



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
М. В. ЛОМОНОСОВА

Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

КУРСОВАЯ РАБОТА
ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И БИОМАТЕМАТИКА

«Изучение динамических систем с дискретным
временем»

Выполнила:
студентка 315 группы
Сафонова Елизавета

Преподаватель:
к.ф.-м.н.,
доцент кафедры СА
И. В. Востриков

Москва
2022

Содержание

1	Постановка задачи	2
2	Анализ одномерной системы	2
2.1	Преобразование системы	2
2.2	Поиск неподвижных точек	2
2.3	Исследование характера неподвижных точек	4
2.3.1	I случай	4
2.3.2	II случай	5
2.3.3	III случай	5
2.4	Бифуркационная диаграмма	6
2.5	Циклы длины два и три	7
2.6	Показатель Ляпунова	10
3	Анализ двумерной системы	10
3.1	Преобразование системы	10
3.2	Поиск неподвижных точек	11
3.3	Исследование характера неподвижных точек	11
3.3.1	I случай	11
3.3.2	II случай	12
3.3.3	III случай	12
3.4	Бифуркация Неймарка-Сакера	14

1 Постановка задачи

Рассматриваются одномерная и двумерная (с запаздыванием) динамические системы с дискретным временем:

$$u_{t+1} = u_t^3 e^{r(1-u_t)} \quad (1)$$

$$u_{t+1} = u_t^3 e^{r(1-u_{t-1})} \quad (2)$$

Причем все значения входящих параметров считаются положительными. Переменные u_{t+1} , u_t , $u_{t-1} \geq 0$.

1. В (1) и (2) необходимо определить неподвижные точки и исследовать их на устойчивость, проверить существование циклов длиной 2 или 3, в случае последнего — построить бифуркационную диаграмму, проиллюстрировать графически зависимость показателя Ляпунова от значений параметра.
2. Проверить возможность возникновения бифуркации Неймарка-Сакера в системе (2).

2 Анализ одномерной системы

2.1 Преобразование системы

В исходном уравнении (1) сделаем замену $v_t = ru_t$, уменьшающую число параметров до единицы.

$$u_{t+1} = \frac{v_{t+1}}{r} = \frac{v_t^3}{r^3} e^{r-v_t}$$

Тогда в новых безразмерных переменных (1) принимает вид:

$$v_{t+1} = kv_t^3 e^{-v_t}, \quad k = \frac{e^r}{r^2} \quad (3)$$

2.2 Поиск неподвижных точек

Определение 1. Точка $u_* \in \mathbb{R}$ называется *неподвижной точкой* системы $u_{t+1} = f(u_t)$, $u_t \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, если $u_* = f(u_*)$

В нашем случае можно считать, что задано отображение: $v \rightarrow f(v; k)$. Обозначим $f(v) = kv^3 e^{-v}$, $g(v) = v$. Решим уравнение:

$$f(v) = g(v)$$

$$kv^3 e^{-v} = v$$

$$v(kv^2 e^{-v} - 1) = 0$$

Заметим, что функции $f(v)$ и $g(v)$ будут пересекаться в точке $v = 0$ при любом значении параметра k . Дальше в зависимости от k графики функций будут иметь только одну, две или три точки пересечения, где в каждый случай из перечисленных уже заведомо включена точка $v = 0$.

Утверждение 1. (Условие касания) Если кривые заданы явным уравнениями $y = f(x)$ и $Y = g(x)$, то совпадение ординат и коэффициентов касательных в точке x_0 может быть записано так:

$$f(x_0) = g(x_0), \quad f'(x_0) = g'(x_0)$$

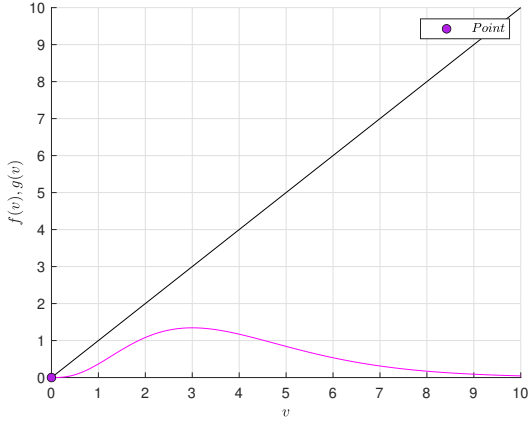
Решим систему, исключая случай $v = 0$:

$$\begin{cases} f(v) = g(v) \\ f'(v) = g'(v) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} kv^3 e^{-v} = v \\ kv^2(3-v)e^{-v} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} kv^2 e^{-v} = 1 \\ kv^2(3-v)e^{-v} = 1 \end{cases}$$

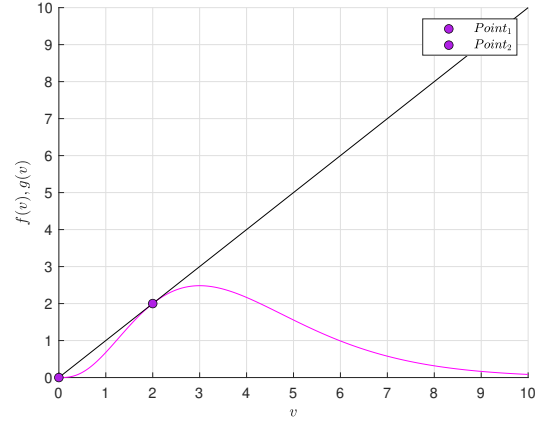
Тогда $3 - v = 1$, значит $v = 2$ — точка касания. В результате подстановки полученного значения для v находим $k = \frac{e^2}{4}$.

