Nama : Elisabeth Gelu

NIM : 24010119130038

Teori Aproksimasi

TULISKKAN 5 TEOREMA TERKAIT POLINOMIAL CHEBYSHEV DAN BUKTIKAN

1. Teorema 1

   $U_n(x)$ didefinisikan sebaga$U_{n+2}(x) = 2xU_{n+1}(x) - U_n(x)$i . Maka, untuk semua bilangan bulat k dan bilangan bulat nonnegative n, kita mempunyai identitas

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}=n} \prod_{i=1}^{k+1} U_{a_i}(x) = \frac{1}{2^k \cdot k!} U_{n+k}^{(k)}(x)$$

   Dengan jumlah dari semuanya terletak pada semua koordinat bilangan bulat nonnefatig dimensi $k+1$ $(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1})$ sehingga $a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1} = n$.

   Bukti.

   Kita lihat $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$ dan $U_{n+2}(x) = 2xU_{n+1}(x) - U_n(x)$.

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n\right]$$

   dan

$$U_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left[\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^{n+1} + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^{n+1}\right]$$

   Kita bisa membuat fungsi pembangkit dari $T(x)$ dan $U(x)$

$$G(t,x) = \frac{1-xt}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x) \cdot t^n$$

   dan

$$F(t,x) = \frac{1}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x) \cdot t^n$$

   Dari $F(t,x)$ kita dapatkan

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = \frac{2t}{(1-2xt+t^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_{n+1}^{(n)}(x) \cdot t^{n+1}$$

$$\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x^2} = \frac{2! \cdot (2t)^2}{(1-2xt+t^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_{n+1}^{(2)}(x) \cdot t^{n+2}$$

$$\frac{\partial^k F(t,x)}{\partial x^k} = \frac{k! \cdot (2t)^k}{(1-2xt+t^2)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} U_{n+k}^{(k)}(x) \cdot t^{n+k}$$

(1)

   $U_n(x)$ adalah polinomial berderajat n.

   Kita bisa dapatkan

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{a_1+\cdots+a_{k+1}=n} U_{a_1}(x)\cdot U_{a_2}(x)\cdot \cdots \cdot U_{a_{k+1}}(x)\right)\cdot t^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)\cdot t^n\right)^{k+1}$$

$$= \frac{1}{(1-2xt+t^2)^{k+1}} = \frac{1}{k!\cdot(2t)^k}\frac{\partial^k F(t,x)}{\partial x^k} = \frac{1}{2^k\cdot k!}\sum_{n=0}^{\infty} U_{n+k}^{(k)}(x)\cdot t^n$$

Disamakan koefisien dari t^n pada kedua sisi, maka kita dapatkan identitas

$$\sum_{a_1+\cdots+a_{k+1}=n} U_{a_1}(x)\cdot U_{a_2}(x)\cdot \cdots \cdot U_{a_{k+1}}(x) = \frac{1}{2^k\cdot k!}U_{n+k}^{(k)}(x). \blacksquare$$

(Zhang, W., 2002. On Chebyshev polynomials and Fibonacci numbers. *Fibonacci Quarterly*, *40*(5), pp.424-428.)

2. Teorema

Dengan kondisi dari teorema 1, kita punya

$\sum_{a_1+\cdots+a_{k+1}=n+2k+2}\prod_{i=1}^{k+1}(a_i+1)\,U_{a_i}(x) = \frac{1}{2^{2k+1}\cdot(2k+1)!}\sum_{h=0}^{k+1}(-1)^h\binom{k+1}{h}U_{n+4k+3-2h}^{(2k+1)}(x)$

dimana $\binom{k}{h} = \frac{k!}{h!(k-h)!}$

Bukti.

Dikalikan bukti (1) pada teorema 1 dengan $(1-xt)^{k+1}$ memberikan

$$\frac{(1-xt)^{k+1}}{(1-2xt+t^2)^{k+1}} = \frac{1}{2^k\cdot k!}\sum_{n=0}^{\infty} U_{n+k}^{(k)}(x)\cdot t^n(1-xt)^{k+1}$$

Kita lihat bahwa

$$(1-xt)^{k+1} = \sum_{h=0}^{k+1}(-x)^h t^h\binom{k+1}{h}$$

Dengan membandingkan koefisien dari t^{n+k+1} dari kedua sisi persamaan, kita dapatkan teoremanya dan terbukti. $\blacksquare$

(Zhang, W., 2002. On Chebyshev polynomials and Fibonacci numbers. *Fibonacci Quarterly*, *40*(5), pp.424-428.)

