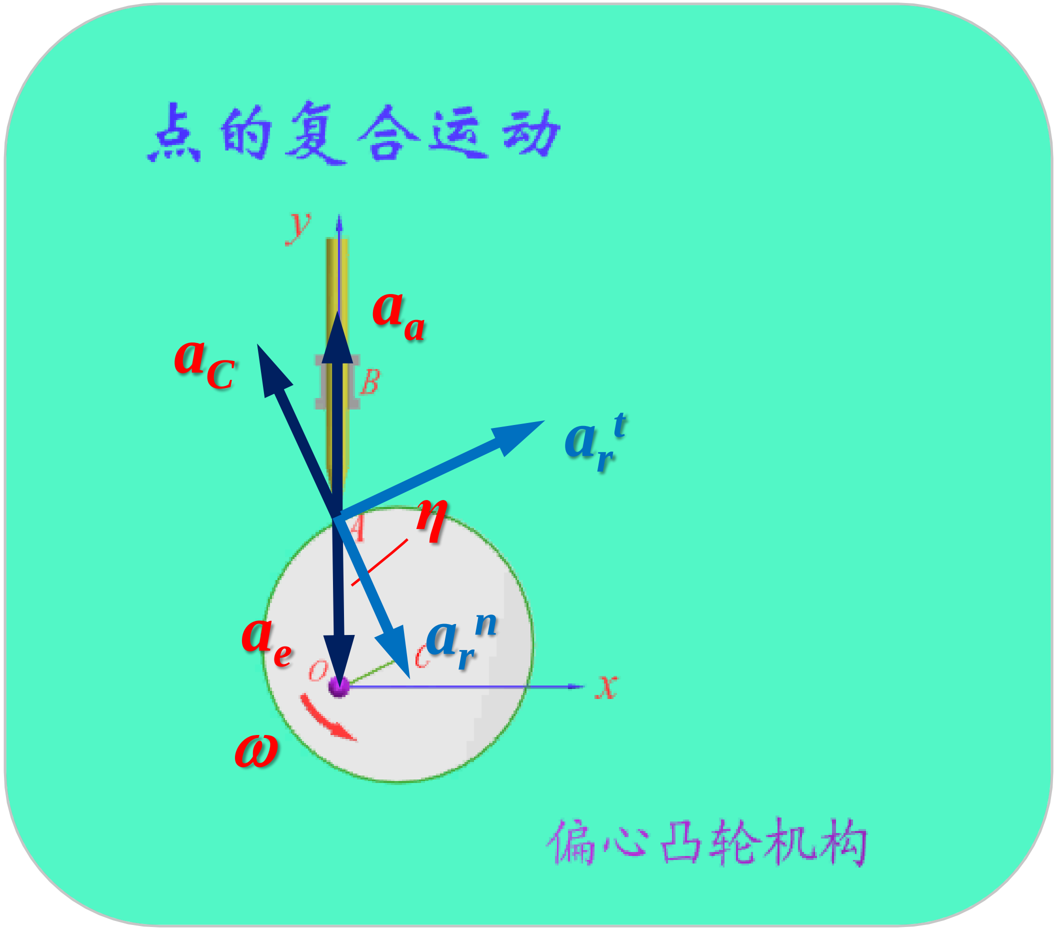
$$v_a=v_e\tan 30°=\frac{2\sqrt{3}}{3}e\omega$$

