

Teilchenphysik

II-III

Abteilung IX
ETH/Zürich

(WS 2001/02 – SS2002)

Prof. Dr. André Rubbia
Übungsleiter: Dr. Andreas Badertscher

Kapitel 1

Das Elektron und das Atom **3**

Einleitung **3**

Der Ursprung der Teilchenphysik **5**

Die Kathodenstrahlröhre **5**

Röntgenstrahlen (1895) **6**

Drei Arten von Strahlen **7**

Die Entdeckung des Elektrons **9**

Die Entdeckung der Struktur der Atome **12**

Das Streuexperiment von Rutherford **13**

Der Wirkungsquerschnitt **19**

Wirkungsquerschnitt für die Rutherford-Streuung **20**

Die Entdeckung des Neutrons **21**

Kapitel 2

Die Lorentz-Transformationen **27**

Warum? **27**

Die Notation **28**

Eigentliche Lorentz-Transformation **28**

Die L-Matrix und die Notation **32**

Vierer-Vektoren **33**

Kovarianter und Kontravarianter 4-Vektor **33**

Das Skalarprodukt **34**

Tensoren **36**

Inverse Lorentz-Transformation **37**

Distreke (nicht uneigentliche) Lorentz-
Transformation **37**

Kapitel 3

Relativistische Kinematik **41**

Der Energie-Impuls 4-Vektor **41**

Natürliche Einheiten **44**

Relativistische Kinematik **45**

“Fixed-target” Kinematik **45**

Übergang vom SP zum Laborsystem **47**

Kapitel 4	<i>Die nicht-relativistische Quantenmechanik</i>	51
	Die Schrödinger-Gleichung	51
	<i>Die Wellenfunktion</i>	51
	<i>Die Operatoren</i>	52
	<i>Die Schrödinger-Gleichung</i>	53
	<i>Die Kontinuitätsgleichung</i>	54
	Drehmoment und Spin	56
	<i>Drehmoment-Operator</i>	56
	<i>Spin-Operator</i>	57
	Störungstheorie	58
	<i>Fermis Goldene Regel</i>	58
	<i>Elastisches Streuexperiment</i>	64
	Rutherford-Streuung	68
Kapitel 5	<i>Die Klein-Gordon Gleichung</i>	75
	Einleitung	75
	Die Klein-Gordon-Gleichung	76
	<i>Skalares Feld</i>	80
	<i>Intepretation der Klein-Gordon-Gleichung</i>	81
Kapitel 6	<i>Die Dirac Gleichung</i>	85
	Die Dirac-Gleichung	85
Kapitel 7	<i>Die Entdeckung der Antimaterie</i>	87

Das Elektron und das Atom

1.1 Einleitung

Was sind die “letzten” Bausteine der Materie im Universum? (wobei “letzte” heißen soll: die fundamentalsten, wesentlichen Teilchen, die in der Natur existieren)

Wie wechselwirken diese Bausteine miteinander? (es gibt kein Chaos im Universum; die fundamentalen Bausteine vereinigen sich nach einer Ordnung, die die von uns beobachteten makroskopischen Strukturen bewirkt).

Diese zwei Fragen versucht die **Teilchenphysik** zu beantworten.

Wir werden die fundamentalen Bausteine als **Elementarteilchen** bezeichnen.

Diese Elementarteilchen werden durch spezifische Eigenschaften charakterisiert, wie z.B. ihre **Ruhemasse**, ihre **elektrische Ladung**,

und ihren **Spin** (Eigendrehimpuls) oder ihre spezifischen **Quantenzahlen** (*Parität, Isospin, usw...*).

Heutzutage denkt man, dass die Zahl von wirklich elementaren Teilchen gering ist, und, dass sie in drei Spin-Kategorien fallen:

1. Spin 1/2: Fermionen wie die 3 Quarks und 3 Leptonen
2. Spin 1: Bosonen wie die Eichbosonen (“Gauge-Bosons”)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mu \\ \nu_\mu \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \tau \\ \nu_\tau \end{pmatrix}}_{Fermionen}; \underbrace{\gamma, W^\pm, Z^0, g}_{Bosonen}$$

3. Spin 0: Bosonen wie das Higgs-Boson (dieses Teilchen wird von der Theorie vorausgesagt, aber wurde bis jetzt nie beobachtet)

Zwei Teilchen mit denselben Eigenschaften (Ruhemasse, Ladung, Spin, andere Quantenzahlen) sind einander ganz gleich und **nicht unterscheidbar**.

Gruppen von Fermionen folgen der **Fermi-Dirac Statistik** und Gruppen von Bosonen folgen der **Bose-Einstein Statistik**.

Die Eichbosonen sind für 3 Arten von Wechselwirkungen zwischen Elementarteilchen verantwortlich (*stark, elektromagnetisch, schwach*). Wir kennen noch keine Theorie, bei der man die Gravitationskraft mit Hilfe eines Eichbosons (das Graviton) erfolgreich beschreiben kann.

Merkwürdig ist, dass die Elementarteilchen in *grossen Mengen* vorkommen. Diese grosse Zahl von Teilchen und ihre Wechselwirkungen bauen das Universum auf, wie wir es beobachten.

Heutzutage scheint es, als ob man die **wesentliche Symmetrie des Universums** und ihre **Verletzung** studieren kann, um das Verhalten

von Elementarteilchen und den Unterschied in ihrem Verhalten zu verstehen.

Bevor wir das Verhalten von Elementarteilchen beschreiben, werden wir den Ursprung der Teilchenphysik kurz diskutieren.

1.2 Der Ursprung der Teilchenphysik

Man sagt oft, dass die Entdeckung des Elektrons im Jahr 1897 der Geburt der Teilchenphysik entspricht.

Vor 1897 existierte die **moderne atomare Beschreibung** der Materie nicht:

Man kannte die atomaren Absorptions- und Emissionspektren der Atome, aber es gab nur empirische Regeln dafür.

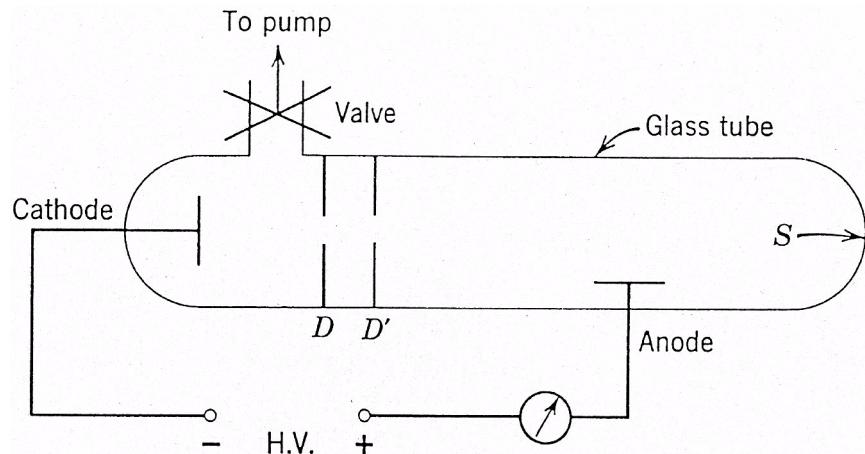
Eine wichtige Rolle am Anfang der Teilchenphysik spielte die **Kathodenstrahlröhre**.

1.2.1 Die Kathodenstrahlröhre

Siehe Abb. 1.

Bei der Kathodenstrahlröhre wird ein **Glassrohr** mit Hilfe einer **Vakuumpumpe** (solche Pumpen wurden am Ende des 19. Jahrhunderts entwickelt) *evakuiert*.

Zwei elektrische Platten werden im Glassrohr eingebaut. Eine **elektrische Spannung** wird mit Hilfe von Batterien zwischen der **Kathode** und der **Anode** erzeugt.



Figur 1. Die Kathodenstrahlröhre.

Man beobachtete, dass *ein elektrischer Strom durch den elektrischen Kreis erzeugt werden kann*, wenn man das Rohr langsam mit Gas füllt. Ein niedriger Druck genügt, um einem Strom zu beobachten. Man studierte die Eigenschaften der erzeugten Ströme als Funktion des Gasdrucks, der Art von Gas, der elektrischen Spannung, usw...

Man weiss auch, dass bestimmte Arten von Gasen **Licht** erzeugen können, wenn ein elektrischer Strom fliesst.

Man beobachtete auch **Licht** am Ende des Rohrs, als man dort einen **Fluoreszenzschirm** aufstellte.

1.2.2 Röntgenstrahlen (1895)

Im Jahr 1895 entdeckte Röntgen “zufällig” die sogenannten **Röntgenstrahlen** (“X-rays”).

Diese Strahlen werden in der Kathodenstrahlröhre erzeugt. Er beobachtete, dass sie durchdringend und unsichtbar waren.

Sie konnten mit Hilfe von **photographischen Filmen** nachgewiesen werden, in dem die Strahlen den Film schwarzten.

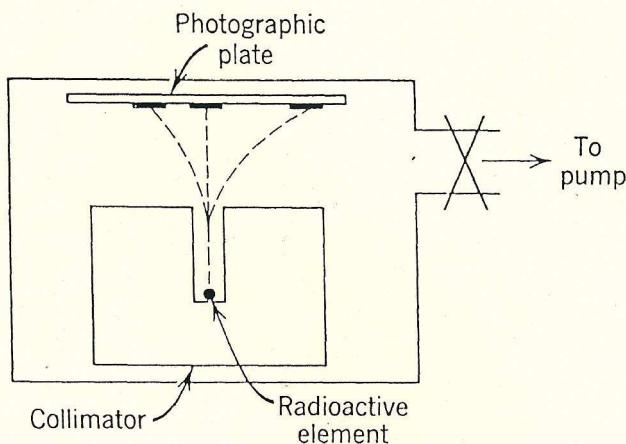
1.2.3 Drei Arten von Strahlen

Im Jahr 1896 entdeckte Becquerel die **natürliche Radioaktivität**, d.h., es gibt in der Natur ein **radioaktives Element**, das spontan Strahlen emittiert: das **Uran**. Uran schwärzte photographische Filme.

Im Jahr 1898 entdeckten Marie und Pierre Curie, dass verschiedene Elemente existieren, die auch radioaktiv sind: das **Polonium** und **Radium**. Diese Elemente schwärzten auch photographische Filme.

Am Ende des 19. Jahrhunderts wusste man, dass es in der Natur *drei Arten von radioaktiven Strahlen* gibt. Diese Formen von Strahlen wurden mit Hilfe eines magnetischen Feldes charakterisiert.

Siehe Abb. 2.



Figur 2. Ein Apparat, um die verschiedenen Arten von Strahlen zu studieren.

Die Strahlen von verschiedenen radioaktiven Elementen wurden in eine bestimmte Flugrichtung gezwungen. Man erzeugte ein zur Ebene senkrecht magnetisches Feld in einem Gehäuse, das evakuiert wird. Die Strahlen werden mit Hilfe einer photographischen Platte nachgewiesen.

Man beobachtete, dass es drei unterschiedliche Zonen auf dem Film gab, die geschwärzt wurden. Diese drei Zonen entsprechen den drei Arten von Strahlen: die sogenannten Alpha-, Gamma- und Beta-Strahlen.

Man schloss daraus, dass Alpha- und Beta-Strahlen elektrisch geladen sind, weil sie durch ein magnetisches Feld gekrümmmt werden. Die Gamma-Strahlen sind elektrisch ungeladen.

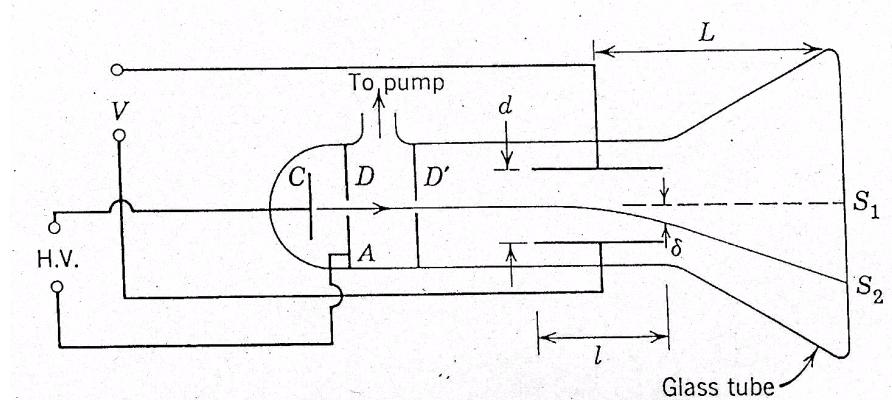
Man beobachtete auch, dass die Alpha-Strahlen verschwinden wenn das Gehäuse nicht evakuiert ist. Die Alpha-Strahlen fliegen nur einige

Zentimeter durch Luft mit normalem Druck. Einige Millimeter von dichter Materie sind genügend, um die Beta-Strahlen zu stoppen. Die Gamma-Strahlen, die mit Röntgen-Strahlen identifiziert wurden, sind die durchdringendsten: man braucht einige Zentimeter Blei, um die Intensität der Strahlen zu reduzieren.

I.3 Die Entdeckung des Elektrons

J.J. Thompson hat das Elektron 1897 entdeckt. Er hat eine Kathodenstrahlröhre benutzt und hat eine genaue Messung des Verhältnisses e/m der Teilchen durchgeführt, die in der Kathodenstrahlröhre emittiert wurden, wobei e die elektrische Ladung und m die Masse der Teilchen bedeutet.

Siehe Abb. 3.



Figur 3. Die experimentelle Anordnung, um das Verhältnis e/m zu messen.

Um das Verhältnis zu messen, hat J.J. Thompson ein elektrisches und ein magnetisches Feld im Rohr erzeugt. Er beobachtete die Lage des Flecks auf dem Fluoreszenz-Schirm und bemerkte, dass die Teilchen elektrisch geladen sein mussten, weil *die Position des Flecks mit der Intensität des E- oder B-Feldes zusammenhängt*. Aus der Richtung der Krümmung konnte er schliessen, dass die Strahlen negativ geladen sind.

E-Feld: zwei parallele metallische Platten der Länge l und Abstand d mit Spannung V

$$\text{Feldstärke: } |\vec{E}| = \frac{V}{d} \quad \Rightarrow \quad \text{Kraft } |\vec{F}_E| = |-e\vec{E}| = \frac{eV}{d}$$

B-Feld: senkrecht zu E-Feld

$$\text{Kraft } |\vec{F}_B| = |q\vec{v} \times \vec{B}| = |-e\vec{v} \times \vec{B}| = evB$$

wobei v die Geschwindigkeit des Teilchens ist.

Die Felder sind so gerichtet, dass die magnetischen und elektrischen Kräfte entgegengerichtet sind. Man kann die Stärke der Felder so wählen, dass die Teilchen nicht abgelenkt werden, d.h., beide Kräfte kompensieren einander

$$\frac{eV}{d} = evB \quad \Rightarrow \quad v = \frac{V}{dB}$$

und so wird die Geschwindigkeit des Teilchens gemessen.

Nun wird das magnetische Feld ausgeschaltet und die Ablenkung S_1S_2 des Lichtflecks auf dem Schirm gemessen.

Es gilt,

$$\delta(l) = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{eV}{md}\right)\left(\frac{l}{v}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{e}{m}\right)\left(\frac{V}{d}\right)\left(\frac{l}{v}\right)^2$$

und die Ablenkung auf dem Schirm ist gleich

$$S_1 S_2 \approx \frac{d\delta(l)}{dl} L = \frac{1}{2}\left(\frac{e}{m}\right)\left(\frac{V}{d}\right)\left(\frac{1}{v}\right)^2 2lL \propto \left(\frac{e}{m}\right) \frac{1}{v^2}$$

Weil die Geschwindigkeit v gemessen wurde, konnte J.J. Thompson das Verhältnis e/m berechnen.

J.J. Thompson beobachtete, dass das gemessene Verhältnis unabhängig von der Art des Gases ist. Er schloss daraus, dass das Verhältnis eine Eigenschaft der Strahlen, die von der Kathode emittiert wurden, darstellt.

Das Verhältnis $(e/m)_{Ionen}$ für Ionen war aus elektrolytischen Experimenten bekannt, wobei e die gesamte elektrische Ladung ($e=I\cdot\Delta t$) und m die gesamte Masse bedeutet, die auf der Elektrode abgeschieden wird.

Es gilt,

$$\left(\frac{e}{m}\right)_{J.J.Thompson} \gg \left(\frac{e}{m}\right)_{Ionen}$$

und deshalb

$$\text{entweder } e \gg e_{Ionen} \text{ oder } m \ll m_{Ionen}$$

J.J. Thompson *nahm an*, dass

$$|e| = |e_{\text{Ionen}}| \quad \text{und} \quad m \ll m_{\text{Ionen}}$$

d.h., die Masse des unbekannten Teilchens musste viel kleiner sein als die Masse eines Ions.

Der grösste Wert für $(e/m)_{\text{Ionen}}$ erhält man für Wasserstoff. J.J. Thompson hat gefunden, dass

$$\left(\frac{e}{m}\right) \approx 1836 \left(\frac{e}{m}\right)_{H^+}$$

Er schloss daraus, dass die Strahlen, die von der Kathode der Kathodenstrahlröhre emittiert wurden, Teilchen mit sehr niedriger Masse entsprechen.

Er hatte das Elektron entdeckt.

1.4 Die Entdeckung der Struktur der Atome

J.J. Thompson verstand, dass das Elektron, das er entdeckt hatte, eine fundamentale Rolle in der Struktur der Materie spielen muss. Es gab trotzdem mindestens zwei Probleme:

1. das Elektron ist negativ geladen: was kompensiert diese Ladung?
2. das Elektron ist sehr leicht: woher kommt die Masse der Atome?

1.4.1 Das Streuexperiment von Rutherford

Im Jahr 1911 hat Rutherford die Resultate seines wichtigen **Streuexperiments**¹ mit α -Teilchen veröffentlicht.

Streuexperiment: eine der wichtigsten experimentellen Entwicklungen der Teilchenphysik

Rutherford hatte die Identität von α -Strahlen mit einer ähnlichen Messung wie J.J. Thompson gefunden: er hatte das Verhältnis (e/m) für α -Strahlen gemessen.

α -Teilchen: doppelt ionisiertes Heliumatom

Ein paralleler Strahl von α -Teilchen wurde senkrecht auf eine $0,4\mu\text{m}$ dünne Goldfolie gerichtet.

Siehe Abb. 4.

Wegen der elektromagnetischen Wechselwirkung wird ein Stoss zwischen den α -Teilchen und den Goldatomen stattfinden.

Während des Stosses wird Impuls zwischen den α -Teilchen und den Atomen übertragen

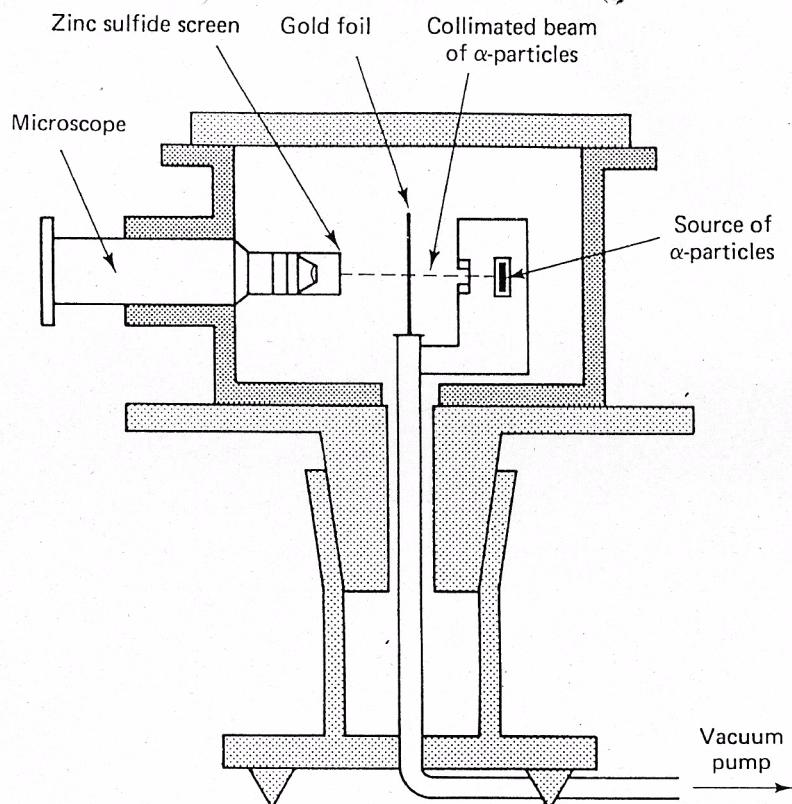
Die α -Teilchen werden abgelenkt.

Experimentell beobachtete man, dass die meisten α -Teilchen in *Vorwärtsrichtung gestreut* wurden. Eine geringe Anzahl wurde nach *rückwärts gestreut*.

Rutherford schloss aus seinen Experimenten, dass *eine Rückwärtsstreuung von α -Teilchen nicht von den Elektronen verursacht werden*

1. H. Geiger (1882-1945), E. Marsden (1889-1970), E. Rutherford (1871-1937)

kann, da die Masse der Elektronen viel zu gering ist, um die schweren α -Teilchen so stark ablenken zu können.



Figur 4. Die Anordnung des Streuexperiments von Rutherford et. al.

Nach der Impulserhaltung muss die Masse des Stosspartners viel grösser als die des α -Teilchens sein. Rutherford stellte daraufhin sein Atommodell vor, bei dem ein positiv geladener massereicher Kern von einer fast masselosen Hülle von negativ geladenen Elektronen umgeben ist.

Mit diesen Experimenten bewies Rutherford, dass ein Atom aus einem positiv geladenen Kern mit einer äusseren Elektronenhülle besteht.

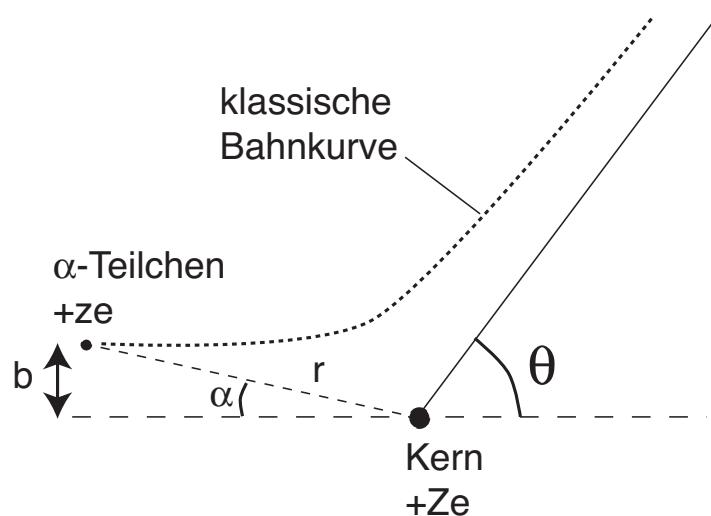
Der Kern des leichtesten bekannten Atoms (Wasserstoff) wurde von Rutherford als **Proton** bezeichnet.

Um sein Modell mit der Theorie zu vergleichen, wurde der Streuwinkel eingeführt

Streuwinkel: θ

und die Bahnkurve des α -Teilchens wurde mit Hilfe der klassischen Mechanik vorausgesagt.

Siehe Abb. 5.



Figur 5. Die Definition der Größen für das Streuexperiment.

Wir nehmen an, dass vor der Streuung das α -Teilchen einen **Stossparameter** b besitzt.

Die Coulombsche Kraft ist zentral (der gesamte Drehimpuls wird erhalten) und wir nehmen an, dass der Kern sich während des Stosses nicht bewegt.

Durch die Lösung des Newtonschen Bewegungsgesetzes für eine Kraft der Form

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{r^2}$$

findet man die folgende Bahnkurve

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{b} \sin \alpha + \frac{D}{2b^2} (\cos \alpha - 1) \quad \text{wobei } D = \frac{zZe^2}{(4\pi\epsilon_0)E} \text{ und } E = \frac{1}{2}mv^2$$

Wenn r nach unendlich geht, dann gilt

$$\sin \alpha + \frac{D}{2b} (\cos \alpha - 1) = 0 \Rightarrow \frac{2b}{D} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \tan \frac{\alpha}{2}$$

Mit $\theta = \pi - \alpha$ erhalten wir eine Beziehung zwischen dem Streuwinkel θ und dem Stossparameter b :

$$\tan \frac{\pi - \theta}{2} = \cot \frac{\theta}{2} = \frac{2b}{D} \Rightarrow b(\theta) = \frac{zZe^2}{2(4\pi\epsilon_0)E} \cot \frac{\theta}{2}$$

Wir definieren nun, dass

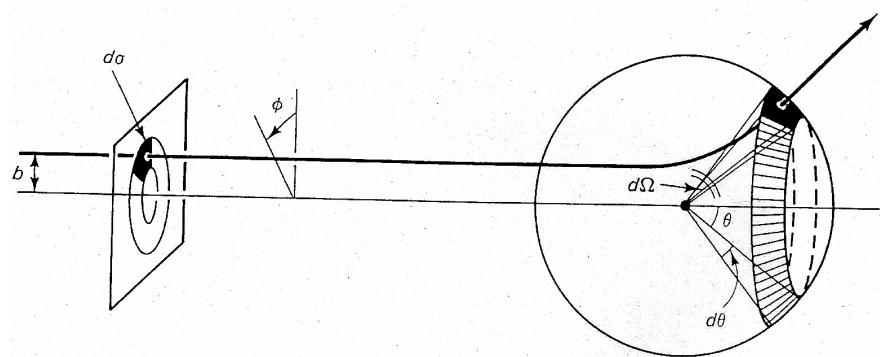
wenn das α -Teilchen mit einem Stossparameter zwischen b und $b+db$ auf den Kern trifft, wird es nach dem Stoss einen Streuwinkel zwischen θ und $\theta+d\theta$ besitzen.

Wenn wir die Fläche $d\sigma$ und den Raumwinkel $d\Omega$ betrachten (Siehe Abb.), erhalten wir

$$d\sigma \equiv bdbd\phi \quad \text{und} \quad d\Omega \equiv d\cos\theta d\phi$$

d.h.

wenn das α -Teilchen durch die Fläche $d\sigma$ auf den Kern trifft, wird es nach dem Stoß in den Raumwinkel $d\Omega$ streuen.



Figur 6. Ein Teilchen, das durch die Fläche $d\sigma$ auf den Kern trifft, wird nach dem Stoß in den Raumwinkel $d\Omega$ streuen.

Wir bestimmen das Verhältnis

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &\equiv b \frac{db}{d\cos\theta} = -\frac{b}{\sin\theta} \frac{db}{d\theta} \\ &= -\frac{b}{\sin\theta} \left(\frac{zZe^2}{2(4\pi\epsilon_0)E} \right) \frac{d}{d\theta} \left(\cot\frac{\theta}{2} \right) \\ &= -\left(\frac{zZe^2}{2(4\pi\epsilon_0)E} \right)^2 \frac{\cot\frac{\theta}{2}}{\sin\theta} \left(-\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}} \right) \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{zZe^2}{(4\pi\epsilon_0)E} \right)^2 \frac{1}{\sin\theta} \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{16} \left(\frac{zZe^2}{(4\pi\epsilon_0)E} \right)^2 \frac{1}{\sin\theta} \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^4\frac{\theta}{2}} \\ &= \left(\frac{zZe^2}{(4\pi\epsilon_0)4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}\end{aligned}$$

Dieses Verhältnis wird als **differentieller Wirkungsquerschnitt** bezeichnet.

1.4.2 Der Wirkungsquerschnitt

Wir betrachten einen Strahl von Teilchen. Wir nehmen an, dass die Teilchen gleichförmig verteilt sind, d.h., wir definieren den Fluss ϕ der Teilchen als

$\phi = \text{Anzahl der Teilchen pro Zeiteinheit und pro Flächeneinheit}$
(z.B. $\text{Teilchen}/\text{m}^2/\text{s}$)

Wir betrachten die Anzahl der Teilchen dN , die die Fläche $d\sigma$ pro Zeiteinheit durchqueren

$$dN \equiv \phi d\sigma$$

Diese Teilchen werden in dem Raumwinkel $d\Omega$ gestreut, d.h. die Anzahl der Teilchen, die in dem Raumwinkel $d\Omega$ gestreut werden, ist gleich

$$dN \equiv \phi d\sigma = \phi \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \right) = \phi \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega$$

und es folgt daraus, dass der Wirkungsquerschnitt der Anzahl der Teilchen pro Zeiteinheit entspricht, die in dem Raumwinkel $d\Omega$ gestreut werden:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \frac{1}{\phi} \frac{dN(\theta, \phi)}{d\Omega}$$

1.4.3 Wirkungsquerschnitt für die Rutherford-Streuung

Im Fall des Streuexperiments von Rutherford haben wir die folgende Beziehung gefunden

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Rutherford} = \left(\frac{zZe^2}{(4\pi\epsilon_0)4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

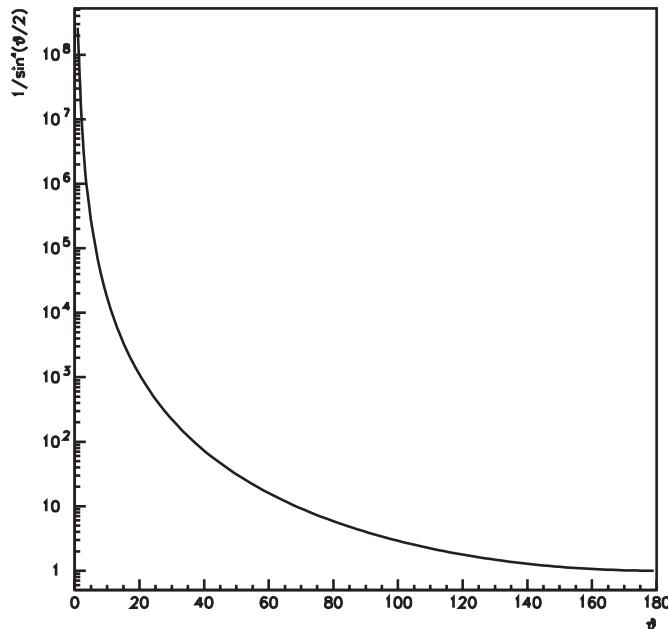
wobei θ der Streuwinkel und E die Energie des Teilchens ist.

Siehe Abb. 7.

Wir bemerken die charakteristische $1/\sin^4\theta/2$ Form des Wirkungsquerschnitts, die zu einer sehr starken Abhängigkeit von θ führt. Man spricht von einen vorwärts-“peaked” Wirkungsquerschnitt.

Dass diese starke Abhängigkeit gilt, bewies Geiger 1911 experimentell in den Grenzen 5° und 150° . In diesem Bereich ändert sich der Wirkungsquerschnitt um einen Faktor $\approx 10^5$!

Falls θ nach Null geht, beobachten wir eine Divergenz. Ihr Ursprung liegt in der Form der Coulombschen Kraft, deren Reichweite unendlich ist. In Wirklichkeit werden die Elektronen um den Kern die Kernladung abschirmen.



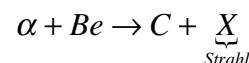
Figur 7. Der Rutherford-Wechselwirkungsquerschnitt als Funktion des Streuwinkels.

1.5 Die Entdeckung des Neutrons

Nach der Entdeckung des Protons und des Elektrons war das Verständnis der Atomstruktur nicht vollständig. Man konnte die Masse und den Spin von Isotopen und von Elementen schwerer als Wasserstoff nicht erklären.

Rutherford sagte die Existenz eines neuen Teilchen voraus, das ähnliche Eigenschaften wie das Proton, aber elektrisch ungeladen sein musste: das sogenannte **Neutron**.

Im Jahr 1930 beobachteten Bothe und Becker neutrale durchdringende Strahlen, die erzeugt wurden, wenn α -Teilchen auf ein Beryllium-Target aufprallten:



Sie dachten zuerst, dass X elektromagnetische Strahlen (d.h. γ -Strahlen) waren.

1932 entdeckten Irène Curie-Joliot und Joliot, dass die X-Strahlen Protonen herausschlagen konnten.

1932 schliesst Chadwick mit Hilfe **einer kinematischen Analyse**, dass die X-Strahlen *keine elektromagnetische Strahlung* sein konnten.

D.h., er bewies, dass wenn die X-Strahlen Protonen durch einen Vorgang herausschlagen, der ähnlich zum Compton-Vorgang ist, dann muss wegen der Erhaltung der Energie und des Impulses gelten:

$$\begin{cases} M_p + E_\gamma = E_p' + E_\gamma' \\ \vec{p}_\gamma = \vec{p}_p' + \vec{p}_\gamma' \end{cases}$$

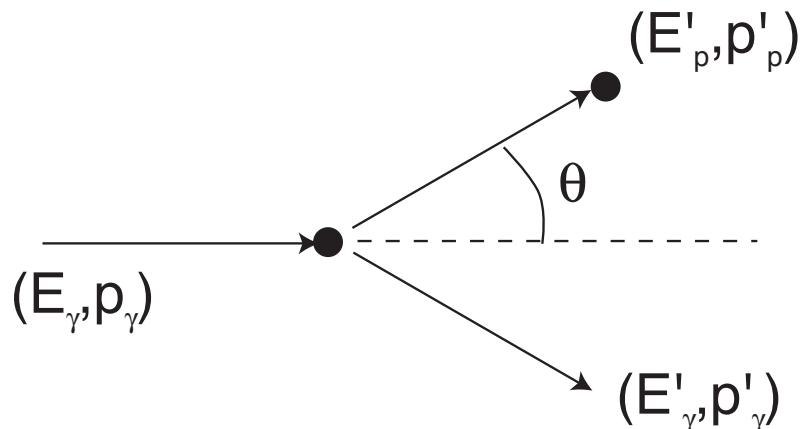
Siehe Abb. 8.

Wenn wir den Streuwinkel θ des Protons einführen, erhalten wir

$$\vec{p}_\gamma - \vec{p}'_p = \vec{p}'_\gamma \Rightarrow p_\gamma^2 + (p'_p)^2 - 2p'_p p_\gamma \cos\theta = (\vec{p}'_\gamma)^2$$

oder

$$E_\gamma^2 + (p'_p)^2 - 2p'_p E_\gamma \cos\theta = (E'_\gamma)^2$$



Figur 8. Entdeckung des Neutrons: Compton-Streuung an einem Proton.

Mit der Gleichung für die Energie finden wir

$$(M_p + E_\gamma - E'_p)^2 = (E'_\gamma)^2 = E_\gamma^2 + (p'_p)^2 - 2p'_p E_\gamma \cos\theta$$

Es folgt,

$$E_\gamma = \frac{M_p(E_p' - M_p)}{M_p - E_p' + p_p' \cos\theta}$$

Der minimale Wert der Photonenergie erhält man für $\cos\theta=1$.

In diesem Fall gilt

$$E_\gamma^{\min} = \frac{M_p(E_p' - M_p)}{M_p - E_p' + p_p'} = \frac{M_p T'}{p_p' - T'}$$

wobei T' die kinetische Energie des herausgeschlagenen Protons ist.

Curie und Joliot hatten die Geschwindigkeit des herausgeschlagenen Protons gemessen:

$$v_p' \approx 3 \times 10^9 \text{ cm/s} \approx 0.1c$$

Numerisch findet man, dass für diesen Wert das einfallende Photon *mindestens eine Energie gleich 50 MeV besitzen muss*, um Protonen mit der beobachteten Geschwindigkeit herauszuschlagen, d.h.:

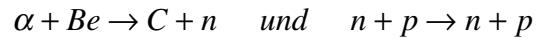
$$T' \approx \frac{1}{2} M_p (v_p')^2 \approx 5 \text{ MeV} \quad \text{und} \quad p_p' c \approx M_p v_p' c \approx 100 \text{ MeV}$$

und deshalb

$$E_\gamma^{\min} \approx 50 \text{ MeV}$$

Chadwick schloss daraus, dass diese grosse Energie mit den bekannten radioaktiven Energien nicht kompatibel war.

Die X-Teilchen können nicht γ -Strahlen sein. Was beobachtet wurde, waren Protonen, die durch die Reaktionen



herausgeschlagen wurden.

In diesem Fall ist die kinematische Situation ganz anders, weil das Neutron eine ähnliche Masse wie das Proton besitzt.

Die Lorentz- Transformationen

2.1 Warum?

Die Gleichungen einer modernen Theorie müssen übereinstimmend mit dem Einsteinschen Prinzip der Relativität sein. D.h., die Naturgesetze müssen in jedem Inertialbezugssystem dieselbe Form haben.

Inertialbezugssystem: ein Bezugssystem, relativ zu welchem ein freier Körper sich ohne Beschleunigung bewegt (Newton-sche erstes Gesetz)

Es kann kein *bevorzugtes* Inertialbezugssystem geben. Alle Inertialbezugssysteme sind einander gleich. D.h. unsere Theorie der Elementarteilchen muss in jedem Inertialbezugssystem dieselbe Form annehmen. Man spricht von der **Kovarianz** der Theorie.

2.2 Die Notation

Wir führen nun die Notation ein, die wir zur Beschreibung eines Punkts in der Raumzeit benutzen werden.

Ein bestimmter Punkt im 3-dimensionalen Raum: Wir definieren diesen Punkt mit Hilfe eines **Ortsvektors**

$$\vec{x} \equiv (x, y, z) \equiv (x^1, x^2, x^3)$$

Ein bestimmter Punkt in der 4-dimensionalen Raumzeit: wir definieren die Koordinaten eines **Ereignisses**:

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z)$$

wobei c die **Lichtgeschwindigkeit** ist. Wir bemerken, dass die Einheiten der vier Koordinaten dieselben sind, nämlich der Einheit einer Länge entsprechen (“homogene Einheiten”).

Um die Koordinaten des Punktes in der 4-dimensionalen Raumzeit zu definieren, haben wir die Notation mit dem griechischen Index μ eingeführt:

$$x^\mu \quad \text{wobei } \mu = 0, 1, 2, 3$$

2.3 Eigentliche Lorentz-Transformation

Die Lorentz-Transformation setzt die Zeit- und Raumkoordinaten eines bestimmten Ereignisses, gemessen relativ zu verschiedenen Inertialbezugssystemen, in Beziehung zu einander.

Rotation. Wir betrachten z.B. eine Rotation um die z-Achse.

$$\begin{cases} ct' = ct \\ x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \\ z' = z \end{cases}$$

Es folgt daraus,

$$\begin{aligned} x^\mu &\equiv \underbrace{(ct, x, y, z)}_{\text{Bez\"uglich Beobachter } O} \\ x'^\mu &\equiv \underbrace{(ct', x', y', z')}_{\text{Bez\"uglich Beobachter } O'} = (ct, x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta, z) \end{aligned}$$

Boost. Wir betrachten zwei Inertialbezugssysteme, die sich relativ zueinander mit einer **konstanten** Geschwindigkeit v bewegen. Wir nehmen an, dass zur Zeit $t=t'=0$ beide Bezugssysteme zusammenfallen und die Koordinatenachsen parallel sind.

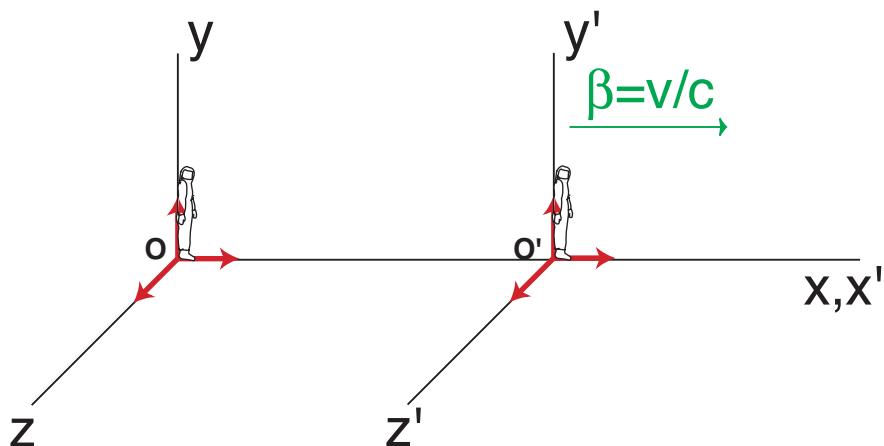
Siehe Abb. 1.

Wir nehmen an, dass die Geschwindigkeit entlang der x -Achse gerichtet ist (Wahl des Koordinatensystems, d.h. die relative Bewegung geht entlang der x -Richtung):

$$\vec{v} = (v, 0, 0)$$

Die Boost-Transformation ist

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \text{wobei} \quad \beta \equiv v/c \quad \text{und} \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$



Figur 1. Koordinatenachsen für den Lorentz-Boost.

Wir erinnern uns an einige Folgerungen der Lorentz-Transformationen:

1. Relativität der Gleichzeitigkeit: wir betrachten zwei Ereignisse A(t_A, x_A, y_A, z_A) und B(t_B, x_B, y_B, z_B)
Bezüglich System S: $t_A=t_B$

Bezüglich System S':

$$t_A' = t_B' + \frac{\beta\gamma}{c}(x_B - x_A)$$

d.h.

$$t_A' \neq t_B' \quad \text{wenn} \quad x_B \neq x_A$$

2. Längenkontraktion (Relativität der Länge)

$$L = L' / \gamma$$

3. Zeitdilatation (Relativität der Zeit)

$$t = \gamma t'$$

4. Addition der Geschwindigkeit

Wegen der Linearität der Lorentz-Transformation

$$\begin{aligned} c\Delta t &= \gamma(c\Delta t' + \beta\Delta x') \\ \Delta x &= \gamma(\Delta x' + \beta c\Delta t') \end{aligned}$$

folgt,

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\left(\frac{\Delta x'}{\Delta t'} + v \right)}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{\Delta x'}{\Delta t'}} \Rightarrow u = \frac{(u' + v)}{1 + \frac{v}{c^2} u'}$$

ähnliche Beziehungen gelten für die anderen Komponenten.

5. Invarianz des Raumzeitintervalls. Die Grösse

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

besitzt denselben Wert in jedem Bezugssystem, d.h.

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

Wir sagen, dass es eine Invariante der Lorentz-Transformation ist.
Dass diese Beziehung gilt, kann mit Hilfe von expliziten Boosts oder Rotationen bewiesen werden.

2.3.1 Die Λ -Matrix und die Notation

Wir werden eine eigentliche Lorentz-Transformation (eine Kombination von Rotationen und Boosts) als die folgende Beziehung zwischen 4-dimensionalen Vektoren darstellen

$$(x^\mu)' = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad \mu = 0,1,2,3$$

wobei

$$\Lambda^\mu_\nu \equiv 4 \times 4 \text{ Matrix}$$

Die Matrix stellt eine Lorentz-Transformation zwischen zwei Bezugssystemen, deren Ursprünge zur Zeit $t=t'=0$ zusammenfallen, dar.

Die Komponenten der Λ Matrix sind alle reell und dimensionslos.

Beispiel: Boost entlang der x-Achse

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Einsteinsche Summen-Konvention. Die Indizes, die wiederholt sind, werden von 0 bis 3 summiert

$$(x^\mu)' = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad \text{Einsteinsche Konvention}$$

2.3.2 Vierer-Vektoren

Wir betrachten eine physikalische Grösse a^μ , die 4 Komponenten besitzt.

Wenn sich die Komponenten der physikalischen Grösse a^μ wie die Komponenten des Raumzeitvektors x^μ transformieren, wird a^μ als 4-Vektor bezeichnet.

Es folgt,

$$a^\mu \text{ ist 4-Vektor} \Leftrightarrow (a^\mu)' = \Lambda^\mu_\nu a^\nu$$

Die 4-Komponenten werden so bezeichnet

$$a^\mu \equiv (a^0, a^1, a^2, a^3) = (a^0, \vec{a})$$

2.3.3 Kovarianter und Kontravarianter 4-Vektor

Im Allgemeinen werden zwei Arten von 4-Vektoren definiert. Man spricht von

Kontravarianter 4 – Vektor $a^\mu \equiv (a^0, \vec{a})$ $(a^\mu)' = \Lambda^\mu_\nu a^\nu$
Kovarianter 4 – Vektor $a_\mu \equiv (a^0, -\vec{a})$ $(a_\mu)' = \Lambda_\mu^\nu a_\nu$

Die Transformation zwischen kontravarianten und kovarianten 4-Vektoren wird mit Hilfe des metrischen Tensors durchgeführt

$$a_\mu \equiv g_{\mu\nu} a^\nu$$

wobei

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d.h.

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{\mu\nu} = 0 \quad \mu \neq \nu$$

2.3.4 Das Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zwischen zwei 4-Vektoren a^μ und b^μ wird definiert als

$$\begin{aligned} a \cdot b &\equiv a^0 a^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 \\ &= a^0 a^0 - \vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass gilt

$$a \cdot b = a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\nu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^\mu b_\mu$$

Beispiel: Das Raumzeitintervall

$$x^\mu = (ct, \vec{x}) \quad \Rightarrow \quad x \cdot x = (x^\mu)^2 = c^2 t^2 - (\vec{x})^2$$

Wir wissen, dass diese Grösse eine Invariante der Lorentz-Transformation ist. Im Allgemeinen ist eine Grösse, die als das Skalarprodukt von zwei 4-Vektoren definiert wird, eine Invariante. Man spricht von einem **Skalar**.

Ein Skalar besitzt denselben Wert bezüglich allen Inertialsystemen. Ein Skalar ist eine Invariante.

$$a \cdot b \text{ ist ein Skalar}$$

Skalargrößen sind sehr nützliche Größen, um Eigenschaften von physikalischen Systemen auszudrücken, weil sie denselben Wert relativ zu einem beliebigen Beobachter besitzen. Wir werden z.B. Wirkungsquerschnitte mit Hilfe von Skalaren ausdrücken.

Dass Skalarprodukte invariant sind, kann man so beweisen:

$$(a \cdot b)' = (a^\mu)'(b_\mu)' = \Lambda_v^\mu a^\nu \Lambda_\mu^\rho b_\rho = \Lambda_v^\mu \Lambda_\mu^\rho a^\nu b_\rho$$

In den Übungen wird bewiesen, dass für eine beliebige Lorentz-Transformation gilt

$$\Lambda_v^\mu \Lambda_\mu^\rho = \begin{cases} 1 & \text{wenn } v = \rho \\ 0 & \text{wenn } v \neq \rho \end{cases} \equiv \delta_v^\rho$$

wobei δ das Kronecker-Symbol ist.

Es folgt, daraus

$$(a \cdot b)' = \Lambda_v^\mu \Lambda_\mu^\rho a^\nu b_\rho = \delta_v^\rho a^\nu b_\rho = a^\nu b_\nu = (a \cdot b)$$

d.h. das Skalarprodukt ist eine Invariante.

Wir bemerken, dass das Skalarprodukt nicht immer einen positiven Wert haben muss. Man klassifiziert 4-Vektoren als Funktion des Werts ihres Skalarprodukts

$$\begin{cases} a^\mu \text{ ist "zeitartig"} \Leftrightarrow a^2 > 0 \\ a^\mu \text{ ist "raumartig"} \Leftrightarrow a^2 < 0 \\ a^\mu \text{ ist "lichtartig"} \Leftrightarrow a^2 = 0 \end{cases}$$

2.3.5 Tensoren

In der Physik werden im Allgemeinen Größen eingeführt, die reelle physikalische Eigenschaften der Realität beschreiben. Um ein physikalisches Verständnis dieser Größen zu gewinnen, ist es wichtig, die Transformationseigenschaften dieser Größen zu verstehen.

Im Allgemeinen nennen wir **Tensoren** Objekte, die bestimmte Transformationseigenschaften unter Lorentz-Transformationen besitzen.

1. ein Skalar ist ein Tensor der Stufe 0
es ist eine Invariante
2. ein 4-Vektor ist ein Tensor der 1. Stufe, der 4 Komponenten besitzt.
Seine Transformationsregel ist

$$(a^\mu)' = \Lambda^\mu_\nu a^\nu$$

(nur ein Summations-Index ν)

3. ein Tensor der 2. Stufe ist eine Größe mit $4^2=16$ Komponenten, die die folgende Transformationsregel besitzt

$$(s^{\mu\nu})' = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma s^{\rho\sigma}$$

(mit zwei Summations-Indizes)

4. usw...

2.3.6 Inverse Lorentz-Transformation

Es folgt aus der Definition der Lorentz-Transformation, dass

$$(a^\mu)' = \Lambda^\mu_\nu a^\nu \Rightarrow \Lambda_\mu^\rho (a^\mu)' = \Lambda_\mu^\rho \Lambda^\mu_\nu a^\nu = \delta_\nu^\rho a^\nu = a^\rho$$

Deshalb ist die inverse Lorentz-Transformation gleich

$$a^\mu = \Lambda_\nu^\mu (a^\nu)' \quad \text{Kontravariant}$$

und in ähnlicher Weise

$$a_\mu = \Lambda_\nu^\mu (a_\nu)' \quad \text{Kovariant}$$

2.4 Distreke (uneigentliche) Lorentz-Transformation

Wir betrachten nun diskrete Transformationen der Raumzeit. Diese Transformationen werden als diskrete Transformationen bezeichnet: sie können nicht durch eine Reihe von infinitesimalen Transformationen gewonnen werden.

Raumspiegelung (Parität)

$$\begin{cases} x^{0'} = x^0 \\ x^{i'} = -x^i \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Zeitumkehr

$$\begin{cases} x^{0'} = -x^0 \\ x^{i'} = x^i \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Wie erwartet, ist das Raumzeitintervall eine Invariante dieser Transformationen.

Axiale Grösse. Wenn wir einen Vektor im Raum betrachten, bemerken wir, dass er sein Vorzeichen unter der Parität ändert:

$$P(\vec{x}) = -\vec{x} \quad (\text{Parität})$$

d.h. die Grösse x entspricht einer physikalischen Grösse, die sich wie ein Raumvektor verhält.

Wenn wir z.B. eine neue Grösse definieren, die als das Vektorprodukt von zwei Vektoren definiert wird, dann gilt:

$$P(\vec{a}) = -\vec{x}_1 \times (-\vec{x}_2) = +\vec{a}$$

Man sagt, dass die Grösse a ein Axialvektor ist.

In ähnlicher Weise definiert man die Skalargrösse oder Pseudoskalargrösse:

$$\begin{aligned} s & \text{ Skalar} \Leftrightarrow P(s) = +s \\ p & \text{ Pseudoskalar} \Leftrightarrow P(p) = -p \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass die Paritätsoperation zweimal angewendet der Identität entsprechen muss:

$$P(P(\vec{x})) = P^2(\vec{x}) = \vec{x} \Rightarrow P^2 = 1$$

Distreke (uneigentliche) Lorentz-Transformation

Die Eigenwerte der Paritäts-Transformation sind deshalb +1 oder –1.

Die Lorentz-Transformationen

Wir haben schon gesagt, dass alle Inertialbezugssysteme gleichwertig sind. Man kann ein beliebiges Inertialbezugssystem wählen, um die Kinematik eines Prozesses zu beschreiben.

Oft ist es aber sehr wichtig ein “bestes” Bezugssystem zu wählen. Obwohl die Form der Gleichung in jedem Bezugssystem dieselbe ist, können die Gleichungen in einem spezifischen Bezugssystem oft vereinfacht werden.

3.1 Der Energie-Impuls 4-Vektor

In der speziellen Relativitätstheorie haben wir die Zeitdilatation kennengelernt.

Die **Eigenzeit** eines Teilchens wird definiert als

$$\tau \equiv \frac{t}{\gamma} \quad \text{wobei } \gamma = \text{Lorentz-Faktor}$$

Wir führen nun die **Eigengeschwindigkeit** eines Teilchens ein:

$$\vec{\eta} \equiv \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \gamma \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{\omega}$$

und auch die erweiterte Definition des **Eigengeschwindigkeits 4-Vektors**

$$\eta^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

Wir bemerken, dass die zeitliche Komponente dieses 4-Vektors gleich

$$\eta^0 \equiv \frac{dx^0}{d\tau} = \gamma \frac{d(ct)}{dt} = \gamma c$$

ist. In einer ähnlichen Weise erhalten wir

$$\eta^\mu = \gamma(c, \vec{v})$$

Das Skalarprodukt η^2 ist natürlich eine Invariante

$$\eta^\mu \eta_\mu = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 v^2 = \gamma^2 c^2 (1 - \beta^2) = c^2 !!$$

Mit Hilfe des Eigengeschwindigkeits 4-Vektors definieren wir nun den **Energie-Impuls 4-Vektor** als

$$p^\mu \equiv m\eta^\mu = m\gamma(c, \vec{v}) = (\gamma mc, \gamma m\vec{v})$$

wobei m die **Ruhemasse** des Teilchens ist.

