Практикум к курсу

"Стохастический анализ и моделирование"

Задание 1

1. Реализовать генератор схемы Бернулли с заданной вероятностью успеха p. На основе генератора схемы Бернулли построить датчик для биномиального распределения.

2. Реализовать генератор геометрического распределения. Проверить для данного распределения свойство отсутствия памяти.

3. Рассмотреть игру в орлянку – бесконечную последовательность независимых испытаний с бросанием правильной монеты. Выигрыш S_n определяется как сумма по всем n испытаниям значений 1 и -1 в зависимости от выпавшей стороны. Проиллюстрировать (в виде ломаной) поведение нормированной суммы $Y(i) = S_i/\sqrt{n}$, как функцию от номера испытания $i = 1 \dots n$ для одной отдельно взятой траектории. Дать теоретическую оценку для $Y(n)$ при $n \to \infty$.

Задание 2

1. Построить датчик сингулярного распределения, имеющий в качестве функции распределения канторову лестницу. С помощью критерия Колмогорова убедиться в корректности работы датчика.

2. Для канторовых случайных величин проверить свойство симметричности относительно $\frac{1}{2}$ (X и $1 - X$ распределены одинаково) и самоподобия относительно деления на 3 (условное распределение Y при условии $Y \in [0, 1/3]$ совпадает с распределением $\frac{Y}{3}$) с помощью критерия Смирнова.

3. Вычислить значение математического ожидания и дисперсии для данного распределения. Сравнить теоретические значения с эмпирическими для разного объема выборок. Проиллюстрировать сходимость.

Задание 3

1. Построить датчик экспоненциального распределения. Проверить для данного распределения свойство отсутствия памяти. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимо экспоненциально распределенные с.в. с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ соответственно. Найти распределение случайной величины $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

2. На основе датчика экспоненциального распределения построить датчик пуассоновского распределения.

3. Построить датчик пуассоновского распределения как предел биномиального распределения. С помощью критерия хи-квадрат Пирсона убедиться, что получен датчик распределения Пуассона.

4. Построить датчик стандартного нормального распределения методом моделирования случайных величин парами с переходом в полярные координаты. Проверить при помощи критерия t-критерия Стьюдента равенство математических ожиданий, а при помощи критерия Фишера равенство дисперсий.

Задание 4

1. Построить датчик распределения Коши.

2. На основе датчика распределения Коши с помощью метода фон Неймана построить датчик стандартного нормального распределения. При помощи функции normal probability plot убедиться в корректности построенного датчика и обосновать наблюдаемую линейную зависимость.

3. Сравнить скорость моделирования стандартного нормального распределения в заданиях 3 и 4.

Задание 5

1. Пусть $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$. Убедиться эмпирически в справедливости ЗБЧ и ЦПТ, т. е. исследовать поведение суммы S_n и эмпирического распределения величины

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - a\right)$$

2. Считая μ и σ^2 неизвестными, для пункта 1 построить доверительные интервалы для среднего и дисперсии.

3. Пусть $X_i \sim K(a, b)$ имеет распределение Коши со сдвигом a и масштабом b. Проверить эмпирически, как ведут себя суммы S_n/n. Результат объяснить, а также найти закон распределения данных сумм.

Задание 6

1. Посчитать интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\left(x_1^2+\ldots+x_{10}^2+\frac{1}{2^7\cdot x_1^2\cdot\ldots\cdot x_{10}^2}\right)}}{x_1^2\cdot\ldots\cdot x_{10}^2}dx_1dx_2\ldots dx_{10}$$

- методом Монте-Карло
- методом квадратур, сводя задачу к вычислению собственного интеграла Римана

2. Для каждого случая оценить точность вычислений.