Martin Ennemoser

Übungsaufgabe – Arithmetik mit Matrizen

Wir erweitern unseren arithmetischen Taschenrechner und erlauben nun Arithmetik auf Matrizen auszuführen.

1. Was ist eine Matrix?

Eine Matrix ist einfach gesagt eine Menge an Zahlen, welche in eine Tabelle geschrieben werden. Wie bei Vektoren werden Matrizen mit Buchstaben benannt. Die Benennungs-Konvention ist, dass der Name einer Matrix ein Großbuchstabe ist.

Das Layout einer Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & \dots \\ a21 & a22 & a23 & \dots \\ a31 & a32 & a33 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Die Größe einer Matrix wird durch ihre Anzahl an Zeilen und Spalten bestimmt. Die Größe einer Matrix wird also gelesen als Zeilen x Spalten.

Beispiele für Matrizen und ihre Größen:

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 6 \\ 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ eine 3x3 Matrix

$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ eine 3x2 Matrix

$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ eine 2x3 Matrix

Wie auch Vektoren lassen sich Matrizen addieren, subtrahieren und multiplizieren, jedoch nicht dividieren.

2. Addition

Man nimmt die Zahlen an der jeweils gleichen Position und addiert diese. Matrizen lassen sich nur addieren wenn sie die gleiche Größe haben.

Beispiel:

Gegeben seien 2 3x4 Matrizen $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 2 \\ 8 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 8 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

Die Summe beider Matrizen ist eine neue Matrix C:

$$C = \begin{pmatrix} 11 & 6 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 14 & 5 \\ 10 & 14 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

2. Subtraktion:

Funktioniert analog zur Addition. Man nimmt die Zahlen an der jeweils gleichen Position und subtrahiert diese. Matrizen lassen sich nur subtrahieren wenn sie die gleiche Größe haben.

Beispiel:

Gegeben seien 2 3x4 Matrizen$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 2 \\ 8 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 8 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

Die Summe beider Matrizen ist eine neue Matrix C:

$$C = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 & 0 \\ -4 & -5 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Multiplikation:

Die Multiplikation ist etwas komplizierter. Man nimmt die Zeilen der ersten Matrix und multipliziert sie mit den Spalten der Zweiten.

Die funktioniert aber nur, wenn die Größen der Matrizen kompatibel sind. Kompatibel sind sie dann, wenn die Spaltenanzahl der ersten Matrix mit der Zeilenanzahl der zweiten Matrix übereinstimmt.
Die Größe der resultierenden Matrix bestimmt sich dann durch die Anzahl an Zeilenanzahl der ersten Matrix x Spaltenanzahl der Zweiten.

Also: eine nxm Matrix multipliziert mit einer lxk Matrix funktioniert nur dann, wenn m gleich groß wie l ist. Die resultierende Matrix hat eine Größe nxk.

Beispiele:

Gegeben seien zwei Matrizen $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 2 \\ 8 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 6 \\ 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$. A hat eine Größe 3x4 und B hat eine Größe 4x2. Da die Anzahl Spalten von Matrix A gleich der Anzahl Spalten von Matrix B ist (nämlich 4), sind diese multiplizierbar. Das Ergebnis ist eine 3x2 Matrix.

Das bedeutet unsere Ergebnis-Matrix hat folgende Form:

$$C = \begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \\ a31 & a32 \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation folgt einem Muster, welches wir anhand eines Beispiels durchrechnen.

Gegeben seien 2 3x4 Matrizen $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 2 \\ 8 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 6 \\ 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$.