Wir bemerken, dass

$$p^\mu = (E/c, \vec{p})$$

weil

$$\begin{cases} E = \gamma mc^2 = \text{gesamte Energie des Teilchens} \\ \vec{p} = \gamma m\vec{v} = \text{Impuls des Teilchens} \end{cases}$$

Das Skalarprodukt des Energie-Impuls 4-Vektors muss eine Invariante sein. Wir bemerken, dass gilt

$$p^2 = p^\mu p_\mu = (E/c)^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2$$

Es folgt daraus, dass die Ruhemasse eines Teilchens eine Invariante ist, wie schon bekannt ist. D.h., *alle Inertialbeobachter messen dieselbe Ruhemasse eines Teilchens.*

Wir sehen nun diese Definition von einem neuen Standpunkt aus. Die Ruhemasse eines Teilchens ist eine wichtige und nützliche Grösse, um die Eigenschaften von Elementarteilchen zu definieren, *weil sie eine Invariante der Lorentz-Transformation ist*. Sie ist wirklich vom Beobachter unabhängig und entspricht deshalb einer Eigenschaft des Teilchens.

Wir haben die “Kovarianz” der Theorie schon erwähnt (Siehe Kap. 2.1). Wir suchen eine Theorie der Elementarteilchen, die übereinstimmend mit den Prinzipien der Relativitätstheorie ist. D.h., sie muss dieselbe Form relativ zu allen Inertialbeobachtern besitzen. In diesem Fall spielt die Ruhemasse eine spezielle Rolle: sie besitzt denselben Wert für jeden Inertialbeobachter.

3.2 Natürliche Einheiten

Wir müssen nun die natürlichen Einheiten für die Teilchenphysik einführen. Man braucht drei unabhängige fundamentale Einheiten, wie z.B. im Fall des MKS (Meter-Kilogramm-Sekunde) Systems. Wir kennen die zwei fundamentalen Konstanten

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,055 \times 10^{-34} \text{ J.s} \quad \text{und} \quad c = 2,998 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Wir wählen die fundamentalen Einheiten so, dass die fundamentalen Konstanten die folgenden Werte besitzen

$$\hbar \equiv 1 \quad \text{und} \quad c \equiv 1$$

Es ist dann nicht mehr nötig die Planksche Konstante und die Lichtgeschwindigkeit in den Gleichungen zu schreiben.

Das Produkt aus der Plankschen Konstante und der Lichtgeschwindigkeit hat den folgenden Wert:

$$\hbar c = (1,055 \times 10^{-34} \text{ J.s})(2,998 \times 10^8 \text{ m/s}) \approx 197 \text{ MeV.fm}$$

Die dritte fundamentale Einheit wird als eine Energie definiert, z.B. das Elektronvolt (eV). Man benutzt in der Teilchenphysik oft das $GeV = 10^9 eV$, weil die Masse des Protons ungefähr 1 GeV ist.

Es folgt daraus,

$$p^\mu = (E, \vec{p}) \quad \text{wobei} \quad E^2 = \vec{p}^2 + m^2$$

und

$$p^2 = p^\mu p_\mu = m^2$$

Die Einheit der Energie, des Impulses und der Masse sind deshalb dieselbe: die Einheit der Energie. Die Ruhemasse des Elektrons ist gleich $m_e=0,511\text{ MeV}$.

Die Einheit der Länge wenn $h/2\pi=c=1$ ist gleich:

$$1 \text{ Meter} = \frac{10^{15} \text{ fm}}{\hbar c} \approx \frac{10^{15} \text{ fm}}{197 \text{ MeV.fm}} \approx 0,507 \times 10^{16} \text{ GeV}^{-1}$$

3.3 Relativistische Kinematik

Eine fundamentale Symmetrie des Universums führt zur Erhaltung der Energie und des Impulses. Der Grund ihrer Einführung ist, dass diese Größen während einem beliebigen physikalischen Prozess erhalten werden, wie z.B. während Stößen oder Zerfällen von Teilchen.

Relativistischer Stoß: A+B → C+D.

Energie-Impuls-Erhaltung

$$p_A^\mu + p_B^\mu = p_C^\mu + p_D^\mu$$

Die gesamte *kinetische* Energie kann, muss aber nicht erhalten werden: die Ruhemasse des Systems kann zu oder abnehmen. Während eines **elastischen Stosses** ist die Ruhemasse erhalten.

3.3.1 “Fixed-target” Kinematik

Ein Teilchen A stösst ein Teilchen B, das sich bezüglich des Labors in Ruhe befindet.

Wir nehmen an, dass die Impulse der Teilchen bezüglich des Labor-systems gleich

$$p_A^\mu = (E_A, \vec{p}_A) \quad \text{und} \quad p_B^\mu = (M_B, 0)$$

sind. Es folgt,

$$\begin{aligned} (p_A^\mu + p_B^\mu)^2 &= (E_A + M_B)^2 - (\vec{p}_A + \vec{0})^2 \\ &= E_A^2 + 2M_B E_A + M_B^2 - \vec{p}_A^2 \\ &= M_A^2 + M_B^2 + 2M_B E_A \end{aligned}$$

Im Schwerpunktssystem (SP) ist der gesamte Energie-Impuls 4-Vektor gleich

$$p_{SP}^\mu \equiv (p_{A,SP}^\mu + p_{B,SP}^\mu) = (E_{SP}, \vec{p}_{SP}) = (E_{SP}, \vec{0})$$

wobei “SP” relativ zum Schwerpunktssystem heisst. Das Skalarprodukt eines 4-Vektors ist eine Invariante. Es folgt,

$$(p_A^\mu + p_B^\mu)^2 = (p_{A,SP}^\mu + p_{B,SP}^\mu)^2 = M_A^2 + M_B^2 + 2M_B E_A = E_{SP}^2$$

Die Energie im SP ist deshalb gleich

$$E_{SP} = \sqrt{M_A^2 + M_B^2 + 2M_B E_A} \approx \sqrt{2M_B E_A}$$

wenn $E_A \gg M_A$ und $E_A \gg M_B$.

Was ist die physikalische Bedeutung dieser Gleichung?

Wegen der Bewegung des SPs ist die Energie, die im SP vorhanden ist, kleiner als die gesamte Laborenergie. Ein Teil der Energie ent-

spricht der Bewegung des SPs und diese Energie muss erhalten werden. Diese Energie ist im SP nicht vorhanden.

Experimentell grenzt diese Beziehung den Wert der Masse von Teilchen ein, die während eines Stosses erzeugt werden können. Um ein schweres Teilchen der Masse M zu erzeugen, muss gelten

$$E_{SP} \geq M$$

Z.B. für ein schweres Teilchen der Masse $M=90\text{ GeV}$, wie im Fall des LEP Beschleunigers am CERN, wo Elektron-Positron-Kollisionen durchgeführt werden. Wir nehmen an, dass das Target ein Elektron ist:

$$E_{SP} \geq M \Rightarrow E_A \geq \frac{M^2}{2M_B} \approx \frac{(90\text{GeV})^2}{2(0,511 \times 10^{-3}\text{GeV})} \approx 8 \times 10^6\text{GeV} \gg M$$

Im LEP stossen die zwei Teilchen frontal aufeinander (d.h. das SP ist gleich dem Laborsystem). In diesem Fall braucht man, um ein Teilchen der Masse $M=90\text{ GeV}$ zu erzeugen, “nur”

$$E_{SP} \geq M \Rightarrow E_A + E_B = 2E_A \geq M \Rightarrow E_A \geq \frac{M}{2}$$

Im Beschleuniger ist die ganze Energie der Teilchen vorhanden, um das Teilchen M zu erzeugen.

3.3.2 Übergang vom SP zum Laborsystem

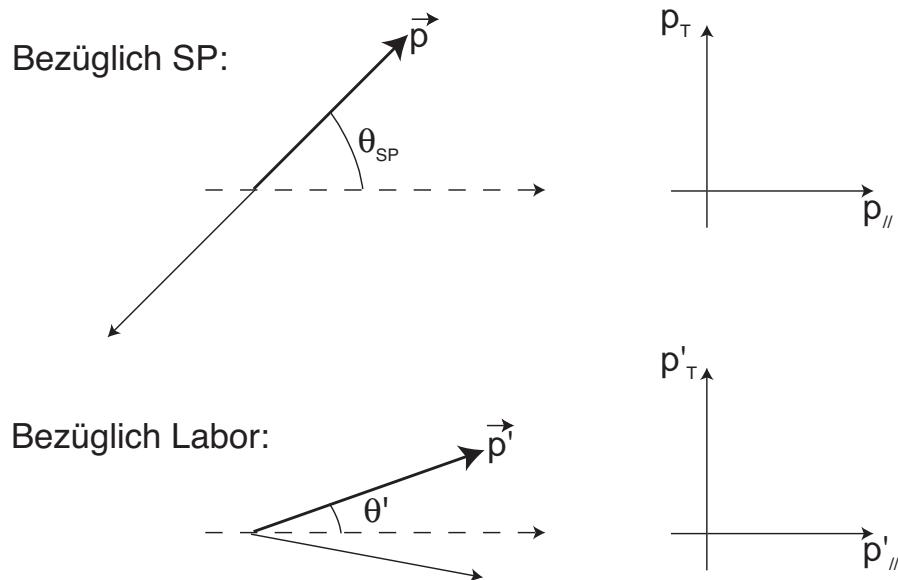
Wir betrachten nun ein Beispiel, in dem zwei Teilchen z.B. als Folge eines Zerfalls, erzeugt werden. Wir betrachten eines der Teilchen.

Siehe Abb. 1.

Wir nehmen an, dass die Geschwindigkeit des SPs bezüglich des Laborsystems gleich

$$\beta_L = \text{Geschwindigkeit des SPs bezüglich des Labors}$$

ist.



Figur 1. Kinematik eines Teilchens bezüglich des SPs und des Labors.

Die Transformation der parallelen und senkrechten Komponenten des Impulses kann man als

$$\begin{pmatrix} E' \\ p_{\parallel}' \\ p_T' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_L & \gamma_L \beta_L & 0 \\ \gamma_L \beta_L & \gamma_L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_{\parallel} \\ p_T \end{pmatrix}$$

ausdrücken.

Es folgt daraus,

$$\begin{cases} p_T' = p_T \\ p_{\parallel}' = \gamma_L (\beta_L E + p_{\parallel}) = \gamma_L p (\beta_L E / p + p_{\parallel} / p) = \gamma_L p (\beta_L / \beta + \cos \theta_{SP}) \end{cases}$$

wobei β die Geschwindigkeit des Teilchens im SP ist. Wie erwartet, können Teilchen im Labor rückwärts fliegen, wenn $\beta > \beta_L$. Wenn $\beta < \beta_L$ wird das Teilchen vorwärts “boosted”.

Sein Zerfallswinkel θ' im Laborsystem ist gleich

$$\begin{aligned} \tan \theta' &= \frac{p_T'}{p_{\parallel}'} = \frac{p_T}{(\gamma_L \beta_L E + \gamma_L p_{\parallel})} = \frac{1}{\gamma_L} \left(\frac{p_T / p}{\beta_L E / p + p_{\parallel} / p} \right) \\ &= \frac{1}{\gamma_L} \left(\frac{\sin \theta_{SP}}{\beta_L / \beta + \cos \theta_{SP}} \right) \end{aligned}$$

Relativistische Kinematik

Die nicht-relativistische Quantenmechanik

4.1 Die Schrödinger-Gleichung

4.1.1 Die Wellenfunktion

1928 hat G.P. Thompson beobachtet, dass sich ein Elektron wie eine Welle verhalten kann: **Elektronbeugung**.

In der Quantenmechanik wird ein Teilchen (z.B. das Elektron) mit Hilfe einer **Wellenfunktion ψ** beschrieben:

$$\psi = \text{komplexe Wellenfunktion}$$

Diese Funktion stellt den Zustand des Teilchens dar und beschreibt die **Wellennatur des Teilchens** (Interferenz, Beugungseffekte, usw...). Die Wellennatur beobachtet man z.B. in **Doppelspaltexperimenten**.

Die übliche Interpretation der Wellenfunktion ist die folgende:

$$|\psi(\vec{x}, t)|^2 d^3 \vec{x} \equiv \text{Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zur Zeit } t \\ \text{im Volumenelement } d^3 \vec{x} \text{ zu finden.}$$

Die Normierung wird als

$$\int_V |\psi(\vec{x}, t)|^2 d^3 \vec{x} = \int_V (\psi^* \psi) d^3 \vec{x} \equiv 1$$

ausgedrückt.

Die Wellenfunktion beschreibt den Zustand *eines* Teilchens. Die **Wahrscheinlichkeitsdichte** wird definiert als

$$\rho(\vec{x}, t) \equiv \psi^*(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t) = |\psi(\vec{x}, t)|^2$$

4.1.2 Die Operatoren

Die Wellenfunktion ist nicht beobachtbar, sondern entspricht der ganzen Information, die man über das Teilchen hat.

Die beobachtbaren Größen werden durch **hermitische Operatoren** dargestellt, die auf die Wellenfunktion wirken:

$$\text{Impuls - Operator: } \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla} = -i\vec{\nabla}$$

$$\text{Energie - Operator: } E \rightarrow +i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = +i \frac{\partial}{\partial t}$$

wobei wir in den zweiten Termen die natürlichen Einheiten (Siehe Kap. 3.2) benutzt haben.

4.1.3 Die Schrödinger-Gleichung

Die Schrödinger-Gleichung wird mit Hilfe der klassischen Beziehung zwischen Energie und Impuls hergeleitet. Die gesamte Energie eines klassischen Teilchen ist gleich

$$E = T + V$$

wobei T die *kinetische* und V die *potentielle Energie* des Teilchens ist. Es gilt,

$$T = \frac{p^2}{2m} \quad \text{wobei } m = \text{Masse des Teilchens}$$

Der Operator der gesamten Energie (der **Hamilton-Operator**) ist deshalb gleich

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + V = E$$

Es folgt,

$$H\psi(\vec{x}, t) = \left(\frac{p^2}{2m} + V \right) \psi(\vec{x}, t) = E\psi(\vec{x}, t)$$

oder

$$\boxed{\left(-\frac{1}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(\vec{x}, t) \right) \psi(\vec{x}, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t)}$$

Diese Gleichung wurde 1926 von Schrödinger hergeleitet. Sie entspricht der *Bewegungsgleichung (Wellengleichung) eines einzigen Teilchens der Masse m in einem externen Potential V* .

4.1.4 Die Kontinuitätsgleichung

Wir betrachten die zeitliche Änderung der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{x}, t) &\equiv \frac{\partial}{\partial t} (\psi^*(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t)) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \psi^* \right) \psi + \psi^* \left(\frac{\partial}{\partial t} \psi \right)\end{aligned}$$

Aus der Schrödinger-Gleichung folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi = -i \left(-\frac{1}{2m} \vec{\nabla}^2 + V \right) \psi \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t} \psi^* = i \left(-\frac{1}{2m} \vec{\nabla}^2 + V \right) \psi^*$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \rho &= \left(i \left(-\frac{1}{2m} \vec{\nabla}^2 + V \right) \psi^* \right) \psi - \psi^* i \left(-\frac{1}{2m} \vec{\nabla}^2 + V \right) \psi \\ &= \frac{-i}{2m} \left((\vec{\nabla}^2 \psi^*) \psi - (\vec{\nabla}^2 \psi) \psi^* \right)\end{aligned}$$

Das Gaußsche Theorem sagt voraus, dass

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho d^3x = - \int_{A=\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{A} = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d^3x$$

wobei A die Fläche ist, die das Volumen V umschliesst, und \vec{j} ist der **Wahrscheinlichkeitsstromvektor**.

Wir können deshalb einen **Stromdichtevektor** (eine **Vektorgröße**) definieren, die die Gleichung der Kontinuität erfüllt:

$$\vec{j}(\vec{x}, t) \equiv \frac{i}{2m} \left((\vec{\nabla} \psi^*) \psi - (\vec{\nabla} \psi) \psi^* \right)$$

Diese Grösse beschreibt, wie die Wahrscheinlichkeitsdichte ρ „fließt“.

Wir bemerken, dass wie erwartet, gilt

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{j} &= \frac{i}{2m} \left(\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \psi^*) \psi - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \psi) \psi^* \right) \\ &= \frac{i}{2m} \left((\vec{\nabla}^2 \psi^*) \psi + \vec{\nabla} \psi^* \vec{\nabla} \psi - \vec{\nabla} \psi \vec{\nabla} \psi^* - (\vec{\nabla}^2 \psi) \psi^* \right) \\ &= \frac{i}{2m} \left((\vec{\nabla}^2 \psi^*) \psi - (\vec{\nabla}^2 \psi) \psi^* \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho\end{aligned}$$

Freies Teilchen: Wir betrachten ein freies Teilchen.

$$V(\vec{x}, t) \equiv 0 \Rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{1}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi \Rightarrow \psi(\vec{x}, t) = N e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

Die Wellenfunktion ist eine ebene Welle. Es folgt daraus,

$$\rho = \psi^* \psi = |N|^2 \quad \text{Einheit: } 1/L^3$$

und

$$\begin{aligned}\vec{j}(\vec{x}, t) &\equiv \frac{i}{2m} \left((\vec{\nabla} \psi^*) \psi - (\vec{\nabla} \psi) \psi^* \right) \\ &= \frac{i}{2m} \left((-i\vec{p}) \psi^* \psi - (i\vec{p}) \psi \psi^* \right) \\ &= \frac{i}{2m} (-i\vec{p}) 2|N|^2 = |N|^2 \frac{\vec{p}}{m} = |N|^2 \vec{v}\end{aligned}$$

$$\text{Einheit: } [1/L^3][L/Z] = [1/(ZL^2)]$$

4.2 Drehimpuls und Spin

Wir werden Spin-Effekte in den Wirkungsquerschnitten von verschiedenen Prozessen betrachten. Deshalb folgt eine kurze Wiederholung der Eigenschaften dieser Operatoren.

4.2.1 Drehimpuls-Operator

Der Drehimpuls-Operator ist gleich

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} = -i\vec{r} \times \vec{\nabla}$$

Mit der Kommutationsregel

$$[x, p_x] = i, [y, p_y] = i, \text{ und } [z, p_z] = i$$

kann man beweisen, dass die Kommutationsregel des Drehimpulses gleich

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k \quad \text{wobei} \quad \vec{L} = (L_1, L_2, L_3)$$

ist. Diese Gleichung beschreibt die **Lie-Algebra** des Drehimpuls-Operators. Der total **antisymmetrische Levi-Civita Tensor** ϵ_{ijk} ist definiert als

$$\epsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} +1 & \text{gerade Zahl von Permutationen von 1,2,3} \\ -1 & \text{ungerade Zahl von Permutationen von 1,2,3} \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

d.h., z.B.

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{312} = \epsilon_{231} = 1 \quad \text{und} \quad \epsilon_{321} = \epsilon_{132} = \epsilon_{213} = -1$$

4.2.2 Spin-Operator

Es gibt kein klassisches Analog zum Spin. Er entspricht einem internen Freiheitsgrad eines Teilchens.

z.B. für Spin 1/2: zwei mögliche Zustände

$$|\uparrow\rangle = |s, s_3\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |\downarrow\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die “spin-up” und “spin-down” Zustände sind die Eigenzustände des Operators

$$S_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die drei Komponenten können mit Hilfe der **Pauli-Matrizen** σ definiert werden

$$\vec{S} = (S_1, S_2, S_3) = \frac{1}{2} \vec{\sigma}$$

wobei

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Eigenschaften dieser Matrizen sind die folgenden:

$$\sigma^2 = 1 \quad \sigma^+ = \sigma \quad (\text{Hermitisch})$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \quad \text{Lie-Algebra}$$

d.h. die Kommutationsregeln sind dieselben wie die des Drehimpulsoperators.

Die Pauli-Matrizen werden wir weiter brauchen, wenn wir die Dirac-Gleichung diskutieren werden (Siehe Kap. 6).

4.3 Störungstheorie

Wir beginnen mit einer ersten wichtigen Komponente der Theorie der Elementarteilchen: die sogenannte **Goldene Regel von Fermi**.

4.3.1 Fermis Goldene Regel

Oft kann man Probleme nicht exakt lösen. Man braucht Näherungsmethoden.

Wir betrachten den folgenden Hamilton-Operator

$$H = \underbrace{H_0}_{\substack{\text{zeitunabhängiger} \\ \text{ungestörter Hamilton-Operator}}} + \underbrace{V}_{\substack{\text{zeitabhängige} \\ \text{Störung}}}$$

H_0 entspricht dem ungestörten Hamilton-Operator und ist zeitunabhängig. Die Störung V ist im Allgemeinen zeitabhängig.

Wir nehmen an, dass die Eigenwerte und Eigenfunktionen des ungestörten Hamilton-Operators die folgenden sind

$$H_0 |u_n\rangle = E_n |u_n\rangle \quad \text{wobei } |u_n\rangle = \text{Eigenzustand}$$

Eine *stationäre Lösung* ist deshalb zu

$$e^{-iE_n t} u_n(\vec{x})$$

proportional.

Falls die $|u_n\rangle$ ein vollständiges System bilden, können wir annehmen, dass eine Lösung von H als Linearkombination der Eigenfunktionen von H_0 ausgedrückt werden kann:

$$\psi(\vec{x}, t) = \sum_n a_n(t) e^{-iE_n t} u_n(\vec{x})$$

Aus der Schrödinger-Gleichung folgt,

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = H \psi \Rightarrow \sum_n \left(i \frac{da_n}{dt} + a_n E_n \right) e^{-iE_n t} u_n = (H_0 + V) \sum_n a_n e^{-iE_n t} u_n$$

Mit $H_0|u_n\rangle = E_n|u_n\rangle$ erhalten wir

$$\sum_n \left(i \frac{da_n}{dt} \right) e^{-iE_n t} u_n = \sum_n a_n V e^{-iE_n t} u_n$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit u_f^* und führen eine räumliche Integration durch:

$$i \int \sum_n \frac{da_n}{dt} u_f^* e^{-iE_n t} u_n d^3 \vec{x} = \int \sum_n a_n u_f^* V e^{-iE_n t} u_n d^3 \vec{x}$$

oder

$$i \sum_n \frac{da_n}{dt} \underbrace{\left(\int d^3 \vec{x} u_f^* u_n \right)}_{= \delta_f^n} e^{-iE_n t} = \sum_n a_n e^{-iE_n t} \left(\int d^3 \vec{x} u_f^* V u_n \right)$$

Die Zeitabhängigkeit des Koeffizienten a_f ist gegeben durch

$$i \frac{da_f}{dt} e^{-iE_f t} = \sum_n a_n e^{-iE_n t} V_{fn}(t) \quad \text{wobei} \quad V_{fn}(t) = \int d^3 \vec{x} u_f^* V(\vec{x}, t) u_n$$

oder

$$\boxed{\frac{da_f}{dt} = -i \sum_n a_n e^{i(E_f - E_n)t} V_{fn}(t)}$$

Wie wird diese Gleichung benutzt? Wir betrachten eine bestimmte Anordnung: ein freies Teilchen bewegt sich im Raum. Zur Zeit $t=0$ wirkt ein zeitabhängiges Potential V während eines kurzen Zeitintervalls.

Wir sind am Zustand des Teilchens nach der Potentialwirkung interessiert.

Der **Anfangszustand** (zur Zeit $-T/2$) ist gleich

$$t = -\frac{T}{2}: \quad \begin{cases} a_i \left(-\frac{T}{2} \right) = 1 \\ a_n \left(-\frac{T}{2} \right) = 0 \quad n \neq i \end{cases}$$

d.h., das Teilchen befindet sich am Anfang im Zustand $|u_i\rangle$.

Annahme: wenn die Störung klein ist, bleibt der Zustand ungefähr im Anfangszustand. Es folgt,

$$\begin{aligned}\frac{da_f}{dt} &= -i \sum_n a_n e^{i(E_f - E_n)t} V_{fn}(t) \\ &\approx -i \underbrace{a_i(t)}_{\approx 1} e^{i(E_f - E_i)t} V_{fi}(t)\end{aligned}$$

Diese Näherung wird als **erste (oder Born'sche) Ordnung** bezeichnet.

Durch Zeit-Integration erhalten wir

$$a_f(t) \approx -i \int_{-T/2}^t dt' V_{fi}(t') e^{i(E_f - E_i)t'}$$

Zur Zeit $+T/2$ wird der **Endzustand** durch den Koeffizient $a_f(T/2)$ definiert

$$a_f\left(\frac{T}{2}\right) \approx -i \int_{-T/2}^{+T/2} dt' \int d^3 \vec{x} u_f^*(\vec{x}) V(\vec{x}, t') u_i(\vec{x}) e^{i(E_f - E_i)t'}$$

Wir betrachten nun den Fall, in dem die Störung zeitunabhängig ist und lassen T nach unendlich gehen:

$$V(\vec{x}, t) = V(\vec{x}) \quad \text{und} \quad T \rightarrow \infty$$

Die **Übergangs-Amplitude** vom Anfangszustand i in den Endzustand f wird definiert als

$$T_{fi} \equiv -i \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i(E_f - E_i)t'} \int d^3 \vec{x} u_f^*(\vec{x}) V(\vec{x}) u_i(\vec{x})$$

Wir bemerken, dass die zeitliche Integration zu einer **Dirac-δ-Funktion** führt.

Dirac- δ -Funktion. Wir betrachten die Fouriertransformierte Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx} dk \quad \text{wobei} \quad A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

Es gilt,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) e^{-iky} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{+ik(x-y)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) \delta(x-y) \end{aligned}$$

und deshalb

$$\boxed{\delta(x-y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{+ik(x-y)}}$$

Mit der Dirac- δ -Funktion erhalten wir für die Übergangsamplitude

$$\boxed{T_{fi} = -iV_{fi}(2\pi)\delta(E_f - E_i)}$$

Wir bemerken, dass die Übergangs-Amplitude *verschwindet*, wenn die Anfangs- und Endzustandsenergien nicht gleich sind:

$$T_{fi} = 0 \quad \text{wenn} \quad E_f \neq E_i$$

d.h., eine zeitunabhängige Störung kann die Energie des Teilchens nicht ändern.

Die **Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit** wird definiert als

$$W \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|T_{fi}|^2}{T}$$

wobei wir den *Betrag im Quadrat* der Amplitude verwendet haben. Durch Einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned} W &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\left| -iV_{fi}(2\pi)\delta(E_f - E_i) \right|^2}{T} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |V_{fi}|^2 (2\pi)^2 \delta(E_f - E_i) \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i(E_f - E_i)t} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |V_{fi}|^2 (2\pi) \delta(E_f - E_i) \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} dt}_{=T} \end{aligned}$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit ist deshalb gleich

$$W = (2\pi) |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i)$$

Wir können nun annehmen, dass das Teilchen einen Übergang in viele Endzustände mit der Energie E_f machen kann. Wir führen die **Dichte der Endzuständen ρ** ein als:

$$\begin{aligned} \rho(E_f) dE_f &= \text{Anzahl der Endzustände} \\ &\quad \text{im Energieintervall } E_f \text{ und } E_f + dE_f \end{aligned}$$

Die gesamte Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit vom Zustand i zu Zuständen f wird durch Integration über die möglichen Endzustände gewonnen:

$$\begin{aligned} W_{fi} &= (2\pi) \int dE_f |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) \rho(E_f) \\ &= (2\pi) |V_{fi}|^2 \rho(E_f) \quad \text{Fermis Goldene Regel} \end{aligned}$$

4.3.2 Elastisches Streuexperiment

Wir versuchen nun ein Streuexperiment mit Hilfe der quantenmechanischen Beschreibung zu analysieren.

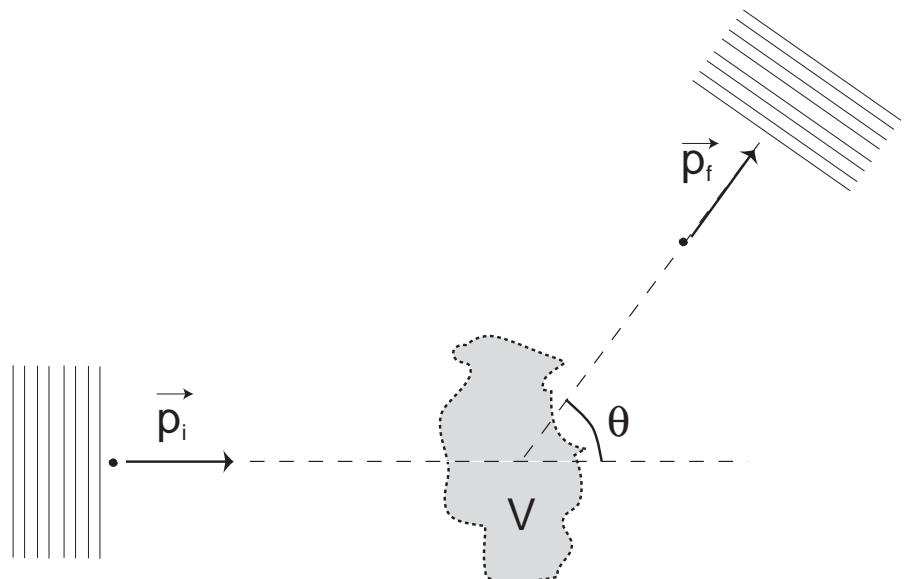
Wir vereinfachen das Problem und betrachten nur elastische Stöße an einem festen Potential.

In dieser Beschreibung ist ein Potential V für die Streuung des Teilchens verantwortlich. Als Folge wird das Teilchen seinen Impuls ändern. Im elastischen Stoß wird der Betrag des Impulses nicht geändert, nur die Richtung:

$$|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f| = |\vec{p}| = p$$

Die Streuung wird als ein Übergang vom Anfangszustand mit Impuls \mathbf{p}_i zum Endzustand mit Impuls \mathbf{p}_f dargestellt.

Siehe Abb. 1.



Figur 1. Streuexperiment in der quantenmechanischen Beschreibung

Vergleiche mit Abb. 5 im Kap. 1.4.1.

*In der quantenmechanischen Beschreibung spricht man nicht mehr von der Bahnkurve des Teilchens, wir sind an der **Übergangswahrscheinlichkeit zwischen Zuständen mit bestimmten Impulsen $p_i \rightarrow p_f$** interessiert.*

Einfallendes Teilchen: ebene Welle mit bestimmtem Impuls \mathbf{p}_i , und mit Normierung in einem Kasten des Volumens L^3 :

$$u_i(\vec{x}) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\vec{p}_i \cdot \vec{x}} \quad \text{Impuls } \vec{p}_i$$

Auslaufendes Teilchen:

$$u_f(\vec{x}) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\vec{p}_f \cdot \vec{x}} \quad \text{Impuls } \vec{p}_f$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für den **Übergang zwischen Zuständen p_i und p_f** wird definiert als

$d\sigma_{ij} \equiv \frac{W_{fi}}{j} \quad \text{wobei } j = \text{Fluss des einfallenden Teilchens}$

Einheit: $W_{fi} = \text{Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit}$

$j = \text{Wahrscheinlichkeit pro Zeitseinheit und Flächeneinheit}$

d.h. der Wirkungsquerschnitt hat, wie erwartet, die Einheit *einer Fläche*.

Für ein freies einfallendes Teilchen ist der Fluss gleich (Siehe Kap. 4.1.4)

$$\vec{j} = |N|^2 \frac{\vec{p}}{m} \Rightarrow j = \frac{1}{L^3} \frac{p}{m}$$

Es folgt daraus mit Fermis Goldener Regel:

$$d\sigma_{ij} \equiv \frac{W_{fi}}{j} = \frac{(2\pi) |V_{fi}|^2 \rho(E_f)}{\frac{1}{L^3} \frac{p}{m}} = (2\pi) \frac{m L^3}{p} |V_{fi}|^2 \rho(E_f)$$

Wir bestimmen *die Dichte der Endzustände*. Für eine ein-dimensionale Anordnung, erhalten wir

$$u_f(x) = Ne^{ip_f \cdot x} \Rightarrow u_f(L) = Ne^{ip_f \cdot L} = 1 \Rightarrow p_f = \frac{2\pi n}{L}$$

$$\Rightarrow dp_f = \frac{2\pi}{L} dn$$

und in 3 Dimensionen

$$dn = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 dp_x dp_y dp_z = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 p^2 dp d\Omega$$

Die Dichte der Zustände ist

$$\rho(E_f) = \frac{dn}{dE_f} \quad \text{wenn } E_f = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow dE_f = \frac{1}{2m} 2pdः = \frac{pdp}{m}$$

oder

$$\rho(E_f) = \frac{dn}{dE_f} = \frac{\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 p^2 dp d\Omega}{\frac{pdp}{m}} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 mp d\Omega$$

Der *differentielle Wirkungsquerschnitt* wird dann gegeben durch

$$d\sigma = (2\pi) \frac{mL^3}{p} |V_{fi}|^2 \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 mp d\Omega = \left(\frac{m}{2\pi}\right)^2 L^6 |V_{fi}|^2 d\Omega$$

oder

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi} \right)^2 L^6 |V_{fi}|^2$$

Das Matrix-Element V_{fi} wird bestimmt:

$$V_{fi} = \int d^3\vec{x} u_f^* V(\vec{x}) u_i = \frac{1}{L^3} \int d^3\vec{x} e^{-i\vec{p}_f \cdot \vec{x}} V(\vec{x}) e^{i\vec{p}_i \cdot \vec{x}} = \frac{1}{L^3} \int d^3\vec{x} V(\vec{x}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}}$$

wobei

$\vec{q} \equiv \vec{p}_i - \vec{p}_f = \text{Änderung des Impulses}$

Man spricht vom **Impulsübertrag q** . Schliesslich wird der Wirkungsquerschnitt geschrieben als

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi} \right)^2 \left| \int d^3\vec{x} V(\vec{x}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} \right|^2$$

Diese Gleichung entspricht dem differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Streuung am Potential V . Diese Gleichung gilt in erster Näherung (der sogenannten **Born'schen Näherung**).

4.4 Rutherford-Streuung

Wir betrachten nun die Anordnung des Rutherford-Streuexperiments.

In der Störungstheorie muss das Potential *schwach* sein.

Wir können kein Potential verwenden, das eine *unendliche Reichweite* wie die Coulomb-Kraft besitzt. Wir nehmen deshalb an, dass

Rutherford-Streuung

die Ladung des punktförmigen Kerns von einer Elektronenwolke abgeschirmt wird.

D.h., für das Potential verwenden wir ein Coulomb-Potential für eine punktförmige Ladung $+Ze$, korrigiert für eine Elektronenwolke der Ladung $-Ze$:

$$V(\vec{x}) \equiv \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Z}{|\vec{x}|} - \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3\vec{x}' \right)$$

wobei

$$\int \rho(\vec{x}') d^3\vec{x}' = Z$$

der gesamten Ladung der Elektronen entspricht. In der letzten Gleichung haben wir angenommen, dass das Atom elektrisch neutral ist.

Die Ladung des gestreuten Teilchens ist gleich ze .

In erster Born'scher Näherung müssen wir das folgende Integral berechnen, um das Matrix-Element zu bestimmen:

$$\int d^3\vec{x} V(\vec{x}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{x} \left(\frac{Z}{|\vec{x}|} - \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3\vec{x}' \right) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}$$

Wir bemerken, dass

$$\int d^3\vec{x} V(\vec{x}) (\nabla^2 e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}) = (iq)^2 \int d^3\vec{x} V(\vec{x}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}$$

Es folgt,

$$\int d^3\vec{x} V(\vec{x}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} = -\frac{1}{q^2} \int d^3\vec{x} V(\vec{x}) (\nabla^2 e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}})$$

Mit Hilfe des **Satzes von Green** (Siehe Übungen) erhalten wir

$$\int d^3\vec{x} V(\vec{x}) (\nabla^2 e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}) = \int d^3\vec{x} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} (\nabla^2 V(\vec{x})) + \int_{A=\partial V} \left(V(\vec{\nabla} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}) - e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} (\vec{\nabla} V) \right) d\vec{A}$$

Das Integral über die Fläche A , die das Volumen V umschliesst, verschwindet, wenn das Volumen nach unendlich geht, da gilt

$$\begin{cases} V(\vec{x}) \rightarrow 0 & \text{wenn } |\vec{x}| \rightarrow \infty \\ \vec{\nabla} V(\vec{x}) \rightarrow 0 & \text{wenn } |\vec{x}| \rightarrow \infty \end{cases}$$

Durch Ersetzen von V können wir den Laplace-Operator, angewendet auf das Potential, berechnen

$$\nabla^2 V(\vec{x}) = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \left(Z \nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{x}|} \right) - \int \nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \rho(\vec{x}') d^3\vec{x}' \right)$$

Aus dem Elektromagnetismus (Siehe z.B. Jackson) kennen wir die Beziehung

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = -4\pi\delta(|\vec{x} - \vec{x}'|)$$

Deshalb ist

$$\nabla^2 V(\vec{x}) = -\frac{ze^2}{\epsilon_0} \left(Z\delta(|\vec{x}|) - \rho(\vec{x}) \right)$$

Rutherford-Streuung

Das Integral des Potentials ist deshalb gleich

$$\begin{aligned}\int d^3\vec{x}V(\vec{x})e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} &= -\frac{1}{q^2}\int d^3\vec{x}V(\vec{x})\left(\nabla^2e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}\right) \\ &= -\frac{1}{q^2}\int d^3\vec{x}e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}\left(\nabla^2V(\vec{x})\right) \\ &= \frac{ze^2}{\epsilon_0}\frac{1}{q^2}\int d^3\vec{x}e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}\left(Z\delta(|\vec{x}|)-\rho(\vec{x})\right)\end{aligned}$$

Dieses Integral besitzt zwei Teile, die wir in folgender Weise ausdrücken werden:

$$\int d^3\vec{x}V(\vec{x})e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \equiv \frac{ze^2}{\epsilon_0}\frac{1}{q^2}[Z - F(\vec{q})]$$

wobei $F(\vec{q})$ die **Fouriertransformierte der Elektronenladungsverteilung** ist:

$$F(\vec{q}) \equiv \int d^3\vec{x}e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}\rho(\vec{x})$$

Schliesslich ist der Wirkungsquerschnitt gleich

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{ze^2}{\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{1}{q^4}\right) [Z - F(\vec{q})]^2$$

wobei der Impulsübertrag gleich

$$\vec{q} \equiv \vec{p}_i - \vec{p}_f = \text{Änderung des Impulses}$$

ist. Wir können den *übertragenen Impuls \vec{q}* als Funktion des *Streuwinkels* ausdrücken:

$$\begin{aligned}
 \vec{q} &\equiv \vec{p}_i - \vec{p}_f \\
 \Rightarrow \vec{q}^2 &\equiv \vec{p}_i^2 + \vec{p}_f^2 - 2\vec{p}_i \cdot \vec{p}_f = 2p^2 - 2p^2 \cos \theta \\
 \vec{q}^2 &= 2p^2(1 - \cos \theta) = 4p^2 \sin^2(\theta/2)
 \end{aligned}$$

Es folgt, wie erwartet

$$\vec{q}^2 \rightarrow 0 \text{ wenn } \theta \rightarrow 0$$

In diesem Fall kann man die Fouriertransformierte durch die ersten Glieder ihrer Taylor-Reihe approximieren:

$$e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} \approx 1 + i\vec{q} \cdot \vec{x} + \frac{1}{2}(i\vec{q} \cdot \vec{x})^2 + \dots$$

D.h.,

$$\begin{aligned}
 Z - F(\vec{q}) &= Z - \int d^3x e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} \rho(\vec{x}) \\
 &= \underbrace{Z - \int d^3x \rho(\vec{x})}_{=0} - i \underbrace{\int d^3x (\vec{q} \cdot \vec{x}) \rho(\vec{x})}_{=0 \text{ wenn } \rho(\vec{x}) = \rho(-\vec{x})} + \frac{1}{2} \int d^3x (\vec{q} \cdot \vec{x})^2 \rho(\vec{x}) + \dots \\
 &= \frac{1}{2} \int d^3x (\vec{q} \cdot \vec{x})^2 \rho(\vec{x}) + \dots
 \end{aligned}$$

Das Ergebnis hängt von der Verteilung der Ladung ab. Im Allgemeinen gilt

$$Z - F(\vec{q}) = \frac{1}{2} q^2 \left(\int d^3x (\vec{q} \cdot \vec{x})^2 \rho(\vec{x}) \right) = \frac{q^2 I}{2}$$

wobei I dem Integral entspricht, das von der Ladungsverteilung abhängt.

D.h., für kleine Streuwinkel gilt

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\theta \rightarrow 0} &= \left(\frac{m}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{ze^2}{\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{1}{q^4}\right) [Z - F(\vec{q})]^2 \\ &\approx \left(\frac{m}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{ze^2}{\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{1}{q^4}\right) \left(\frac{q^2 I}{2}\right)^2 \\ &\approx \left(\frac{m}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{ze^2}{\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{I}{2}\right)^2 \approx \text{konst.}\end{aligned}$$

Dank der Verteilung der Elektronenwolke gibt es keine Divergenz, wenn der Streuwinkel nach null geht. Wenn der Streuwinkel nach null geht, ist der Grenzwert des Wirkungsquerschnitt gleich einer Konstanten.

Was passiert, wenn der Betrag des übertragenen Impulses q gross ist?
Wir erwarten, dass gilt

$$F(\vec{q}) \rightarrow 0 \quad \text{wenn} \quad |\vec{q}| \rightarrow \infty$$

weil die Elektronenwolke nicht in einem Punkt konzentriert ist. Die Elektronenwolke ist keine Punktladung, und deshalb wird die Fouriertransformierte Funktion verschwinden, wenn der Betrag des "Wellenvektors" q nach unendlich geht.

Für einen genügend grossen Betrag des übertragenen Impulses wird es möglich sein, $F(q)$ im Vergleich zu Z zu vernachlässigen.

In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{|\vec{q}| \rightarrow \infty} &= \left(\frac{m}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{ze^2}{\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{1}{q^4} \right) [Z - F(\vec{q})]^2 \\
 &\approx \left(\frac{m}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{zZe^2}{\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{1}{q^4} \right) \\
 &= \left(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{2m}{4p^2 \sin^2(\theta/2)} \right)^2 \\
 &= \left(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{1}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Rutherford}
 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist gleich dem der klassischen Herleitung. Vergleiche mit Kap. 1.4.1.

Der Rutherford-Wirkungsquerschnitt stellt deshalb die Born'sche Näherung dar, wenn der übertragene Impuls oder der Streuwinkel nicht zu klein ist, und wir in diesem Fall den Effekt der Elektronenwolke vernachlässigen können.

Die Klein-Gordon Gleichung

5.1 Einleitung

Die Gleichung für die Rutherford-Streuung ist ein sehr nützlicher “Ansatz”, um die Streuung von geladenen Teilchen zu studieren. Viele Aspekte sind aber nicht berücksichtigt, wie z.B.

1. relativistische Effekte
2. die Spins des Projektils und des Targets

Ein Problem ist, dass die Störungstheorie aus der Schrödinger-Gleichung hergeleitet wurde. Die Schrödinger-Gleichung ist nicht kovariant unter Lorentz-Transformationen

$$E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\vec{\nabla}^2\psi$$

Wir bemerken, dass Zeit und Raum in dieser Gleichung nicht gleichberechtigt behandelt werden, d.h., die Gleichung enthält die erste zeit-

liche Ableitung der Wellenfunktion und die zweite Ableitung bezüglich den räumlichen Koordinaten.

Diese Schrödinger-Gleichung wird deshalb als nicht angemessen betrachtet, um relativistische Prozesse zu beschreiben.

5.2 Die Klein-Gordon-Gleichung

Wir können im Prinzip die Schrödinger-Gleichung einfach erweitern. Um eine “relativistische” Schrödinger-Gleichung herzuleiten, beginnen wir mit der relativistischen Beziehung zwischen Energie und Impuls:

$$E^2 = p^2 + m^2$$

Wir vernachlässigen zuerst das Potential V und betrachten ein freies Teilchen.

Wir benutzen den kanonischen Ansatz für die Energie- und Impuls-Operatoren: (Siehe Kap. 4.1.2)

$$\vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla} \quad \text{und} \quad E \rightarrow +i\frac{\partial}{\partial t}$$

Diese Operatoren wirken auf eine Wellenfunktion $\phi(\mathbf{x},t)$:

$$E^2 = p^2 + m^2 \Rightarrow i^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = i^2 \vec{\nabla}^2 \phi + m^2 \phi$$

Die Klein-Gordon-Gleichung

oder

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 \phi = m^2 \phi$$

relativistische Schrödinger - Gleichung
"Klein - Gordon" Gleichung

Wir bemerken, dass Zeit und Raum in der Klein-Gordon-Gleichung gleichberechtigt betrachtet werden, d.h. die Gleichung enthält die zweite zeitliche und räumliche Ableitung der Wellenfunktion!

Diese Gleichung ist kovariant unter Lorentz-Transformationen. Wir können diese Kovarianz expliziter machen.

Wir definieren den **4-Gradient**

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right)$$

Wir sind an den Transformationseigenschaften des 4-Gradients interessiert:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} &= \left(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\mu} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu'}} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \Lambda^{\nu'}{}_\alpha x^\alpha \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu'}} \right) \\ &= \Lambda^{\nu'}{}_\alpha \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu'}} \right) = \Lambda^{\nu'}{}_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu'}} \right) \end{aligned}$$

Wir vergleichen diese Transformation mit der inversen Lorentz-Transofmation eines *kovarianten* 4-Vektors (Siehe Kap. 2.3.6):

$$a_\mu = \Lambda^{\nu'}{}_\mu (a_\nu)' \quad \text{Kovariant}$$

Es folgt daraus, dass der Operator

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

sich wie ein *kovarianter 4-Vektor* verhält.

Wir schreiben:

$$\boxed{\begin{cases} \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) & \text{kovariant} \\ \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) & \text{kontravariant} \end{cases}}$$

Vergleiche mit

$$x^\mu = (t, \vec{x}) \quad \text{und} \quad x_\mu = (t, -\vec{x})$$

Mit dem kanonischen Ansatz für die Energie- und Impuls-Operatoren

$$E \rightarrow +i \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{und} \quad \vec{p} \rightarrow -i \vec{\nabla}$$

können wir den **Energie-Impuls 4-Vektor-Operator** als

$$\boxed{p^\mu \rightarrow i \partial^\mu}$$

schreiben.

Wir bemerken, dass

$$\boxed{(p^\mu)^2 = m^2 = (i \partial^\mu)^2 = -\partial^\mu \partial_\mu}$$

Die Klein-Gordon-Gleichung

wobei

$$\partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 = \text{D'Alembert - Operator}$$

Die Klein-Gordon-Gleichung ist gleich

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 \phi = m^2 \phi$$

wobei $\phi = \phi(x, t)$. Wir können sie in der *explizit kovarianten Form* ausdrücken:

$$\begin{aligned} & (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi(x^\mu) = 0 \\ & \text{"Klein - Gordon" Gleichung} \\ & \text{(Kovariante Form)} \end{aligned}$$

Wir sprechen von expliziter Kovarianz, weil

1. die Ruhemasse

$$m^2 = p^\mu p_\mu$$

ein Skalar ist (sie wird als Skalarprodukt des Energie-Impuls 4-Vektors definiert, und ist deshalb eine Invariante.)

2. der Operator

$$\partial^\mu \partial_\mu$$

auch ein Skalar ist.

5.2.1 Skalares Feld

Die Klein-Gordon-Gleichung ist eine kovariante Gleichung:

$$\left(\underbrace{\partial^\mu \partial_\mu}_{\text{invariant}} + \underbrace{m^2}_{\text{invariant}} \right) \underbrace{\phi(x^\mu)}_{\substack{\text{Wellenfunktion} \\ \text{oder Feld}}} = 0$$

Die Wellenfunktion entspricht einer komplexen Zahl (*C-Zahl*) in jedem Punkt der Raumzeit, der durch den 4-Vektor x^μ bestimmt wird. D.h. die Wellenfunktion beschreibt den Zustand des Systems in jedem Punkt der Raumzeit.

Wir werden eine solche Funktion ϕ des Raumzeit 4-Vektors x^μ als **Feld** bezeichnen.

Wir können das Feld $\phi(x^\mu)$ bezüglich verschiedenen Beobachtern betrachten. Wir sind in diesem Fall an der Lorentz-Transformation des Feldes interessiert.

Das Feld kann bestimmte Transformationseigenschaften besitzen. Ein Feld, das bezüglich jedem Beobachter denselben Wert hat in jedem Punkt der Raumzeit, wird als **skalares Feld** bezeichnet:

$$\boxed{\phi'(x^{\mu'}) = \phi(x^\mu)}$$

Beispiel: das folgende Feld ist ein Skalarfeld (es ist invariant!)

$$\phi(x^\mu) = N e^{\underbrace{-ip^\mu x_\mu}_{\text{Invariante}}} = N e^{i\vec{p} \cdot \vec{x} - iEt}$$

wobei

$$E^2 = p^2 + m^2$$

Die Phase des Feldes ist gleich dem Skalarprodukt zwischen zwei 4-Vektoren. Sie ist deshalb eine Invariante. Das Feld definiert eine C-Zahl in jedem Punkt der Raumzeit. Diese Zahl ist dieselbe bezüglich jedem Inertialsystem.

5.2.2 Interpretation der Klein-Gordon-Gleichung

Die Klein-Gordon-Gleichung entspricht der Wellengleichung eines Feldes. Sie ist übereinstimmend mit der Relativitätstheorie und ist explizit kovariant.

Wir müssen jetzt verstehen, ob man diese Gleichung als Ersatz für die Schrödinger benutzen kann.

ϕ ist ein komplexes Skalarfeld. Aus der Klein-Gordon-Gleichung folgt

$$\underbrace{(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi = 0}_{\times(-i\phi^*)} \Rightarrow \underbrace{(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi^* = 0}_{\times(i\phi)}$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $-i\phi^*$ und $i\phi$, und summieren:

$$(-i\phi^* \partial^\mu \partial_\mu \phi - i\phi^* m^2 \phi) + (i\phi \partial^\mu \partial_\mu \phi^* + i\phi m^2 \phi^*) = 0$$

oder

$$(-i\phi^* \partial^\mu \partial_\mu \phi) + (i\phi \partial^\mu \partial_\mu \phi^*) = 0$$

Die Klein-Gordon Gleichung

Wir separieren die zeitliche und die räumliche Abhängigkeit:

$$-i\phi^* \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + i\phi \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial t^2} + i\phi^* \vec{\nabla}^2 \phi - i\phi \vec{\nabla}^2 \phi^* = 0$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[i \underbrace{\left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right)}_{\rho} \right] + \vec{\nabla} \left[-i \underbrace{\left(\phi^* \vec{\nabla} \phi - \phi \vec{\nabla} \phi^* \right)}_{\vec{j}} \right] = 0$$

Wir vergleichen diese Gleichung mit der *Kontinuitätsgleichung* (Siehe Kap. 4.1.4)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

und definieren

$$\rho = i \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \quad \text{und} \quad \vec{j} = -i \left(\phi^* \vec{\nabla} \phi - \phi \vec{\nabla} \phi^* \right)$$

Wir führen den **Dichte-Strom 4-Vektor** ein

$$j^\mu \equiv (\rho, \vec{j}) \quad \text{und} \quad \underbrace{\partial_\mu j^\mu}_{\text{kovariante Kontinuitätsgleichung}} = 0$$

Es gilt, (Siehe Anfang Kap. 5.2)

$$j^\mu = i \left(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^* \right)$$

Ebene Welle: (Skalarfeld)

$$\phi(x^\mu) = N e^{-ip^\mu x_\mu}$$

Wir berechnen den Dichte-Strom 4-Vektor

$$\begin{aligned} j^\mu &= i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) = i|N|^2 (e^{ipx} \partial^\mu e^{-ipx} - e^{-ipx} \partial^\mu e^{ipx}) \\ &= i|N|^2 (e^{ipx} (-ip^\mu) e^{-ipx} - e^{-ipx} (ip^\mu) e^{ipx}) \\ &= 2i|N|^2 (-ip^\mu) \\ &= 2|N|^2 p^\mu \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{cases} \text{Dichte } \rho = 2|N|^2 E \\ \text{Strom } \vec{j} = 2|N|^2 \vec{p} \end{cases}$$

Die Dichte verhält sich wie die zeitliche Komponente eines 4-Vektors, sie ist zur Energie proportional. Wir betrachten die folgende Grösse:

$$\rho d^3 \vec{x} \xrightarrow{\text{Lorentz Boost}} \rho' d^3 \vec{x}' = \gamma \rho \frac{d^3 \vec{x}}{\gamma} = \rho d^3 \vec{x}$$

d.h. das Produkt $\rho d^3 x$ ist, wie erwartet, invariant: wenn wir diese Grösse als die Wahrscheinlichkeit interpretieren, das Teilchen in einem Volumenelement $d^3 x$ zu finden, dann muss diese Invarianz gelten.