Таким образом, можно выделить три случая взаимного расположения графиков функций:

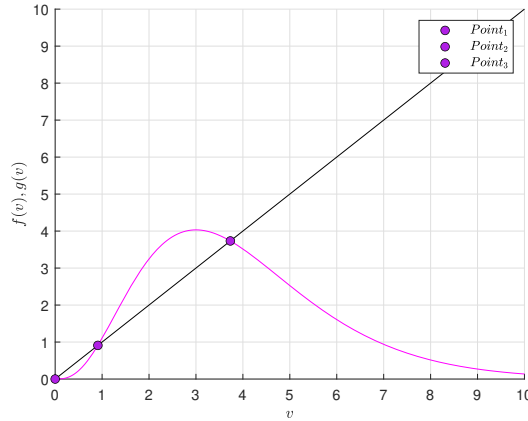
1. При $0 < k < \frac{e^2}{4}$ система (3) имеет единственную неподвижную точку $v_1 = 0$.
2. При $k = \frac{e^2}{4}$ система (3) имеет две неподвижные точки: $v_1 = 0$ и $v_2 = 2$.
3. При $k > \frac{e^2}{4}$ система (3) имеет три неподвижные точки: $v_1 = 0$, $v_2 \in (0; 2)$, $v_3 \in (2; +\infty)$.



(a) $v_1 = 0$



(b) $v_1 = 0$ и $v_2 = 2$



(c) $v_1 = 0$, $v_2 \in (0; 2)$, $v_3 \in (2; +\infty)$

Рис. 1: Неподвижные точки системы

2.3 Исследование характера неподвижных точек

Рассмотрим дискретную динамическую систему, определяемую отображением f :

$$u \mapsto f(u) = f(u; r), \quad u \in U \subset X, \quad r \in \mathbb{R}, \quad f : U \rightarrow U. \quad (4)$$

Определение 2. Множество всевозможных состояний u_t называется *пространством состояний* (или *фазовым пространством*) системы (4).

Определение 3. Множество точек u_t , $t = 0, 1, \dots$ называется *траекторией* (или *орбитой*) системы (4), порожденной отображением f .

Определение 4. Неподвижная точка u_* отображения (4) называется *устойчивой по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых начальных данных u_0 из δ -окрестности точки u_* вся траектория системы u_t , $t = 0, 1, 2, \dots$ содержится в ε -окрестности точки u_* .

Определение 5. Если, кроме того, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(u_t) = u_*$, то точка u_* называется *асимптотически устойчивой*.

Утверждение 2. Пусть u_* — неподвижная точка отображения (4), то есть $u_* = f(u_*)$, и пусть f обратима в малой окрестности u_* . Тогда u_* *асимптотически устойчива*, если $|f_u(u_*)| < 1$, и *неустойчива*, если $|f_u(u_*)| > 1$. В случае $|f_u(u_*)| = 1$ об устойчивости точки u_* ничего сказать нельзя.

Вернёмся к нашей задаче, в которой функция f имеет вид $f(u) = kv^3e^{-v}$, где $k = \frac{e^r}{r^2}$. Тогда получаем, что $f_v = kv^2e^{-v}(3-v)$. Возможны три варианта:

2.3.1 I случай

- $0 < k < \frac{e^2}{4}$. При данном значении параметра существует только одна неподвижная точка $v_1 = 0$. Значит $|f'(v_1)| = |kv_1^2e^{-v_1}(3-v_1)| = 0$. В силу приведённой выше теоремы, $v_1 = 0$ является асимптотически устойчивой точкой (аттрактором) нашей исходной системы (3).

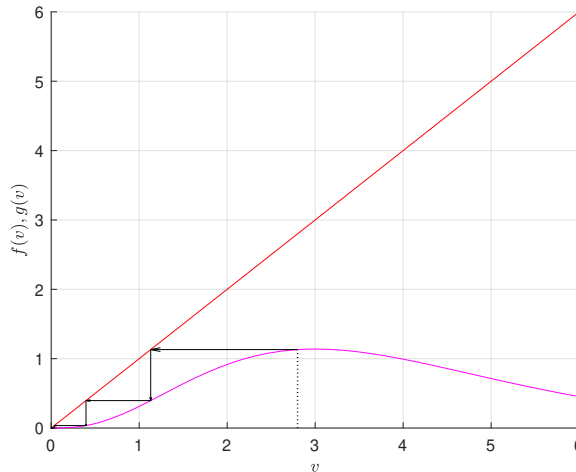


Рис. 2: $k = \frac{e^2}{4} - 1$, неподвижная точка $v_1 = 0$, начальная точка $v_0 = 2.8$

Заметим, что т. к. точка $v_1 = 0$ асимптотически устойчива для любого положительного значения k , то она автоматически будет аттрактором в остальных случаях, поэтому далее мы не будем возвращаться к её рассмотрению.

