Calcolo delle Probabilità e Statistica
Variabili Aleatorie Discrete

Ionel Eduard Stan[1]

[1]Dip. di Matematica e Informatica, Università di Ferrara ioneleduard.stan@unife.it

In molti modelli probabilistici, i risultati sono numerici (e.g., i valori di mercato). In altri esperimenti, i risultati non sono numerici, ma possono essere associati a valori numerici di interesse. Per esempio, se l'esperimento è la selezione di studenti da una popolazione, potremmo considerare la loro media ponderata. Quando abbiamo valori numerici, è spesso utile assegnare delle probabilità a questi valori. Questo può essere fatto attraverso il concetto di *variabile aleatoria*.

Definizione 1 (Variabile aleatoria)**.** *Sia Ω lo spazio campionario. Una variabile aleatoria* (random variable, *in inglese) X è una funzione:*

$$X : \Omega \to \mathbb{R}.$$

♦

Definizione 2 (Variabile aleatoria discreta)**.** *Una variabile aleatoria X si dice* discreta *se il suo codominio è finito o contabile.* ♦

Anche se ancora non abbiamo definito formalmente cos'è una variabile aleatoria continua, possiamo elencare delle proprietà generiche sulle variabili aleatorie (sia discrete che continue). Partendo da un modello probabilistico di un esperimento:

- Una variabile aleatoria è una funzione a valori reali del risultato dell'esperimento.
- Una funzione di una variabile aleatoria è anch'essa una variabile aleatoria.

- Possiamo associare a ciascuna variabile aleatoria certe "medie" di interesse, come la media e la varianza.

- Una variabile aleatoria può essere condizionata su un evento o su un'altra variabile aleatoria.

- Esiste la nozione di indipendenza di una variabile aleatoria da un evento o da un'altra variabile aleatoria.

La maniera più importante di caratterizzare una variabile aleatoria è attraverso le probabilità dei valori che può assumere.

Definizione 3 (Funzione di probabilità di massa)**.** *Sia X una variabile aleatoria discreta. Se x è uno dei possibili valori di X, la* funzione di probabilità di massa *(*probability mass function*, in inglese), o semplicemente PMF, denotata con $p_X(x)$, è la probabilità dell'evento $\{X = x\}$ di tutti i risultati che danno luogo ad un valore di X pari a x:*

$$p_X(x) = P(\{X = x\}).$$

♦

Inoltre, in questi blocchi, useremo le lettere maiuscole $X, Y, Z, \ldots$ per indicare le variabili aleatorie, e useremo le lettere minuscole $x, y, z, \ldots$ per indicare i numeri reali come i valori numerici delle variabili aleatorie.

Per calcolare una certa PMF $p_X(x)$ si collezionano tutti i risultati che formano l'evento $\{X = x\}$, e poi sommiamo le loro probabilità per ottenere $p_X(x)$.

Definizione 4 (Funzione di probabilità cumulativa)**.** *Sia X una variabile aleatoria discreta. Se x è uno dei possibili valori di X, la* funzione di distribuzione cumulativa *(*cumulative distribution function*), o semplicemente CDF, denotata con $F_X(x)$, è la probabilità dell'evento $\{X \leq x\}$, cioè:*

$$F_X(x) = P(\{X \leq x\}) = \sum_{k \leq x} p_X(k).$$

♦

Diamo alcune proprietà sulla CDF.

- F_X è monotonicamente non decrescente:

$$x \leq y \Rightarrow F_X(x) \leq F_X(y).$$

- F_X tende a 0 per $x \to -\infty$, e tende a 1 per $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1.$$

- Se X è discreta, allora $F_X(x)$ è una funzione costante a tratti di x.

- Se X è discreta e ha valori interi, la PMF e la CDF si può ottenere l'una dall'altra sommando o sottraendo:

$$\begin{aligned} F_X(k) &= \textstyle\sum_{i=-\infty}^{k} p_X(i), \\ p_X(k) &= P(\{X \le k\}) - P(\{X \le k-1\}) = F_X(k) - F_X(k-1), \end{aligned}$$

  per $k \in \mathbb{N}$.