Energie-Problem: Was sind die Energie-Eigenwerte der Klein-Gordon-Gleichung?

$$E = \pm \sqrt{p^2 + m^2}$$

Es gibt zwei Arten von Lösungen:

$$E > 0 \quad \text{oder} \quad E < 0$$

Die Lösungen mit negativer Energie sind problematisch:

1. wenn Lösungen mit negativer Energie existieren, werden Übergänge des Systems zu niedriger und niedriger Energie möglich. Wie wird der **Grundzustand** definiert?
2. Wenn die Energie des Systems negativ ist, dann besitzt die Dichte auch einen negativen Wert!

$$E < 0 \Rightarrow \rho < 0 !!!$$

Wir können deshalb die Grösse ρd^3x nicht mehr als die Wahrscheinlichkeit definieren, das Teilchen in einem Volumenelement d^3x zu finden, weil sie nicht immer positive Werte besitzt.

Das Feld ϕ in der Klein-Gordon-Gleichung kann nicht als die Wellenfunktion eines einzigen Teilchens interpretiert werden!

Die Klein-Gordon-Gleichung entspricht nicht der relativistischen Erweiterung der Schrödinger-Gleichung.

6.1 Herleitung der Dirac-Gleichung

Eine ziemlich lange Zeit dachte man, dass die Klein-Gordon-Gleichung die einzige mögliche relativistische Erweiterung der Schrödinger-Gleichung sei.

Dirac (1927): Dirac bemerkte, dass die *zweite zeitliche Ableitung* der Klein-Gordon-Gleichung für die Probleme (z.B. negative Wahrscheinlichkeitsdichte) verantwortlich ist.

Eine mögliche Alternative ist eine Gleichung zu verwenden, die auch 1. Ordnung in der Zeitableitung ist (wie die Schrödinger-Gleichung), d.h.

$$\text{Ansatz: } i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H_{\text{Dirac}} \psi$$

wobei ψ die Wellenfunktion eines *einzigsten* Teilchens darstellt.

Die Kovarianz *erzwingt* eine Symmetrie der Gleichung zwischen Raum und Zeit. Der Dirac-Hamilton-Operator muss deshalb auch linear bezüglich den räumlichen Ableitungen sein:

$$\boxed{\text{Dirac - Postulat: } H_{\text{Dirac}} \equiv -i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m}$$

wobei

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad \text{und} \quad \beta$$

noch bestimmt werden müssen.

Im Fall eines freien Teilchens muss gelten

$$E^2 = p^2 + m^2$$

deshalb

$$\begin{aligned} H^2_{\text{Dirac}} \psi &= (-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m)(-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m)\psi \\ &= \left(-i \sum_i \alpha_i \partial_i + \beta m \right) \left(-i \sum_j \alpha_j \partial_j + \beta m \right) \psi \end{aligned}$$

wobei

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} \quad i = 1, 2, 3$$

Es folgt,

$$\begin{aligned}
 H^2_{Dirac} \psi &= \\
 &= \left(-\sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \partial_i \partial_j - im \sum_i (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \partial_i + \beta^2 m^2 \right) \psi \\
 &= \left(-\sum_i \alpha_i^2 \partial_i \partial_i - \sum_{i < j} (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) \partial_i \partial_j - im \sum_i (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \partial_i + \beta^2 m^2 \right) \psi
 \end{aligned}$$

Andererseits muss gelten

$$H^2_{Dirac} \psi = (\vec{p}^2 + m^2) \psi = \left(-\sum_i \partial_i \partial_i + m^2 \right) \psi$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{cases} \alpha_i^2 = 1 & \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0 \quad (i \neq j) \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 & \beta^2 = 1 \end{cases}$$

Komplexe Zahlen können diese Bedingungen nicht befriedigen! Dirac schlug vor, dass α und β Matrizen sind.

Wir können die Bedingungen schreiben als

$$\begin{aligned} \alpha_i^2 = \beta^2 = 1 &\quad \text{und} \quad \{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_j^i \\ \{\alpha_i, \beta\} &= 0 \end{aligned}$$

wobei $\{A, B\}$ der Antikommunikation $AB + BA$ entspricht.

Was sollen diese Matrizen sein?

- Der Hamilton-Operator muss reelle Eigenwerte besitzen. Es folgt daraus, dass die α und β Matrizen *hermitisch* sein müssen:

$$\alpha_i^+ = \alpha_i \quad \text{und} \quad \beta^+ = \beta$$

d.h., die adjungierte Matrix ist gleich der ursprünglichen Matrix.

- Die Eigenwerte sind gleich +1 oder -1, weil

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1$$

- Es gilt,

$$\begin{aligned}\alpha_i \beta + \beta \alpha_i &= 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_i \beta \beta = -\beta \alpha_i \beta \\ &\Rightarrow \quad \alpha_i = -\beta \alpha_i \beta\end{aligned}$$

Wir betrachten die Spur der Matrizen:

$$Tr(\alpha_i) = Tr(-\beta \alpha_i \beta) = Tr(-\beta \beta \alpha_i) = Tr(-\alpha_i)$$

weil $Tr(AB) = Tr(BA)$. Dann muss die Spur verschwinden

$$Tr(\alpha_i) = 0$$

In einer ähnlichen Weise,

$$Tr(\beta) = 0$$

D.h. die Matrizen sind spurlos.

Dirac bewies, dass die einfachste Darstellung (d.h. die Darstellung der niedrigsten Dimension) dieser Matrizen eine 4×4 Darstellung ist.

Es gibt verschiedene bekannte Darstellungen.

Pauli-Dirac Darstellung:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

wobei

$$\sigma_i = 2 \times 2 \text{ Pauli-Matrizen}$$

(Siehe Kap. 4.2.2).

Wir bemerken, dass in der Pauli-Dirac-Darstellung die β -Matrix diagonal ist.

Chirale (oder Weyl-) Darstellung:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir bemerken, dass in der Weyl-Darstellung die α -Matrizen diagonal sind.

Bemerkung: Welche Darstellung man benutzen wird, hängt von der Eigenschaft der Dirac-Gleichung ab, an der wir interessiert sind. Insbesondere ist die Diagonaleit der α oder β -Matrizen wichtig. Natürlich hängen die physikalischen Ergebnisse nicht von der gewählten Darstellung ab. In Wirklichkeit werden wir eine bestimmte Darstellung nur verwenden, wenn wir eine bestimmte Lösung der Gleichung zeigen wollen.

6.2 Dirac-Spinoren

Wir betrachten die Dirac-Gleichung:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m) \psi$$

oder

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - \beta m \right) \psi = 0 \quad \text{Dirac - Gleichung}$$

Die Wellenfunktion ist ein Kolonnen-Vektor mit 4 Elementen:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad \text{Bi-Spinor oder Dirac-Spinor}$$

Jede ψ_i ist eine komplexe Funktion.

Wir werden bald die physikalische Bedeutung der 4 Komponenten des Spinors diskutieren.

Bemerkung: Der Dirac-Spinor besitzt 4-Komponenten. Er ist aber kein 4-Vektor! Seine Transformations-Eigenschaften sind nicht gleich der eines 4-Vektors, d.h.

$$(x^\mu)' = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

6.3 Kovariante Form der Dirac-Gleichung

Wir wollen zuerst die Dirac-Gleichung in kovarianter Form ausdrücken. Wir multiplizieren die Gleichung mit β :

$$\left(i\beta \frac{\partial}{\partial t} + i\beta \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - \underbrace{\beta \beta m}_{=1} \right) \psi = 0$$

Wir definieren die **Dirac- γ -Matrizen**:

$$\gamma^0 \equiv \beta \quad \text{und} \quad \gamma^k \equiv \beta \alpha^k \quad (k = 1, 2, 3)$$

Wenn wir

$$\gamma^\mu \equiv (\beta, \beta \alpha^k)$$

schreiben, dann kann die Dirac-Gleichung ausgedrückt werden als

$$\left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^k \partial_k - m \right) \psi = 0$$

oder

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \quad \text{Dirac - Gleichung (Kovariante Form)}$$

oder

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) \psi = 0 \quad \text{Dirac - Gleichung (Kovariante Form)}$$

wobei wir den Energie-Impuls-Operator ersetzt haben.

Die Dirac-Gleichung stellt vier gekoppelte Differentialgleichungen dar, die die vier Komponenten des Spinors ψ in Beziehung setzen.

D.h.,

$$\left(i \underbrace{\quad}_{=\gamma^0} \partial_t + i \underbrace{\quad}_{=\gamma^k} \partial_k - m \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=1} \right) \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder

$$\sum_{k=1}^4 \left[\sum_{\mu} i(\gamma^{\mu})_{jk} \partial_{\mu} - m \delta_{jk} \right] \psi_k = 0 \quad (j=1,2,3,4)$$

Antikommmutationsregel: Wir werden die γ -Matrizen oft benutzen. Die explizite Form der γ -Matrizen ist nicht wichtig. Wir werden wenn möglich die Algebra der Matrizen benutzen!

Es gilt z.B. für die γ -Matrizen

$$\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} + \gamma^{\nu} \gamma^{\mu} = \{ \gamma^{\mu}, \gamma^{\nu} \} = 2g^{\mu\nu}$$

Es folgt daraus,

$$(\gamma^{\mu})^2 = (\gamma^{\mu} \gamma^{\mu}) = g^{\mu\mu}$$

d.h.,

$$(\gamma^0)^2 = 1 \quad \text{und} \quad (\gamma^k)^2 = -1 \quad (k=1,2,3)$$

Der Dagger-Operator: In den vorherigen Kapiteln haben wir die Komplex-Konjugierte oft benutzt. Nun werden wir die hermitisch

adjugierte Matrix (durch den “**Dagger-Operator**”) einführen. Sie ist definiert als die Transponierung und Komplex-Konjugation.

Z.B.

$$\begin{aligned} (\gamma^k)^+ &= (\beta \alpha^k)^+ = \alpha^k \beta \quad (\bar{\alpha}, \beta \text{ hermitisch}) \\ &= -\beta \alpha^k \quad (\text{Antikommutation}) \\ &= -\gamma^k \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} (\gamma^0)^+ &= (\beta)^+ = \beta \quad (\beta \text{ hermitisch}) \\ &= \gamma^0 \end{aligned}$$

6.4 Die adjugierte Gleichung und die Dichte

Wie im Fall der Schrödinger- und der Klein-Gordon-Gleichung wollen wir einen Stromdichte-4-Vektor definieren:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \Rightarrow \left(i\gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\gamma^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} - m\psi \right) = 0 \quad k = 1, 2, 3$$

Mit Hilfe des Dagger-Operators finden wir die adjugierte Gleichung:

$$\left(-i \frac{\partial \psi^+}{\partial t} \underbrace{(\gamma^0)^+}_{=(\gamma^0)} - i \frac{\partial \psi^+}{\partial x^k} \underbrace{(\gamma^k)^+}_{=-(\gamma^k)} - m\psi^+ \right) = 0$$

oder

$$\left(-i \frac{\partial \psi^+}{\partial t} \gamma^0 + i \frac{\partial \psi^+}{\partial x^k} \gamma^k - m \psi^+ \right) = 0$$

Die Gleichung sieht ähnlich wie die Dirac-Gleichung aus, das Vorzeichen zwischen den zeitlichen und räumlichen Ableitungen ausgenommen. Wir multiplizieren die Gleichung von rechts mit γ^0 :

$$\left(-i \frac{\partial \psi^+}{\partial t} \gamma^0 \gamma^0 + i \frac{\partial \psi^+}{\partial x^k} \underbrace{\gamma^k \gamma^0}_{-\gamma^0 \gamma^k} - m \psi^+ \gamma^0 \right) = 0$$

oder

$$\left(-i \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial t} \gamma^0 \right) \gamma^0 - i \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial x^k} \gamma^0 \right) \gamma^0 - m \psi^+ \gamma^0 \right) = 0$$

Wir führen den **adjungierten Spinor** (eine Spalte) ein:

$$\bar{\psi} \equiv \psi^+ \gamma^0 = (\dots)$$

und erhalten die adjungierte Dirac-Gleichung

$$(i \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m \bar{\psi}) = 0 \quad \text{Adjungierte Dirac - Gleichung}$$

Wir betrachten nun die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

und mit Hilfe der Dirac-Gleichung

$$\begin{cases} (i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi) = 0 \\ (i(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi}) = 0 \end{cases}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit dem adjungierten Spinor und die zweite Gleichung mit dem Spinor und summieren die beiden Terme:

$$\begin{aligned} & (i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi) + (i(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu \psi + m\bar{\psi}\psi) = 0 \\ & \Rightarrow i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + i(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu \psi = 0 \\ & \Rightarrow \partial_\mu (\bar{\psi}\gamma^\mu \psi) = 0 \end{aligned}$$

Wir definieren deshalb den **Dichtestrom-4-Vektor der Dirac-Gleichung** als

$j^\mu \equiv \bar{\psi}\gamma^\mu \psi$ *Dichtestrom-4-Vektor*

Seine zeitliche Komponente entspricht der Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\rho = j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \underbrace{\psi^+}_{=1}\underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{=1}\psi = \psi^+\psi = (\dots) \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 \psi_i^* \psi_i = \sum_{i=1}^4 |\psi_i|^2$$

und es folgt daraus,

$\rho \geq 0$!!!

d.h., die Dirac-Gleichung löst das Problem der negativen Wahrscheinlichkeitsdichte, das wir bei der Klein-Gordon angetroffen haben.

6.5 Lösungen der Dirac-Gleichung

Die Dirac-Gleichung löst das Problem der negativen Wahrscheinlichkeitsdichte. Jedoch bleiben die Lösungen mit negativen Energien:

$$E = \pm\sqrt{p^2 + m^2} \Rightarrow E > 0 \quad \text{oder} \quad E < 0$$

Wir betrachten den Spinor eines freien Teilchens:

$$\psi(x^\mu) \equiv \underbrace{u(\vec{p})}_{\substack{\text{unabhängig} \\ \text{von } x^\mu}} \underbrace{e^{-ip \cdot x}}_{x^\mu - \text{Abhängigkeit}}$$

wobei $u(p)$ ein 4-Komponenten Spinor ist.

Wir setzen den Spinor in die Dirac-Gleichung ein:

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi) &= 0 \Rightarrow (i\gamma^\mu \partial_\mu (u(\vec{p}) e^{-ip \cdot x}) - m\psi) = 0 \\ &\Rightarrow (i\gamma^\mu (-ip_\mu) \psi - m\psi) = 0 \\ &\Rightarrow (\gamma^\mu p_\mu - m)\psi = 0 \end{aligned}$$

Wir führen die “Slash”-Notation ein:

$$\not{a} \equiv \gamma^\mu a_\mu = \gamma^0 a_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{a}$$

und erhalten die sogenannte “Impuls-Darstellung” der Dirac-Gleichung:

$$(\vec{p} - m)\psi = 0$$

6.5.1 Lösung der Dirac-Gleichung

Wir versuchen zuerst die Gleichung für einen verschwindenden Impuls (d.h., das Teilchen befindet sich in Ruhe) zu lösen:

$$\vec{p} = 0 \Rightarrow \psi(\vec{p} = 0) = u(\vec{p} = 0)e^{-ip^\mu x_\mu} = u(\vec{p} = 0)e^{-iEt}$$

Die Lösung ist unabhängig von den Raumkoordinaten:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\psi) = 0 \Rightarrow (i\gamma^0 \partial_0 - m\psi) = 0$$

weil $\partial_k \psi = 0$ für $k = 1, 2, 3$

Wir benutzen die Pauli-Dirac-Darstellung

$$(i\gamma^0 \partial_0 - m\psi) = 0 \quad \text{wobei } \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

oder

$$i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_0 \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}$$

wobei wir den Spinor in zwei Komponenten geteilt haben:

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}$$

Die Dirac Gleichung

Hier ist jede der zwei Komponenten ψ_A und ψ_B des Spinors ψ ein 2-Komponenten-Vektor. Wir erhalten zwei unabhängige Gleichungen:

$$i\partial_0 \psi_A = m \psi_A \quad \text{und} \quad i\partial_0 \psi_B = -m \psi_B$$

mit den Lösungen:

$$\begin{cases} \psi_A(t) = \psi_A(0)e^{-imt} \\ \psi_B(t) = \psi_B(0)e^{+imt} \end{cases} \quad \text{Freier Spinor}$$

Wir erkennen die gewöhnliche Zeitabhängigkeit für stationäre Zustände, die wir aus der Quantenmechanik schon kennen:

$$e^{-iEt}$$

Wir interpretieren dieses Ergebnis als:

$$\begin{cases} \psi_A(t) \Rightarrow E = +m, \text{ das Teilchen ruht} \\ \psi_B(t) \Rightarrow E = -m \end{cases}$$

d.h., ψ_B stellt ein Zustand mit negativer Energie dar.

Wir suchen die Komponenten des Spinors:

$$(p - m)\psi = 0 \Rightarrow \left(\gamma^0 p^0 - \underbrace{\sum_k \gamma^k p^k}_{=0} - m \right) u(\vec{p}) e^{-iEt} = 0$$

Mit der Pauli-Dirac-Darstellung erhalten wir

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} u(\vec{p}) = m u(\vec{p}) \quad \text{wobei} \quad u(\vec{p}) = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$$

Hier sind die Komponenten u_A und u_B 2-Komponenten Kolonnenvektoren. Diese Gleichung liefert zwei unabhängige Beziehungen:

$$Eu_A = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} u_A = mu_A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} u_A$$

und

$$\begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} u_B = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} u_B$$

Zwei unabhängige Eigenvektoren der ersten Gleichung sind die folgenden:

$$u_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad u_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad E = +m$$

und in einer ähnlicher Weise

$$u_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad u_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad E = -m$$

Zusammenfassend hat die Dirac-Gleichung vier unabhängige Lösungen:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \psi^{(1)}(\vec{p}=0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} & \psi^{(2)}(\vec{p}=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} \quad \text{mit } E \geq 0 \\ \psi^{(3)}(\vec{p}=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+imt} & \psi^{(4)}(\vec{p}=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+imt} \quad \text{mit } E \leq 0 \end{array} \right.$$

Nun können wir die Lösungen für einen nicht-verschwindenden Impuls suchen:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{p}$$

Mit Hilfe der Pauli-Dirac-Darstellung erhalten wir

$$\gamma^\mu p_\mu = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -E \end{pmatrix}$$

wobei jeder der vier Terme der Matrix eine 2x2 Matrix ist.

Wir suchen deshalb eine Lösung der folgenden Art:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(\vec{p}) = \begin{pmatrix} E-m & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -E-m \end{pmatrix} u(\vec{p}) = 0$$

wobei

$$u(\vec{p}) \equiv \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$$

Es folgt,

$$\begin{pmatrix} E - m & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = 0$$

oder

$$\begin{cases} (E - m)u_A - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})u_B = 0 \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})u_A - (E + m)u_B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})u_B = (E - m)u_A \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})u_A = (E + m)u_B \end{cases}$$

Wir erhalten zwei gekoppelte Gleichungen:

$$\begin{cases} u_A = \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E - m} \right) u_B \\ u_B = \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \right) u_A \end{cases} \Rightarrow u_A = \left(\frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2}{(E - m)(E + m)} \right) u_A$$

Mit Hilfe der Darstellung der Pauli-Matrizen kann man leicht beweisen, dass gilt

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = \vec{p}^2 \quad (2 \times 2 \text{ Matrix})$$

und es folgt,

$$u_A = \left(\frac{\vec{p}^2}{(E^2 - m^2)} \right) u_A \Rightarrow (E^2 - m^2)u_A = \vec{p}^2 u_A$$

Dieses Ergebnis wird erwartet, weil für eine Lösung der Dirac-Gleichung gelten muss

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2$$

Wir suchen nun die allgemeinen Lösungen. Wir bemerken, dass gilt

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} = p_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + p_y \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + p_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}$$

Wir versuchen:

$$\begin{cases} u_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_B = \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{E+m} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} \\ u_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_B = \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{E+m} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix} \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} u_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_A = \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E-m} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{E-m} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} \\ u_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_A = \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E-m} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{E-m} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix} \end{cases}$$

Wegen der inversen $E+m$ Abhängigkeit der ersten zwei Lösungen, entsprechen diese Lösungen der positiven Energie. Die zwei letzten stellen die Lösungen negativer Energie dar.

Schliesslich haben wir die folgenden vier unabhängigen Lösungen gefunden:

$$\boxed{\begin{aligned} u^{(1)} &= N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix} & u^{(2)} &= N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} & \text{mit } E \geq 0 \\ u^{(3)} &= N \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & u^{(4)} &= N \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E-m} \\ \frac{-p_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{mit } E \leq 0 \end{aligned}}$$

wobei N der Normierung entspricht.

6.5.2 Der adjungierte Spinor

Wir definieren den **adjungierten Spinoren**

$$\bar{u} \equiv u^+ \gamma^0$$

wobei

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \Rightarrow u^+ = (u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*)$$

Zum Vergleich

$$\bar{\psi} \equiv \psi^+ \gamma^0 \quad \text{wobei} \quad (i \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m \bar{\psi}) = 0$$

Es gilt,

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu p_\mu - m) u &= 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^\mu p_\mu u = mu \\ \Rightarrow u^+ (\gamma^\mu)^+ p_\mu &= mu^+ \quad \Rightarrow \quad u^+ (\gamma^\mu)^+ \gamma^0 p_\mu = mu^+ \gamma^0 \end{aligned}$$

Weil

$$(\gamma^\mu)^+ \gamma^0 = \begin{cases} (\gamma^0)^+ \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^0 \\ (\gamma^k)^+ \gamma^0 = -\gamma^k \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^k \end{cases} \Rightarrow (\gamma^\mu)^+ = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$$

es gilt

$$\underbrace{u^+ \gamma^0}_{\bar{u}} \gamma^\mu \underbrace{\gamma^0 \gamma^0}_{=1} p_\mu = mu^+ \gamma^0$$

oder

$\bar{u}(p - m) = 0 \quad \text{adjungierte Gleichung}$

6.5.3 Normierung

Es ist praktisch die Spinoren zu normieren. Wir benutzen die Normierung, bei der gilt

$u^+ u = 2|E|$

Dieses Produkt ist gleich

$$u^+ u = |u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2 + |u_4|^2 = \sum_i |u_i|^2$$

Man kann beweisen, dass in diesem Fall gilt

$$N = \sqrt{|E| + m} \quad \text{Normierung der Dirac-Spinoren}$$

6.5.4 Orthogonalität

Wir können leicht verifizieren, dass die Lösungen zueinander orthogonal sind:

$$u^{(r)+} u^{(s)} = 0 \quad \text{wenn } r \neq s$$

Mit der Normierung

$$N = \sqrt{|E| + m}$$

erhalten wir

$$u^{(r)+} u^{(r)} = 2|E|$$

Zusammenfassend kann die Orthogonalitätsbeziehung ausgedrückt werden als

$$u^{(r)+} u^{(s)} = 2|E|\delta_{r,s} \quad r,s = 1,2,3,4$$

6.6 Die Helizität eines Dirac-Teilchens

Wir bemerken, dass die Lösungen der Dirac-Gleichung für jede Energie zweifach entwartet sind. Wir beweisen, dass die Interpretation dieses Freiheitsgrads einem Spin-1/2 entspricht.

Wir beginnen mit dem Drehimpuls (Siehe Kap. 4.2.1)

$$\vec{L} \equiv \vec{x} \times \vec{p} = -i\vec{x} \times \vec{\nabla}$$

Wir bemerken, dass der Drehimpuls nicht mit dem Dirac-Hamilton-Operator kommutiert:

$$\begin{aligned} [\vec{L}, H_{Dirac}] &= [\vec{x} \times \vec{p}, (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)] \\ &= [\vec{x} \times \vec{p}, \vec{\alpha} \cdot \vec{p}] \\ &= ([\vec{x}, \vec{\alpha} \cdot \vec{p}]) \times \vec{p} \\ &= (\vec{\alpha} \cdot [\vec{x}, \vec{p}]) \times \vec{p} = i\vec{\alpha} \times \vec{p} \end{aligned}$$

d.h., der Drehimpuls des Systems nicht erhalten ist!

Wir definieren einen Operator Σ als Erweiterung der Pauli-Spin-Operatoren für Spin-1/2:

$$\boxed{\vec{\Sigma} - Operator: \quad \vec{\Sigma} \equiv \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}}$$

wobei σ die 2×2 Pauli-Matrizen sind.

Man kann leicht beweisen, dass gilt

$$\boxed{[\vec{\Sigma}, H_{Dirac}] = -2i(\vec{\alpha} \times \vec{p})}$$

Es folgt daraus, dass der Operator \mathbf{J}

$$\vec{J} \equiv \vec{L} + \frac{1}{2} \vec{\Sigma}$$

eine erhaltene Grösse ist:

$$[\vec{J}, H_{Dirac}] = \left[\vec{L} + \frac{1}{2} \vec{\Sigma}, H_{Dirac} \right] = 0$$

Wir schliessen daraus, dass die Dirac-Gleichung ein Teilchen mit einem Spin-1/2 beschreibt.

Wir definieren den **Helizitätsoperator**:

$$\text{Helizität: } h \equiv \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} & 0 \\ 0 & \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \end{pmatrix}$$

Dieser Operator entspricht der **Projektion des Spins auf den Impuls** des Teilchens. Es gilt,

$$\begin{aligned} [\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}, H_{Dirac}] &= [\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}, (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)] \\ &= [\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}, \vec{\alpha} \cdot \vec{p}] = 0 \quad \text{weil } [\vec{\Sigma}, \vec{\alpha}] = 0 \end{aligned}$$

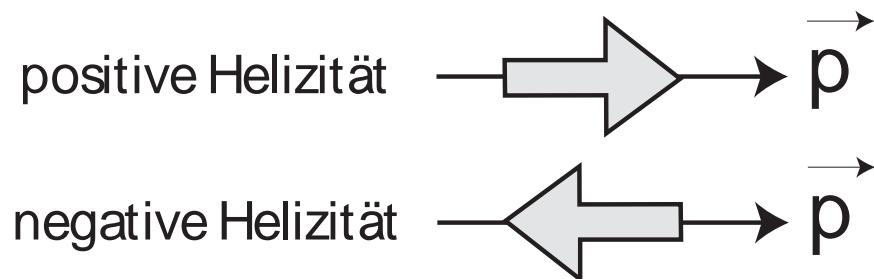
Die Helizität ist deshalb eine gute Quantenzahl.

Die Eigenwerte des Helizitätsoperators sind, wie im Fall der Pauli- σ Matrizen, +1 oder -1:

$$\text{Helizitätseigenwerte: } h = \pm 1$$

Wenn $h=1$, ist der Spin zum Impuls parallel. Wenn $h=-1$, ist der Spin zum Impuls antiparallel. Man spricht von *positiver und negativer Helizität*.

Siehe Abb. 1.



Figur 1. Die positive und negative Helizität eines Teilchens.

Bemerkung: Wir können a priori versuchen, die Spinoren mit Spineigenzuständen zu identifizieren. Zum Beispiel:

$$u^{(1)} \xleftrightarrow{?} \text{Teilchen mit Spin-''up''} \left| \uparrow \right\rangle$$

$$u^{(2)} \xleftrightarrow{?} \text{Teilchen mit Spin-''down''} \left| \downarrow \right\rangle$$

Das ist unmöglich, weil gilt

$$\left[\vec{\Sigma}, H_{Dirac} \right] \neq 0$$

und deshalb können die Lösungen $u^{(i)}$ keine Eigenzustände des Spins sein.

In den Übungen wird gezeigt, wie man *Eigenzustände der Helizität* konstruieren kann. Diese Eigenzustände sind verschieden von den Spinoren $u^{(1)}, \dots, u^{(4)}$, die wir hier eingeführt haben.

In der Praxis werden wir oft mit den Spinoren $u^{(1)}, \dots, u^{(4)}$ arbeiten, obwohl ihre Spin-Interpretation nicht ganz direkt ist. Was uns interessiert, ist dass die Spinoren $u^{(1)}, \dots, u^{(4)}$ eine vollständige Lösung darstellen.

Im Fall, dass der Impuls in die z -Richtung zeigt, kann man die Spinoren mit Spineigenzuständen identifizieren. Es gilt,

$$\vec{p} = (0, 0, p) \Rightarrow u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die dritte Komponente des Σ -Operators:

$$\Sigma_3 u^{(1)} = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} = u^{(1)} !!$$

In ähnlicher Weise können wir für die anderen Spinoren beweisen, dass die Spinoren $u^{(1)}, \dots, u^{(4)}$ Eigenzustände des Spins sind:

$$\vec{p} = (0, 0, p) \Rightarrow \begin{cases} u^{(1)}, u^{(3)} & \text{Spin-}"up" \quad |\uparrow\rangle \\ u^{(2)}, u^{(4)} & \text{Spin-}"down" \quad |\downarrow\rangle \end{cases}$$

Die Dirac Gleichung

Die Entdeckung der Antimaterie

7.1 Das Dirac-Teilchen und die “Loch”-Theorie

Wegen seiner Matrizenform, beschreibt die Dirac-Gleichung ein Teilchen mit Spin-1/2. Die Wellenfunktion ist ein Spinor mit 4 Freiheitsgraden.

1. Zwei Freiheitsgrade stellen die “Spin-up” und “Spin-down” Freiheitsgrade eines Spin-1/2 Teilchens dar.
2. Die anderen zwei Freiheitsgrade entsprechen den zwei Arten von Lösungen: die Lösungen mit positiven und negativen Energien.

Ein natürlicher Kandidat für das Dirac-Teilchen ist das *Elektron*. Dirac schlug vor, dass seine Gleichung ein Elektron beschreibt.

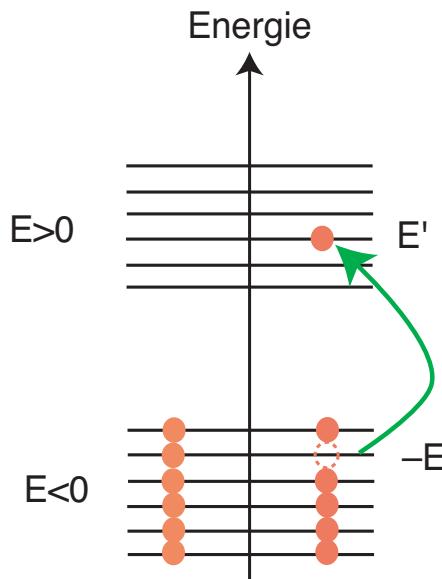
Es fehlte noch eine Interpretation für die Elektronen mit negativen Energien¹. Dirac löste das Problem mit Hilfe des **Ausschliessungsprinzips von Pauli**. Dirac postulierte die Existenz eines unendlichen

Sees im Vakuum, der mit Elektronen mit negativen Energien gefüllt ist.

Es folgt daraus, dass alle Zustände mit negativen Energien besetzt sind. Elektronen mit positiver Energie können nicht in Zustände mit negativen Energien fallen.

Loch-Theorie: Dirac betrachtete den Fall, in dem ein Elektron mit negativer Energie $-E < 0$ in einen Zustand positiver Energie $E' > 0$ angeregt wird.

Siehe Abb. 1.



Figur 1. Die Loch-Theorie. Ein Elektron mit negativer Energie wird in einen Zustand mit positiver Energie angeregt.

-
1. Die Dirac-Gleichung löst das Problem der negativen Dichte. Dass beide Arten von Lösungen betrachtet werden müssen, ist eine Folgerung der relativistischen Beziehung zwischen Energie und Impuls.

Als Folge der Anregung des Elektrons bleibt ein “Loch” im See.

Die Abwesenheit des negativ geladenen Elektrons mit negativer Energie ($E < 0$) wird als Anwesenheit eines positiv geladenen “Antielektrons” mit positiver Energie $E > 0$ interpretiert!

Die Loch-Theorie sagt die Existenz eines Teilchens voraus, das dieselbe Ruhemasse wie das Elektron besitzt, aber mit einer positiven Ladung.

Die Anregung eines Elektrons vom See stellt deshalb die Erzeugung eines Elektrons und Antielektrons dar:

$$e^-(E') + e^+(E)$$

7.2 Die Entdeckung des Positrons

Die Dirac-Theorie sagt voraus, dass beide, das Elektron und das Antielektron (das **Positron**), existieren müssten.

C.D. Anderson (1933): die “gewöhnliche” Materie enthält Elektronen, Protonen und Neutronen. Anderson suchte nach neuen Teilchen, die nicht in der gewöhnlichen Materie enthalten sind.

Er war an den höchsten Energien, die man beobachten konnte, interessiert. Die höchsten Energien wurden in **kosmischen Strahlen**² beobachtet.

Anderson (mit Millikan) benutzte eine Blasenkammer (“Cloud chamber”). In dieser Kammer erzeugt übersättigter (“supersaturated”)

2. Die kosmischen Strahlen wurden von Viktor Hess mit Beobachtungen in Ballonen entdeckt.

Dampf kleine Bläschen entlang der Ionisierung eines geladenen Teilchens. Die Bläschen werden photographiert.

Der *Impuls* eines Teilchens wird mit Hilfe eines magnetischen Feldes gemessen, und die *Ladung* des Teilchen wird durch das Vorzeichen der Krümmung gewonnen.

Die Richtung des Teilchens wird mit Hilfe einer 6mm dicken Bleiplatte gefunden.

Mit einer solchen Anordnung gelang es Anderson durch Beobachtung von 1300 Fotografien Spuren positiv geladener Teilchen zu entdecken, die nicht als Protonen interpretiert werden konnten.

Teilchenidentifikation (“particle identification”): Durch die Messung der Reichweite (“Range”) und des Energieverlusts (“Energy loss”) konnte Anderson schliessen, dass es Spuren von positiven Elektronen (d.h. Positronen) waren.

Stückelberg (1941) und Feynman (1948): neue Vorschrift, zur Behandlung von Zuständen mit negativen Energien:

Ein Zustand mit negativer Energie beschreibt ein Teilchen, das sich rückwärts in der Zeit ausbreitet

$$e^{-i(-E)(+t)} = e^{-i(+E)(-t)}$$

Die Bewegung eines *negativ geladenen Teilchens*, das *sich rückwärts in der Zeit ausbreitet*, ist gleich der Bewegung eines *positiv geladenen Teilchens*, das *sich vorwärts in der Zeit ausbreitet*.

Wir können z.B. den Strom-4-Vektor der Klein-Gordon Gleichung betrachten:

für ein Elektron:

$$\begin{aligned} j^\mu(e^-) &= (-e) \left(i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \right) \\ &= -2e|N|^2(E, \vec{p}) \end{aligned}$$

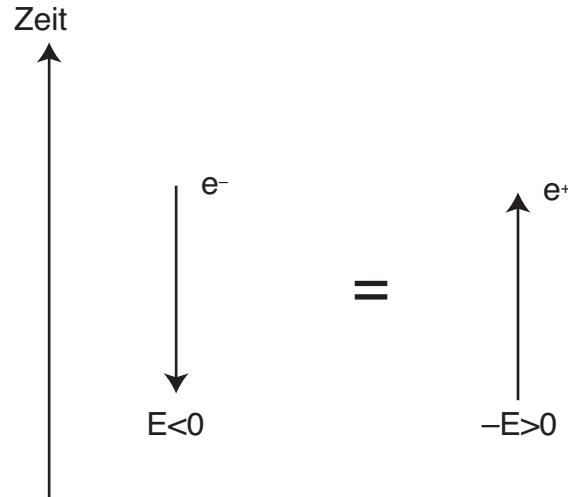
für ein Positron:

$$\begin{aligned} j^\mu(e^+) &= (+e) \left(i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \right) \\ &= +2e|N|^2(E, \vec{p}) = -2e|N|^2(-E, -\vec{p}) \end{aligned}$$

Es folgt,

$$j^\mu(e^+, E, \vec{p}) = j^\mu(e^\pm, -E, -\vec{p})$$

Siehe Abb. 2.



Figur 2. Die Beziehung zwischen Teilchen und Antiteilchen.

Bemerkung: die Zeit ist keine kovariante Grösse. Verschiedene Beobachter messen verschiedene Zeiten. Als Folgerung daraus wird eine kovariante Theorie immer Teilchen enthalten, die sich vorwärts und rückwärts in der Zeit ausbreiten werden. Eine kovariante Theorie wird deshalb immer Teilchen und Antiteilchen enthalten. Unter dieser Annahme kann die Existenz von Antimaterie als eine Folgerung der Prinzipien der Relativität betrachtet werden.

7.3 Dirac-Spinoren für Antiteilchen

Wir haben die freien Spinoren $u^{(1)}, \dots, u^{(4)}$ hergeleitet. Die Spinoren hängen von der Energie und vom Impuls ab.

Wie können wir die Zustände mit negativer Energie als Positron interpretieren?

Ein Spinor mit negativer Energie wird als Zustand eines Antiteilchens mit positiver Energie interpretiert.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Positron } e^+ \\ E > 0, \vec{p} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Elektron } e^- \\ -E, -\vec{p} \end{array} \right\}$$

Wir definieren danach den Zustand eines Positrons als

$$v^{(1,2)}(\vec{p}) \Leftrightarrow u^{(4,3)}(-\vec{p})$$

d.h.,

$$v^{(1)}(E, \vec{p}) \equiv u^{(4)}(-E, -\vec{p}) = N \begin{pmatrix} -(p_x - ip_y) \\ -E - m \\ p_z \\ -E - m \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ E + m \\ -p_z \\ E + m \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $E \geq 0$

und in ähnlicher Weise

$$v^{(2)}(E, \vec{p}) \equiv -u^{(3)}(-E, -\vec{p}) = -N \begin{pmatrix} -p_z \\ -E - m \\ -(p_x + ip_y) \\ -E - m \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -N \begin{pmatrix} p_z \\ E + m \\ p_x + ip_y \\ E + m \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $E \geq 0$

Wir bemerken, dass wir die folgenden Spinoren assoziiert haben:

$$\begin{aligned} v^{(1)} &\Leftrightarrow u^{(4)} & \text{d.h., f\"ur } p_x = p_y = 0 & \text{"spin-down"} \\ v^{(2)} &\Leftrightarrow u^{(3)} & & \text{"spin-up"} \end{aligned}$$

d.h., wir \"andern den Impuls und den Spin des Teilchens. Als Folge wird die Helizit\"at des Teilchens erhalten:

$$p^\mu \Leftrightarrow -p^\mu, \text{ und } \Sigma \Leftrightarrow -\Sigma \text{ aber } h \Leftrightarrow h$$

Die Dirac-Gleichung für die $v^{(1)}, v^{(2)}$ Spinoren ist die folgende:

$$\left(\gamma^\mu (-p)_\mu - m \right) u(-\vec{p}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (\gamma^\mu p_\mu - m) u = 0 \\ (\gamma^\mu p_\mu + m) v = 0 \end{cases}$$

Der adjungierte Spinor:

$$\begin{cases} (p - m) u = 0 \\ (p + m) v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{u}(p - m) = 0 \\ \bar{v}(p + m) = 0 \end{cases}$$

Die Normierung:

$$\begin{cases} \bar{u}^{(r)} u^{(s)} = 2m\delta_{r,s} & (u^{+(r)} u^{(s)} = 2E\delta_{r,s}) \\ \bar{v}^{(r)} v^{(s)} = -2m\delta_{r,s} \end{cases}$$

Von jetzt an werden wir die folgenden Spinoren benutzen:

$$\begin{array}{l} u^{(1)}(E, \vec{p}), u^{(2)}(E, \vec{p}) \Rightarrow e^- \\ v^{(1)}(E, \vec{p}), v^{(2)}(E, \vec{p}) \Rightarrow e^+ \end{array}$$

wobei die Energie immer positiv ist.

7.4 Lorentz-Transformationen und bilineare Kovarianten

7.4.1 Lorentz-Transformation des Spinors

Wir betrachten einen Spinor. Obwohl er vier Komponenten besitzt, ist der Spinor kein 4-Vektor. Die Transformation eines Spinors wird so geschrieben:

$$\underbrace{\psi'}_{\text{bezüglich Beobachter } O'} \equiv S\psi$$

wobei S eine 4×4 Matrix ist. In Björken & Drell wird bewiesen, dass, im Fall dass *der Beobachter O' sich relativ zum Beobachter O mit einer Geschwindigkeit β in x -Richtung bewegt, die S -Matrix gleich*

$$S = \begin{pmatrix} a_+ & a_- \sigma_1 \\ a_- \sigma_1 & a_+ \end{pmatrix} \quad \text{wobei } a_\pm = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\gamma \pm 1)}$$

ist, wobei γ der Lorentz-Faktor ist.

Wir betrachten die folgende Grösse:

$$\psi^+ \psi = \sum_{i=1}^4 |\psi_i|^2$$

Bezüglich O' gilt

$$(\psi^+ \psi)' = (\psi^+)' (\psi)' = \psi^+ S^+ S \psi$$

Mit Hilfe der Definition von S können wir das Produkt S^+S berechnen:

$$S^+S = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta\sigma_1 \\ -\beta\sigma_1 & 1 \end{pmatrix} \neq 1$$

d.h., das Produkt wird unter der Lorentz-Transformation nicht erhalten.

Wir betrachten nun das Produkt

$$\bar{\psi}\psi = \psi^+\gamma^0\psi = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 - |\psi_3|^2 - |\psi_4|^2$$

Die Transformation der Grösse ist

$$(\bar{\psi}\psi)' = (\psi^+)' \gamma^0 (\psi)' = \psi^+ S^+ \gamma^0 S \psi$$

Man kann mit Hilfe der Definition der Matrizen einfach beweisen, dass

$$S^+ \gamma^0 S = \gamma^0$$

Es folgt daraus, dass wir eine skalare Grösse gefunden haben:

$$(\bar{\psi}\psi)' = \psi^+ S^+ \gamma^0 S \psi = \psi^+ \gamma^0 \psi = \bar{\psi}\psi$$

7.4.2 Raumspiegelung (Parität) des Spinors

Die Raumspiegelung (Parität) wurde definiert als

$$\begin{cases} x^{0'} = x^0 \\ x^{i'} = -x^i \quad i=1,2,3 \end{cases}$$

Man kann beweisen, dass die Raumspiegelung auf einen Spinor so wirkt:

$\psi' = P\psi = \gamma^0\psi \quad \text{Raumspiegelung}$

Es folgt daraus,

$$(\bar{\psi}\psi)' = \psi^{+}'\gamma^0\psi' = (\psi^{+}\gamma^0)\gamma^0(\gamma^0\psi) = \psi^{+}\gamma^0\psi = \bar{\psi}\psi$$

d.h.,

$\bar{\psi}\psi$ ist eine Invariante der Parität $\Rightarrow \bar{\psi}\psi$ Skalar

7.4.3 Skalar und Pseudoskalar

Wir führen eine neue γ -Matrix ein:

$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

Die Algebra dieser Matrix ist die folgende:

$\gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0 \quad \text{Antikommutation}$
 $(\gamma^5)^+ = \gamma^5 \quad (\gamma^5)^2 = 1$

In der Pauli-Dirac Darstellung ist die Matrix gleich

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pseudoskalar: Wir definieren nun die folgende Grösse (eine C-Zahl)

$\bar{\psi} \gamma^5 \psi$

Das Produkt ist invariant unter der Lorentz-Transformation.

Unter der Parität gilt

$$\begin{aligned} P(\bar{\psi} \gamma^5 \psi) &= \psi^{+'} \gamma^0 \gamma^5 \psi' = \psi^+ \gamma^0 \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 \psi \\ &= \psi^+ \gamma^5 \gamma^0 \psi = -\psi^+ \gamma^0 \gamma^5 \psi = -(\bar{\psi} \gamma^5 \psi) \end{aligned}$$

Das Produkt wird deshalb als Pseudoskalar bezeichnet, weil sich sein Vorzeichen unter der Parität ändert.

7.4.4 Bilineare Kovarianten

Wir können das Produkt von Spinoren mit einer allgemeinen 4×4 Γ -Matrix betrachten:

$\bar{\psi} \underbrace{\Gamma}_{(4 \times 4 \text{ Matrix})} \psi$

Die 4×4 Γ -Matrix besitzt 16 unabhängige Komponenten. Wir können eine beliebige 4×4 Matrix als Funktion von 16 linear unabhängigen Matrizen ausdrücken. Ein solche Basis für die Matrix kann die folgende sein:

$$1, \underbrace{\gamma^\mu}_{4 \text{ Matrizen}}, \gamma^5, \underbrace{\gamma^\mu \gamma^5}_{4 \text{ Matrizen}}, + 6 \text{ Matrizen}$$

Die letzten 6-Matrizen werden durch den antisymmetrischen Tensor $\sigma^{\mu\nu}$ ausgedrückt

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$$

Es gibt 6 unabhängige Matrizen, die nicht verschwinden:

$$\sigma^{01}, \sigma^{02}, \sigma^{03}, \sigma^{12}, \sigma^{13}, \sigma^{23}$$

Wir können deshalb 16 sogenannte **bilineare Kovarianten** bilden:

<i>Skalar</i>	$\bar{\psi}\psi$	1
<i>Pseudoskalar</i>	$\bar{\psi}\gamma^5\psi$	1
<i>Vektor</i>	$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	4
<i>Pseudovektor</i>	$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$	4
<i>Tensor</i>	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	6

Das ist alles. Jede beliebige Grösse der Form

$$\bar{\psi} \underbrace{\Gamma}_{(4 \times 4 \text{ Matrix})} \psi$$

kann als Linearkombination dieser “bilinearen Kovarianten” ausgedrückt werden.

7.4.5 Ladungsspiegelung

Diese Operation transformiert den Spinor eines Teilchens in den Spinor des Antiteilchens. Es gilt,

$$\psi_C \equiv C\psi = i\gamma^2\psi^*$$

Es gilt,

$$Cu^{(1)} = v^{(1)} \quad und \quad Cu^{(2)} = v^{(2)}$$

Der Lagrange-Formalismus

8.1 Euler-Lagrange-Gleichung

In der Quantenmechanik benutzt man oft den Hamilton-Operator, um ein System zu beschreiben. Es ist aber auch möglich den Lagrange-Formalismus zu verwenden.

In der klassischen Mechanik kann das grundlegende Gesetz mit Hilfe des Lagrange-Formalismus ausgedrückt werden:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow m \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla}V$$

Die Lagrange-Funktion wird definiert als

$$L \equiv \underbrace{T}_{\substack{\text{kinetische} \\ \text{Energie}}} - \underbrace{V}_{\substack{\text{potentielle} \\ \text{Energie}}} \equiv L(q_i, \frac{dq_i}{dt}) \quad i = 1, \dots, n$$

wobei q_i die **verallgemeinerten Koordinaten** sind und dq_i/dt deren zeitliche Ableitungen.

Das Prinzip der kleinsten Wirkung: das System breitet sich zwischen der Zeit t_1 und t_2 entlang eines Weges aus, entlang welchem die Wirkung S minimal wird

$$\delta S = 0$$

wobei die Wirkung als

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

definiert wird.

Diese Bedingung führt zur **Euler-Lagrange-Gleichung**:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dq_i}{dt} \right)} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

8.2 Lagrange-Funktion in der relativistischen Feldtheorie

Wir sind an der Bewegungsgleichung von Feldern interessiert. Ein Feld beschreibt ein kontinuierliches System mit unendlich vielen Freiheitsgraden, z.B. die Auslenkung einer klassischen Saite.

Das System wird durch das Feld ϕ beschrieben, das eine Funktion des Ortsvektors und der Zeit ist:

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi(x^\mu)$$

Das Feld besitzt unendlichviele Freiheitsgrade, die mit Hilfe des Ortsvektors \mathbf{x} indiziert werden. D.h., wir ersetzen die diskreten Koordinaten q_i und deren zeitlichen Ableitungen durch die kontinuierlichen Funktionen $\phi(x^\mu)$ und $\partial_\mu \phi(x^\mu)$

$q_i \rightarrow \phi(x^\mu)$
$\frac{dq_i}{dt} \rightarrow \partial_\mu \phi(x) \quad \mu = 0, 1, 2, 3$

(Beachte, dass wir nicht nur die zeitliche Ableitung des Feldes, sondern die vier unabhängigen Ableitungen ∂_μ betrachten).

Wir führen die **Lagrange-Dichte \mathcal{L}** ein als eine Funktion des Feldes und dessen Ableitungen:

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$$

Die Wirkung wird

$$S \equiv \int L dt = \int dt \int d^3 \vec{x} \mathcal{L} = \int d^4 x \mathcal{L}$$

wobei wir bemerken, dass der letzte Term als ein “kovariantes” Integral ausgedrückt wird.

Weil das 4-dimensionale Volumenelement d^4x eine Invariante der Lorentz-Transformation ist, suchen wir eine Lagrange-Dichte, die auch eine Invariante ist. Es gilt, dass

die Invarianz der Lagrange-Dichte eine hinreichende Bedingung für die Kovarianz der Theorie ist.

(Andere Symmetrien können auch in die Lagrange-Funktion eingebaut werden, wie z.B. eine Eichinvarianz.)

Das Prinzip der kleinsten Wirkung sagt voraus:

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \\ &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\phi) \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \delta(\phi) \right\} \end{aligned}$$

wobei das 4-dimensionale Integral über ein **Raumzeitvolumen Ω** läuft. Wir bemerken, dass

$$\int_{\Omega} d^4x \partial_\mu (\dots) = \int_{\partial\Omega} d^3x (\dots)$$

wobei **$\partial\Omega$ die Raumzeitfläche** ist, die das Raumzeitvolumen Ω umschliesst. Wir nehmen an, dass das Feld bestimmte “Randbedingungen” über die **Raumzeitfläche $\partial\Omega$** erfüllt, so dass

$$\delta(\phi)|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{über die Raumzeitfläche } \partial\Omega$$

Es folgt daraus, dass für eine beliebige Änderung des Feldes $\delta\phi$ gilt

$$\int d^4x \delta\phi \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \right\} = 0$$

oder

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0 \quad \text{relativistische Euler-Lagrange-Gleichung}$$

Im Allgemeinen kann man mehr als ein Feld betrachten. Wenn wir n Felder ϕ_i betrachten, wird die Lagrange-Funktion so ausgedrückt

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) \quad i = 1, \dots, n$$

und wir erhalten n Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) = 0$$

8.3 Lagrange-Funktion des skalaren Klein-Gordon Felds

Wir betrachten ein einziges *skalares* Feld

$$\phi(x^\mu) = \phi(x^0, \vec{x})$$

Wir suchen eine invariante Lagrange-Funktion, die eine Funktion des Feldes und dessen Ableitungen ist:

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$$

Wir schreiben als Ansatz:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{KG} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2\end{aligned}$$

Wir berechnen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\frac{1}{2}m^2 2\phi = -m^2\phi$$

und

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi)} \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 = \partial^\mu \phi \quad !$$

Beachte die Lage des Index. Der Beweis ist der folgende: wir betrachten die verschiedenen μ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_0 \phi)} \frac{1}{2}[(\partial_0 \phi)(\partial_0 \phi) - \dots] = \partial_0 \phi = \partial^0 \phi$$

und

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_1 \phi)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_1 \phi)} \frac{1}{2}[(\partial_0 \phi)(\partial_0 \phi) - (\partial_1 \phi)(\partial_1 \phi) - \dots] = -\partial_1 \phi = \partial^1 \phi$$

usw...

Wegen der Euler-Lagrange-Gleichung gilt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \Rightarrow -m^2 \phi = \partial_\mu (\partial^\mu \phi) \text{ ok!}$$

8.4 Lagrange-Funktion der Dirac-Gleichung

Wir betrachten ein Spinorfeld ψ und die folgende Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}_{Dirac} \equiv i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi$$

Die beiden Spinoren ψ und $\bar{\psi}$ werden als zwei unabhängige Felder betrachtet, d.h. wir benutzen zweimal die Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi \Rightarrow i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0 \text{ ok!}$$

und

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -m\bar{\psi} \Rightarrow i\partial_\mu (\bar{\psi}\gamma^\mu) - m\psi = 0 \text{ ok!}$$

8.5 Invarianzeigenschaft der Lagrange-Funktion

Wir erinnern uns an das **Theorem von Nöther** (Emmy Nöther, 1917):

Wenn die Lagrange-Funktion invariant ist unter einer kontinuierlichen Transformationgruppe, dann gibt es einen erhaltenen Strom des Feldes.