2.3.2 II случай

- $k = \frac{e^2}{4}$. Помимо $v_1 = 0$, неподвижной точкой также является $v_2 = 2$: $|f'(v_2)| = |kv_2^2 e^{-v_2}(3 - v_2)| = 1$, об устойчивости которой ничего нельзя сказать, применяя методы линейного анализа.

2.3.3 III случай

- $k > \frac{e^2}{4}$. Рассмотрим точку $v_2 \in (0, 2)$. Она является неподвижной, поэтому выполнено соотношение $v_2 = kv_2^2 e^{-v_2}$. Из положительности v_2 следует, что $kv_2^2 e^{-v_2} = 1$. Вычислим значение $|f'(v_2)| = |kv_2^2 e^{-v_2}(3 - v_2)| = |3 - v_2| > 1$, следовательно получаем, что $v_2 \in (0, 2)$ — неустойчивая точка (репеллер).

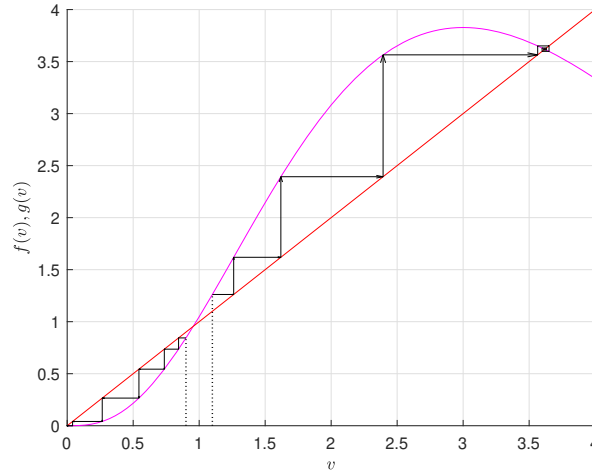


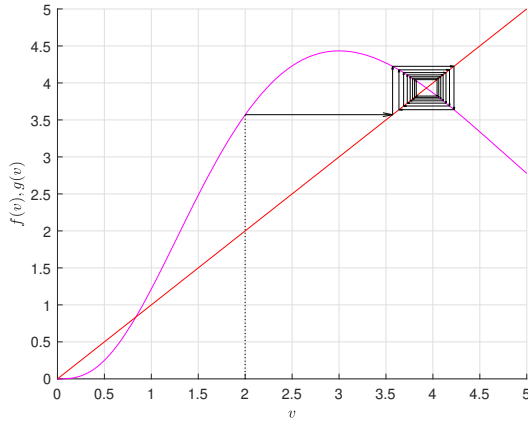
Рис. 3: $k = \frac{e^2}{4} + 1$, неподвижная точка $v_2 \in (0, 2)$, начальные точки $v_{00} = 0.9$, $v_{01} = 1.1$

Перейдём к рассмотрению точки $v_3 \in (2; +\infty)$. Из предыдущего рассуждения: $|f'(v_3)| = |kv_3^2 e^{-v_3}(3 - v_3)| = |3 - v_3| = 3 - v_3$. Тогда при $v_3 \in (2, 4)$ находим $|f'(v_3)| \leq 1$ и при $v_3 > 4$ получаем $|f'(v_3)| > 1$. Выразим параметр $k = e^{v_3} \frac{1}{v_3^3}$. Вычислим производную:

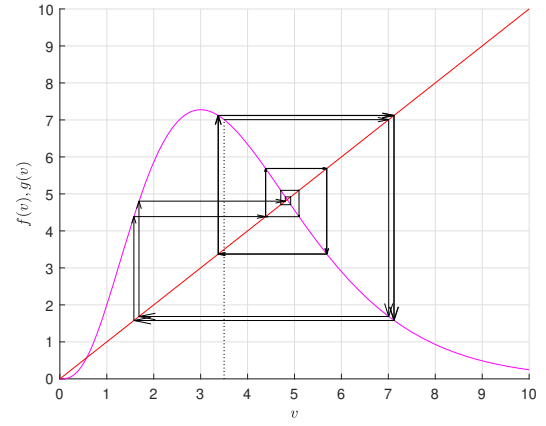
$$k'(v_3) = e^{v_3} \frac{v_3 - 2}{v_3^3}.$$

То есть непрерывная функция $k(v_3)$ при $v_3 > 2$ строго возрастает, значит можно говорить о существовании обратной функции $v_3(k)$, которая так же возрастает. Точке $v_3 = 4$ соответствует значение $k = e^4 \frac{1}{16}$.

В итоге видим, что при $k \in (\frac{e^2}{4}, \frac{e^4}{16})$ точка $v_3 \in (2, 4)$ будет асимптотически устойчивой (аттрактором), а при $k > \frac{e^4}{16}$ — неустойчивой (репеллером).



