Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Курсовая работа
Динамические системы и биоматематика

«Исследование нелинейных динамических систем на плоскости»

Выполнила:
студентка 315 группы
Сафонова Елизавета

Преподаватель:
к.ф.-м.н.,
доцент кафедры СА
И. В. Востриков

Москва
2022

Содержание

1 Постановка задачи

Рассматривается динамическая система с непрерывным временем:

$$\begin{cases} \dot{x} = rx(b - \ln x) - bxy, \quad (x,\ y) \in \mathbb{R}^2_+ \\ \dot{y} = \frac{dxy}{N+y} - cy \end{cases} \tag{1}$$

Все входящие параметры считаются положительными. В задании необходимо:

1. Дать биологическую интерпретацию характеристик системы (хищник-жертва)
2. Ввести новые безразмерные переменные, максимально уменьшив число входящих параметров. Выбрать два свободных параметра. Если число параметров больше двух, то считать остальные параметры фиксированными.
3. Найти неподвижные точки системы и исследовать их характер в зависимости от значений параметров. Результаты исследования представить в виде параметрического портрета системы.
4. Для каждой характерной области параметрического портрета построить фазовый портрет. Дать характеристику поведения системы в каждом из этих случаев.
5. Исследовать возможность возникновения предельного цикла. В положительном случае найти соответствующее первое ляпуновское число. Исследовать характер предельного цикла (устойчивый, неустойчивый, полуустойчивый).
6. Дать биологическую интерпретацию полученным результатам.

2 Биологическая интерпретация

В общем виде модель «хищник-жертва» можно записать, как:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x) - B(x,\ y) \\ \dot{y} = -C(y) + D(x,\ y) \end{cases}$$

x, y — численности жертв и хищников соответственно,
$A(x)$ — размножение жертв при отсутствии хищников,
$B(x, y)$ — выедание жертв хищниками,
$C(y)$ — вымирание хищников при отсутствии жертв,
$D(u, v)$ — эффективность потребления жертв хищниками.

В нашем случае $A(x) = rx(b - \ln x)$, что говорит о том, что в данной моде- ли введен член, ограничивающий рост популяции жертв (т.е. модель учитывает внутривидовую конкуренцию жертв), максимальное возможное количество которых задаётся параметром b и составляет e^b. $B(x,\ y) = B_1(x)B_2(y) = bxy$, $B_1(x)$ называется *трофической функцией хищника*, $B_2(y)$ описывает *зависимость скорости выедания жертвы от плотности популяции хищника.* У нас насыщения хищников, а также конкуренции за добычу не происходит, так как трофическая функция линейна. $C(y) = cy$, в системе эта зависимость линейна. Таким образом, хищники не конкурируют за ресурсы, отличные от жертв (территория,альтернативная пища). Такая функция укладывается в рамки модели взаимодействия популяций при небольшой численности хищников. Параметр c отвечает за продолжительность жизни хищников. Чем он больше, тем быстрее хищники умирают. $D(x,\ y) = D_1(x)D_2(y) = D_2(y)B_1(x)$, $D_2(y) = \frac{dy}{N+y}$, то есть можем наблюдать нелинейный характер зависимости скорости размножения хищника от плотности популяции при малых значениях плотности (нехватка потенциальных брачных партнеров).

3 Введение безразмерных параметров

Пусть $x(t) = Au(\tau)$, $y(t) = Bv(\tau)$, $t = T\tau$, тогда система (1) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{A\dot{u}}{T} = rAu(b - \ln Au) - bABuv \\ \frac{B\dot{v}}{T} = \frac{dABuv}{N+Bv} - cBv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u} = uT\left(r(b - \ln Au) - bBv\right) \\ \dot{v} = vT\left(\frac{dAu}{N+Bv} - c\right) \end{cases}$$

Сделаем замену $T = \frac{1}{c}$, $A = e^b$, $B = \frac{c}{b}$:

$$\begin{cases} \dot{u} = u\left(-\frac{r}{c}\ln u - v\right) \\ \dot{v} = v\left(\frac{bde^b u}{c(\frac{bN}{c}+v)} - 1\right) \end{cases}$$

