Projet de Programmation Numérique

ARRONDI STOCHASTIQUE POUR LE CALCUL SCIENTIFIQUE

Par Yizhi Yang, Chun Qi, Yutai Zhao et Lisa Taldir, Emilie Mboussa et Adel Liot
Sous l'encadrement de Pablo Oliveira, El Medhi El Arar et Devan Sohier

Table des matières

1 Introduction

Introduire une brève introduction sur l'arrondi stochastique où on raconte que fl(x) = $\lfloor x \rfloor$ avec proba p et $\lceil x \rceil$ avec proba 1-p (où p est défini ci-dessous).

2 Etude de l'algorithme d'exponentiation

Posons maintenant p = $\frac{\lceil x \rceil - x}{\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor}$ et supposons que nos variables aléatoires sont indépendantes. Commençons par regarder $fl(x^n)$ puis $\mathbb{E}[fl(x^n)]$ pour n = 2 et 3.

Pour n = 2, on a trois possibilités (à permutations près) qui sont les suivantes :

$$fl(x^2) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor^2 \text{ avec probabilité } p^2 \\ \lfloor x \rfloor * \lceil x \rceil \text{ avec probabilité } 2p(1-p) \\ \lceil x \rceil^2 \text{ avec probabilité } (1-p)^2 \end{cases}$$

Ainsi, $\mathbb{E}[fl(x^2)] = (\lfloor x \rfloor p)^2 + \lfloor x \rfloor * \lceil x \rceil * 2p(1-p) + (\lceil x \rceil (1-p))^2 =$

De même pour n = 3, on a quatres possibilités (toujours à permutations près) qui sont les suivantes :

$$fl(x^3) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor^3 \text{ avec probabilité } p^3 \\ \lfloor x \rfloor^2 * \lceil x \rceil \text{ avec probabilité } 3p^2(1-p) \\ \lfloor x \rfloor * \lceil x \rceil^2 \text{ avec probabilité } 3p(1-p)^2 \\ \lceil x \rceil^3 \text{ avec probabilité } (1-p)^3 \end{cases}$$

A travers ces deux exemples, on remarque l'apparition du binôme de Newton. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[fl(x^n)] = x^n$.
Pour cela, montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[fl(x^n)] = ...$

Grâce à ce résultat, ...