Man spricht von Invarianz der Lagrange-Funktion unter der Gruppe.

Die Invarianzeigenschaften der Lagrange-Funktion einer Theorie sind fundamental.

Wir betrachten als Beispiel die Invarianz unter Translation. Bei einer infinitesimalen Translation ändert sich der Raumzeitvektor so

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta a^\mu$$

Die Änderung der Lagrange-Funktion ist gleich

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi)$$

Wir bemerken, dass wir nur die Änderung des Feldes betrachten, weil wir annehmen, dass die Lagrange-Funktion nicht explizit von x^μ abhängt.

Es gilt

$$\delta \phi = (\partial_\nu \phi) \delta a^\nu = \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \delta a^\nu \quad \text{und} \quad \delta (\partial_\mu \phi) = \partial_\mu (\delta \phi)$$

Aus der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right)$$

folgt

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\delta\phi) \\ &= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) \right) \delta a^\nu\end{aligned}$$

Wir können die Änderung der Lagrange-Funktion auch bezüglich der Raumzeitkoordinaten ausdrücken:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta a^\mu = (\partial_\mu \mathcal{L}) \delta a^\nu \delta_\nu^\mu$$

Wenn wir die zwei Gleichungen vergleichen, erhalten wir

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) \delta a^\nu = 0$$

d.h., wir haben einen erhaltenen Strom gefunden:

$$\partial_\mu T_\nu^\mu = 0 \text{ wobei } T_\nu^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}$$

wobei **T** der **Energie-Impuls-Tensor des Feldes** ist.

Energie des Feldes: Die T_0^0 Komponente entspricht der Hamilton-Dichte \mathcal{H} :

$$\mathcal{H} \equiv T_0^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} (\partial_0 \phi) - \mathcal{L}$$

Der Hamilton-Operator ist gleich

$$H = \int d^3\vec{x} \mathcal{H} = \int d^3\vec{x} T_0^0$$

Wenn wir diese Gleichungen mit dem klassischen Analog vergleichen,

$$H(p,q) = p \frac{dq}{dt} - L$$

können wir die kanonische **Impuls-Dichte des Feldes** definieren

$$\boxed{\Pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)}}$$

Mit dieser Definition gilt

$$T_0^0 = \Pi(\partial_0 \phi) - \mathcal{L}$$

Impuls des Feldes: Die T_i^0 Komponenten entsprechen dem vom Feld getragenen Impuls:

$$\begin{aligned} P_i &\equiv \int d^3\vec{x} T_i^0 = \int d^3\vec{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \phi)} (\partial_i \phi) \quad i = 1, 2, 3 \\ &= \int d^3\vec{x} \Pi(\partial_i \phi) \end{aligned}$$

Die Elektrodynamik und das Photon

Wir sind an der Beschreibung der Wechselwirkung zwischen Elektronen, Positronen und dem Photon interessiert. Wir beginnen mit der “klassischen” Theorie des Elektromagnetismus.

9.1 Klassische Maxwellsche Theorie

Die Maxwellsche Theorie kann als eine ***klassische Feldtheorie*** dargestellt werden, die mit der Relativitätstheorie übereinstimmt.

Wir verwenden die Heavyside-Lorentz Einheiten, für die gilt

$$c = \epsilon_0 = \mu_0 = 1$$

Die Maxwellschen Gleichungen sind die folgenden:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho & \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J} & \text{inhomogene} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 & \text{homogene} \end{cases}$$

wobei \vec{E}, \vec{B} die elektrischen und magnetischen Felder sind, und ρ, \vec{J} die elektrische Ladungsdichte und die Stromdichte.

Wir definieren das (kontravariante) **elektromagnetische 4-Potential**

$$A^\mu \equiv (\phi, \vec{A})$$

wobei die Felder ϕ und \vec{A} folgendermassen mit \vec{E}, \vec{B} zusammenhängen:

$$\vec{B} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{und} \quad \vec{E} \equiv -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Die Potentiale sind Lösungen der homogenen Maxwellschen Gleichungen:

$$\vec{B} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \quad ok!$$

und

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi$$

Wir führen den antisymmetrischen elektromagnetischen Feldtensor ein:

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Mit dieser Definition können die *inhomogenen* Maxwellschen Gleichungen ausgedrückt werden als

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \quad \text{wobei} \quad J^\nu \equiv (\rho, \vec{J})$$

Der 4-Vektor J^ν ist der **elektrische Ladung-Strom-4-Vektor**.

In dieser Form ist die Kovarianz der Maxwellschen Theorie explizit!

Man kann leicht beweisen, dass der elektromagnetische Feldtensor gleich

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Der Tensor transformiert sich unter der Lorentz-Transformation wie:

$$(F^{\mu\nu})' = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}$$

Der Tensor enthält beide, elektrische und magnetische, Felder. Eine Lorentz-Transformation wird deshalb, wie erwartet, die elektrischen und magnetischen Felder mischen.

Die physikalische Grösse: wir betrachten den 4-Potentialvektor A^μ als die *fundamentale physikalische Grösse*. Die gewöhnlichen Felder

\mathbf{E} und \mathbf{B} können aus A^μ hergeleitet werden. Wenn wir den 4-Potentialvektor A^μ verwenden, sind die homogenen Maxwell'schen Gleichungen automatisch erfüllt, und die ganze Theorie wird in einer Gleichung zusammengefasst:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \quad \text{wobei} \quad J^\nu \equiv (\rho, \vec{J})$$

Das Problem der Eichtransformation: es gibt aber ein Problem: der 4-Potentialvektor A^μ ist nicht eindeutig definiert. Unter der **Eichttransformation**

$$\begin{aligned} A^\mu &\rightarrow A^\mu + \partial^\mu \lambda \\ &\rightarrow \left(\phi + \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \vec{A} - \vec{\nabla} \lambda \right) \end{aligned}$$

wobei $\lambda = \lambda(x^\mu)$ eine beliebige Funktion des Raumzeitvektors ist, wird der elektromagnetische Feldtensor nicht geändert:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu (A^\nu + \partial^\nu \lambda) - \partial^\nu (A^\mu + \partial^\mu \lambda) = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Wir können diesen Freiheitsgrad, der keinen Effekt auf die \mathbf{E} und \mathbf{B} Felder hat, dazu benutzen, um eine zusätzliche Bedingung zu stellen:

$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad \text{Lorentz - Bedingung}$

Man spricht vom **Festlegen der Eichung** ("gauge fixing"). Die Maxwell'schen Gleichungen vereinfachen sich zu:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \underbrace{\partial_\mu \partial^\nu A^\mu}_{=0} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu$$

oder

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = J^\nu \quad \text{Maxwellsche Gleichung in Lorentz-Eichung}$$

Strahlungs- (oder Coulomb-) Eichung: die Lorentz-Bedingung ist nicht genügend, um das Potential eindeutig zu definieren. Wir können noch den Gradient einer skalaren Funktion λ zum 4-Potential addieren, wobei

$$\partial_\mu \partial^\mu \lambda = 0$$

geltend muss so dass,

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad \text{wenn} \quad A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \lambda$$

Tatsächlich gibt es keinen sauberen Weg diese Ambiguität aufzulösen. Im Fall des Vakuums ($J^\nu = 0$) stellt man oft eine zusätzliche Bedingung:

Im Vakuum:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0 \quad \text{und wir setzen} \quad A^0 \equiv 0$$

Es folgt,

$$A^0 \equiv 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad \text{Coulomb-Eichung}$$

Diese Bedingung ist nicht kovariant, und kann deshalb nicht unabhängig vom Beobachter definiert werden. Die physikalische Bedeutung ist aber klar, wie wir im folgenden Kapitel sehen werden.

9.2 Das Photon

Das Photon ist ein elementares Boson. Es ist schwierig zu sagen, wer das Photon entdeckt hat.

Planck (1900) *Elektromagnetische Strahlung von schwarzen Körpern*

Die elektromagnetische Strahlung, die Körper emittieren, ist quantisiert und die Beziehung zwischen Frequenz und Energie ist:

$$E = h\nu \quad h \equiv \text{Plancksche Konstante}$$

Einstein (1905) Quantisierung ist eine Eigenschaft der elektromagnetischen Strahlung. Erklärt den photoelektrischen Effekt.

Compton (1923) Lichtquant wird als Teilchen mit verschwindender Masse behandelt. Energie-Impuls-Erhaltung wird verwendet.

Photon $\gamma \equiv$ elementares Teilchen

9.2.1 Quantenelektromagnetismus

Das Potential A^μ wird zur *Wellenfunktion des Photons*.

Freies Photon: ($J^\nu = 0$)

$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0 \quad \text{Maxwellsches freies Photon}$

Wir erkennen die Klein-Gordon Gleichung (Siehe Kap. 5.2) für ein masseloses Teilchen!

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi(x^\mu) = 0$$

Die Maxwellsche Gleichung besitzt aber vier Komponenten.

Ansatz: ebene Welle mit vier komponentigem Polarisationsvektor

$$A^\mu(x^\mu) = ae^{-ip \cdot x} \epsilon^\mu(p)$$

wobei ϵ^μ der Polarisations-4-Vektor ist. Der Polarisationsvektor hat eine Beziehung zum *Spin des Photons*.

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0 \Rightarrow (-i)^2 p_\mu p^\mu A^\nu = 0 \Rightarrow p_\mu p^\mu = p^2 = 0$$

Es folgt (wie erwartet),

$$m = 0 \quad \text{und} \quad E = |\vec{p}|$$

Polarisation: ϵ^μ besitzt 4 Komponenten.

Lorentz-Bedinung:

$$\partial_\mu A^\mu = (-ip_\mu)ae^{-ip \cdot x} \epsilon^\mu(p) = 0$$

$$\Rightarrow p_\mu \epsilon^\mu = 0$$

Die Anzahl von unabhängigen Komponenten des Polarisationsvektors reduziert sich auf drei.

Coulomb-Eichung:

$$A^0 \equiv 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

Es folgt,

$$\epsilon^0 = 0 \quad \text{und} \quad \vec{\epsilon} \cdot \vec{p} = 0$$

Der Polarisationsvektor $\vec{\epsilon}$ ist zur Ausbreitungsrichtung senkrecht.
Das freie Photon ist transversalpolarisiert in Coulombscher-Eichung.

Beispiel: $\vec{p} \parallel z\text{-Achse}$

zwei unabhängige Zustände

$$\epsilon_{(1)}^\mu = (0, 1, 0, 0) \quad \text{und} \quad \epsilon_{(2)}^\mu = (0, 0, 1, 0)$$

Von den ursprünglichen 4 unabhängigen Komponenten bleiben schliesslich nur zwei übrig.

9.3 Lagrange-Formalismus der Elektrodynamik

9.3.1 Elektromagnetismus

Wir suchen nun die Lagrange-Dichte-Funktion, die die Maxwell-schen Gleichungen liefert.

Die \mathcal{L} -Dichte muss Lorentz- und eichinvariant sein, so dass die Theorie auch Lorentz- und eichinvariant sein wird.

a) Freies Feld:

$$\mathcal{L}_{frei} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{Proca – Lagrange – Funktion}$$

Die Lagrange-Dichte ist Lorentz- und eichinvariant.

Wir nehmen das Potential A^μ als *fundamentales* Feld. Es gilt,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{frei} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\partial^\mu A^\nu \quad (\text{antisymmetrisch}) \\ &= -\frac{1}{2}((\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu))\end{aligned}$$

Es folgt,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{frei}}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} = -F_{\mu\nu} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{frei}}{\partial A^\nu} = 0$$

Mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung (Siehe Kap. 8.2) erhalten wir:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{frei}}{\partial A^\nu} - \partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{frei}}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} \right) = 0 \Rightarrow \partial^\mu F_{\mu\nu} = 0 \quad ok!$$

b) Feld mit Quelle:

Wir addieren einen Term, der das Feld mit der Quelle J^μ koppelt:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{frei} + \mathcal{L}_{Quelle} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu$$

Wir erhalten,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{Quelle}}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{Quelle}}{\partial A^\nu} = -J_\nu$$

und es folgt aus der Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\Rightarrow \partial^\mu F_{\mu\nu} = J_\nu \quad ok!$$

D.h, die ganze Maxwellsche elektromagnetische Theorie kann in der folgenden Lagrange-Funktion zusammengefasst werden:

$$\mathcal{L}_{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu$$

Wir bemerken, dass die Kontinuitätsgleichung auch folgt, weil:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = J_\nu \Rightarrow \partial^\nu J_\nu = \underbrace{\partial^\nu \partial^\mu}_{\text{symmetrisch}} \underbrace{F_{\mu\nu}}_{\text{antisymmetrisch}} = 0 !$$

9.3.2 Teilchen im elektromagnetischen Feld

In der klassischen Elektrodynamik kann die Bewegung eines geladenen Teilchens der Ladung e in einem elektromagnetischen Potential durch die kanonische minimale Substitution des Impulses und der Energie

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\vec{A} \quad \text{und} \quad E \rightarrow E - e\phi$$

in der Lagrange-Funktion gewonnen werden.

Wir können diese Methode erweitern zu

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - eA^\mu$$

oder als Ersatz des Operators

$$i\partial^\mu \rightarrow i\partial^\mu - eA^\mu$$

Die minimale Substitution legt nahe, dass die Dirac-Gleichung in Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes so

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\psi = 0 \quad \text{Dirac-Gleichung im äusseren Feld}$$

erweitert werden muss.

Wir können deshalb die gesamte Lagrange-Dichte-Funktion der Quantenelektrodynamik (QED) bauen (Siehe Kap. 8.4 und 9.3) als

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} &= \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{Maxwell} + \mathcal{L}_{Wechselwirkung} \\ &= \bar{\psi} [\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) - m] \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \\ &= \underbrace{\bar{\psi} [\gamma^\mu i\partial_\mu - m] \psi}_{\text{freies Dirac-Feld}} - \underbrace{\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}_{\text{freies elektromagnetisches Feld}} - \underbrace{(J^\mu + e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) A_\mu}_{\text{Quellen und Wechselwirkung zwischen Dirac-Feld und e.m.-Feld}} \end{aligned}$$

Wenn wir das Potential A^μ variieren, erhalten wir die Maxwellschen Gleichungen mit der folgenden Ladungs-Strom-Dichte

$$\begin{aligned} \partial^\mu F_{\mu\nu} &= J_\nu + e \bar{\psi} \gamma_\nu \psi \\ &= J_\nu + ej_\nu \quad \text{wobei } j^\mu \equiv \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \end{aligned}$$

wobei wir den Dichtestrom-4-Vektor der Dirac-Gleichung j^μ (Siehe Kap. 6.4) erkennen. Diese Gleichung definiert den Ausdruck der elektromagnetischen Wechselwirkung eines Dirac-Teilchens als das Produkt der Ladung e und der bilinearen Kovarianten (Siehe Kap. 7.4.4) der Vektor-Form, d.h.

$$\underset{\substack{\text{Strärke} \\ \text{zur Ladung} \\ \text{proportional}}}{e} \times \underset{\substack{\text{Form des Stroms:} \\ \text{Vektor}}}{(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)}$$

10.1 Einleitung

Nicht-relativistische Quantenmechanik: Die Wellenfunktion ψ der nicht-relativistischen Quantenmechanik kann als “Feld” betrachtet werden. In diesem Fall wird das Feld “klassisch” behandelt, d.h., die Wellenfunktion ist eine Funktion des Ortsvektors \vec{x} (wobei \vec{x} als ein kontinuierlicher Index für die Freiheitsgrade des Feldes wirkt), die den Zustand eines Teilchens beschreibt:

$$\text{Wellenfunktion } \psi: \rho(\vec{x}) \equiv \psi^*(\vec{x})\psi(\vec{x})$$

Die Quantisierung kommt daher, dass wir den “klassischen” Hamilton-Operator

$$H \equiv H(\vec{p}, \vec{x})$$

verwenden und die Symbole \vec{x} und \vec{p} als *Operatoren mit Kommutationsregeln* betrachten, d.h.,

$$[x_i, p_j] = i\delta_{ij} \quad \text{und} \quad [x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0$$

Relativistische Quantenmechanik: Wir haben in Kap. 5, 6 und 7 eine ähnliche Methode verwendet, um eine Wellengleichung zu finden, die mit der Relativitätstheorie übereinstimmt, d.h.,

$$\begin{aligned} \phi_{Klein-Gordon}(x^\mu), \psi_{Dirac}(x^\mu) &\rightarrow \text{"klassische Felder"} \\ p^\mu &\rightarrow \text{Operator} \end{aligned}$$

Wir haben einige Probleme angetroffen:

1) **Klein-Gordon:** $E < 0$ und $\rho < 0$, d.h. schwierige Interpretation des Feldes als *Wellenfunktion* eines Teilchens, weil die Wahrscheinlichkeit nicht positiv definiert ist.

2) **Dirac:** $\rho > 0$, aber $E < 0$ und $E > 0$, d.h. wir erklären zuerst die Abwesenheit von Zuständen mit negativer Energie mit Hilfe der Loch-Theorie. Wir interpretieren nachher die Zustände mit negativer Energie als Antiteilchen mit positiver Energie.

Es gibt noch andere Probleme, die wir noch nicht behandelt haben: wir suchen eine *allgemeine Theorie der Elementarteilchen und müssen deshalb die folgenden Fragen lösen:*

a) Wie werden wir *Bosonen* beschreiben? Welche Feldgleichung müssen wir in diesem Fall verwenden? Das Dirac-Teilchen wird als Spin-1/2 Fermion interpretiert.

b) *Wie werden wir Teilchen und Antiteilchen behandeln?* Wegen der Energie-Masse-Äquivalenz der Relativitätstheorie können wir nicht eine mit der Relativitätstheorie übereinstimmende Theorie betrach-

ten, in der die Anzahl von Teilchen-Antiteilchen erhalten wird. *Wie werden wir die Erzeugung-Vernichtung von Teilchen-Antiteilchen formal behandeln?*

Man glaubt, dass *die Lösung dieser Probleme in der Quanten-Feld-Theorien (QFT) liegt.*

In der QFT wird das Feld als ein quantisiertes Objekt betrachtet (sogenannte "zweite Quantisierung").

Das Feld beschreibt ein System mit unendlich vielen kontinuierlichen Freiheitsgraden. In diesem Fall spielt der Ortsvektor die Rolle eines kontinuierlichen Index, um die Freiheitsgrade zu identifizieren:

$$\underbrace{\psi}_{\substack{\text{quantisiertes} \\ \text{Feld}}} \quad \underbrace{(x^\mu)}_{\substack{\text{kontinuierlicher} \\ \text{Index}}}$$

Der kanonische Ansatz der QFT ist der folgende: wir benutzen die klassische Lagrangedichte, die die Dynamik des Feldes beschreibt, und interpretieren das Feld als einen Operator mit Kommutationsregeln:

$$\left. \begin{array}{c} \text{"klassische Felder"} \\ \phi(x^\mu), \psi(x^\mu) \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{zweite Quantisierung}} \left. \begin{array}{c} \text{"quantisierte Felder"} \\ \phi(x^\mu), \psi(x^\mu) - \text{Operatoren} \\ \text{mit Kommutationsregeln} \end{array} \right\}$$

In der QFT wird das Feld *nicht mehr* als *Wellenfunktion eines Teilchens* interpretiert, die Theorie wird als eine Vielteilchentheorie re-interpretiert.

Das Feld entspricht einer physikalischen Grösse, deren Anregungen Teilchen beschreiben:

Anregung des Feldes \Leftrightarrow ein Teilchen
(\equiv ein Quant des Feldes)

Die Anregungen des Feldes werden mit Hilfe von Quantenoszillatoren beschrieben.

Beispiele:

1. Quantisiertes A^μ Feld: die Anregungen entsprechen den Photonen.
2. Quantisiertes Dirac Spinorfeld: Spin 1/2 Fermionen
3. Quantisiertes Klein-Gordon Feld: Spin 0 Bosonen

10.2 Quantisierung des reellen Klein-Gordon-Feldes

Wir betrachten ein reelles (d.h. nicht komplexwertiges) Feld ϕ .

Klassische Lagrangedichte:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{KG} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \\ &= \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2\end{aligned}$$

Der kanonische Impuls des Feldes ist (Siehe Kap. 8.5)

$$\Pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{KG}}{\partial(\partial_0\phi)} = \frac{1}{2}2(\partial_0\phi) = \partial_0\phi$$

Die Hamiltondichte ist gleich

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &\equiv \Pi(\partial_0 \phi) - \mathcal{L} \\ &= (\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{2} m^2 \phi^2}_{\geq 0}\end{aligned}$$

d.h., sie ist immer positiv definiert, deshalb besitzt das Feld immer eine positive Energie ! Das Feld leidet nicht am Problem der negativen Energie. Beachte: wie schon erwähnt, entspricht das Feld nicht der Wellenfunktion eines Teilchens.

Das Feld wird dadurch quantisirt, dass wir den Feldern zur gleichen Zeit Kommutationsregeln auferlegen (die sogenannten **gleichzeitigen Kommutationsregeln**):

$$\begin{cases} [\phi(\vec{x}, t), \Pi(\vec{x}', t)] \equiv i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \\ [\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t)] \equiv [\Pi(\vec{x}, t), \Pi(\vec{x}', t)] \equiv 0 \end{cases}$$

ETCR (Equal Time Comm. Rules)

Lösung: wie können wir die Anregungen des Feldes beschreiben?
Wir werden das Feld nach ebenen Wellen entwickeln:

$$\phi(\vec{x}, t) \equiv \underbrace{\int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^{3/2}}}_{\text{Summe über alle Moden}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2E_p}}}_{\text{Normierung}} \underbrace{\left(a(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + a^+(\vec{p}) e^{+ip \cdot x} \right)}_{\text{Summe ebener Wellen}}$$

$E_p = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

wobei $a(\vec{p})$ und $a^+(\vec{p})$ Fourier-Koeffizienten sind, welche Operatoren werden, wenn das Feld quantisiert wird.

Man kann beweisen, dass aus den “gleichzeitigen Kommutationsregeln” folgt

$$\begin{cases} [a(\vec{p}), a^+(\vec{p}')] \equiv \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \\ [a(\vec{p}), a(\vec{p}')] \equiv [a^+(\vec{p}), a^+(\vec{p}')] \equiv 0 \end{cases}$$

Diese Gleichungen sehen wie die Regeln von quantisierten, einfachen, harmonischen Oszillatoren aus !

10.2.1 Einfacher harmonischer Oszillator

Der Hamilton-Operator ist gleich ($m=1$)

$$H_{HO} = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2 \quad \text{wobei } \omega = \text{Frequenz}$$

Man benutzt die Leiter-Operatoren (“*Ladder operators*”)

$$x = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (a + a^\dagger) \quad \text{und} \quad p = -i \sqrt{\frac{\omega}{2}} (a - a^\dagger)$$

wobei

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad (\text{aus } [x, p] = i)$$

Der Hamilton-Operator wird danach so ausgedrückt

$$\begin{aligned} H_{HO} &= \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \\ &= \omega \left(N + \frac{1}{2} \right) \quad \text{wobei } N \equiv a^\dagger a = \text{Anzahl-Operator} \end{aligned}$$

Der Grundzustand wird als $|0\rangle$ bezeichnet, und wird so definiert, dass

$$a|0\rangle = 0 \quad \text{und} \quad E_0 = \frac{1}{2}\omega \quad (\text{Nullpunktenergie})$$

Wir nehmen an, dass die Energie-Eigenzustände die folgenden sind:

$$N|n\rangle = n|n\rangle \quad \text{mit} \quad E_n = \omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

und es gilt,

$$Na^+|n\rangle = a^+aa^+|n\rangle = a^+(a^+a + 1)|n\rangle = a^+(N + 1)|n\rangle = (n + 1)a^+|n\rangle$$

Die n -te Anregung wird dann durch sukzessive Anwendungen des **Erzeugungsoperators** a^+ gewonnen:

$$|n\rangle = (a^+)^n|0\rangle$$

Der a -Operator spielt die Rolle des **Vernichtungsoperators**.

$$\begin{aligned} Na|n\rangle &= a^+aa|n\rangle = (aa^+ - 1)a|n\rangle = a(a^+a - 1)|n\rangle \\ &= a(N - 1)|n\rangle = (n - 1)a|n\rangle \end{aligned}$$

10.2.2 Das Klein-Gordon-Feld aus einfachen harmonischen Oszillatoren

Analog zum Fall des einfachen harmonischen Oszillators führen wir den **Teilchenzahl-Operator** ein:

$N(\vec{p}) \equiv a^+(\vec{p})a(\vec{p}) \quad \text{wobei} \quad \vec{p} = \text{kont. Index}$

Dieser Operator beschreibt den Zustand des Oszillators “ \vec{p} “. Weil wir ein kontinuierliche Impulsspektrum betrachten, entspricht der Operator $N(\vec{p})$ der *Teilchendichte*, d.h. *Anzahl Teilchen / $d^3 p$* .

Weil \vec{p} eine kontinuierliche Variable ist, gibt es unendlich viele Oszillatoren. Das Feld ist die Summe von unendlich vielen, voneinander unabhängigen, Oszillatoren.

Der **Grundzustand (das Vakuum)** wird definiert als

$$\text{Vakuum: } N(\vec{p})|0\rangle = a^+(\vec{p})a(\vec{p})|0\rangle = 0 \quad \text{für alle } \vec{p}$$

Um bestimmte Moden des Feldes anzuregen, benutzen wir den Erzeugungsoperator, d.h. den Leiteroperator eines bestimmten Impulses:

$$\begin{aligned} a^+(\vec{p})|0\rangle &= |1_{\vec{p}}\rangle \\ a^+(\vec{p})a^+(\vec{q})|0\rangle &= |1_{\vec{p}}1_{\vec{q}}\rangle \\ a^+(\vec{p})a^+(\vec{q})a^+(\vec{q})|0\rangle &= |1_{\vec{p}}2_{\vec{q}}\rangle \end{aligned}$$

usw.

10.2.3 Energie- und Impulsspektrum des Feldes

Wir suchen die Energie und den Impuls des Feldes (Siehe Kap. 8.5):

$$H = \int d^3 \vec{x} \mathcal{H} = \int d^3 \vec{x} T_0^0$$

und

$$P_i \equiv \int d^3 \vec{x} T_i^0 = \int d^3 \vec{x} \Pi(\partial_i \phi)$$

Wir nehmen die Zeit $t=0$ an. Es gilt,

$$\phi(\vec{x}, t=0) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a(\vec{p}) + a^*(-\vec{p})) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}$$

und

$$\Pi(\vec{x}, t=0) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} (-i) \sqrt{\frac{E_p}{2}} (a(\vec{p}) - a^*(-\vec{p})) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}$$

Die Hamiltondichte ist gleich

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \\ &= \frac{1}{2} (\Pi)^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} (\Pi)^2 &= \int \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{d^3 \vec{p}'}{(2\pi)^{3/2}} (-i)^2 \frac{1}{2} \sqrt{E_p E_{p'}} e^{i(\vec{p} + \vec{p}') \cdot \vec{x}} \times \\ &\quad (a(\vec{p}) - a^*(-\vec{p})) (a(\vec{p}') - a^*(-\vec{p}')) \end{aligned}$$

und der Gradient wirkt als

$$\vec{\nabla} \phi = " (i\vec{p}) " \phi$$

oder

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \phi)^2 &= \int \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{d^3 \vec{p}'}{(2\pi)^{3/2}} (i)^2 (\vec{p} \cdot \vec{p}') \frac{1}{2\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{i(\vec{p} + \vec{p}') \cdot \vec{x}} \times \\ &\quad (a(\vec{p}) + a^*(-\vec{p})) (a(\vec{p}') + a^*(-\vec{p}')) \end{aligned}$$

Es gilt auch

$$(\phi)^2 = \int \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{d^3 \vec{p}'}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{2\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{i(\vec{p} + \vec{p}') \cdot \vec{x}} \times \\ (a(\vec{p}) + a^*(-\vec{p}))(a(\vec{p}') + a^*(-\vec{p}'))$$

Schliesslich können wir die verschiedenen Terme in der Hamilton-dichte gruppieren und erhalten für den Hamilton-Operator:

$$H = \int d^3 \vec{x} \mathcal{H} = \\ = \int d^3 \vec{x} \int \int \frac{d^3 \vec{p} d^3 \vec{p}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} e^{i(\vec{p} + \vec{p}') \cdot \vec{x}} \left\{ -\frac{1}{2} \sqrt{E_p E_{p'}} \times \right. \\ \left. (a(\vec{p}) - a^*(-\vec{p}))(a(\vec{p}') - a^*(-\vec{p}')) + \right. \\ \left. - \frac{(\vec{p} \cdot \vec{p}') + m^2}{2\sqrt{E_p E_{p'}}} (a(\vec{p}) + a^*(-\vec{p}))(a(\vec{p}') + a^*(-\vec{p}')) \right\}$$

Die räumliche Integration liefert eine Dirac-Delta-Funktion:

$$H = \int \int \frac{d^3 \vec{p} d^3 \vec{p}'}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} + \vec{p}') \{ \dots \}$$

weshalb wir eine Integration über den Impuls durch die Bedingung $\vec{p}' = -\vec{p}$ ersetzen können:

$$H = \frac{1}{2} \int d^3 \vec{p} \left\{ -\frac{1}{2} E_p (\dots) + \frac{\vec{p}^2 + m^2}{2E_p} (\dots) \right\}$$

Wir können die Terme neu anordnen als

$$H = \frac{1}{2} \int d^3 \vec{p} \frac{1}{2E_p} \left\{ -E_p^2 (a(\vec{p}) - a^*(-\vec{p})) (a(-\vec{p}) - a^*(\vec{p})) + (\vec{p}^2 + m^2) (a(\vec{p}) + a^*(-\vec{p})) (a(-\vec{p}) + a^*(\vec{p})) \right\}$$

oder

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 \vec{p}}{2E_p} E_p^2 \left\{ -(a(\vec{p}) - a^*(-\vec{p})) (a(-\vec{p}) - a^*(\vec{p})) + (a(\vec{p}) + a^*(-\vec{p})) (a(-\vec{p}) + a^*(\vec{p})) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3 \vec{p} \frac{E_p}{2} \left\{ -a(\vec{p})a(-\vec{p}) + a(\vec{p})a^*(\vec{p}) + a^*(-\vec{p})a(-\vec{p}) - a^*(-\vec{p})a^*(\vec{p}) + a(\vec{p})a(-\vec{p}) + a(\vec{p})a^*(\vec{p}) + a^*(-\vec{p})a(-\vec{p}) + a^*(-\vec{p})a^*(\vec{p}) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3 \vec{p} \frac{2E_p}{2} \left\{ a(\vec{p})a^*(\vec{p}) + a^*(\vec{p})a(\vec{p}) \right\} \end{aligned}$$

wobei wir den Teilchenzahl-Operator $N(\vec{p})$ erkennen:

$$a(\vec{p})a^*(\vec{p}) + a^*(\vec{p})a(\vec{p}) = 2N(\vec{p}) + C$$

wobei C als eine C -Zahl betrachtet werden kann¹. Schliesslich ist der Hamilton-Operator gleich

$$H = \frac{1}{2} \int d^3 \vec{p} E_p \{ 2N(\vec{p}) + C \}$$

1. Für ein kontinuierliches Impulsspektrum ist C gleich der Dirac-Delta-Funktion $\delta(0)$. Für ein diskretes Spektrum ist C gleich 1.

Er beschreibt die Energie des Feldes.

In ähnlicher Weise kann der Impuls des Feldes berechnet werden:

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \int d^3 p \vec{p} \{2N(\vec{p}) + C\} = \int d^3 p N(\vec{p}) \vec{p}$$

Wir bemerken, dass das Feld als eine unendliche Summe von quantisierten einfachen harmonischen Oszillatoren dargestellt wird.

Ein berühmtes Problem liegt in der Nullpunktsenergie des Feldes.
Wir bemerken, dass das Integral der Energie nach unendlich geht:

$$H = \frac{1}{2} \int d^3 p E_p \{2N(\vec{p}) + 1\} = \int d^3 p N(\vec{p}) E_p + \underbrace{\frac{1}{2} \int d^3 p E_p \{1\}}_{\text{Nullpunktsenergie} \rightarrow \infty}$$

In der QFT wird die Nullpunktsenergie vernachlässigt, weil nur Energieunterschiede eine physikalische Bedeutung besitzen, und dehalb können wir den Nullpunkt so definieren, dass die Energie des Feldes gleich

$$H = \int d^3 p N(\vec{p}) E_p$$

ist.

Physikalische Interpretation:

Das Vakuum haben wir so definiert

$$\text{Vakuum: } N(\vec{p})|0\rangle = a^+(\vec{p})a(\vec{p})|0\rangle = 0 \quad \text{für alle } \vec{p}$$

Es folgt,

$$E_0 = \int d^3 p N(\vec{p}) E_p = 0 \quad \text{und} \quad \vec{P} = 0$$

Für die folgenden Zustände erhalten wir

$$\begin{aligned} \left| 1_{\vec{p}} \right\rangle & \quad E = E_p = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \quad \vec{P} = \vec{p} \\ \left| 1_{\vec{p}} 1_{\vec{q}} \right\rangle & \quad E = E_p + E_q \quad \vec{P} = \vec{p} + \vec{q} \end{aligned}$$

Es ist ganz natürlich, diese Anregungen mit Teilchen zu assoziieren.

Energie-Problem: in der “klassischen” Quantenmechanik (wenn wir das Feld als die Wellenfunktion des Teilchens betrachten) haben wir das Problem der negativen Energie angetroffen, weil

$$\begin{aligned} e^{-iEt} & \rightarrow E > 0 \\ e^{+iEt} & \rightarrow E < 0 \end{aligned}$$

Lösungen liefern. Das Vorzeichen der Phase gibt das Vorzeichen der Energie an.

In der QFT haben wir das Feld so geschrieben,

$$\phi(\vec{x}, t) \propto \underbrace{a(\vec{p}) e^{-ip \cdot x}}_{\text{positive Frequenz}} + \underbrace{a^+(\vec{p}) e^{+ip \cdot x}}_{\text{negative Frequenz}}$$

wobei $a(\vec{p})$ ein Teilchen mit **positiver Energie vernichtet**, und $a^+(\vec{p})$ ein Teilchen mit **positiver Energie erzeugt**!

Die QFT hat die relativistische Bedingung, die positive und negative Frequenzen verlangt, mit einer Theorie in Einklang gebracht, in der Teilchen und Antiteilchen mit positiver Energie erzeugt und vernichtet werden können.

Statistik des Feldes: wir bemerken, dass wegen der Kommutationsregeln der Erzeugungs- und Vernichtungoperatoren, der Zustand mit

zwei identischen Teilchen *symmetrisch unter der Vertauschung der Teilchen* ist:

$$a^+(\vec{p})a^+(\vec{q})|0\rangle = a^+(\vec{q})a^+(\vec{p})|0\rangle$$

weil

$$[a^+(\vec{p}), a^+(\vec{p}')] \equiv 0$$

Zusätzlich kann ein Impulsmode viele Teilchen besitzen, wie z.B.

$$a^+(\vec{p})a^+(\vec{p})a^+(\vec{p})|0\rangle = |3_{\vec{p}}\rangle$$

Wir schliessen daraus, dass die **Klein-Gordon Teilchen Bosonen sind**. Sie folgen **Bose-Einstein-Statistik**.

10.3 Quantisierung des komplexen Klein-Gordon-Feldes

Wir studieren die Eigenschaften eines Feldes ϕ , das komplexwertig ist. Wir zerlegen das Feld in reelle und komplexe Teile:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \quad \text{und} \quad \phi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2)$$

wobei ϕ_1 und ϕ_2 reelle (hermitische) Felder sind. Beide Felder ϕ_1 und ϕ_2 erfüllen die Klein-Gordon-Gleichung:

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi_1 = 0 \quad \text{und} \quad (\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi_2 = 0$$

Jedes Feld wird nach Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren entwickelt:

$$\begin{cases} \phi_1(x) \equiv \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_1(\vec{p})e^{-ip \cdot x} + a_1^+(\vec{p})e^{+ip \cdot x}) \\ \phi_2(x) \equiv \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_2(\vec{p})e^{-ip \cdot x} + a_2^+(\vec{p})e^{+ip \cdot x}) \end{cases}$$

wobei a_i ($i=1,2$) Operatoren sind.

Wir führen die folgenden Operatoren ein:

$$\begin{cases} a(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1(\vec{p}) + ia_2(\vec{p})) \\ b^+(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1^+(\vec{p}) + ia_2^+(\vec{p})) \end{cases}$$

Mit diesen Definitionen werden die Felder so ausgedrückt:

$$\begin{cases} \phi(x) \equiv \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a(\vec{p})e^{-ip \cdot x} + b^+(\vec{p})e^{+ip \cdot x}) \\ \phi^+(x) \equiv \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a^+(\vec{p})e^{+ip \cdot x} + b(\vec{p})e^{-ip \cdot x}) \end{cases}$$

wobei die Kommutationsregeln der zwei Arten von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren die folgenden sind:

$$[a(\vec{p}), a^+(\vec{p}')] = [b(\vec{p}), b^+(\vec{p}')] = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$$

alle anderen = 0

d.h. sie besitzen dieselbe Algebra wie die a_1 und a_2 Operatoren.

Wir definieren zwei Teilchenzahl-Operatoren:

$$N^+(\vec{p}) \equiv a^+(\vec{p})a(\vec{p}) \quad \text{und} \quad N^-(\vec{p}) \equiv b^+(\vec{p})b(\vec{p})$$

Man kann zeigen, dass in diesem Fall der 4-Energie-Impuls-Operator gleich

$$P_\mu = \int d^3\vec{p} (p_\mu) [N^+(\vec{p}) + N^-(\vec{p})]$$

ist. Wir interpretieren dieses Ergebnis folgendermassen:

Das komplexwertige skalare Feld beschreibt ein System, das zwei a priori unabhängige Arten von Teilchen enthält. Die Anzahl dieser Teilchen werden durch die N^+ und N^- Operatoren beschrieben.

Wir betrachten den (erhaltenen) Strom der Form

$$j^\mu = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*)$$

Die zeitliche Komponente definiert eine (erhaltene) Grösse, die gleich

$$\begin{aligned} Q &\equiv \int d^3\vec{x} j^0 = i \int d^3\vec{x} (\phi^+ \partial^0 \phi - \phi \partial^0 \phi^+) \\ &= \int d^3\vec{p} [N^+(\vec{p}) - N^-(\vec{p})] \end{aligned}$$

ist.

Wegen des negativen Vorzeichens interpretieren wir die Grösse Q als die "Ladung". Das komplexwertige Feld beschreibt zwei Arten von Teilchen, die entgegengesetzte Ladungen besitzen.

Der a^+ Operator erzeugt ein Teilchen der Ladung +1, der b^+ Operator erzeugt ein Teilchen der Ladung -1.

10.4 Quantisierung des Dirac-Feldes

Schliesslich betrachten wir das quantisierte Dirac-Spinorfeld ψ . Die Lagrangedichte ist gleich

$$\mathcal{L}_{Dirac} \equiv i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

Lösung: das Feld muss als Linearkombination von 4 unabhängigen Spinoren ausgedrückt werden. Wir benutzen die $u^{(1)}, u^{(2)}, v^{(1)}, v^{(2)}$ Spinoren als Basis:

$$\begin{cases} \psi(x) \equiv \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{s=1,2} (a_s(\vec{p})u^{(s)}(\vec{p})e^{-ip\cdot x} + b_s^+(\vec{p})v^{(s)}(\vec{p})e^{+ip\cdot x}) \\ \bar{\psi}(x) \equiv \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{s=1,2} (a_s^+(\vec{p})\bar{u}^{(s)}(\vec{p})e^{ip\cdot x} + b_s(\vec{p})\bar{v}^{(s)}(\vec{p})e^{-ip\cdot x}) \end{cases}$$

wobei wir 4 Operatoren eingeführt haben:

$$a_s(\vec{p}), a_s^+(\vec{p}), b_s(\vec{p}), b_s^+(\vec{p})$$

wobei $s=1,2$ dem Spinzustand entspricht und \vec{p} dem Impulsmode.

Kommurationsregeln: wir können dieselben Kommutationsregeln wie im Fall des Klein-Gordon-Feldes nicht auferlegen. Die Kommutationsregeln des KG-Feldes führen auf *Bosonen*. Im Fall des Dirac-Feldes sind wir an der Beschreibung von *Fermionen* interessiert. Deshalb werden wir **Antikommurationsregeln** auferlegen.

D.h.,

$$\{b, b^+\} = bb^+ + b^+b = 1$$

Vakuum: $b|0\rangle = 0$; Erste Anregung: $|1\rangle = b^+|0\rangle$

Es gilt,

$$Nb^+|1\rangle = b^+bb^+|1\rangle = b^+(1 - b^+b)|1\rangle = b^+(1 - N)|1\rangle = 0 \quad !$$

d.h.,

$$b^+|1\rangle = 0 \quad \text{oder} \quad b^+b^+|0\rangle = 0$$

Es gibt nur zwei unabhängige Zustände für einen Mode: **|0> und |1>**. Die Antikommmutationsregeln führen auf *Fermionen*. Das *Auschlussprinzip* verhindert alle Zuständen ausser **|0> oder |1>**.

Diese Bedingung besagt, dass die Dirac-Spinorfelder durch Antikommurationsregeln quantisiert werden müssen:

$$\{\psi_i(\vec{x}, t), \psi_j^+(\vec{x}', t)\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')\delta_{i,j}$$

alle anderen = 0

wobei die Indizes i, j die Komponenten des Spinorsfeldes angeben. Es folgt daraus,

$$\{a_r(\vec{p}), a_s^+(\vec{p}')\} = \{b_r(\vec{p}), b_s^+(\vec{p}')\} = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}')\delta_{r,s}$$

Energie-Impuls des Feldes: in ähnlicher Weise wie im Fall des Klein-Gordon-Feldes kann man die Energie und den Impuls des Feldes berechnen. Wir erhalten:

$$H = \int d^3\vec{p} \sum_{s=1,2} E_p \left(\underbrace{a_s^+(\vec{p})a_s(\vec{p})}_{=N_s^a(\vec{p})} + \underbrace{b_s^+(\vec{p})b_s(\vec{p})}_{=N_s^b(\vec{p})} \right)$$

wobei $N_s^a(\vec{p})$ und $N_s^b(\vec{p})$ die Teilchenzahl-Operatoren sind für beide Arten von Teilchen mit Spinzustand s und Mode \mathbf{p} , und

$$\vec{P} = \int d^3\vec{p} \sum_{s=1,2} \vec{p} (a_s^+(\vec{p})a_s(\vec{p}) + b_s^+(\vec{p})b_s(\vec{p}))$$

Physikalische Interpretation: das Dirac-Spinorfeld beschreibt zwei Arten von Teilchen, d.h. z.B. Elektronen und Positronen.

$a_s^+(\mathbf{p})$ erzeugt ein *Elektron* mit Energie $+E_p > 0$ und Impuls \mathbf{p}

$b_s^+(\mathbf{p})$ erzeugt ein *Positron* mit Energie $+E_p > 0$ und Impuls \mathbf{p}

$N_s^a(\mathbf{p})$ ist gleich der Anzahl (pro $d^3\mathbf{p}$) von Elektronen und $N_s^b(\mathbf{p})$ gleich der Anzahl (pro $d^3\mathbf{p}$) von Positronen.

Der Feldzustand mit einem einzigen Elektron mit Spin s wird so erzeugt:

$$|e^-(\vec{p}, s)\rangle = a_s^+(\vec{p})|0\rangle$$

und im Fall eines einzigen Positrons wird der Feldzustand sein:

$$|e^+(\vec{p}, s)\rangle = b_s^+(\vec{p})|0\rangle$$

Statistik:wegen der Antikommurationsregeln gilt

$$a^+(\vec{p})a^+(\vec{q})|0\rangle = -a^+(\vec{q})a^+(\vec{p})|0\rangle$$

d.h. der Zustand ist antisymmetrisch unter der Vertauschung der Teilchen.

Dirac-Spinorfelder beschreiben Teilchen, die der Fermi-Dirac-Statistik folgen.

Im Allgemeinen kann man zeigen, dass die Bedingung, dass die Energie des Teilchens immer positiv definiert wird, die Antikommationsregeln *erzwingen*. Dieses Ergebnis ist ein Teil des allgemeinen **Spin-Statistik-Theorems (Pauli, 1940)**, das voraussagt:

Spin-Statistik-Theorem: *Lorentz-Invarianz, positive Energien, positiv definierte Wahrscheinlichkeiten und Kausalität zwingen Teilchen mit ganzzahligem Spin Bosonen zu sein, und Teilchen mit halb-zahligem Spin Fermionen.*

11.1 Der Feynman-Propagator des reellen Klein-Gordon-Feldes

11.1.1 Ausbreitungsamplitude

Wir definieren einen normierten Zustand, der ein Teilchen mit bestimmtem Impuls \mathbf{p} darstellt:

$$\underbrace{|\vec{p}\rangle}_{\substack{\text{ein Teilchen} \\ \text{im Impulseigenzustand} \\ \vec{p}}} \equiv \underbrace{\sqrt{2E_p}}_{\text{Normierung}} \underbrace{a^+(\vec{p})}_{\substack{\text{Der Operator} \\ \text{erzeugt ein Teilchen} \\ \text{mit Impuls } \vec{p}}} |\underbrace{0\rangle}_{\text{Vakuum}}$$

Wir betrachten die Anwendung des Feldoperators auf das Vakuum:

$$\phi(x^\mu)|0\rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a(\vec{p})e^{-ip\cdot x} + a^+(\vec{p})e^{+ip\cdot x}) |0\rangle$$

oder

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(\underbrace{a(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} |0\rangle}_{\rightarrow 0} + \underbrace{a^+(\vec{p}) e^{+ip \cdot x} |0\rangle}_{a^+(\vec{p})|0\rangle = \frac{|\vec{p}\rangle}{\sqrt{2E_p}}} \right) \\
 &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{2E_p} e^{+ip \cdot x} |\vec{p}\rangle
 \end{aligned}$$

Diese Summe ist eine Überlagerung von Zuständen mit verschiedenen Impulsen \mathbf{p} . Sie sieht ähnlich aus, wie der Ausdruck eines Eigenzustandes des Ortsvektors $|\vec{x}\rangle$ in der Quantenmechanik.

Wir können deshalb sagen, dass der Feldoperator ein Teilchen in einem bestimmten Punkt der Raumzeit erzeugt:

$\phi(x^\mu)|0\rangle \equiv \text{Feldzustand eines Teilchens in der Raumzeit } x^\mu$

d.h. der Operator $\phi(x^\mu)$ erzeugt ein Teilchen im Raumzeitpunkt x^μ .

In ähnlicher Weise kann man beweisen, dass gilt

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | \phi(x^\mu) | 0 \rangle &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \langle 0 | \left(a(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + \underbrace{a^+(\vec{p}) e^{+ip \cdot x}}_{\rightarrow 0} \right) \rangle \\
 &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot x} \langle \vec{p} |
 \end{aligned}$$

Es folgt daraus, dass wir die **Amplitude der Ausbreitung eines Teilchens von y^μ nach x^μ** als

$$D(x, y) \equiv \underbrace{D(x - y)}_{\substack{\text{wegen} \\ \text{Translationsinvarianz}}} = \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle$$

ausdrücken können.

Wir können leicht beweisen, dass gilt

$$\begin{aligned} \phi(x)\phi(y) &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p E_q}} (a(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + a^+(\vec{p}) e^{+ip \cdot x}) \times \\ &\quad (a(\vec{q}) e^{-iq \cdot x} + a^+(\vec{q}) e^{+iq \cdot x}) \\ &\propto \dots ((a(\vec{p})a(\vec{q})...) + (a(\vec{p})a^+(\vec{q})...) + (a^+(\vec{p})a(\vec{q})...) + (a^+(\vec{p})a^+(\vec{q})...)) \end{aligned}$$

Aber

$$\begin{aligned} \langle 0 | a(\vec{p})a(\vec{q}) | 0 \rangle &= 0 \\ \langle 0 | a(\vec{p})a^+(\vec{q}) | 0 \rangle &= \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \\ \langle 0 | a^+(\vec{p})a(\vec{q}) | 0 \rangle &= 0 \\ \langle 0 | a^+(\vec{p})a^+(\vec{q}) | 0 \rangle &= 0 \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = D(x - y) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot (x-y)} \quad (E_p > 0)$$

Dieser Ausdruck ist ganz allgemein. Bis jetzt haben wir nichts bezüglich x^μ oder y^μ gesagt. Die Beziehung gibt die Amplitude der Aus-

breitung zwischen x^μ und y^μ , wobei x^μ oder y^μ zwei beliebige Raumzeitpunkte sind.

11.1.2 Zeitgeordnete Ausbreitung

Wir können zwei Fälle unterscheiden:

1. $y^0 > x^0$: Ausbreitung rückwärts in der Zeit
2. $y^0 < x^0$: Ausbreitung vorwärts in der Zeit

Im Prinzip wollen wir *nicht* denselben Ausdruck verwenden für die Ausbreitung rückwärts in der Zeit und die Ausbreitung vorwärts in der Zeit.

Wir führen den **Feynman-Propagator** ein. Feynman schlug vor, dass man die folgende Form für den Propagator verwenden muss, um eine “kovariante” Form zu gewinnen:

$$D_F(x - y) \equiv \begin{cases} D(x - y) & \text{wenn } x^0 > y^0 \\ D(y - x) & \text{wenn } y^0 > x^0 \end{cases}$$

Aus der Gleichung

$$D(x - y) = \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot (x-y)}$$

sehen wir, dass gilt

$$D(y - x) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot (y-x)} = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{2E_p} e^{-i(-p) \cdot (x-y)}$$

d.h., der Feynman-Propagator sagt voraus, dass **die Ausbreitung vorwärts in der Zeit mit 4-Impuls p^μ gleich der Ausbreitung rückwärts in der Zeit mit Impuls $-p^\mu$** ist. Siehe Kap. 7.2.

Der Feynman-Propagator kann mit Hilfe des Dyson-Symbols T ausgedrückt werden:

$$D_F(x - y) \equiv \langle 0 | T(\phi(x)\phi(y)) | 0 \rangle$$

wobei T der **zeitordnende Dyson-Operator** ist. Es gilt,

$$T(\phi(x)\phi(y)) = \theta(x^0 - y^0)\langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0)\langle 0 | \phi(y)\phi(x) | 0 \rangle$$

wobei $\theta(t)$ die Stufenfunktion ist.

11.2 Der Propagator eines Dirac-Teilchens

In ähnlicher Weise kann man den Feynman-Propagator eines Dirac-Teilchens definieren. In diesem Fall müssen wir die Antikommutationsregeln verwenden, und schliesslich findet man:

$$\begin{aligned} D_F(x - y) &= \theta(x^0 - y^0)\langle 0 | \psi(x)\bar{\psi}(y) | 0 \rangle - \theta(y^0 - x^0)\langle 0 | \bar{\psi}(y)\psi(x) | 0 \rangle \\ &\equiv \langle 0 | T(\psi(x)\bar{\psi}(y)) | 0 \rangle \end{aligned}$$

11.3 Die S-Matrix

11.3.1 Der Zeitentwicklungsoperator

Bis jetzt haben wir nur die Ausbreitung von *freien* Klein-Gordon- oder Dirac-Teilchen betrachtet: im Fall dass es keine Wechselwirkung gibt, ist die Amplitude der Ausbreitung eines Teilchens gleich

$$\langle 0 | T(\psi(x)\bar{\psi}(y)) | 0 \rangle_{frei} = D_F(x - y)$$

Wie sollen wir Wechselwirkungen einführen? Wir nehmen an, dass der Hamilton-Operator als Summe von zwei Termen ausgedrückt werden kann:

$$H = H_0 + H_{Wechselwirkung}$$

wobei $H_{Wechselwirkung}$ die Wechselwirkung darstellt.