(a) $k = \frac{e^5}{45}$, асимптотически устойчивая v_3 , начальная точка $v_0 = 2$.



(b) $k = \frac{e^4}{16} + 2$, неустойчивая v_3 , начальная точка $v_0 = 3.5$.

Рис. 4: Неподвижная точка $v_3 \in (2, +\infty)$

2.4 Бифуркационная диаграмма

Определение 6. Динамическая система $u \mapsto f(u)$ называется топологически эквивалентной в области $U \subset X$ динамической системе $v \mapsto g(v)$ в области $V \subset X$, если существует гомеоморфизм $h : X \rightarrow X, h(U) = V$, отображающий орбиты первой системы в U на орбиты второй системы в V , сохраняя ориентацию во времени.

Определение 7. Две системы

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(u), \quad u \in \mathbb{R}, \\ \dot{v} &= g(v), \quad v \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

топологически эквивалентны, если они имеют равное количество неподвижных точек одинакового характера, расположенных в одинаковом порядке на фазовой прямой.

Определение 8. Появление топологически неэквивалентных фазовых портретов при изменении параметров динамической системы называется *бифуркацией*.

Таким образом, бифуркация — это изменение топологического типа системы, когда ее параметры проходят через некоторые бифуркационные (критические) значения.

Определение 9. Бифуркационной диаграммой динамической системы называется разбиение пространства параметров на максимальные связные подмножества, которые определяются соотношениями топологической эквивалентности и рассматриваются вместе с фазовыми портретами для каждого элемента разбиения.

Бифуркационная диаграмма одномерной динамической системы с одним параметром может быть представлена на плоскости (r, u) . Фазовые портреты в данном случае — это сечения бифуркационной диаграммы при $r = \text{const}$.

Построим бифуркационную диаграмму на плоскости (k, u) для системы (3):

$$v_{t+1} = kv_t^3 e^{-v_t}, \quad k = \frac{e^r}{r^2}.$$

Реализуем алгоритм построения бифуркации:

1. Возьмём достаточно мелкое разбиение выбранного отрезка значений параметра k .
2. Для каждого значения параметра из разбиения:
 - (а) Прогоним первые ($n_1 = 600$) значений u_t системы при некотором u_0 , ($u_0 = 3$), чтобы траектория сошлась к какому-то «постоянному» состоянию (например, предельная точка или цикл).
 - (б) Посчитаем следующие ($n_2 = 200$) значений u_t , которые и будут зафиксированы (изображены на координатной плоскости как точки (k, u_t)) как фазовые портреты при фиксированных значениях параметра k .

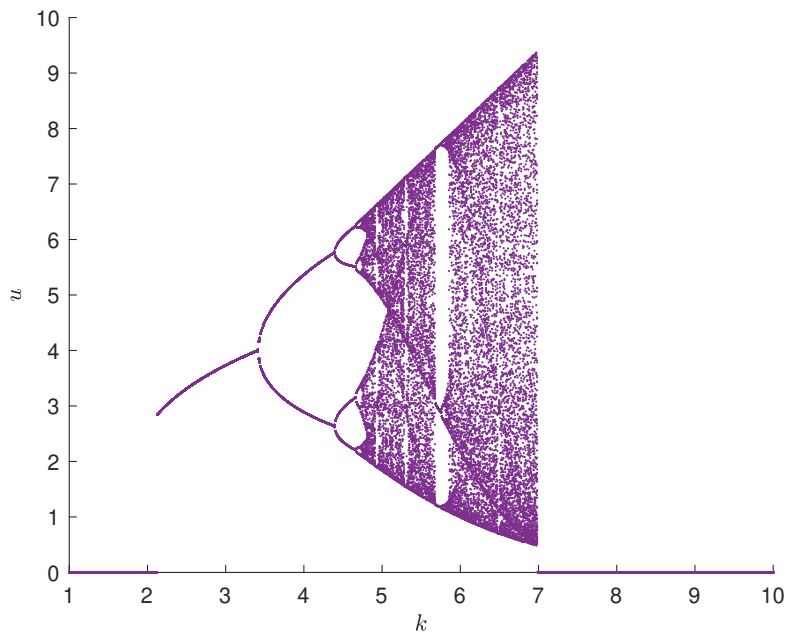


Рис. 5: Начальное приближение $v_0 = 3$,
 $k \in [1; 10]$, число точек $n = 800$, $n_1 = 600$, $n_2 = 100$

2.5 Циклы длины два и три

Определение 10. Циклом длины k дискретной динамической системы

$$u_{t+1} = f(u_t), \quad u_t \in \mathbb{R},$$

называется множество различных точек u_1, u_2, \dots, u_k таких, что

$$u_2 = f(u_1), \dots, u_k = f(u_{k-1}), u_1 = f(u_k).$$

В силу определения цикла, каждая из точек u_i , $i = 1, 2, \dots, k$, является неподвижной точкой k -ой итерации отображения

$$f^k(u) = f(f(\dots f(u))) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_k.$$

Теорема 1. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывное отображение, и пусть f имеет цикл длины k . Упорядочим все натуральные числа следующим образом:

$$\begin{aligned}
 &3 \succ 5 \succ 7 \succ \dots \succ \\
 &\succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ \dots \succ \\
 &\succ 2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ 2^2 \cdot 7 \succ \dots \succ \\
 &\succ 2^3 \cdot 3 \succ 2^3 \cdot 5 \succ 2^3 \cdot 7 \succ \dots \succ \\
 &\succ \dots \succ \\
 &\succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1
 \end{aligned}$$

Тогда f имеет цикл длины m для всех таких m , что $k \succ m$ в смысле порядка по Шарковскому.