Обозначим $\alpha = \frac{r}{c}$, $\beta = \frac{bde^b}{c}$, $\gamma = \frac{bN}{c}$, тогда имеем

$$\begin{cases} \dot{u} = u\left(-\alpha\ln u - v\right) \\ \dot{v} = v\left(\frac{\beta u}{\gamma+v} - 1\right) \end{cases} \tag{2}$$

Замечание 1. В силу ограниченности максимальной возможной численности популяции жертв, характеризуемой переменной $x(t)$, (как было ранее сказано, всего в популяции может быть не более e^b особей), можно получить уравнение $x(t) \leqslant e^b$. Переходя к новой переменной $u(\tau)$, получаем следующее:

$$x(t) = e^b u(\tau) \leqslant e^b \Rightarrow u(\tau) \leqslant 1.$$

4 Поиск неподвижных точек

Определение 1. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется неподвижной точкой динамической системы $\dot{x}_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $(x_1, \ldots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1, n}$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, если $f(x_0) = 0$.

Найдём неподвижные точки (2). Для этого решим следующую систему:

$$\begin{cases} u\left(-\alpha\ln u - v\right) = 0 \\ v\left(\frac{\beta u}{\gamma+v} - 1\right) = 0 \end{cases}$$

Заметим, что решениями являются точки $(u_1;\ v_1) = (0;\ 0)$ и $(u_2;\ v_2) = (1;\ 0)$. Найдём в общем виде остальные неподвижные точки системы, исходя из предположения $u(\tau) \neq 0$, $v(\tau) \neq 0$:

$$\begin{cases} u = e^{-\frac{v}{\alpha}} \\ u = \frac{\gamma+v}{\beta} \end{cases}$$

Приравняв правые части, получим $e^{-\frac{v}{\alpha}} = \frac{\gamma+v}{\beta}$. Воспользуемся разрешенным допущением и зафиксируем значение параметра $\beta = 1$. Тогда наше уравнение преобразуется к виду:

$e^{-\frac{v}{\alpha}} = \gamma + v$. Левая функция является монотонно убывающей, правая — монотонно возрастающей. То есть получаем, что существует единственное решение, которое представляется W-функцией Ламберта:

$$u = \alpha W\left(\frac{e^{\frac{\gamma}{\alpha}}}{\alpha}\right),\ v = \alpha W\left(\frac{e^{\frac{\gamma}{\alpha}}}{\alpha}\right) - \gamma$$

В дальнейших рассуждениях эту точку мы рассматривать не будем, так как она влечет за собой громоздкие расчеты.

5 Устойчивость неподвижных точек

Рассмотрим динамическую систему с непрерывным временем:

$$\dot{u} = f(u),\ u \in U \subseteq \mathbb{R}^n,\ f : U \to \mathbb{R}^n \tag{3}$$

Пусть u_* — положение равновесия (3) (т.е. $f(u_*) = 0$). Обозначим через $J(u_*)$ матрицу Якоби вектор-функции $f(u)$, вычисленную в точке u_*. Пусть n_+, n_0, n_- — число собственных значений $J(u_*)$ (с учетом их кратности) с положительной, равной нулю и отрицательной вещественной частью соответственно.

Определение 2. Положение равновесия динамической системы (3) называется гиперболическим, если $n_0 = 0$, т.е. не существует собственных чисел, расположенных на мнимой оси. Гиперболическое положение равновесия называется гиперболическим седлом, если $n_+ n_- \neq 0$.

Теорема 1. (А. М. Ляпунов, А. Пуанкаре) Пусть u_* — гиперболическое положение равновесия (3). Тогда, если $n_+ = 0$, то положение равновесия u_* асимптотически устойчиво, если $n_+ > 0$, то неустойчиво.