Man benutzt die sogenannte **Heisenberg-Darstellung der Operatoren**, um die Zeitausbreitung des Feldes auszudrücken:

$$\phi(x^\mu) = e^{iH(t-t_0)} \phi(\vec{x}, t_0) e^{-iH(t-t_0)}$$

Wir können die Zeitausbreitung in zwei Terme teilen, und nur die Zeitausbreitung des H_0 -Operators betrachten. Wir definieren das Feld im Wechselwirkungs-Bild:

$$\phi_I(x^\mu) = e^{iH_0(t-t_0)} \phi(\vec{x}, t_0) e^{-iH_0(t-t_0)}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x}, t) &= e^{iH(t-t_0)} \phi(\vec{x}, t_0) e^{-iH(t-t_0)} \\ &= e^{iH(t-t_0)} e^{-iH_0(t-t_0)} \phi_I(\vec{x}, t_0) e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} \\ &= U^+(t, t_0) \phi_I(\vec{x}, t_0) U(t, t_0)\end{aligned}$$

wobei

$$U(t, t_0) \equiv e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)}$$

der **Zeitentwicklungsoperator** ist.

Wir bemerken, dass die zeitliche Ableitung des Operators gleich

$$\begin{aligned}i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) &= e^{iH_0(t-t_0)} (H - H_0) e^{-iH(t-t_0)} \\ &= \underbrace{e^{iH_0(t-t_0)} (H_{\text{Wechselwirkung}})}_{=H_W(t)} e^{-iH_0(t-t_0)} \underbrace{e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)}}_{=U(t, t_0)}\end{aligned}$$

ist, wobei $H_W(t)$ der (zeitabhängige) **Wechselwirkungsoperator im Wechselwirkungs-Bild** ist.

Wir können diese Differentialgleichung lösen:

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H_W(t) U(t, t_0) \quad \text{und} \quad U(t_0, t_0) = 1$$

Die formale Lösung ist gleich

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 H_W(t_1) U(t_1, t_0)$$

Wir können diese Integration *iterativ* berechnen:

$$\begin{aligned}
 U(t, t_0) &= 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 H_W(t_1) \left(1 - i \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_W(t_2) U(t_2, t_0) \right) \\
 &= 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_W(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_W(t_1) H_W(t_2) + \dots \\
 &\quad + (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_W(t_1) \dots H_W(t_n) + \dots
 \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_W(t_1) H_W(t_2) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T(H_W(t_1) H_W(t_2))$$

wobei T der **zeitordnende Dyson-Operator** ist.

Wenn wir alle Terme in ähnlicher Weise anordnen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
 U(t, t_0) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n T(H_W(t_1) \dots H_W(t_n)) \\
 &\equiv T \left(e^{-i \int_{t_0}^t dt' H_W(t')} \right)
 \end{aligned}$$

Die Ausbreitung wird dann definiert Taylor-Reihe von zeitgeordneten Termen !

In der Praxis werden wir nur die ersten Terme der Reihe berechnen (Siehe Kap. 11.4).

11.3.2 Die Streuamplitude

In der Störungstheorie (Siehe Kap. 4.3) haben wir die Übergangsamplitude zwischen Zuständen betrachtet. Um die Anordnung zu beschreiben, die wir in der Praxis treffen, haben wir die Übergangsamplitude zwischen $-T \rightarrow -\infty$ und $T \rightarrow +\infty$ angenommen. Hier sind wir am Zeitentwicklungsoperator zwischen $-\infty$ und $+\infty$ interessiert.

Die S-Matrix wird definiert als

$$\begin{aligned} S &\equiv U(-\infty, \infty) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T(H_W(t_1) \dots H_W(t_n)) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4 x_1 \dots \int d^4 x_n T(\mathcal{H}_W(t_1) \dots \mathcal{H}_W(t_n)) \end{aligned}$$

wobei \mathcal{H}_W die Hamiltondichte des Wechselwirkungsterms ist.

Die S-Matrix kann als eine Reihe von Termen dargestellt werden:

$$S \equiv 1 + S_1 + S_2 + \dots$$

wobei der n-te Term gleich

$$S_n = \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4 x_1 \dots \int d^4 x_n T(\mathcal{H}_W(t_1) \dots \mathcal{H}_W(t_n))$$

ist. Jeder Term kann im Prinzip berechnet werden, und die gesamte Amplitude wird dann als die Summe dieser Terme gewonnen.

Die Hamiltondichte ist gleich

$$\mathcal{H}_W = \frac{\partial \mathcal{L}_W}{\partial (\partial^0 \phi)} (\partial^0 \phi) - \mathcal{L}_W = -\mathcal{L}_W$$

wenn die Lagrangedichte unabhängig von der zeitlichen Ableitung des Feldes ist.

11.4 Elementare Prozesse in der QED

Aus Kap. 9.3.2 wissen wir, dass die Lagrangedichte der Wechselwirkung gleich

$$\mathcal{L}_W = -\left(J^\mu + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right)A_\mu = -\left(e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right)A_\mu \quad \text{wenn } J^\mu = 0$$

ist, wobei e die Ladung des Teilchens ist. Dann gilt

$$\mathcal{H}_W = \left(e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right)A_\mu$$

Die ersten Terme der S-Matrix-Entwicklung sind gleich

$$S_1 = \frac{(-ie)}{1} \int d^4x_1 \bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu\psi(x_1)A_\mu(x_1)$$

und

$$S_2 = \frac{(-ie)^2}{2} \iint d^4x_1 d^4x_2 T[\bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu\psi(x_1)A_\mu(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma^\nu\psi(x_2)A_\nu(x_2)]$$

usw...

Die *S-Matrix* wird deshalb als eine Reihe von Termen geschrieben, wobei der Term n -ter Ordnung proportional zur n -ten Potenz der Ladung ist:

$$S \equiv 1 + \underbrace{(-ie)(...)}_{\text{niedrigste Ordnung}} + \underbrace{(-ie)^2(...)}_{\text{nächste Ordnung}} + \dots$$

Die Beziehung zwischen elektrischer Ladung und der Feinstruktur-Konstante α ist die folgende:

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{137.036}$$

In natürlichen Einheiten ist dann die elektrische Ladung gleich

$$e = \sqrt{4\pi\alpha}$$

Diese Zahl ist ziemlich klein, deshalb erwarten wir, dass die Entwicklung der S-Matrix als Funktion der elektrischen Ladung schnell konvergieren wird und die Näherung mit nur einigen Termen wird im Allgemeinen eine gute Näherung sein.

11.5 Von der S-Matrix zu Feynman-Diagrammen

Im Allgemeinen sind wir an folgender Art von Vorgängen interessiert:

$$\underbrace{A + B + C + \dots}_{m \text{ Teilchen}} \rightarrow \underbrace{1 + 2 + 3 + \dots}_{n \text{ Teilchen}}$$

wobei die Anzahl m der Teilchen des Anfangszustands verschieden von der Anzahl n der Teilchen des Endzustands sein kann.

Jedes Teilchen wird durch seinen 4-Impuls und seine internen Freiheitsgrade (d.h. Spin) charakterisiert:

$$\begin{cases} p_A^\mu, p_B^\mu, p_C^\mu, \dots & p_1^\mu, p_2^\mu, p_3^\mu, \dots \\ \text{Spin } s_A, s_B, \dots, s_1, s_2, \dots \end{cases}$$

Vom Standpunkt der QFT werden wir die folgende Amplitude berechnen:

$$\underbrace{\langle p_1^\mu s_1, p_2^\mu s_2, p_3^\mu s_3 \dots |}_{\text{Endzustand}} S \underbrace{| p_A^\mu s_A, p_B^\mu s_B, p_C^\mu s_C \dots \rangle}_{\text{Anfangszustand}}$$

wobei die Teilchen den folgenden Zuständen entsprechen:

Spin 0 Boson:

$$|p_A^\mu\rangle = \sqrt{2E_A} a^+(\vec{p}_A) |0\rangle$$

Spin 1/2 Fermion (Dirac):

$$|p_A^\mu s_A\rangle = \sqrt{2E_A} a_s^+(\vec{p}_A) |0\rangle$$

Antifermion:

$$|p_A^\mu s_A\rangle = \sqrt{2E_A} b_s^+(\vec{p}_A) |0\rangle$$

d.h., ein allgemeiner Zustand mit vielen Teilchen (wie z.B. ein Anfangszustand mit spinlosen Teilchen) wird so erzeugt:

$$|p_A^\mu, p_B^\mu, p_C^\mu \dots \rangle = \sqrt{2E_A} a^+(\vec{p}_A) \sqrt{2E_B} a^+(\vec{p}_B) \sqrt{2E_C} a^+(\vec{p}_C) |0\rangle$$

11.5.1 Diagramme der niedrigsten Ordnung

Beispiel: Photon-Absorption an einem Elektron

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{e^- + \gamma} & \rightarrow & \overbrace{e^-} \\ \text{Anfangszustand} & & \text{Endzustand} \\ |e^- \gamma\rangle = |p_1^\mu s_1, p^\mu \epsilon^\mu\rangle & & |e^-\rangle = |p_2^\mu s_2\rangle \end{array}$$

In erster Ordnung müssen wir den ersten Term S_1 der S-Matrix betrachten:

$$S_1 = (-ie) \int d^4x \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x)$$

d.h., wir sind an der folgenden Amplitude interessiert:

$$(-ie) \int d^4x \langle p_2^\mu s_2 | \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu | p_1^\mu s_1, p^\mu \epsilon^\mu \rangle$$

wobei ψ und A_μ Feldoperatoren sind.

Wir betrachten den Dirac-Feldoperator und finden, dass gilt:

$$\begin{aligned} \psi |p_1^\mu s_1\rangle &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{s=1,2} (a_s(\vec{p}) u^{(s)}(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + b_s^+(\vec{p}) v^{(s)}(\vec{p}) e^{+ip \cdot x}) \\ &\quad \times \sqrt{2E_1} a_{s_1}^+(\vec{p}_1) |0\rangle \end{aligned}$$

Wir betrachten den Term, der den a -Operator enthält (wir sind an Elektronen interessiert) und erhalten:

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{E_1}{E_p}} \sum_{s=1,2} (a_s(\vec{p}) u^{(s)}(\vec{p}) e^{-ip \cdot x}) a_{s_1}^+(\vec{p}_1) |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{E_1}{E_p}} \sum_{s=1,2} u^{(s)}(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} a_s(\vec{p}) a_{s_1}^+(\vec{p}_1) |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{E_1}{E_p}} \sum_{s=1,2} u^{(s)}(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} \{a_s(\vec{p}), a_{s_1}^+(\vec{p}_1)\} |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{E_1}{E_p}} \sum_{s=1,2} u^{(s)}(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}_1) \delta_{s,s_1} |0\rangle \\ &\propto e^{-ip_1 \cdot x} u^{(s_1)}(\vec{p}_1) |0\rangle \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise kann man zeigen, dass der adjungierte Feldoperator den folgenden Term liefert:

$$\langle p_2^\mu s_2 | \bar{\psi} \rightarrow \langle 0 | e^{+ip_2 \cdot x} \bar{u}^{(s_2)}(\vec{p}_2)$$

und auch

$$A_\mu | p^\mu \varepsilon \rangle \rightarrow \varepsilon_\mu(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} | 0 \rangle$$

Es folgt, dass die gesamte Amplitude zu

$$(-ie) \int d^4x \langle 0 | e^{-i(p+p_1-p_2) \cdot x} \bar{u}^{(s_2)}(\vec{p}_2) \gamma^\mu u^{(s_1)}(\vec{p}_1) \varepsilon_\mu(\vec{p}) | 0 \rangle$$

proportional ist.

Die Integration liefert einen Term der Form:

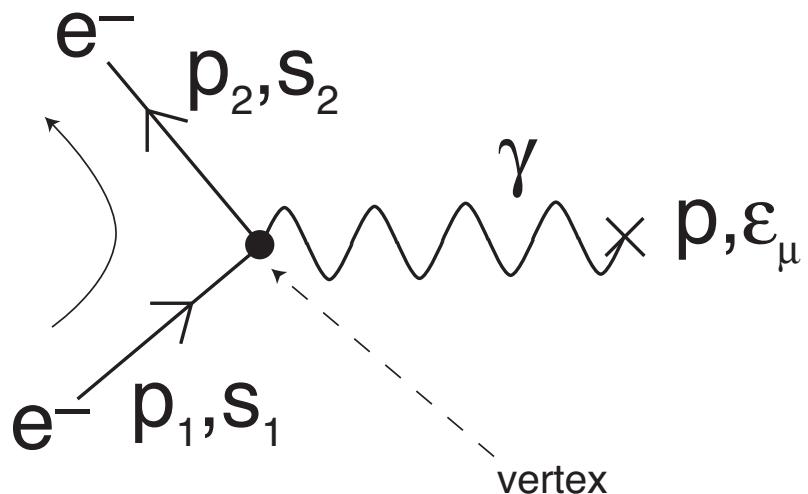
$$(-ie) \underbrace{\delta^{(4)}(p + p_1 - p_2)}_{\text{Energie-Impuls-Erhaltung}} \underbrace{(\bar{u}^{(s_2)}(\vec{p}_2) \gamma^\mu u^{(s_1)}(\vec{p}_1) \varepsilon_\mu(\vec{p}))}_{\text{Amplitude des Vorgangs}}$$

Die Dirac-Funktion entspricht der Bedingung der Energie-Impuls-Erhaltung. Der letzte Term gibt die Form der Amplitude des Vorgangs.

Die Amplitude des Vorgangs kann als ein Diagramm dargestellt werden.

Siehe Abb. 1.

In der Abbildung werden das einfallende und das auslaufende Elektron sowie das Photon als externe “Beine” gezeichnet. Die kinematischen (4-Impulse) und die internen Größen (Spin, usw.) werden neben den Beinen angezeigt.



Figur 1. Diagramm der Photon-Absorption an einem Elektron.

11.5.2 Feldkontraktion

Im Allgemeinen können wir Regeln angeben, die die Berechnung der Amplituden von beliebigen Vorgängen vereinfachen. Die folgenden Regeln müssen verwendet werden:

1. Wir betrachten die **Kontraktion der Felder**, wie z.B.

$$\langle p_2 s_2 | \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu | p_1 s_1, p \epsilon \rangle$$

Man spricht von der **Kontraktion der äusseren Beine**.

2. Die Kontraktion des elektromagnetischen Feldes mit einem Photonzustand liefert den folgenden Faktor in der Amplitude:

$$A_\mu |p, \varepsilon\rangle \rightarrow \varepsilon_\mu^{(s)}(p) \equiv \bullet \sim \sim \sim \sim$$

3. Die Kontraktion des Dirac-Spinorfeldes mit einem Elektronenzustand liefert ein *einfallendes* Elektron der Form:

$$\psi |p, s\rangle \rightarrow u^{(s)}(p) \equiv \bullet \leftarrow$$

4. Die Kontraktion des adjungierten Dirac-Spinorfeldes mit einem Elektronenzustand liefert ein *auslaufendes* Elektron der Form:

$$\langle p, s| \bar{\psi} \rightarrow \bar{u}^{(s)}(p) \equiv \leftarrow \bullet$$

5. Der Vertex-Faktor ist gleich

$$(-ie)\gamma^\mu$$

Im Fall eines Positrons werden wir die folgenden Regeln verwenden:

1. Die Kontraktion des adjungierten Dirac-Spinorfeldes mit einem Positronenzustand liefert ein *einfallendes* Positron der Form:

$$\bar{\psi} |p, s\rangle \rightarrow \bar{v}^{(s)}(p) \equiv \bullet \rightarrow$$

(Beachte die Richtung des Pfeils!)

2. Die Kontraktion des Dirac-Spinorfeldes mit einem Positronzustand liefert ein *auslaufendes* Positron der Form:

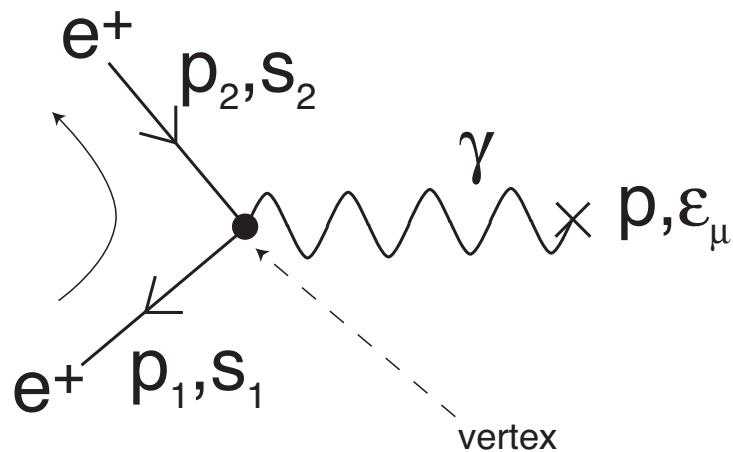
$$\langle p, s | \psi \rightarrow v^{(s)}(p) \equiv \text{auslaufendes Positron}$$

(Beachte die Richtung des Pfeils!)

Beispiel: Photon-Absorption an einem Positron

Das Diagramm ist das folgende:

$$e^+ \gamma \rightarrow e^+$$



Die entsprechende Amplitude ist gleich

$$(-ie)\delta^{(4)}(p + p_1 - p_2) \underbrace{\left(\bar{v}^{(s_1)}(\vec{p}_1)\gamma^\mu v^{(s_1)}(\vec{p}_2)\epsilon_\mu(\vec{p})\right)}_{\text{Amplitude des Vorgangs}}$$

11.5.3 Diagramme der nächsten Ordnung; das Wick-Theorem

Wir müssen den zweiten Term der S-Matrix betrachten:

$$S_2 = \frac{(-ie)^2}{2} \iint d^4x_1 d^4x_2 T[\bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu\psi(x_1)A_\mu(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma^\nu\psi(x_2)A_\nu(x_2)]$$

der auf den Anfangs- und Endzustand wirkt, d.h.,

$$\langle \dots | S_2 | \dots \rangle$$

Man verwendet das **Wick-Theorem**, um das zeitgeordnete Produkt zu berechnen.

11.5.4 Elektron-Myon-Streuung

Das **Myon** ist ein “schweres Elektron”, d.h. es besitzt dieselben Eigenschaften wie das Elektron, ausser der Ruhemasse:

$$m_e \approx 0,511003 \text{ MeV}$$

$$m_\mu \approx 105,659 \text{ MeV} \approx 200 \times m_e$$

Der Hauptzerrfallskanal ist

$$\mu \rightarrow e VV \quad \tau \approx 2,2 \mu s \quad c\tau \approx 660 m$$

Wir betrachten den elastischen Streuprozess:

$$e^-(p_1, s_1) + \mu^-(k_1, t_1) \rightarrow e^-(p_2, s_2) + \mu^-(k_2, t_2)$$

d.h., wir wollen die folgende Amplitude berechnen:

$$\langle p_2, s_2; k_2, t_2 | T\left(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu|_{x_1} \bar{\psi} \gamma^\nu \psi A_\nu|_{x_2}\right) | p_1, s_1; k_1, t_1 \rangle$$

Als Folge des Wick-Theorems gilt

$$\langle |T(|\dots\rangle = \langle |N(\dots + alle \ möglichen \ Kontraktionen)|\dots\rangle$$

d.h. wir müssen jedes mögliche Diagramm betrachten¹.

Z.B.,

$$\langle p_2, s_2; k_2, t_2 | \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu \bar{\psi} \gamma^\nu \psi A_\nu | p_1, s_1; k_1, t_1 \rangle$$

wobei die Kontraktion von zwei elektromagnetischen Potentialen dem **Photon-Propagator** entspricht:

$$A^\mu A^\nu \rightarrow \left(\frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \right) \quad \bullet \sim \text{wavy line} \sim \bullet$$

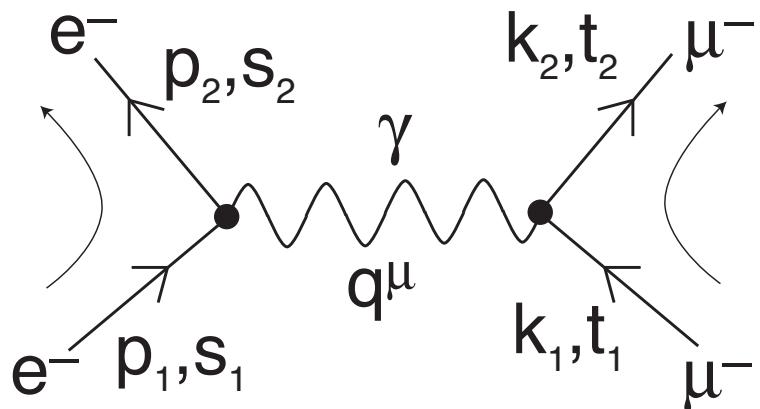
Diese Kontraktion entspricht dem Diagramm, das in Abb. 2 gezeigt ist.

1. Man kann beweisen, dass nur ganz verbundene Diagramme (d.h. bei denen die äusseren Beine verbunden sind) beitragen.

Die entsprechende Amplitude ist gleich (wir vernachlässigen die Spins):

$$\begin{aligned}
 & (-ie)^2 \underbrace{\left(\bar{u}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) \right)}_{\text{Strom des Elektrons}} \underbrace{\left(\frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \right)}_{\text{Photon-Propagator}} \underbrace{\left(\bar{u}(k_2) \gamma_\nu u(k_1) \right)}_{\text{Strom des Myons}} \times \\
 & \underbrace{\delta^{(4)}(p_1 - p_2 - q) \delta^{(4)}(k_1 + q - k_2)}_{\text{Energie-Erhaltung an jedem Vertex}}
 \end{aligned}$$

$e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$

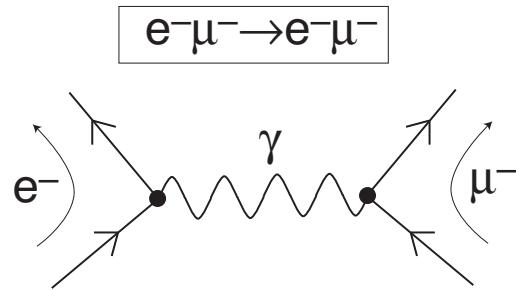


Figur 2. Diagramm der Elektron-Myon-Streuung.

11.5.5 Elementare Prozesse

Wir können verschiedene elementare Prozesse betrachten:

1. Elastische Elektron-Myon-Streuung

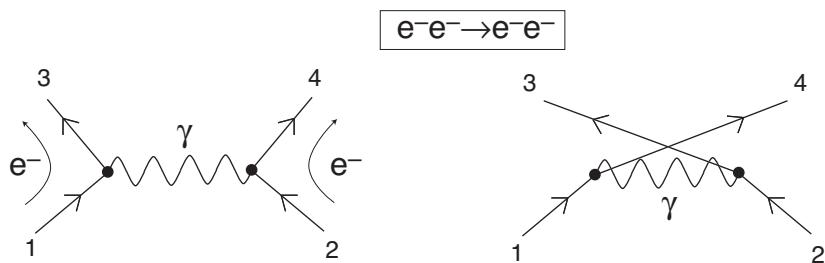


Man spricht von **Photon-Austausch-Diagramm**.

2. Elastische Elektron-Elektron-Streuung (Möller-Streuung)

Das Wick-Theorem sagt voraus, dass man alle Diagramme betrachten muss. Die gesamte Amplitude ist gleich der Summe der Amplituden aller Diagramme.

*Im Fall der Möller-Streuung betrachten wir zwei Diagramme, weil die auslaufenden Teilchen **ununterscheidbar** sind und deshalb kann nicht entscheiden werden, von welchen Vertex die auslaufenden Teilchen stammen:*



Wie sollen wir die Diagramme addieren? Wir müssen nun etwas über das Vorzeichen bemerken. Die Q.F.T. sagt voraus, dass sich unter Vertauschung von ununterscheidbaren Fermionen das Vorzeichen der Amplitude ändern muss (d.h. Antikommulation).

Als Folge *haben die Amplituden der beiden Diagramme ein entgegengesetztes Vorzeichen*, d.h. die gesamte Amplitude ist gleich

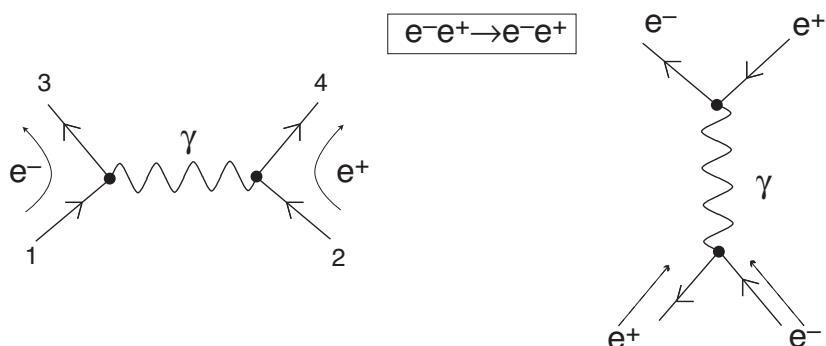
$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_2$$

wobei \mathcal{M}_1 die Amplitude des ersten Diagramms und \mathcal{M}_2 die des zweiten ist.

Das entgegengesetzte Vorzeichen berücksichtigt den Austausch von ununterscheidbaren Fermionen.

3. Elastische Elektron-Positron-Streuung (**Bhabha-Streuung**)

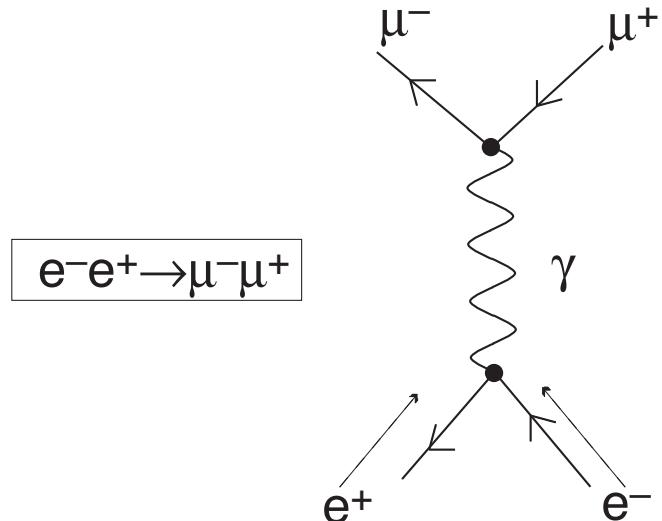
In diesem Fall müssen wir zwei Diagramme betrachten:
den **Photon-Austausch-** und den **Vernichtungs-Vorgang**:



Wie sollen wir die Diagramme addieren? Wie im Fall der Möller-Streuung gibt es ein negatives Vorzeichen zwischen den Diagrammen.

Das entgegengesetzte Vorzeichen berücksichtigt den Austausch von einem einfallenden Elektron und einem auslaufenden Positron.

4. Inelastische Myonpaar-Erzeugung



11.5.6 Boson- und Fermion-Propagator

Wir haben bis jetzt nur den Photon-Propagator angetroffen. Man kann auch die Propagatoren von anderen Bosonen oder von Fermionen betrachten.

Sie werden durch die Kontraktion zweier Felder gewonnen:

$$\text{Spin 0 Boson: } \overline{\phi(x)\phi(y)} = D_F(x-y) \rightarrow \left(\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right)$$

----->-----
p^μ

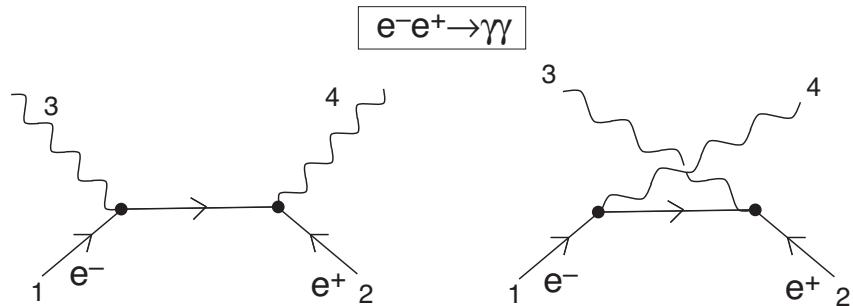
$$\text{Dirac-Teilchen: } \overline{\psi(x)\bar{\psi}(y)} = S_F(x-y) \rightarrow \left(\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right) = \left(\frac{i \sum u\bar{u}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right)$$

—————>—————
p^μ

In diesen Propagatoren berücksichtigt der Faktor ϵ die Singularität, wenn $p^2 = m^2$.

Der Propagator des Dirac-Teilchens ist eine 4x4-Matrix.

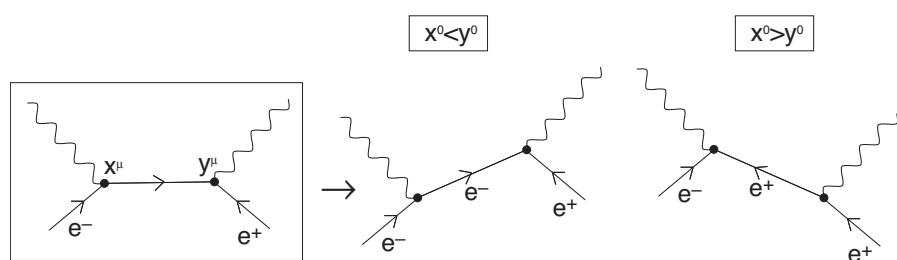
1. Paar-Vernichtung $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$



In diesen Diagrammen bemerken wir die Anwesenheit eines Elektron-Propagators. In welcher Richtung bewegt sich das Elektron?

Der Propagator entspricht dem *Feynman-Propagator* des Elektrons. In einer kovarianten Theorie können wir die Ausbreitung eines *Elektrons* vorwärts in der Zeit nicht von der Ausbreitung eines *Positrons* rückwärts in der Zeit unterscheiden.

Die physikalische Interpretation des Diagramms ist dann die folgende:



Das kovariante Diagramm ist tatsächlich die Summe von zwei

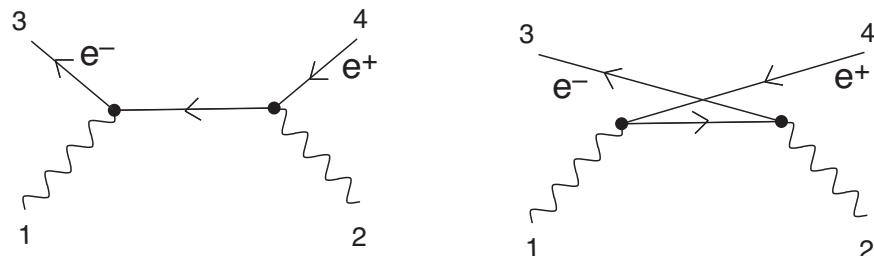
unabhängigen Termen. Jeder Term für sich allein ist nicht kovariant, aber die Summe ist in kovarianter Form ausgedrückt.

Wenn $x^0 < y^0$, sprechen wir von der Ausbreitung eines Elektrons, das sich mit dem einfallenden Positron vernichten wird. Wenn $x^0 > y^0$, können wir das Diagramm wie die Ausbreitung eines Positrons darstellen, wobei das Positron sich mit dem einfallenden Elektron vernichtet.

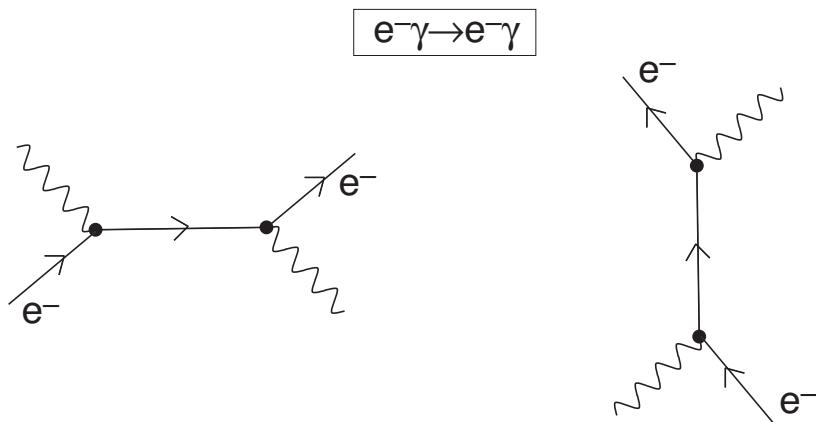
Wie schon erwähnt, hat Feynman diese Eigenschaft so interpretiert: Materie und Antimaterie sind nötig, um eine kovariante Theorie zu bekommen.

2. Paar-Erzeugung $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-$

$$\boxed{\gamma\gamma \rightarrow e^-e^+}$$



3. Compton-Streuung $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$



11.6 Berechnung eines Feynman-Diagramms

Nach vielen Kapiteln über Formalismus sind wir nun bereit, die relativistische Berechnung einer Prozessamplitude im Bereich der QED durchzuführen.

In der Praxis werden wir die Amplitude so ausdrücken:

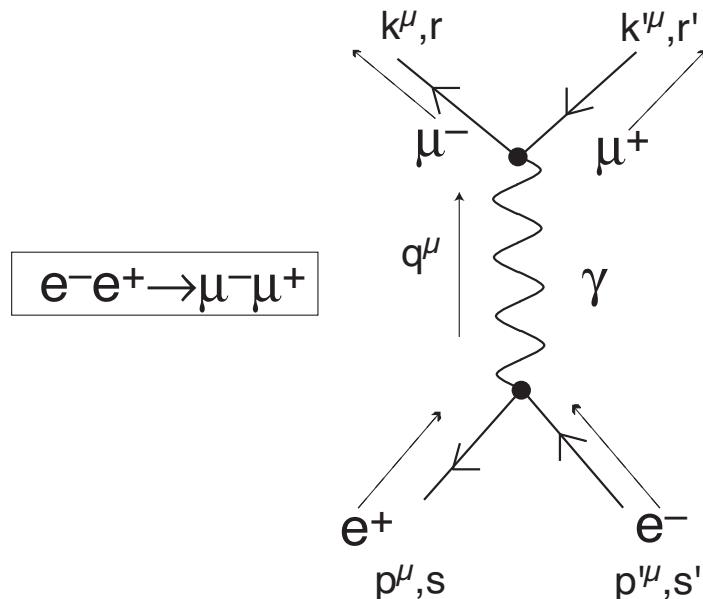
$$Amplitude \equiv (-i\mathcal{M}) \times (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_{\text{Anfangszustand}} p_i - \sum_{\text{Endzustand}} p_f \right)$$

wobei wir die gesamte Amplitude in die Amplitude des Prozesses und die Energie-Impuls-Erhaltung getrennt haben. Die Amplitude \mathcal{M} wird als die **invariante Amplitude** (oder **Matrix-Element**) bezeichnet.

Wir betrachten den folgenden Prozess: $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$.

Die Definitionen der kinematischen Größen werden in Abb. 3 gezeigt. Der 4-Impuls des Photons ist gleich

$$q^\mu \equiv 4\text{-Impuls des Photons} = \\ = (p^\mu + p'^\mu) = (k^\mu + k'^\mu)$$



Figur 3. Definition der kinematischen Größen.

Berechnung eines Feynman-Diagramms

Die invariante Amplitude ist gleich

$$-i\mathcal{M} = \left(\underbrace{\bar{v}^{(s')}(p')}_{\text{Einfallendes Positron}} \left(-ie\gamma_\mu \right) \underbrace{u^{(s)}(p)}_{\text{Einfallendes Elektron}} \right) \left(\frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \right) \times \\ \left(\underbrace{\bar{u}^{(r)}(k)}_{\text{Auslaufendes Myon}} \left(-ie\gamma_\nu \right) \underbrace{v^{(r')}(k')}_{\text{Auslaufendes Anti-Myon}} \right)$$

Wenn wir die Spinindizes zuerst vernachlässigen, können wir die invariante Amplitude so ordnen:

$$-i\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{ie^2}{q^2} (\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p))(\bar{u}(k)\gamma_\mu v(k'))$$

Die **Wahrscheinlichkeit des Vorgangs** (d.h. der Wirkungsquerschnitt) hängt vom *Betragsquadrat der Amplitude* ab:

$$d\sigma \propto |\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}^* \mathcal{M}$$

Wir bemerken, dass gilt

$$(\bar{v}\gamma^\mu u)^* = (u^+\gamma^{\mu+}\gamma^{0+}v) = (u^+\gamma^{\mu+}\gamma^0 v) = (u^+\gamma^0\gamma^{\mu+}v) = (\bar{u}\gamma^\mu v)$$

Es folgt daraus,

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} (\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p)\bar{u}(p)\gamma^\nu v(p'))(\bar{u}(k)\gamma_\mu v(k')\bar{v}(k')\gamma_\nu u(k))$$

Mit diesem Ausdruck können wir für beliebige Spinoren $u^{(s)}(p)$, $v^{(s')}(p')$, usw. die Wahrscheinlichkeit des Prozesses bestimmen.

In der Praxis ist es schwierig, die Spinzustände von den verschiedenen Teilchen zu kontrollieren.

Anfangszustand: *Im Fall des Anfangszustands ist es manchmal möglich polarisierte Teilchen zu verwenden. In diesem Fall müssen wir bestimmte Spinzustände betrachten. Wenn die Polarisation der Teilchen nicht möglich ist (d.h. der Anfangszustand nicht polarisiert ist), müssen wir über die Spinzustände mitteln.*

Endzustand: *wenn die Spins des Endzustands nicht gemessen werden, müssen wir die Summe der Spinzustände berechnen.*

Im Fall des $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ Vorgangs werden das Mittel der Elektronspins und die Summe über die Myonspins berechnet, d.h. die mittlere invariante Amplitude ist gleich

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle \equiv \frac{1}{2} \sum_s \frac{1}{2} \sum_{s'} \sum_r \sum_{r'} |\mathcal{M}(s, s' \rightarrow r, r')|^2$$

Die Summe sieht kompliziert aus. Sie kann jedoch mit Hilfe von Spur-Theoremen vereinfacht werden.

Wir können die Invariante-Amplitude in zwei Teile trennen:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle \equiv \frac{e^4}{q^4} L_{\text{Elektron}}^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^{\text{Myon}}$$

wobei

$$L_{\text{Elektron}}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_s \frac{1}{2} \sum_{s'} (\bar{v}^{(s')}(p') \gamma^\mu u^{(s)}(p) \bar{u}^{(s)}(p) \gamma^\nu v^{(s')}(p'))$$

Berechnung eines Feynman-Diagramms

Wir verwenden die Vollständigkeitsrelationen für Dirac-Spinoren
(Siehe Übung Serie 12)

$$\sum_s (u^{(s)}(p) \bar{u}^{(s)}(p)) = \gamma^\mu p_\mu + m = p + m$$

$$\sum_s (v^{(s)}(p) \bar{v}^{(s)}(p)) = p - m$$

Wir können $L_{\text{Elektron}}^{\mu\nu}$ mit Indizes ausdrücken als

$$L_{\text{Elektron}}^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \sum_{s,s'} \bar{v}_a^{(s')} \gamma_{ab}^\mu u_b^{(s)} \bar{u}_c^{(s)} \gamma_{cd}^\nu v_d^{(s')}$$

Mit Hilfe der Vollständigkeitsrelationen erhalten wir

$$L_{\text{Elektron}}^{\mu\nu} = \frac{1}{4} (\not{p}' - m_e)_{da} \gamma_{ab}^\mu (\not{p} + m_e)_{bc} \gamma_{cd}^\nu$$

Die verschiedenen Terme enthalten die folgenden Indizes: da, ab, bc und cd . Wenn wir über die Indizes summieren, erhalten wir schliesslich die folgende einfache Spur:

$$L_{\text{Elektron}}^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \text{Tr}((\not{p}' - m_e) \gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^\nu)$$

In ähnlicher Weise kann man den Ausdruck für das Myon bestimmen und schliesslich gilt:

$$\left\langle \left| \mathcal{M}(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-) \right|^2 \right\rangle \equiv \frac{1}{4} \frac{e^4}{q^4} \text{Tr}((\not{p}' - m_e) \gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^\nu) \times \\ \text{Tr}((\not{k} + m_\mu) \gamma_\mu (\not{k}' - m_\mu) \gamma_\nu)$$

In dieser Gleichung gibt es keine Spinoren mehr. Das Problem wurde auf die Berechnung von Spuren reduziert.

Spurtheoremen: Man kann die Spuren mit Hilfe der algebraischen Eigenschaften der γ -Matrizen herleiten.

Wir bemerken,

$$Tr(1) = 4 \quad \text{und} \quad Tr\gamma^\mu = 0$$

In eleganter Weise:

$$Tr\gamma^\mu = Tr\gamma^5\gamma^5\gamma^\mu = -Tr\gamma^5\gamma^\mu\gamma^5 = -Tr\gamma^5\gamma^5\gamma^\mu = -Tr\gamma^\mu = 0$$

wobei wir die Spureigenschaft $Tr(ABC)=Tr(CAB)$ und die Eigenarten der γ -Matrizen benutzt haben.

Es gilt auch,

$$\begin{aligned} Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu) &= Tr(2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu) \\ &= 2g^{\mu\nu}Tr(1) - Tr(\gamma^\nu\gamma^\mu) \\ &= 8g^{\mu\nu} - Tr(\gamma^\nu\gamma^\mu) \\ \Rightarrow Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Falls wir das Produkt von 4 γ -Matrizen betrachten:

$$\begin{aligned} Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) &= Tr(2g^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma) \\ &= Tr(2g^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\nu 2g^{\mu\rho}\gamma^\sigma + \gamma^\nu\gamma^\rho 2g^{\mu\sigma} - \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu) \\ \Rightarrow Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) &= g^{\mu\nu}Tr(\gamma^\rho\gamma^\sigma) - g^{\mu\sigma}Tr(\gamma^\nu\gamma^\sigma) + g^{\mu\sigma}Tr(\gamma^\nu\gamma^\rho) \\ &= 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \end{aligned}$$

Berechnung eines Feynman-Diagramms

Allgemein gilt: *die Spur von einer ungeraden Anzahl von γ -Matrizen verschwindet:*

$$Tr\left(\left(\gamma^\mu\right)^{\text{ungerade Anzahl}}\right) = Tr\left(\gamma^5 \gamma^5 \left(\gamma^\mu\right)^{\text{ungerade Anzahl}}\right) = 0$$

und es gilt auch

$$Tr(\gamma^5) = 0 \quad Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5) = 0 \quad Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5) = -4i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

Berechnung des Elektron-Positron-Vernichtungs-Diagramms.

Mit den Spurtheoremen erhalten wir

$$\begin{aligned} & Tr\left((p' - m_e) \gamma^\mu (p + m_e) \gamma^\nu\right) = \\ &= Tr\left(p' \gamma^\mu p \gamma^\nu + \underbrace{(-m_e) \gamma^\mu p \gamma^\nu}_{=0 \text{ weil ungerade Anzahl von } \gamma\text{-Matrizen}} + \underbrace{m_e p' \gamma^\mu \gamma^\nu}_{=0 \text{ weil ungerade Anzahl von } \gamma\text{-Matrizen}} - m_e^2 \gamma^\mu \gamma^\nu\right) \\ &= Tr(p' \gamma^\mu p \gamma^\nu) - m_e^2 \underbrace{Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu)}_{=4g^{\mu\nu}} \\ &= p_\alpha' p_\beta Tr(\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu) - m_e^2 \underbrace{Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu)}_{=4g^{\mu\nu}} \end{aligned}$$

Die Spur von den 4 γ -Matrizen liefert:

$$\begin{aligned} p_\alpha' p_\beta Tr(\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu) &= 4 p_\alpha' p_\beta (g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\mu\beta}) \\ &= 4 \left(p^\mu' p^\nu - (p' \cdot p) g^{\mu\nu} + p^\nu' p^\mu \right) \end{aligned}$$

und schliesslich

$$Tr((p' - m_e)\gamma^\mu(p + m_e)\gamma^\nu) = 4 \left(p^{\mu'} p^\nu + p^{\nu'} p^\mu - g^{\mu\nu} (p' \cdot p + m_e^2) \right)$$

In ähnlicher Weise liefert die Myon-Spur das folgende Ergebnis:

$$4 \left(k^{\mu'} k^\nu + k^{\nu'} k^\mu - g^{\mu\nu} (k' \cdot k + m_\mu^2) \right)$$

Wir vernachlässigen die Elektronruhemasse relativ zur Myonruhemasse:

$$m_e \ll m_\mu \approx 200 m_e \quad \Rightarrow \quad m_e = 0$$

In diesem Fall erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle |M(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|^2 \rangle &= \frac{16}{4} \frac{e^4}{q^4} \left(p^{\mu'} p^\nu + p^{\nu'} p^\mu - g^{\mu\nu} (p' \cdot p) \right) \times \\ &\quad \left(k_\mu' k_\nu + k_\nu' k_\mu - g_{\mu\nu} (k' \cdot k + m_\mu^2) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{16}{4} \frac{e^4}{q^4} \left\{ ((p' \cdot k') (p \cdot k) + (p \cdot k') (p' \cdot k)) \times 2 \right. \\ &\quad - (p \cdot p') (k \cdot k') \times 2 + \underbrace{g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}}_{=4} (p \cdot p') (k' \cdot k + m_\mu^2) \\ &\quad \left. - (p \cdot p') (k \cdot k' + m_\mu^2) \times 2 \right\} \end{aligned}$$

Berechnung eines Feynman-Diagramms

$$= 2 \left(\frac{16}{4} \frac{e^4}{q^4} \right) \left\{ ((p'k')(pk) + (pk')(p'k)) - (pp')(kk') + 2(pp')(kk') - (pp')(kk') + m_\mu^2 (pp') \right\}$$

und schliesslich ist die nicht-polarisierte invariante Amplitude gleich

$$\left\langle \left| \mathcal{M}(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-) \right|^2 \right\rangle = \frac{8e^4}{q^4} \left\{ (pk)(p'k') + (pk')(p'k) + m_\mu^2 (pp') \right\}$$

Diese Amplitude sieht explizit kovariant aus!

Propagatortheorie

Quantenelektrodynamik (QED)

12.1 Einleitung

Wir können die Ergebnisse der letzten Kapitel zusammenfassen. Wir beginnen mit der Lagrange-Funktion der QED-Theorie (Siehe Kap. 9.3.2)

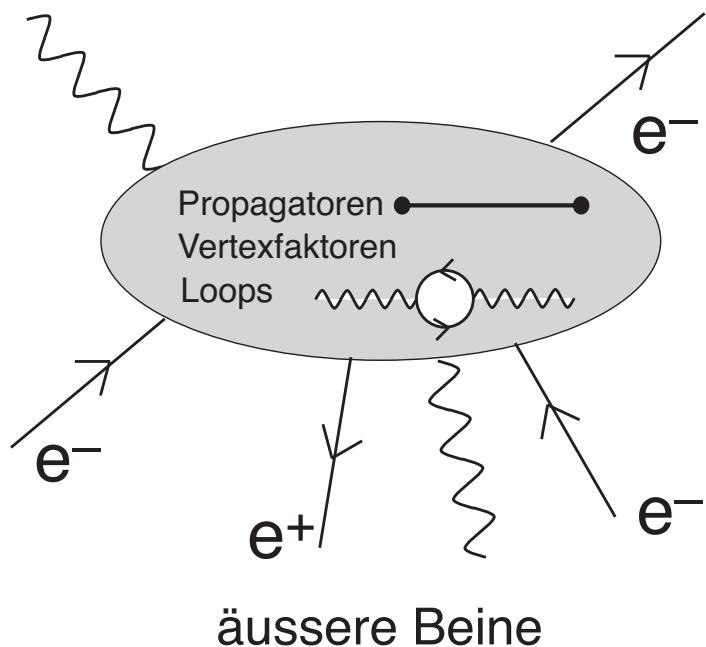
$$\mathcal{L}_{QED} = \underbrace{\bar{\psi} [\gamma^\mu i\partial_\mu - m] \psi}_{\text{freie Teilchen}} - \underbrace{\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - e(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) A_\mu}_{\text{Wechselwirkung}}$$

Der erste Teil der Lagrange-Funktion, der die freien Teilchen der Theorie (d.h. Dirac-Elektronen/Positronen und Maxwellsche-Photonen) beschreibt, liefert die Form der Propagatoren (Siehe Kap. 11.5.6 für Elektron- und Positron-Propagatoren und Kap. 11.5.4 für den Photon-Propagator).

Der zweite Teil der Lagrange-Funktion liefert die Form der Vertexfaktoren.

Die Amplitude \mathcal{M} eines Prozesses wird mit einer Gesamtheit von Diagrammen assoziiert. Im Allgemeinen enthalten die Diagramme die folgenden Teile (Siehe Abb. 1):

1. äussere Beine
2. freie Propagatoren
3. Vertexfaktoren
4. interne Diagramme (wie z.B. interne “Loops”)



Figur 1. Die verschiedenen Teile von Feynman-Diagrammen.

Die äusseren Beine sind durch ihre kinematischen (4-Impulse) und internen (Spin, usw.) Grössen charakterisiert.

Einleitung

Wir fassen die Regeln zusammen, um die Berechnung der Amplitude von den Diagrammen durchzuführen:

1. **Externe Beine:** Bezeichnen der einlaufenden und auslaufenden 4-Impulse (p_1, p_2, \dots) und der entsprechenden internen Größen (Spins s_1, s_2 , usw.). Richtung der Pfeile an den äusseren Beinen angeben.
2. **Berechnung der externen Beine:** jedes Bein trägt einen Faktor bei wie in Tabelle 1 angegeben

Tabelle 1. Faktoren der verschiedenen Art von externen Beine.

e^-	einlaufend	u
	auslaufend	\bar{u}
e^+	einlaufend	v
	auslaufend	\bar{v}
γ	einlaufend	ϵ^μ
	auslaufend	$\epsilon^{*\mu}$

3. **Vertexfaktoren:** Jeder Vertex trägt den Faktor

$$(-ie\gamma^\mu)$$

bei, wobei e die elektrische Ladung ($e>0$) ist.

4. **Propagatoren:** Jede interne Linie trägt einen Faktor, wie in der Tabelle 2 gezeigt, bei:

Tabelle 2. Propagatoren.

Spin 1/2 Fermion

$$\frac{i(p+m)}{p^2 - m^2(+i\varepsilon)}$$

Spin 0 Boson

$$\frac{i}{p^2 - m^2(+i\varepsilon)}$$

Spin 1 Photon

$$\frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2}$$

5. **Interne Energie-Impuls-Erhaltung:** In jedem Vertex muss der gesamte Energie-Impuls-4-Vektor erhalten werden, d.h. für jeden Vertex erhalten wir eine bestimmte δ -Funktion, wie z.B.

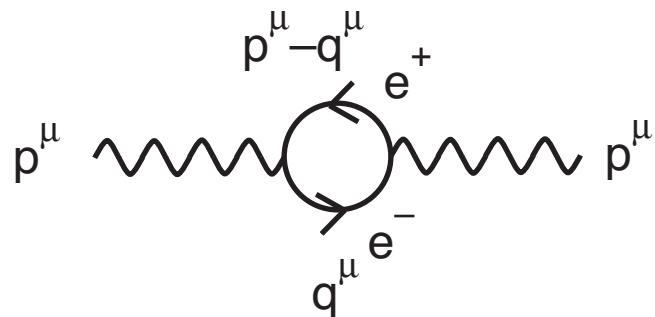
$$(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - k_3)$$

6. **Integration über interne Impulse:** im Fall, dass es interne “Loops” gibt, muss über den internen Impuls integriert werden, d.h.

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$$

Ein Diagramm mit einem “Fermion-Loop” besitzt ein negatives Vorzeichen. Die Spur der Matrizen, die dem Loop entsprechen,

muss berechnet werden.



Figur 2. Die Definition eines Loops.

7. **Gesamte δ -Funktion:** Die Amplitude muss einen Faktor besitzen, der die allgemeine Energie-Impuls-Erhaltung beschreibt, d.h. z.B.

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_{\text{Anfangszustand}} p_i - \sum_{\text{Endzustand}} p_f \right)$$

8. **Antisymmetrisierung:** ein negatives Vorzeichen muss zwischen Diagrammen eingeschlossen werden, die sich nur durch den Austausch von Fermionen unterscheiden, wie z.B.
(a) zwei einfallende Elektronen (oder Positronen)

$$e^- e^- \rightarrow e^- e^-$$

- (b) ein einfallendes Elektron und ein auslaufendes Positron

$$e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$$

12.2 Der $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ Prozess

Wir fahren mit der vollständigen Berechnung des $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ Prozesses weiter.