Из этой теоремы следует, что если отображение не имеет циклов длины два, то оно не имеет никаких циклов. Если отображение имеет цикл длиной три, то оно имеет цикл любой длины (хаос).

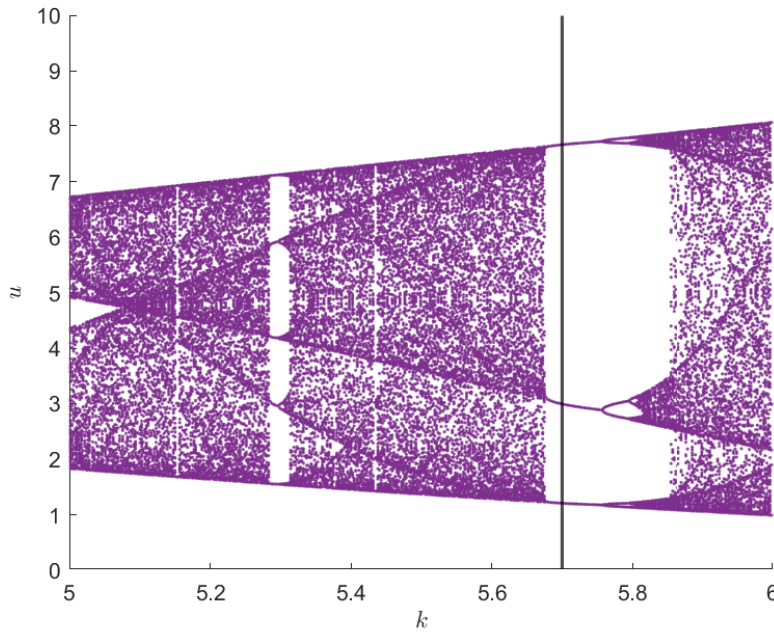


Рис. 6: Вертикальной чертой отмечено значение параметра $k = 5.7$, при котором рождается цикл длины 3.

По рис. 6 вообще говоря нельзя формулировать строгих утверждений, так как бифуркационная диаграмма строилась с учётом погрешностей вычислений, но данная иллюстрация позволяет существенно сократить подозрительную область изменения параметра k , в которой и возникает цикл нужной длины.

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} f^3(u) = u, & f^3 = f \circ f \circ f \\ \frac{df^3(u)}{du} = 1 \end{cases}$$

В результате при помощи функции `ginput(3)` получаем, что $k \approx 5.7$, $v_1 \approx 1.206$, $v_2 = 3.256$, $v_3 \approx 7.762$.

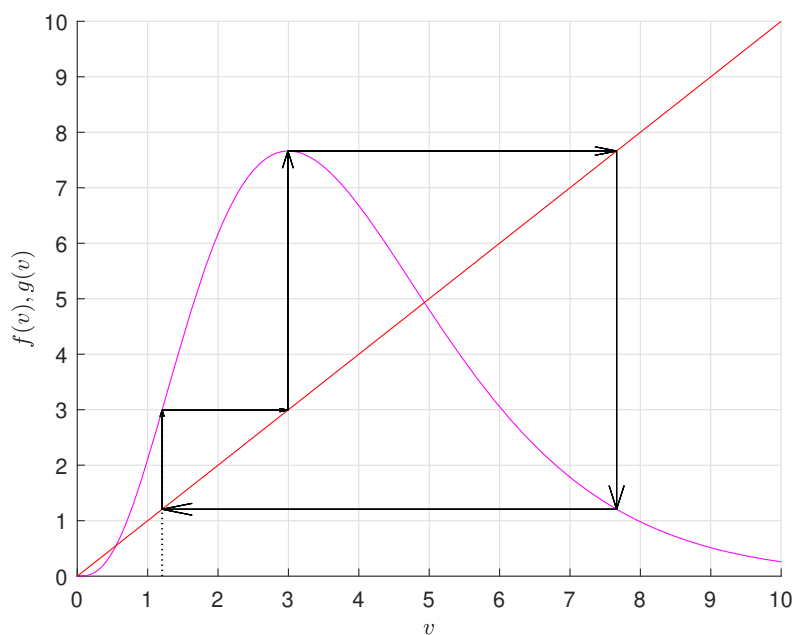


Рис. 7: Цикл длины 3, $k \approx 5.7$, $v_1 \approx 1.206$.