Воспользуемся теоремой Ляпунова-Пуанкаре для исследования точек на устойчивость. Для начала вычислим якобиан:

$$J = \begin{bmatrix} -\alpha \ln u - v - \alpha & -u \\ \frac{v}{\gamma+v} & \frac{u}{\gamma+v} - \frac{uv}{(\gamma+v)^2} - 1 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим значения в точках $A(0;0)$ и $B(1;0)$. Ввиду наличия логарифмического слагаемого, значениt якобиана в точке A не определено. Тогда рассмотрим значение якобина в некой точке $A_1(\varepsilon;0)$:

$$J(A_1) = \begin{bmatrix} -\alpha \ln \varepsilon - \alpha & -\varepsilon \\ 0 & \frac{\varepsilon}{\gamma} - 1 \end{bmatrix}$$

Тогда собственные значения: $\lambda_1 = -\alpha \ln \varepsilon - \alpha$, $\lambda_2 = \frac{\varepsilon}{\gamma} - 1$. Устремляя ε к нулю, получаем $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, а значит, точка A является неустойчивым седлом.

Перейдём теперь к точке $B(1;0)$:

$$J(B) = \begin{bmatrix} -\alpha & -1 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} - 1 \end{bmatrix}$$

Значит $\lambda_1 = -\alpha$, $\lambda_2 = \frac{1}{\gamma} - 1$. В этом случае $\lambda_1 < 0$, а знак λ_2 опеределяется в зависимости от значения параметра γ.

1. Если $\gamma > 1$, то $\lambda_2 < 0$, то есть точка $B(1; 0)$ — устойчивый узел.
2. Если $\gamma = 1$, то $\lambda_2 = 0$, для данной точки характерна бифуркация «седло-узел».
3. Если $\gamma \in (0; 1)$, то $\lambda_2 > 0$, $B(1; 0)$ — седло.

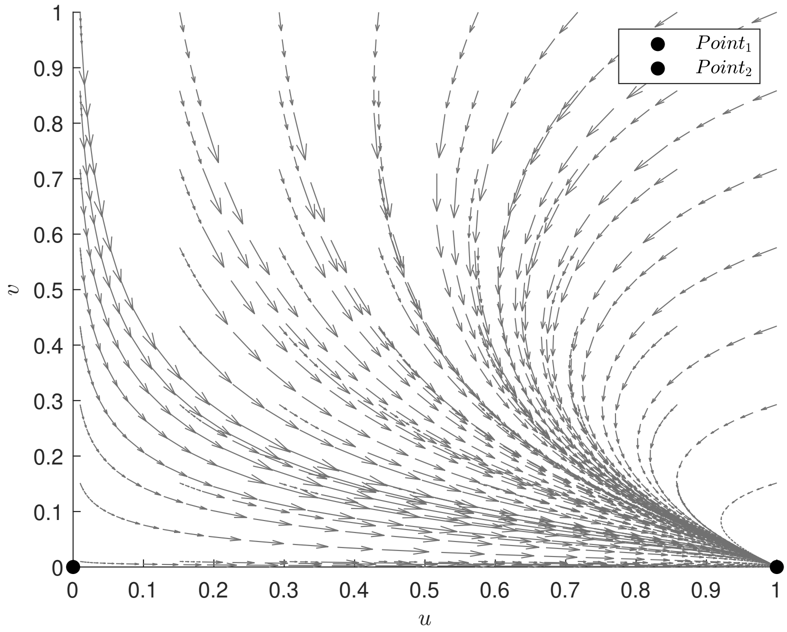

Рис. 1: Фазовый портрет системы при $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$.