Wir haben die invariante Amplitude $\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ schon bestimmt und dazu die Spurtheoreme benutzt, um das Mittel der Anfangszustandsspins (Elektronenspins) und die Summe der Endzustandsspins (Myonenspins) zu berechnen (Siehe Kap. 11.6, die Masse des Elektrons wurde gegenüber der Masse des Myons vernachlässigt):

$$\left\langle \left| \mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) \right|^2 \right\rangle = \frac{8e^4}{q^4} \{ (pk)(p'k') + (pk')(p'k) + m_\mu^2 (pp') \}$$

wobei die 4-Impulse so definiert sind:

$$e^+(p'^\mu) e^-(p^\mu) \rightarrow \mu^+(k'^\mu) \mu^-(k^\mu)$$

Wir wählen ein bestimmtes Bezugssystem. Ein natürliches Bezugssystem ist in diesem Fall das **Schwerpunktssystem (SP)**:

Elektron, Positron (wir vernachlässigen die Ruhemasse des Elektrons):

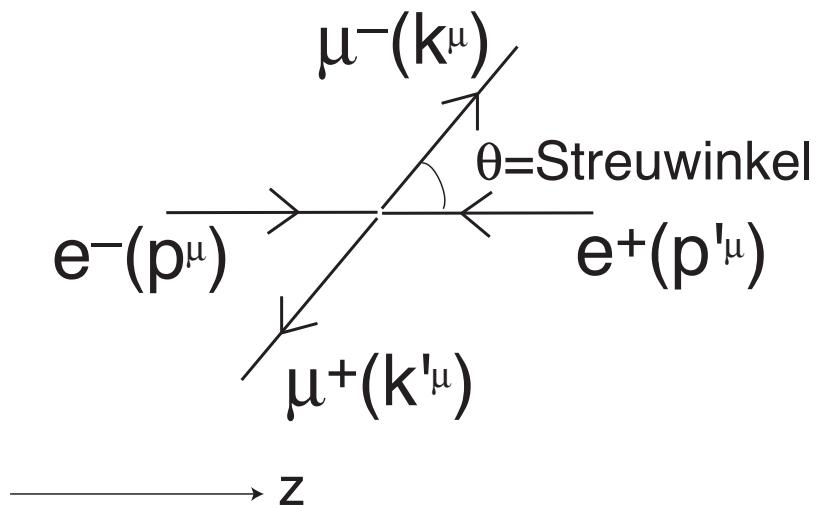
$$p^\mu = (E, E\vec{z}) \quad p'^\mu = (E, -E\vec{z}) \quad (E \gg m_e \Rightarrow m_e = 0)$$

Myon, Antimyon:

$$k^\mu = (E, \vec{k}) \quad k'^\mu = (E, -\vec{k})$$

Siehe Abb. 3.

Streuung im Schwerpunktssystem



Figur 3. Definition der kinematischen Größen im Schwerpunktssystem der Reaktion.

Für das ausgetauschte Photon des Feynman-Diagramms gilt (Siehe Kap. 11.6 und Abb. 2 im Kap. 11)

$$q^\mu \equiv 4 - \text{Impuls des Photons} = (p^\mu + p'^\mu) = (k^\mu + k'^\mu)$$

und

$$q^2 = (p^\mu + p'^\mu)^2 = 4E^2 = (2E)^2 \neq 0$$

Es folgt, dass die Masse des ausgetauschten Photons nicht verschwindet. Man spricht von einem **virtuellen Photon** γ^* , dessen virtuelle Masse nicht auf der Massenschale (“**on-shell**”) liegt:

$$m_{\gamma^*}^2 = q^2 \neq 0$$

Man kann sich die Reaktion so vorstellen: ein Elektron-Positron-Paar vernichtet sich in ein virtuelles Photon:

$$e^+ e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \mu^+ \mu^-$$

Wir bemerken tatsächlich, dass die Ruhemasse des Photons gleich der Energie des Schwerpunkts ist

$$q^2 = (2E)^2 = E_{SP}^2$$

Das virtuelle Photon zerfällt in ein Myon-Antimyon-Paar.

Aus den kinematischen Größen folgt

$$\begin{aligned}(p \cdot k) &= (p' \cdot k') = E^2 - E|\vec{k}|\cos\theta \\(p \cdot k') &= (p' \cdot k) = E^2 + E|\vec{k}|\cos\theta \\(p \cdot p') &= 2E^2\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\left\langle \left| \mathcal{M}(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-) \right|^2 \right\rangle &= \\ \frac{8e^4}{16E^4} \left\{ \left(E^2 - E|\vec{k}|\cos\theta \right)^2 + \left(E^2 + E|\vec{k}|\cos\theta \right)^2 + 2m_\mu^2 E^2 \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{e^4}{2} \left\{ \left(1 - \frac{|\vec{k}|}{E} \cos \theta \right)^2 + \left(1 + \frac{|\vec{k}|}{E} \cos \theta \right)^2 + \frac{2m_\mu^2}{E^2} \right\} \\
 &= \frac{e^4}{2} \left\{ 2 + 2 \left(\frac{|\vec{k}|}{E} \cos \theta \right)^2 + \frac{2m_\mu^2}{E^2} \right\} \\
 &= e^4 \left\{ 1 + \frac{m_\mu^2}{E^2} + \frac{|\vec{k}|^2}{E^2} \cos^2 \theta \right\} \\
 &= e^4 \left\{ \left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2} \right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2} \right) \cos^2 \theta \right\}
 \end{aligned}$$

Matrixelement für $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

Wir bemerken die Streuwinkelabhängigkeit. Im ultra-relativistischen Grenzfall, d.h. $E \gg m_\mu$, gilt

$$\langle |M|^2 \rangle \propto 1 + \cos^2 \theta \quad im \quad SP$$

12.2.1 Mandelstam-Variablen

Für die Reaktion

$$e^+(p'^\mu) e^-(p^\mu) \rightarrow \mu^+(k'^\mu) \mu^-(k^\mu)$$

werden die Mandelstam-Variablen so definiert:

$$\boxed{\begin{cases} s \equiv (p + p')^2 = (k + k')^2 \\ t \equiv (k - p)^2 = (k' - p')^2 \\ u \equiv (k' - p)^2 = (k - p')^2 \end{cases}}$$

Wir nehmen den ultra-relativistischen Grenzfall an, d.h.

$$E \gg m_e, m_\mu$$

und es gilt,

$$\boxed{\begin{cases} s \equiv q^2 \\ t \equiv (k - p)^2 = (k' - p')^2 = -2k \cdot p + k^2 + p^2 = \\ \quad = -2k \cdot p + m_\mu^2 + m_e^2 \approx -2k \cdot p \approx -2k' \cdot p' \\ u \equiv (k' - p)^2 = (k - p')^2 \approx -2k' \cdot p \approx -2k \cdot p' \end{cases}}$$

d.h.

$$(p \cdot k) = (p' \cdot k') \approx -\frac{t}{2} \quad \text{und} \quad (p \cdot k') = (p' \cdot k) \approx -\frac{u}{2}$$

und

$$\boxed{\begin{aligned} \langle |M(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|^2 \rangle &= \frac{8e^4}{q^4} \{ (pk)(p'k') + (pk')(p'k) + m_\mu^2 (pp') \} \\ &\approx \frac{8e^4}{s^2} \left\{ \left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2 \right\} \\ &\approx (2e^4) \left\{ \frac{t^2 + u^2}{s^2} \right\} \quad \text{ultra-relativistisch} \end{aligned}}$$

Man spricht vom “**s-Kanal**”, weil im Nenner des Matrixelements die s -Variable steht.

Der s-Kanal entspricht einer Reaktion, bei der die Teilchen des Anfangszustands in einem Photon einander vernichten und bei der das Photon die Teilchen des Endzustands erzeugt. Aus dieser Tatsache folgt die Abhängigkeit vom Matrixelement proportional zu s^{-2} .

Wir haben gesehen, dass im s-Kanal die Streuwinkelabhängigkeit im Schwerpunktssystem zu $(1+\cos^2\theta)$ proportional ist.

12.3 Der Wirkungsquerschnitt

Wir haben gesehen, dass das Matrixelement die Dynamik des Prozesses enthält. Um den Wirkungsquerschnitt der Reaktion zu berechnen, müssen wir noch kinematische Faktoren einfügen.

Wie im Fall der nicht-relativistischen Goldenen Regel von Fermi (Siehe Kap. 4.3.1), gibt es eine relativistisch-kovariante Regel, um den Wirkungsquerschnitt zu bestimmen.

Für den allgemeinen Prozess $A+B \rightarrow 1+2+3+\dots+n$ ist der Wirkungsquerschnitt gleich

$$d\sigma = \underbrace{|\mathcal{M}|^2}_{\text{Dynamik}} \times \underbrace{\frac{1}{F}}_{\text{Fluss}} \times \underbrace{S}_{\text{Statistik}} \times \underbrace{\left(\prod_i \frac{d^3 \vec{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i} \right)}_{\text{Phasenraum}} \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4 \left(p_A + p_B - \sum_i p_i \right)}_{\text{Energie-Impuls-Erhaltung}}$$

wobei

$$F \equiv 4\sqrt{(p_A \cdot p_B)^2 - m_A^2 m_B^2}$$

und

$$S \equiv \frac{1}{j_1!} \frac{1}{j_2!} \dots \quad \text{für jede Gruppe von ununterschiedbaren Teilchen im Endzustand}$$

Der **Phasenraum-Faktor** ist zur Endzustandsdichte in einem Volumenelement $d^3\vec{p}_1 \dots d^3\vec{p}_n$ proportional. Der Faktor $1/2E_i$ kommt aus der Normierung der Felder (d.h. z.B. $u^+u=v^+v=2E$). Wir bemerken, dass das Verhältnis

$$\frac{d^3\vec{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i}$$

Lorentz-invariant ist.

Der Flussfaktor beschreibt *in kovarianter Form* den Fluss der Teilchen des Anfangszustands:

$$\begin{aligned} F &= 4\sqrt{\left(p_A \cdot p_B\right)^2 - m_A^2 m_B^2} \\ &= 4\left(\vec{p}_A |E_B + |\vec{p}_B |E_A\right) \\ &= 4E_A E_B \left(\frac{|\vec{p}_A|}{E_A} + \frac{|\vec{p}_B|}{E_B}\right) \end{aligned}$$

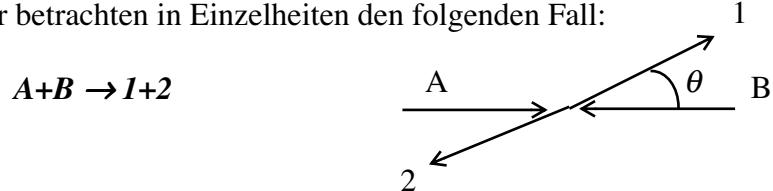
Wenn die zwei Teilchen frontal aufeinander stossen, kann der kovariante Fluss als

$$F = \underbrace{(2E_A)(2E_B)}_{\text{Normierung}} \underbrace{|\vec{\beta}_A - \vec{\beta}_B|}_{\substack{\text{relative} \\ \text{Geschwindigkeit}}}$$

ausgedrückt werden. Mit dieser Form ist die Interpretation klarer. Der Fluss beschreibt die Anzahl von einfallenden Teilchen pro Flächen-einheit und pro Zeiteinheit.

12.3.1 Zweikörper-Streuung im SP

Wir betrachten in Einzelheiten den folgenden Fall:



Wir beginnen mit dem Phasenraum-Faktor. Wir nehmen den allgemeinen Ausdruck und vereinfachen ihn durch die Berechnung der Integrale im Schwerpunktssystem:

$$\begin{aligned} \Pi_2 \equiv & \int \prod_{i=1}^2 \frac{d^3 \vec{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i} (2\pi)^4 \delta^4 \left(p_A + p_B - \sum_i p_i \right) = \\ & \iint \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^4 (p_A + p_B - p_1 - p_2) \end{aligned}$$

Wir integrieren über p_2 mit der Bedingung

$$\delta^3 \left(\underbrace{\vec{p}_A + \vec{p}_B - \vec{p}_1 - \vec{p}_2}_{=0} \right) \Rightarrow \vec{p}_2 = -\vec{p}_1$$

und es folgt

$$\begin{aligned}\Pi_2 &= \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1 2E_2} (2\pi) \delta \left(\underbrace{E_A + E_B}_{=E_{SP}} - E_1 - E_2 \right) \\ &= \int \frac{dp_1 \vec{p}_1^2 d\Omega}{(2\pi)^3 2E_1 2E_2} (2\pi) \delta(E_{SP} - E_1 - E_2)\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}E_{SP} &= E_A + E_B = E_1 + E_2 = \sqrt{\vec{p}_1^2 + m_1^2} + \sqrt{\vec{p}_2^2 + m_2^2} \\ &= \sqrt{\vec{p}^2 + m_1^2} + \sqrt{\vec{p}^2 + m_2^2} \quad \text{mit} \quad \vec{p} \equiv \vec{p}_1 = -\vec{p}_2\end{aligned}$$

Um die Integration durchzuführen, verwenden wir

$$\begin{aligned}\frac{dE_{SP}}{dp} &= \frac{1}{2} (\vec{p}^2 + m_1^2)^{-1/2} 2p + \frac{1}{2} (\vec{p}^2 + m_2^2)^{-1/2} 2p \\ &= p \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)\end{aligned}$$

und

$$dp = dE_{SP} \left(\frac{p}{E_1} + \frac{p}{E_2} \right)^{-1}$$

Es folgt,

$$\Pi_2 = \int d\Omega dE_{SP} \frac{\vec{p}_1^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left(\frac{p_1}{E_1} + \frac{p_1}{E_2} \right)^{-1} \delta(E_{SP} - E_1 - E_2)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int d\Omega dE_{SP} \frac{1}{16\pi^2} \frac{p_1}{E_1 E_2} \frac{1}{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}} \delta(E_{SP} - E_1 - E_2) \\
 &= \int d\Omega dE_{SP} \frac{1}{16\pi^2} \frac{p_1}{E_1 + E_2} \delta(E_{SP} - E_1 - E_2) \\
 &= \int d\Omega \frac{1}{16\pi^2} \frac{p_1}{E_{SP}}
 \end{aligned}$$

Wir berechnen nun den differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$d\sigma_{SP} = \frac{1}{(2E_A)(2E_B)|\vec{\beta}_A - \vec{\beta}_B|} \frac{d\Omega}{16\pi^2} \frac{|\vec{p}_1|}{E_{SP}} |\mathcal{M}(AB \rightarrow 12)|^2$$

und schliesslich

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{SP} = \frac{1}{(2E_A)(2E_B)|\vec{\beta}_A - \vec{\beta}_B|} \frac{|\vec{p}_1|}{(2\pi)^2 4E_{SP}} |\mathcal{M}(AB \rightarrow 12)|^2$$

Falls die Teilchen gleiche Ruhemasse besitzen oder wir den ultra-relativistischen Grenzfall betrachten (d.h. $E \gg m_i$, oder $m_i \rightarrow 0$), erhalten wir

$$(2E_A)(2E_B)|\vec{\beta}_A - \vec{\beta}_B| = 4(p_A E_B + p_B E_A) \approx 4p(E_A + E_B) = 4pE_{SP}$$

und damit

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{SP} &= \frac{1}{4p_1 E_{SP}} \frac{|\vec{p}_1|}{(2\pi)^2 4E_{SP}} |\mathcal{M}(AB \rightarrow 12)|^2 \\ &= \left(\frac{1}{64\pi^2}\right) \left(\frac{1}{E_{SP}^2}\right) |\mathcal{M}(AB \rightarrow 12)|^2\end{aligned}$$

(alle vier Ruhemassen identisch oder ultra-relativistischer Grenzfall)

13.1 Ultra-relativistischer Grenzfall

Oft werden wir Prozesse im ultra-relativistischen Grenzfall betrachten.

Wir können z.B. noch einmal den Prozess betrachten

$$e^+(p'^\mu) e^-(p^\mu) \rightarrow \mu^+(k'^\mu) \mu^-(k^\mu)$$

Wir betrachten den Prozess bezüglich des Schwerpunktssystems und berechnen den *ultra-relativistischen Grenzfall*, d.h. $E^2 > p^2 = p'^2 = m_e^2$ und $E^2 > k^2 = k'^2 = m_\mu^2$, wobei E die Energie der Teilchen ist.

Es gilt,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{SP} = \left(\frac{1}{64\pi^2} \right) \left(\frac{1}{E_{SP}^2} \right) |M|^2$$

$$\begin{aligned} &\approx \left(\frac{1}{64\pi^2} \right) \left(\frac{1}{E_{SP}^2} \right) (2e^4) \left\{ \frac{t^2 + u^2}{s^2} \right\} \\ &= \left(\frac{2e^4}{64\pi^2} \right) \frac{1}{s} \left\{ \frac{t^2 + u^2}{s^2} \right\} \end{aligned}$$

Es gilt,

$$\begin{cases} s \approx (2E)^2 \\ t \approx -2p \cdot k \approx -2E^2(1 - \cos\theta) = -\frac{s}{2}(1 - \cos\theta) \\ u \approx -2p \cdot k' \approx -\frac{s}{2}(1 + \cos\theta) \end{cases} \quad \begin{array}{c} \text{e}^-(p) \xrightarrow{\hspace{1cm}} \\ \text{e}^+(p') \end{array} \quad \begin{array}{l} \mu^-(k) \\ \theta \\ \mu^+(k') \end{array}$$

wobei θ der Streuwinkel ist (Beachte: der Winkel θ wird zwischen dem einfallenden Elektron und dem auslaufenden Myon, d.h. den Teilchen mit negativer Ladung, definiert). Es folgt,

$$\begin{aligned} \frac{t^2 + u^2}{s^2} &= \frac{\frac{s^2}{4}(1 - \cos\theta)^2 + \frac{s^2}{4}(1 + \cos\theta)^2}{s^2} \\ &= \frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta) \end{aligned}$$

und mit der Definition $e^2 = 4\pi\alpha$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{SP} &= \left(\frac{2(16\pi^2)\alpha^2}{64\pi^2} \right) \frac{1}{s} \frac{1}{2} (1 + \cos^2\theta) \\ &= \left(\frac{\alpha^2}{4s} \right) (1 + \cos^2\theta) \quad e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^\pm \quad \text{ultrarelativistisch} \end{aligned}$$

Wir können den **totalen Wirkungsquerschnitt** bestimmen:

$$\begin{aligned}\sigma_{tot}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^\pm) &= \int d\Omega \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{SP} = \left(\frac{\alpha^2}{4s} \right) \int_{-1}^1 d\cos\theta \int d\phi (1 + \cos^2\theta) \\ &= \left(\frac{\alpha^2}{4s} \right) (2\pi) \left(\frac{8}{3} \right) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}\end{aligned}$$

Wir errinnern uns an die natürlichen Einheiten (Siehe Kap. 3.2), die wir benutzen. Der Wirkungsquerschnitt hängt von der inversen Schwerpunktsenergie ab: $s = E_{SP}^2$, d.h.

$$\sigma_{tot}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^\pm) = \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{SP}^2} \text{ GeV}^{-2} \quad \left(\alpha \approx \frac{1}{137} \right)$$

Es gilt,

$$1m \approx 5,07 \times 10^{15} \text{ GeV}^{-1} \quad \text{dann} \quad 1m^2 \approx 25,7 \times 10^{30} \text{ GeV}^{-2}$$

Der Wirkungsquerschnitt ist eine Fläche und wir definieren die Einheit

$$1 \text{ barn} \equiv 10^{-28} m^2$$

und

$$1 \text{ GeV}^{-2} = 0,0389 \times 10^{-30} m^2 = 0,389 \text{ mb}$$

deshalb können wir schreiben

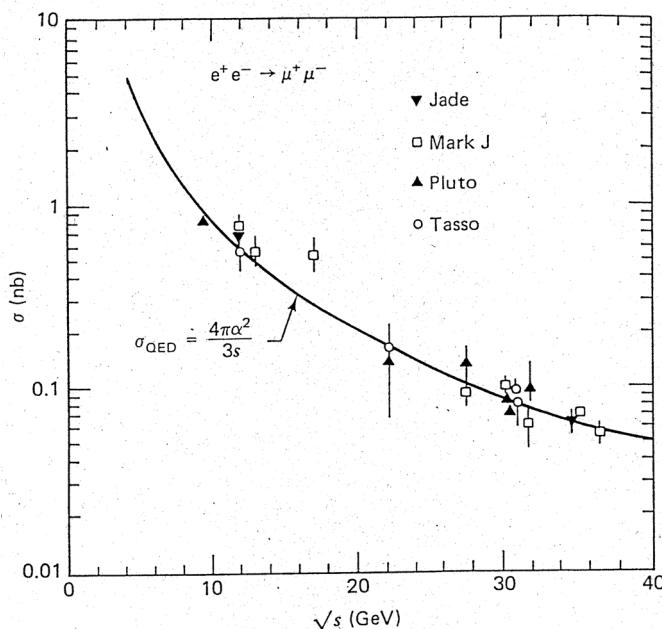
$$\sigma_{tot}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^\pm) \approx \frac{8,68 \times 10^{-5}}{E_{SP}^2 (\text{GeV}^2)} \text{ mb} \approx \frac{86,8}{E_{SP}^2 (\text{GeV}^2)} \text{ nb}$$

Der erwartete Wirkungsquerschnitt und die gemessenen Werte am PETRA Beschleuniger sind als Funktion der Schwerpunktsenergie \sqrt{s} in Abb. 1 gezeigt. Die Übereinstimmung zwischen der QED-Theorie und den Experimenten ist sehr gut.

In der Praxis wird oft das Verhältnis $R_{\mu\mu}$, definiert als

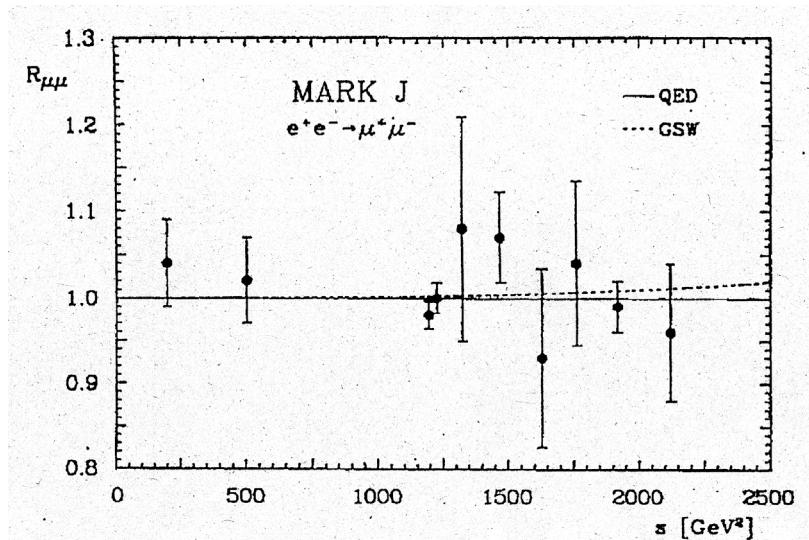
$$R_{\mu\mu}(s) \equiv \frac{\sigma_{\text{gemessen}}(s)}{\left(\frac{4\pi\alpha^2}{3s}\right)}$$

betrachtet. Das von Mark J gemessene Verhältnis ist in Abb. 2 gezeigt. Die Übereinstimmung zwischen der QED-Theorie und Mark J ist sehr gut.



Figur 1. Der totale Wirkungsquerschnitt für den $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ Prozess als Funktion der Schwerpunktsenergie \sqrt{s} .

Ultra-relativistischer Grenzfall



Figur 2. Das von Mark J gemessene Verhältnis $R_{\mu\mu}$ als Funktion der Schwerpunktsenergie im Quadrat s .

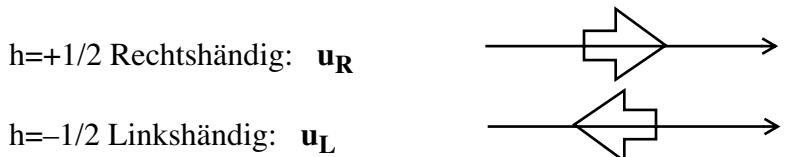
13.2 Erhaltung der Helizität

Der Wirkungsquerschnitt des $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^\pm$ Prozesses besitzt eine bestimmte Streuwinkelabhängigkeit (der Winkel θ wird zwischen dem einfallenden Elektron und dem auslaufende Myon, d.h. den Teilchen mit negativer Ladung, definiert):

$$\left(\frac{d\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^\pm)}{d\Omega} \right)_{SP} \propto (1 + \cos^2 \theta)$$

Woher kommt diese Form? Wir werden beweisen, dass der Drehimpuls (d.h. Spin) verantwortlich ist.

Wir wählen eine **Spinbasis** (d.h. eine **Polarisationsbasis**). Wir betrachten den ultra-relativistischen Grenzfall ($E \gg m$) und verwenden die **Helizitätsbasis**:



d.h. wir quantisieren die Spins entlang der Impulse.

Für $E \gg m$ kann man beweisen (bei Verwendung einer bestimmten Darstellung), dass gilt

$$\left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right) u \approx u_R \quad \text{und} \quad \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) u \approx u_L$$

d.h. $1 + \gamma^5$ und $1 - \gamma^5$ wirken als **Projektionsoperatoren der Helizität..**

Erhaltung der Helizit t

Wir können die Form der elektromagnetischen Vektor-Ströme studieren:

$$\bar{u} \gamma^\mu u = (\bar{u}_L + \bar{u}_R) \gamma^\mu (u_L + u_R) \quad \text{wobei } u = u_R + u_L$$

Wir bemerken,

$$\begin{aligned} \bar{u}_L &= u_L^+ \gamma^0 = u^+ \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) \gamma^0 = u^+ \gamma^0 \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right) \quad \text{weil } \gamma^5 \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^5 \\ &= \bar{u} \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \bar{u}_L \gamma^\mu u_R &= \frac{1}{4} \bar{u} (1 + \gamma^5) \gamma^\mu (1 + \gamma^5) u \\ &= \frac{1}{4} \bar{u} \gamma^\mu \underbrace{(1 - \gamma^5)(1 + \gamma^5)}_{=0 !} u \\ &= 0 \end{aligned}$$

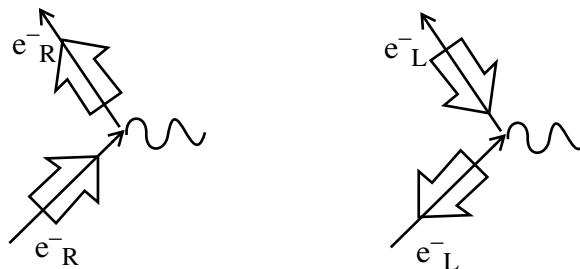
und in ähnlicher Weise

$$\bar{u}_R \gamma^\mu u_L = 0$$

Es folgt daraus, dass

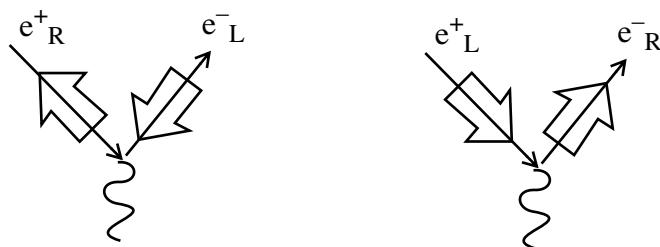
im ultra-relativistischen Grenzfall ($E \gg m$) die Helizität an den Vertices erhalten wird:

$$\boxed{\bar{u} \gamma^\mu u = \bar{u}_L \gamma^\mu u_L + \bar{u}_R \gamma^\mu u_R \quad (\text{ultrarelativistisch})}$$



Im Fall des Positrons müssen wir den Spinor u durch v ersetzen und als Folge wird die Helizität geändert (d.h. $p \rightarrow p$ und Spin bleibt unverändert).

An einem elektromagnetischen Vertex werden das Elektron und das Positron entgegengesetzte Helizität besitzen.



Deshalb müssen wir nur zwei Anfangsspinzustände betrachten:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e_L^+ e_R^-) \quad \text{oder} \quad \frac{d\sigma}{d\Omega}(e_R^+ e_L^-)$$

weil

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e_R^+ e_R^-) = \frac{d\sigma}{d\Omega}(e_L^+ e_L^-) = 0 !$$

Der Endzustand folgt ähnlichen Regeln: die Helizitäten der Myonen müssen entgegengesetzt sein. Zusammenfassend *gibt es nur 4 nicht-verschwindende Spinkonfigurationen*:

$$\begin{aligned} e_R^+ e_L^- &\rightarrow \mu_R^+ \mu_L^- & e_R^+ e_L^- &\rightarrow \mu_L^+ \mu_R^- \\ e_L^+ e_R^- &\rightarrow \mu_R^+ \mu_L^- & e_L^+ e_R^- &\rightarrow \mu_L^+ \mu_R^- \end{aligned}$$

Diese 4 Prozesse werden den gesamten Wirkungsquerschnitt ausmachen, d.h. wir werden die Elektronenspinzustände mitteln und die Myonenspinzustände summieren:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-) = \frac{1}{4} \left[\frac{d\sigma}{d\Omega}(e_R^+ e_L^- \rightarrow \mu_R^+ \mu_L^-) + \frac{d\sigma}{d\Omega}(e_R^+ e_L^- \rightarrow \mu_L^+ \mu_R^-) + \right. \\ \left. \frac{d\sigma}{d\Omega}(e_L^+ e_R^- \rightarrow \mu_R^+ \mu_L^-) + \frac{d\sigma}{d\Omega}(e_L^+ e_R^- \rightarrow \mu_L^+ \mu_R^-) \right]$$

Tatsächlich kann man beweisen, dass die folgenden bestimmten Spinkonfigurationen die folgenden Wirkungsquerschnitte besitzen:

$$\begin{cases} \frac{d\sigma}{d\Omega}(e_L^+ e_R^- \rightarrow \mu_L^+ \mu_R^-) = \frac{\alpha^2}{4E_{SP}^2} (1 + \cos\theta)^2 \\ \frac{d\sigma}{d\Omega}(e_L^+ e_R^- \rightarrow \mu_R^+ \mu_L^-) = \frac{\alpha^2}{4E_{SP}^2} (1 - \cos\theta)^2 \end{cases}$$

und ähnliche Ausdrücke für die $e_R^+ e_L^-$ Reaktionen.

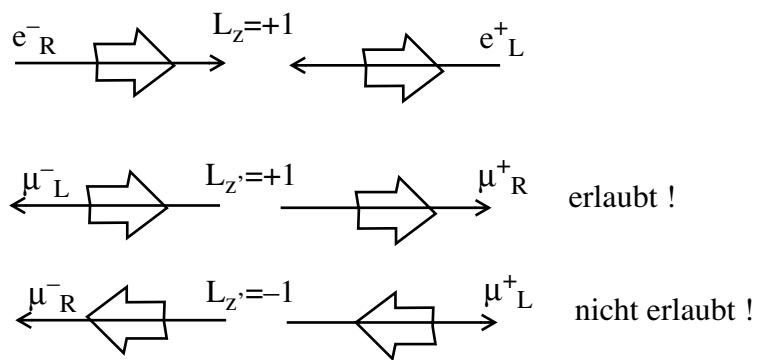
Dieses Ergebnis kann mit Hilfe der *Erhaltung des gesamten Drehimpulses* erklärt werden.

Siehe Abb. 3.

Wir bemerken z.B., dass

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e_L^+ e_R^- \rightarrow \mu_L^+ \mu_R^-) \Big|_{\theta=180^\circ} = \frac{\alpha^2}{4 E_{SP}^2} (1 + \cos 180^\circ)^2 = 0$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e_L^+ e_R^- \rightarrow \mu_R^+ \mu_L^-) \Big|_{\theta=180^\circ} = \frac{\alpha^2}{4 E_{SP}^2} (1 - \cos 180^\circ)^2 = \frac{\alpha^2}{E_{SP}^2}$$



Figur 3. Helizitätserhaltung in der 180 Grad-Streuung. Die z-Komponente des Drehimpulses muss erhalten werden.

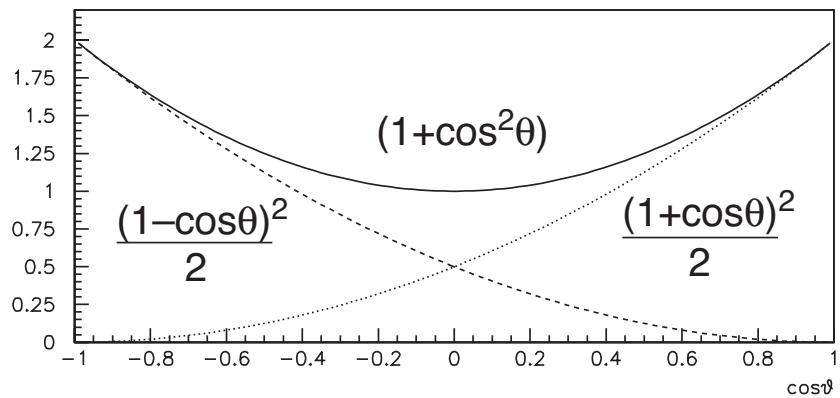
Diese Bedingung folgt aus der Erhaltung der z -Komponente des gesamten Drehimpulses. Wenn der Streuwinkel gleich 180 Grad ist, ist es unmöglich, einen Endzustand mit z -Komponente des gesamten Drehimpulses $L_z' = -1$ zu erzeugen. Der differentielle Wirkungsquerschnitt für $e^+_L e^-_R \rightarrow \mu^+_L \mu^-_R$ verschwindet deshalb, wenn $\theta = 180$ Grad ist, und wir verstehen den Ursprung der $(1+\cos\theta)^2$ -Abhängigkeit.

Erhaltung der Helizit t

In ähnlicher Weise kann man die $(1-\cos\theta)^2$ -Abhängigkeit des $e^+_L e^-_R \rightarrow \mu^+_R \mu^-_L$ Prozesses erklären.

Wenn wir beide Beiträge addieren, erhalten wir die erwartete $(1+\cos^2\theta)$ -Abhängigkeit:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+_L e^-_R \rightarrow \mu^+_L \mu^-_R) + \frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+_L e^-_R \rightarrow \mu^+_R \mu^-_L) &= \\ = \frac{\alpha^2}{4E_{SP}^2} [(1+\cos\theta)^2 + (1-\cos\theta)^2] & \\ = \frac{\alpha^2}{4E_{SP}^2} 2(1+\cos^2\theta) & \end{aligned}$$



Figur 4. Streuwinkel-Abhängigkeit des $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ Prozesses.

13.3 Vorwärts-rückwärts-Asymmetrie

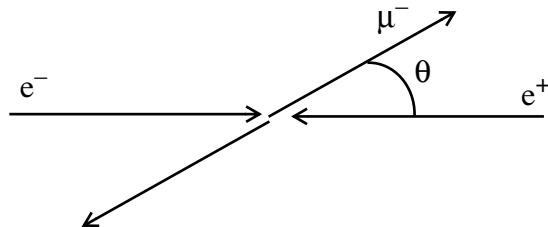
Im letzten Kapitel haben wir die Streuwinkel-Abhängigkeit des $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ Prozesses im Schwerpunktssystem hergeleitet und erklärt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto (1 + \cos^2 \theta)$$

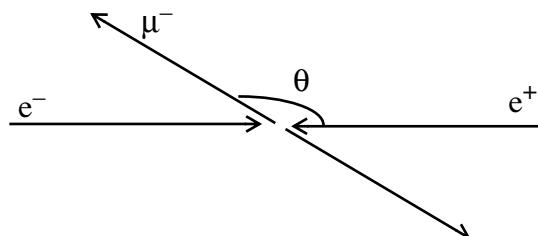
Der experimentelle Beweis dieser Abhängigkeit ist natürlich ein wichtiger Test der Theorie. Bei einer *Messung der Ladung der Myonen* im Endzustand kann diese Abhängigkeit gemessen werden.

Man definert oft zwei Bereiche des Streuwinkels:

1. Vortwärts-Bereich: $\cos \theta > 0$



2. Rückwärts-Bereich: $\cos \theta < 0$



Wir definieren die **Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie** A_{FB} als

$$A_{FB} \equiv \frac{\int_{\cos\theta > 0} d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} - \int_{\cos\theta < 0} d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}}{\int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}}$$

Experimentell kann man die Anzahl von Ereignissen in beiden Bereichen messen und die gemessene Asymmetrie wird so definiert:

$$A \equiv \frac{N(\theta < 90^\circ) - N(\theta > 90^\circ)}{N(\theta < 90^\circ) + N(\theta > 90^\circ)}$$

Diese Messung ist experimentell relativ einfach und stellt deshalb eine relativ einfache Überprüfung der Theorie dar.

Wenn wir die Asymmetrie des $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ Prozesses im Schwerpunktssystem bestimmen, erhalten wir wegen der symmetrischen $(1+\cos^2\theta)$ -Abhängigkeit eine verschwindende Asymmetrie:

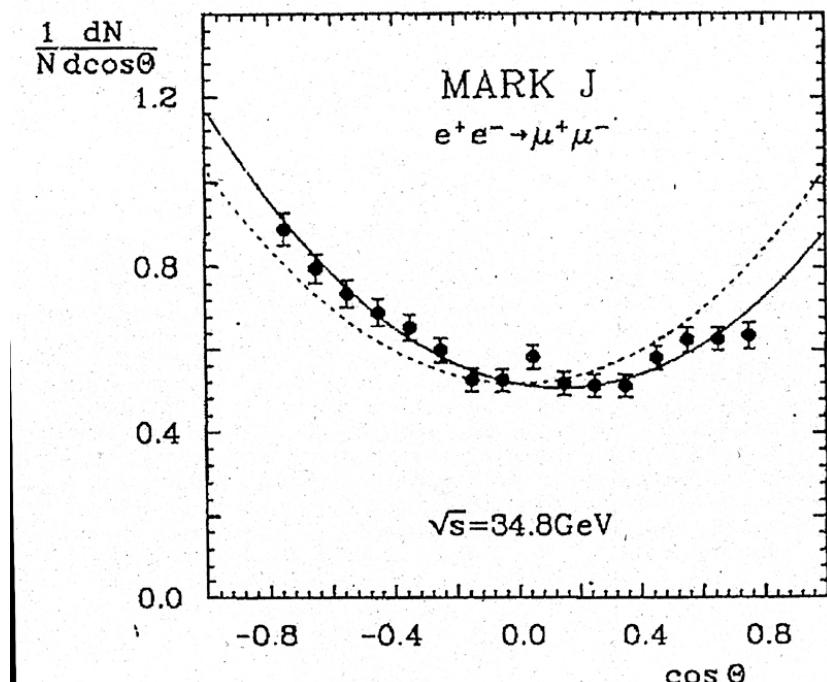
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{QED} \propto (1 + \cos^2 \theta) \Rightarrow A_{\mu\mu}^{QED} = A(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = 0$$

Die experimentellen Resultate von **Mark J** sind in Abb. 5 und 6 gezeigt.

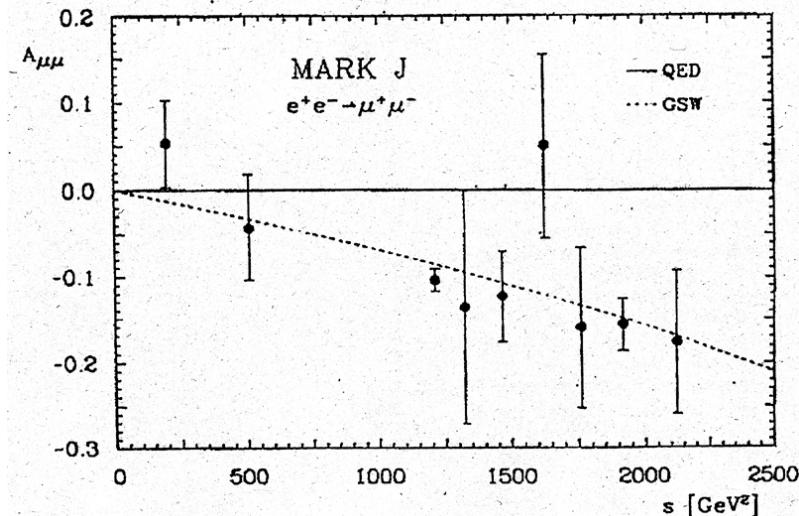
In Experimenten wird oft eine $(1+A\cos^2\theta+B\cos\theta)$ -Abhängigkeit gefittd. Von der QED wird ein verschwindendes B erwartet.

Wir bemerken, dass die allgemeine Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment gut ist.

Es gibt aber Hinweise, dass bei den höchsten Schwerpunktsenergien die Asymmetrie nicht vollständig verschwindet (d.h. $B \neq 0$), und dass ein "Trend" existiert. Diese Beobachtung wird im Kap. 21 erklärt.



Figur 5. Der von Mark J gemessene differentielle Wirkungsquerschnitt für den $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ Prozess bei einer Schwerpunktsenergie $\sqrt{s} = 34.8 \text{ GeV}$.



Figur 6. Die von Mark J gemessene vorwärts-rückwärts-Asymmetrie $A_{\mu\mu}$ als Funktion der Schwerpunktsenergie im Quadrat s .

13.4 Der $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ Prozess

Wir haben den $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ Prozess in Einzelheiten behandelt. Wir betrachten nun einen anderen ähnlichen Prozess, nämlich den folgenden Prozess:

$$e^-(p_1^\mu) \mu^-(p_2^\mu) \rightarrow e^-(p_4^\mu) \mu^-(p_3^\mu)$$

Die invariante Amplitude ist gleich

$$-i\mathcal{M}(e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-) = \frac{ie^2}{q^2} (\bar{u}(4)\gamma^\mu u(1))(\bar{u}(3)\gamma_\mu u(2))$$

und für die über die Spins gemittelte und summierte Amplitude im Quadrat erhalten wir

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{e^4}{4q^4} Tr((p_4 + m_e)\gamma^\mu(p_1 + m_e)\gamma^\nu)Tr((p_3 + m_\mu)\gamma_\mu(p_2 + m_\mu)\gamma_\nu)$$

Wir bemerken, dass (Siehe Kap. 11.6)

$\mathcal{M}_{e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \mathcal{M}_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}(p_1, -p_2, p_3, -p_4)$

In der invarianten Amplitude kann ein einfallendes Teilchen durch ein auslaufendes Antiteilchen ersetzt werden durch den Austausch $p^\mu \rightarrow -p^\mu$.

Es folgt daraus, dass wir die ganzen Spuren nicht mehr bestimmen müssen. Wir können das Ergebnis für den $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ Prozess direkt aus dem $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ Prozess herleiten:

Es folgt, für $m_e=0$ (Vergleiche mit Kap. 12.2):

$$\langle |\mathcal{M}(e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-)|^2 \rangle = \frac{8e^4}{q^4} \{(p_1 p_3)(p_4 p_2) + (p_1 p_2)(p_3 p_4) - m_\mu^2 (p_1 p_4)\}$$

Um den Ausdruck weiter zu vereinfachen, müssen wir die Kinematik des Prozesses betrachten. Diese wird verschieden vom $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ Prozesses sein.

Als Funktion der Mandelstam-Variablen finden wir:

$$\begin{cases} s = (p_1 + p_2)^2 \\ t = (p_1 - p_4)^2 \\ u = (p_2 - p_3)^2 \end{cases}$$

Im Vergleich zum $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ Prozess hatten wir den folgenden Austausch gefunden:

$$p_2 \leftrightarrow -p_2 \quad \text{und} \quad p_4 \leftrightarrow -p_4$$

d.h.

$$s \leftrightarrow t \quad \text{und} \quad u \leftrightarrow u$$

Dieser Austausch liefert direkt das Matrixelement für den $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ Prozess, d.h. z.B. im ultra-relativistischen Grenzfall erhalten wir (Siehe Kap. 12.2.1):

$$\left\langle \left| M(e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-) \right|^2 \right\rangle \approx (2e^4) \left\{ \frac{s^2 + u^2}{t^2} \right\} \quad \text{ultra-relativistisch}$$

Mit den folgenden Näherungen

$$\begin{cases} s \approx (2E)^2 \\ t \approx -\frac{s}{2}(1 - \cos \theta) \\ u \approx -\frac{s}{2}(1 + \cos \theta) \end{cases}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{SP} &= \left(\frac{2e^4}{64\pi^2} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \frac{s^2 + \frac{1}{4}s^2(1+\cos\theta)^2}{\frac{1}{4}s^2(1-\cos\theta)^2} \\ &= \left(\frac{\alpha^2}{2s} \right) \left[\frac{4 + (1+\cos\theta)^2}{(1-\cos\theta)^2} \right] \quad e^- \mu^\pm \rightarrow e^- \mu^\pm \\ &\qquad\qquad\qquad \text{ultrarelativistisch} \end{aligned}$$

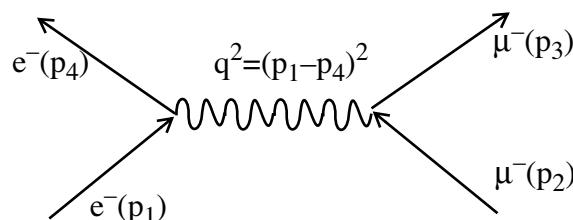
Wir bemerken, dass der Wirkungsquerschnitt eine Divergenz bei $\theta \rightarrow 0$ besitzt (Der totale Wirkungsquerschnitt kann nicht berechnet werden):

$$\left(\frac{d\sigma(e^- \mu^\pm \rightarrow e^- \mu^\pm)}{d\Omega} \right)_{SP} \propto \frac{1}{\theta^4} \quad \theta \rightarrow 0$$

Dieses Verhalten kann durch das Feynman-Diagramm verstanden werden. Im Fall des $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ Prozesses ist der 4-Impuls des ausgetauschten Photons durch

$$q^2 = (p_1 - p_4)^2 \equiv t \quad !$$

gegeben.



Die Masse des ausgetauschten (virtuellen) Photons ist gleich

$$m_{\gamma}^* = q^2 = t \approx -\frac{s}{2}(1 - \cos \theta) < 0 \quad !$$

Wenn $\theta \rightarrow 0$, $\cos \theta \rightarrow 1$, $t \rightarrow 0$ und $m_{\gamma}^* \rightarrow 0$. Das Photon wird reell, d.h. auf der Massenschale liegen (“*on-mass shell*”). Wenn das ausgetauschte Photon reell wird, nimmt der Wirkungsquerschnitt zu.

Weil

$$\left\langle \left| \mathcal{M}(e^- \mu^\pm \rightarrow e^- \mu^\pm) \right|^2 \right\rangle \propto \frac{1}{t^2}$$

spricht man vom **t-Kanal**.

Im Gegensatz dazu gibt es im *s-Kanal* keine Divergenz bei $\theta \rightarrow 0$. Weil

$$\left\langle \left| \mathcal{M}(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^\pm) \right|^2 \right\rangle \propto \frac{1}{s^2}$$

wird das ausgetauschte Photon nie reell.

Die (virtuelle) Masse des ausgetauschten Photons ist im s-Kanal gleich der Schwerpunktsenergie:

$$q^2 = s = E_{SP}^2 \quad \Rightarrow \quad m_{\gamma}^* = \sqrt{s} = E_{SP}$$

13.5 “Crossing”-Symmetrie

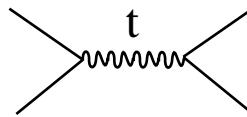
Wir haben das Ergebnis für den $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ Prozess aus dem $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ Prozess gefunden, dank der sogenannten “Crossing”-Symmetrie.

Im Allgemeinen sind die invarianten Amplituden von Prozessen, die sich voneinander durch einfallende Teilchen und austretende Antiteilchen unterscheiden, leicht korrelierbar.

Einige Resultate sind in Tabelle 1 zusammengefasst.

Tabelle 1. Einige Prozesse, die durch die “Crossing”-Symmetrie korreliert sind.

$$e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$$

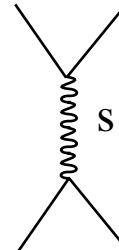


$$\frac{s^2 + u^2}{t^2}$$

Vorwärts-Peak

$$s \leftrightarrow t \quad \text{und} \quad u \leftrightarrow u$$

$$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$$



$$\frac{t^2 + u^2}{s^2}$$

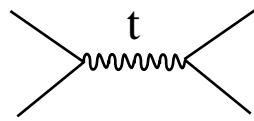
(1+cos²θ)-Abhängigkeit

Crossing -Symmetrie

Tabelle 1. Einige Prozesse, die durch die “Crossing”-Symmetrie korreliert sind.

$$e^- e^- \rightarrow e^- e^-$$

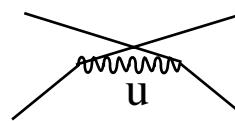
(Møller)



$$\frac{s^2 + u^2}{t^2} + \underbrace{\frac{2s^2}{tu}}_{\text{Interferenz}} + \frac{s^2 + t^2}{u^2}$$

Vorwärts-Peak

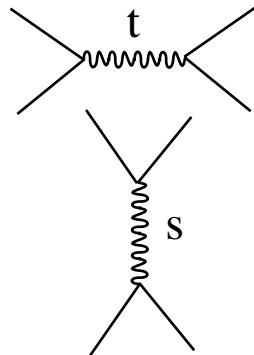
Rückwärts-Peak



$$s \leftrightarrow u \quad \text{und} \quad t \leftrightarrow t$$

$$e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$$

(Bhabha)



$$\frac{s^2 + u^2}{t^2} + \underbrace{\frac{2u^2}{ts}}_{\text{Interferenz}} + \frac{u^2 + t^2}{s^2}$$

Vorwärts-Peak und s-Kanal

QED-Prozesse

14.1 Einleitung

Die S-Matrix haben wir aus einer Reihenentwicklung gewonnen. In der QED ist die Amplitude eines Prozesses eine Reihenentwicklung nach Potenzen der elektrischen Ladung “ e ”:

$$e \equiv \sqrt{4\pi\alpha} \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137} \quad \text{Feinstruktur – Konstante}$$

Die Entwicklung der S-Matrix sieht so aus (Siehe Kap. 11.4):

$$S \equiv 1 + \underbrace{(-ie)(...)}_{\substack{\text{niedrigste} \\ \text{Ordnung}}} + \underbrace{(-ie)^2(...)}_{\substack{\text{nächste} \\ \text{Ordnung}}} + \dots$$

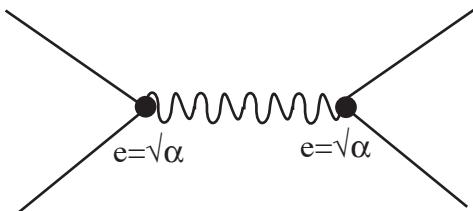
In der niedrigsten Ordnung (Born-Ordnung) erhalten wir für jeden Vertexfaktor eine elektrische Ladung:

z.B. $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$

Es gilt,

$$\mathcal{M} \propto e^2 \propto \alpha$$

$$|\mathcal{M}|^2 \propto e^4 \propto \alpha^2 \approx \left(\frac{1}{137}\right)^2$$

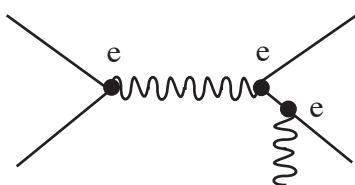


Die nächsten Ordnungen werden als **Strahlungskorrekturen** bezeichnet:

z.B. $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^- \gamma$ (Photon-Bremsstrahlung)

$$\mathcal{M} \propto e^3$$

$$|\mathcal{M}|^2 \propto O(e^6) \propto O(\alpha^3) \approx \left(\frac{1}{137}\right)^3$$



d.h. der Wirkungsquerschnitt des $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^- \gamma$ Prozesses ist ca. 137-Mal unterdrückt bezüglich des $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ Prozesses.

Im Allgemeinen kann die gesamte Amplitude eines Prozesses bis zur Ordnung "n" berechnet werden: wir müssen alle möglichen Diagramme dieser Ordnung betrachten !

Wir betrachten Diagramme mit m -Vertices. Die gesamte Amplitude der Diagramme mit m -Vertices wird als A_m definiert:

$$A_m \propto O(e^m)$$

Dann ist die gesamte Amplitude bis zur Ordnung n gleich

$$\mathcal{M} \propto e^2 A_2 + e^3 A_3 + \dots + e^n A_n$$

Diese Berechnung kann im Prinzip immer so durchgeführt werden, aber es ist klar, dass die Anzahl der Diagramme schnell mit der Ordnung zunimmt! Die Berechnung wird kompliziert.

Der Wirkungsquerschnitt wird dann so aussehen:

$$\mathcal{M} = A + B \Rightarrow |\mathcal{M}|^2 = |A|^2 + |B|^2 + \underbrace{A^* B + AB^*}_{\text{Interferenz}}$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\propto e^2 A_2 + e^3 A_3 + \dots + e^n A_n \\ \Rightarrow |\mathcal{M}|^2 &= e^4 A_2^* A_2 + e^5 (A_2 A_3^* + A_2^* A_3) + \\ &\quad e^6 (A_3 A_3^* + A_2 A_4^* + A_2^* A_4) + \dots \end{aligned}$$

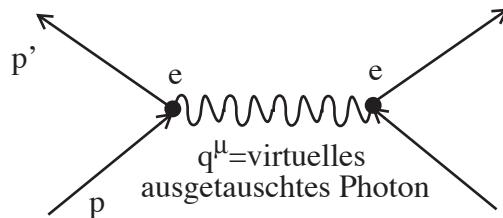
d.h. es gibt viele Terme und Interferenz-Terme. In der Praxis wird die Amplitude für Diagramme der höchsten Ordnung oft numerisch bestimmt, weil eine analytische Berechnung zu kompliziert ist.