Definizione 5 (Funzione di probabilità di massa congiunta)**.** *La* funzione di probabilità di massa congiunta *(*joint PMF*, in inglese), o semplicemente PMF congiunta,* $p_{X,Y} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0,1]$ *per due variabili aleatorie* X *e* Y *è definita come:*

$$p_{X,Y}(x,y) = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}).$$

Dunque, la PMF marginale di Y *è* $P(\{Y = y\}) = \sum_x p(x,y)$*, e:*

$$P(\{X = x\} \mid \{Y = y\}) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{P(\{Y = y\})}. \qquad \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

♦

Esempio 1. Un trader di azioni in borsa compra 100 azioni A e 200 azioni B. Siano X e Y il cambio di prezzo di A e B, rispettivamente, in un certo periodo di tempo, e assumiamo che la PMF congiunta di X e Y sia uniforme sugli insiemi delle x e delle y che soddisfano:

$$-2 \le x \le 4, \qquad -1 \le y - x \le 1.$$

i) Trovare le PMF marginali e i valori attesi di X e di Y.

ii) Trovare il valore atteso del profitto del trader.

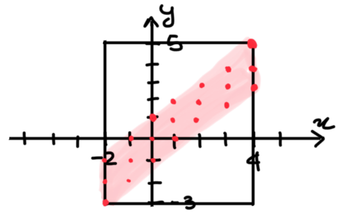
◊

x: $-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$

$-1 \leq y - x \leq 1 \rightarrow -3 \leq y \leq 5$

y: $-3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

$R = \{ \quad \} \quad |R| = 21$



$$\mathbb{P}_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/21 & \text{se } x,y \in R \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$P_X\{x\} = \begin{cases} 3/21 & \text{se } -2 \leq x < 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

P

$$\mathbb{E}\{X\} = \sum x \cdot f_X(x) = -2 \cdot \frac{3}{21} + -1\frac{3}{21} + 0\frac{3}{21} + 1\frac{3}{21} + 2\frac{3}{21} + 3\frac{3}{21} + 4\frac{3}{21}$$

$$= -\frac{6}{21} - \frac{3}{21} + \frac{3}{21} + \frac{6}{21} + \frac{9}{21} + \frac{12}{21}$$

$$= 1$$

$$\mathbb{P}_Y(y) = \begin{cases} 1/21 & y = 5 \text{ o } y = -3 \\ 2/21 & y = 4 \text{ o } = -2 \\ 3/21 & -2 \leq y \leq 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \mathbb{E}\{Y\} = 1$$

ii) $P = \{\text{profitto}\}$

$$\mathbb{E}\{P\} = 100X + 200Y$$

$$= 100\,\mathbb{E}\{X\} + 200\,\mathbb{E}\{Y\}$$

$$= 300$$

Definizione 6 (Funzione di probabilità cumulativa congiunta)**.** *La funzione di probabilità cumulativa congiunta (*joint CDF*, in inglese)* $F_{X,Y} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0,1]$ *per due variabili aleatorie X e Y è definita come:*

$$F_{X,Y}(x,y) = P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}).$$

♦

Definizione 7 (Variabili aleatorie indipendenti)**.** *Due variabili aleatorie X e Y si dicono* indipendenti *(*independent*, in inglese) se, per tutte le $x, y \in \mathbb{R}$, abbiamo che:*

$$p_{X,Y}(x,y) = P(\{X = x\})P(\{Y = y\}),$$

oppure, equivalentemente, che:

$$P(\{X = x\} \mid \{Y = y\}) = P(\{X = x\}).$$

♦

Definizione 8 (Funzioni di variabili aleatorie)**.** *Se $Y = g(X)$ è una* funzione della variabile aleatoria X*, allora Y è anch'essa una variabile aleatoria, siccome ha un valore numerico per ciascun risultato.* ♦

Esempio 2. Sia X una variabile aleatoria che prende valori in $[0,9] \subset \mathbb{N}$ con probabilità $\frac{1}{10}$. Trovare:

i) la PMF della variabile aleatoria $Y = X \bmod 3$.

ii) la PMF della variabile aleatoria $Y = 5 \bmod (X+1)$.

◊

n : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

i) $f_Y(y) = \sum_{x \mid x \bmod 3 = y} f_X(x) \leftarrow$ sommatoria della PMF di tutte le x per cui $x \bmod 3 = y$

$$\left.\begin{aligned}
f_Y(0) &= f_X(0) + f_X(3) + f_X(6) + f_X(9) = \frac{4}{10} \\
f_Y(1) &= f_X(1) + f_X(4) + f_X(7) = \frac{3}{10} \\
f_Y(2) &= f_X(2) + f_X(5) + f_X(8) = \frac{3}{10}
\end{aligned}\right\} + = 1$$

