Calcolo delle Probabilità e Statistica

Esercizi di Elementi di Probabilità

Ionel Eduard Stan[1]

[1]Dip. di Matematica e Informatica, Università di Ferrara ioneleduard.stan@unife.it

Esempio 1. In una classe di studenti, il 60% sono geni, il 70% amano il cioccolato, e il 40% sono geni e amano il cioccolato. Determinare la probabilità che uno studente scelto casualmente sia né genio e né amante di cioccolato. $\mathbb{P}(N) = ?$ ◊

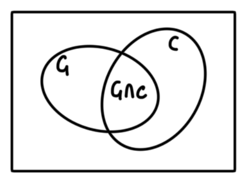
$\mathbb{P}(G) = 0.6 \quad \mathbb{P}(C) = 0.7 \quad \mathbb{P}(G \cap C) = 0.4$

$\mathbb{P}(N) = 1 - \mathbb{P}(G \cup C)$

$\mathbb{P}(G \cup C) = \mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(G \cap C) = 0.6 + 0.7 - 0.4$

$= 0.9$

$= 1 - 0.9 = 0.1$



.

Esempio 2. Un dado a sei facce è stato truccato tale che le facce pari hanno il doppio delle probabilità di uscire rispetto alle facce dispari. Tutte le facce pari hanno la stessa probabilità, e lo stesso vale per quelle dispari. Costruire un experimento probabilistico per un singolo lancio di questo dado e trovare la probabilità che il risultato sia più piccolo di 4. $\Diamond$

P : {evento che escano facce pari}

D : {evento che escano facce dispari}

$\mathbb{P}(P) = \frac{2}{3}$ $\mathbb{P}(D) = \frac{1}{3}$

E = {il risultato è minore di 4} = $\{1, 2, 3\}$

la probabilità che esca un dato valore è:

$\mathbb{P}\{1\} = \mathbb{P}\{3\} = \mathbb{P}\{5\} = a$ $\mathbb{P}\{2\} = \mathbb{P}\{4\} = \mathbb{P}\{6\} = b$

$2a = b$

$1 = 3a + 3b$

$1 = 3a + 6a$

$1 = 9a$

$a = \frac{1}{9}$ $b = 2a = \frac{2}{9}$

$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(1 \cup 2 \cup 3) = \mathbb{P}(1) + \mathbb{P}(2) + \mathbb{P}(3) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$

Esempio 3. Un dado a quattro facce è lanciato ripetutamente, finché il primo numero pari è ottenuto; si noti che si potrebbe non ottenere mai un numero pari in questo esperimento. Qual'è lo spazio campionario di questo esperimento? $\diamond$

$\{a_1, a_2, \dots, a_n, b\}$ dove $a_i \in \{1,3\}$ $\forall i$ e $b = \{2,4\}$

Esempio 4. Lanciamo due dadi a sei facce equi. Ciascuno dei 36 possibili risultati hanno la stessa probabilità.

i) Trovare la probabilità di avere come risultato dei doppioni.

ii) Dato che il risultato del lancio ha come somma 4 o meno, trovare la probabilità condizionata di avere come risultato dei doppioni.

iii) Trovare la probabilità che almeno un dado sia un 6.

iv) Dato che i due dadi hanno come risultato numeri diversi, trovare la probabilità condizionata che almeno un dado sia un 6.

◊

$\mathbb{P}(i) = \{\text{probabilità di avere dei doppioni}\} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

1,1	2,1	3,1	4,1	5,1	6,1
1,2	2,2	3,2	4,2	5,2	6,2
1,3	2,3	3,3	4,3	5,3	6,3
1,4	2,4	3,4	4,4	5,4	6,4
1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
1,6	2,6	3,6	4,6	5,6	6,6

$\mathbb{P}(ii) = 2/6 = \frac{1}{3}$

$= \mathbb{P}(i \mid 4) = \frac{\mathbb{P}(i \cap 4)}{\mathbb{P}(4)}$

$\mathbb{P}(i \cap 4) = \frac{2}{36}$

$\mathbb{P}(4) = \frac{6}{36}$

$= \frac{2/36}{6/36} = \frac{2}{36} \cdot \frac{36}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\mathbb{P}(iii) = \{(6,6)\} \cup \{(6,i),(i,6)\} \quad i = 1,\dots,5$