14.1.1 Einfache Strahlungskorrekturen erster Ordnung

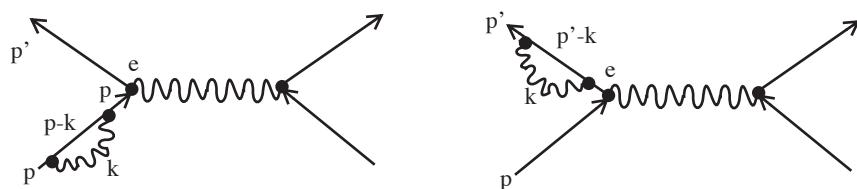
Wir betrachten als einfaches Beispiel die Strahlungskorrekturen erster Ordnung des $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ Prozesses.

Wir beginnen mit den **virtuellen Strahlungskorrekturen**: Virtuell heißt, dass die Korrekturen *keine reellen Teilchen im Endzustand erzeugen*.

Erste Ordnung:

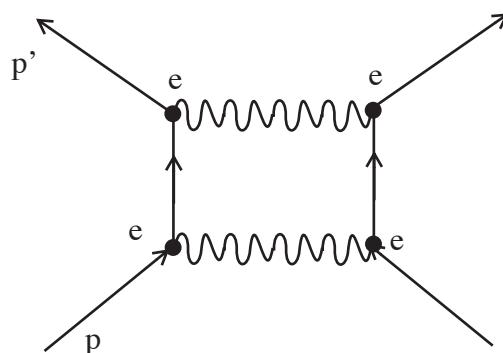


Selbst-Energie des Elektrons (Emission-Absorption eines Photons):

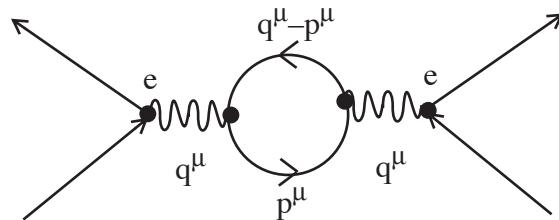


(und ähnliche Form für die Myon-Beine, aber $m_\mu \gg m_e$ und deshalb ist der Effekt viel kleiner).

Zwei ausgetauschte Photonen:

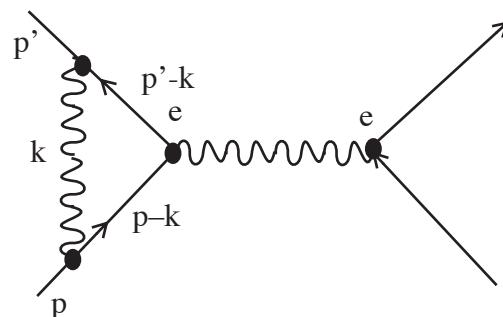


Selbst-Energie des Photons (Vakuum-Polarisation):



Das virtuelle Photon erzeugt ein **virtuelles Elektron-Positron-Paar**.

Vertex-Korrekturen:



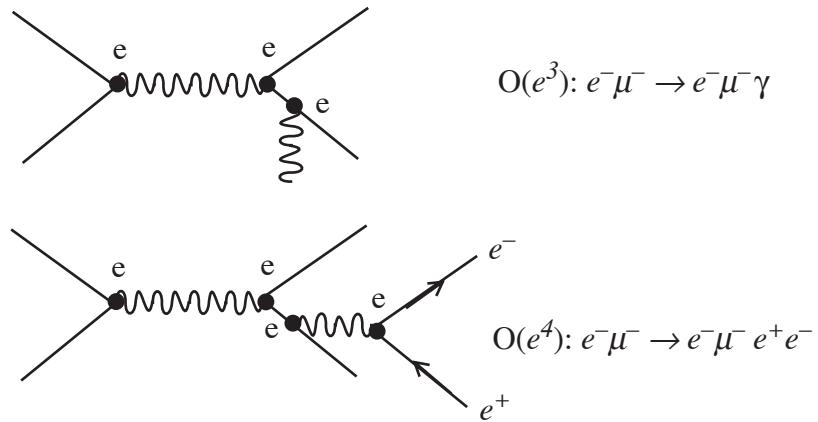
In diesem Fall trägt das Elektron reduzierte Energie und Impulse zum Vertex. Diese Korrekturen sind für das anomale magnetische Moment verantwortlich.

Dann betrachten wir die **reellen Strahlungskorrekturen**:

z.B. $O(e^3) \quad e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^- \gamma$

$O(e^4) \quad e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^- e^+ e^-$ Paar-Emission

In diesen Beispielen nehmen wir an, dass die zusätzlichen Teilchen (d.h. das ausgestrahlte Photon oder das emittierte Paar) im Detektor nachgewiesen werden. D.h., die reellen Strahlungskorrekturen verändern den Endzustand.

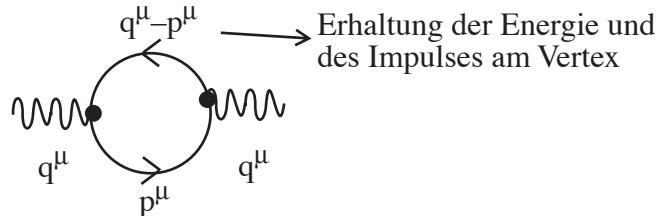


Beachte: im Detektor gibt es immer eine **Nachweis-Schwelle**. D.h., ein Detektor kann die zwei Prozesse $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ und $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^- \gamma$ nur unterscheiden, wenn die Energie des Photons E_γ grösser als E_{\min} (die **Schwellen-Energie**) ist.

Es folgt daraus, dass der Teil des Prozesses $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^- \gamma$ mit $E_\gamma < E_{\min}$ als *virtuelle Korrektur* betrachtet werden muss. Man spricht in diesem Fall von "Soft"-Photonen-Korrekturen.

14.2 Selbst-Energie des Photons

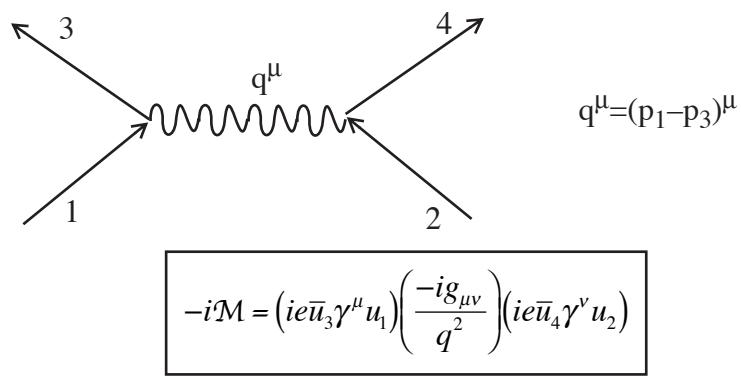
Wir betrachten den Photon-Propagator mit Impuls q^μ :



Die Feynman-Regeln sind die folgenden:

1. Ein Loop trägt einen Faktor (-1) bei.
2. Die Spur der assoziierten γ -Matrizen muss durchgeführt werden.
3. Integration über unmessbare Impulse

Im Fall des Prozesses $e^- \bar{\mu}^- \rightarrow e^- \bar{\mu}^-$ erhalten wir in erster Ordnung:



Die virtuelle Korrektur des Photon-Propagators ist

$$-iM = \underbrace{(-1)}_{\text{Loop-Faktor}} (ie\bar{u}_3\gamma^\mu u_1) \left\langle \left(\frac{-ig_{\mu\mu'}}{q^2} \right) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \times \right. \\ \left. Tr \left(ie\gamma^{\mu'} \left(\frac{-i(p+m)}{p^2 - m^2} \right) ie\gamma^{\nu'} \left(\frac{-i(q-p+m)}{(q-p)^2 - m^2} \right) \right) \left(\frac{-ig_{\nu\nu'}}{q^2} \right) \right\rangle (ie\bar{u}_4\gamma^\nu u_2)$$

Weil p^μ nicht beobachtbar ist, werden wir über alle seine möglichen Werte integrieren.

Wenn wir die erste Ordnung mit den korrigierten Diagrammen vergleichen, bemerken wir, dass die Korrekturen als Änderung des Photon-Propagators betrachtet werden können.

Wir können als Folge den “wirklichen” Photon-Propagator, wenn wir Diagramme höherer Ordnung einfügen, so betrachten:

$$\begin{array}{c} \text{Wavy line} \\ q^\mu \end{array} = \begin{array}{c} \text{Wavy line} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagram with one loop} \\ (-1) \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram with two loops} \\ (-1)^2 \end{array} \dots$$

Wir werden neu einen **“bekleideten” Photon-Propagator** definieren und den “nackten” Photon-Propagator durch den “bekleideten” ersetzen, d.h., wir werden in den Diagrammen folgende Substitution durchführen:

$$\boxed{\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \rightarrow \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \left(\frac{-ig_{\mu\mu'}}{q^2} \right) I^{\mu'\nu'} \left(\frac{-ig_{\nu'\nu}}{q^2} \right)}$$

wobei in erster Ordnung die Korrektur $O(\alpha)$ zum Photon-Propagator gleich

$$I_{\mu\nu}(q^2) \equiv (-1) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} Tr \left((ie\gamma_\mu) \left(\frac{-i(p+m)}{p^2 - m^2} \right) (ie\gamma_\nu) \left(\frac{-i(q-p+m)}{(q-p)^2 - m^2} \right) \right)$$

ist.

Die Idee ist, die Korrektur *einmal* zu berechnen, und nachher in jedem Diagramm die nackten Photon-Propagatoren durch “bekleidete” zu ersetzen.

Leider gibt es ein Problem. Naiv bemerken wir, dass

$$I_{\mu\nu}(q^2) \propto \int d^4 p \frac{p^2}{p^4} \approx \int d^4 p \frac{1}{p^2} \approx \int p^3 dp \frac{1}{p^2} \approx p^2 \rightarrow \infty$$

d.h. die Integration der Korrektur des Photon-Propagators führt zu einer Divergenz!

Die Grösse $I_{\mu\nu}$ hat zwei Indices. Nach der Integration wird sie die folgende allgemeine Form besitzen:

$$I_{\mu\nu}(q^2) = -ig_{\mu\nu}q^2 I(q^2) + q_\mu q_\nu J(q^2)$$

wobei I und J zwei skalare Funktionen von q^2 sind. D.h., eine Grösse mit zwei Indices, die von q^μ abhängt, kann nur von q^2 und $q^\mu q^\nu$ abhängen.

Der zweite Term trägt nicht zu der Amplitude bei, weil

$$\begin{aligned} q_\mu \bar{u}_3 \gamma^\mu u_1 &= \bar{u}_3 q u_1 = \bar{u}_3 (\not{p}_1 - \not{p}_3) u_1 = \bar{u}_3 (\not{p}_1 u_1) - (\bar{u}_3 \not{p}_3) u_1 \\ &= \bar{u}_3 m_e u_1 - m_e \bar{u}_3 u_1 = 0 \end{aligned}$$

Es folgt, dass die allgemeine Form gleich

$$I_{\mu\nu}(q^2) = -iq^2 g_{\mu\nu} I(q^2)$$

ist. Eine lange Herleitung liefert (Siehe z.B. Sakurai)

$$I(q^2) = \left(\frac{\alpha}{3\pi} \right) \left\{ \int_{m_e^2}^{\infty} \frac{dx}{x} - f\left(-\frac{q^2}{m_e^2}\right) \right\}$$

wobei

$$f(x) = 6 \int_0^1 z(1-z) \ln(1+xz(1-z)) dz$$

$$\approx \begin{cases} x/5 & \text{wenn } x \ll 1 \\ \ln x & \text{wenn } x \gg 1 \end{cases}$$

Das Integral ist endlich, und die Divergenz ist im ersten Term der I -Funktion enthalten. Die Divergenz wird mit einer beschränkten Lösung behandelt: ein “Cut-off” Λ wird eingeführt:

$$\int_{m_e^2}^{\infty} \frac{dx}{x} \rightarrow \int_{m_e^2}^{\Lambda^2} \frac{dx}{x} = \ln \frac{\Lambda^2}{m_e^2}$$

Schliesslich schreiben wir die **$O(\alpha)$ -Korrektur des Photon-Progapators** als:

$$I(q^2) = \left(\frac{\alpha}{3\pi} \right) \left\{ \ln \frac{\Lambda^2}{m_e^2} - f\left(-\frac{q^2}{m_e^2}\right) \right\}$$

Wir betrachten nun die $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ Streuung wieder und können die korrigierte Amplitude als

$$-i\mathcal{M} = (ie\bar{u}_3\gamma^\mu u_1) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) \left[1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \left\{ \ln \frac{\Lambda^2}{m_e^2} - f\left(-\frac{q^2}{m_e^2}\right) \right\} \right] (ie\bar{u}_4\gamma^\nu u_2)$$

ausdrücken.

Um die Λ -Divergenz zu behandeln, werden wir die wichtige **Renormierung** einführen:

Wir ersetzen die Ladung e durch die renormierte Ladung e_R !

$$e_R \equiv e \left(1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{m_e^2} \right)^{1/2} \quad \text{renormierte Ladung}$$

und die Amplitude kann bis zur Ordnung e^4 so ausgedrückt werden:

$$-i\mathcal{M} = (ie_R\bar{u}_3\gamma^\mu u_1) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) \left[1 + \frac{e_R^2}{12\pi^2} f\left(-\frac{q^2}{m_e^2}\right) + O(e^4) \right] (ie_R\bar{u}_4\gamma^\nu u_2)$$

Wir bemerken:

1. Die Divergenz wurde “geheilt”. Alle Bezüge zum “Cut-off” Parameter Λ wurden in der Definition der elektrischen Ladung absorbiert.

Ist diese Situation umständlich? Nein.

Die Renormierung der elektrischen Ladung sagt voraus, dass der Parameter der Theorie, die nackte elektrische Ladung e , nicht beobachtbar ist. Man kann nie ein “nacktes” Elektron nachweisen.

Wir können nie ein Elektron in erster Ordnung beobachten. Der

physikalische Parameter, die bekleidete elektrische Ladung, entspricht der renormierten Ladung e_R .

2. Eine endliche q^2 -abhängige Korrektur bleibt noch. Sie wird auch in der Definition der elektrischen Ladung absorbiert !

$$e_R(q^2) \equiv e_R(0) \left(1 - \frac{e_R^2(0)}{12\pi^2} f\left(-\frac{q^2}{m_e^2}\right) \right)^{1/2}$$

oder

$$\alpha(q^2) \equiv \alpha(0) \left(1 - \frac{\alpha(0)}{3\pi} f\left(-\frac{q^2}{m_e^2}\right) \right)$$

laufende Kopplungskonstante

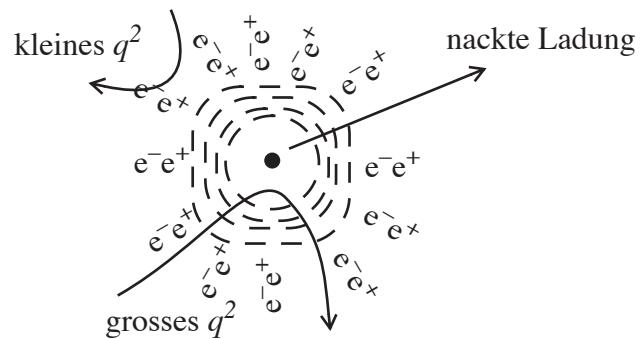
Wir schliessen daraus, dass wegen der Strahlungskorrekturen die elektrische Ladung (oder die entsprechende Feinstruktur-Konstante) nicht mehr "konstant" ist.

Die QFT sagt voraus, dass die gesamte Amplitude eines Prozesses als eine Reihenentwicklung von Diagrammen mit zunehmender Ordnung bestimmt werden kann.

Das Einfügen von Strahlungskorrekturen (d.h. der Diagramme der nächsten Ordnung) ändert die Amplitude so, dass die elektrische Ladung so aussieht, wie wenn sie nicht eine Konstante wäre, sondern mit dem ausgetauschten Impuls q^2 variiert.

Die physikalische Interpretation dieses Verhältnisses wird als **Ladungsabschirmung** bezeichnet.

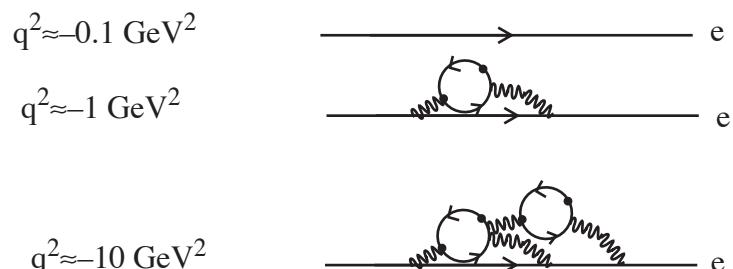
Ein Elektron ist nie "nackt", eine Hülle von Elektron-Positron-Paaren umschliesst es. Man spricht von der **Vakuum-Polarisation**. Siehe Abb. 1. Die Paare schirmen die nackte Ladung ab.



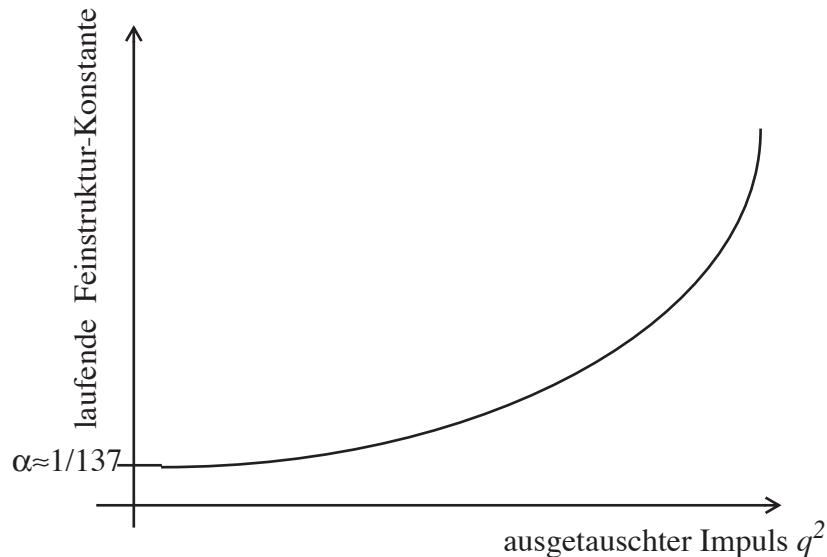
Figur 1. Vakuum-Polarisation. Das Elektron wird von einer Hülle von Elektron-Positron-Paaren umschlossen. Die “nackte” Ladung wird nur gespürt, wenn der ausgetauschte Impuls gross ist.

Wir können uns vorstellen, dass je grösser der *ausgetauschte Impuls ist, desto näher ist die verspürte Ladung der nackten Ladung.*

In Form von Diagrammen kann ein Elektron als Funktion des ausgetauschten Impulses so dargestellt werden:



Zusammenfassend wird die laufende Feinstruktur-Konstante als Funktion des ausgetauschten Impulses q^2 in Abb. 2 geplottet.



Figur 2. Feinstruktur-Konstante als Funktion des ausgetauschten Impulses q^2 .

Als Beispiel können wir die 180° -Grad Streuung eines Teilchens betrachten:

$$q^2 \approx t \approx -4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \approx -4p^2 \quad \text{wenn } \theta \approx 180^\circ$$

Der Effekt ist klein bei niedriger Energie, z.B.

$$p \approx m_e \frac{c}{10} \quad \Rightarrow \quad \delta\alpha \approx 6 \times 10^{-6}$$

Aber beim LEP-I-Beschleuniger z.B. war der Effekt nicht vernachlässigbar:

$$q^2 \approx (90\text{GeV})^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha((90\text{GeV})^2) \approx \frac{1}{128} > \frac{1}{137}$$

14.3 Anomales magnetisches Moment

Diagramme höherer Ordnung können als “Form-Faktoren” eingefügt werden, die vom ausgetauschten Impuls q^2 abhängen.

Der “bekleidete” Photon-Propagator:

$$\begin{aligned} \text{---} &= \text{---} - \text{---} + \text{---} \\ &\equiv \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} + \left(\frac{-i}{q^2} \right) \underbrace{I^{\mu\nu}(q^2)}_{= -ig^{\mu\nu} q^2 I(q^2)} \left(\frac{-i}{q^2} \right) \end{aligned}$$

Wir sagen, dass die Funktion $I(q^2)$ die **Struktur des Photons** beschreibt.

In ähnlicher Weise können wir die Vertex-Korrekturen eines Elektrons folgendermassen berücksichtigen:

$$ie\bar{u}_2\gamma^\mu u_1 \rightarrow (ie)\bar{u}_2 \left[\gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i}{2m_e} \sigma^{\mu\nu} q_\nu F_2(q^2) \right] u_1$$

Die Funktionen $F_1(q^2)$ und $F_2(q^2)$ beschreiben die **Struktur des Elektrons**.

Wenn wir die Diagramme höherer Ordnung betrachten, dann sieht das Elektron nicht mehr wie ein punktförmiges Dirac-Teilchen aus, sondern wie ein kompliziertes Gebilde mit interner Struktur.

Der zweite Term

$$\left(-\frac{e}{2m_e} \right) \bar{u}_2 \sigma^{\mu\nu} q_v u_1$$

entspricht dem **magnetischen Moment des Dirac-Elektrons**.

Im nicht-relativistischen Grenzfall ($p \rightarrow 0$) kann der Dirac-Hamilton-Operator so vereinfacht werden

$$H_{Dirac} \psi \approx \left(\frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m_e} - \frac{e}{2m_e} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} + eA^0 \right) \psi \quad \text{wenn } |\vec{p}| \rightarrow 0$$

Diese Funktion ist ähnlich dem Hamilton-Operator von Pauli. Sie beschreibt die Ausbreitung eines nicht-relativistischen Elektrons im elektromagnetischen Feld.

Die Energie

$$-\left(\frac{e}{2m_e} \right) \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \equiv -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

beschreibt das **magnetische Moment des Elektrons**:

$$\vec{\mu} = \left(\frac{e}{2m_e} \right) \vec{\sigma} = 2 \underbrace{\left(\frac{e}{2m_e} \right)}_{\text{Bohr-Magneton}} \underbrace{\left(\frac{\vec{\sigma}}{2} \right)}_{\text{Spin}} = 2 \left(\frac{e}{2m_e} \right) \vec{s}$$

Das Bohr-Magneton des Elektrons wird definiert als

$$\mu_B \equiv \left(\frac{e\hbar}{2m_e c} \right) \approx 0,57 \times 10^{-14} \text{ MeV / G}$$

Das magnetische Moment eines Teilchens hängt vom Verhältnis e/m des Teilchens ab. Für einen klassischen rotierenden Körper hängt das magnetische Moment von der räumlichen Verteilung der Ladung und der Masse ab.

Z.B.

$$\mu_{\text{Proton}} \approx 5.59 \mu_B \quad \text{und} \quad \mu_{\text{Neutron}} \approx -3.82 \mu_B$$

Diese Werte folgen aus der nicht-punktförmigen Natur des Nukleons.

Zusammenfassend sagt die Dirac-Theorie voraus, dass

ein punktförmiges Dirac-Teilchen ein magnetisches Moment besitzt.

*Das Verhältnis des magnetischen und des mechanischen Moments g (das **gyro-magnetische Verhältnis** oder der **Lande-Faktor**) ist gleich*

$$\vec{\mu} = g \mu_B \vec{s} \quad \Rightarrow \quad g_{\text{Dirac}} \equiv 2$$

Dieses Ergebnis ist eine sehr wichtige Voraussage der Theorie. Es wurde erfolgreich von Experimenten überprüft.

Dass das gyro-magnetische Verhältnis eines Dirac-Teilchens genau gleich zwei ist, gilt, wenn wir die Dirac-Theorie als die Theorie eines Teilchens verwenden.

In der QED (eine QFT-Theorie) müssen die Diagramme nächster Ordnung eingefügt werden. Die Vertex-Korrekturen werden das gemessene gyro-magnetische Verhältnis modifizieren.

Eine explizite (lange) Herleitung des elektromagnetischen Vertex (Siehe z.B. Renton) liefert in erster Ordnung:

$$(ie)\bar{u}_2 \left[\gamma^\mu F_1(q^2) + \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right) \frac{i}{2m_e} \sigma^{\mu\nu} (p_{2v} - p_{1v}) \right] u_1$$

Damit ist das gyro-magnetische Verhältnis des Elektrons g_e gleich

$$\mu_e = - \left(\frac{e}{2m_e} \right) \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right) \vec{\sigma} \equiv -g_e \left(\frac{e}{2m_e} \right) \left(\frac{\vec{\sigma}}{2} \right)$$

Das **anomale magnetische Verhältnis des Elektrons** wird definiert als

$$a_e \equiv \frac{g_e - 2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi} \quad O(\alpha) - \text{Korrektur}$$

Die aktuellen Werte für das Elektron und das Myon wurden mit höchster Genauigkeit gemessen. Die experimentellen Resultate zeigen, wie erwartet, dass

$$g_e \neq 2 \quad \text{und} \quad g_\mu \neq 2 \quad \text{von c.a. } 0,2\%$$

Der Effekt ist klein (d.h. es ist eine kleine Korrektur). Er zeigt, dass sich das Elektron und das Myon nicht wie strukturlose, punktförmige Teilchen verhalten.

Ähnliche Effekte existieren in der Atomphysik: z.B. die berühmte Lamb-Shift (1% Korrektur in Wasserstoff 2p-2s-Aufspaltung).

Das theoretische Ergebnis in nächster Ordungen ist das folgende:

$$\begin{aligned} a_e^{QED} &= \frac{\alpha}{2\pi} - 0,32848 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + 1,19 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 - \dots \\ &= (1 \ 159 \ 652,4 \pm \underbrace{0,4}_{\text{theoretischer Fehler}}) \times 10^{-9} \end{aligned}$$

Das experimentelle Resultat ist gleich

$$a_e^{\text{exp}} = (1 \ 159 \ 652,4 \pm 0,2) \times 10^{-9}$$

Die experimentelle Genauigkeit ist ca. 2×10^{-7} ($\approx 0,2$ ppm) !!

Dieses Ergebnis entspricht einer sehr strengen und wichtigen Überprüfung der QED und dem Konzept der Strahlungskorrekturen und des Renormierungsprozesses.

Auch sehr interessant sind die Resultate bezüglich des anomalen gyromagnetischen Verhältnisses des Myons (die Strahlungskorrekturen hängen von der Masse des Teilchens ab):

$$\begin{aligned} a_{\mu}^{QED} &= \frac{\alpha}{2\pi} + 0,76585810(10) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + 24,073(11) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 \\ &\quad + 140(6) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^4 + \dots \end{aligned}$$

Kürzlich wurde am BNL (Brookhaven National Laboratory) ein verbessertes Experiment durchgeführt.

Mit diesem Experiment ist der Welt-Mittelwert des anomalen magnetischen Moments gleich

$$a_{\mu}^{\text{exp}} = (11\ 659\ 202,3 \pm 15,1) \times 10^{-10} \quad (1.3 \text{ ppm})$$

Der theoretische Wert war bis November 2001 gleich

$$a_{\mu}^{\text{theo}} = (11\ 659\ 159,7 \pm 6,7) \times 10^{-10}$$

d.h., es gibt eine signifikante Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment! Als Folge dieser Diskrepanz wurden viele theoretische Artikel veröffentlicht. Schliesslich hat man einen Fehler in der theoretischen Berechnung gefunden und heute ist der offizielle Wert gleich

$$a_{\mu}^{\text{theo}} = (11\ 659\ 176,1 \pm 6,9) \times 10^{-10}$$

so dass

$$a_{\mu}^{\text{exp}} - a_{\mu}^{\text{theo}} = (26,2 \pm 16,6) \times 10^{-10}$$

Es gibt keine Diskrepanz mehr zwischen Theorie und Experiment !

14.4 Renormierung

Wir haben gesehen, dass die QED-Theorie *a priori* Probleme mit unendlichen Grössen hat. Eine Berechnung in der QED wurde als eine Reihenentwicklung nach Potenzen der elektrischen Ladung “ e ” durchgeführt. Die Diagramme der nächsten Ordnung besitzen Divergenzen.

Renormierung

Endliche Resultate können nur nach einer *Renormierung* erhalten werden.

*Die QED ist eine erfolgreiche QFT, weil sie renormierbar ist!
(nicht alle QFT sind renormierbar)*

Zusammenfassend: die “nackten” Parameter, die in der Lagrange-Funktion der Theorie erscheinen, sind nicht gleich den gemessenen Parametern:

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi} [\gamma^\mu i\partial_\mu - m_0] \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - e_0 (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) A_\mu$$

wobei e_0 und m_0 die “nackte” Ladung und Masse der Theorie sind.

Die *gemessene (beobachtbare)* Ladung und Masse werden wegen Strahlungskorrekturen vom ausgetauschten Impuls q^2 hängen:

$$\begin{cases} e = e_0 + f(e_0, q^2) \\ m_e = m_0 + \delta m(m_0, q^2) \end{cases}$$

Nach der *Renormierung* werden die Größen in einen unendlichen Teil und eine endliche Korrektur aufgeteilt:

$$\begin{cases} e = \underbrace{e_0 + f^\infty(e_0, q^2)}_{\equiv e(q^2 \approx 0)} + f(q^2) = \underbrace{e(q^2 \approx 0)}_{\text{endlich}} + \underbrace{f(q^2)}_{\text{laufende Ladung}} \\ m_e = \underbrace{m_0 + \delta m^\infty(m_0, q^2)}_{\equiv m(q^2 \approx 0)} + \delta m(q^2) = \underbrace{m(q^2 \approx 0)}_{\text{endlich}} + \underbrace{\delta m(q^2)}_{\text{laufende Masse}} \end{cases}$$

In der Praxis legt die Renormierung die physikalischen Werte bei einer bestimmten Skala fest

$$Q^2 \equiv -q^2 \quad (\text{Beachte: } q^2 \leq 0 \rightarrow Q^2 \geq 0)$$

durch die Definition der Grössen bei einem Referenzimpuls μ^2 .

Z.B. im Fall der Vakuumpolarisierung

$$e_R - \left(\frac{q^2}{q^2} - \frac{q^2}{\mu^2} \right)$$

Die Korrektur zwischen Klammern ist gleich (Siehe Kap. 14.2)

$$() \approx \left(\frac{\alpha}{3\pi} \right) \left[\ln \frac{\Lambda^2}{m_e^2} - f\left(\frac{-q^2}{m_e^2} \right) - \ln \frac{\Lambda^2}{m_e^2} + f\left(\frac{+\mu^2}{m_e^2} \right) \right]$$

Wenn

$$x \equiv \frac{Q^2}{m_e^2} \gg 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) \rightarrow \ln x$$

Damit

$$() \approx \left(\frac{\alpha}{3\pi} \right) \left[-\ln \left(\frac{Q^2}{m_e^2} \right) + \ln \left(\frac{+\mu^2}{m_e^2} \right) \right] \approx \left(\frac{\alpha}{3\pi} \right) \ln \left(\frac{\mu^2}{Q^2} \right)$$

und wir erhalten schliesslich die folgende Korrektur der laufenden Kopplungskonstanten

$$\alpha(Q^2) = \alpha(\mu^2) \left[1 + \left(\frac{\alpha(\mu^2)}{3\pi} \right) \ln \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right) \right]$$

Wir können das Ergebnis verbessern, wenn wir annehmen, dass die Korrekturterme nächster Ordnungen einer Reihenentwicklung folgen müssen, der Form:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1+x}$$

und deshalb (man spricht von “**Resummierung**”)

$$\alpha(Q^2) \equiv \frac{\alpha(\mu^2)}{1 - \left(\frac{\alpha(\mu^2)}{3\pi} \right) \ln \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right)} \quad (\text{resummiert})$$

Wie wird die Skala μ^2 gewählt? Verschiedene Werte werden verschiedene Entwicklungen liefern! Schliesslich müssen die theoretischen Resultate unabhängig von der μ^2 -Skala sein !

Diese Unabhängigkeit wird als **RGE** (Renormalization Group Equation) ausgedrückt:

$$\mu \frac{dM}{d\mu} \equiv 0$$

d.h. die Amplitude eines beliebigen Prozesses muss unabhängig von der gewählten Skala sein.

14.4.1 Ward-Identitäten

Strahlungskorrekturen ändern die beobachtbare Ladung eines Teilchens und hängen im Prinzip von der Masse des Teilchens ab.

Wie können wir sicher sein, dass die Ladung des Elektrons und des Myons bei allen Skalen Q^2 gleich sind ?

$$e_e(Q^2) = e_\mu(Q^2) \quad \text{unabhängig von } Q^2 ?$$

Ward zeigte, dass die Vertexkorrekturen der Ladung die Selbstenergiekorrekturen kompensieren. Nur werden die Photon-Propagator-Korrektoren die beobachtete Ladung ändern.

Dass die Ladungen der Teilchen einer Theorie sich wegen Strahlungskorrekturen in gleicher Weise ändern, ist eine sehr wichtige Eigenschaft für die Kohärenz der Theorie.

15.1 Die starke Kraft

QED ist eine sehr erfolgreiche, nützliche Theorie.
Z.B. (1) Elektron, Positron, Antimaterie; (2) Renormierung; (3) sehr genau (anomales magnetisches Moment, usw...)

Die QED-Theorie kann aber nicht den Atomkern erklären ! Wir brauchen eine zusätzliche Kraft: die **starke Kraft**.

Yukawa (1934): Erste Theorie der starken Kraft

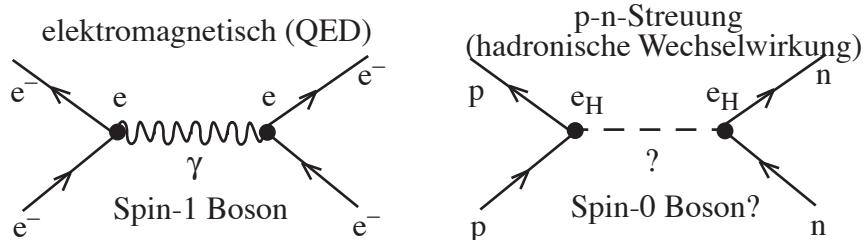
In dieser Theorie werden die Protonen und Neutronen wegen eines Feldes im Kern angezogen.

Das Feld muss quantisiert sein: was ist das Quant des starken Feldes?
(das Analog des Photons für das elektromagnetische Feld)

In ähnlicher Weise wie in der QED,

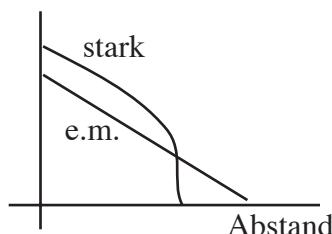
wird die Fernwirkung (“Action at a distance”) der starken Kraft durch den Austausch eines virtuellen Bosons dargestellt.

Das Diagramm für die p-n-Streuung (die Wechselwirkung zwischen einem Proton und einem Neutron) könnte so dargestellt werden:



wobei e_H der **starken Kopplungskonstanten** entspricht.

Reichweite: die starke Kraft muss eine kleine Reichweite R besitzen



$$R \approx 10^{-15} \text{ m} \approx 1 \text{ Fermi}$$

Das ausgetauschte Boson muss schwer sein !! (Vergleich mit masselosem Photon)

Der Austausch (Emission-Absorption) des Bosons muss nicht direkt beobachtbar sein ! Wir sprechen von einem *virtuellen* Effekt.

Mit der Unschärfebeziehung von Heisenberg für die Energie und die Zeit erhalten wir

$$\Delta E \Delta t \approx \hbar \quad \text{aber} \quad c \Delta t \approx R \quad (\text{wobei } R \equiv \text{Reichweite})$$

oder

$$\Delta E \Delta t \approx (mc^2)(R/c) \approx \hbar$$

Damit ist die Reichweite R der Kraft, die durch den Austausch eines Bosons der Masse m verursacht wird, ungefähr gleich

$$mc^2 \approx \frac{\hbar c}{R}$$

Mit $R \approx 10^{-15} \text{ m}$ finden wir

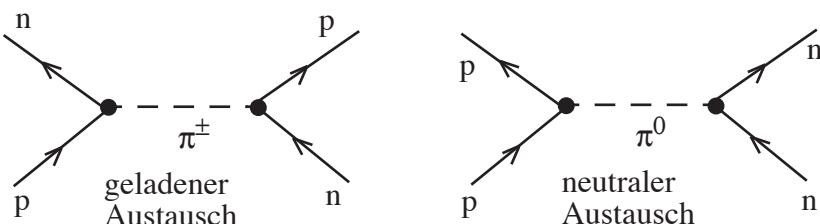
$$m \approx 100 \text{ MeV}/c^2$$

Ein Teilchen mit solcher Masse war 1934 unbekannt. Diese Masse hat einen “mittleren” Wert, viel schwerer als die Elektronmasse und leichter als die Nukleonmasse:

$\underbrace{m_e}_{\text{leicht}} << \underbrace{m}_{\text{mittel}}$	$<< \underbrace{m_p, m_n}_{\text{schwer}}$	
LEPTON (Elektron)	MESON	BARYON

Das unbekannte Teilchen der mittleren Masse wird als Pion (π) bezeichnet.

Tatsächlich müssen 3 solche Mesonen mit verschiedenen elektrischen Ladungen existieren, um die verschiedenen hadronischen Wechselwirkungen (wie z.B. $p n \rightarrow p n$) zu beschreiben.



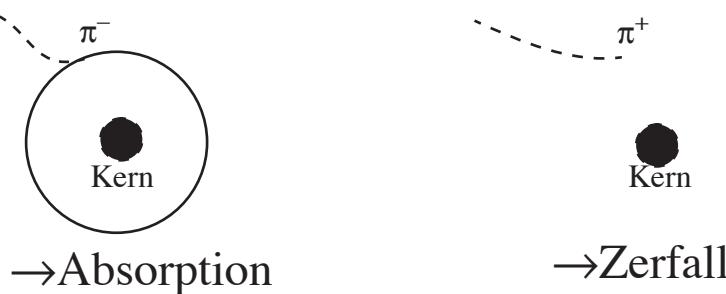
(die elektrische Ladung muss an den Vertices erhalten werden)

π -Boson: der Spin muss einen ganzzahligen Wert besitzen.

Niemand hat solche Teilchen im Jahr 1930 nachgewiesen.

Tomonaga/Araki (1940):

π^+/π^- sollen wegen ihrer starken Wechselwirkung unterschiedliche Effekte besitzen, wenn sie in der Materie stoppen:



Negative Pionen erzeugen **pionische Atome**. Wegen der Masse (viel grösser als die Elektronmasse) befindet sich das Pion bei einem sehr kleinen Radius: es wird mit dem Kern mit grosser Wahrscheinlichkeit wechselwirken.

Positive Pionen werden keine Atome erzeugen. Sie werden zerfallen.

Tomonaga/Araki sagten voraus, dass dieses unterschiedliche Verhalten beobachtet werden kann.

15.2 Entdeckung des Mesons

15.2.1 Entdeckung des Myons

Das Myon wurde durch das Studium von **kosmischen Strahlen** entdeckt.

Primäre kosmische Strahlen: 99% Protonen → Wechselwirkung mit der oberen Atmosphäre.

Pionen werden in **Nukleon-Nukleon Wechselwirkungen** erzeugt:
z.B.

$$\begin{cases} pp \rightarrow pp\pi^0 & np \rightarrow pp\pi^- \\ pp \rightarrow pn\pi^+ & np \rightarrow pn\pi^0 \\ & np \rightarrow nn\pi^+ \end{cases}$$

Bei höheren Energien $NN \rightarrow NN + n\pi's$ ($n > 1$)

Anderson, Neddermeyer (1937)

Street, Stevenston (1937)

Entdeckung von einem mesonartigen Teilchen

Conversi, Pancini, Piccioni (1946): Beweis, dass das entdeckte Teilchen *nicht* das Yukawa-Teilchen sein kann (die Wechselwirkung mit der Materie ist zu schwach)

⇒ Entdeckung des Myons μ^+, μ^-

$$m_\mu \approx 105 \text{ MeV} \quad (\text{schweres Elektron})$$

$$\tau \approx 2200 \text{ ns} \approx 2,2 \text{ } \mu\text{s}$$

15.2.2 Entdeckung des geladenen Pions

Lattes, Occhialini, Powell (1947):

Powell, Fowler, Perkins (1947):

Exposition von photographischen Emulsionen in grosser Höhe (Flugzeugen oder Bergen)

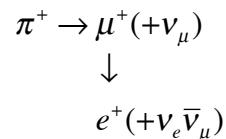
Emulsionen → Empfindlichkeit auf geladene Teilchen

| ⇒ Entdeckung des geladenen Pions π^+

$$\boxed{\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu} \quad \begin{array}{l} \text{Zweikörperzerfall} \\ T_\mu = 4.1 \text{ MeV} \\ m_{\pi^\pm} \approx 140 \text{ MeV} \\ \tau \approx 26 \text{ ns} \end{array}$$

Wegen ihrer Lebensdauer können die Pionen, die in der oberen Atmosphäre erzeugt werden, den Boden nicht erreichen.

In der Emulsion wurde die folgende Reaktion beobachtet:



15.2.3 Entdeckung des neutralen Pions

Bjorklund et al. (1950):

Synchrozyklotron-Beschleuniger

| ⇒ Entdeckung der Produktions-Schwelle von neutralen Pionen in Wechselwirkungen zwischen beschleunigten Protonen und Kohlenstoff- oder Beryllium-Target.

$$\begin{cases} pC \rightarrow \dots + \pi^0 \rightarrow \dots + \gamma\gamma & \text{wenn } T_p \geq \approx 200 \text{ MeV} \\ pBe \rightarrow \dots + \pi^0 \rightarrow \dots + \gamma\gamma \end{cases}$$

Wenn die kinetische Energie des einfallenden Protons grösser als ca. 200 MeV war, nahm die Anzahl von beobachteten Gamma-Paaren im Experiment stark zu.

$$\boxed{\begin{aligned} m_{\pi^0} &\approx 135 \text{ MeV} < m_{\pi^\pm} \\ \pi^0 &\rightarrow \gamma\gamma \quad \tau \approx 10^{-16} \text{ s} \end{aligned}}$$

Das neutrale Pion zerfällt sehr schnell durch die elektromagnetische Wechselwirkung.

Beachte:

$$\underbrace{\tau_{\pi^0}(10^{-16} \text{ s})}_{\substack{\text{elektromagnetischer} \\ \text{Zerfall}}} \ll \underbrace{\tau_{\pi^\pm}(10^{-8} \text{ s})}_{\substack{\text{schwacher} \\ \text{Zerfall}}} \ll \tau_{\mu^\pm}(10^{-6} \text{ s})$$

Aber im Allgemeinen werden Pionen in starken Wechselwirkungen erzeugt. Das Pion ist das leichteste Hadron. Es kann nicht stark zerfallen.

15.3 Elektrodynamik von skalaren Feldern

Wir fassen in diesem Kapitel die Feynman-Regeln für die Behandlung von Pionen (oder i.A. skalare Teilchen) zusammen.

Das Pion ist ein Spin-0 Boson → sein Feld kann mit Hilfe der Klein-Gordon-Gleichung beschrieben werden. Wir können entweder ein reelles oder ein komplexwertiges Feld betrachten:

Reelles KG Feld:

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

$$H = \int d^3\vec{p} N(\vec{p}) E_p$$

Komplexwertiges KG Feld:

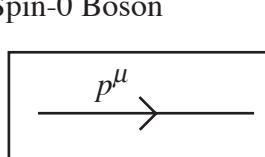
$$\mathcal{L}_{KG} = (\partial_\mu \phi^+)(\partial^\mu \phi) - m^2\phi^+\phi^-$$

$$H = \int d^3\vec{p} (N^+(\vec{p}) + N^-(\vec{p})) E_p$$

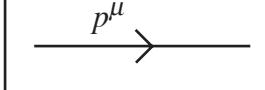
$$Q = \int d^3\vec{p} (N^+(\vec{p}) - N^-(\vec{p}))$$

Das komplexwertige KG Feld beschreibt geladene Teilchen.

1. Der Propagator:

Spin-0 Boson	$\overline{\phi(x)\phi(y)} = D_F(x-y)$
	$\equiv \frac{i}{p^2 - m_\pi^2}$
	eine skalare Zahl

Vergleich mit dem Elektron-Propagator:

	$\equiv \frac{i(p+m)}{p^2 - m^2}$	eine Matrix (Summe über Spins)
---	-----------------------------------	--------------------------------------

2. Externe Beine:

$$\overline{\phi} \overline{q} \equiv \quad \bullet \quad \xleftarrow{\text{einlaufend}}$$

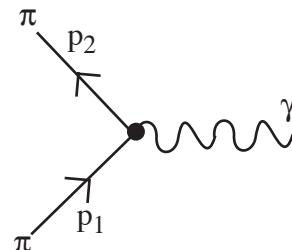
Vertexfaktor

$$1$$

$$\overline{q} \overline{\phi} \equiv \quad \xrightarrow{\text{auslaufend}} \bullet$$

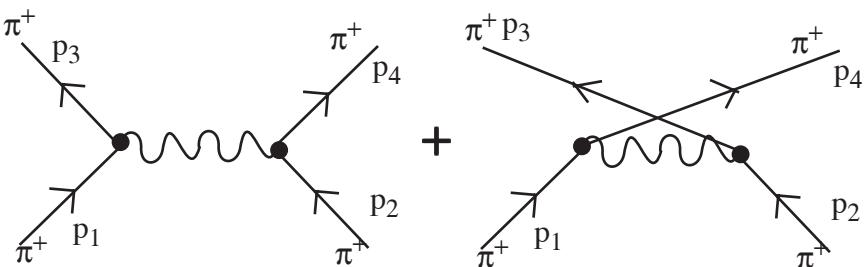
$$1$$

3. Vertex mit Photon:



$$(-ie)(p_1 + p_2)^\mu$$

Beispiel: $\pi^+ \pi^+$ -Streuung



Beide Diagramme werden addiert, weil für Bosonen das Ergebnis *symmetrisch* unter der Vertauschung der Teilchen sein muss.

Die Amplitude ist gleich

$$\mathcal{M} = (ie)^2 \left[\frac{(p_1 + p_3)_\mu (p_2 + p_4)^\mu}{(p_1 - p_3)^2} + \frac{(p_1 + p_4)_\mu (p_2 + p_3)^\mu}{(p_1 - p_4)^2} \right]$$

15.4 Isospin-Symmetrie

15.4.1 Der Isospin

Wir betrachten das Proton (p) und das Neutron (n). Diese Teilchen besitzen *ähnliche Eigenschaften ausser der elektrischen Ladung* (z.B. $m_p = 938,3 \text{ MeV} \approx m_n = 939,6 \text{ MeV}$).

Heisenberg (1932):

p und n wären eine einzige Einheit (d.h. **das Nukleon**), wenn die elektromagnetische Wechselwirkung ausgeschaltet werden könnte¹.

Die Eigenzustände sind fast entartet. Die Entartung wird von der elektromagnetischen Wechselwirkung aufgehoben.

Für die starke Wechselwirkung sind p und n fast entartet (ihre Masse sind nicht genau gleich. Dieser Unterschied wird vernachlässigt).

Als Folge gibt es eine Symmetrie in der Hamilton-Funktion der Theorie²

Die Nukleonen werden als die zwei Zustände eines einzigen Teilchens dargestellt:

$$\chi \equiv \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad p \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad n \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

-
1. Eine ähnliche Situation findet man im Zeeman-Effekt: die Spin-Entartung wird vom B-Feld aufgehoben.
 2. **Bemerkung:** wir wissen heutzutage, dass wegen den unterschiedlichen u- und d-Quarkmassen die Isospin-Symmetrie auch von der starken Wechselwirkung gebrochen wird. Wir werden das vernachlässigen, und wir nehmen an, dass der Hamilton-Operator der starken Wechselwirkung wirklich invariant unter der Isospin-Transformation ist.

Die zwei Zustände sehen wie ein Spin-1/2 Spinor aus (Siehe Kap. 4.2.2). Das Analog des Spins wird als **Isospin I** bezeichnet:

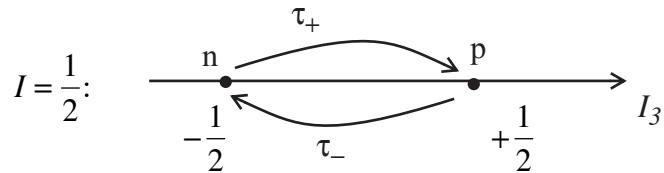
$$p = |I, I_3\rangle \equiv \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \quad "Isospin - Up"$$

$$n = |I, I_3\rangle \equiv \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \quad "Isospin - Down"$$

Es folgt daraus, dass

| das Nukleon den Isospin $I=1/2$ trägt. Wir definieren die "Pauli-Matrizen" des Isospins τ_1, τ_2, τ_3 (die τ_3 Eigenwerte liefern $I_3=\pm 1/2$).

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



| Die Matrizen τ_+ und τ_- werden entsprechend den Spin-Operatoren, die I_3 um 1 erhöhen resp. erniedrigen, definiert:

$$\tau_{\pm} \equiv \frac{1}{2}(\tau_1 \pm i\tau_2): \quad \tau_+|n\rangle = |p\rangle \quad \text{und} \quad \tau_-|p\rangle = |n\rangle$$

15.4.2 Die Isospin-Symmetrie

Die Isospin-Transformation (eine Rotation im Isospin-Spinorraum) wird durch die $SU(2)$ -Gruppe dargestellt.

Heisenberg: Die starke Wechselwirkung ist invariant unter der $SU(2)$ -Isospin-Transformation (ISOSPIN-SYMMETRIE)

Da der Isospin eine Invariante ist, werden die Teilchen im **Isospin-Raum** dargestellt:

Teilchen-Darstellung im Isospin-Raum:

$$\text{Doublett } I = \frac{1}{2}: \quad p \equiv \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \quad n \equiv \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ m_p = 938,3 \text{ MeV} \approx m_n = 939,6 \text{ MeV}$$

$$\text{Multiplett } I=1 \quad \pi^+ \equiv |1,+1\rangle, \quad \pi^0 \equiv |1,0\rangle, \quad \pi^- \equiv |1,-1\rangle$$

$$m_{\pi^\pm} = 139,6 \text{ MeV} \approx m_{\pi^0} = 135 \text{ MeV}$$

SU(2)-Brechung: Wir definieren die elektrische Ladung Q als Funktion der Quantenzahlen B und I_3

$$Q \equiv \underbrace{\frac{1}{2}B}_{\substack{\text{Baryon-Zahl} \\ B=1 \text{ f\"ur Nukleon} \\ B=0 \text{ f\"ur Pion}}} + \underbrace{I_3}_{\substack{\text{Isospin}}} \quad \begin{pmatrix} \text{Gell-Mann} \\ \text{Nishijima} \end{pmatrix}$$

Es gilt,

$$[I_i, I_j] = i\epsilon_{ijk}I_k \quad \text{Lie-Algebra der SU(2)-Gruppe}$$

und damit

$$[Q, I_3] = \left[\frac{1}{2}B + I_3, I_3 \right] = 0 \\ [Q, I_{1,2}] = \left[\frac{1}{2}B + I_3, I_{1,2} \right] \neq 0 \quad \text{weil} \quad [I_{1,2}, I_3] \neq 0$$

Wir können deshalb sagen, dass der Ladungsoperator nicht invariant unter der Isospin-Transformation ist.

Wenn die Invarianz unter der SU(2)-Isospin-Gruppe gilt, dann wird wegen des Nöther-Theorems der Isospin erhalten.

\Rightarrow Weil die starke Wechselwirkung invariant unter der SU(2)-Isospin-Transformation ist, wird der gesamte Isospin in starken Wechselwirkungen erhalten.

\Rightarrow Im Gegensatz dazu verletzt die elektrische Ladung die Isospin-Erhaltung.