1. Wir starten mit allen Zeilen der ersten Matrix und fixieren die erste Spalte der zweiten Matrix.

1.1 Man nimmt die erste Zeile von $A\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ und multipliziert sie mit der ersten Spalte von B $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Die Multiplikation wird durchgeführt, wie bei Vektoren und ergibt auch hier einen Zahlenwert:

$$4 * 7 + 2 * 5 + 5 * 2 + 3 * 5 = 63$$

Dieser Wert wird in die erste Zeile und ersten Spalte in unserer Ergebnis-Matrix geschrieben:

$$C = \begin{pmatrix} 63 & a12 \\ a21 & a22 \\ a31 & a32 \end{pmatrix}$$

1.2 Als nächstes nimmt man die zweite Zeile von A $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ und multipliziert sie mit der ersten Spalte von B $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$:

$$1 * 7 + 1 * 5 + 6 * 2 + 2 * 5 = 34$$

Dieser Wert wird in die zweite Zeile und ersten Spalte in unserer Ergebnis-Matrix geschrieben:

$$C = \begin{pmatrix} 63 & a12 \\ 34 & a22 \\ a31 & a32 \end{pmatrix}$$

1.3 Als nächstes nimmt man die dritte Zeile von A $\begin{pmatrix} 8 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ und multipliziert sie mit der ersten Spalte von B $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$:

$$8 * 7 + 9 * 5 + 7 * 2 + 8 * 5 = 155$$

Dieser Wert wird in die dritte Zeile und ersten Spalte in unserer Ergebnis-Matrix geschrieben:

$$C = \begin{pmatrix} 63 & a12 \\ 34 & a22 \\ 155 & a32 \end{pmatrix}$$

Wir sind nun mit der ersten Spalte unserer Ergebnis-Matrix fertig.

2. Als nächstes müssen wir die zweite Spalte befüllen. Dafür nehmen wir alle Zeilen der ersten Matrix und fixieren die zweite Spalte der zweiten Matrix.

2.1 Man nimmt die erste Zeile von A $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ und multipliziert sie mit der zweiten Spalte von B $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$. Die Multiplikation wird durchgeführt, wie bei Vektoren und ergibt auch hier einen Zahlenwert:

$$4 * 7 + 2 * 5 + 5 * 2 + 3 * 5 = 63$$

Dieser Wert wird in die erste Zeile und zweiten Spalte in unserer Ergebnis-Matrix geschrieben:

$$C = \begin{pmatrix} 63 & 77 \\ 34 & a22 \\ 155 & a32 \end{pmatrix}$$

2.2 Als nächstes nimmt man die zweite Zeile von A $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ und multipliziert sie mit der zweiten Spalte von B $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$:

$$1 * 4 + 1 * 6 + 6 * 5 + 2 * 8 = 56$$

Dieser Wert wird in die zweite Zeile und zweiten Spalte in unserer Ergebnis-Matrix geschrieben:

$$C = \begin{pmatrix} 63 & 77 \\ 34 & 56 \\ 155 & 185 \end{pmatrix}$$

2.3 Als nächstes nimmt man die dritte Zeile von A $\begin{pmatrix} 8 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ und multipliziert sie mit der zweiten Spalte von B $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$:

$$8 * 4 + 9 * 6 + 7 * 5 + 8 * 8 = 185$$

Dieser Wert wird in die dritte Zeile und zweiten Spalte in unserer Ergebnis-Matrix geschrieben:

$$C = \begin{pmatrix} 63 & 77 \\ 34 & 56 \\ 155 & 185 \end{pmatrix}$$

Unsere Ergebnis-Matrix C ist also eine 3x2 Matrix, die wie folgt aussieht:

$$C = \begin{pmatrix} 63 & 77 \\ 34 & 56 \\ 155 & 185 \end{pmatrix}$$

4. Implementierung

Die Implementierung der Matrix Klasse ist ähnlich der Vektor Klasse. Es muss wieder von Type geerbt werden und die Methoden müssen entsprechend implementiert werden.

5. Hinweis

Die Implementierung der arithmetischen Operatoren ist ähnlich derer von Vektoren. Die Komplexität ist jedoch etwas höher, da hier mit verschachteten Schleifen gearbeitet werden muss. Vor allem die Multipliation ist komplizierter.