Definizione 9 (Valore atteso)**.** *Il* valore atteso *(*expected value *oppure* expectation*, in inglese) di una variabile aleatoria X che ha PMF p_X è definito come:*

$$E[X] = \sum_x p_X(x).$$

♦

Definizione 10 (Valore atteso per funzioni di variabili aleatorie)**.** *Sia X una variabile aleatoria con PMF p_X, e sia $g(X)$ una funzione di X. Allora, il* valore atteso della variabile aleatoria $g(X)$ *è dato da:*

$$E[g(X)] = \sum_x g(x)p_X(x).$$

♦

Proposizione 1 (Linearità del valore atteso)**.** *Siano $X_1, \ldots, X_n$ variabili aleatorie qualsiasi, e sia $h(X_1, \ldots, X_n)$ una* funzione lineare*. Allora, abbiamo che:*

$$E[h(X_1, \ldots, X_n)] = h(E[X_1], \ldots, E[X_n]).$$

□

Proposizione 2. *Per due variabili aleatorie indipendenti X e Y, abbiamo che:*

$$E[XY] = E[X]E[Y].$$

□

Definizione 11 (Varianza)**.** *La* varianza *(*variance*, in inglese) $var(X)$ di una variabile aleatoria X è definita come:*

$$var(X) = E[(X - E[X])^2] = \sum_x (x - E[X])^2 p_X(x),$$

che è sempre non negativa. La radice quadrata è definita come σ_X ed è chiamata deviazione standard*.* ♦

Proposizione 3. *Sia X una variabile aleatoria qualsiasi, allora abbiamo che:*

$$var(X) = E[X^2] - E[X]^2.$$

□

In generale, ci sono tante quantità che possiamo associare ad una variabile aleatoria. Definiamo come l'*n-esimo momento* della variabile aleatoria X il valore atteso di X^n, cioè $E[X^n]$. Ad esempio, il *primo momento* è il valore atteso.

Esempio 3. Sia X la variabile aleatoria discreta con PMF:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{a} & \text{se } x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

i) Trovare a e $E[X]$.

ii) Qual'è la PMF della variabile aleatoria $Z = (X - E[X])^2$?

iii) Usando il risultato *ii)*, trovare la varianza di X.

iv) Trovare la varianza di X usando la formula

$$var(X) = \sum_x (x - E[X])^2 p_X(x).$$

x: -3 -2 -1 0 1 2 3

◊

i): $a = ?$

$$\sum_{x=-3}^{3} p_X(x) = 1$$

$$\frac{9}{a} + \frac{4}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{4}{a} + \frac{9}{a} = 1$$

$$\frac{28}{a} = 1 \rightarrow a = 28$$

$$E\{X\} = \sum x \cdot p_X(x)$$

$$= 0$$

ii) $z = (X - E\{X\})^2$

$$P_z(z) = \frac{z}{14}$$

iii) $\mathrm{var}\{X\} = \mathbb{E}\{z\} = 7$

iiii) $\mathrm{var}\{X\} = 7$

Esempio 4. Siano a e b interi positivi tale che $a \leq b$, e sia X la variabile aleatoria che prende come valori, con la stessa probabilità, le potenze di 2 nell'intervallo $[2^a, 2^b]$. Trovare $E[X]$ e $var(X)$. $\Diamond$

Definizione 12 (Variabile aleatoria di Bernoulli)**.** *Si consideri il lancio di una moneta, che ha come probabilità p di uscire testa, e $1 - p$ di uscire croce. La* variabile aleatoria di Bernoulli *(*Bernoulli random variable*, in inglese) X è definita come:*

$$X = \begin{cases} 1 & \textit{se testa,} \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

La sua PMF è:

$$p_X(x) = \begin{cases} p & \textit{se } x = 1, \\ 1 - p & \textit{se } x = 0. \end{cases}$$

Diciamo che X ha la distribuzione di Bernoulli *(*Bernoulli distribution*, in inglese) con parametro p, in simboli $X \sim \mathcal{BER}(p)$, $E[X] = p$, e $var(X) = p(1-p)$.* ◆

Definizione 13 (Variabile aleatoria binomiale)**.** *Si consideri n lanci successivi di una moneta. In ciascun lancio, la probabilità di avere testa è p e di avere croce è $1 - p$. Sia X il numero di teste nei n lanci. Diciamo che X è una* variabile aleatoria binomiale *(*binomial random variable*, in inglese) con parametri n e p. La sua PMF è:*

$$p_X(k) = P(\{X = k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

per $k = 0, 1, \ldots, n$. Diciamo che X ha la distribuzione binomiale *(*binomial distribution*, in inglese) con parametri n e p, in simboli $X \sim \mathcal{BIN}(n, p)$, $E[X] = np$, e $var(X) = np(1-p)$.* ◆

Si poteva dare una definizione alternativa di variabile aleatoria binomiale: siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ delle variabili aleatoria indipendenti e identicamente distribuite la cui distribuzione è quella di Bernoulli con parametri p, cioè $X_i \sim \mathcal{BER}(p)$, per tutte le $i = 1, \ldots, n$, la variabile aleatoria

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

conta il numero di teste in una sequenza di n lanci di una moneta.