По теореме Шарковского, если существует цикл длины 3, то существует и цикл длины 2. Проиллюстрируем:

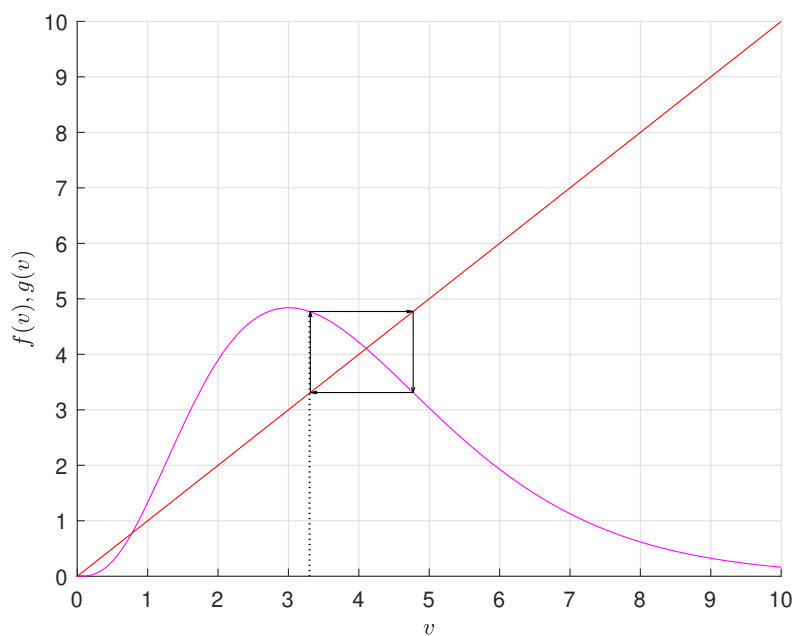


Рис. 8: Цикл длины 2, $k \approx 3.6$, $v_1 \approx 3.3$.

2.6 Показатель Ляпунова

Определение 11. Показателем Ляпунова траектории $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ называется величина:

$$h(u_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln|f'(u_1)| + \ln|f'(u_2)| + \dots + \ln|f'(u_n)|}{n},$$

если этот предел существует.

Показатель Ляпунова является легко вычислимым признаком хаотического поведения траекторий, то есть характеризует поведение близких траекторий при изменении дискретной величины t . Если $h(u)$ положителен, то близкие траектории разбегаются, и в системе может наблюдаться хаотическое поведение. В противном случае расстояние между близкими траекториями уменьшается от итерации к итерации.

По рисунку видно, что в нашей системе есть хаотическое поведение — показатель Ляпунова может быть положительным. Также хорошо видны интервалы с $h(u_1) < 0$. Они соответствуют циклам с небольшим периодом.

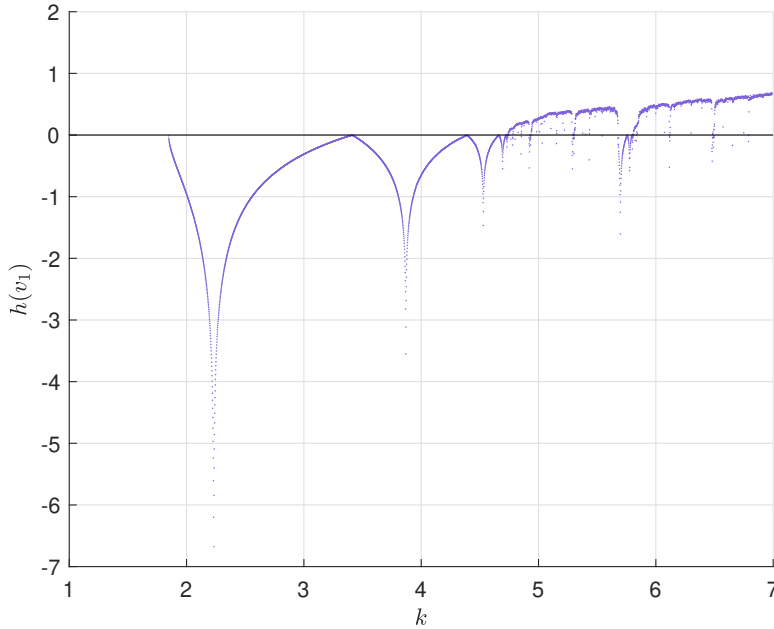


Рис. 9: График зависимости показателя Ляпунова от параметра k , $k \in [1; 7]$, $v_1 = 2, n = 1000$.

3 Анализ двумерной системы

Перейдем к рассмотрению системы с запаздыванием:

$$u_{t+1} = u_t^3 e^{r(1-u_{t-1})} \quad (5)$$

3.1 Преобразование системы

По аналогии с предыдущим рассмотрением сделаем замену $v_t = ru_t$, уменьшающую число параметров до единицы.

$$u_{t+1} = \frac{v_{t+1}}{r} = \frac{v_t^3}{r^3} e^{r-v_{t-1}}$$

Тогда в новых безразмерных переменных (5) принимает вид:

$$v_{t+1} = kv_t^3 e^{-v_{t-1}}, \quad k = \frac{e^r}{r^2} \quad (6)$$

3.2 Поиск неподвижных точек

Определение 12. Точка $u_* \in \mathbb{R}$ называется *неподвижной точкой* системы $u_{t+1} = f(u_t, u_{t-1})$, $u_t \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, если $u_* = f(u_*, u_*)$.