同时求得相对速度

$$v_r=\frac{v_a}{\sin 30°}=2v_a=\frac{4\sqrt{3}}{3}e\omega$$

参考例题4

已知：凸轮的偏心距OC = e,凸轮半径 $r=\sqrt{3}e$，并且以等角速度ω绕O轴转动， 图示瞬时，AC垂直于OC，$\eta=30°$。



2. 加速度分析

a_a：大小未知，方向沿着AB，假设指向上方；

a_r：$a_r^n = v_r^2/AC$，沿着AC，指向C；

a_r^t：大小未知，垂直于AC，假设指向右上；

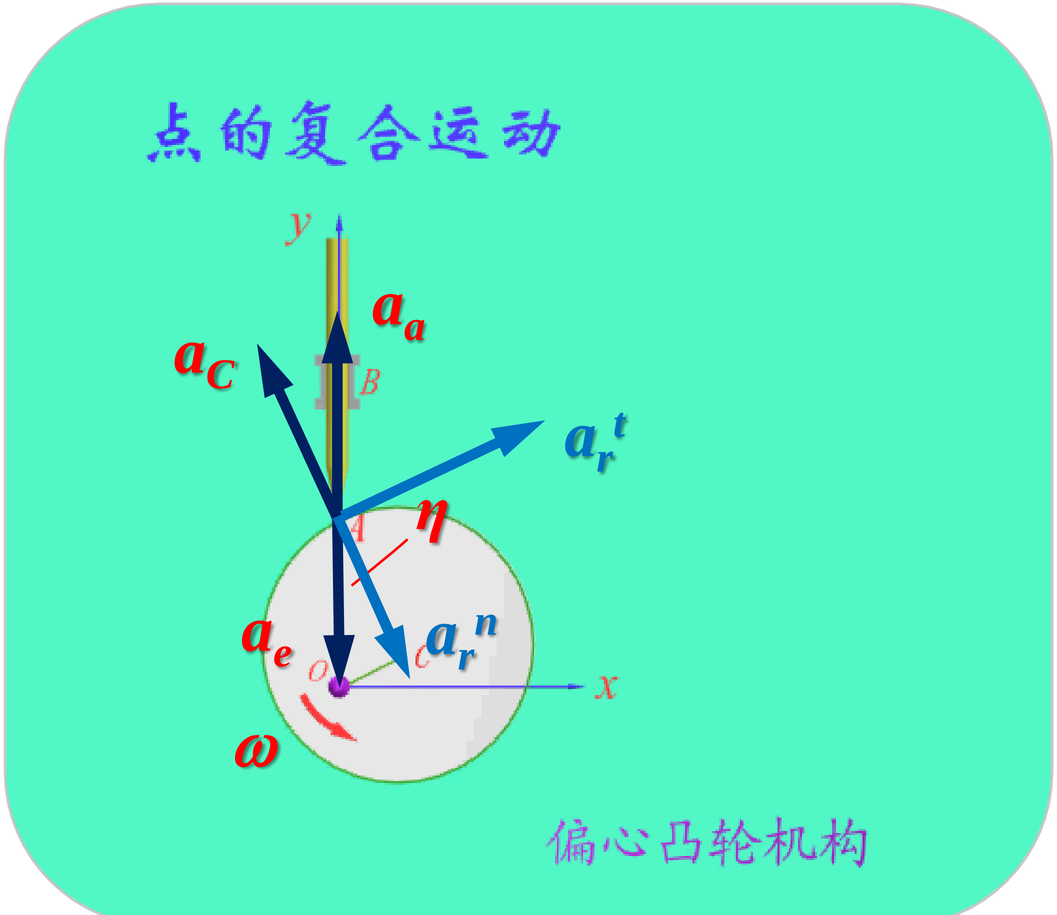
a_e^n：$a_e^n = OA\cdot\omega^2$，沿着OA，指向O；