15.4.3 Dynamische Folgerung

Wir betrachten zwei Nukleonen. Wir erinnern uns an die Regel der Addition von Spins:

$$2 \otimes 2 = 3 \oplus 1$$

$$\left. \begin{aligned} |S=1, M=1\rangle &= \uparrow\uparrow \\ |S=1, M=0\rangle &= (\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) / \sqrt{2} \\ |S=1, M=-1\rangle &= \downarrow\downarrow \\ |S=0, M=0\rangle &= (\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) / \sqrt{2} \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Spin-Triplett} \\ \text{Spin-Singlett} \end{array}$$

In ähnlicher Weise erhalten wir für eine Isospin-Kombination von Protonen- und Neutronen-Zuständen

$$\boxed{\left. \begin{aligned} |I=1, I_3=1\rangle &= pp \\ |I=1, I_3=0\rangle &= (pn + np) / \sqrt{2} \\ |I=1, I_3=-1\rangle &= nn \\ |I=0, I_3=0\rangle &= (pn - np) / \sqrt{2} \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Symmetrisches Isotriplett} \\ \text{Antisymmetrisches Isosinglett} \end{array}}$$

Wir betrachten nun die folgenden Prozesse:

$$1) \pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$$

$$2) \pi^- + p \rightarrow \pi^- + p \quad \text{Pion } I=1, \text{ Nukleon } I=\frac{1}{2}$$

$$3) \pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$$

$$\Rightarrow \text{der gesamte Isospin ist gleich } I=\frac{3}{2} \quad \text{oder} \quad I=\frac{1}{2}$$

Wir sind an den Amplituden der Prozesse interessiert. Wir werden diese Amplitude so bezeichnen:

$$\mathcal{M} = \langle I', I'_3 | A | I, I_3 \rangle$$

wobei I, I', I_3 und I'_3 die Anfangs- und Endzustands-Isospins und ihre dritte Komponente sind.

Wenn die starke Wechselwirkung invariant unter der Isospin-Rotation ist,

(a) muss der gesamte Isospin erhalten werden: $I'=I$

$$\mathcal{M} = \langle I, I'_3 | A | I, I_3 \rangle$$

(b) hängt die Amplitude des Prozesses nicht von I_3 ab:

$$\mathcal{M}_I = \langle I | A | I \rangle \text{ unabhängig von } I_3$$

Wir führen ein:

$$\mathcal{M}_3 = \left\langle \frac{3}{2} \middle| A \middle| \frac{3}{2} \right\rangle \quad \text{und} \quad \mathcal{M}_1 = \left\langle \frac{1}{2} \middle| A \middle| \frac{1}{2} \right\rangle$$

Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten sind für die verschiedenen Isospin-Konfigurationen gleich

$$\pi^+ + p: |1,1\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle$$

$$\pi^- + p: |1,-1\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\pi^0 + n: |1,0\rangle \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle$$

und damit erhalten wir

$$\begin{cases} \mathcal{M}(\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p) = \mathcal{M}_3 \\ \mathcal{M}(\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p) = \frac{1}{3}\mathcal{M}_3 + \frac{2}{3}\mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}(\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n) = \frac{\sqrt{2}}{3}\mathcal{M}_3 - \frac{\sqrt{2}}{3}\mathcal{M}_1 \end{cases}$$

Die Verhältnisse der Wirkungsquerschnitte

$$\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = |\mathcal{M}_3|^2 : \frac{1}{9}|\mathcal{M}_3 + 2\mathcal{M}_1|^2 : \frac{2}{9}|\mathcal{M}_3 - \mathcal{M}_1|^2$$

Falls wir annehmen, dass die Amplitude des I=3/2 Prozesses viel grösser als die des I=1/2 Prozesses ist, gilt

$$\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 \approx 9 : 1 : 2 \quad \text{wenn } |\mathcal{M}_3| \gg |\mathcal{M}_1|$$

und dann erwarten wir

$$\frac{\sigma(\pi^+ p)}{\sigma(\pi^- p)} \approx 3$$

wenn die starke Wechselwirkung invariant unter Isospin-Transformation ist. Dieses Ergebnis ist z.B. gültig in der Nähe der sogenannten Resonanz $\Delta(1232)$ (Siehe Kap. 20).

Wechselwirkung von Teilchen mit Materie

16.1 Grundlegende Prozesse

Wir betrachten die grundlegenden Prozesse, die stattfinden, wenn Teilchen Materie durchqueren. Unter Materie verstehen wir ein **Gas**, eine **Flüssigkeit** oder einen **Festkörper**. Die Materie wird durch

1. die Dichte ρ ,
 2. die Massenzahl A,
 3. die Ordnungszahl Z,
 4. usw...
- charakterisiert.

Siehe Abb. 1, wo in einer Tabelle die atomaren und Kern-Eigenschaften wichtiger Materialien aufgeführt sind.

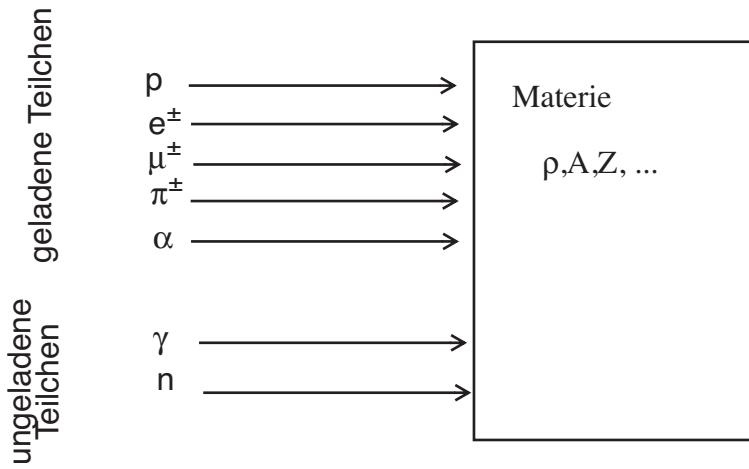
Im Allgemeinen werden die einfallenden Teilchen von der Materie ihre Bausteine (Atome) spüren, d.h. die Kerne (oder die Nukleonen) und die Elektronen.

Es folgt daraus, dass die Wechselwirkungen zwischen Teilchen und Materie **elektromagnetischer** und **starker** Natur sind.

Wechselwirkung von Teilchen mit Materie

Das Verständnis der Wechselwirkungen zwischen Teilchen und Materie ist wichtig, weil diese Prozesse die Basis für den Nachweis von Teilchen sind.

Wir unterscheiden die Wechselwirkungen von geladenen und neutralen Teilchen.



Grundlegende Prozesse

6. ATOMIC AND NUCLEAR PROPERTIES OF MATERIALS

Table 6.1. Revised May 2000 by D.E. Groom (LBNL). Gases are evaluated at 20°C and 1 atm (in parentheses) or at STP [square brackets]. Densities and refractive indices without parentheses or brackets are for solids or liquids, or are for cryogenic liquids at the indicated boiling point (BP) at 1 atm. Refractive indices are evaluated at the sodium D line. Data for compounds and mixtures are from Refs. 1 and 2. Further materials and properties are given in Ref. 3.

Material	Z	A	(Z/A)	Nuclear ^a collision interaction length λ_T	Nuclear ^a length λ_T	dE/dx _{min} ^b	Radiation length ^c	Density {g/cm ³ }	Liquid boiling point at 1 atm(K)	Refractive index n at ((n-1)×10 ⁶ for gas)
H ₂ gas	1	1.00794	0.99212	43.3	50.8	(4.103)	61.28 ^d	(731000) (0.0838)[0.0899]		[139.2]
H ₂ liquid	1	1.00794	0.99212	43.3	50.8	4.034	61.28 ^d	866	0.0708	20.39
D ₂	1	2.0140	0.49652	45.7	54.7	(2.052)	122.4	724	0.169[0.179]	23.65
He	2	4.002602	0.49968	49.9	65.1	(1.937)	94.32	756	0.124[0.1786]	4.224
Li	3	6.941	0.43221	54.6	73.4	1.630	82.76	155	0.534	—
Be	4	9.012182	0.44384	55.8	75.2	1.594	65.19	35.28	1.848	—
C	6	12.011	0.49954	60.2	86.3	1.745	42.70	18.8	2.365 ^e	
N ₂	7	14.00674	0.49976	61.4	87.8	(1.825)	37.99	47.1	0.8073[1.250]	77.36
O ₂	8	15.0994	0.50002	63.2	91.0	(1.891)	34.24	30.0	1.141[1.428]	90.18
F ₂	9	18.09984032	0.47372	65.5	95.3	(1.675)	32.93	21.85	1.507[1.696]	85.24
Ne	10	20.1797	0.49655	66.1	96.6	(1.724)	28.94	24.0	1.204[0.9005]	27.09
Al	13	26.981539	0.48181	70.6	106.4	1.615	24.01	8.9	2.70	
Si	14	28.0855	0.49848	70.6	106.0	1.664	21.82	9.36	2.33	3.95
Ar	18	39.948	0.46059	76.4	117.2	(1.519)	19.55	14.0	1.396[1.782]	87.28
Ti	22	47.867	0.45948	79.9	124.9	1.476	16.17	3.56	4.54	—
Fe	26	55.845	0.46556	82.8	131.9	1.451	13.84	1.76	7.87	—
Cu	29	63.546	0.45636	85.6	134.9	1.403	12.86	1.43	8.96	—
Ge	32	72.61	0.44071	88.3	140.5	1.371	12.25	2.30	5.323	—
Sn	50	118.710	0.42120	100.2	163	1.264	8.82	1.21	7.31	—
Xe	54	131.29	0.41130	102.8	169	(1.255)	8.48	2.87	2.953[5.858]	165.1
W	74	183.84	0.40250	110.3	185	1.145	6.76	0.35	19.3	—
Pt	78	195.08	0.39984	113.3	189.7	1.129	6.54	0.305	21.45	—
Pb	82	207.2	0.39575	116.2	194	1.123	6.37	0.56	11.35	—
U	92	238.0289	0.38651	117.0	199	1.082	6.00	=0.32	=18.95	
Air, (20°C, 1 atm.), [STP]			0.49919	62.0	90.0	(1.815)	36.66	[30420] (1.205)[1.2931]	78.8	(273)[293]
H ₂ O			0.55509	60.1	83.6	1.991	36.08	36.1	1.00	373.15
CO ₂ gas			0.49989	62.4	89.7	(1.819)	36.2	[18310]	[1.977]	[410]
CO ₂ solid (dry ice)			0.49989	62.4	89.7	1.787	36.2	23.2	1.563	sublimes
Shickling concrete ^j			0.50274	67.4	99.9	1.711	26.7	10.7	2.5	—
SiO ₂ (fused quartz)			0.49926	66.5	97.4	1.699	27.05	12.3	2.20 ^g	1.458
Dimethyl ether, (CH ₃) ₂ O			0.54778	59.4	82.9	—	38.89	—	248.7	—
Methane, CH ₄			0.62333	54.8	73.4	(2.417)	46.22	[64850]	0.4224[0.717]	111.7
Ethane, C ₂ H ₆			0.59861	55.8	75.7	(2.304)	45.47	[34035]	0.509[0.356] ^h	184.5 (1.038) ^h
Propane, C ₃ H ₈			0.58962	56.2	76.5	(2.262)	45.20	—	(1.879)	231.1
Isobutane, (CH ₃) ₂ CHCH ₃			0.58496	56.4	77.0	(2.239)	45.07	[16930]	[2.67]	261.42 [1000]
Octane, liquid, CH ₃ (CH ₂) ₆ CH ₃			0.57778	56.7	77.7	2.123	44.86	63.8	0.703	398.8
Paraffin wax, CH ₃ (CH ₂) _{n=23} CH ₃			0.57275	56.9	78.2	2.087	44.71	48.1	0.93	—
Nylon, type 6 ⁱ			0.54790	58.5	81.5	1.974	41.84	36.7	1.14	—
Polycarbonate (Lexan) ^j			0.52697	59.5	83.9	1.886	41.46	34.6	1.20	—
Polyethylene terephthalate (Mylar) ^k			0.52037	60.2	85.7	1.848	39.95	28.7	1.39	—
Polyethylene ^l			0.57034	57.0	78.4	2.076	44.64	=47.9	0.92-0.95	—
Polyimide film (Kapton) ^m			0.51264	60.3	85.8	1.820	40.56	28.6	1.42	—
Lucite, Plexiglas ⁿ			0.53937	59.3	83.0	1.929	40.49	=34.4	1.16-1.20	=1.40
Polystyrene, scintillator ^o			0.53768	58.5	81.9	1.936	43.72	42.4	1.032	1.581
Polytetrafluoroethylene (Teflon) ^p			0.47992	64.2	93.0	1.671	34.84	15.8	2.20	—
Polyvinyltoluene, scintillator ^q			0.54155	58.3	81.5	1.956	43.83	42.5	1.032	—
Aluminum oxide (Al ₂ O ₃)			0.40038	67.0	98.9	1.647	19.27	4.85	3.97	1.761
Barium fluoride (BaF ₂)			0.42207	92.0	145	1.303	9.91	2.05	4.89	1.56
Bismuth germanate (BGO) ^r			0.42065	98.2	157	1.251	7.97	1.12	7.1	2.15
Cesium iodide (CsI)			0.41569	102	167	1.243	8.39	1.85	4.53	1.80
Lithium fluoride (LiF)			0.46262	62.2	88.2	1.614	39.25	14.91	2.632	1.392
Sodium fluoride (NaF)			0.47632	66.0	98.3	1.69	29.87	11.68	2.558	1.236
Sodium iodide (NaI)			0.42697	94.6	151	1.305	9.49	2.59	3.67	1.775
Silica Aerogel ^s			0.52019	64	92	1.83	29.83	=150	0.1-0.3	1.0+0.25ρ
NEMA G10 plate ^t				62.6	90.2	1.87	33.0	19.4	1.7	—

Figur 1. Die Tabelle der atomaren und Kern-Eigenschaften wichtiger Materialien (Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov>)

16.2 Photonen

Wir unterscheiden “harte” (energiereicher als Röntgen-Strahlen) und “weiche” Photonen (energieärmer als Röntgen-Strahlen). Der Wirkungsquerschnitt in Materie als Funktion der Energie des einfallenden Photons ist in Abb. 2 zusammengefasst.

16.2.1 “Harte” Photonen ($E_\gamma > \text{KeV}$)

Wir betrachten verschiedene Prozesse als Funktion der Energiebereiche, bei denen der bestimmte Prozess beherrschend ist.

a) Der photoelektrische Effekt. $E_\gamma < \approx 100 \text{ keV}$

Das Photon wird an einem atomaren Elektron absorbiert und ein Elektron aus einer bestimmten Schale wird emittiert:

$$E_e = E_\gamma - \phi$$

wobei ϕ der **Bindungs-Energie** des Elektrons in dieser Schale entspricht. Der Wirkungsquerschnitt besitzt verschiedene Maxima für die verschiedenen Schalen.

b) Streuung. $\approx 100 \text{ keV} < E_\gamma < \approx 1 \text{ MeV}$

Bei diesem Prozess findet eine *inkohärente* Streuung des Photons an einem Elektron des Atoms statt. Der Prozess kann als Compton-Streuung $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$ an einem freien Elektronen dargestellt werden.

Der Wirkungsquerschnitt wird mit der QED berechnet und ist durch die sogenannte **Klein-Nishina-Gleichung** gegeben:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} \frac{1}{[1 + \gamma(1 - \cos\theta)]^2} \left(1 + \cos^2\theta + \frac{\gamma^2(1 - \cos\theta)^2}{1 + \gamma(1 - \cos\theta)} \right)$$

wobei $\gamma = E_\gamma/m_e$, r_e der **klassische Elektronradius** und θ der Streuwinkel des Photons ist. Es gilt,

$$r_e = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right) \approx 2,8 \text{ fm} \approx 2,8 \times 10^{-15} \text{ m}$$

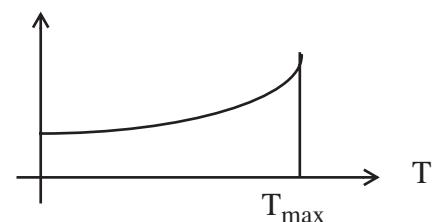
Die maximale kinetische Energie des gestossenen Elektrons ist gleich

$$T_{\max} = E_\gamma \frac{2\gamma}{1 + 2\gamma}$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt als Funktion der Energie des Elektrons ist gleich (durch Ersetzen in der Klein-Nishina-Gleichung):

$$\frac{d\sigma}{dT} = \frac{\pi r_e^2}{m_e \gamma^2} \left[2 + \frac{s^2}{\gamma^2(1-s)^2} + \frac{s}{1-s} \left(s - \frac{2}{\gamma} \right) \right]$$

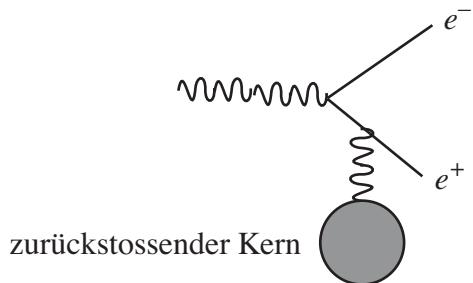
wobei $s = T/E_\gamma$. Der differentielle Wirkungsquerschnitt (d.h. die Verteilung der Energie des gestossenen Elektrons) hat ein Maximum bei $T = T_{\max}$.



c) Paar-Erzeugung. $E_\gamma > 2m_e \approx 1,02 \text{ MeV}$

Die Paar-Erzeugung dominiert, wenn die Energie des Photons über der Energieschwelle für die Erzeugung des Elektrons und Positrons ist.

Das Photon wird in ein Elektron-Positron-Paar zerfallen. Um die Energie und den Impuls zu erhalten, muss die Reaktion in Anwesenheit eines zurückstossenden Kerns stattfinden.



Bei höchsten Energien kann der Wirkungsquerschnitt des Prozesses durch den folgenden Ausdruck gegeben werden:

$$\sigma_{pair} \approx (4\alpha r_e^2) Z^2 \left(\frac{7}{9} \ln \frac{183}{Z^{1/3}} \right)$$

wobei Z die **Ordnungszahl des Targets** (der durchquerten Materie), und r_e der klassische Elektronradius ist.

d) Kern-Photoeffekt. sehr seltener Prozess

In diesem Prozess, der sehr selten ist verglichen mit den anderen Photonreaktionen, die oben erwähnt sind, wird das Photon vom Kern absorbiert. Neutronen werden oft nach der Reaktion emittiert ((γ, n) -Prozess). Der Wirkungsquerschnitt hat viele “Resonanz-Maxima”.

16.2.2 Strahlungslänge

Eine nützliche Definition ist die **Strahlungslänge** X_0 :

$$\frac{1}{X_0} \approx 4\alpha \left(\frac{\rho N_A}{A} \right) Z^2 r_e^2 \ln \frac{183}{Z^{1/3}}$$

wobei ρ die Dichte, N_A die Avogadro-Zahl und A die Massenzahl ist.
(Beachte, dass wie erwartet die Einheit der Strahlungslänge gleich der Einheit einer Länge ist).

Mit dieser Definition ist die Wahrscheinlichkeit P , dass ein Photon ein e^+e^- -Paar in einer Strahlungslänge erzeugt, gleich

$$P \approx \sigma_{Paar} \left(\frac{\rho N_A}{A} \right) X_0 \approx \frac{7}{9}$$

Damit ist der **mittlere freie Weg eines Photons** gleich

$$\lambda_{Paar} \approx \frac{9}{7} X_0$$

Die Strahlungslängen für verschiedene Materialien sind in Abb. 1 gezeigt.

Die experimentellen Resultate werden durch die folgende Beziehung gut gefittet:

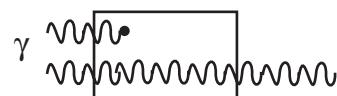
$$X_0 \approx \frac{716,4 \text{ gcm}^{-2} A}{Z(Z+1) \ln(287/\sqrt{Z})}$$

X_0 hängt von $\approx Z^{-2}$ ab ! Z.B. $X_0(H_2O) \approx 36 \text{ cm}$, $X_0(Pb) \approx 0,56 \text{ cm}$,
 $X_0(Fe) \approx 1,76 \text{ cm}$, $X_0(Al) \approx 8,9 \text{ cm}$

16.2.3 Abschwächungslänge

Wegen ihrer Wechselwirkungen werden die Photonen abgeschwächt.

Wir nehmen an, dass die Photonen, die wechselwirken, absorbiert werden. Die Photonen, die nicht wechselwirken, bleiben unverändert.



Als Funktion des durchquerten Weges x durch die Materie kann die Intensität der Photonen so ausgedrückt werden:

$$I(x) \equiv I_0 e^{-x/\lambda_{abs}} = I_0 e^{-\mu x}$$

wobei μ der **totale Absorptions-Koeffizient** ist:

$$\mu \approx \sigma_{tot} \left(\frac{\rho N_A}{A} \right) \approx (\sigma_{photoelektrisch} + \sigma_{Compton} + \sigma_{Paar}) \left(\frac{\rho N_A}{A} \right)$$

16.2.4 “Weiche” Photonen ($E_\gamma < \text{KeV}$)

Die beherrschenden Streuprozesse sind kohärente Effekte mit allen Elektronen der Atome (Thomson- und Rayleigh-Streuung).

Bei der kohärenten Streuung nehmen viele atomare Elektronen am Prozess teil. Wenn ein Prozess kohärent ist, kann der Wirkungsquerschnitt wegen konstruktiver Interferenz stark zunehmen.

Photonen

Wenn die Energie des Photons kleiner als ≈ 10 eV ist, spricht man vom **optischen Bereich** und verwendet **eine Wellengleichung**. Es folgt die Dispersions-Beziehung:

$$\omega^2 - \frac{k^2 c^2}{\epsilon} = 0 \quad \text{wobei} \quad E_\gamma = \hbar\omega$$

Die Materie (das Medium) wird durch die dielektrische Konstante charakterisiert, die von der Frequenz des Photons abhängt. Wenn $\epsilon(\omega)$ reell ist, werden die Photonen ein "durchsichtiges" Medium durchqueren. Ein komplexwertiges $\epsilon(\omega)$ entspricht Absorption.

Die Lichtgeschwindigkeit ist gleich

$$v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$$

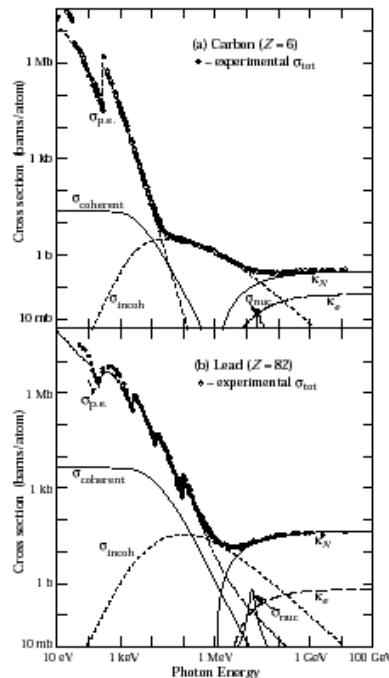


Figure 23.11: Photon total cross sections as a function of energy in carbon and lead, showing the contributions of different processes:

$\sigma_{\text{p.e.}}$ = Atomic photoeffect (electron ejection, photon absorption)

σ_{coherent} = Coherent scattering (Rayleigh scattering—atom neither ionized nor excited)

$\sigma_{\text{incoh.}}$ = Incoherent scattering (Compton scattering off an electron)

κ_{η} = Pair production, nuclear field

κ_e = Pair production, electron field

σ_{nuc} = Photonic absorption (nuclear absorption, usually followed by emission of a neutron or other particle)

From Hubbell, Gimm, and Øverbø, J. Phys. Chem. Ref. Data 9, 1023 (1980). Data for these and other elements, compounds, and mixtures may be obtained from <http://physics.nist.gov/PhysRefData>. The photon total cross section is assumed approximately flat for at least two decades beyond the energy range shown. Figures courtesy J.H. Hubbell (NIST).

Figur 2. Zusammenfassung des Wirkungsquerschnitts von Photonen in Kohlenstoff und Blei als Funktion der Energie des einfallenden Photons (Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov>).

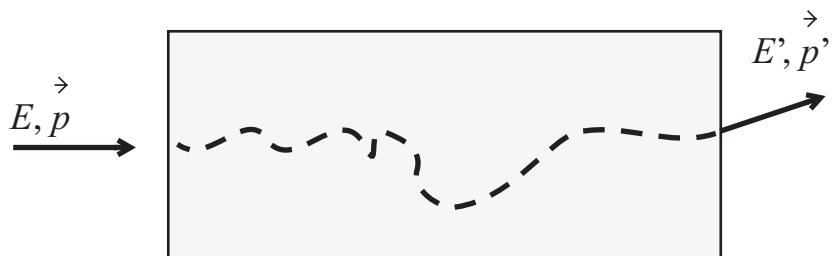
16.3 Geladene Teilchen

Wir betrachten z.B. die Ausbreitung von e^\pm, μ^\pm, π^\pm , Protonen, α -Teilchen, usw... in Materie.

Geladene Teilchen: elektromagnetische Wechselwirkungen mit Elektronen und Kernen (**Coulombsche-Streuung**).

Wir definieren die Eintritts- (Austritts-)Energie $E(E')$ und den Eintritts- (Austritts-)Impuls $\mathbf{p}(\mathbf{p}')$ des Teilchens:

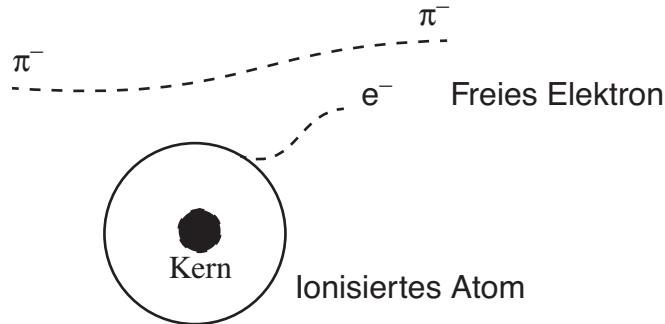
$$\boxed{\begin{array}{ll} E' = E - \Delta E & \Delta E = \text{Energieverlust} \\ \vec{p}' = \vec{p} + \Delta \vec{p} & \Delta \vec{p} \approx \text{Ablenkung} \end{array}}$$



Viele Wechselwirkungen (**Zusammenstöße**) zwischen dem Teilchen und der Materie sind für den Energieverlust und die Ablenkung des Teilchens verantwortlich. Man spricht deshalb oft von **statistischen Effekten**.

Die grundlegenden Prozesse können so klassifiziert werden:

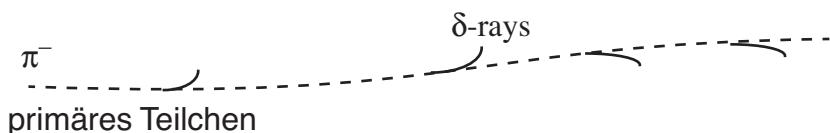
1. inelastischer Stoss mit atomaren Elektronen (Ionisierung oder Anregung)



Die notwendige Energie, um ein Elektron-Ion-Paar zu erzeugen, wird als W_i bezeichnet

Z.B. für Argon ist $W_i \approx 25$ eV, d.h. 40'000 freie Elektronen werden erzeugt, wenn der Energieverlust des einfallenden Teilchen gleich 1 MeV ist.

δ -rays: falls ein Stoss heftig ist (“hard knock-on”), kann das freie Elektron als sekundäres Teilchen mit seiner eigenen “Spur” beobachtet werden. Man spricht von δ -rays.



2. elastische Streuung an Kernen

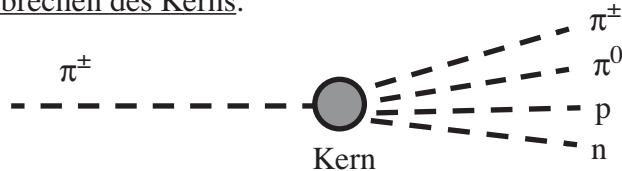
3. Strahlungsemission

(Cerenkov- oder Übergangs¹-Strahlung)

1. “Transition-Radiation”

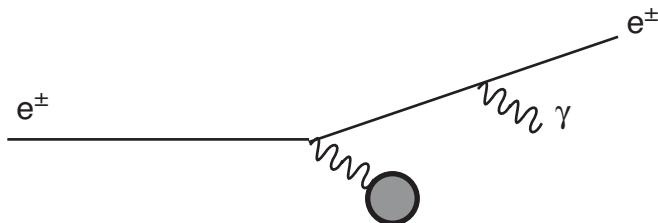
4. Inelastische starke Kernprozesse

Aufbrechen des Kerns:



mit Produktion von *sekundären* Teilchen.

5. Bremsstrahlung



16.3.1 Mittlerer Energieverlust

Wir betrachten die Ausbreitung von schweren geladenen Teilchen der Masse $M \gg m_e$.

Bethe (1930): Bethe-Bloch-Formel

Die Bethe-Bloch-Gleichung beschreibt den *mittleren Energieverlust eines Teilchens der Ladung z in einem Materiestück der Dicke dx* (gilt für $\beta > \approx 0.01$)

$$-\frac{dE}{dx} = (4\pi N_A r_e^2 m_e c^2) z \rho \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I^2} - \beta^2 - \frac{\delta}{2} \right]$$

1. T_{\max} ist die maximale kinetische Energie, die in einem Stoss an ein atomares Elektron abgegeben werden kann;

$$T_{\max} \approx 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$$

2. I ist die mittlere Anregungsenergie;
3. β ist die Geschwindigkeit des Teilchens und γ sein Lorentz-Faktor;
4. N_A ist die Avogadrozahl, Z die Ordnungszahl, A die Massenzahl, ρ die Dichte der durchquerten Matiere (des Targets); der Faktor $\rho N_A Z / A$ entspricht der Dichte der atomaren Elektronen.
5. δ entspricht einer Korrektur der Ionisierungsenergie wegen Dichteeffekten.
6. der Faktor $(4\pi N_A r_e^2 m_e c^2)$ ist gleich $0,307 \text{ MeV cm}^2/\text{g}$.

Wir bemerken, dass der Energieverlust nicht von der Masse des einfallenden Teilchens abhängt. Er hängt nur von der Geschwindigkeit des Teilchens ab mit charakteristischer Abhängigkeit:

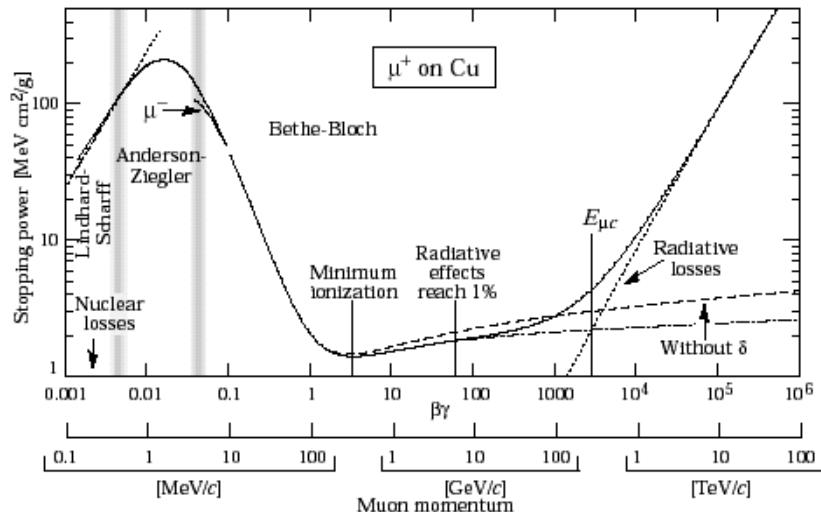
Wenn $\beta \rightarrow 0$ (nicht relativistisch), ist dE/dx zu β^{-2} proportional.

Wenn $\beta\gamma \approx 4$, hat dE/dx ein Minimum, den sogenannten MIP-Wert (**MIP=Minimum Ionizing Particle**). Numerisch gilt für eine Dichte ρ (in g/cm^3)

$$\left(\frac{dE}{dx} \right)_{\text{mip}} \Big/ \rho \approx (1 \div 2) \text{ MeV / (g / cm}^2 \text{)}$$

Wenn $\beta\gamma > 4$, nimmt dE/dx langsam zu (der **relativistische Anstieg**).

Der Energieverlust von positiven Myonen in Kupfer wird in Abb. 3 gezeigt.



Figur 3. "Stopping-Power" (mittleres dE/dx) als Funktion des Parameters $\beta\gamma$ des Teilchens (Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov>).

Die Bethe-Bloch-Gleichung beschreibt den Energieverlust mit guter Genauigkeit, wenn $\beta\gamma \approx 0.02$. Der Energieverlust von Pionen mit Energie zwischen 6 MeV und 6 GeV wird mit einer Genauigkeit von 1% vorausgesagt.

Wenn die Geschwindigkeit des Teilchens klein relativ zur Geschwindigkeit der atomaren Elektronen ist, ist die Bethe-Bloch-Gleichung nicht mehr verwendbar.

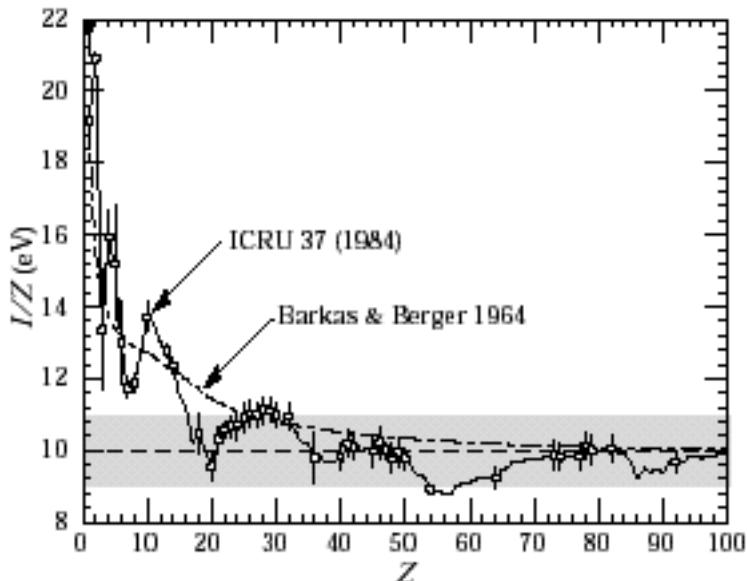
Wenn $\beta\gamma \approx 1000$, werden Strahlungsprozesse wichtig und der Energieverlust wird von der Bethe-Bloch-Gleichung unterschätzt.

Man wird oft die Dicke $X = \rho x$ (g/cm^2) verwenden, so dass

$$\left(\frac{dE}{dX} \right) \equiv \frac{1}{\rho} \left(\frac{dE}{dx} \right) \propto \frac{1}{\rho} \rho \left(\frac{N_A Z}{A} \right) \approx \text{Konst} \quad \text{weil} \quad \frac{Z}{A} \approx 0,5$$

Mittlere Anregungsenergie I. Dieser Energie-Parameter kann aus den experimentellen Daten gefittet werden. Er hängt von der Ordnungszahl ab. Die gemessene mittlere Anregungsenergie als Funktion der Ordnungszahl wird in Abb. 4 gezeigt. Es gilt,

$$I(Z) \approx \begin{cases} 19.2 & \text{für } H_2\text{-Gas} \\ (10 \pm 1)Z & \text{für } Z > 15 \end{cases}$$



Figur 4. Die gemessene mittlere Anregungsenergie als Funktion der Ordnungszahl Z (Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov>).

Korrektur zum relativistischen Anstieg. Diese Korrektur wird durch den δ -Faktor eingeführt.

In Materialien mit hoher Dichte wird das Medium wegen des elektrischen Feldes des einfallenden Teilchens polarisiert. Diese Polarisation wird das E-Feld teilweise abschirmen. Als Folge erwarten wir weniger Stöße mit Elektronen, die weit “entfernt” sind. Der Energieverlust im relativistischen Bereich wird unterdrückt.

Tatsächlich,

$$\text{Gase: } \left(\frac{dE}{dx} \right)_{\beta \rightarrow \infty} \approx 1,5 \times \left(\frac{dE}{dx} \right)_{mip}$$

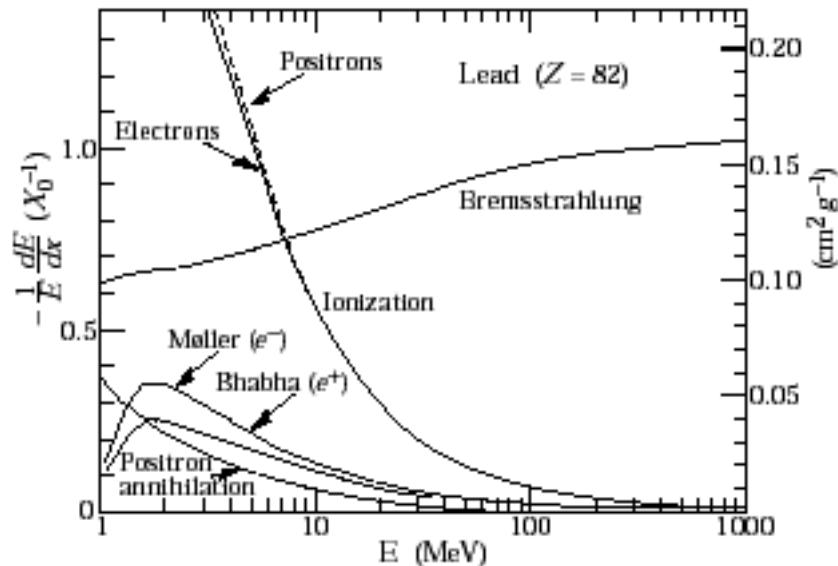
$$\text{Festkörper, Flüssigkeit: } \left(\frac{dE}{dx} \right)_{\beta \rightarrow \infty} \approx (1,05 \div 1,10) \times \left(\frac{dE}{dx} \right)_{mip}$$

Der genaue Betrag der Korrektur hängt von Materialeigenschaften (Leiter, nicht Leiter, usw...) ab.

16.3.2 Mittlerer Energieverlust der Elektronen

Wenn wir die Ausbreitung von Elektron in Materie betrachten, müssen wir immer zwei Prozesse beachten (Siehe Abb. 5):

$$\left(\frac{dE}{dx} \right)_{e^\pm} \approx \left(\frac{dE}{dx} \right)_{\text{Bremsstrahlung}} + \left(\frac{dE}{dx} \right)_{\text{Ionisierung}}$$



Figur 5. Energieverlust geteilt durch die Energie der Elektronen und Positronen im Blei als Funktion der Energie (Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov>).

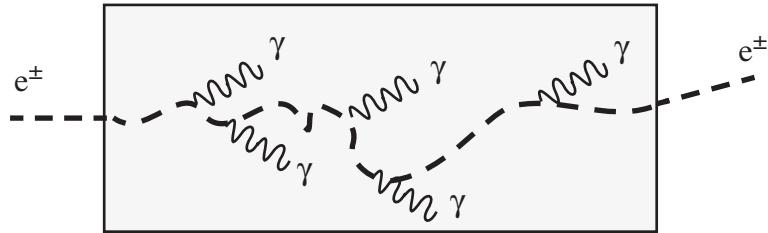
Der Energieverlust durch Ionisierung kann mit Hilfe der Bethe-Bloch-Gleichung berechnet werden.

Der Bremsstrahlungsprozess von Elektronen und Positronen (Siehe Abb. 6) kann mit der QED berechnet werden:

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{Bremsstrahlung}} = 4\alpha N_A \rho \frac{Z^2}{A} r_e^2 E \ln\left(\frac{183}{Z^{1/3}}\right) \equiv \frac{E}{X_0}$$

wobei X_0 die schon definierte *Strahlungslänge* ist. Bei zunehmender Energie, wird er den Energieverlust schnell dominieren, z.B. im Blei schon für $E_{e\pm} > \approx 10 \text{ MeV}$.

Geladene Teilchen



Figur 6. Skizze des Bremsstrahlungsprozesses von Elektronen und Positronen in Materie.

Wenn wir den Ionisationsenergieverlust vernachlässigen, erhalten wir

$$-\left(\frac{dE}{E}\right) \approx \frac{dx}{X_0} \quad \Rightarrow \quad E(x) = E_0 e^{-x/x_0}$$

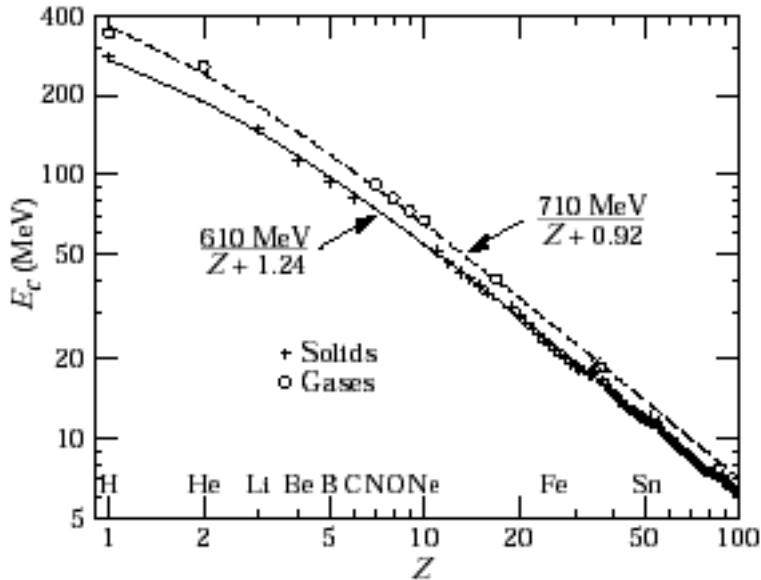
und damit ist die Strahlungslänge gleich der Dicke, bei der die Energie des Elektrons um einen Faktor e reduziert wird.

Kritische Energie E_c : die kritische Energie wird so definiert:

$$R(E_c) \equiv \frac{\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{Bremstrahlung}}}{\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{Ionisierung}}} \approx 1 \quad \text{Kritische Energie}$$

d.h. wenn $E_{e\pm} > E_c$, wird der Bremsstrahlungsprozess vorherrschen.
wenn $E_{e\pm} < E_c$, wird der Ionisationsenergieverlust dominieren.

Numerisch: $E_c(\text{Kohlenstoff}) \approx 100 \text{ MeV}$, $E_c(\text{Al}) \approx 47 \text{ MeV}$, $E_c(\text{Fe}) \approx 24 \text{ MeV}$, $E_c(\text{Pb}) \approx 6,9 \text{ MeV}$ (Siehe Abb. 7).



Figur 7. Kritische Energie als Funktion der Ordnungszahl Z für Festkörper und Gase (Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov>).

16.3.3 Mittlerer Energieverlust der Myonen

Bremsstrahlung von Myonen: Im Bremsstrahlungsprozess ist die Wahrscheinlichkeit, ein Photon zu emittieren, zum Faktor

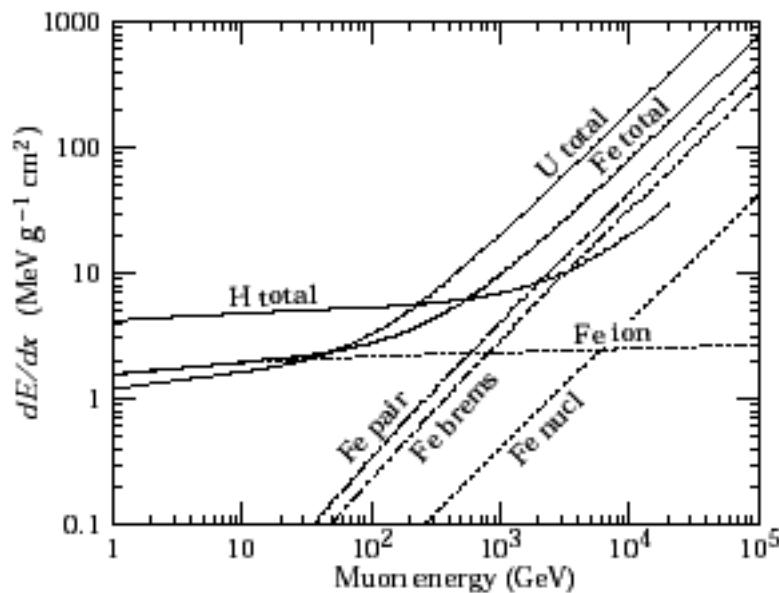
$$\left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2$$

proportional. Damit ist z.B. die Wahrscheinlichkeit der Bremsstrahlung für Myonen viel kleiner als für Elektronen:

$$\propto \left(\frac{m_e}{m_\mu} \right)^2 \approx \frac{1}{40000} !$$

Für Myonen ist Bremsstrahlung für $E_\mu > \approx 1000 \text{ GeV}$ nicht mehr vernachlässigbar.

Siehe Abb. 8.



Figur 8. Mittlerer Energieverlust eines Myons als Funktion der Myonenergie.

16.3.4 “Straggling” des Energieverlusts

Die Bethe-Bloch-Gleichung liefert den *mittleren* Energieverlust. Der Energieverlust eines gegebenen Teilchens wird tatsächlich von **statischen Fluktuationen** abhängen.

Wenn die Dicke der durchgequerten Materie so gross ist, dass die Anzahl von Stößen zwischen dem Teilchen und den ato-

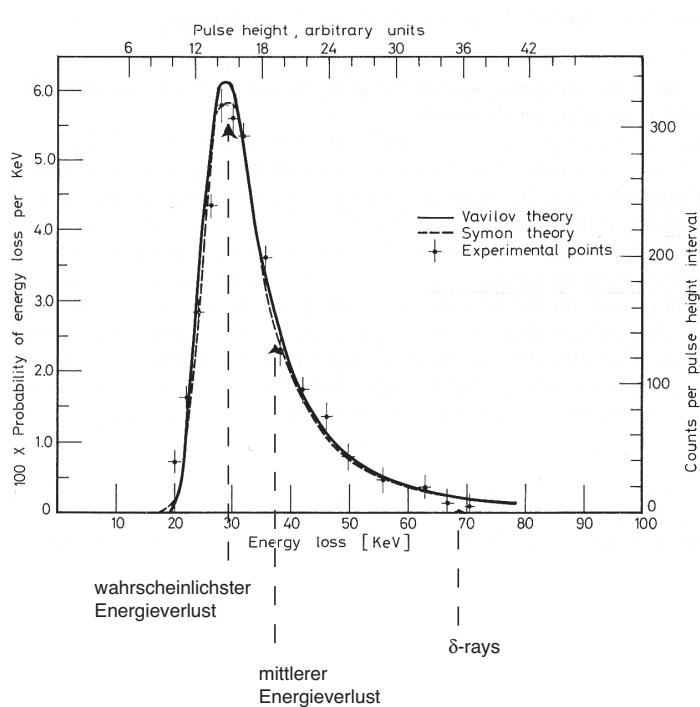
| *maren Elektronen sehr gross ist, wird der Energieverlust eine Gauss-Verteilung besitzen.*

Für dünne Absorber wird der Energieverlust eine **Landau-Vavilov-Verteilung** besitzen.

Eine Landau-Vavilov Verteilung wird in Abb. 9 geplottet. Man beobachtet eine klare Maximum und das asymmetrische Verhalten der Verteilung mit einem langen “Landau-tail”.

Der “Landau-tail” entspricht seltenen Stößen, bei denen ein grosser Energie-Impuls-Austausch zwischen dem einfallenden Teilchen und der Materie stattgefunden hat. Solche Stößen sind oft von δ -Rays begleitet.

Der **wahrscheinlichste Energieverlust** und der **mittlere Energieverlust** sind auch gezeigt. Der *mittlere* Energieverlust entspricht dem Wert, der mit der Bethe-Bloch-Gleichung erhalten wird.



Figur 9. Landau-Vavilov-Verteilung.

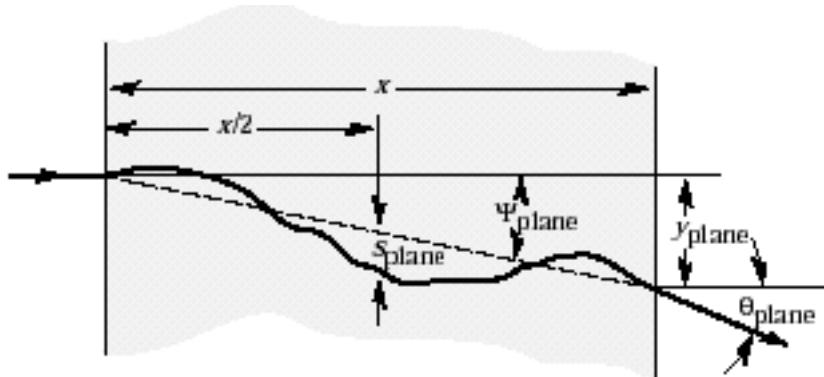
16.3.5 Vielfach-Streuung (“Multiple scattering”)

Wenn ein geladenes Teilchen Materie durchquert, wird es in vielen kleinen Winkeln abgelenkt (Siehe Abb. 10).

Coulombsche Streuung an Kernen ist für diesen Effekt verantwortlich und deshalb wird diese resultierende Ablenkung als **Coulombsche Vielfach-Streuung** bezeichnet.

Die Molière-Theorie beschreibt den Effekt gut. Für kleine Ablenkungen verhält sich die Winkelverteilung wie eine Gauss-Verteilung. Für

grosse Ablenkungen wird sich der Effekt wie die Rutherford-Streuung verhalten. Als Folge ist die Verteilung des Streuwinkels wie eine Gauss-Verteilung (98% der Fälle) mit längeren Schwänzen (in 2% der Fälle) verteilt.



Figur 10. Ablenkung eines Teilchens in Materie (Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov>).

In der Praxis wird die Gauss-Näherung verwendet und man definiert die Standardabweichung (“Root-Mean-Square”, RMS) der Winkelverteilung als

$$\theta_{Ebene}^{RMS} = \frac{1}{\sqrt{2}} \theta_{Raum}^{RMS} \equiv \theta_0$$

wobei θ_{Ebene} der auf eine Ebene projizierte Winkel und θ_{Raum} der 3-dimensionale Streuwinkel ist (Siehe Abb. 10). Es folgt daraus, dass die Verteilung des projizierten Winkels (θ_{Ebene}) und des nicht-projizierten Winkels (θ_{Raum}) ungefähr die folgenden sind:

$$\frac{1}{2\pi\theta_0^2} e^{-(\theta_x^2 + \theta_y^2)/2\theta_0^2} d\theta_x d\theta_y \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta_0} e^{-\theta_{Ebene}^2/2\theta_0^2} d\theta_{Ebene}$$

wobei x, y zwei zur Bewegungsrichtung des Teilchens senkrechte Achsen sind und.

$$\theta_{Raum}^2 \approx \theta_x^2 + \theta_y^2$$

Die Breite der Streuwinkelverteilung nach einer Strecke x in Materie ist gleich

$$\theta_0 \approx \frac{13,6 \text{ MeV}}{\beta c p} z \sqrt{\frac{x}{X_0}}$$

wobei z die Ladung des Teilchens, β die Geschwindigkeit, p der Impuls und X_0 die Strahlungslänge ist.

Die Vielfachstreuung hängt vom inversen Impuls ab. Bei höheren Impulsen ist die Streuung weniger stark. Für eine Dicke gleich 1 X_0 und $p=1 \text{ GeV}/c$ ist der Streuwinkel $\theta_0 \approx 14 \text{ mrad} \approx 1 \text{ Grad}$.

16.3.6 Strahlungsemision

Ein Teilchen wird **Cerenkov-Strahlung** emittieren, wenn seine Geschwindigkeit β im Medium, durch welches es sich ausbreitet, grösser als die Lichtgeschwindigkeit β_C in diesem Medium ist.

Cerenkov-Schwelle:

$$\beta_C = \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$$

wobei n die **Brechzahl des Mediums** ist.

Wenn das Teilchen eine Geschwindigkeit $\beta > \beta_C$ hat, wird die Cerenkov-Strahlung in einen **Cerenkov-Kegel** der Öffnung θ_C emittiert, wobei

$$\cos \theta_C = \frac{1}{\beta n}$$

Im Allgemeinen wird ein kontinuierliches Spektrum von Photonen in den optischen Bereich emittiert (ein durchsichtiges Medium wird verwendet).

Der Energieverlust ist klein relativ zum Ionisationsverlust:

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_c \approx 10^{-3} \text{ MeVg}^{-1}\text{cm}^2$$

Der Prozess trägt zum Energieverlust eines Teilchens in Materie nicht sehr viel bei, wird aber in Detektoren verwendet.