Повторяя проделанные ранее рассуждения, получаем, что можно выделить три случая взаимного расположения графиков функций:

1. При $0 < k < \frac{e^2}{4}$ система (6) имеет единственную неподвижную точку $v_1 = 0$.
2. При $k = \frac{e^2}{4}$ система (6) имеет две неподвижные точки: $v_1 = 0$ и $v_2 = 2$.
3. При $k > \frac{e^2}{4}$ система (6) имеет три неподвижные точки: $v_1 = 0$, $v_2 \in (0; 2)$, $v_3 \in (2; +\infty)$.

3.3 Исследование характера неподвижных точек

Для дальнейших рассуждений запишем систему в следующем виде:

$$\begin{cases} v_{t+1} = kv_t^3 e^{-u_t} \\ u_t = v_{t-1} \end{cases} \quad (7)$$

Теорема 2. Пусть задана динамическая система с дискретным временем:

$$u \mapsto f, \quad u \in \mathbb{R}^n,$$

где f — гладкое отображение из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n . Тогда неподвижная точка u_* *устойчива (асимптотически)*, если все собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы Якоби вектор-функции $f(u)$, вычисленной в точке u_* , удовлетворяют условию $|\lambda_i| < 1$. Если же хоть одно собственное значение удовлетворяет условию $|\lambda_i| > 1$, то положение равновесия u_* *неустойчиво*.

Выпишем матрицу Якоби системы (7):

$$J = \begin{bmatrix} 3kv^2 e^{-u} & -kv^3 e^{-u} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.3.1 I случай

- $0 < k < \frac{e^2}{4}$. При таких значениях параметра k существует только одна неподвижная точка $v_1 = 0$.

Тогда матрица Якоби имеет вид:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$|J - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 = 0.$$

Получается, что корнями являются числа $\lambda_{1,2} = 0$. То есть $|\lambda_{1,2}| < 1$, а значит неподвижная точка $v_1 = (0, 0)$ — асимптотически устойчивая для любого параметра $k > 0$.

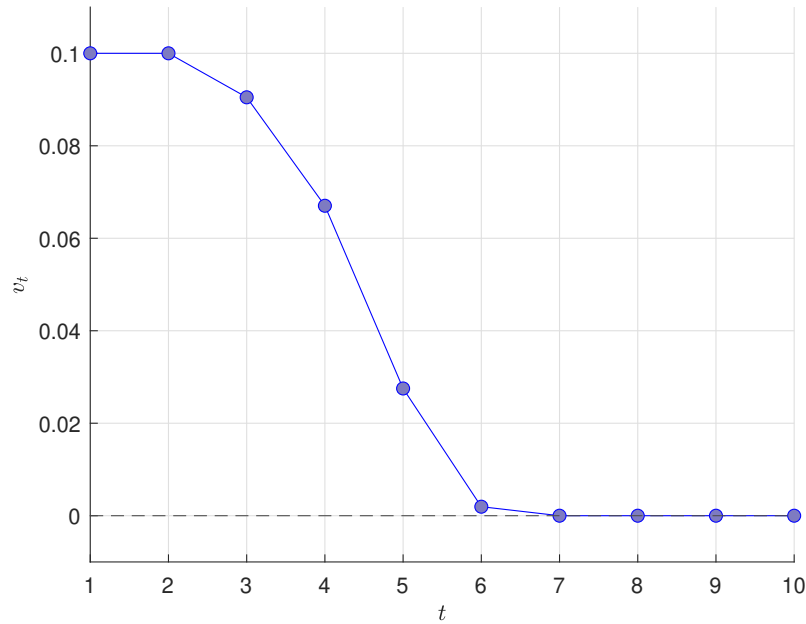


Рис. 10: Асимптотическая устойчивость неподвижной точки $v_1 = 0$ при $k = 100$, $v_0 = 0.1$, $u_0 = 0.1$.

3.3.2 II случай

- $k = \frac{e^2}{4}$. Помимо $v_1 = 0$, неподвижной точкой также является $v_2 = 2$.

Соответственно матрица Якоби представима в виде:

$$J = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$|J - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Тогда корни — $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$. То есть $\lambda_2 > 1$, а значит неподвижная точка $v_2 = 2$ — неустойчивая (рис. 11).

3.3.3 III случай

- $k > \frac{e^2}{4}$.

Сначала рассмотрим точку $v_2 \in (0, 2)$. Она является неподвижной, поэтому выполнено соотношение $v_2 = kv_2^3 e^{-v_2}$. Матрица Якоби равна:

$$J = \begin{bmatrix} 3 & -v_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$|J - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -v_2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + v_2 = 0.$$

Корни:

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4v_2}}{2}.$$

Так как $v_2 \in (0; 2)$, то $1 < 9 - 4v_2 < 9$. Поэтому один из корней λ_i будет больше единицы, то есть v_2 — неустойчивая. Теперь рассмотрим точку $v_3 \in (2, +\infty)$. Если $v_3 \in (2, \frac{9}{4})$, то подкоренное выражение положительно, оба корня вещественные, и один из них по модулю превосходит единицу, значит неподвижная точка v_3 неустойчива. Это будет выполнено при $k \in (\frac{e^2}{4}, \frac{16}{81}e^{\frac{9}{4}})$

При $k = \frac{16}{81}e^{\frac{9}{4}}$ корни будут совпадать: $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{3}{2} > 1$, поэтому v_3 будет также неустойчива.