a_C：沿着CA，指向左上

$$a_C = 2\omega v_r$$

参考例题4

已知：凸轮的偏心距OC = e,凸轮半径 $r=\sqrt{3}e$，并且以等角速度ω绕O轴转动， 图示瞬时，AC垂直于OC，$\eta=30°$。



2. 加速度分析

应用加速度合成定理确定顶杆AB的加速度 a_a

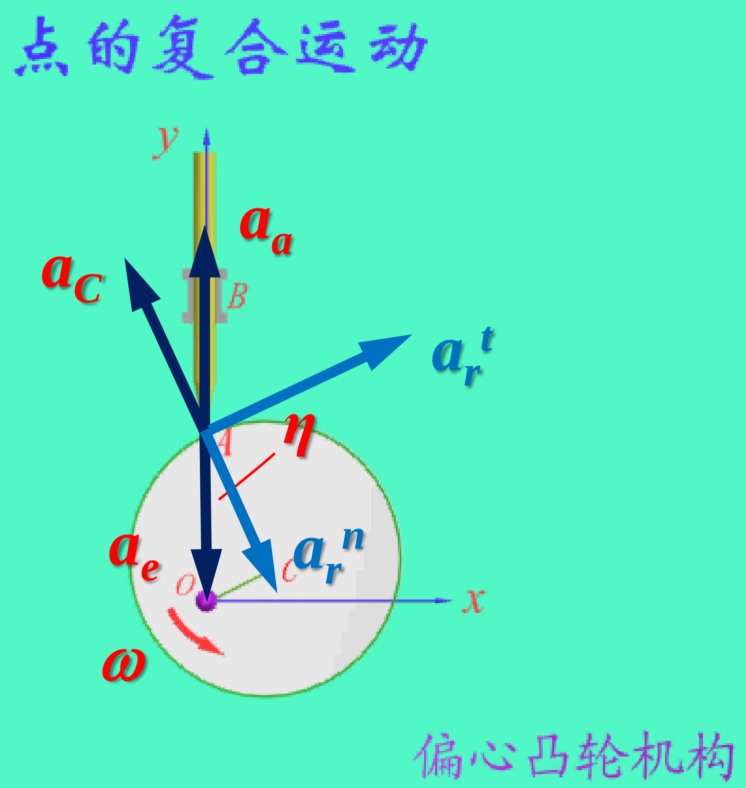
$$a_e^n = OA\cdot\omega^2 = 2e\omega^2$$

$$a_r^n = \frac{v_r^2}{AC} = \frac{16\sqrt{3}}{9}e\omega^2$$

$$a_C = 2\omega v_r = \frac{8\sqrt{3}}{3}e\omega^2$$

参考例题4

已知：凸轮的偏心距OC = e,凸轮半径 $r=\sqrt{3}e$，并且以等角速度ω绕O轴转动，图示瞬时，AC垂直于OC，$\eta=30°$。



2. 加速度分析

将加速度合成定理矢量方程向a_C方向投影

$$a_a\cos 30^\circ = a_C - a_r^n - a_e^n\cos 30^\circ$$

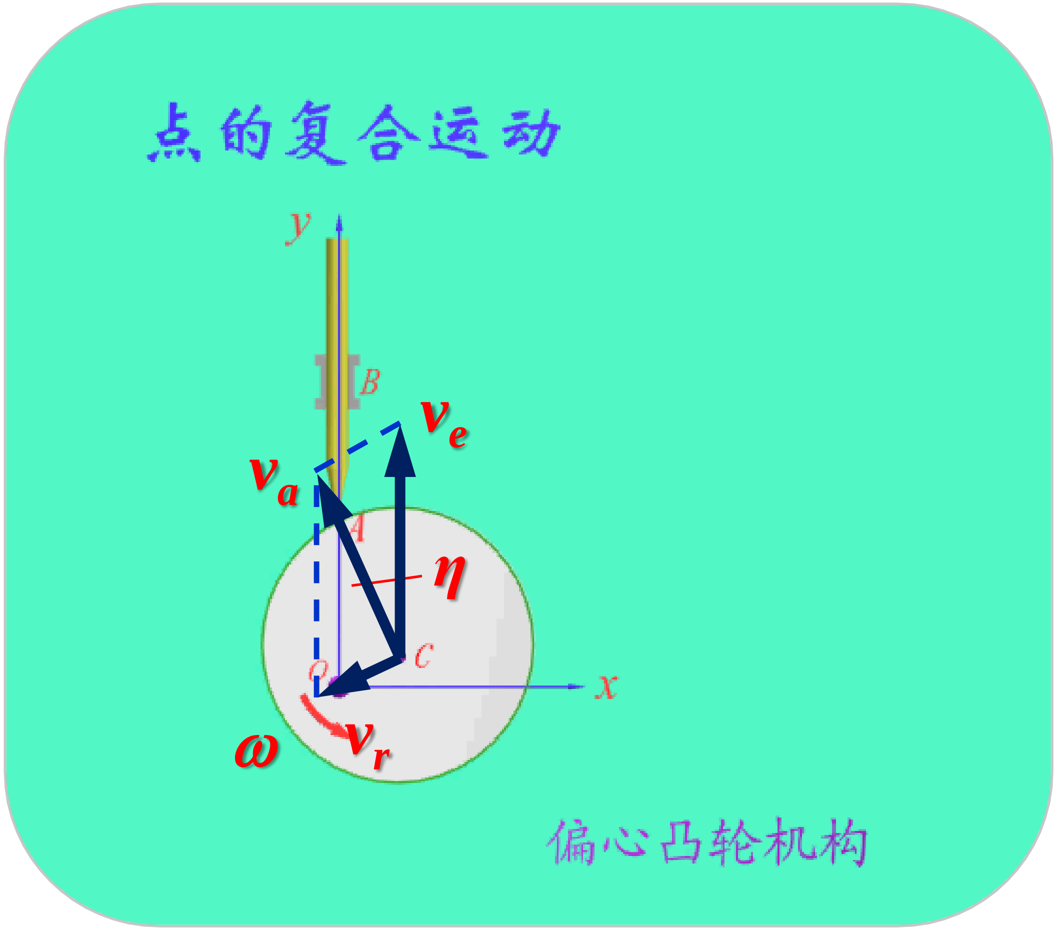
$$\frac{\sqrt{3}a_a}{2} = \left(\frac{8\sqrt{3}}{3} - \frac{16\sqrt{3}}{9}\right)e\omega^2 - \sqrt{3}e\omega^2$$