Definizione 14 (Variabile aleatoria geometrica)**.** *Supponiamo di lanciare ripetutamente e in maniera indipendente una moneta che ha probbilità p di uscire testa, con $0 < p < 1$. La* variabile aleatoria geometrica *(*geometric random variable*, in inglese) è il numero X di lanci necessaria per ottenere testa per la prima volta. La sua PMF è:*

$$p_X(k) = (1-p)^{k-1} p,$$

per $k = 1, 2, \ldots$. *Diciamo che* X *ha la* distribuzione geometrica *(*geometric distribution*, in inglese) con parametro* p*, in simboli* $X \sim \mathcal{GEOM}(p)$*,* $E[X] = \frac{1}{p}$*, e* $var(X) = \frac{1-p}{p^2}$*.* ♦

Esempio 5. Due monete sono lanciate simultaneamente finché una è testa e l'altra è croce. La prima moneta ha probabilità p di uscire testa, e la seconda ha probabilità q di uscire testa. Tutti i lanci sono indipendenti.

i) Trova la PMF, valore atteso e varianza del numero di lanci.

ii) Qual'è la probabilità che l'ultimo lancio della prima moneta ~~è~~ sia testa?

◊

(T, C)

$\mathbb{P}(U)$: {probabilità che la prima esca Testa} = p

$\mathbb{P}(S)$ · {probabilità che la seconda esca testa} = q

i) $\mathbb{P}(HC, CH) = p(1-q) + q(1-p)$

Definizione 15 (Variabile aleatoria di Poisson)**.** *Una* variabile aleatoria di Poisson *(*Poisson random variable*, in inglese) X ha PMF:*

$$p_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},$$

per $k = 0, 1, 2, \ldots$*, dove* λ *è un parametro positivo che caratterizza la PMF. Diciamo che* X *ha la* distribuzione di Poisson *(*Poisson distribution*, in inglese) con parametro* λ*, in simboli* $X \sim \mathcal{POIS}(\lambda)$*,* $E[X] = \lambda$*, e* $var(X) = \lambda$*.* ♦

Per avere un'intuizione della variabile aleatoria di Poisson, si pensi ad una variabile aleatoria binomiale con parametri p molto piccolo e n molto grande. Per esempio, sia X il numero di errori di battitura in un libro che ha n parole. Allora X è binomiale, ma siccome la probabilità p che una qualche parola sia scritta male è molto piccola, X può essere modellata anche con la PMF di Poisson: sia p la probabilità di ottenere testa lanciando una moneta, e associamo una parola mal scritta con il lancio della moneta il cui esito è testa. Più formalmente, la PMF di Poisson con parametro λ è una buona approssimazione per la PMF della binomiale con parametri n e p, cioè:

$$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \approx \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k},$$

per $k = 0, 1, \ldots, n$, assumendo che $\lambda = np$, n molto grande, e p molto piccolo; solitamente per $n > 100$ e $np < 10$.

Esempio 6. Supponiamo di andare ad una festa con 500 invitati. Qual'è la probabilità che esattamente un altro ospite ha lo stesso giorno di compleanno? Si calcoli in maniera esatta e in maniera approssimata usando la PMF di Poisson. (Per semplicità, si escludano i compleanni del 29 Febbraio). ♢

Esempio 7 (La regola della moltiplicazione per PMF condizionali)**.** Siano X, Y e Z variabili aleatorie.

i) Mostrare che:

$$p_{X,Y,Z}(x, y, z) = p_X(x) p_{Y|X}(y \mid x) p_{Z|X,Y}(z \mid x, y).$$

ii) Generalizzare al caso con più di tre variabili aleatorie.

$\Diamond$

Esempio 8. Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite con distribuzione geometrica con parametro p, cioè $X, Y \sim \mathcal{GEOM}(p)$. Mostrare che:

$$P(\{X = i\} \mid \{X + Y = n\}) = \frac{1}{n-1},$$

con $i = 1, \ldots, n-1$. $\Diamond$