$= \frac{1}{36} + \left(\frac{5}{36} + \frac{5}{36}\right) = \frac{11}{36}$

$\mathbb{P}(6 \mid D) = \frac{\mathbb{P}(6 \cap D)}{\mathbb{P}(D)}$

$\mathbb{P}(6 \cap D) = \frac{10}{36}$

$\mathbb{P}(D) = 1 - \mathbb{P}(i) = 1 - \frac{1}{6} = 5/6$

$= \frac{10/36}{5/6} = \frac{\cancel{10}^{2}}{\cancel{36}_{6}} \cdot \frac{\cancel{6}^{1}}{\cancel{5}_{1}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Esempio 5. Una moneta viene lanciata due volte. Alice afferma che l'evento di avere due teste è a almeno altrettanto probabile se sappiamo che il primo lancio è una testa che se sappiamo che almeno uno dei lanci è una testa. Ha ragione? Esiste qualche differenza se la moneta è equa oppure no? ◊

A = {il primo lancio e' una testa}

B = {almeno uno dei due lanci e' una testa}

C = {entrambi i lanci danno testa}

$\mathbb{P}(C|A) = \mathbb{P}(C|B)$?

$\Omega = \{TT, TC, CC, CT\}$

$\mathbb{P}(C|A) = \frac{\mathbb{P}(C\cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{2} = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(C|B) = \frac{\mathbb{P}(C\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$

<u>NO</u>

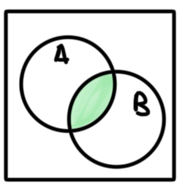
Per vedere se c'è differenza in caso di moneta non equa sarebbe stato opportuno svolgere il problema così:

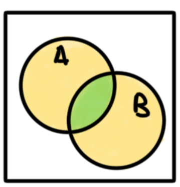
A = {il primo lancio e' una testa}

B = {il secondo lancio e' testa}

$\mathbb{P}$ {due teste sapendo che la prima e' testa} $= \mathbb{P}(A\cap B|A)$

$\mathbb{P}$ {due teste sapendo che almeno uno dei lanci e' testa} $= \mathbb{P}(A\cap B|A\cup B)$





$\mathbb{P}(A\cap B|A) = \mathbb{P}(A\cap B|A\cup B)$?

$\mathbb{P}(A\cap B|A) = \frac{\mathbb{P}((A\cap B)\cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$

$\mathbb{P}(A\cap B|A\cup B) = \frac{\mathbb{P}((A\cap B)\cap(A\cup B))}{\mathbb{P}(A\cup B)} = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A\cup B)}$

$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A\cup B)$

Esempio 6. Siano A e B eventi. Dimostrare che $P(A \cap B \mid B) = P(A \mid B)$, assumendo che $P(B) > 0$. $\Diamond$

$$\mathbb{P}(A \cap B \mid B) = \frac{\mathbb{P}((A \cap B) \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Esempio 7. Alice e Bob vogliono scegliere tra andare all'opera oppure al cinema lanciando una moneta equa. Sfortunatamente, l'unica moneta disponibile non è equa (anche se la non equità non si sa esattamente). Come possono usare la moneta non equa per prendere una decisione tale che ciascuna delle opzioni (opera o cinema) abbia la stessa probabilità? ♢

Se CT opera
Se TC cinema

Se risultati diversi, lanciare altre due volte

Esempio 8 (Problema del compleanno)**.** Si consideri n persone ad una festa. Assumiamo che ciascuna persona abbia la stessa probabilità di essere nata in qualsiasi giorno dell'anno, indipendente dagli altri, e ignoriamo gli anni bisisteli (i.e., nessuna persona è nata il 29 Febbraio). Quale è la probabilità che ciascuna persona ha un compleanno diverso? $\diamondsuit$

365 giorni totali

la prima persona ha probabilita $\frac{365}{365}$ di essere nata in un giorno non occupato, la seconda ha $\mathbb{P}$ $\frac{364}{365}$, ..., l'n-esima ha $\mathbb{P}$ $\frac{365-n}{365}$

$$\mathbb{P} = \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(365-i)}{365^i}$$