$$a_a = -\frac{2}{9}e\omega^2$$

负号表示a_a的实际方向与所假设的方向相反。

参考例题4(方法二)

已知：凸轮的偏心距OC = e,凸轮半径 $r=\sqrt{3}e$，并且以等角速度ω绕O轴转动， 图示瞬时，AC垂直于OC，$\eta=30°$。



求：顶杆的速度与加速度。

解：1. 选择动点、动系，运动分析与速度分析

动点：凸轮上C点;

动系：$Ax'y'$固结于顶杆

对于动点C，在 t 瞬时

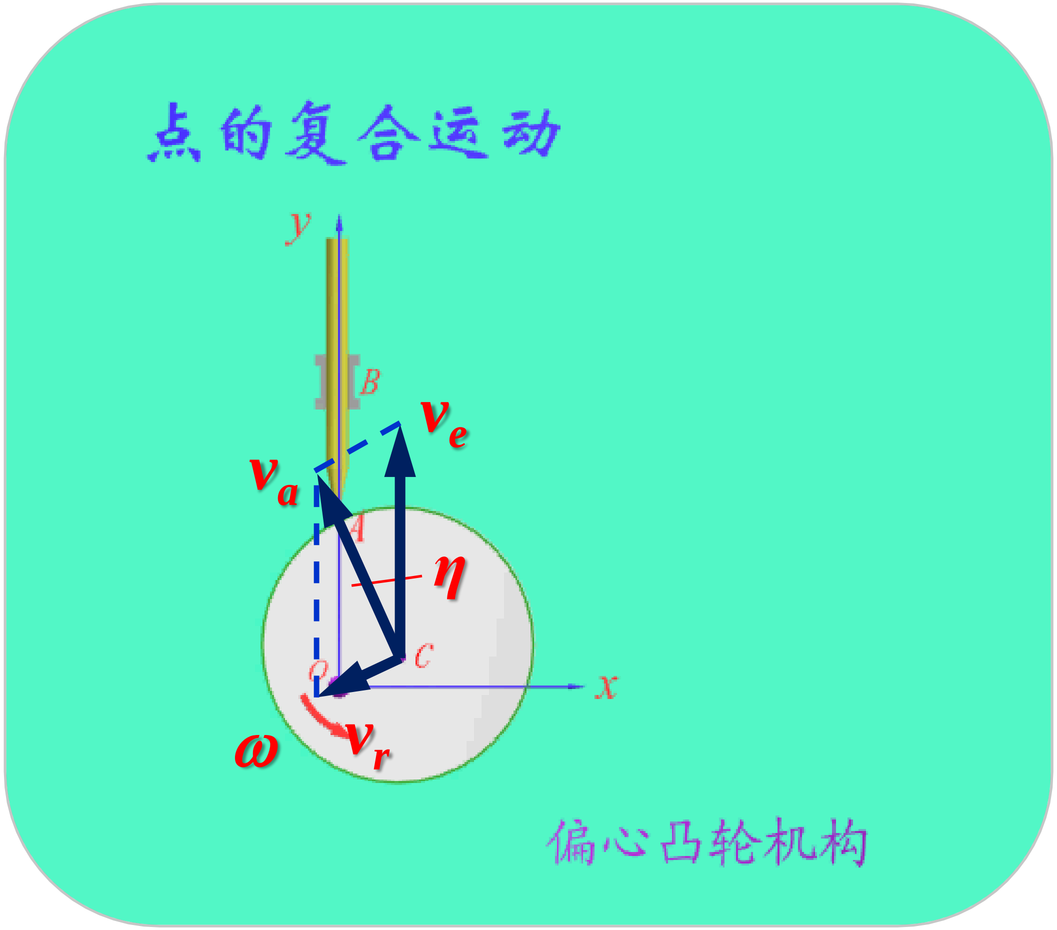
绝对运动：圆周运动;