Наконец, при $k > \frac{16}{81}e^{\frac{9}{4}}$ корни будут комплексными:

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{4v_2 - 9}}{2}i.$$

Тогда $|\lambda_{1,2}| = \sqrt{v_3} > \frac{3}{2}$, следовательно и в этом случае точка v_3 является неустойчивой. (рис. 12).

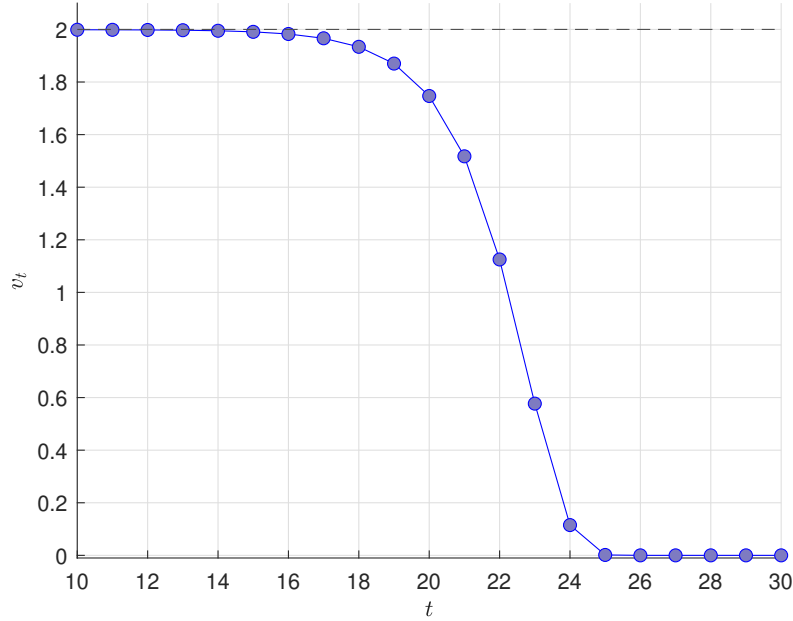


Рис. 11: Неустойчивость неподвижной точки $v_2 = 2$ при $k = \frac{e^2}{4}$, $v_0 = 1.999$, $u_0 = 1.999$.

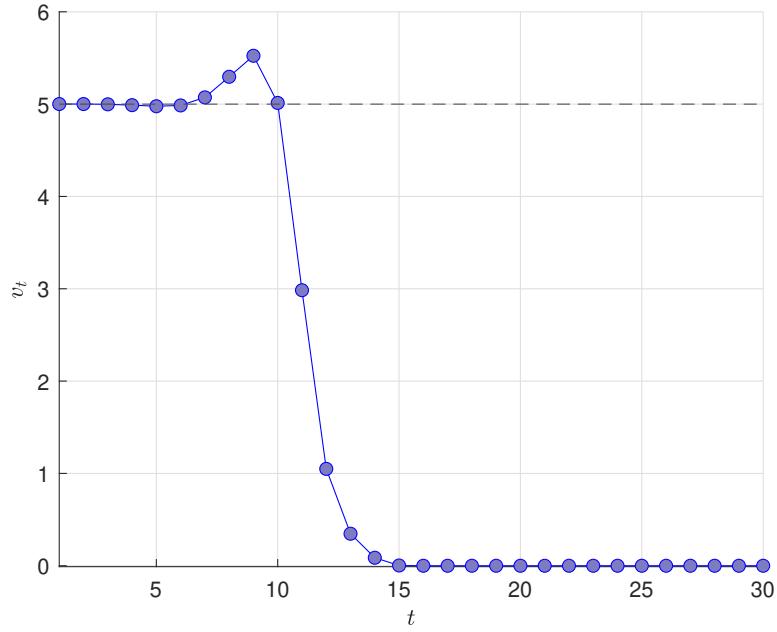


Рис. 12: Неустойчивость неподвижной точки $v_3 = 5$ при $k = \frac{e^5}{25}$, $v_0 = 5.001$, $u_0 = 5.001$.

3.4 Бифуркация Неймарка-Сакера

Рассмотрим двумерную динамическую систему с дискретным временем

$$u \mapsto f(u, \alpha), \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Определение 13. Бифуркация положения равновесия в системе (8), соответствующая появлению мультипликаторов $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2$, называется *бифуркацией Неймарка-Сакера или дискретной бифуркацией Хопфа*.

Как было показано в предыдущем пункте 3.3, ни при каком k собственные значения $\lambda_{1,2}$ не будут удовлетворять определению бифуркации Неймарка-Сакера, поэтому для данной системы её построить нельзя.

Список литературы

- [1] А. С. Братусь, А. С. Новожилов, А. П. Платонов А.П. Динамические системы и модели биологии. 2011