3. Teorema

Jika terdapat fungsi rasional Chebyshev $R_m(y)$, maka $R_m(y)$ memenuhi persamaan rekursif

$$R_m(y) = 2\frac{y-1}{y+1}R_{m-1}(y) - R_{m-2}(y), m = 2,3,\ldots$$

dengan

$$R_0(y) = 1 \; dan \; R_1(y) = \frac{y-1}{y+1}$$

Bukti.

Diberikan fungsi rasional Chebyshev

$$R_m(y) = \cos mt\,, m = 0,1,2,\ldots$$

Dengan

$$y = (\cot\frac{t}{2})^{2}$$

Dikeatuhi rumus dasar trigonometri sebagai berikut

$$2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$$

Jika $a = (m-1)t$ dan $b = t$, maka rumus dasar trigonometri tersebut dapat ditulis kembali dalam bentuk berikut

$$2\cos(m-1)\,t\cos t = \cos\big((m-1)+1\big)t + \cos\big((m-1)-1\big)t = \cos(m-2)t$$

$$\cos mt = 2\cos t\cos(m-1)t - \cos(m-2)t = 2R_1(y)\big(R_{m-1}(y)\big) - R_{m+2}(y)$$

$$R_m(y) = 2\frac{y-1}{y+1}R_{m-1}(y) - R_{m-2}(y), m = 2,3,\ldots \blacksquare$$

(FARIKHIN, FARIKHIN, and WIDOWATI WIDOWATI. *FUNGSI RASIONAL CHEBYSHEV DAN APLIKASINYA PADA APROKSIMASI FUNGSI*. Diss. Faculty Of Science and Mathematics, 2013.)

4. Teorema

Untuk $|t| < 1$, ekspansi binomial dari $\left(1 - te^{i\theta}\right)^{-\mu}$ dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{1}{(1-te^{i\theta})^{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\mu)}{n!\,\Gamma(\mu)}t^{n}e^{in\theta}$$

Bukti.

Kita punya Lemma

$$\frac{1}{(1-z)^{\beta+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+\beta}{n}z^{n}$$

Untuk $z = te^{i\theta}$ dan $\beta + 1 = \mu$ diperoleh

$$\frac{1}{(1-te^{i\theta})^{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+\mu-1}{n}\left(te^{i\theta}\right)^{n} = \frac{(n+\mu-1)(n+\mu-2)\ldots(\mu+1)\mu}{n!}\times\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu)}t^{n}e^{in\theta}$$

$$= \frac{(n+\mu-1)(n+\mu-2)\ldots(\mu+1)\mu\,\Gamma(\mu+1)}{n!\,\Gamma(\mu)}t^{n}e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\mu)}{n!\,\Gamma(\mu)}t^{n}e^{in\theta}$$

Jadi Terbukti bahwa

$$\frac{1}{(1-te^{i\theta})^{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\mu)}{n!\,\Gamma(\mu)}t^{n}e^{in\theta}\,.\ \blacksquare$$

(2)

5. Teorema

Untuk nilai $|t| < 1$ maka persamaan berikut berlaku

$$-\ln\left(1-te^{in\theta}\right)\mu=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}{n+1}$$

Bukti.

Dari persamaan (2) pada teorema 4, diperoleh

$$\frac{1}{(1-te^{i\theta})^{\mu}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\mu)}{n!\,\Gamma(\mu)}t^{n}e^{in\theta}$$

Kedua ruas diintergralkan terhadap $te^{i\theta}$ untuk $\mu=1$

Substitusikan $u=1-te^{i\theta}$, maka diperoleh hasil integrasi ruas kiri persamaan (2) adalah

$$\int\frac{1}{1-te^{i\theta}}d\left(te^{i\theta}\right)=-\int\frac{1}{u}du=-\ln u+c=-\ln\left(1-te^{i\theta}\right)+c$$

Sedangkan hasil integrasi ruas kanan persamaan (2) adalah

$$\int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\mu)}{n!\,\Gamma(\mu)}t^{n}e^{in\theta}\,d(\,te^{i\theta})$$

$$=\int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{n}!}{n!\,\Gamma(1)}t^{n}e^{in\theta}d\left(te^{i\theta}\right)$$

$$=\int\sum_{n=0}^{\infty}\left(te^{i\theta}\right)^{n}d\left(te^{i\theta}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(te^{i\theta}\right)^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}{n+1}$$

Terbukti bahwa

$$-\ln\left(1-te^{in\theta}\right)\mu=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}{n+1}.\ \blacksquare$$

(Nastiti,Siti Ayu Setia. 2012.*FUNGSI PEMBANGKIT DARI POLINOMIAL CHEBYSHEV BERDASARKAN EXPANSI BINOMIAL* $\left(1-te^{i\theta}\right)^{-\mu}$. Skripsi Matematika FMIPA UI : Depok)