相对运动：绕A点的圆周运动;

牵连运动：上下平移

参考例题4(方法二)

已知：凸轮的偏心距OC = e,凸轮半径 $r=\sqrt{3}e$，并且以等角速度ω绕O轴转动，图示瞬时，AC垂直于OC，$\eta=30°$。



求：顶杆的速度与加速度。

速度合成定理：$\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r$

由速度平行四边形

$$v_a=e\omega,\ \eta=30°$$

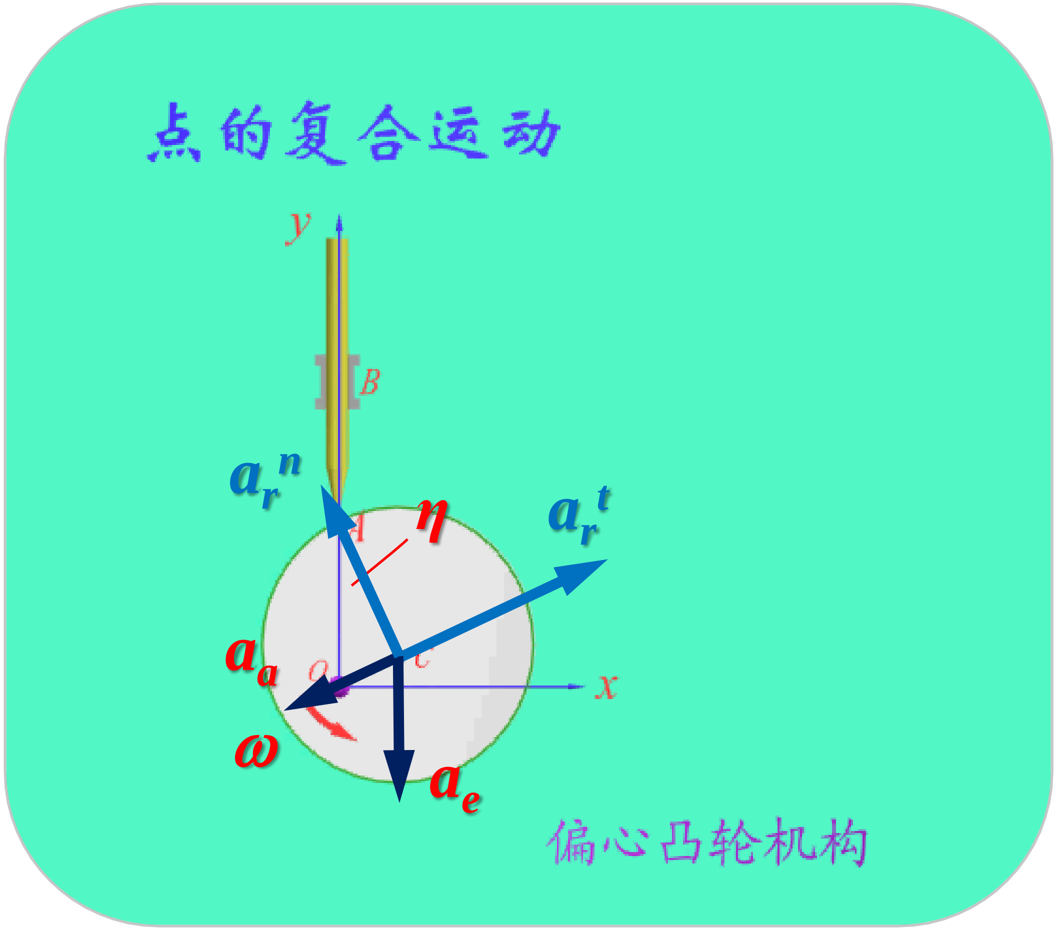
$$v_e=\frac{v_a}{\cos 30°}=\frac{2v_a}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}e\omega$$

同时求得相对速度

$$v_r=v_a\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}e\omega$$

参考例题4(方法二)