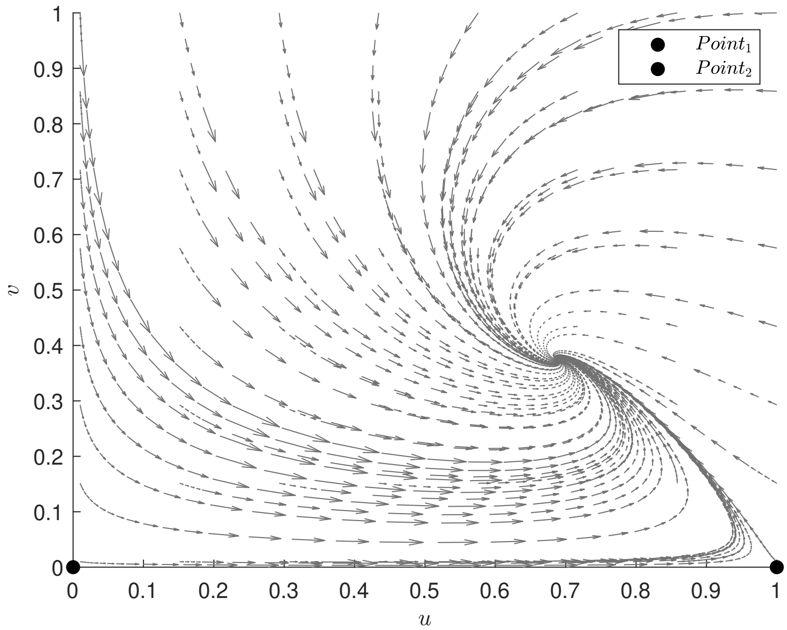

Рис. 2: Фазовый портрет системы при $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$.

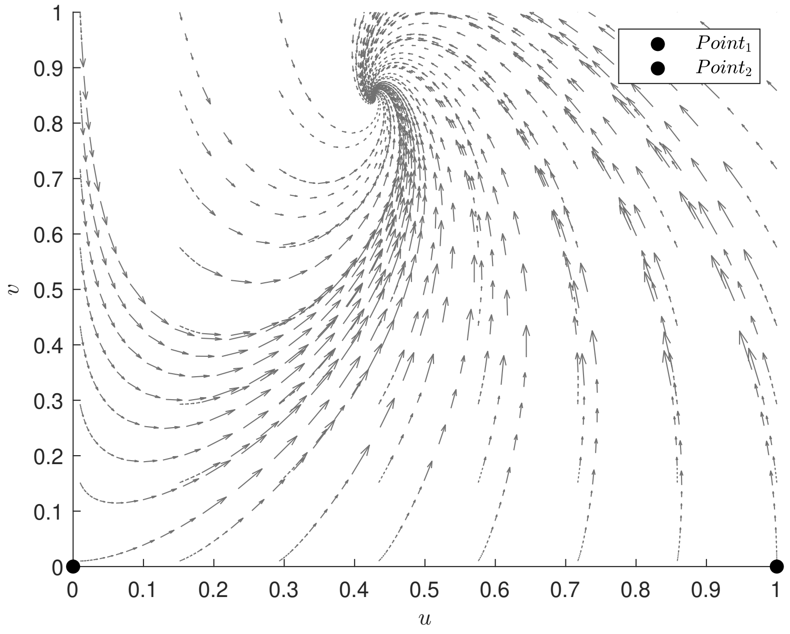

Рис. 3: Фазовый портрет системы при $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = \frac{1}{100}$.

6 Бифуркация Андронова-Хопфа

Пусть задана динамическая система с непрерывным временем:

$$\dot{u} = f(u),\ u \in U \subseteq \mathbb{R}^n,\ f : U \to \mathbb{R}^n \tag{4}$$

Определение 3. Замкнутую траекторию $\gamma(u_0)$ системы (4) мы будем называть предельным циклом, если в окрестности этой траектории нет других замкнутых орбит.

Определение 4. Бифуркация положения равновесия, соответствующая появлению собственных чисел $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$, называется бифуркацией Пуанкаре–Андронова–Хопфа или бифуркацией рождения цикла.

Как было показано ранее, в изучаемой системе все собственные значения матрицы Якоби действительны, то есть в ней не могут появляться чисто мнимые λ_i ни при каких значениях параметров α, β, γ, что означает невозможность возникновения бифуркации Андронова-Хопфа.

7 Биологическая интерпретация результатов исследования

Мы видим, что при $\gamma = 1$ в конце концов популяция хищников погибает, а популяция жертв достигает максимального возможного значения; при иных значениях параметра γ возможо возникновение устойчивой ситуации, в которой численности и жертв, и хищников на протяжении времени остаются почти неизменными.

Список литературы

[1] А. С. Братусь, А. С. Новожилов, А. П. Платонов А.П. Динамические системы и модели биологии. 2011

[2] И. В. Востриков. Лекции по биоматематике. 2022