已知：凸轮的偏心距OC = e,凸轮半径 $r=\sqrt{3}e$，并且以等角速度ω绕O轴转动，图示瞬时，AC垂直于OC，$\eta=30°$。



2. 加速度分析

a_a： $a_a=OA\cdot\omega^2$，方向沿着OA，指向O；

a_r：$a_r^n = v_r^2/AC$，沿着AC，指向A；

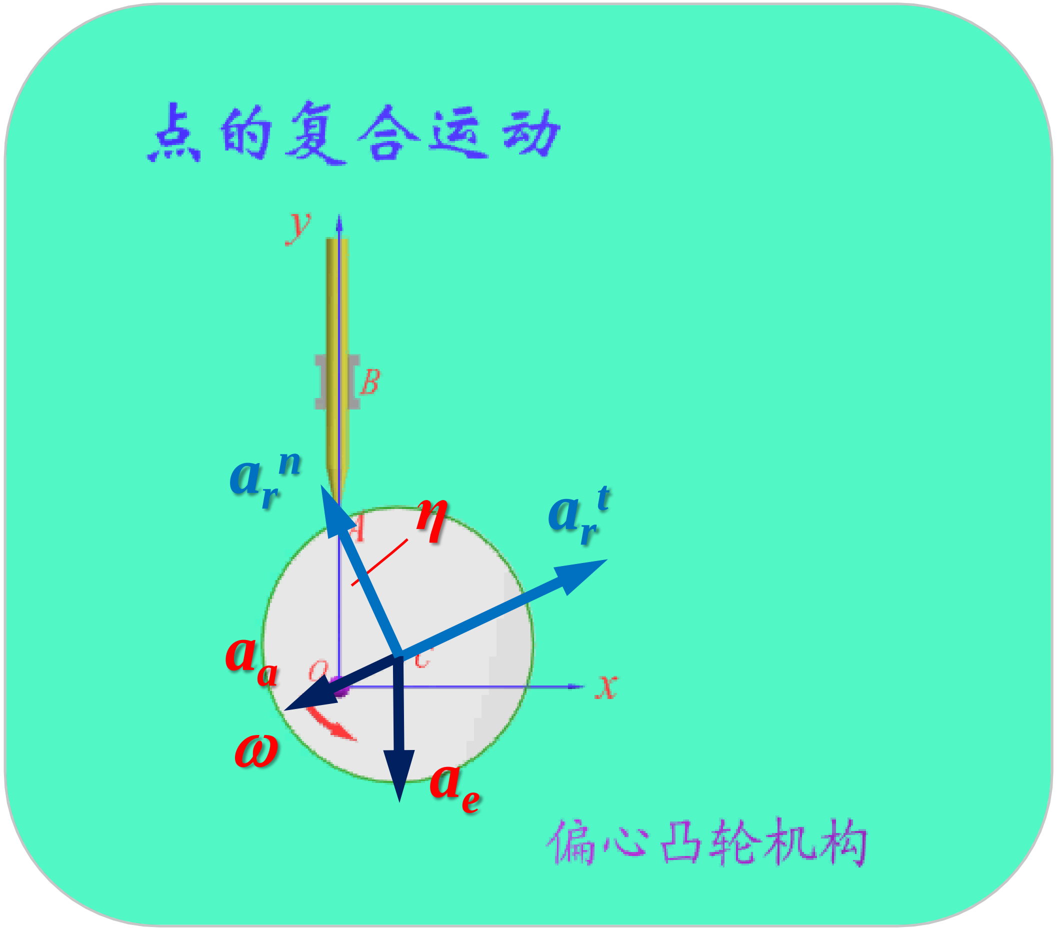
a_r^t：大小未知，垂直于AC，假设指向右上；

a_e ：大小未知，平行于AB，假设向下；

a_C：动系平移，无科氏加速度

参考例题4(方法二)

已知：凸轮的偏心距OC = e,凸轮半径 $r=\sqrt{3}e$，并且以等角速度ω绕O轴转动，图示瞬时，AC垂直于OC，$\eta=30°$。



2. 加速度分析

将加速度合成定理矢量方程向a_r^n方向投影

$$0=a_r^n-a_e\cos 30^\circ$$

$$a_e=\frac{2}{9}e\omega^2$$

a_e的实际方向与所假设的方向相同。